جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الرابعة عام رياضيات

المادة : (تطبيقية 11) هيدروديناميكا

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الأول 2022-2023

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة عامة

الميكانيكا النظرية كما نعلم هي العلم الذي يدرس ابسط الأشكال الميكانيكية للحركة والتفاعلات بين الأجسام المادية وهي لم تأخذ في الحسبان كثير من الخواص الحقيقية وتستعمل مفهوم النقطة المادية ومجموعة النقط المادية كفروض تجريدية .

والمجموعة المادية من الممكن أن تكون غير متصلة وهي المكونة من نقط مادية منفصلة أو تكون متصلة مكونة من أشياء موزعة توزيعا متصلا بمعني أن الوسط المتصل هو ذلك الوسط الذي فيه توزيع دوال الكثافة والكتلة وجميع الخواص الطبيعية للوسط تكون دوالا متصلة كلها وتسمي الميكانيكا النظرية في هذه الحالة بميكانيكا الوسط المتصل وهي العلم الذي يدرس حركة الأجسام الصلبة والتي تملأ الفراغ بصورة متصلة بدون انقطاع والمسافات بين النقط أثناء الحركة سوف تتغير .

ومن ابسط الأمثلة علي الوسط المتصل هو الوسط الغير متغير أو الجسم المتماسك وكمثال أكثر عمومية للوسط المتصل في الميكانيكا هي الأجسام القابلة للتشكل (اللدنة أو المرنة) وكذلك الأجسام المائعة والغازية . فرع الميكانيكا النظرية الذي يدرس حركة مثل هذه الصور من الأوساط المتصلة يسمي بميكانيكا الأوساط المتصلة (Continuum Mechanics).

وميكانيكا الموائع (Fluid Mechanics) وهو تخصص فرعي من ميكانيكا الأوساط المتصلة هو العلم الذي يدرس ميكانيكا السوائل والغازات أو بمعني آخر هو العلم الذي يدرس الموائع في الحركة والسكون ويعتمد أساسا علي نفس المبادئ المستخدمة في ميكانيكا المواد الصلبة وهذا

التعبير في الفترة الأخيرة أصبح أكثر شيوعا ثم بدل بالتعبير المستعمل " هيدروديناميكا " شاملا كلا من ميكانيكا الموائع وميكانيكا الغازات وبالخصوص الهواء وكلمة هيدروديناميكا مشتقة من كلمة Hydro اليونانية التي تعني الماء . ويدرس هذا التخصص السلوك الفيزيائي الخاص بالموائع مثل السرعة والضغط والكثافة ودرجة الحرارة واللزوجة ومعدل التدفق ....الخ. .

والتطور الكبير الذي حدث في مجال الطيران ولد شغفا كبير بمسائل التأثير المتبادل بين الهواء والأجسام المتحركة فيه (وهي نظرية المراوح والأجنحة).

وحركة الأجسام في الهواء في وجود هذا التأثير المتبادل وهو علم ديناميكا الطيران وهكذا ظهر علم الايروميكانيكا Aeromechanics .

والتعمق في دراسة حركة الموائع القابلة للانضغاط (الغازات) اوجد في حيز الوجود علم ديناميكا الغازات وبتطبيق نتائج هذا الفرع الجديد علي علم الطيران والصواريخ وضع أساس لعلم جديد هو الأيروثيرموديناميكا Aerothermodynamics والذي من خلاله الآن تفهم الميكانيكا والميكانيكا الحرارية للغازات التي تسير بسرعات فوق صوتية (كبيرة) وهيبرصوتية (الفضائية).

وقد ظهرت تطبيقات حسابية حديثة لإيجاد حلول للمشاكل المتصلة بميكانيكا الموائع ويسمي التخصص المعني بذلك بديناميكا الموائع الحسابية Computational Fluid Dynamics .

إن أهمية ميكانيكا الموائع تتضح تماما عندما نفكر في الدور الذي تلعبه في حياتنا اليومية . ففي مجال التكييف والتبريد هناك الماء المثلج الذي يضخ خلال المواسير. والهواء البارد الذي يدفع بواسطة المراوح خلال مجاري الهواء لتكييف المنازل والكهرباء التي نستخدمها وطرق توليدها من المساقط المائية التي تدفع الماء خلال والتوربينات والتي تولد الطاقة الكهربية . أو من الطاقة الحرارية من البخار الذي يدفع خلال والتوربينات البخارية لتوليد الطاقة الكهربية وسيارتنا التي

نقودها الإطارات الهوائية تعطي التعليق ، الوقود يضخ عبر أنابيب ... بل أن حياتنا اليومية تعتمد علي الموائع . فسريان الدم في أوردتنا وشرايينا هو عملية ميكانيكا الموائع .

وهكذا نرى الأهمية الكبرى والخاصة بدراسة علم ميكانيكا الموائع

والله الموفق،،،،،

د/ رمضان عبد الله محمد

الباب الأول
كينماتيكا المائع
Kinematics of Fluid

مقدمة :

يعتبر علم الهيدروديناميكا من العلوم النظرية ومن العلوم التطبيقية معا ويختص هذا العلم بدراسة حركة الموائع . وفي دراسة الهيدروديناميكا لابد من توضيح الخواص التي تلعب دورا مهما والخواص الأقل أهمية والخواص التي لا تؤثر علي الإطلاق علي الحركة وهذا ضروري للحصول علي ابسط الحلول للمشاكل التطبيقية .

ومن المعروف أن جميع المواد تتحمل تشويهات **Deformations** تحت تأثير القوي وهذا التشويه يسمي مرن **Elastic** إذا اختفي بعد إزالة تأثير القوي ويسمي صلب **Plastic** إذا احتفظ بنفسه بعد إزاحة القوي ويسمي انسياب **Flow** إذا استمر التشويه يزداد بدون حد تحت تأثير القوي مهما كانت صغيرة . وتعرف الموائع بأنها مواد قادرة علي الانسياب وعلي التشكل بشكل الأوعية المحتوية لها ولا تظل الموائع ساكنة إذا أثرت عليها قوي مماسية ولجميع الموائع قابلية ولو ضئيلة للانضغاط ولكنها جميعها لا تقاوم أي تغيير في الشكل .

وتنقسم الموائع إلي غازات وسوائل و الموائع قد تكون مؤينة أو غير مؤينة والسوائل عمليا غير قابلة للانضغاط أما الغازات فهي قابلة للانضغاط وان كانت في بعض الأحيان يمكن اعتبارها في

السرعات الصغيرة غير قابلة للانضغاط وتتمدد أي كتلة غازية لتملأ كافة أجزاء الوعاء المحتوي لها .

(٢) مجالات الدراسة فى ديناميكا الموائع :-

توجد أعداد هائلة من المشاكل يهتم بها العاملون في مجال ديناميكا الموائع في الوقت الحاضر وفيما يلي بعض هذه المشاكل :

١- تحديد الشغل الأمثل لأجسام الطائرات فائقة السرعة والسفن بكافة أنواعها وإشكالها والصواريخ والقذائف والغواصات .

٢- مسائل تحديد الشكل الأمثل لمكونات المحركات النفاثة والتوربينات .

٣- التصميم الأمثل لخطوط نقل الماء والبترول وغيرها من المواد السائلة وكذلك أيضا نقل الحبوب والأتربة ومساحيق المواد الصلبة الداخلة في الصناعة في مواسير باستخدام الشفط .

٤- خصائص الحركة المعتمدة علي الزمن للغازات المصحوبة بتفاعلات كيميائية كتلك التي تحدث عند الاحتراق في الهواء أو داخل المحركات والآلات .

٥- الانفجارات وما تصاحبها من تغير في خواص الوسط الذي يحدث فيه الانفجار سواء كان الانفجار عاديا أو نوويا .

٦- خصائص الحركة الموجية في الأنهار والبحار وكيف يمكن الاستفادة من طاقة أمواج البحار .

٧- خصائص حركة الموائع في الأوساط المسامية وكيفية الاستفادة منها عند تصميم السدود أو البحث عن البترول أو المياه الجوفية .

٨- خصائص حركة الهواء في الغلاف الجوي وكيف يمكن استخدامها في إجراء التنبؤات الجوية لمدة قصيرة وطويلة بأكبر قدر ممكن من الدقة .

٩- تفسيرات أدق للكثير من الظواهر الكونية مثل تكوين الضباب والسحب الكونية وانفجار واحتراق النجوم وتركيب وتطور الكون .

١٠- تحديد الوسائل التي يمكن التحكم بها في الأعاصير وتغيير اتجاه الريح .

١١- مشاكل حصر البلازما والتي قد تصل درجة حرارتها إلي عدة ملايين .

١٢- مشاكل التحكم في التفاعلات النووية وطريقة الانتفاع من الطاقة النووية .

ويهتم الباحثون في مجال ديناميكا الموائع بدراسة المشاكل السابقة دراسة نظرية في حدود التطبيق العملي .

(٣) المداخل المختلفة لوصف الموائع :

يوجد مدخلان أساسيان للنظر إلي حركة الموائع وهما :

١- اعتبار الموائع أوساطا متصلة وفيها تهمل الفراغات بين جزيئات المائع ويسمي هذا الفرض بفرض الاتصال وتسمي الميكانيكا في هذه الحالة بميكانيكا الأوساط المتصلة .

٢- اعتبار الموائع مكونة من جسيمات منفصلة تتحرك حركة انتقالية و دورانية وتذبذبية في الفراغات بين جزيئات المائع ويسمي هذا المدخل بالمدخل الإحصائي .

ومن الناحية العملية وجد أن المدخل الإحصائي يكون فقط في حالة الأوساط المخلخلة بينما يكون من المناسب استخدام ميكانيكا الأوساط المتصلة لوصف الحركة في الحالات الآخري وذلك لشدة تعقيد المدخل الإحصائي . وسوف نعتبر الفصول القادمة حركة الموائع كأوساط متصلة .

(٤) تعاريف :

١- جسيم المائع Fluid Particle :

يعرف الجسيم في مائع بأنه ذلك العنصر الحجمي الصغير جدا إذا ما قورن بحجم المائع المتحرك والكبير نسبيا إذا ما قورن بحجم الجزئ ويشغل نقطة في الفراغ .

٢- الكثافة عند نقطة ما فى المائع Density :

لإيجاد كثافة مائع عند نقطة ما مثل A . نعتبر عنصرا صغيرا جدا من المائع يحيط بالنقطة A وليكن حجم هذا العنصر $\Delta\tau$ وكتلته Δm في لحظة ما . تسمي النسبة $\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$ بالكثافة المتوسطة (أو متوسط الكثافة) عند A في هذه اللحظة . أما النهاية $\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$ فتسمي الكثافة عند A ونرمز لها بالرمز ρ . ونلاحظ أن الكثافة ρ دالة في إحداثيات النقطة A وفي الزمن كذلك فإذا كانت إحداثيات A هي النقطة (x, y, z) بالنسبة لمحاور ثابتة في الفراغ ، t الزمن فان :

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \rho(x, y, z, t)$$

٣- المائع الغير قابل للانضغاط Incompressible Fluid :

في حالة المائع الغير قابل للانضغاط يكون $\frac{d\rho}{dt} = 0$. أي أن الكثافة عندئذ تكون ثابتة عند جميع نقط المائع ولا تتغير بمرور الزمن .

٤- المائع المثالي Ideal Fluid :

يعرف المائع المثالي بأنه مائع غير لزج أي لا يوجد بين جزيئاته قوي مماسية Shearing Forces مهما كانت صغيرة أو بعبارة آخري فان بين جزيئاته سواء أثناء الاتزان أو أثناء الحركة لا توجد سوي قوي الضغط العمودي .

أما المائع اللزج Viscous Fluid فهو المائع الذي أثناء حركته فان جزيئاته تؤثر علي بعضها البعض ليس فقط بقوي الضغط العمودي بل أيضا بقوي مماسية والتي تسمي بالاحتكاك الداخلي .

٥- القوى الحجمية والقوى السطحية Volume and Surface Forces :

تؤثر علي جسيم المائع نوعان مختلفان من القوي :

١- قوي تؤثر في نقطة مثل الوزن وتسمي قوي حجمية أو جسمية .

٢- قوي تؤثر علي السطح لأي عنصر من المائع وتسمي قوي سطحية وتمثل القوي التي تؤثر بها باقي المائع علي سطح الجسيم الذي ندرسه ، هذه القوة تكون عمودية علي سطح العنصر في

حالة سكون المائع بينما تكون لها مركبتان إحداهما عمودية علي السطح والثانية مماسية تظهر فقط حينما يكون المائع متحركا .

٦- الضغط عند نقطة ما في المائع Pressure :

لإيجاد ضغط مائع عند نقطة ما A . نفرض أن ΔS هو عنصر مساحة يحيط بالنقطة A ولنفرض أن محصلة القوي المؤثرة عليه هي Δf نتيجة تأثير بقية المائع أو الوسط الخارجي .

تسمي النسبة $\frac{\Delta f}{\Delta S}$ بالضغط المتوسط عند النقطة A أما النهاية $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta S}$ إذا وجدت فتسمي بالضغط عند A ويرمز لها بالرمز f ويلاحظ أن f دالة في إحداثيات A وفي الزمن أي أن :

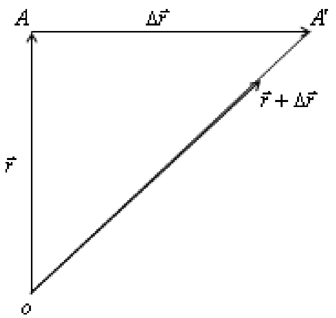
$$f = f(x, y, z, t)$$

وفي حالة المائع المثالي يكون الضغط عموديا علي المساحة ΔS . فإذا كان $\vec{n}$ متجه وحدة عمودي علي السطح والي الخارج فان :

$$\vec{f} = -P\vec{n}$$

وذلك في حالة المائع المثالي فقط .

٧- متجه السرعة لجسيم المائع :



بفرض أن في اللحظة t كان احد الجسيمات في الموضع A حيث $\overrightarrow{oA}=\vec{r}$ ، o نقطة ثابتة في لفراغ وليس في المائع وفي اللحظة $t+\Delta t$ أصبح الجسيم عند A' حيث $\overrightarrow{oA'}=\vec{r}+\Delta\vec{r}$ تعرف سرعة المائع عند A في اللحظة t والتي سوف نرمز لها بالرمز q كالآتي :

$$\vec{q}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

ومن الواضح أن متجه السرعة $\vec{q}$ دالة في متجه الموضع $\vec{r}$ والزمن t أي أن :

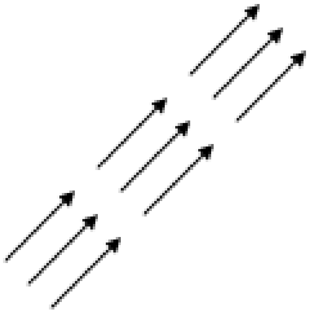
$$\vec{q}=q(r,t)=q(x,y,z,t)$$

حيث x,y,z إحداثيات النقطة A بالنسبة لمحاور ثابتة في الفراغ . إذا كانت (u,v,w) هي مركبات السرعة في اتجاه المحاور الكرتيزية فان :

$$\vec{q}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$$
$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$
$$\vec{q}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

ومن ثم يكون

$$u=\frac{dx}{dt}\vec{i}\ ،\quad v=\frac{dy}{dt}\vec{j}\ ،\quad w=\frac{dx}{dt}\vec{k}$$



وإذا اخذ متجه السرعة q قيمة ثابتة عند كل نقطة من نقط المائع قيل أن المتجه q يعرف مجالا يسمي مجال السرعة . وللحصول علي معني طبيعي لمجال السرعة الاتجاهي نتصور وجود دقائق صغيرة من مادة مضيئة تتحرك في المائع وبأخذ صور فوتوغرافية للمائع خلال فترة زمنية قصيرة فنجد أن مسار النقطة المضيئة خلال فترة التصوير و للموائع الحقيقية نجد أن هذه المسارات الصغيرة هي أجزاء لخطوط منتظمة وتسمي الحركة عندئذ حركة خطية انسيابية Streamline Motion أما إذا كانت المسارات الصغيرة موزعة توزيعا غير منتظم فان حركة المائع توصف في هذه الحالة بأنها حركة اضطرابية Turbulent .

٨- الحركة اللازمنية Steady Motion :

في الحالة العامة لحركة مائع فان كلا من مركبات السرعة والضغط والكثافة للمائع القابل للانضغاط تكون دوالا في الموضع وفي الزمن أي أن :

$$u = f_1(x, y, z, t), v = f_2(x, y, z, t)$$
$$w = f_3(x, y, z, t), \rho = f_4(x, y, z, t)$$
$$P = f_5(x, y, z, t)$$

أي انه لنقطة ثابتة في الفراغ إحداثياتها (x, y, z) فان مركبات السرعة والكثافة والضغط تكون دوالا في الزمن أي إنها تتغير مع مرور الزمن مثل هذه الحركة تسمي بالحركة الزمنية Unsteady motion أما إذا كانت مركبات السرعة والضغط والكثافة لا تتغير عند نقطة ما مع مرور الزمن فان هذه الحركة تسمي بالحركة اللازمنية Steady motion وعندئذ يكون :

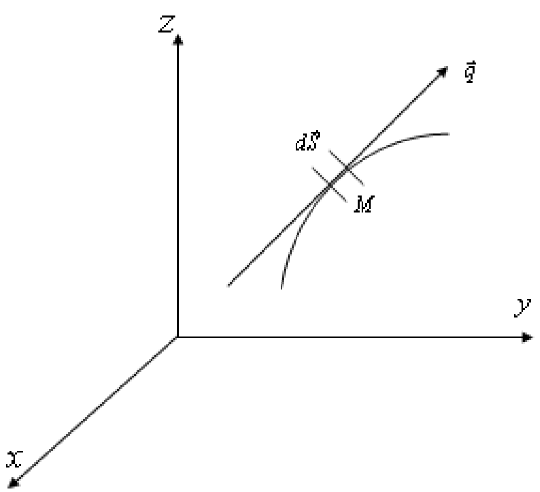
$$u = f_1(x,y,z), v = f_2(x,y,z)$$
$$w = f_3(x,y,z), \rho = f_4(x,y,z)$$
$$P = f_5(x,y,z)$$

أي انه في حالة الحركة اللازمنية يكون :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

٩- الخطوط الانسيابية Streamlines :

يعرف الخط الانسيابي بأنه منحني مرسوم في المائع بحيث أن المماس له عند أي نقطة عليه ينطبق علي اتجاه حركة المائع (اتجاه السرعة) عند نفس النقطة .
ولإيجاد الدالة التفاضلية للخط الانسيابي نفرض أن $d\vec{S}$ عنصر طولي منه عند النقطة M عليه حيث متجه السرعة عند M هو q .
من تعريف نلاحظ أن متجه السرعة q ينطبق علي المماس للخط الانسيابي عند M أي أن :



$$\vec{q} \wedge d\vec{S} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (vdz - wdy)\vec{i} + (wdx - udz)\vec{j} + (udy - vdx)\vec{k} = 0$$

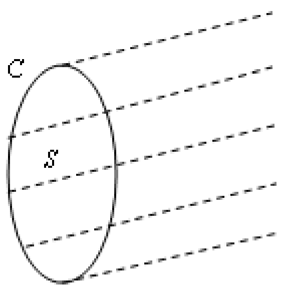
وعلي ذلك يكون :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

وتسمي المعادلات الأخيرة بالمعادلات التفاضلية للخطوط الانسيابية . وعندما تعتمد سرعة أي نقطة من المائع علي موضع هذه النقطة وعلي الزمن فان الخطوط الانسيابية عند أي لحظة تكون ما يسمي بالحزمة الانسيابية **Flow Pattern** عند نفس اللحظة .

١٠ـ الأنابيب الانسيابية :

برسم الخطوط الانسيابية خلال المنحني C الذي يحد السطح S نحصل علي ما يعرف باسم الأنبوبة الانسيابية وعندما يكون مقطع الأنبوبة الانسيابية صغير جدا فان الأنبوبة الانسيابية تعرف باسم الأنبوبة الشعرية **Stream Filament** وعندما تكون حركة المائع لازمنية فان الأنابيب الانسيابية تكون كالأنابيب العادية ينساب المائع خلالها ومن التعريف فان المائع لا ينساب خلال السطح المنحني للأنبوبة الانسيابية وهذه السطوح المنحنية ثابتة في الفراغ وعلي ذلك فان حركة المائع داخل الأنبوبة الانسيابية لا تتغير لو استبدلت السطوح المنحنية المرسومة (تصورا) في المائع بسطوح من مادة صلبة .



١١ـ الخطوط المسارية Path lines :

تعرف الخطوط المسارية بأنها المنحنيات التي ترسمها نقط المائع أثناء حركته فان المعادلة التفاضلية للخطوط المسارية هي :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

وحيث أن اتجاه حركة نقطة من المائع يكون دائما في اتجاه السرعة عند هذه النقطة أي في اتجاه المسار فان الخطوط المسارية تمس الخطوط الانسيابية عند نفس الموقع اللحظي لنقط المائع وعندما تكون حركة المائع لازمني Steady فان الخطوط الانسيابية تنطبق علي الخطوط المسارية.

أما إذا كانت حركة المائع زمنية Unsteady فان الخطوط الانسيابية لا تنطبق علي الخطوط المسارية.

١٢ ـ المسائل الداخلية والمسائل الخارجية :

المسائل الداخلية هي التي يتحرك فيها المائع داخل الأجسام أما المسائل الخارجية فهي المسائل التي يتحرك فيها المائع حول الأجسام .

(٥) طرق دراسة حركة الموائع :

من المعروف انه لتحديد حركة الأجسام لابد أن ننسبها إلي مجموعة من المحاور وليكن مثلا المحاور x_1, x_2, x_3 هذه المجموعة إما أن تكون محاور كرتيزية متعامدة مثلا (x, y, z) أو أي مجموعة آخري من المحاور المتعامدة أو المحاور المتعامدة المنحنية. وتتحرك النقطة المادية أو

جزئ السائل بالنسبة إلي هذه المحاور إذا كانت إحداثياتها x_i (حيث $i = 1,2,3,....$) تتغير بتغير الزمن أي أن هذه الإحداثيات دالة في الزمن . ويمكن معرفة حركة الجسم إذا عرف العلاقة بين x_i والزمن t أي بمعلومية القانون :

$$x_i = f_i t$$

وهذا القانون يعرف بقانون الحركة .

ولدراسة حركة الموائع عموما هناك طريقتان لهذه الدراسة هما : طريقة أويلر ، طريقة لاجرانج .

١- طريقة أويلر Euler's Method :

هذه الطريقة الأساسية لدراسة حركة المائع والتي سوف نستخدمها في هذا المقرر . وهذه الطريقة تتلخص ليس في دراسة حركة المائع نفسه بل في دراسة الفراغ (أو جزء منه) المشغول بالمائع المتحرك لذلك نختار نقطة ما في الفراغ المشغول بالمائع إحداثياتها مثلا (x, y, z) بالنسبة لمحاور ثابتة في الفراغ وندرس التغيرات التي تحدث لعناصر الحركة (الضغط – السرعة ... وغيرها) عند الانتقال من نقطة في الفراغ إلي نقطة آخري وكذلك التغيرات في هذه العناصر عند نقطة ثابتة في الفراغ مع مرور الزمن .

وعلي هذا فالسرعة مثلا يمكن اعتبارها دالة لأربع متغيرات هي (x, y, z, t) حيث t الزمن وهذه المتغيرات تسمي متغيرات أويلر وعلي ذلك إذا كان لدينا مجموعة من المحاور الكرتيزية المتعامدة وكانت مركبات السرعة بالنسبة لها هي (u, v, w) فان :

$$u = u(x, y, z, t) = f_1(x, y, z, t),$$
$$v = v(x, y, z, t) = f_2(x, y, z, t),$$
$$w = w(x, y, z, t) = f_3(x, y, z, t),$$

وباعتبار حركة المائع حركة منفصلة فان الدوال f_1, f_2, f_3 تكون دوالا متصلة ووحيدة القيمة . وفي هذه الحالة لإيجاد مسار نقطة من المائع نكتب المعادلات السابقة بالصورة :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, t),$$
$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t),$$
$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t),$$

حيث تأخذ الصور الآتية بعد التكامل :

$$x = \Phi_1(a, b, c, t),$$
$$y = \Phi_2(a, b, c, t),$$
$$z = \Phi_3(a, b, c, t),$$

وهذه المعادلات تشتمل علي ثلاثة ثوابت اختيارية هي a, b, c يمكن تعيينها من الشروط الابتدائية وبحذف t من هذه المعادلات الثلاث الأخيرة نحصل علي معادلة المسار . وتعرف مركبات عجلة جسيم من المائع في متغيرات أويلر كالآتي :

$$f_x = \frac{du}{dt} \quad ، \quad f_y = \frac{dv}{dt} \quad ، \quad f_z = \frac{dw}{dt}$$

وعلي ذلك يكون :

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$
$$f_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$f_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$f_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

٢- طريقة لاجرانج Lagrange's Method :

وتتلخص هذه الطريقة في تتبع حركة جزئ من المائع كل علي حدة . فإذا كانت إحداثيات نقطة من المائع عند اللحظة $t=0$ هي (ξ,η,ζ) فان إحداثيات هذه النقطة في أي لحظة t هي (x,y,z) ستكون دوالا في (ξ,η,ζ) في الزمن t وتسمي المتغيرات الأربعة (ξ,η,ζ,t) بمتغيرات لاجرانج وعلي ذلك فان :

$$x = \psi_1(\xi,\eta,\zeta,t)$$
$$y = \psi_2(\xi,\eta,\zeta,t)$$
$$z = \psi_3(\xi,\eta,\zeta,t)$$

وبينما نحصل علي معادلات المسار في طريقة أويلر بالتكامل فإننا في طريقة لاجرانج نحصل عليها من المعادلات الأخيرة ولكن مركبات السرعة والعجلة في طريقة لاجرانج :

$$u=\frac{\partial x}{\partial t} \ ، \ v=\frac{\partial y}{\partial t} \ ، \ w=\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$f_x=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \ ، \ f_y=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ ، \ f_z=\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ومن الأمثلة علي وجهتي نظر لاجرانج و أويلر هي حركة أو انسياب المائع في قناة فإما أن نتتبع حركة جزئ من السائل من المنبع للقناه حتي المصب وهذه وجهة نظر لاجرانج أو عند أي موضع من القناة ونتتبع ماذا يحدث عند هذا الموضع في لحظات متتالية من الزمن وهذه وجهة نظر أويلر. والحركة سواء من وجهة نظر لاجرانج أو وجهة نظر أويلر تعتبر معلومة إذا علم متغيرات هذه الحركة ومتغيرات الحركة هي كل المتغيرات التي تتعلق بخواص السائل مثل السرعة والعجلة والكثافة والضغط ودرجة الحرارة .....) بدلالة متغيرات كل طريقة .

(٦) معادلة الاتصال Equation of Continuity :

من القوانين الهامة في ميكانيكا نيوتن هو قانون بقاء الكتلة m لأي حجم معزول من السائل (أو المادة)

(المقصود بالحجم المعزول هو أي حجم يحتوي علي نفس النوع من جزيئات المادة) .

وهذا القانون يعطي معادلة من أهم المعادلات في ميكانيكا الوسط المتصل وهو انـه لأي حجم معين فان الكتلة m تكون :

$$m=constant,..........(1)$$

وهذه يمكن كتابتها في الصورة :

$$\frac{dm}{dt}=0,..............(2)$$

ومن تعريف الكثافة وجد أن الكثافة المتوسطة للكتلة Δm التي تحتوي الحجم $\Delta\tau$ هي ρ'

$$\rho'=\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

وعلي ذلك تكون الكثافة الحقيقية هي :

$$\rho=\frac{dm}{d\tau}$$

فإذا كان لدينا حجم محدود V متحرك من السائل فتكون الكتلة m التي بداخل هذا الحجم هي :

$$m=\iiint_V \rho d\tau,........(3)$$

حيث التكامل الحجمي مأخوذ علي الحجم V المتحرك من السائل .
بذلك يكون قانون بقاء الكتلة هو القانون (2) بالنسبة لحجم معزول من السائل V ويمكن كتابته في الصورة :

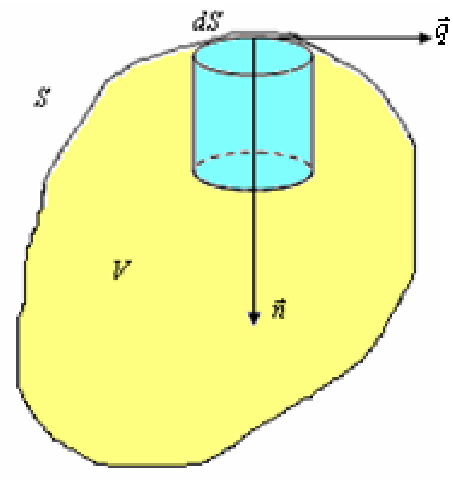
$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho d\tau=0,......(4)$$

المعادلة (4) هذه هي احدي صيغ ما يسمي بمعادلة الاتصال للمائع ولكنها ليست في صورتها النهائية التي سوف نستنتجها فيما بعد .

ملحوظة :

نلاحظ أن إذا كان حجم السائل صغير ويساوي $d\tau$ فقط فان المعادلة (4) تصبح في الصورة :

$$\frac{d}{dt}(\rho d\tau)=0$$



نعتبر الآن حجم معين من السائل V متحركا وذات السطح S الـذي يحـد الحجـم V . نفـرض أن $\vec{n}$ هـو متجـه الوحـدة العمودي علي عنصر المساحة dS من السطح S والي داخل السطح ونفرض أن $\vec{q}$ هي سرعة عنصر المساحة dS .

سوف نحسب كميـة السائل التـي سوف تـدخل خـلال وحـدة الـزمن فـي الحجـم V مـن خـلال السطح . خـلال وحـدة الـزمن سـوف يـدخل جـزء مـن السـائل فـي الاتجـاه العمـودي علـي السـطح إلـي الـداخل عبـارة عـن اسـطوانة قائمـة طولـها هـو مقدار مركبة السرعة في الاتجاه العمودي علي السطح (إذ أن السرعة هي المسافة المقطوعة في وحدة الزمن) إما قاعدة الاسطوانة فهي العنصر dS من السطح S وعلي ذلك يكون حجم هذا السائل هو حجم الاسطوانة الصغيرة هذه وهو يساوي $(\vec{n}\cdot\vec{q})dS$ وذلك لأن مركبـة السرعة $\vec{q}$ في الاتجاه العمودي $\vec{n}$ هي $\vec{q}\cdot\vec{n}$ حيث $\vec{n}$ متجه وحدة عمودي وبالتكامل علي السطح S ينتج أن حجم السائل الكلي الذي يدخل الحجم V من السائل في وحدة الزمن هو :

$$\iint_S (\vec{n}\cdot\vec{q})dS$$

وقد عرفنا أن كتلة السائل الموجودة داخل الحجم V المحدود بواسطة السطح S هو $\iiint_V \rho d\tau$.

فإذا فرضنا انه لا يوجد داخل الحجم V من السائل أي منبع يمكن أن ينتج عنه زيادة في السائل أو أي مصب يمكن أن ينتج عنه فقد في السائل فان الكتلة داخل الحجم V نتيجة لتغير الزمن بالكتلة التي تدخل هذا الحجم في وحدة الزمن . أي سوف نحصل علي :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \rho d\tau\right) = \rho\iint_S (\vec{n}\cdot\vec{q})dS, \text{..........}(5)$$

نلاحظ أن علامة التفاضل للزمن في الطرف الأيسر هي تفاضل جزئي وذلك لأننا نريد التغير في الكتلة الناتج عن تغير الزمن فقط . وبتطبيق نظرية جاوس لتحويل التكامل السطحي إلي حجمي :

$$\iiint_V \left(\nabla\cdot\vec{X}\right)d\tau = -\iint_S \left(\vec{n}\cdot\vec{X}\right)dS$$

وبأخذ $\vec{X} = \rho\vec{q}$ فان :

$$\iint_S (\vec{n}\cdot\rho\vec{q})dS = -\iiint_V [\nabla\cdot(\rho\vec{q})]d\tau$$

بالتعويض في معادلة (5) نحصل علي :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_V (\nabla \cdot \rho \vec{q}) d\tau = 0$$

$$\therefore \iiint \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \vec{q}) \right] d\tau = 0$$

$\because$ الحجم $d\tau$ اختياري فان معادلة الاتصال تكون هي :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \vec{q}) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

المعادلة الأخيرة يمكن وضعها علي الصورة الآتية :

$$\nabla \cdot \rho \vec{q} = \rho(\nabla \cdot \vec{q}) + (\vec{q} \cdot \nabla)\rho = \rho div \vec{q} + (\vec{q} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

لذلك فان معادلة الاتصال تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div \vec{q} + (\vec{q} \cdot \vec{\nabla})\rho = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\because \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

بذلك يمكن كتابة معادلة الاتصال في الصورة :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div \vec{q} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

في الموائع الغير قابلة للانضغاط تكون الكثافة ρ ثابتة وفي هذه الحالة إذا استخدمنا طريقة اويلر لوصف حركة الموائع فان معادلة الاتصال تأخذ الصورة :

$$div\vec{q} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

(٧) جهد السرعة Velocity Potential :

نفرض أن سرعة المائع عند اللحظة t هي q ومركباتها في اتجاه المحاور الكرتيزية (u, v, w) .

إذا نظرنا في المقدار :

$$udx + vdy + wdz$$

فإننا نعرف من الرياضة البحتة انه لكي يمثل المقدار التفاضلي الكلي لدالة ما وليكن $\Phi(x, y, z)$ فان الشرط الضروري والكافي لذلك هو أن يكون :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{array}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

فإذا أمكن تعريف الدالة القياسية $\Phi(x, y, z)$ بحيث يكون :

$$udx + vdy + wdz = +d\Phi$$

فان الدالة القياسية Φ تسمى بدالة جهد السرعة وهي دالة قياسية ولكن :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

ومن ثم فان :

$$\left. \begin{array}{l} u = +\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v = +\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ w = +\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{array} \right\} ,............(2)$$

العلاقات (2) يمكن كتابتها علي الصورة :

$$\vec{q} = +\vec{\nabla}\Phi,.................(3)$$

أي إذا أمكن وضع مركبات السرعة q علي صورة مركبات الانحدار السابقة فانه يقال أن الحركة هي حركة جهدية للمائع وأيضا يمكن كتابة الشرط اللازم والكافي (1) في الصورة :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = +\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\Phi = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\right)\Phi = 0$$

أي أن الحركة الجهدية تسمي بالحركة الغير دورانية .

(٨) الدوامة Vortex :

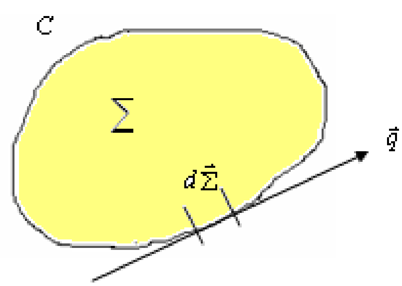
المتجه $\vec{\xi}=Curlq=\vec{\nabla}\wedge\vec{q}$ يسمي بمتجه الدوامة وعلي ذلك تكون الحركة الجهدية أو غير دورانية إذا كان $\vec{\xi}=0$ أما إذا كان $\vec{\xi}\neq 0$ فان الحركة تكون دورانية (**Rotational**) .

(٩) الخط الدوامي Vortex Line :

في حالة الحركة الدورانية يعرف الخط الدوامي بأنه المنحني المرسوم في المائع الذي يكون المماس له عند أي نقطة هو المتجه الدوامي عند هذه النقطة . وإذا كانت ξ_x,ξ_y,ξ_z هي مركبات متجه الدوامة ξ فان المعادلات التفاضلية للخطوط الدوامية هي :

$$\frac{dx}{\xi_x},\frac{dy}{\xi_y},\frac{dz}{\xi_z}$$

(١٠) الدوران Circulation :



إذا كان C منحني مقفل موضوع كليا في مائع متحرك ونفرض أن السرعة عند أية نقطة علي المنحني هي q وان $\sum$ هي مساحة السطح داخل المنحني المقفل C فان الدوران Γ لسرعة المائع $\vec{q}$ يعرف كالآتي :

$$\Gamma=\oint_C \vec{q}\cdot d\vec{S}=\iint_\Sigma\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{q}\right)d\vec{\Sigma},..........(1)$$

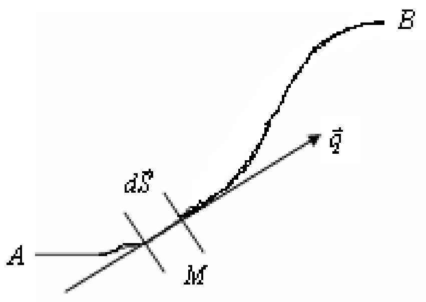
حيث dS عنصر طولي من المنحني C ، $d\sum$ عنصر مساحة من المساحة $\sum$.

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = Curl\vec{q}$$
$$\therefore \Gamma = \iint_{\Sigma} \xi d\,\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \xi \cdot \vec{n} d\,\Sigma, ...(2)$$

حيث $\vec{n}$ متجه وحدة في الاتجاه العمودي للخارج للعنصر $d\,\Sigma$ من السطح Σ .

ومن المعادلة (1) نجد أن :

$$\Gamma = \oint_{C} udx + vdy + wdz$$



وإذا كان المنحني غير مغلق فان الدوران من النقطة A إلي النقطة B علي المنحني يعرف كالآتي :

$$\Gamma = \int_{A}^{B} \vec{q} \cdot d\vec{S} = \int_{A}^{B} udx + vdy + wdz$$

وفي كلا الحالتين يكون الدوران موجبا إذا بقيت المساحة علي الشمال أثناء الدوران .

وفي الحالة التي تكون الحركة جهدية فان :

$$u = +\frac{\partial \Phi}{\partial x} \ ، \ v = +\frac{\partial \Phi}{\partial y} \ ، \ w = +\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

حيث Φ دالة جهد السرعة وعندئذ يكون الدوران :

$$\Gamma = +\int_{A}^{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = +\int_{A}^{B} d\Phi = -\Phi_A + \Phi_B$$

وهذا معناه أن الدوران علي أي منحني (AB) في حالة الحركة الجهدية لا يتوقف علي شكل المنحني ويساوي الفرق بين قيمتي الجهد عند النقطتين النهائيتين . ومن ثم إذا كان المنحني مقفل فان الدوران يساوي الصفر إذا كانت Φ دالة وحيدة القيمة .

أمثلة :

مثال(١) :

إذا كانت مركبات السرعة لنقطة ما في مائع هي $w=0$ ، $v=Kx$ ، $u=-Ky$ حيث K ثابت فاوجد الخطوط الانسيابية .

الحل :

واضح أن مركبات السرعة لا تتوقف علي الزمن وبذلك تكون حركة المائع لازمنية Steady ومن ثم نستنتج أن معادلة المسار تنطبق علي معادلة الخطوط الانسيابية كذلك فان هذه الحركة مستوية لأن $w=0$. المعادلة التفاضلية للخطوط الانسيابية هي :

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$
$$\therefore \frac{dx}{-Ky}=\frac{dy}{Kx}$$
$$\therefore xdx=-ydy$$

وبالتكامل نجد أن :

$$x^2 + y^2 = C$$

حيث C ثابت .

وعلي ذلك عندما تكون $C > 0$ فان الخطوط الانسيابية تكون عبارة عن مجموعة الدوائر متحدة المركز ومركزها هو نقطة الأصل .

<u>مثال(٢):</u>

إذا كانت مركبات سرعة نقطة ما في مائع متحرك في اتجاهات المحاور هي $u = x + t$ ، $v = -y + t$ ، $w = 0$ فاوجد :

(i) معادلة الخطوط الانسيابية ثم معادلة الخط الانسيابي المار بالنقطة $A(-1,-1)$ عند اللحظة $t = 0$.

(ii) مسار النقطة M التي كانت تشكل الموضع $A(-1,-1)$ عند اللحظة $t = 0$.

<u>الحل :</u>

واضح أن الحركة مستوية زمنية . المعادلة التفاضلية للخطوط الانسيابية هي :

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}$$

بالتكامل واعتبار t ثابت نجد أن :

$$\ln(x+t) = -\ln(-y+t) + \ln C$$

حيث C ثابت التكامل

$$(x+t)(-y+t)=C,.......................(1)$$

أي أن مجموعة الخطوط في كل لحظة تمثل مجموعة من القطوع الزائدة ولإيجاد الخط الانسيابي الذي يمر بالنقطة $A(-1,-1)$ عند اللحظة $t=0$ بالتعويض في (1) :

$$(-1)(1)=C \Rightarrow C=-1,............(2)$$

وعلي ذلك فمعادلة الخط الانسيابي المطلوب هو :

$$xy=1$$

وهي تمثل معادلة قطعا زائدا .

ولإيجاد معادلة المسار :

$$\frac{dx}{dt}=x+t \quad ، \quad \frac{dy}{dt}=-y+t,..........(3)$$

$$\frac{dx}{dt}-x=t$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي وعامل تكاملها :

$$\mu = e^{-\int dt} = e^{-t}$$

$$\therefore e^{-t}\frac{dx}{dt} = -xe^{-t} = te^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[xe^{-t}\right] = te^{-t}$$

$$xe^{-t} = \int te^{-t}dt = -\int td\left(e^{-t}\right) = -te^{-t} + \int e^{-t}d$$

$$\therefore xe^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + C_1$$

$$x = -t - 1 + C_1e^{-t}, ...(4)$$

ولكن عندما $x=-1$ كانت $t=0$

$$\therefore C_1 = 0$$

$$\therefore x = -t - 1 + C_1\mathrm{e}^{-t}, ...(5)$$

وبالمثل

$$\frac{dy}{dt} + y = t$$

وبحل هذه المعادلة ينتج أن :

$$y = t - 1, ...(6)$$

وبحذف t بين (6) ، (5) نحصل علي :

$$x + y = -2, ...(7)$$

وهذه هي معادلة المسار المطلوب . واضح إنها تمثل معادلة خط مستقيم .

ومن هذا المثال يتضح انه إذا كانت الحركة زمنية أي إنها تعتمد علي الزمن فان معادلات الخطوط الانسيابية تختلف عن معادلات خطوط المسار .

<u>مثال(٣):</u>

إذا كان متجه السرعة لحركة مائع غير قابل للانضغاط يعطي بالصورة :

$$\vec{q} = -\frac{2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\vec{i} + \frac{\left(x^2-y^2\right)z}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\vec{j} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{k}$$

فأثبت أن هذه الحركة ممكنة وإنها غير دورانية .

<u>الحل :</u>

معادلة الاتصال هي :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div q = 0$$

$\because$ المائع غير قابل للانضغاط

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\therefore\ div q = 0$$

$$div q = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\left(x^2-y^2\right)z}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$

$$divq=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2(-2yz)+2xyz\left(x^2+y^2\right)4x}{\left(x^2-y^2\right)^4}+\frac{\left(x^2+y^2\right)^2(-2yz)-\left(x^2-y^2\right)z\left(x^2+y^2\right)(4y)}{\left(x^2-y^2\right)^4}+0$$

$$\therefore divq=\frac{-2yz\left[x^2+y^2-4x^2+x^2+y^2+2x^2-2y^2\right]}{\left(x^2-y^2\right)^3}$$

$$\therefore divq=0$$

أي أن معادلة الاتصال للمائع الغير قابل للانضغاط تحققت وبذلك تكون الحركة ممكنة .

كذلك فان :

$$Curlq=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \frac{\left(x^2-y^2\right)z}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}\end{vmatrix}$$

$$Curlq=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(x^2-y^2\right)z}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}\right)\right]\vec{j}$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\left(x^2-y^2\right)z}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\right]\vec{k}$$

وعلي ذلك فان الحركة تكون غير دورانية .

$$\therefore Curlq=0$$

مثال(٤):

استنتج معادلة الاتصال لمائع بالإحداثيات القطبية الكرية .

الحل :

معادلة الاتصال بالإحداثيات الكرتيزية :

$$\frac{d\rho}{dt} + div\rho\vec{q} = 0$$

وفي الإحداثيات المنحنية نعلم أن :

$$div\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(F_1 h_2 h_3\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(F_2 h_1 h_3\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(F_3 h_1 h_2\right)\right]$$

وفي الإحداثيات القطبية الكرية يكون :

$$\begin{array}{ccccc} h_1 = 1 & & h_2 = r & & h_3 = rSin\theta \\ u_1 = r & ، & u_2 = \theta & ، & u_3 = \psi \end{array}$$

$$\vec{F} = \rho\vec{q}$$

وعلي ذلك ففي الإحداثيات الكرية يكون :

$$div(\rho\vec{q})=\frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho q_r r^2 Sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho q_\theta r^2 Sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\rho q_\psi r\right)\right]$$

$$\therefore div(\rho\vec{q})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho q_r r^2\right)+\frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho q_\theta Sin\theta\right)+\frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\rho q_\psi\right)$$

$\therefore$ معادلة الاتصال هي :

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho q_r r^2\right)+\frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho q_\theta Sin\theta\right)+\frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\rho q_\psi\right)=0$$

<u>مثال(٥):</u>

تتحرك عناصر مائع متماثل في الفراغ بالنسبة لمركز ثابت اثبت أن معادلة الاتصال هي :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{\rho}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u\right)=0$$

حيث u السرعة علي بعد r من مركز الثابت .

<u>الحل :</u>

$\because$ الحركة متماثلة بالنسبة لمركز ثابت . فلو رمزنا للبعد عن هذا المركز بالرمز r فان :

$$u=u(r,t)$$

حيث u **السرعة علي بعد** r .

$\because$ **معادلة الاتصال هي :**

$$\frac{d\rho}{dt} + div(\rho\vec{q}) = 0$$

وأيضا تساوي :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{q}\cdot\vec{\nabla})\rho + \rho\nabla\cdot\vec{q} = 0$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ,ψ) **نعلم أن :**

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(ur^2) + 0 + 0$$

لان متجه السرعة q **له مركبة واحدة فقط** u **في اتجاه** r **.**

$\therefore$ **معادلة الاتصال هي :**

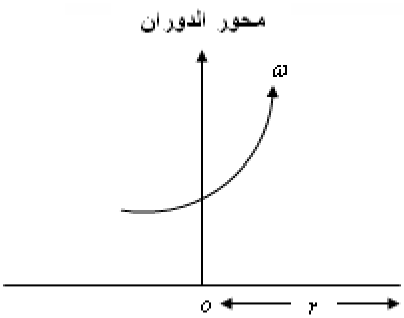
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = 0$$

مثال(٦):

إذا كانت أي نقطة من مائع غير قابلة للانضغاط تدور بانتظام حول محور ثابت بسرعة زاوية تتناسب مع البعد عن المحور مرفوعا للأس n فأثبت أن الحركة تكون غير دورانية إذا كان

$$n+1=0$$

الحل :



بفرض أن r بعد أي نقطة عن المحور (محور الدوران) ، ω هي السرعة الزاوية .

$$\omega \propto r^n \Rightarrow \omega = Kr^n$$

حيث K ثابت التناسب . السرعة في اتجاه المماس للدائرة التي ترسمها نقطة المائع

$$q = \omega r = Kr^{n+1}$$

وفي الإحداثيات المنحنية نعلم أن :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$$

في الإحداثيات الاسطوانية :

$$h_1 = 1 \quad ، \quad h_2 = r \quad ، \quad h_3 = 1$$
$$u_1 = r \quad\quad u_2 = \Phi \quad\quad u_3 = z$$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Kr^{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

ومنها ينتج المطلوب .

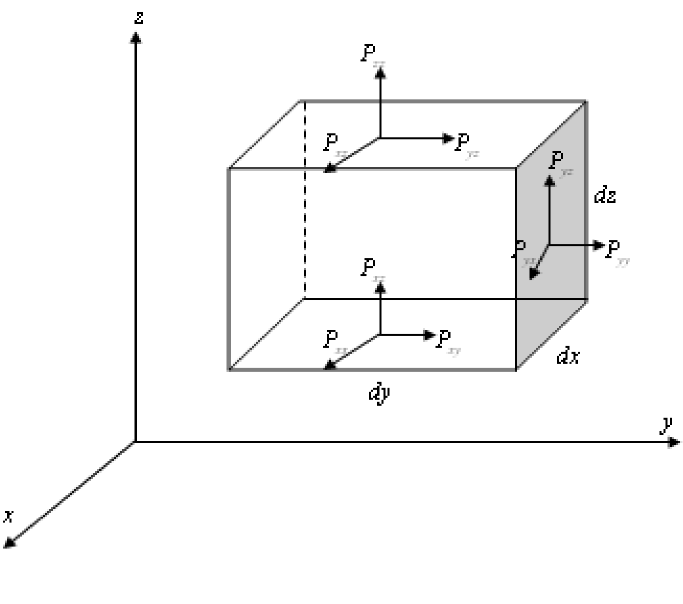
الباب الثاني
معادلات حركة الموائع اللزجة الغير قابلة للانضغاط
Equations of Motion of Incompressiable Viscous Fluids

مقدمة :

في الموائع الغير قابلة للانضغاط تكون الكثافة ρ ثابتة وفي هذه الحالة إذا استخدمنا طريقة أويلر لوصف حركة الموائع فان معادلة الاتصال تأخذ الصورة :

$$div\vec{q} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ممتد الإجهاد في الموائع اللزجة :



باعتبار عنصر حجمي متناهيا في الصغر علي هيئة متوازي مستطيلات أطوال أحرفه هي dx, dy, dz وأوجهه توازي مستويات الإحداثيات كما بالشكل . وذلك بفرض أن المائع لزج Viscous . القوة

المؤثرة علي وحدة المساحات من أي وجه من أوجهه (سطوحه) تسمي بالإجهاد **Stress** وهي ليست عمودية علي السطح في حالة المائع اللزج وإنما يمكن تحليله إلي ثلاث مركبات إحداهما عمودية علي السطح وتسمي بالإجهاد العمودي والأخريان في مستوي السطح وتسمي الاجهادات المماسية وسنرمز للإجهاد بالرمز P أو σ.

من الشكل المركبات P_{xx}, P_{xy}, P_{xz} تمثل مركبات الإجهاد المؤثر علي المستوي $(x=0)$ أي المستوي الذي يكون المحور x عموديا عليه ، المركبات P_{yx}, P_{yy}, P_{yz} تمثل مركبات الإجهاد المؤثر علي المستوي $(y=0)$ العمودي عليه هو المحور oy . وكذلك المركبات P_{zx}, P_{zy}, P_{zz} تمثل مركبات الإجهاد المؤثر علي المستوي العمودي عليه هو المحور oz .

المركبات P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} تسمي بالمركبات العمودية ، المركبات $P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}, P_{yx}, P_{zx}, P_{zy}$ تسمي بالمركبات المماسية أو القاصة .

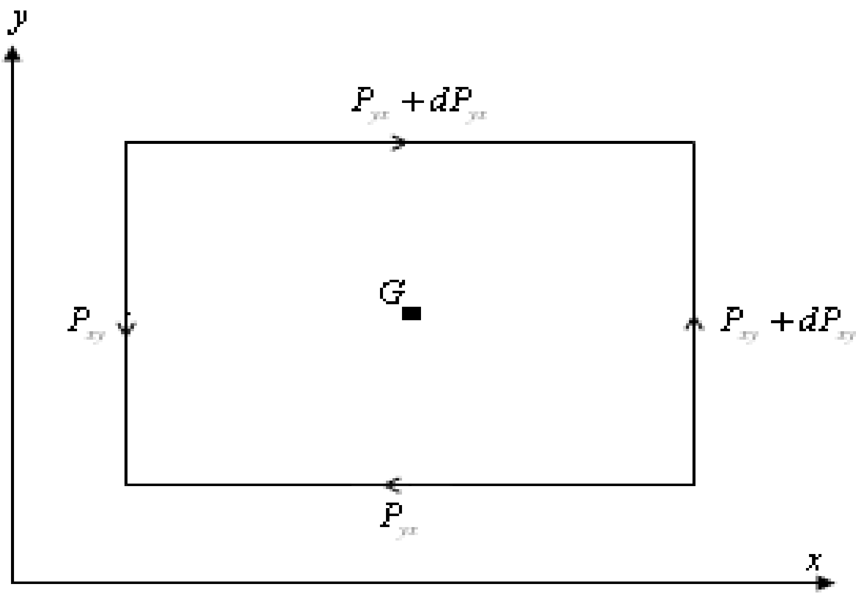
وبذلك يكون للإجهاد عند أي نقطة تسع مركبات يمكن كتابتها علي النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix}$$

وتسمي ممتد الإجهاد وهو ممتد من الرتبة الثانية . المركبات المماسية للإجهاد في حالة المائع المثالي تساوي الصفر والمركبات العمودية تكون متساوية في المقدار ولا تعتمد علي اتجاهات المحاور .

تماثل ممتد الإجهاد :

في معادلة العزوم (قانون بقاء كمية الحركة الزاوية للعنصر) سوف نجد عزوم تحتوي علي كميات صغيرة من الدرجة الثالثة أو الرابعة أو الخامسة فمثلا قوي القصور عزمها من الدرجة الرابعة ، بينما مركبات الإجهاد عزومها من الدرجة الثالثة في الصغر .
وبذلك يمكن كتابة المعادلات وإهمال الحدود من الدرجة الرابعة في الصغر والإبقاء علي حدود الدرجة الثالثة . نأخذ في الاعتبار أن المركبات العمودية تمر بمركز العنصر فلو أخذنا العزوم حول المركز فنجد أن الكثير من المركبات سوف تتلاشي . ولذلك نأخذ العزوم حول محور يوازي محور z ويمر بالمركز ونهمل عزوم القوي من الدرجة الرابعة في الصغر (قوي القصور والقوي الحجمية) فتكون مركبات الإجهاد التي لا تساوي الصفر هي المبينة بالشكل .



ومعادلة العزوم حول محور يوازي محور z ويمر بالمركز G هي :

$$-P_{yx}dxdz\left(\frac{dy}{2}\right)-\left(P_{yx}+dP_{yx}\right)dxdz\left(\frac{dy}{2}\right)+P_{xy}dydz\left(\frac{dx}{2}\right)+\left(P_{xy}+dP_{xy}\right)dydz\left(\frac{dx}{2}\right)=0$$

$$\therefore\left(-P_{xy}+P_{yx}\right)dxdydz=0\Rightarrow P_{yx}=P_{yx}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$P_{xz}=P_{zx} \quad ، \quad P_{yz}=P_{zy}$$

أي أن ممتد الإجهاد متماثل .

معادلات حركة مائع لزج غير قابل للانضغاط بدلالة الاجهادات :

بفرض أن القوي الحجمية المؤثرة علي عنصر حجم $dxdydz$ هي $\rho Xdxdydz$ وان $\rho\frac{du}{dt}dxdydz$ هي الكتلة مضروبة في العجلة للعنصر في اتجاه محور x . وهذه المركبة تأتي من :

(١) القوي السطحية علي الوجهين العموديين علي محور x .

(٢) القوي السطحية علي الوجهين العموديين علي محور y .

(٣) القوي السطحية علي الوجهين العموديين علي محور z .

فإذا أثرت علي الوجه $dydzy$ العمودي علي محور x المركبة P_{xx} لتعطي القوة $-P_{xx}dydz$ في اتجاه المحور x مثلا فإنها تؤثر علي الوجه المقابل الموجود علي بعد dx قوة تعطي من مفكوك

تيلور مقدارها $\left(P_{xx}+\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz$ في اتجاه عمودي علي هذا الوجه أي في اتجاه محور x .

وعلي ذلك تكون المحصلة القوي المؤثرة علي العنصر قي اتجاه محور x .

$$\left(P_{xx}+\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz-P_{xx}dydz=\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}dxdydz$$

بالنسبة للقوي المؤثرة علي الوجه $dxdy$ هي $-P_{yx}dxdz$ وعلي الوجه المقابل الموجود علي بعد dy تؤثر القوة $\left(P_{yx}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}dx\right)dxdz$ وتكون المحصلة في هذه الحالة هي :

$$\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}dxdydz$$

وبالمثل محصلة القوي علي الوجهين البعد بينهما dz هي :

$$\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}dxdydz$$

ومجموع جميع هذه المركبات هو :

$$\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

وتمثل جميع القوي السطحية المؤثرة في اتجاه محور x وبذلك تصبح معادلة الحركة في اتجاه محور x بعد القسمة علي $dxdydz$ هي :

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \dots\dots\dots(1)$$

وبالمثل يمكن استنتاج أن :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho Y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \dots\dots\dots(2)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho Z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}, \dots\dots\dots(3)$$

حيث $\rho X, \rho Y, \rho Z$ هي مركبات القوي الحجمية المؤثرة علي وحدة الحجوم . وتسمي المعادلات $(1),(2),(3)$ بمعادلات حركة المائع اللزج بدلالة الاجهادات وتضاف إلي هذه المعادلات المعادلة الرابعة وهي معادلة الاتصال :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

والصورة الكاملة لمركبات العجلة في متغيرات أويلر هي :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

قانون نيوتن المعمم :

المجاهيل في المعادلات السابقة هي $u, v, w, P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}, P_{yy}, P_{zz}, P_{yz}$ وهي تسعة مجاهيل بينما عدد المعادلات أربعة معادلات فقط ولذلك يلزم إضافة معادلات جديدة تربط المجاهيل بعضها البعض حتي يكون عدد المعادلات مساويا عدد المجاهيل .

وتأتي زيادة عدد المعادلات عن طريق وضع فروض جديدة تربط بين مركبات الإجهاد وتفاضلات السرعة وأشهر هذه الفروض هو الفرض النيوتوني والذي يمكن التعبير عن مركبات الإجهاد بواسطة علاقات خطية في تفاضلات السرعة وتسمي الموائع التي تحقق هذا الفرض بالموائع النيوتونية والموائع التي لا تحقق هذا الفرض بالموائع الغير نيوتونية .

الموائع مثل الماء والهواء يمكن اعتبارها موائع نيوتونية بينما مائع مثل الدم فيعتبر مائعا غير نيوتوني. في حالة الموائع الغير قابلة للانضغاط و النيوتونية يمكن كتابة العلاقة بين مركبات الإجهاد وتفاضلات السرعة علي النحو التالي :

$$P_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$P_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$P_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$P_{yx} = P_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$P_{zx} = P_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$P_{yz} = P_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

وفي هذه الحالة يمكن كتابة القوة في اتجاه محور x علي الصورة :

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\right)$$

$$\therefore\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\therefore\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

وبالمثل يمكن كتابة القوي في اتجاه محور y هي :

$$-\frac{\partial P}{\partial y}=\mu\nabla^2 v$$

وتكون القوي السطحية في اتجاه محور z هي :

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

وبذلك يمكن كتابة معادلات الحركة في الصورة :

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho X-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\nabla^2 u,..........(4)$$

$$\rho\frac{dv}{dt}=\rho Y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\nabla^2 v,...........(5)$$

$$\rho\frac{dw}{dt}=\rho Z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\nabla^2 w,..........(6)$$

المقدار μ يعتبر معلوما ويسمي بمعامل اللزوجة الديناميكي ويمكن تحديده إما بالتجربة أو من نظرية الحركة للغازات والسوائل ويعتمد علي التركيب الجزيئي للمائع وفي الحالة العامة يمكن أخذه كدالة في درجة الحرارة وذلك عند درجات الحرارة العالية ، أما في الحالات العادية فيمكن اعتباره ثابتا .

أما بالنسبة للمجهول P وهو الضغط فيمكن كتابته علي الصورة :

$$P = \left(\frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}}{3} \right), \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

وهو مجهول جديد ظهر في المعادلات وإذا أضفنا إليه المجاهيل الثلاثة u, v, w يصبح عدد المعادلات أربعة وعدد المجاهيل أربعة أيضا .

وبإدخال معامل اللزوجة الكينماتيكي $\upsilon = \mu/\rho$ فان معادلات الحركة تأخذ الصورة :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \upsilon\nabla^2 u, \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \upsilon\nabla^2 v, \dots\dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \upsilon\nabla^2 w, \dots\dots (10)$$

المعادلات $(6),(5),(4)$ أو المعادلات $(10),(9),(8)$ هي المعادلات الأساسية التفاضلية لحركة مائع لزج غير قابل للانضغاط وتسمي هذه المعادلات بمعادلات نافيير ستوكس **(Navier Stokes's)** نسبة إلي العالميين الذين وضعا هذه المعادلات في صورتها النهائية والمستخدمة منذ أكثر من مائة وخمسين عاما وهي عبارة عن معادلات تفاضلية جزئية غير خطية في أربعة مجاهيل وكل منها

دالة في أربعة متغيرات وهي شديدة التعقيد وحلولها المضبوطة غير معروفة إلا في حالات معدودة وفي معظم المسائل العملية نلجأ إلي حلها تقريبيا وفي أحوال آخري قد نلجأ إلي حل المسائل بإجراء تجارب في المعامل .

والصورة الاتجاهية لمعادلات نافيير ستوكس لمائع لزج وغير قابل للانضغاط هي :

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \left(\vec{q} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{q} = \vec{F} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

حيث $\vec{F}$ القوي الحجمية ، $\vec{q}$ متجه السرعة ومركباته هي (u, v, w) .

الشروط الابتدائية والشروط الحدية على السطوح الصلبة :

بالإضافة إلي المعادلات السابقة يلزم معرفة شكل المجاهيل عند اللحظة الابتدائية الذي يسمي بمعرفة الشروط الابتدائية وفي حالة حركة مائع لزج في أنابيب غير متحركة صلبة وغير مسامية فان مركبات السرعة المماسية عند الجدار تساوي سرعة الجدار ويطلق علي هذا شرط عدم الانزلاق .

أيضا السرعة العمودية للمائع والجدار يجب أن تكون متساوية (واحدة) وإلا لنفذ المائع خلال الجدار ويسمي الشرط بشرط عدم النفاذية .

ويختلف المائع المثالي عن المائع اللزج في عدم تحقق شرط عدم الانزلاق في حالة المائع اللزج يوجد فرق في السرعة المماسية للمائع عند الجدار وسرعة الجدار والفرق بينهما يسمي بالسرعة الانزلاقية ويظهر هذا عادة في الغازات المخلخلة .

معادلات أويلر لحركة مائع مثالي (غير لزج) :

لاستنتاج معادلات أويلر لحركة مائع غير لزج والذي لا يعتمد فيه الإجهاد علي اتجاه السطح حيث يكون عموديا فقط ولا يتغير بتغير الاتجاه . نضع $\mu = 0$ في معادلات نافيير ستوكس ووضع

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = -P$$

فنجد أن معادلات الحركة تؤول إلي الصورة :

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \quad \text{..}(12)$$

والصورة الاتجاهية تكون :

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P, \quad \text{..}(13)$$

أو

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \left(\vec{q}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{q} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P, \quad \text{..................................}(14)$$

المعادلات $(12), (13), (14)$ يمكن كتابتها أيضا باحدي الصورتين :

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}q^{2}\right)-\vec{q}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{q}\right)=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P,.........(15)$$

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}q^{2}\right)+\vec{\xi}\wedge\vec{q}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P,..................(16)$$

حيث $\vec{\xi}=\vec{\nabla}\wedge\vec{q}$ متجه الدوامة .

معادلات الحركة لمائع مثالى غير قابل للانضغاط إذا كانت القوى الجسمية قوى محافظة Conservative معادلة برنولى Bernoulli's Equation :

عندما تكون القوي الجسمية (الحجمية) قوي محافظة فان يمكن كتابة :

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}\Omega,..........(17)$$

حيث $\Omega(x,y,z)$ دالة قياسية .

فإذا كانت المائع غير قابل للانضغاط فان $\rho=const.$ فمعادلة الحركة في هذه الحالة تأخذ الصورة (13) :

$$\frac{d\vec{q}}{dt}=-\vec{\nabla}\Omega-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$$

ويمكن كتابتها في الصورة :

$$\frac{d^{2}\vec{r}}{dt^{2}}=-\vec{\nabla}\Omega-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P,..........(18)$$

حيث $\vec{r}$ متجه الإزاحة . بضرب المعادلة (18) قياسيا في $d\vec{r}$:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}\Omega\cdot d\vec{r} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P\cdot d\vec{r}, ...(19)$$

$$\because \vec{\nabla}\Omega\cdot d\vec{r} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz = d\Omega$$

وأيضا

$$\vec{\nabla}P\cdot d\vec{r} = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = dP$$

وكذلك

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot d\vec{r} = \frac{d^2x}{\partial t^2}dx + \frac{d^2y}{\partial t^2}dy + \frac{d^2z}{\partial t^2}dz$$

$$\frac{d^2x}{\partial t^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{\partial t^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$\frac{d^2y}{\partial t^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dt} = w\frac{dw}{dy}$$

$$\therefore \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot d\vec{r} = u\frac{du}{dx}dx + v\frac{dv}{dy}dy + w\frac{dw}{dy}dz = udu + vdv + wdw$$

$\therefore$ المعادلة (19) يمكن كتابتها في الصورة الآتية :

$$udu + vdv + wdw = -d\Omega - \frac{dP}{\rho}$$

بالتكامل :

$$\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) = -\Omega - \frac{P}{\rho} + Const.$$

وحيث أن :

$$\vec{q} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \Rightarrow q^2 = u^2 + v^2 + w^2$$
$$\therefore \frac{1}{2}q^2 = -\Omega - \frac{P}{\rho} + Const.$$
$$\therefore \frac{1}{2}q^2 + \Omega + \frac{P}{\rho} = Const., ...(20)$$

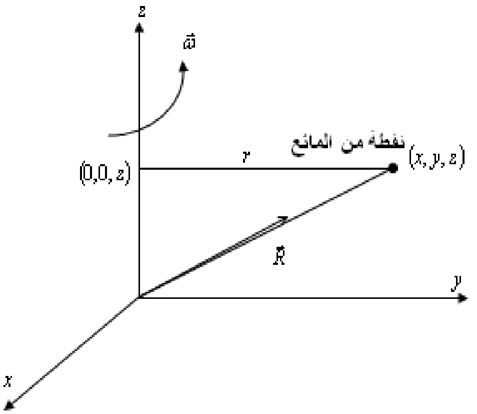
وتسمي المعادلة (20) بمعادلة برنولي للمائع المثالي والغير قابل للانضغاط .

أمثلة على حركة المائع المثالى :

(١) يدور مائع كجسم صلب بسرعة زاوية $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ حول المحور z فإذا كانت القوة الوحيدة الخارجية المؤثرة هي قوة الجاذبية الأرضية فأثبت أن :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz + Const.$$

حيث g عجلة الجاذبية الأرضية ، r البعد عن محور z .



الحل :

معادلة اويلر للحركة هي :

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$$
$$\vec{f} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$$

حيث $\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}$ **هو متجه العجلة . ولكن :**

$$\vec{F} = -g\vec{k}$$
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(gz)$$

وكذلك

$$\vec{f} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}q^2\right) + \vec{\xi} \wedge \vec{q}$$

حيث

$$\vec{q} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$\therefore \vec{q} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$$

حيث $\vec{q}$ سرعة نقطة من مائع متجه موضعها هو $\vec{R}=(x,y,z)$ وذلك بالنسبة لمجموعة محاور متعامدة نقطة أصلها النقطة الثابتة o كما بالشكل .

$$\frac{1}{2}q^2=\frac{1}{2}[\vec{q}\cdot\vec{q}]=\frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{2}\omega^2r^2$$

$$\xi=\vec{\nabla}\wedge\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=2\omega\vec{k}=2\vec{\omega}$$

$$\xi\wedge\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 2\omega\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=-2\omega^2\vec{r}$$

وحيث أن الحركة لازمنية فان $\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}=0$ وبالتعويض عن $\frac{1}{2}q^2,\xi\wedge\vec{q},\vec{F}$ في معادلة الحركة

نجد أن:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\omega^2r^2\right)-2\omega^2\vec{r}=-\vec{\nabla}(gz)-\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\omega^2r^2\right)-\vec{\nabla}\left(\omega^2r^2\right)=-\vec{\nabla}(gz)-\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left[\frac{1}{2}\omega^2r^2-\omega^2r^2+gz+\frac{P}{\rho}\right]=0$$

$$\vec{\nabla}\left[\frac{1}{2}\omega^2r^2-gz-\frac{P}{\rho}\right]=0$$

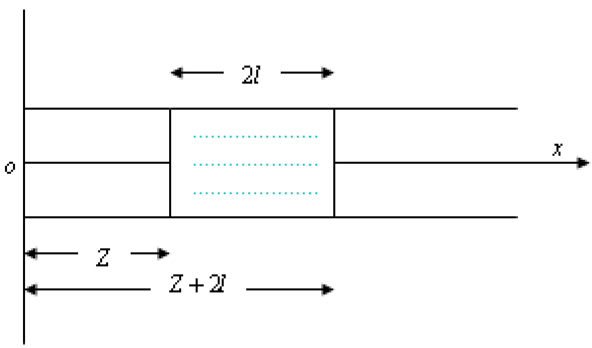
بالتكامل

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz - \frac{P}{\rho} = Const.$$

$$\therefore \frac{P}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz + Const.$$

(٢) كمية من سائل تشغل طول $2l$ من أنبوبة مستقيمة ذات مقطع منتظم وتقع تحت تأثير قوة تتجه دائما نحو نقطة ثابتة في الأنبوبة تتناسب مع البعد عن هذه النقطة . اوجد الحركة والضغط عند أي نقطة .

<u>الحل :</u>



نفرض أن z هو بعد النقطة الثابتة عن الطرف الحر ندرس السائل علي بعد x من o فتكون القوة الخارجية المؤثرة لوحدة الأطوال هي μx (حيث وحدة الأطوال هنا تتناسب مع وحدة الحجوم) وتتجه إلي النقطة o وحيث أن الأنبوبة رفيعة فان الحركة تكون في بعد واحد تقريبا .

معادلة الاتصال تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

معادلة الحركة تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-\mu x$$

بالتعويض من معادلة الاتصال نحصل علي :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-\mu x$$

من معادلة الاتصال نجد أن u **ليست دالة في المتغير** x **أي أن** $u=u(t)$ **ومن ذلك نجد أن** $\frac{\partial u}{\partial t}$ **دالة في الزمن فقط . بتكامل معادلة الحركة نحصل علي :**

$$x\frac{du}{dt}=-\frac{P}{\rho}-\frac{1}{2}\mu x^2+A,..........(1)$$

حيث A **مقدار ثابت ، وحيث أن** $P=P_o$ **الضغط الجوي عند النقط** $z, z+2l$ **فان :**

$$z\frac{du}{dt}=-\frac{P_o}{\rho}-\frac{1}{2}\mu z^2+A$$

$$(z+2l)\frac{du}{dt}=-\frac{P_o}{\rho}-\frac{1}{2}\mu(z+2l)^2+A$$

$$\therefore\frac{du}{dt}=-\mu(z+l),.........................(2)$$

وحيث أن $u=\frac{dz}{dt}$ **فان المعادلة** (2) **تأخذ الصورة :**

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\mu(z+l)$$

أي أن السائل داخل الأنبوبة يتحرك حركة توافقية بسيطة .

$$z + l = \beta Cos\left(\sqrt{\mu}t + \alpha\right)$$

حيث β ، α ثوابت تتعين من الشروط الابتدائية . يمكن حساب الضغط عند أي نقطة من المعادلة (1)

$$-x\mu(z+l) = -\frac{P}{\rho} - \frac{1}{2}\mu x^2 + A$$

وبالتعويض عن صحة A نحصل علي :

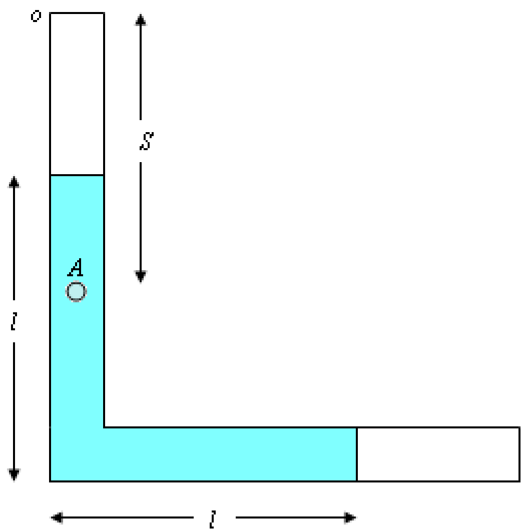
$$\frac{P}{\rho} = \frac{1}{2}\mu(z-x)(x-z-2l)$$

(٣) أنبوبة مستقيمة ذات مقطع منتظم علي شكل زاوية قائمة ثبتت بحيث يكون أحد أضلاع الزاوية القائمة أفقيا والآخر راسيا والسائل يملأ الجزء الرأسي إلي ارتفاع l والأفقي إلي بعد l من الرأس حيث يوجد صنبور مغلق فإذا فتح الصنبور ووجد بعد زمن t أن سطح السائل في الجزء الرأسي قد أنخفض مسافة z فاثبت أن :

$$z = l(1 - Cos\,\omega t)$$

حيث $\omega^2 = \dfrac{g}{2l}$ ثم اوجد الضغط عند أي نقطة في الأنبوبة عند هذه اللحظة .

<u>الحل :</u>



نفرض أن S **بعد أي نقطة** A **في السائل عن** o **وان** q **سرعة أي نقطة** A **في اتجاه الأنبوبة ، من معادلة الاتصال يتضح أن :**

$$\frac{\partial q}{\partial S}=0$$

أي أن q **لا تعتمد علي** S **وهي بالتالي تساوي سرعة هبوط سطح السائل** $\dot{z}$

$$q=\dot{z},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ولكن الحركة غير دورانية وبإدخال جهد السرعة Φ

$$q=-\frac{\partial \Phi}{\partial S}$$
$$\Phi=-qS+Const.,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من معادلة برنولي

$$\frac{1}{2}q^{2}-\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\Omega+\frac{P}{\rho}=Const.,\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$\frac{1}{2}\dot{z}^{2}-\ddot{S}z+\Omega+\frac{P}{\rho}=Const.,\ldots\ldots\ldots(4)$$

إذا كانت النقطة A في الجزء الرأسي من الأنبوبة فان :

$$\Omega = -gS$$

وإذا كانت في الجزء الأفقي من الأنبوبة :

$$\Omega = -gl$$

بفرض أن P_o هي الضغط الجوي فان :

$$P = P_o \quad at \quad z = S \quad , \quad S = z + 2l$$

من المعادلة (4) نجد أن :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\dot{z}^2 - z\ddot{z} - gz - \frac{P_o}{\rho} = Const. \\ \frac{1}{2}\dot{z}^2 - (z+2l)\ddot{z} - gl + \frac{P_o}{\rho} = Const. \end{array}\right\}, \ldots\ldots\ldots(5)$$

بالطرح نجد أن :

$$\ddot{z} = -\frac{g}{2l}(z - l), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

وعلي ذلك تكون الحركة توافقية بسيطة

$$z - l = aCos\left(\sqrt{\frac{g}{2l}} + \alpha\right)$$

وحيث أن :

$$z = \dot{z} = 0 \quad at \quad t = 0$$
$$\therefore A = -l \quad , \quad \alpha = 0$$
$$z = l\left(1 - Cos\sqrt{\frac{g}{2l}}t\right)$$

ولإيجاد الضغط عند أي لحظة نوجد أولا الثابت في المعادلة (5) **ثم نعوض في المعادلة** (4)

$\because$ **السرعة في اتجاه المماس للمسار وتساوي** ωr

$$v = \alpha r^{n+1}$$

وبحساب $Curl\bar{v}$ **في الإحداثيات القطبية .**

$$Curl\bar{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+2}\right) = \alpha(n+2)r^{n}$$

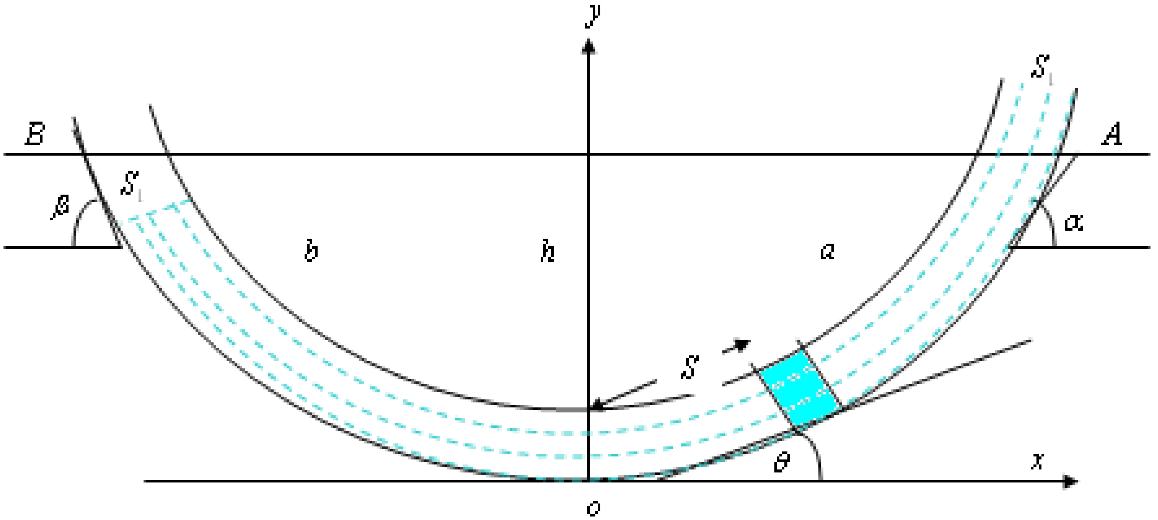
فإذا كانت $n = -2$ **فان** $Curl\bar{v}$ **يساوي الصفر وتكون الحركة غير دورانية .**

(٤) أنبوبة مفتوحة الطرفين علي شكل منحني مستوي موضوعة بحيث كان مستواها رأسيا والفتحتين إلي أعلي . أثبت أن زمن الذبذبة لسائل داخل الأنبوبة هو $2\pi\sqrt{\dfrac{a+b}{g(Sin\alpha + Sin\beta)}}$

حيث a,b **هما بعد أسفل نقطة من الأنبوبة من سطحي السائل في حالة الاتزان عند** AB **وكذلك** α, β **هما الزاويتان بين كل من المماسين عند** AB **والأفقي .**

<u>الحل :</u>

نفرض أن o هي أسفل نقطة من الأنبوبة ، A, B مستوي اتزان السائل في الأنبوبة ، h ارتفاع A, B عن o ، θ زاوية ميل الأنبوبة عند نقطة منها علي بعد S من o كما بالرسم .



ولنفرض انه في اللحظة t أزيح السائل مسافة صغيرة S أعلي الأنبوبة من اتزان . فإذا كانت u هي السرعة وحيث أن المائع غير قابل للانضغاط فان معادلة الاتصال تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial S} = 0$$

وعلي ذلك فان العجلة هي :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial S}$$

أي أن العجلة تصبح مساوية ل $\frac{\partial u}{\partial t}$ ، وعلي ذلك فان معادلة الحركة تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-gSin\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\,\frac{dy}{dS}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S}$$

وبالتكامل وباعتبار t ثابت نجد أن :

$$S\,\frac{\partial u}{\partial t}=-gy-\frac{P}{\rho}+f\left(t\right)$$

حيث $f\left(t\right)$ ثابت التكامل اللحظي وذلك باعتبار السائل غير قابل للانضغاط وبأخذ القيم عند طرفي الأنبوبة في نفس اللحظة نجد أن :

$$\left(a+S_1\right)\frac{\partial u}{\partial t}=-g\left(h+S_1Sin\alpha\right)-\frac{P_o}{\rho}+f\left(t\right)$$
$$-\left(b-S_1\right)\frac{\partial u}{\partial t}=-g\left(h-S_1Sin\beta\right)-\frac{P_o}{\rho}+f\left(t\right)$$

حيث P_o الضغط الجوي ، وبالطرح نجد أن :

$$\left(a+b\right)\frac{\partial u}{\partial t}=-gS_1\left(Sin\alpha+Sin\beta\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2}=\ddot{S}_1$$

حيث $u=\frac{dS_1}{dt}$

$$\therefore (a+b)\ddot{S}_1=-gS_1(Sin\alpha+Sin\beta)$$
$$\ddot{S}_1=\frac{-g(Sin\alpha+Sin\beta)}{a+b}S_1$$

وهذه تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة وزمنها الدوري

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{a+b}{g(Sin\alpha+Sin\beta)}}$$

(٥) أنبوبة طولها l (مساحة مقطعها يقل بانتظام) تميل علي الأفقي بزاوية α وهناك تيار منتظم من الماء (مائع غير قابل للانضغاط) يمر من الفتحة العليا إلي الفتحة السفلي . فإذا كان نصف قطر الفتحة العليا ضعف نصف قطر الفتحة السفلي وكان تيار الماء الخارج من الفتحة السفلي تحت ضغط يساوي الضغط الجوي بينما كان الضغط عند الفتحة العليا ضعف الضغط الجوي فاوجد السرعة التي يخرج بها الماء من الفتحة السفلي .

<u>الحل :</u>

نفرض أن q_1 هي السرعة التي يدخل ب ها تيار الماء الي الانبوبة وأن q_2 هي السرعة التي يخرج بها تيار لماء من الانبوبة من طرفها الآخر.

ولنفرض أن a نصف قطر القاعدة السفلي ، $2a$ نصف قطر القاعدة العليا . وبأخذ الافقي المار بمركز القاعدة العلوية معرفا لمستوي الصفر لطاقة الموضع وبفرض أن P_o هو الضغط الجوي فإن

P_o يكون هو الضغط عند الحافة التي يخرج منها تيار الماء ، $2P_o$ هو الضغط عند الحافة التي يدخل منها تيار الماء.

وحيث أن الحركة لازمنية والمائع غير قابل للانضغاط فإن معادلة برنولي تأخذ الصورة :

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}q^2+\Omega=C$$

حيث C ثابت .

وعند الطرف العلوي يكون :

$$\frac{2P_o}{\rho}+\frac{1}{2}q_1^2+o=C......................(1)$$

ويلاحظ أن $(-glSin\alpha)$ تمثل طاقة الوضع لوحدة الكتل عند الطرف السفلي نتيجة لقوة الجاذبية بينما طاقة الوضع عند الطرف العلوي تساوي صفر كما فرضنا .

ولذلك فانه عند الطرف السفلي يكون :

$$\frac{P_o}{\rho}+\frac{1}{2}q_2^2-glSin\alpha=C.....................(2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :

$$\frac{2P_o}{\rho}+\frac{1}{2}q_1^2=\frac{P_o}{\rho}+\frac{1}{2}q_2^2-glSin\alpha...............(3)$$

وحيث أن المائع غير قابل للانضغاط فان معادلة الاتصال تأخذ الصورة :

$$q_1\left(4\pi a^2\right)=q_2\pi a^2$$

$$\therefore q_2 = 4q_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

وبحذف q_1 **بين** (3) ، (4) **نجد أن :**

$$\frac{15}{32} q_2^2 = glSin\alpha + \frac{P_o}{\rho}$$

$$\therefore q_2^2 = \frac{32}{15}\left(glSin\alpha + \frac{P_o}{\rho} \right)$$

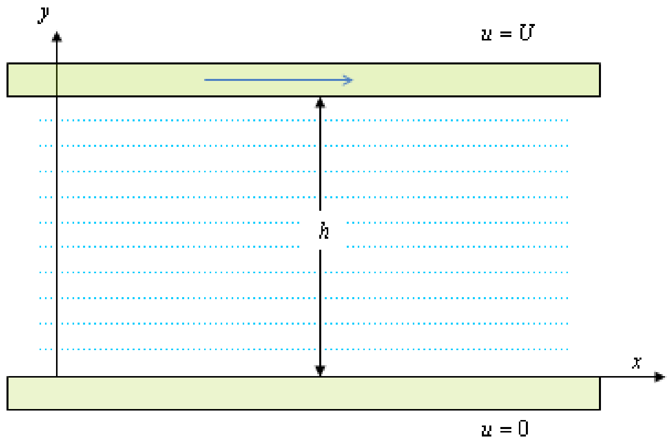
وهذه هي المعادلة التي تبين سرعة الخروج من الفتحة السفلي .

حلول بعض مسائل حركة الموائع اللزجة الغير قابلة للانضغاط
Exat Solutions of Viscous Incompressible Flow

لا يوجد حل عام لمعادلات نافيير ستوكس لحركة المائع اللزج . ورغم ذلك فهناك مسائل محدودة أمكن حلها ومعظمها مرتبطة بالحركة في بعد واحد أو في وجود تماثل اسطواني والسرعات ليست كبيرة في حالة السريان الرقائقي (Laminar Flow) وسوف ندرس فيما يلي بعض هذه المسائل .

(١) سريان كويت اللازمنى Steady Couette Flow :

أو السريان في قناة مستوية لا نهائية الطول . وهو الحركة في بعد واحد ويناظر حركة مائع لزج بين مستويين لا نهائيين متوازيين إحداهما ثابت والآخر متحرك بسرعة ثابتة U والحركة لا تعتمد علي الزمن .



حركة السائل تكون في اتجاه محور x وبذلك تكون $v = w = 0$ ، وكذلك تكون $P = Const.$.
بالتعويض في معادلة الاتصال (بفرض أن المائع غير قابل للانضغاط) تؤول معادلة الاتصال إلي :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

وبالتعويض في معادلة نافيير ستوكس في اتجاه محور x تصبح معادلة الحركة في اتجاه محور x هي

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C_1$$

ومنها

$$u = C_1 y + C_2$$

والشروط الحدية في المسألة هي :

$u = 0$ عندما $y = 0$ ومنها نجد أن $C_2 = 0$

$u = U$ عندما $y = h$ ومنها نجد أن $C_1 = \frac{U}{h}$

$$\therefore u = \frac{U}{h} y$$

والإجهاد :

$$P_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$P_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{du}{dy} = C_1 \mu = \mu \frac{U}{h}$$

ويلاحظ انه ثابت في كل الفراغ بين المستويين . والسرعة المتوسطة في هذه الحالة تتعين من :

$$\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u dy = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{U}{h} y dy = \frac{U}{h^2}\frac{h^2}{2}$$

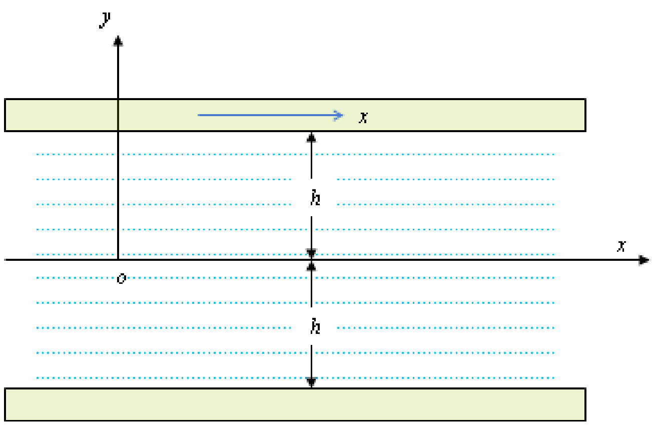
$$\therefore \bar{u} = \frac{U}{2}$$

سريان بوازيل اللازمنى Steady Poiseuille Flow :

وهو عبارة عن حركة مائع لزج بين مستويين متوازيين طويلين طولا كبيرا بحيث يكون التدرج في الضغط غير مساو للصفر ولكن صغير وهو الأساس في الحركة بينما في حالة سريان كويت فكان التدرج في الضغط مساويا للصفر وكان سبب الحركة هو الحركة النسبية بين المستويين .

بفرض أن محور x في منتصف المسافة بين المستويين وان $2h$ هي المسافة بين المستويين ، الحركة في بعد واحد في اتجاه محور x فيكون $v = w = 0$ وبالتعويض في معادلة الاتصال وتؤول عندئذ إلي :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \dots\dots\dots (1)$$



ومنها نجد أن :

$$u = u(y), \dots\dots\dots (2)$$

بكتابة معادلة الحركة في اتجاه محور x ، y **:**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \dots\dots\dots (3)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \dots\dots\dots\dots (4)$$

$\therefore$ **معادلة الحركة في اتجاه محور** y **:**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

ومنها

$$P = P(x), \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx}$$

ومن معادلة الحركة في اتجاه محور x **:**

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\dots\dots (6)$$

حيث $\upsilon = \dfrac{\mu}{\rho}$

الطرف الأيسر في (6) دالة في x فقط بينما الطرف الأيمن دالـة فـي y فقط وهذا لا يحـدث إلا إذا كان كلا من الطرفين يساوي مقدار ثابت .

$$\upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = Const.$$

$$\upsilon \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = Const.$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\rho \upsilon} \frac{dP}{dx} y + C_1$$

$$u = \frac{1}{2\mu\rho} \frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

وباستخدام الشروط الحدية وهي :

عندما $y = \pm h$ كانت $u = 0$ نجد أن :

$$C_2 = \frac{1}{2\mu\rho} \frac{dP}{dx} h^2 \quad ، \quad C_1 = 0$$

وبذلك يكون قانون السرعة يعطي في الصورة :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(y^2 + h^2 \right)$$

والإجهاد P_{xy} يعطي من الصورة :

$$P_{xy} = \mu \frac{du}{dy} = \frac{\mu}{\rho \upsilon} \frac{dP}{dx} y$$

$$\therefore P_{xy} = \frac{dP}{dx} y$$

وبوضع $y = \pm h$ نحصل علي الإجهاد علي الجدران . السرعة المتوسطة $\bar{u}$ تتعين من المعادلة :

$$\bar{u} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} u dy = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(y^2 + h^2\right) dy = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \int_{-h}^{h} \left(y^2 + h^2\right) dy$$

$$\bar{u} = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[\frac{y^3}{3} + h^2 y \right]_{-h}^{h} = -\frac{1}{3\mu} \frac{dP}{dx} h.$$

(٣) سريان بوازيل الاسطوانى :

تحتوي معادلات الحركة علي حد به مؤثر لابلاس مما يجعل الحركة من الرتبة الثانية ولكن هذه المعادلة تأخذ شكلا سهلا في حالة وجود تماثل اسطواني في حالة الحركة بين اسطوانتين دائريتين طويلتين نستخدم الإحداثيات الاسطوانية بدلا من الإحداثيات الكرتيزية تؤدي معادلة الاتصال إلي أن:

$$v = v(r)$$

ومعادلة الحركة تأخذ الصورة :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\rho\mu} \left(\frac{dP}{dz} \right), \ldots\ldots\ldots.(1)$$

وحيث أن احد الطرفين داله في r والآخر في z ، وتكامل المعادلة (1) يعطي :

$$r\frac{dv}{dr}=\frac{1}{2\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)r^2+C_1$$
$$\frac{dv}{dr}=\frac{1}{2\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)r+\frac{C_1}{r}$$

وتكامل المعادلة السابقة يعطي :

$$v=\frac{1}{4\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)r^2+C_1\ln r+C_2,..........(2)$$

وتعين الثوابت C_1,C_2 من الشروط الحدية ، حيث أن الاسطوانتين ثابتتين فيكون :

$$v(R_1)=0 \quad ، \quad v(R_2)=0$$

وعندما تكون احدي الاسطوانتين تدور بسرعة زاوية Ω_1 فتكون سرعتها الخطية $R_1\Omega_1$ وتدور الثانية بسرعة زاوية Ω_1 وتكون سرعنها الخطية $R_2\Omega_2$ وبذلك يكون لدينا شرطين لتعيين C_1,C_2 .

وفي حالة اسطوانة واحدة لتعيين C_1,C_2 يكون لدينا علي جدار الأنبوبة $v(R)=0$ وتكون السرعة محدودة وبالتالي في هذه الحالة يكون $C_1=0$ ويصبح قانون السرعة :

$$v=\frac{1}{4\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(r^2-R^2\right)$$

ويمكن حل المسألة السابقة باستخدام الإحداثيات الكرتيزية وذلك بفرض أن السرعة ω دالة في y, z ولا تعتمد علي x ومركبات السرعة $u = v = 0$ حيث x هو محور الاسطوانة ومعادلة مقطع الاسطوانة هي $y^2 + z^2 = R^2$ ويكون الضغط دالة في x فقط وبكتابة معادلة الحركة :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{1}{4\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right) = Const.,.........(3)$$

وبوضع الحل علي الصورة :

$$\omega = C\left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2}\right)$$

وبالتعويض في معادلة (3) نحصل علي قيمة C وبذلك يكون الحل هو :

$$\omega = \frac{1}{4\rho\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(y^2 + z^2 - R^2\right) = \frac{1}{4\rho\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(r^2 - R^2\right)$$

ويمكن حساب التدفق أو التصرف للمائع في الثانية خلال مقطع للاسطوانة علي الصورة :

$$Q = 2\pi\rho\int_0^R \omega r\,dr$$

$$Q = 2\pi\rho\left(\frac{dP}{dz}\right)R^3$$

أي أن التصرف يتناسب طرديا مع مكعب القطر وتدرج الضغط وهو ما يسمي بقانون بوازيل .

مثال (١)

اسطوانة مقطعها مستطيل محدد بالمستقيمات $x = \pm a$ ، $y = \pm b$ أوجد قانون سرعة مائع لزج يمر داخل الاسطوانة الطويلة .

الحل :

معادلة الاتصال تؤدي إلي أن السرعة W لا تعتمد علي z والتغيير في الضغط لا يعتمد علي كلا من x, y والسرعة W من معادلات الحركة تحقق المعادلة :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right), \dots\dots\dots (1)$$

والشروط الحدية هي :

$$W = 0 \quad ، \quad x = \pm a \quad ، \quad y = \pm b$$

ويمكن أخذ حل خاص للمعادلة (1) يحقق الشروط الحدية $x = \pm a$ فيكون :

$$W_1 = \frac{1}{2\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(a^2 - x^2\right), \dots\dots\dots (2)$$

وبجعل المعادلة (1) مجموع حلين إحداهما W_1 أي أن :

$$W = W_1 + W_2$$

وبالتعويض في معادلة (1) نحصل علي :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0,..........(3)$$

أي أن معادلـة بواسـون (1) تحولـت إلـي معادلـة لابـلاس (3) والتـي يمكـن حلهـا باسـتخدام فصـل المتغيرات بوضع :

$$W_2(x,y)=X(x)Y(y)$$

وتؤول معادلة لابلاس إلي المعادلتين التفاضليتين :

$$-\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=Const.=C_n^2$$

وحل هاتين المعادلتين هو

$$X_n=A_n Cos(C_n x)+B_n Sin(C_n x)$$
$$Y_n=C_n Cosh(C_n y)+D_n Sinh(C_n y)$$

ومن تماثل المسألة فلابد أن تكون الدالة W دالـة زوجيـة فـي كـلا مـن x,y ولمـا كانـت W_1 زوجيـة فلابد أن تكون W_2 أيضا زوجية وهذا يعني أن :

$$B_n=D_n=0$$

وبذلك نحصل علي :

$$W_2=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Cos(C_n x)Cosh(C_n y)$$

وبذلك يكون حل المعادلة (1) هو :

$$W=\frac{1}{2\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(a^2-x^2\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Cos(C_n x)Cosh(C_n y)$$

والشروط الحدية هي $W=0$ عندما $x=\pm a$:

$$\therefore CosC_n a=0\Rightarrow C_n=\left(\frac{2n+1}{2a}\right)\pi$$

وبذلك الشرط $W=0$ عندما $y=\pm b$ يعطي :

$$-\frac{1}{2\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(a^2-x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Cos(2n+1)\frac{\pi x}{2a}Cosh(2n+1)\frac{\pi b}{2a}$$

وبضرب كلا من الطرفين في $Cos(2n+1)\frac{\pi x}{a}$ والتكامل من $-a$ إلي a نحصل علي :

$$\frac{-1}{2\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)\frac{Cos(2n+1)\pi x}{a}dx=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\left(Cosh(2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)\times\int_{-a}^{a}Cos(2n+1)\frac{\pi x}{a}Cos(2n+1)\frac{\pi x}{2a}dx$$

$$\lambda_n=\frac{1}{2\rho\mu}\frac{(-1)^n 32a^2\left(\frac{dP}{dz}\right)}{\pi^3(2n+1)^3 Cosh(2n+1)\frac{\pi b}{2a}}$$

ويكون قانون السرعة علي الصورة :

$$W=\frac{1}{2\rho\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(a^2+x^2\right)-\frac{32a^2}{\pi^3}\times\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n Cos(2n+1)\frac{\pi x}{2a}Cosh(2n+1)\frac{\pi y}{2a}}{(2n+1)\frac{\pi b}{2a}}\right]\right]$$

الحركة المعتمدة على الزمن لمستوي لا نهائى فى مائع لزج غير قابل للانضغاط :

من المسائل التي يمكن إيجاد حل مضبوط لها هي مسالة حركة مستوي لا نهائي تحرك فجأة في مستواه بسرعة ثابتة أو تذبذب في مستواه في مائع لزج وهي حركة في بعد واحد ولكن معتمدة علي الزمن . وفي هذه الحالة نجد أن :

$$v=w=0$$
$$u=u(y,t)$$

ومعادلة الحركة تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},..........(1)$$

والشروط في حالة الحركة المفاجئة هي :

$$u(y,0)=0 \quad ، \quad y>0$$

$$u(0,t)=u_o \quad ، \quad u(\infty,t)=0$$

ويمكن تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية (1) إلي معادلة تفاضلية عادية وذلك بوضع :

$$\eta=\frac{y}{2\sqrt{\upsilon t}} \quad ، \quad u=u_o f(\eta)$$

فتأخذ المعادلة (1) الصورة :

$$f''+2\eta f'=0,..........(2)$$

تحت الشروط الحدية :

$$f(0)=1 \quad ، \quad f(\infty)=0$$

وبتكامل المعادلة (2) مرتين نحصل علي :

$$f(\eta)=C_1\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta+C_2$$

$$C_1 = 1 \quad ، \quad C_2 = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

وقانون السرعة يأخذ الصورة :

$$u = u_o (1 - erf\eta)$$

حيث $erf\eta$ **هي دالة الخطأ التي لها الصورة :**

$$erf\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\eta} e^{-\eta^2} d\eta$$

وفي حالة ذبذبة المستوي بسرعة $u_o Cos(nt)$ **فيمكن وضع :**

$$u(0,t) = u_o Cos(nt) = u_o \operatorname{Re}\left(e^{\text{int}}\right)$$

ويمكن وضع الحل في الصورة :

$$u(y,t) = \operatorname{Re}\left(e^{\text{int}}\right) f(y)$$

ومعادلة الحركة تأخذ الصورة :

$$f'' = \frac{in}{\upsilon} f$$

وبفرض أن الحل محدود عند ما لانهاية فنحصل علي :

$$f(y) = Ae^{-\sqrt{\frac{in}{\upsilon}}y} = Ae^{-\sqrt{\frac{n}{2\upsilon}}y}$$

$$f(y) = u_o e^{-\sqrt{\frac{n}{2\upsilon}}y} Cos\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2\upsilon}}y\right).$$

تمارين

(١) سائل غير قابل للانضغاط موضوع داخل اسطوانة دائرية مقفلة تدور حول محورها فإذا بدأت الحركة من السكون تحت تأثير القوة :

$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{2}(\gamma-\beta) \quad ; \quad P=\frac{1}{2}\omega^2 r^2+\frac{1}{2}\rho\left(\alpha x^2+(\beta+\gamma)xy+\lambda y^2\right)$$

حيث r **البعد عن المحور ،** ω **السرعة الزاوية حيث** $\omega=\omega(t)$ **.**

(٢) AB **أنبوبة رفيعة منتظمة المقطع علي شكل ربع دائرة نصف قطرها** a **ومركزها** O **. فإذا وضعت بحيث كان** OA **أفقيا ،** OB **رأسيا حيث** B **أسفل** O **وإذا ملئت الأنبوبة بسائل كثافته** ρ **(حيث** ρ **ثابت) والطرف** B **مقفولا ثم فتح الطرف** B **فجأة فأثبت انه عند** $t=0$ **يكون** $\frac{du}{du}=2g/\pi$ **حيث** $u=u(t)$ **هي السرعة . أثبت كذلك أن الضغط عند نقطة بعدها الزاوي عن** A **هو** B **ينزل مباشرة إلي** $P_o+3ga\left(Sin\theta-\frac{2\theta}{\pi}\right)$ **حيث** p_o **الضغط الجوي . أثبت كذلك أنه عندما يكون المائع المتبقي في الأنبوبة يصنع زاوية** β **عند المركز فان :**

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}=-\frac{2g}{a\beta}Sin^2\frac{\beta}{2}$$

الباب الثالث
الحركة المستوية لمائع مثالي
Two-Dimensional Motion of an Ideal Fluid

(١) تعريف الحركة في بعدين :

إذا كانت المتغيرات للحركة لا تعتمد علي البعد الثالث z مثلا (في الإحداثيات الكرتيزية) كذلك سرعة السائل في هذا الاتجاه تساوي صفر أي أن :

$$W = 0 \quad ، \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \ldots\ldots\ldots (1)$$

في هذه الحالة يقال أن حركة السائل هي حركة في بعدين . فمثلا إذا تكلمنا عن أي منحني أو أي خط في هذا المستوي فان هذا يعني إننا نتكلم عن اسطوانة لا نهائية لها المقطع هو هذا المنحني إذا إننا نتكلم عن مستوي ممتد إلي ما لانهاية له المقطع العمودي هو هذا الخط وعلي ذلك يكفي لدراسة هذه الحركة دراستها فقط في احد المستويات العمودية علي البعد الثالث z لأنه في جميع هذه المستويات تكون الحركة متشابهة .

(٢) دالة الانسياب Stream Function :

من معادلة الاتصال :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0$$

بوضع الشروط لحركة السائل في هذا الباب وهي :

١ ـ الحركة جهدية للسائل أي سوف توجد دالة جهد السرعة Φ بحيث تكون السرعة علي الصورة :

$$\vec{q} = grad\Phi = \nabla\Phi, ...(2)$$

في هذه الحالة سوف تكون الحركة غير دورانية أي أن متجه الدوامة :

$$\vec{\xi} = 0, ...(3)$$

٢ ـ السائل مثالي وغير قابل للانضغاط فيكون في هذه الحالة الكثافة مقدار ثابت .

$$\rho = Const., ...(4)$$

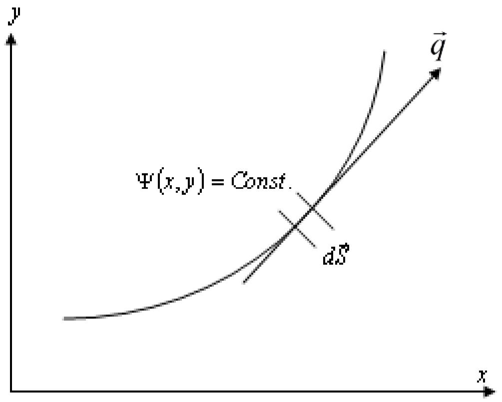
٣ ـ حركة السائل في بعدين أي يتحقق الشرط (1) من شروط الحركة في بعدين أي أن $W = 0$ وبالتعويض في معادلة الاتصال تصبح في الصورة :

$$divq = 0$$

أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,..........(5)$$

حيث u,v **مركبات السرعة** q **في اتجاه** x,y **. نعتبر الآن خط الانسياب في السائل فتكون سرعة أي جزي من جزيئات السائل علي هذا الخط تكون في اتجاه المماس لهذا الخط وعلي ذلك يمكن الحصول علي معادلة هذا الخط الذي ستكون في الصورة :**



$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

(لاحظ أن $\vec{q}$ **تكون في نفس اتجاه** $d\vec{S}$ **علي الخط)**
والتي يمكن وضعها في الصورة :

$$vdx-udy=0,......................(6)$$

فإذا فرضنا أن معادلة خط الانسياب هو الخط :

$$\Psi(x,y)=Const.,..................(7)$$

وبتفاضل المعادلة (7) **نحصل علي المعادلة التفاضلية لخط الانسياب وهي :**

$$d\psi=0$$

$$\therefore\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy=0,..........(8)$$

المعادلة (8) **هي نفسها المعادلة** (6) **وبمقارنة المعادلتين نجد أن :**

$$\left.\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{aligned}\right\},..........(9)$$

هذه الدالة $\Psi(x, y, z)$ **تسمي بدالة الانسياب وبما أن الحركة جهدية فيكون من الشرط** (3) **أن :**

$$\vec{q} = u\vec{i} + v\vec{j} = grad\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j}$$

ومن هذه العلاقة نحصل علي :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}\right\},..........(10)$$

ومن العلاقات (10) **،** (9) **نحصل علي الشروط الآتية :**

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &== \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\},..........(11)$$

ومن معادلة الاتصال (5) **نحصل علي :**

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi=\nabla^2\Phi$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{q}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0,..........(12)$$

أي أن الدالة Φ دالة جهد السرعة تحقق معادلة لابلاس وكذلك من (10) :

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},.............(13)$$

وعلي ذلك نحصل من (11) علي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \quad ، \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

بالتعويض في (13) نحصل علي :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0$$

$$\therefore \nabla^2\Psi=0,............(14)$$

وعلي ذلك فان دالة الانسياب تحقق معادلة لابلاس .

ملحوظة (١) :

نلاحظ أن المعادلة (11) هي نفسها شروط كوشي ريمان لوجود الدالة التحليلية $W(z)$ كدالة في العدد المركب z حيث $z=x+iy,\left(i=\sqrt{-1}\right)$ في المستوي المركب وذلك علي الصورة :

$$W(z)=\Phi+i\Psi=\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)$$

ملحوظة (٢) :

$$\Psi(x,y)=Const.$$

حيث C ثابت اختياري وهذه المعادلة تمثل مجموعة من الخطوط الانسيابية وبإعطاء قيما مختلفة للثابت نحصل علي خطوط انسيابية مختلفة وكذلك :

$$\Phi(x,y)=Const.$$

تمثل مجموعة من خطوط تساوي الجهد . ومن العلاقات (11) يمكن أن نستنتج العلاقة الآتية من الدالتين Φ,Ψ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0,..........(15)$$

كما هو معروف من الرياضة البحتة فان العلاقة (15) هو شرط تعامد المنحنيات $\Phi(x,y)=Const$ ، $\Psi(x,y)=Const$.

<u>ولإثبات ذلك</u>

حيث أن العمودي للدالة $\Phi = Const.$ **هو** $grad\Phi = \vec{n}_1$ **وكذلك بالنسبة للدالة** $\Psi = Const.$ **هو** $grad\Psi = \vec{n}_2$ **بالتالي فان شرط التعامد يكون :**

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

ونستنتج من ذلك انه في حالة الحركة اللازمنية ذات الجهد في مستوي المائع فان خطوط الانسياب وخطوط الجهد تتقاطع علي التعامد .

(٣) تجميع الانسيابات الجهدية :

إذا كان لدينا انسيابيان جهديان وكان جهداهما Φ_1, Φ_2 **فان كلا من** Φ_1, Φ_2 **تحقق معادلة لابلاس أي أن :**

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0$$

في هذه الحالة يكون الجهد $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ **الناتج من جمع الجهدين** Φ_1, Φ_2 **يحقق معادلة لابلاس كذلك . أي أن** $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ **يمثل انسيابا جهديا لمائع غير قابل للانضغاط وذلك لان :**

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = \nabla^2 \Phi_1 + \nabla^2 \Phi_2 = 0$$

وفي هذه الحالة يكون :

$$q_x = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = q_{1x} + q_{2x}$$
$$q_y = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = q_{1y} + q_{2y}$$

بالمثل يمكن إثبات أن دالة الانسياب للانسياب الجديد هي :

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

حيث Ψ_1, Ψ_2 **هما دالتا الانسياب للانسيابين الأصليين .**

ملحوظة عن دالة الانسياب :

في حالة استخدام الإحداثيات القطبية يكون $\Psi = \Psi(r,\theta)$ **ومن ثم يكون :**

$$q_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad ، \quad q_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

أمثلة :

مثال(١) :

اوجد الشرط اللازم حتي تكون :

$$u = ax + by \quad ، \quad v = cx + dy$$

(حيث a, b, c, d ثوابت) هما مركبتا السرعة لحركة مائع غير قابل للانضغاط . اثبت أن الخطوط الانسيابية لهذه الحركة هي قطوع مخروطية علي وجه العموم وتكون قطوعا زائدة قائمة إذا كانت الحركة غير دورانية .

الحل :

معادلة الاتصال لمائع غير قابل للانضغاط هي :

$$div q = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

وبالتعويض عن u, v بالقيم المعطاه في المسألة نجد أن :

$$a + b = 0, ...(1)$$

وهذا هو الشرط اللازم حتي تكون الحركة ممكنة وبما أن :

$$\left.\begin{aligned} u = ax + by = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = cx + dy = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} , \ldots\ldots\ldots.(2)$$

حيث Ψ هي دالة الانسياب . وبتكامل المعادلة الأولي من (2) بالنسبة إلي y نجد أن :

$$-\Psi = axy + \frac{1}{2}by^2 + f(x)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلي x

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ay + f'(x)$$

وبالتعويض عن $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ من المعادلة الثانية في (2) نجد أن :

$$\begin{aligned} & -ay - f'(x) = cx + dy \\ & \therefore\ f'(x) = -(a+d)y + cx \\ & f'(x) = -cx \\ & f(x) = -\frac{1}{2}cx^2 + Const. \end{aligned}$$

وحيث أن الثابت اختياري فيمكن أخذه مساويا الصفر .

$$f(x)=-\frac{1}{2}cx^2$$
$$\therefore -\Psi = axy+\frac{1}{2}by^2-\frac{1}{2}cx^2$$

$\therefore$ **معادلة الخطوط الانسيابية هي :**

$$axy+\frac{1}{2}by^2-\frac{1}{2}cx^2=Const.$$

وهذه هي معادلة من الدرجة الثانيـة في (x,y) ولـهذا فهـي تمثل علـي وجـه العموم مجموعـة من القطوع المخروطية . وإذا كانت الحركة غير دورانية فان يجب أن يكون :

$$\vec{\xi}=0 \quad ، \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{q}=0$$
$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

وبالتعويض عن u,v بدلالة Ψ نجد أن :

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0$$
$$\therefore \nabla^2\Psi=0$$

أي أن يجـب أن يكـون $c-b=0$ ومنـهـا $c=b$ وعندئـذ تـؤول معادلـة الخطـوط الانسـيابية إلــي الصورة :

$$bx^2-2axy-by^2=Const.$$

وهذه المعادلة الأخيرة تمثل مجموعة من القطوع الزائدة القائمة وذلك لأن معامل $x^2 \neq$ معامل y^2 يساوي الصفر .

مثال(٢) :

إذا كانت دالة الانسياب لحركة مستوية لمائع معطاه في الصورة :

$$\Psi = cr^2\theta$$

حيث (r,θ) الاحداثيان القطبيان ، c ثابت . اوجد متجه الدوامة ومتجه السرعة عند أي نقطة .

الحل :

$$\Psi = cr^2\theta$$
$$q_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = -cr$$
$$q_\theta = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 2cr\theta$$
$$\vec{q} = -cr\vec{e}_r + 2cr\theta\vec{e}_\theta$$

في الإحداثيات المنحنية يكون :

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1q_1 & h_2q_2 & h_3q_3 \end{vmatrix}$$

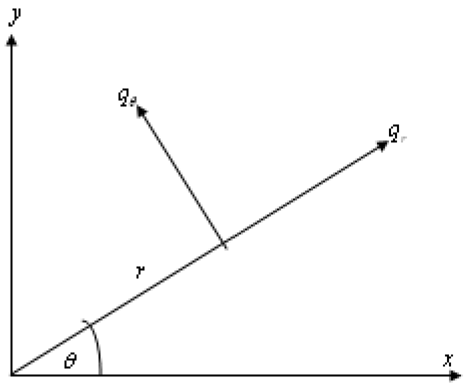
وفي حالة الإحداثيات الاسطوانية يكون :

$$h_1 = 1 \;،\; h_2 = r \;،\; h_3 = 1$$

$$\vec{\xi} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -cr & 2cr^2\theta & 0 \end{vmatrix} = 4c\theta\vec{e}_z$$

أي أن متجه الدوامة ξ يكون في اتجاه z .

طريقة آخري للحل :



$$u = q_r Cos\theta - q_\theta Sin\theta = -crCos\theta - 2crSin\theta$$
$$v = q_r Sin\theta - q_\theta Cos\theta = -crSin\theta + 2crCos\theta$$

ولكن :

$$x = rCos\theta$$
$$y = rSin\theta$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

عندئذ يكون :

$$u = -cx - 2cy\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \;،\; v = -cy - 2cx\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبذلك يكون :

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -cx - 2cy \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & -cy - 2cx \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد نجد أن :

$$\xi = 4c\theta\vec{k}$$

متجه الدوامة ξ يكون في اتجاه z .

الباب الرابع
دراسة حركة سائل بمعلومية دالة الجهد المركب

دالة الجهد المركب :

في الحركة الجهدية للسائل المثالي الغير قابل للانضغاط في بعدين يمكن تركيب الدالـة $W(z)$ في المتغير المركب z علي الصورة :

$$W(z)=\Phi(x,y)+i\Psi(x,y),..........(1)$$

حيث Φ هي دالة جهد السرعة ، Ψ هي دالة الانسياب وذلك إذ أن هـاتين الـدالتان تحققـان شـروط كوشـي – ريمـان لوجـود الدالـة التحليليـة $W(z)$ ، Φ,Ψ تحققـان معادلـة لابـلاس . الدالـة $W(z)$ تسمي بدالة الجهد المركب .

$$\therefore \frac{dW}{dz}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z},..........(2)$$

$$W=\Phi+i\Psi$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}&=\frac{\partial \Phi}{\partial x}+i\frac{\partial \Psi}{\partial x}\\ \frac{\partial W}{\partial y}&=\frac{\partial \Phi}{\partial y}+i\frac{\partial \Psi}{\partial y}\end{aligned}\right\},.....................(3)$$

وحيث أن :

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad ، \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}, ...(4)$$

ونعلم أن :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}\right\}, ...(5)$$

$$\therefore \frac{dW}{dz} = (u - iv)\frac{1}{2} - (v - iu)\frac{1}{2}i$$

$$\frac{dW}{dz} = u - iv, ...(6)$$

وعلي ذلك فان $\frac{dW}{dz}$ **هي الدالة المرافقة للدالة** $u + iv$ **التي تسمي بدالة السرعة المركبة** q **.**

$$\therefore q = u + iv \quad ، \quad \bar{q} = u - iv = \frac{dW}{dz}$$

إذا ساوينا الدالة $\Phi(x, y) = C_1$ **بمقدار ثابت نحصل علي مجموعة من المنحنيات تسمي <u>بمنحنيات تساوي الجهد</u> . أما إذا ساوينا** $\Psi(x, y) = C_2$ **حيث** C_2 **ثابت فنحصل علي مجموعة من المنحنيات تسمي <u>بخطوط الانسياب</u> . هذه المجاميع من المنحنيات تكون متعامدة أي إنها تتقاطع**

علي التعامد . والآن خط الانسياب هو أحد خطوط مجموعة المنحنيات (خطوط الانسياب) فيكون مركبات المتجه العمودي علي هذا المنحني هو المتجه :

$$\vec{n}_1 = grad\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)$$

وبالمثل يكون المتجه العمودي علي منحني تساوي الجهد هو :

$$\vec{n}_2 = grad\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

وبضربها قياسيا نحصل علي :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -v(u) + uv = 0$$

أي أن $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ متجهان متعامدان .

أي أن خطوط تساوي الجهد وخطوط الانسياب يتقاطعان علي التعامد . ومن ذلك يمكن معرفة حركة السائل بمعلومية الجهد المركب لهذه الحركة $W(z)$ الذي فيه الكمية الحقيقية (الجزء الحقيقي) يمثل دالة جهد السرعة Φ والجزء التخيلي يمثل دالة الانسياب Ψ وبمساواة Φ بمقدار ثابت يمكن إيجاد خطوط تساوي الجهد وكذلك يمكن تعيين خطوط الانسياب الذي يكون سرعة السائل عند أي نقطة عليها في اتجاه المماس لها بمساواة Ψ بمقدار ثابت . أما سرعة أي نقطة في السائل فيمكن إيجادها من معرفة السرعة المركبة $q = u + iv$ والذي يمكن معرفة الجزء الحقيقي

u (مركبة سرعة السائل في اتجاه محور x) والجزء التخيلي v (مركبة سرعة السائل في اتجاه محور y) وذلك من معرفة السرعة المركبة المرافقة $\bar{q}$ حيث :

$$\bar{q} = \frac{dW}{dz} = u - iv$$

وتكون سرعة أي نقطة في السائل هي المقدار $q = \sqrt{u^2 + v^2}$.

وإذا طبقنا معادلة برنولي وذلك بمعلومية دالة الجهد للقوي الخارجية المؤثرة علي السائل Ω نحصل علي الضغط عند أي نقطة في السائل وذلك من المعادلة :

$$\frac{q^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Omega = Const.$$

إذا كان السائل لا تؤثر عليه أي قوي خارجية فيكون $\Omega = 0$ ونحصل علي الضغط P في الصورة :

$$\frac{P}{\rho} = Const. - \frac{q^2}{2}$$

١ ـ دراسة حركة سائل دالة الجهد المركب له هي $W = UZ$ (انسياب منتظم) حيث U مقدار ثابت :

أولا : تعيين خطوط الانسياب وخطوط تساوى الجهد :

$$\because W = UZ$$
$$\Phi + i\Psi = U(x + iy)$$

بمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية في الطرفين نحصل علي :

$$\Phi = Ux$$
$$\Psi = Uy$$

<u>خطوط تساوى الجهد</u> ونحصل عليها من :

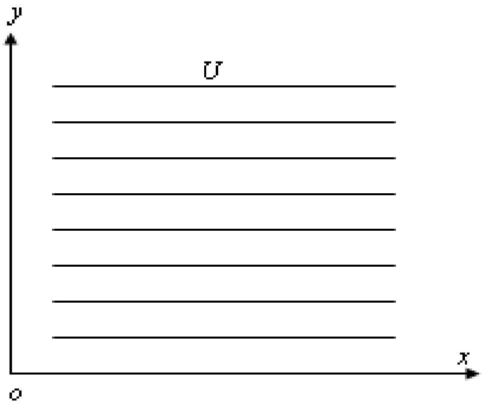
$$\Phi = Ux = Const. = C$$
$$x = \frac{C}{U} = \alpha$$

وهي عبارة عن خطوط مستقيمة توازي محور y الذي هو نفسه أحد هذه الخطوط بوضع $\alpha = 0$.

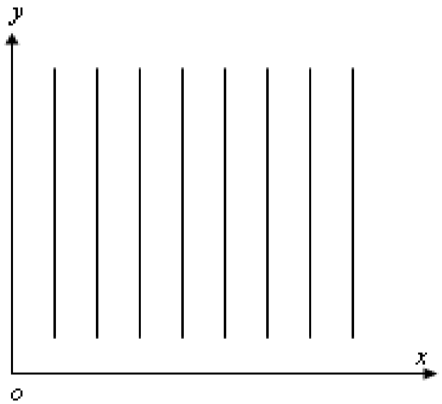
<u>خطوط الانسياب :</u> و تتعين من :

$$\Psi = Uy_1 = C'$$
$$\therefore y = \frac{C'}{U} = \alpha'$$

وهي خطوط مستقيمة توازي محور x والذي هو نفسه أحد هذه الخطوط عند $\alpha' = 0$.



خطوط الانسياب



خطوط تساوي الجهد

وبما أن خطوط الانسياب تبين الحركة واتجاهها فانه بذلك ينتج أن هذا الجهد المركب هو الجهد المركب لسائل يتحرك في اتجاه محور x وسرعة أي نقطة في السائل تتعين من :

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U$$

$$\therefore u = U \quad ، \quad v = 0$$

أي أن السائل يتحرك عند أي نقطة فيه بسرعة U في اتجاه محور x وفي الاتجاه الموجب لهذا المحور . ومركبة السرعة في اتجاه محور y تساوي صفر وبذلك يكون $W = UZ$ يمثل حركة سائل يتحرك في اتجاه محور x وبسرعة ثابتة U وفي الاتجاه الموجب لهذا المحور .

ملاحظات :

١ـ نلاحظ أن خطوط الانسياب وخطوط تساوي الجهد هي خطوط متعامدة .

٢ـ نفرض أن القوي المؤثرة علي السائل تساوي الصفر فيكون Ω دالة الجهد لهذه القوي تساوي الصفر وباستعمال معادلة برنولي .

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} + \Omega = Const.$$

بالتعويض نجد أن :

$$q^2 = U^2$$
$$\therefore \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}U = Const.$$

$\because$ U ثابت

$\therefore$ P تساوي مقدار ثابت .

وبذلك يكون الضغط عند أي نقطة في السائل ذات الجهد المركب $W = UZ$ دائما ثابت عند جميع نقط السائل .

٢ـ دراسة حركة سائل له الجهد المركب $W = AZ^2$ حيث A مقدار ثابت موجب :

نوجد أولا خطوط الانسياب وخطوط تساوي الجهد وذلك بمساواة:

$$W = AZ^2 = A(x+iy)^2 = A\left(x^2 + 2ixy - y^2\right)$$
$$W = \Phi + i\Psi$$
$$\Phi + i\Psi = A\left(x^2 + 2ixy - y^2\right)$$
$$\therefore \Phi = A\left(x^2 - y^2\right), \Psi = 2Axy$$

خطوط تساوي الجهد تتعين من مساواة Φ بمقدار ثابت

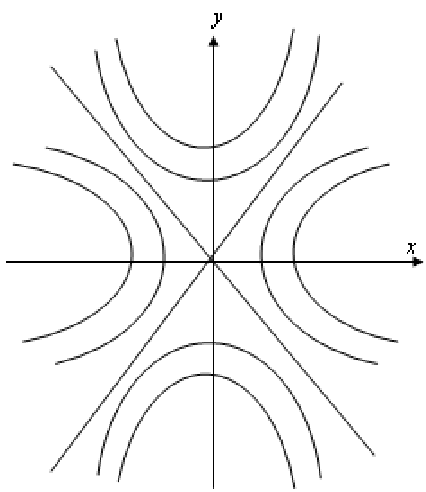
$$A\left(x^2 - y^2\right) = Const. = C$$
$$x^2 - y^2 = \frac{C}{A} = \alpha^2$$

وهذه المعادلات تمثل مجموعة من المنحنيات كل منها عبارة عن قطع زائد .

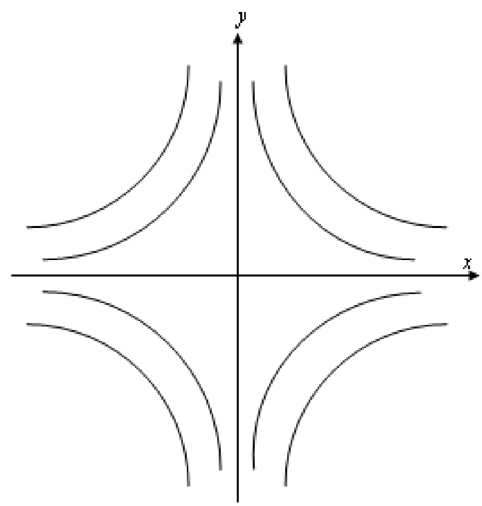
<u>وخطوط الانسياب تتعين من :</u>

$$2Axy = C'$$
$$xy = \frac{C'}{2A} = \alpha'$$

وهي عبارة عن مجموعة من القطاعات الذائدة القائمة التي لها محاور الإحداثيات هي محاور تقريبية ($\alpha' = 0$ تعطي $x = 0$ ، $y = 0$ وهما نفسها محاور الإحداثيات وهي المحاور التقريبية لهذه القطاعات الزائدة القائمة) ويمكن ملاحظة أن المحاور التقريبية لخطوط تساوي الجهد هي المحاور $x^2 - y^2 = 0$ والتي تتعين من الخطين المستقيمين $x + y = 0$ ، $x - y = 0$ وهما خطين متعامدين يميل كل منهما بزاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الأفقي ، $\frac{3\pi}{4}$ مع الأفقي .



خطوط تساوي الجهد



خطوط الانسياب

ولتعيين مركبات السرعة نعين السرعة المركبة المرافقة $\frac{dW}{dz}$:

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = 2AZ = 2A(x + iy)$$
$$u = 2Ax, v = -2Ay$$

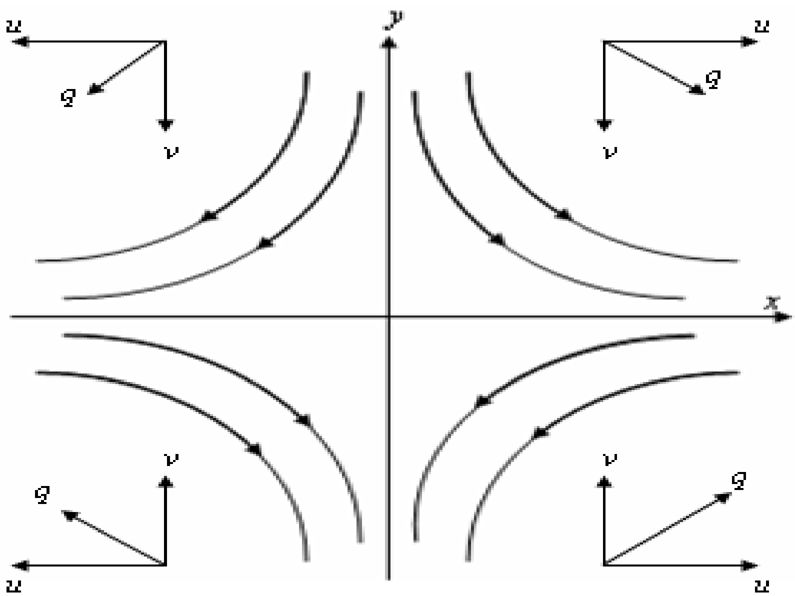
وهي مركبات السرعة عند أي نقطة . ولتعيين اتجاه الحركة في السائل نعتبر نقطة في كل ربع من الأركان الأربعة في المستوي . فمثلا إذا كان السائل في الربع الأول نجد أن x **موجبة ،** y **موجبة فيكون :**

$$v < 0 \quad ، \quad u > 0$$

في الربع الثاني نجد أن x **سالبة ،** y **موجبة فيكون** u **سالبة ،** v **سالبة .**

في الربع الثاني نجد أن x **سالبة ،** y **سالبة فيكون** u **سالبة ،** v **موجبة .**

في الربع الثاني نجد أن x **موجبة ،** y **سالبة فيكون** u **موجبة ،** v **موجبة .**



وهكذا يمكن تعيين اتجاه السرعة المحصلة $q=\sqrt{u^2+v^2}$ التي هي اتجاه حركة السائل عند كل من الأركان الأربعة للمستوي كما هي مبينة بالشكل . حركة السائل تبين الأسهم ويمكن إيجاد الضغط عند أي نقطة في السائل من معادلة برنولي كما سبق .

٣- دراسة حركة سائل الجهد المركب له $W=A\ln z$ (A ثابت) :

$$W=A\ln z=\Phi+i\Psi,..........(1)$$

وبوضع $z=re^{i\theta}$

$$\Phi+i\Psi=A\ln\left(re^{i\theta}\right)=A\ln r+A\ln e^{i\theta}$$
$$\Phi+i\Psi=A\ln r+iA\theta$$
$$\therefore\Phi=A\ln r,...........................(2)$$
$$\therefore\Psi=A\theta,..............................(3)$$

ولإيجاد خطوط تساوي الجهد وخطوط الانسياب نضع :

$$\Phi=A\ln r=C$$
$$\therefore\ln r=\frac{C}{A}\Rightarrow r=e^{\frac{C}{A}}=a$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=a$$
$$\therefore x^2+y^2=a^2$$

وهذه المنحنيات عبارة عن مجموعة من الدوائر متحدة المركز (نقطة الأصل لها هي نقطة الأصل للمحاور):

$$\Psi = A\theta = C_1$$
$$\theta = \frac{C_1}{A} = \alpha$$

حيث α ثابت وهذه المعادلات هي عبارة عن معادلات خطوط الانسياب وهي عبارة عن خطوط مستقيمة يمر كل منها بنقطة الأصل . ولكي نعين اتجاه حركة السائل نعين سرعة نقطة السائل واتجاهاتها .

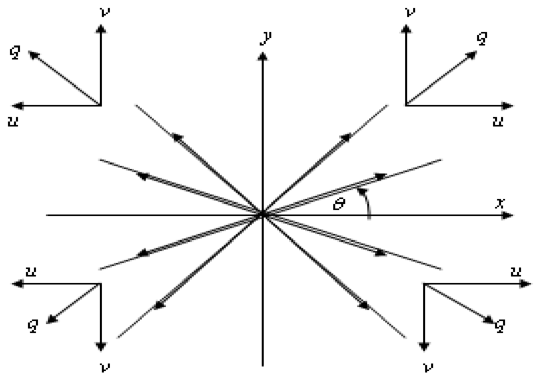
$$\frac{dW}{dz} = u - iv = \frac{A}{z} = \frac{A}{r}e^{-i\theta}$$
$$u - iv = \frac{A}{r}\left(Cos\theta + iSin\theta\right)$$
$$\therefore u = \frac{A}{r}Cos\theta$$
$$\therefore v = \frac{A}{r}Sin\theta$$

في الربع الأول نجد أن θ حادة بين الصفر ، $\frac{\pi}{2}$ وتكون u موجبة ، v موجبة .

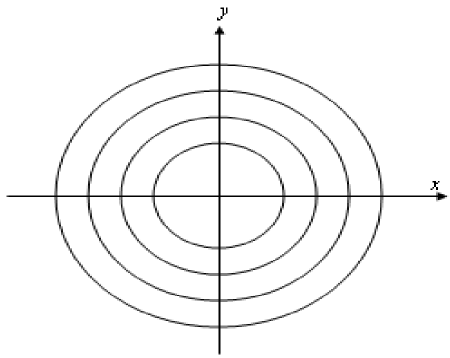
في الربع الثاني $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ تكون u سالبة ، v موجبة .

في الربع الثالث $\pi > \theta > \frac{3\pi}{4}$ تكون u سالبة ، v سالبة .

في الربع الرابع $\frac{3\pi}{4} > \theta > 2\pi$ تكون u موجبة ، v سالبة .



خطوط الانسياب



خطوط تساوي الجهد

وعلي ذلك نجد أن اتجاه حركة السائل هي دائما حركة في خطوط مستقيمة كلها خارجة من نقطة الأصل

وعلي ذلك نحصل أن الجهد المركب $A \ln z$ هو جهد مركب لسائل يتحرك دائما في خطوط مستقيمة وخارج من نقطة الأصل أي خارج من منبع موجود عند نقطة الأصل ولذلك فان هذا الجهد المركب هو الجهد المركب لمنبع في مستوي (Source) . كما أن الجهد المركب $-A \ln z$ هو نفس الدراسة السابقة ولكن نجد أن حركة السائل ستكون إلي الداخل لذلك يسمي هذا الجهد المركب للمصب (Sink)

في بعدين .

<u>ملاحظة :</u>

عند نقطة الأصل $z = 0$ فيكون سرعة السائل عند هذه النقطة تساوي كمية لا نهائية $u \to \infty$ ، $v \to \infty$ وتسمي النقط التي عندها السرعة كمية لا نهائية بالنقط الحدية أو النقط الشاذة ويمكن عزل هذه النقط واعتبار السائل مباشرة بعد هذه النقطة .

فيض السائل (حجم السائل الذي يخرج) :

هو كمية السائل المتدفقة من المنبع .

$$Q = 2\pi r(q)$$

حيث q **محصلة السرعة .**

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{A^2}{r^2}Cos^2\theta + \frac{A^2}{r^2}Sin^2\theta}$$

$$q = \frac{A}{r}$$

$$\therefore Q = 2\pi A = Const. \Rightarrow A = \frac{Q}{2\pi}$$

وعلي ذلك يمكن وضع الجهد المركب للمنبع أو المصب :

$$W = A\ln z = \frac{Q}{2\pi}\ln z \qquad (Source)$$

$$W = -A\ln z = -\frac{Q}{2\pi}\ln z \qquad (Sink)$$

(وتسمي Q **بقدرة المنبع أو المصب) إذا كان لدينا منبع عند النقطة** $z = a$ **مثلا فان الجهد المركب هو :**

$$W = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - a)$$

وعند وجود مجموعة من المنابع ذات القدرة عند النقط :

$$Q_1, Q_2, ..., Q_n$$

عند النقط : $a_1, a_2, ..., a_n$

فيكون الجهد المركب لهما هو :

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{2\pi} \ln(z - a_i).$$

وبفرض أن هناك توزيع منتظم لمنابع علي خط مستقيم من نقطة A ال $-A$ بحيث أن القدرة لوحدة الأطوال من هذا الخط المستقيم هي Q ونريد حساب الجهد المركب لهذه الحركة للسائل نجد انه سوف يساوي :

$$W = \int_{-A}^{A} \frac{Q}{2\pi} \ln(z - x) dx$$

حيث أخذ الخط المستقيم هو محور x مثلا ويمكن إجراء حساب هذا الجهد بعد إجراء عملية التكامل
(بالنسبة إلي x) .

<u>الجهد المركب لمزدوج Doublets :</u>

المزدوج هو عبارة عن منبع ومصب قدرتهما واحدة Q البعد بينهما ξ بحيث $Q \to \infty$ ، $\xi \to 0$ في نفس الوقت بينما يظل حاصل الضرب $\frac{Q\xi}{2\pi}$ مقدار محدود M مثلا يسمي بشدة المزدوج .

باعتبار منبع عند النقطة $z=-\xi$ ومصب عند النقطة $z=0$ حيث ξ كمية حقيقية . فيكون الجهد المركب الناتج عن هذين المنبع والمصب الذي لها الشدة Q هو :

$$W=W_1+W_2=\frac{Q}{2\pi}\ln(z+\xi)+\left(-\frac{Q}{2\pi}\ln z\right)$$
$$W=\frac{Q}{2\pi}\left[\ln(z+\xi)-\ln z\right]$$

وبأخذ النهاية عندما $\frac{Q}{2\pi}\to\infty$ ، $\xi\to 0$ وعندما يكون $\frac{Q\xi}{2\pi}$ دائما مقدار محدودا M فان هذا التكوين يسمي بالمزدوج . الجهد المركب لسائل يتحرك في وجود مزدوج هو :

$$W=\lim_{\substack{Q\to\infty\\ \xi\to 0}}\frac{Q}{2\pi}\left[\ln(z+\xi)-\ln z\right]=\lim_{\substack{Q\to\infty\\ \xi\to 0}}\frac{Q}{2\pi}\,\frac{\ln(z+\xi)-\ln z}{z+\xi-z}$$
$$W=M\lim_{\xi\to 0}\frac{\ln(z+\xi)-\ln z}{z+\xi-z}=M\frac{d}{dz}(\ln z)$$

لأن الصورة لهذه النهاية هي نفسها تعريف التفاضل للدالة $\ln z$ وعلي هذا يكون الجهد المركب للمزدوج هو :

$$W=\frac{M}{z}$$

حيث M هي شدة المزدوج .

دراسة حركة السائل :

$$W=\Phi+i\Psi=\frac{M}{x+iy}=\frac{M(x-iy)}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \Phi=\frac{Mx}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \Psi=-\frac{My}{x^2+y^2}$$

خطوط الانسياب تعطى من :

$$\Psi=-\frac{My}{x^2+y^2}=C$$

$$\therefore x^2+y^2+\frac{M}{C}y=0$$

$$x^2+\left(y+\frac{M}{2C}\right)^2=\frac{M^2}{4C^2}$$

والمعادلة السابقة تمثل مجموعة من الدوائر أنصاف أقطارها $\frac{M}{2C}$ **ومراكزها عند النقط** $\left(0,-\frac{M}{2C}\right)$ **أي تقع مراكزها علي محور** y **وكذلك تمس هذه الدوائر المحور** x **عند نقطة الأصل .**

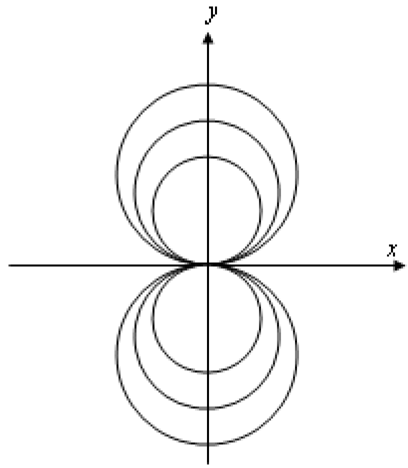
وخطوط تساوي الجهد تعطى من

$$\Phi=\frac{Mx}{x^2+y^2}=C_1$$

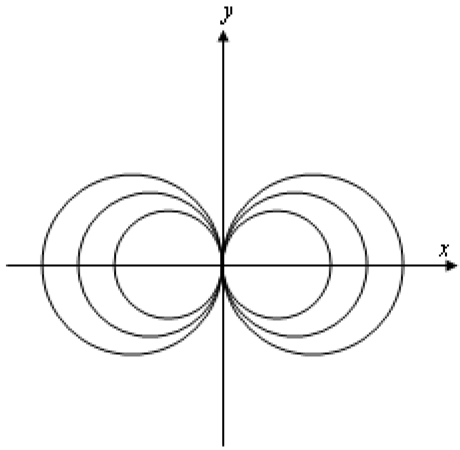
$$x^2 + y^2 - \frac{Mx}{C_1}x = 0$$

$$\left(x - \frac{Mx}{2C_1}\right) + y^2 = \frac{M^2}{4C_1^2}$$

وهي تمثل مجموعة من الدوائر التي تتماس جميعها عند نقطة الأصل ومراكزها عند النقط الموجودة علي محور x أي النقط $\left(\frac{M}{2C_1}, 0\right)$ وأنصاف أقطار هذه الدوائر هي $\frac{M}{2C_1}$.



خطوط الانسياب واتجاه حركة السائل



خطوط تساوي الجهد

واضح أن خطوط الانسياب وخطوط تساوي الجهد تتقاطعان علي التعامد.

<u>إيجاد اتجاه حركة السائل:</u>

تعين سرعة واتجاه حركة السائل من :

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = -\frac{M}{z^2} = -\frac{M}{r^2 e^{2i\theta}} = -\frac{M}{r^2}\left[Cos2\theta - iSin2\theta\right]$$

$$\therefore u = -\frac{M}{r^2}Cos2\theta$$

$$\therefore v = \frac{M}{r^2}Sin2\theta$$

ويمكن تعيين اتجاه حركة السائل بأخذ نقطة معينة في أي ربع ونعين اتجاه السرعة في هذا الربع فنجدها كما بالرسم .

ملحوظة:

نلاحظ أن النقط $z = 0$ عندها السرعة تساوي ∞ وهذه تسمي بنقط الحيود أو النقط الحدية وتسمي أيضا بالنقط الحرجة (الشاذة) ويمكن عزل هذه النقطة عن بقية السائل . كما نلاحظ أن اتجاه حركة السائل ستكون من المنبع إلي المصب المكونان للمزدوج.

٥- دراسة حركة سائل الجهد المركب له $W = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$:

حيث Γ مقدار ثابت حقيقي موجب .

$$W = \Phi + i\Psi = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left(re^{i\theta}\right)$$

$$\therefore \Phi + i\Psi = \frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\ln r + i\theta\right) = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$

$$\therefore \Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = Const.$$
$$\therefore \Phi = -\frac{\Gamma\theta}{2\pi} = Const$$

خطوط الانسياب :

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = Const$$
$$\ln r = C \Rightarrow r = Const.$$

وهي دوائر متحدة المركز عند نقطة الأصل $r = 0$ **وخطوط تساوي الجهد هي :**

$$\Phi = C_1$$
$$-\frac{\Gamma\theta}{2\pi} = C_1 \Rightarrow \theta = Const.$$

وهي خطوط تمر كلها بنقطة الأصل . ولتعيين اتجاه حركة السائل نوجد اتجاه سرعة أي نقطة متحركة من نقط السائل .

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}$$
$$u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{i\Gamma}{2\pi} [Cos\theta - iSin\theta]$$
$$\therefore u = \frac{\Gamma}{2\pi r} Sin\theta \quad ، \quad v = -\frac{\Gamma}{2\pi r} Cos\theta$$

عند نقطة الأصل $z = 0$ **نجد أن السرعة تساوي** ∞ **أي أن هذه النقطة نقطة حرجة ويمكن عزلها عن بقية أجزاء السائل . وبأخذ نقطة في المستوي وتعيين اتجاه الحركة لكل نقطة فنجد أن اتجاه**

حركة السائل عند نقطة في الربع الأول (θ حادة) سيكون $v<0$ ، $u>0$ وهكذا بالنسبة لباقي نقط المستوي . فنجد أن السائل سوف يدور في دوائر متحدة المركز وفي اتجاه عقارب الساعة ويقال أن السائل في هذه الحالة يتحرك في وجود ما يسمي بالدوامة ويكون الجهد :

$$W=\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$$

هو الجهد المركب للدوامة .

اللف :

لف السائل حول نقطة الأصل أو حول أي منحني مقفل يحيط بنقطة الأصل يعطي من :

$$\oint \vec{q}\cdot d\vec{S}=\oint\left(udx+vdy\right)$$

وبالتعويض عن قيم u,v السابقة نجد أن :

$$\text{اللف}\qquad =\oint\left(\frac{\Gamma}{2\pi r}Sin\theta dx-\frac{\Gamma}{2\pi r}Cos\theta dy\right),..........\otimes$$

وحيث أن :

$$\begin{aligned}
&x=rCos\theta\\
&y=rSin\theta\\
&dx=-rSin\theta d\theta+Cos\theta dr\\
&dy=-rCos\theta d\theta+Sin\theta dr
\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيم dx, dy في المعادلة $\otimes$ نحصل علي :

$$\text{اللف} = \oint\left[\frac{\Gamma}{2\pi r}Sin\theta\left(-rSin\theta d\theta + Cos\theta dr\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}Cos\theta\left(rCos\theta d\theta + Sin\theta dr\right)\right]$$

$$\text{اللف} = \oint -\frac{\Gamma}{2\pi r}\left(Sin^2\theta + Cos^2\theta\right)d\theta = \oint -\frac{\Gamma}{2\pi r}d\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\cdot 2\pi = -\Gamma$$

أي أن الثابت الحقيقي الموجب Γ هو اللف بإشارة سالبة والإشارة السالبة تبين اتجاه اللف إذ انه في اتجاه عقارب الساعة وعلي هذا يكون $W = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$ يمثل الجهد المركب لدوامة في مستوي ذات اللف $-\Gamma$.

٦- دراسة حركة سائل الجهد المركب له $W = A\sqrt{z}$:

$$\therefore \Phi + i\Psi = A\sqrt{z} = A(x+iy)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\Phi + i\Psi)^2 = A^2(x+iy)$$
$$\Phi^2 + 2i\Phi\Psi - \Psi^2 = A^2(x+iy)$$
$$\Phi^2 - \Psi^2 = A^2x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2\Phi\Psi = A^2y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

لإيجاد خطوط الانسياب نضع $\Psi = C$ نحصل علي :

$$\Phi^2 - C^2 = A^2x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$2\Phi C = A^2y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

بالتعويض من (4) في (3) نحصل علي :

$$\frac{A^4 y^2}{4C^2} - C^2 = A^2 x$$

$$y^2 = \frac{4C^2}{A^2}x + \frac{4C^4}{A^4}$$

$$\therefore y^2 = \frac{4C^2}{A^2}\left(x + \frac{C^2}{A^2}\right), \ldots\ldots\ldots(5)$$

المعادلة (5) هي معادلة تمثل مجموعة من القطاعات التي محورها المشترك هو محور x ولكن في الاتجاه الموجب لهذا المحور ورؤوسها عند النقطة $\left(-\frac{C^2}{A^2}, 0\right)$ ولإيجاد خطوط تساوي الجهد نضع $\Phi = C'$ في معادلة (1) ، (2) :

$$C'^2 - \Psi^2 = A^2 x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$2C'\Psi = A^2 y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

بحذف Ψ بين المعادلتين :

$$\Psi = \frac{A^2 y}{2C'}$$

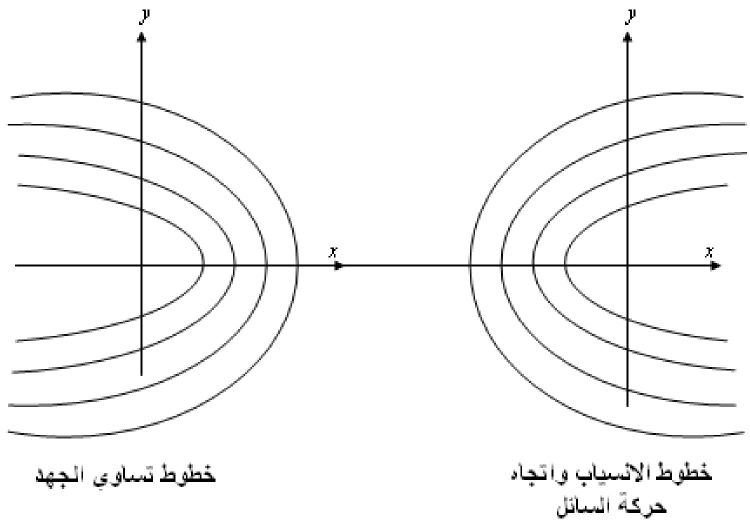
بالتعويض في المعادلة (6) :

$$C'^2 - \frac{A^4 y^2}{4C'^2} = A^2 x$$

وتكون معادلة خطوط تساوي الجهد هي :

$$y^2 = -\frac{4C'^2}{A^2}\left(x - \frac{C'^2}{A^2}\right)$$

وهي معادلة مجموعة من القطاعات المكافئة لها المحور المشترك هو محور x ولكن الاتجاه السالب لهذا المحور ورؤوسها عند النقطة $\left(\frac{C'^2}{A^2}, 0\right)$ كما بالرسم .



تعيين اتجاه حركة السائل :

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = \frac{A}{2\sqrt{z}} = \frac{A}{2\sqrt{r}}\,e^{-i\theta/2} = \frac{A}{2\sqrt{r}}\left(Cos\frac{\theta}{2} - iSin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore u = \frac{A}{2\sqrt{r}}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ ، } v = \frac{A}{2\sqrt{r}}Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ويمكن تعيين الاتجاه كما بالرسم وبأخذ نقطة محددة في أي ربع وكما نلاحظ أن $z=0$ هي نقطة حرجة ويمكن عزلها عن بقية السائل .

٧- دراسة حركة السائل الناتجة عن أكثر من جهد مركب :

نعتبر حركة السائل المكون من الجهدين المركبين :

١- $W_1 = UZ$ هو حركة سائل في اتجاه محور x الموجب وبسرعة ثابتة U .

٢- $W_2 = \dfrac{M}{Z}$ وهو حركة سائل الناتجة عن وجود مزدوج شدته M .

الجهد المركب الجديد هو :

$$W = W_1 + W_2 = UZ + \frac{M}{Z}$$

وهي حركة انسياب سائل في اتجاه محور x بسرعة U ثابتة وذلك عند وجود مزدوج عند نقطة الأصل .

بوضع $z = re^{i\theta}$ فيكون :

$$W = \Phi + i\Psi = Ure^{i\theta} + \frac{M}{r}e^{-i\theta}$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية نحصل علي :

$$\Phi = \left(U_r + \frac{M}{r}\right)Cos\theta$$

وبمساواة الأجزاء التخيلية نحصل علي :

$$\Psi = \left(U_r - \frac{M}{r} \right) Sin\theta$$

وسوف يهمنا دراسة حركة السائل وبذلك سوف نوجد فقط خطوط الانسياب والتي يمكن إيجاد معادلتها بوضع $\Psi = C$ **:**

$$\therefore U\left(r - \frac{M}{Ur} \right) Sin\theta = C, ...(3)$$

نأخذ الخط $\Psi = 0$ **أي عندما** $C = 0$ **فيكون معادلة هذا الخط :**

$$\therefore USin\theta\left(r - \frac{M}{Ur} \right) = 0, ...(4)$$

وهو خط مزدوج مكون من الخط الذي معادلته :

$$Sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi, ...(5)$$

واضح أن هذا الخط هو المحور الموجب لمحور x $(\theta = 0)$ **والمحور السالب لنفس المحور** x $(\theta = \pi)$ **. أما بقية خط الانسياب فهو منحني الذي معادلته هي :**

$$r - \frac{M}{Ur} = 0$$

$$\therefore r^2 = \frac{M}{U} = a^2, ...(6)$$

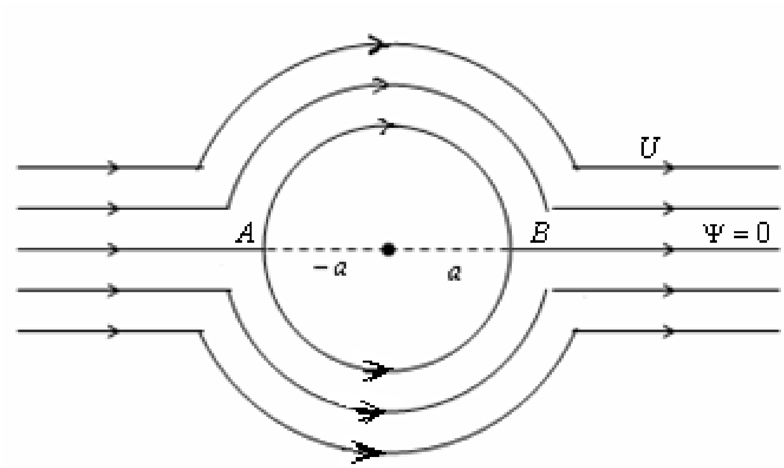
وهذه المعادلة تمثل معادلة دائرة نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل . وبذلك يكون خط الانسياب $\Psi = 0$ مكون من الجزء السالب لمحور x ثم الدائرة التي نصف قطرها a ثم الجزء الموجب لمحور x . فإذا أخذنا الدائرة التي نصف قطرها a كحائط ممتد إلي ما لانهاية مقطعه هذه الدائرة في المستوي xy فان هذه الحركة هي حركة سائل ينساب في وجود هذه الاسطوانة اللانهائية. ولتعيين بقية خطوط الانسياب وذلك باستخدام المعادلة (3) وبوضع :

$$x = rCos\theta$$
$$y = rSin\theta$$
$$\therefore r^2 = x^2 + y^2$$

فان المعادلة الكرتيزية لخطوط الانسياب هي :

$$C(x^2 + y^2) = Uy(x^2 + y^2 - a^2), \text{..........}(7)$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة وعند رسمها تكون كما بالشكل المبين :



ولإيجاد سرعة السائل نجد أن :

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z^2}\right)$$

حيث $\frac{M}{U} = a^2$ **وبالتفاضل بالنسبة إلي** z **نحصل علي :**

$$\frac{dW}{dz} = U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = u - iv$$

وعند $z = -\infty$ **نجد أن :**

$$q = u_{-\infty} - iv_{-\infty}$$

$$\therefore u_{-\infty} = U \quad ، \quad v_{-\infty} = 0$$

أي أن السائل سوف ينساب من $-\infty$ **بسرعة ثابتة** U **في اتجاه محور** x**. وكذلك إذا وضعنا** $z = \infty$ **نجد أن :**

$$q = u_{\infty} - iv_{\infty}$$

أي أن السائل سوف ينساب بسرعة U **إلي ما لانهاية لإيجاد النقط الحرجة (النقط التي عندها السرعة تساوي ما لانهاية) فسوف نجد أن نقطة الأصل هي النقطة التي عندها سرعة السائل لانهائية وهذه النقطة معزولة داخل السائل عن بقية السائل . أما لإيجاد نقط الخمود (النقط التي عندها تتلاشي السرعة) نجد إنها النقط التي عندها** $z = \pm a$ **.**

الحركة الدوامية Vortex Motion :

نفـرض أن $\vec{\xi} = Curl\vec{q} \equiv \left(\xi_x, \xi_y, \xi_z\right)$ وهـو المتجـه الـدوامي (الـدوراني) عنـد أي عنصـر مـن عناصر المائع وللحصول علي المعادلات التي تعطي معدل تغير مركبات المتجه الدوامي (الدوراني) وهي $\left(\frac{d\xi_x}{dt}, \frac{d\xi_y}{dt}, \frac{d\xi_z}{dt}\right)$ نستخدم معادلات أويلر للحركة :

$$\frac{\partial\vec{q}}{\partial t} - \vec{q} \wedge Curl\vec{q} = -grad\left[\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} + \Omega\right]$$

وبأخذ $Curl$ الطرفين نحصل علي :

$$\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} - Curl\left(\vec{q} \wedge \vec{\xi}\right) = 0$$

$$Curl\left(\vec{q} \wedge \vec{\xi}\right) = \left(\xi \cdot grad\right)\vec{q} - \left(\vec{q} \cdot qrad\right)\vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot div\vec{q} - \vec{q} \cdot div\vec{\xi}$$

وفي حالة الموائع الغير قابلة للانضغاط نجد أن :

$$div\vec{q} = 0$$

حيث

$$div\vec{\xi} = divCurl\vec{q} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} + \left(\vec{q} \cdot grad\right)\vec{\xi} - \left(\vec{\xi} \cdot grad\right)\vec{q} = 0$$

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \left(\vec{\xi} \cdot grad\right)\vec{q}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore \frac{d\xi_x}{dt} &= (\vec{\xi}\cdot grad)u\\ \therefore \frac{d\xi_y}{dt} &= (\vec{\xi}\cdot grad)v\\ \therefore \frac{d\xi_z}{dt} &= (\vec{\xi}\cdot grad)w\end{aligned}\right\},..........(I)$$

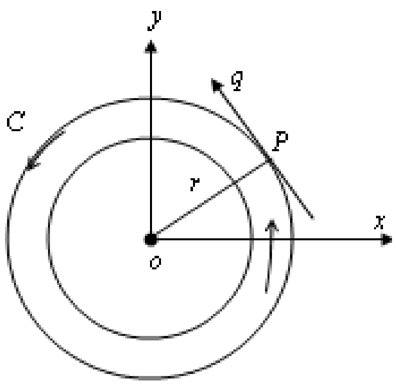
حيث $\vec{q}=(u,v,w)$.

الطرف الأيمن من المعادلة (I) تمثل تغير مركبات متجه الدوامة لعنصر المائع عندما تكون اللزوجة مساوية للصفر وفي هذه الحالة خطوط الدوامة تتحرك مع المائع . ومن المعادلة (I) نجد أن معدل تغير متجه الدوامة (الدوران) $\vec{\xi}$ يساوي الصفر فقط $\xi=0$ أي أن الدوامة لا تخلق ولا تفني من المائع .

الحركة الدوامية فى بعدين :

في هذه الحالة نجد أن :

$$\vec{\xi}=Curl\vec{q}=\left(0,0,\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$



أي أن الدوامة دائما في اتجاه محور z العمودي علي المستوي xy .

نعتبر أنبوبة دوامية دائرية نصف قطرها a في انسياب غير دوراني في بعدين خارج المنطقة المحددة بالدائرة $x^2+y^2=a^2$ والسائل ممتد إلي مالانهاية في جميع الاتجاهات ولا توجد أي منابع أو مصبات . نفرض أن

q هي السرعة المماسية عند النقطة P علي دائرة ذات نصف القطر r ومركزها عند o . ويعرف الدوران حول C علي انه :

$$\int qdS = 2\pi rq$$

ومن نظرية ستوكس ، الدوران السابق يجب أن يساوي فيض الدوامة الذي يعبر الفرض المحدد C أي أن :

$$2\pi rq = \iint_{\Sigma} Curl\vec{q}\cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{\xi}\cdot d\vec{\Sigma}$$

$$2\pi rq = \begin{Bmatrix} \pi r^2\xi & if & r<a \\ \pi a^2\omega & if & r>a \end{Bmatrix}, ...(I)$$

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{a^2\omega}{2r}, r>a \\ q &= \frac{1}{2}\omega r, r<a \end{aligned}\right\}, ...(II)$$

في العلاقة (II) يتضح لنا أن داخل الدوامة الدائرية المائع يدور كما لو كان جسم متماسك بالسرعة الزاوية $\frac{\omega}{2}$ حول o .

وإذا كان نصف قطر الدوامة الدائرية صغير جدا فالدوامة الدائرية تعرف علي إنها **Rectilinear Vortex** والدوامة K حول منحني محيط بالدوامة هو $\pi a^2\omega$ ، ومن (II) نجد أن :

$$q = \frac{K}{2\pi r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$\therefore \Phi = -\frac{K\theta}{2\pi}$$

دوامة خارج اسطوانة دائرية :

بفرض أن دوامة لها الشدة K عند النقطة $Z = Z_1$ خارج اسطوانة $|Z| = a$ فإذا كانت الحركة ترجع للدوامة فقط فيكون الجهد المركب علي الصورة :

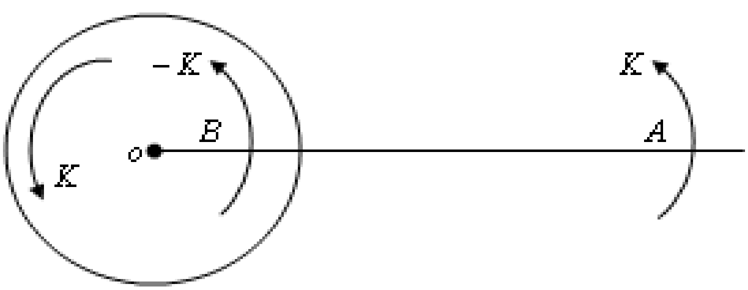
$$\omega = \frac{iK}{2\pi}\log(Z - Z_1)$$

وإذا نشأنا اسطوانة دائرية المقطع $|Z| = a$ في المائع فيكون الجهد المركب علي الصورة :

$$\omega = \frac{iK}{2\pi}\log(Z - Z_1) - \frac{iK}{2\pi}\log\left(\frac{a^2}{Z} - \bar{Z}_1\right)$$

$$\omega = \frac{iK}{2\pi}\log Z + \frac{iK}{2\pi}\log(Z - Z_1) - \frac{iK}{2\pi}\log\left(\frac{a^2}{Z} - \bar{Z}_1\right)$$

$\therefore$ صورة الدوامة خارج الاسطوانة الدائرية يتكون من دوامة لها الشدة $-K$ عند النقطة B علاوة علي دوامة آخري لها الشدة K عند المركز o .

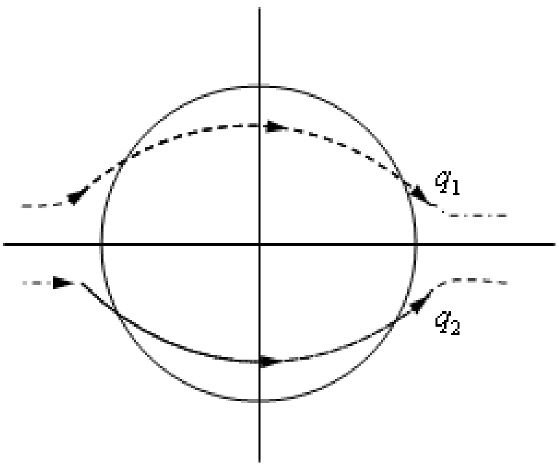


الانسياب مع الدوران حول اسطوانة دائرية :

للحصول علي انسياب دوراني علي اسطوانة نصف قطرها a يجب أن نضيف إلي الجهد المركب السابق (للانسياب بدون دوران) الجهد المركب لدوامة عند نقطة الأصل أي أن الجهد المركب للانسياب الدوراني يكون بالصورة :

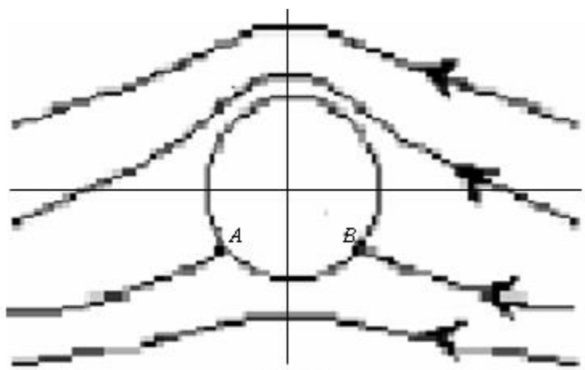
$$W = U\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln Z, \ldots\ldots\ldots(1)$$

وعلي هذا فعند كل نقطة M في مستوي الحركة نضيف إلي السرعة بدون دوران q_1 السرعة q_2 الناتجة عن الدوران البحت (الدوامة) وتكون سرعة M هي محصلة السرعتين q_1, q_2 كما بالشكل .



شكل (1)

وفي الحقيقة فان الانسياب الدوراني يمنع تماثل لخطوط الانسياب حيث انه الجزء العلوي تكون السرعة الناتجة عن الدوران البحت في نفس الاتجاه الذي تكون فيه السرعة الناتجة عن الانسياب دون دوران علي الاسطوانة بينما في الجزء السفلي تكون فيه السرعة الناتجة من الدوران البحت في الاتجاه المعاكس شكل (1) ويكون شكل الانسياب كما في الشكل (2).



شكل (2)

ولإيجاد النقط الحرجة نساوي السرعة المركبة بالصفر فنجد أن :

$$U\left(1-\frac{a^2}{Z^2}\right)+\frac{i\Gamma}{2\pi Z}=0,..........(2)$$

$$\because Z=re^{i\theta}$$

وعلي الاسطوانة $r=a$

$$\therefore Z=ae^{i\theta}$$

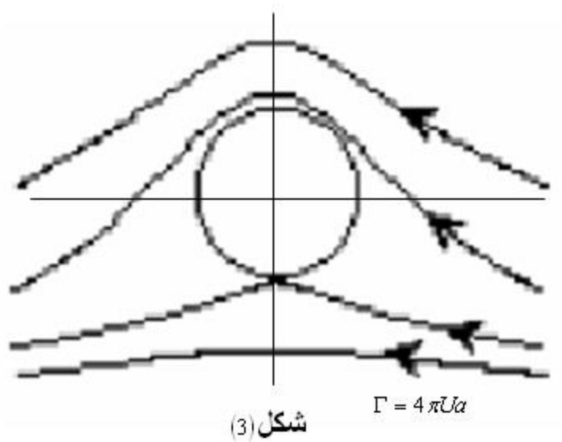
بالتعويض عن Z **في** (2) **:**

$$U\left(1-e^{-2i\theta}\right)+\frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{-i\theta}=0$$
$$U\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=-\frac{i\Gamma}{2\pi a}$$
$$U\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)=-\frac{\Gamma}{4\pi a}$$
$$\therefore Sin\theta=-\frac{i\Gamma}{4\pi Ua}$$

وواضح من هذه العلاقة إنها تناظر زاويتين $(\Gamma>0)$ في الربعين الثالث والرابع (لأن الجيب سالب) وموضح بالنقطتين الحرجتين A, B تتحركان إلي أسفل علي الاسطوانة وإذا كانت $\Gamma=4\pi Ua$ فان :

$$Sin\theta=-1$$

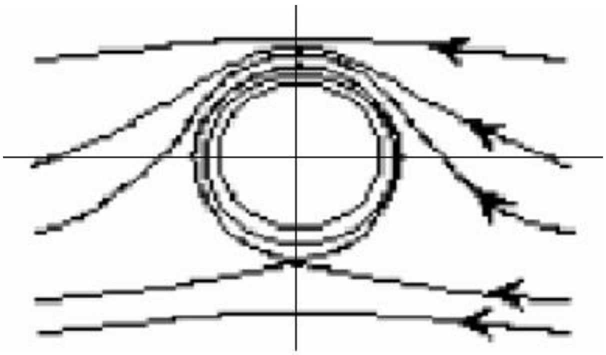
وهذا معناه أن النقطتين الحرجتين صارتا نقطة حرجة واحدة علي المحور الصادي كما في الشكل (3) .



شكل(3)

وإذا كانت $\Gamma > 4\pi Ua$ فان هذا معناه أن :

$$Sin\theta > -1$$


شكل(4)

وهذا لا يمكن أن يزيد جيب الزاوية عن الوحدة فان النقطة الحرجة تبعد عن الأسطوانة ويكون الانسياب كما في الشكل (4) . وفي هذه الحالة يكون جزء من المائع يدور حول الاسطوانة بحيث يظهر هذا الجزء الدائر من المائع كجزء منفصل من باقي المائع بخط انسيابي منفصل ويكون الدوران في هذه الحالة علي الاسطوانة مساويا لدوران الدوامة Γ .

نظرية الدائرة Circle Theory :

في الحركة المستوية الغير دورانية لمائع غير لزج وغير قابل للانضغاط وبدون وجود أجسام صلبة (No rigid boundaries) . وإذا كانت $W = f(Z)$ هي دالة الجهد المركب لهذا الانسياب حيث النقط الفريدة للدالة $f(Z)$ تقع علي بعد اكبر من a من نقطة الأصل وإذا وضعن اسطوانة دائرية قائمة طولها لانهائي محورها عمودي في مستوي الانسياب (محورها هو محور Z) وكانت الاسطوانة هي $|Z| = a$ في مجال الحركة فان الجهد المركب للحركة يصبح علي الصورة :

$$W = f(Z) + f\left(\frac{a^2}{Z}\right), \dots\dots\dots (1)$$

وذلك خارج الاسطوانة أي حيث $|Z| = a$.

البرهان :

بوضع $Z = re^{i\theta}$

$\therefore$ **علي الاسطوانة المذكورة يكون :**

$$Z = ae^{i\theta}$$
$$\bar{Z} = ae^{-i\theta}$$
$$\therefore Z\bar{Z} = a^2 \Rightarrow \bar{Z} = \frac{a^2}{Z}$$

حيث $\bar{Z}$ **مرافق** Z **. من** (1) **نجد أن :**

$$W = f(Z) + \bar{f}(\bar{Z})$$
$$\therefore W = f(Z) + \overline{f(Z)} = \text{كمية حقيقية}$$

لأن $f(Z)$ ، $\overline{f(Z)}$ **مترافقتان .**

$\therefore$ **علي الدائرة** $|Z| = a$ **يكون** $\Psi = 0$.

$\therefore$ **الدائرة** $|Z| = a$ **خط انسيابي .**

وحيث أن جميع النقط الفريدة للدالة $f(Z)$ **تقع خارج الدائرة** $|Z| = a$ **أي يقع في المنطقة** $|Z| < a$

وجود الاسطوانة لا يؤثر علي عدد النقط الفريدة في الانسياب الأصلي وأيضا $f(Z)$ ليس لها نقط فريدة عند نقطة الأصل وعلي ذلك $\bar{f}\left(\frac{a^2}{Z}\right)$ ليس لها نقط فريدة في اللانهاية أي أن الجهد المركب (1) يكون له نفس النقط الفريدة التي للدالة $f(Z)$ أي انه هو الجهد المطلوب .

<u>مثال :</u>

<u>الانسياب المنتظم علي اسطوانة ساكنة :</u>

سبق أن عرفنا أن الجهد المركب لانسياب منتظم سرعته U هو $W = UZ$

$$\therefore\ f(Z) = UZ$$
$$\bar{f}(Z) = U\bar{Z}$$
$$\bar{f}\left(\frac{a^2}{Z}\right) = U\,\frac{a^2}{Z}$$

وعلي ذلك فإذا أدخلنا في الانسياب الاسطوانة التي مقطعها $|Z| = a$ فان الجهد المركب خارجها $(|Z| = a)$ يصبح :

$$\overline{W} = f(Z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{Z}\right) = UZ + U\,\frac{a^2}{Z} = U\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)$$

بوضع $Z = re^{i\theta}$ نجد أن :

$$\overline{W} = U\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right) = \Phi + i\Psi$$

$$\Phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)Cos\theta$$

$$\Psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)Sin\theta$$

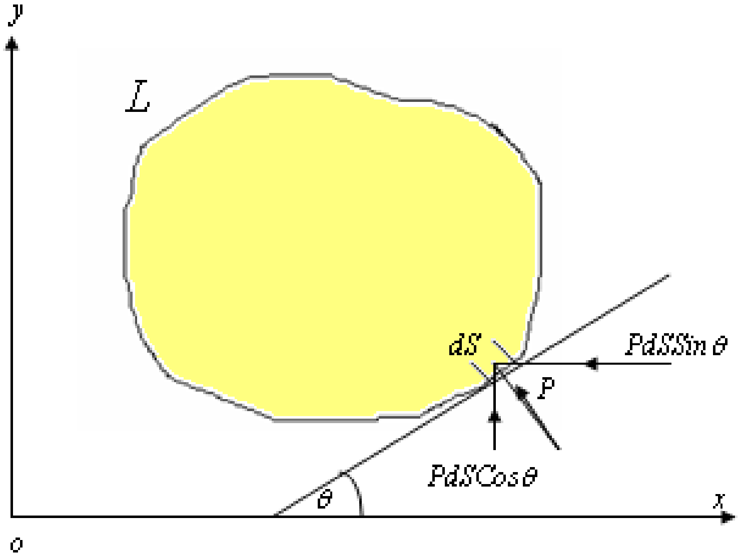
كما سبق .

نظرية جوكوفسكي للضغط المحصل أو نظرية بلاسيوس :

تعرضنا الآن لدراسة الانسياب للمستوي المعرف بالجهد المركب $W(Z)$ من الناحية الكينماتيكية . أما في هذا الجزء سوف نحاول إيجاد القوة المحصلة للضغط علي جسيم ينساب عليه مائع إذا كان الجهد المركب لهذا الانسياب معلوما. أول من تعرض لهذه المسألة هو جوكوفسكي عام ١٩٠٦م بفرض أن $W(Z)$ هي دالة الجهد المركب التي توصف حركة المائع حول حاجز اسطواني طوله الوحدة الذي سطحه في مستوي Z عبارة عن منحني بسيط مغلق L القوة المؤثرة علي هذا الحاجز تعطي من :

$$\overline{F} = X - iY = \frac{1}{2}i\rho\oint_L\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ$$

حيث X,Y تمثلان مركبات هذه القوي في الاتجاه الموجب للمحورين (x,y) ، ρ تمثل كثافة المائع .



القوة المؤثرة علي عنصر المساحة dS **قيمتها** PdS **حيث** P **يمثل الضغط بتحليل هذه القوة إلـي مركبتين إحداهما موازية لنحور** x **و الآخري موازية لمحور** y **.**

$$\overline{dF} = dX - idY$$
$$\therefore d\overline{F} = -PdSSin\theta - iPdSCos\theta = -iPdS\left(Cos\theta - iSin\theta\right)$$
$$\overline{F} = -i\int P\left(Cos\theta - iSin\theta\right)dS$$

وباعتبار الحركة لا زمنية والمائع غير قابل للانضغاط وإهمال القوي الجسمية فان الضـغط عنـد A **يمكن تعيينه من معادلة برنولي كالآتي :**

$$\frac{P}{\rho} + \frac{q^2}{2} + \Omega = C_1$$
$$P = C - \overset{=0}{\cancel{\rho\Omega}} - \frac{1}{2}\rho q^2$$

حيث q السرعة عند A

$$\therefore \overline{F}=-i\oint_L\left(C-\frac{1}{2}\rho q^2\right)(Cos\theta-iSin\theta)dS$$

$$\overline{F}=-i\oint_L C(Cos\theta-iSin\theta)dS+\frac{1}{2}i\rho\oint_L q^2(Cos\theta-iSin\theta)dS$$

$$\therefore \oint_L CCos\theta dS=\oint_L C\frac{dx}{dS}dS=C\oint_L dx=0$$

$$\oint_L CSin\theta dS=\oint_L C\frac{dy}{dS}dS=C\oint_L dy=0$$

وذلك انه بدوره كاملة علي L تأخذ (x,y) نفس القيم الابتدائية لها .

$$\overline{F}=\frac{1}{2}i\rho\oint_L q^2(Cos\theta-iSin\theta)dS$$

$$\frac{dW}{dZ}=u-iv=(qCos\theta-iqSin\theta)=q(Cos\theta-iSin\theta)=qe^{-i\theta}$$

$$\therefore q=e^{i\theta}\frac{dW}{dZ}$$

$$\overline{X}-i\overline{Y}=\frac{1}{2}i\rho\oint_L\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2e^{2i\theta}(Cos\theta-iSin\theta)dS=\frac{1}{2}i\rho\oint_L\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2e^{i\theta}dS$$

$$dZ=dx+idy=dSCos\theta+iSin\theta dS=dSe^{i\theta}$$

$$dS=e^{-i\theta}dz$$

$$\therefore X-iY=\frac{1}{2}i\rho\oint_L\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2dZ$$

ومن هذه العلاقة الخيرة يمكن إيجاد كل من X, Y إذا علمت دالـة الجهد المركب W وتكون قوة الضغط المحصل R هو :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

واتجاهها يضع مع محور x زاوية قدرها :

$$\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right).$$

نظرية جوكوفسكي لإيجاد عزم الضغط المحصل :

في علم ميكانيكا الغازات من المهم ليس فقط معرفة الضغط P بل أيضا يلزم معرفـة نقطـة تأثيرهـا والتي تسمي بمركز الضغط وهذا الجزء سوف نوجد عزم قوة الضغط المحصل حـول نقطـة الأصل إذا علم الجهد المركب W للانسياب لذلك نفرض أن عزم الضغط المحصل حول نقطة الأصل . (أو بمعنـي أدق حـول محـور عمـودي علـي المستوي xy محـور Z هـو M أي أن عزم القـوة P حول محور Z هو M . لـذلك نفرض أن (X_1, Y_1) تمثـل مركبتـي قـوة الضـغط عند النقطـة A فـي اتجاهي المحورين (x, y) عندئذ فان عزم هذه القوة حول محور Z هو $d\vec{M}$ حيث :

$$d\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ X_1 & Y_1 & 0 \end{vmatrix} = (X_1 y - xY_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ -PSin\theta & PCos\theta & 0 \end{vmatrix} = (xPCos\theta + yPSin\theta)\vec{k}$$

$$d\vec{M} = xPCos\theta + yPSin\theta = P(xCos\theta + ySin\theta)$$
$$M = \oint_l P(xCos\theta + ySin\theta)dS$$

حيث $P = C - \frac{1}{2}\rho q^2$

$$M = \oint_L \left(C - \frac{1}{2}\rho q^2\right)(xCos\theta + ySin\theta)dS$$
$$M = \oint_L C(xCos\theta + ySin\theta)dS - \frac{1}{2}\rho\oint_L q^2(xCos\theta + ySin\theta)dS$$
$$\because Cos\theta = \frac{dx}{dS} \text{ ، } Sin\theta = \frac{dy}{dS}$$
$$\therefore M = \oint_L C(xdx + ydy) + Rl\left\{-\frac{1}{2}\rho\oint_L q^2(x+iy)(Cos\theta - Sin\theta)dS\right\}$$

وذلك لأن $\oint_L Cd(x^2 + y^2) = 0$

مثال(١) :

أوجد الضغط المحصل وعزم الضغط المحصل في حالة الانسياب الدوراني علي اسطوانة دالة الجهد المركب للمائع في هذه الحالة

$$W = U\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln Z$$

حيث a نصف قطر الاسطوانة ، U هي السرعة النهائية للمائع (السرعة علي بعد كبير جدا من الاسطوانة) ، Γ هي قيمة الدوران .

الحل :

$$X - iY = \frac{i\rho}{2}\oint_L \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ$$

حيث L محيط قاعدة الاسطوانة .

$$\frac{dW}{dZ} = U\left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi Z}$$

$$X - iY = \frac{i\rho}{2}\oint_L \left(U\left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi Z}\right) dZ$$

$$X - iY = \frac{i\rho}{2}\oint_L \left(U^2 + \frac{U^2 a^4}{Z^4} - 2\frac{U^2 a^2}{Z^2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 Z^2} + \frac{i\Gamma U}{\pi Z} - i\Gamma\frac{U^2 a^2}{\pi Z^2}\right) dZ$$

$$X - iY = \frac{i\rho}{2}(2\pi i)\frac{i\Gamma U}{\pi} = -i\rho U\Gamma$$

$$X = 0, Y = \rho U\Gamma$$

وبالتاي تكون القوة المؤثرة هي في الاتجاه الموجب لمحور y وقيمتها $\rho U\Gamma$ وفي هذه الحالة الاسطوانة تكون أفقية بأخذ الاتجاه الرأسي بقوة الرفع $lift$ للاسطوانة ولا توجد قوة سحب $DragX = 0$ وكذلك :

$$M = Rl\left[-\frac{\rho}{2}\oint_L Z\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ\right]$$

$$M = Rl\left[-\frac{\rho}{2}\oint_L \left(Zu^2 + \frac{ua^2}{Z^3} - 2\frac{U^2a^2}{Z} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 Z} + \frac{i\Gamma U}{2\pi} - \frac{i\Gamma U a^2}{2\pi Z^2}\right)dZ\right]$$

$$M = Rl\left[\frac{\rho}{2}2\pi i\left(\frac{\Gamma}{4\pi^2} + 2U^2a^2\right)\right] = 0$$

وعلي ذلك فان مقدار قوة الضغط المحصل هو :

$$R = Y = \rho\Gamma U,\ X = 0$$

وتمر بنقطة الأصل وذلك لأن مجموع العزوم حول نقطة الأصل تساوي الصفر .

ملحوظة :

منحنى التكامل Couture Integration :

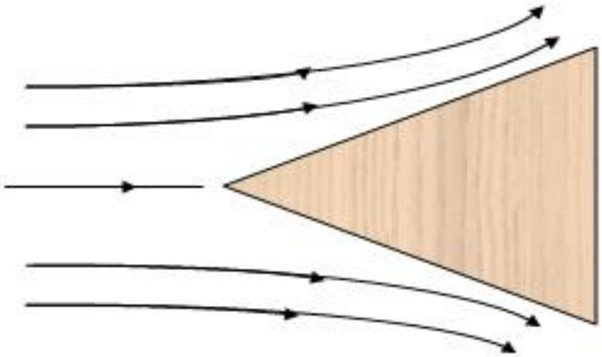
لحساب التكاملات الموجودة بنظرية بلاسيوس ونظرية جوكوفسكي لإيجاد الضغط المحصل نستخدم نظرية المتغير المركب أو نظرية الباقي The Residue Theory .

$$\oint_L f(Z)dZ = 2\pi i R_1$$

جميع التكاملات تتلاشي ماعدا التي تأخذ الصورة :

$$\frac{R_1}{Z - a}$$

مثال(٢):



تيار يمر علي جسم نصفي ... (الجسم النصفي يعني أن الجسم ممتد في اتجاه واحد) الجسم النصفي شبيه بمقدمة السفينة لأن ذيل السفينة سيكون بعيدا عن مقدمتها وفي هذه الحالة تكون الحركة شبيه بحركة تيار منتظم $(U,0)$ يمر علي منبع قوته m موجود عند نقطة الأصل وتكون دالة الجهد المركب المناظرة :

$$W = UZ + m\ln Z$$
$$\Phi + i\Psi = U(x+iy) + m\ln(x+iy)$$
$$\Phi + i\Psi = U(x+iy) + m\ln(re^{i\theta}) = U(x+iy) + m\ln r + im\theta$$
$$\therefore \Phi + i\Psi = \left(Ux + m\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) + i(Uy + m\theta)$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\Phi = Ux + \frac{1}{2}m\ln(x^2+y^2)$$

وهذه هي دالة الجهد أما دالة الانسياب :

$$\Psi = Uy + \frac{1}{2}m\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

خط الانسياب $\Psi = 0$ هو الخط المحدد لسطح السفينة .

$$Uy+\frac{1}{2}m\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\frac{y}{x}=-\tan\left(\frac{Uy}{m}\right)$$

$$\frac{1}{x}=-\frac{\tan\left(\frac{Uy}{m}\right)}{y},..........(1)$$

وعندما $x\to\infty$ فان :

$$\frac{Uy}{m}\to\pi$$

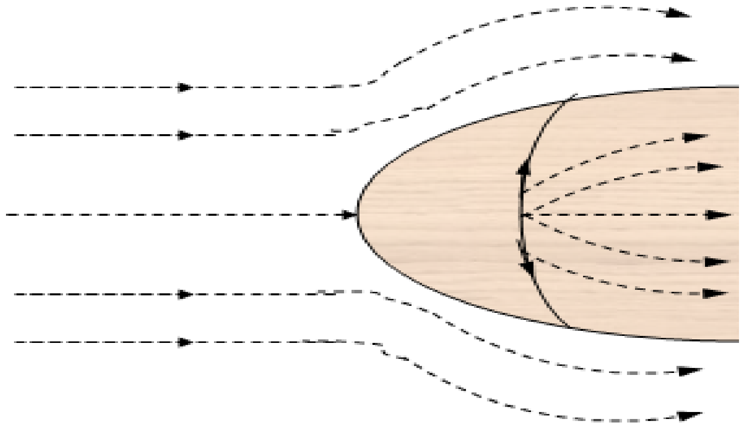
وعندما $x\to 0$ فان :

$$\frac{Uy}{m}\to\frac{\pi}{2},\, y=\frac{\pi m}{2U}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{m}{Ux}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-\tan\left(\frac{Uy}{m}\right)}{\left(\frac{Uy}{m}\right)}\right)$$

$$x=-\frac{m}{U}\quad or\quad \frac{m}{Ux}=-1$$

وبالتالي فان خط الانسياب $\Psi=0$ يمر بالنقط $\left(\infty,\pm\frac{\pi m}{U}\right)$ ، $\left(0,\pm\frac{\pi m}{2U}\right)$ ، $\left(-\frac{m}{U},0\right)$ وإذا وضعنا بدلا من خط الانسياب $\Psi=0$ بالجسم النصفي سيعطي نفس الحركة .



لتعيين القوة المؤثرة علي الجسم نفاضل المعادلة :

$$W(Z) = UZ + M \ln Z$$

$$\frac{dw}{dZ} = U + \frac{M}{Z}$$

$$\left(\frac{dw}{dZ}\right)^2 = U^2 + \frac{2MU}{Z} + \frac{M^2}{Z^2}$$

هذه الدالة يوجد قطب عند النقطة $Z = 0$ **. وليكون الباقي** $2MU$ **وبتطبيق نظرية بلاسيوس :**

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ = -2\pi MU\rho$$

$$\therefore X = -2\pi MU\rho \ ، \ Y = 0 \ ،$$

القوة المؤثرة علي الجسم قوة سحب ومقدارها $2\pi MU\rho$ **ولا توجد قوة رفع Lift .**

الصور المستوية Two - dimensional images :

تعريف :

تعرف صورة مجموعة من المنابع والمصبات والمزدوجات بالنسبة لسطح ما لا يخترقه المائع بمجموعة أخري موجودة خلف هذا السطح (مجموعة وهمية) .

فمثلا إذا طلب منا دراسة منبع موجود أمام حائط فيمكننا استبدال الحائط بمنبع آخر هو صورة ذلك المنبع بالنسبة للحائط .

وشرط الحائط هو أن تكون المركبة العمودية للسرعة عند أي نقطة عليه تساوي صفرا . لنفرض سطحا S مرسوما في مائع متحرك بحيث أن المائع لا ينتقل خلاله ولنفرض أن السطح S يقسم المائع إلي منطقتين ١ ، ٢ . أي مجموعة من المنابع أو المصبات أو المزدوجات في المنطقة ٢ تسمي صورة للمنطقة ١ في S. فإذا استبدلنا المائع في ٢ واستبدلنا S بحد متماسك له نفس الشكل والحجم فان الانسياب في ١ لا يتغير.

أي أن إذا عرفنا صورة ١ في S نستطيع حل مسألة الانسياب في ١ علي سطح متماسك .

في شكل (1) يبين منبع شدته m موضوع علي بعد a من مستوي صلب لانهائي YY' وسنوضح الآن أن صورة هذا المنبع هي منبع مساوي عند A' حيث A' هي الصورة الضوئية للنقطة A في المستوي .

لذلك نعتبر شكل (2) حيث عندنا منبعان شدة كلا منهما عند النقطتين $A'(-a,o,o)$ ، $A(a,o,o)$ وكانت P_o نقطة علي الحائط

وبذلك تكون السرعة عند هي :

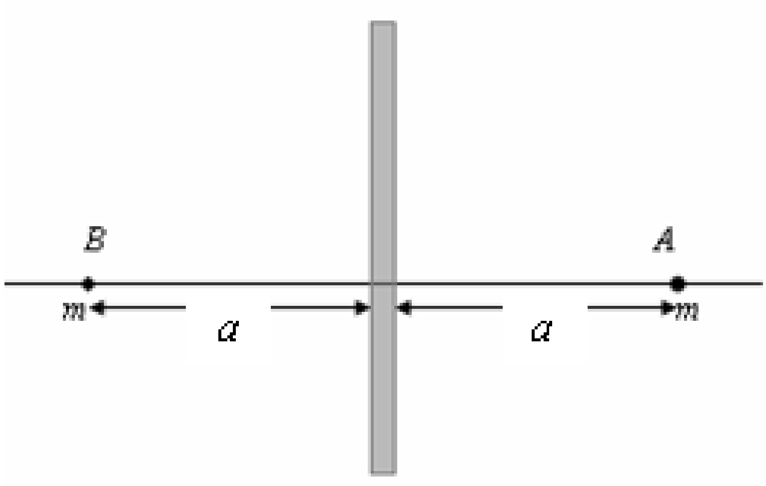
$$\frac{m}{\overline{AP_o}^2}\underline{AP_o}+\frac{m}{\overline{A'P_o}^2}\underline{A'P_o}=\frac{m}{\overline{AP_o}^2}\left(\underline{AP_o}+\underline{A'P_o}\right)=\frac{2m}{\overline{AP_o}^2}\underline{OP_o}$$

وهذا معناه انه عند أي نقطة P_o علي المستوي الصلب YY' فان المائع يتحرك في اتجاه المماس لهذا المستوي وبعبارة أخري فان المائع لا يمر خلا ل هذا المستوي.

في الشكل (2) ، (1) عند جميع النقط P_o علي المستوي YY' يكون $\frac{\partial P}{\partial n}=0$ لمنطقة الانسياب حيث $x \geq 0$.

أي أن صورة منبع m عند A في YY' في شكل (1) هي منبع m عند A' التي هي الصورة الضوئية لنقطة A في YY' .

١- صورة منبع أمام حائط : Image of a source in a wall



نفرض أن لدينا منبع عند النقطة $A(a,0)$ لـه الشدة m علـي بعد a من حـائط لانـهـائي الطول عند $x=0$ صورة هذا المنبع عند الحـائط هي أيضـا منبـع آخر لـه الشدة m عند للنقطـة $B(-a,0)$ إذا كان لا يوجد حائط وهناك سائل يتحرك المنطقة علي جانبي محور y فيكون دالة الجهد المركب لـه هي :

$$W=-m\log(z-a)-m\log(z+a)$$
$$W=-m\log(z^2-a^2),..........(1)$$
$$\frac{dW}{dz}=-\frac{2mz}{z^2-a^2}$$

عند الحائط نجد أن

$$x=0 \quad ، \quad W=-m\log(-y^2-a^2)$$

$$\text{Constant on the wall } \Psi=$$

أي أن Ψ مقدار ثابت عند الحائط .

$\therefore$ $x=0$ **عبارة عن خط انسياب (محور y خط انسياب) ولذلك لا يوجد انسياب يعبر عن محور** y **.**

$\therefore$ **المعادلة (1) تمثل دالة الجهد المركب لمنبعين علي بعدين متساويين من نقطة الأصل .**

عند الحائط نجد أن $x=0$

$$\therefore \frac{dW}{dz} = -\frac{2miy}{-y^2 - a^2}$$

$$and$$

$$\frac{d\overline{W}}{dz} = \frac{2miy}{-y^2 - a^2}$$

$$\therefore q^2 = \frac{dW}{dz}\frac{d\overline{W}}{dz} = \frac{4m^2y^2}{\left(y^2 + a^2\right)^2}$$

ومن معادلة برنولي نجد أن :

$$P = P_\infty - \frac{\rho}{2}q^2 = P_\infty - \frac{2\rho m^2 y^2}{\left(y^2 + a^2\right)^2}, \ldots\ldots\ldots(2)$$

حيث P_∞ الضغط عند ما لانهاية .

٢- صورة منبع في مستوي لا نهائي صلب Image of a source in a rigid plane :

سوف نثبت الآن أن صورة منبع مستوي لا نهائي صلب هي منبع لـه نفس الشدة عند الصورة الضوئية في المستوي للمنبع الأول.

لهذا نفرض أن المستوي هو $X = 0$ وانه يوجد منبع شدته m عند النقطة $z = z_1$ حيث $z_1 > 0$ Re فإذا تصورنا زوال المستوي وأدخلنا منبعا آخر شدته m عند $z = -\bar{z}_1$ (حيث $\bar{z}$ هو العدد المرافق للعدد المركب z_1) وحيث ($-\bar{z}$) هي صورة z_1 في المستوي $X = 0$ فإن جهد السرعة المركب عند أي نقطة P حيث $OP = z$ يعرف بالدالة :

$$w = -m\ln(z - z_1) - m\ln(z + \bar{z}_1)$$

وهو جهد المنبع وصورته .

$$\therefore \frac{dw}{dz} = -\frac{m}{z - z_1} - \frac{m}{z + \bar{z}_1}$$

وعند أي نقطة علي المستوي $X = 0$ يكون $z = iy$ وعندئذ يكون :

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=iy} = -m(iy - z_1)^{-1} - m(iy + \bar{z}_1)^{-1} = m\left[(iy - z_1)^{-1} - (iy + \bar{z}_1)^{-1}\right]$$

وحيث أن $(iy + \bar{z}_1)^{-1}$ هي المرافق للمقدار $(iy - z_1)^{-1}$ فإن :

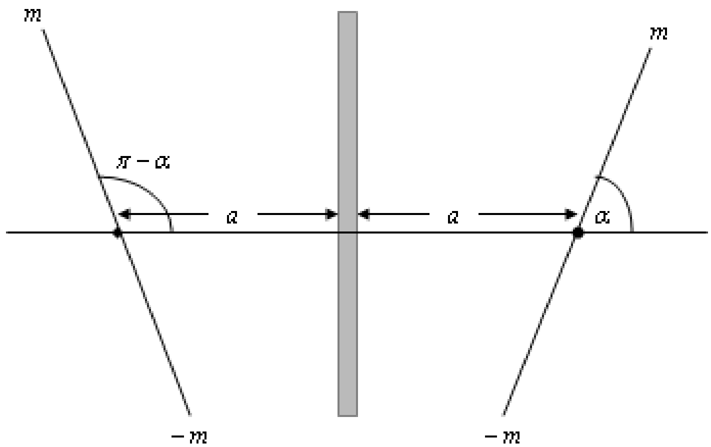
$$\operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=iy} = 0$$

أي أن في المستوي $X = 0$ فإن مركبة السرعة u تساوي صفرا وهي السرعة في اتجاه عمودي علي المستوي أي أنه لا يوجد انسياب للمائع خلال المستوي ولهذا يمكن استبداله بمستوي صلب . وعلي ذلك فإن صورة منبع في مستوي لا نهائي هي منبع له نفس الشدة موضوع عند نقطة تعرف بانها الصورة الضوئية في المستوي للنقطة الموجود عندها المنبع .

أي أن مسألة منبع أمام مستوي لا نهائي صلب هي نفسها مسألة نفس المنبع وصورته في مائع لا نهائي .

3- صورة مزدوج أمام حائط Image of a double in a wall :

صورة مزدوج له الشدة η محوره يميل بزاوية α مع محور x هي أيضا مزدوج آخر له الشدة η . محوره يميل بزاوية $\pi - \alpha$ مع محور x .



إذا كان المزدوج عند النقطة $Z = Z_o$ فان الصورة تقع عند النقطة $Z = -\bar{Z}_o$ وتكون دالة الجهد المركب هي :

$$w = \frac{\eta e^{i\alpha}}{z - z_o} + \frac{\eta e^{i(\pi-\alpha)}}{z - \bar{z}_o} = \frac{\eta e^{i\alpha}}{z - z_o} - \frac{\eta e^{i(\pi-\alpha)}}{z - \bar{z}_o}, ...(3)$$

٤- صورة مزدوج في المستوى Image of a double in a plane :

ليكن المطلوب إيجاد صورة مزدوج في المستوي الصلب OY لذلك نعتبر الشكل المجاور حيث يوجد منبعان متجاوران جدا عند A,B شدتهما $m,-m$ وعلي ذلك فان صورهما المناظرة في المستوي OY هما m عند A' ، $-m$ عند B' حيث A',B' هما صورتا A,B في المستوي المذكور OY .

المستقيم $\overline{AB}$ يصنع زاوية مقدارها α مع محور السينات وعلي ذلك فان $A'B'$ يصنع زاوية $(\pi-\alpha)$ مع نفس محور السينات .

وفي النهاية عندما $m\to\infty$ ، $\overline{AB}\to 0$ فإننا نحصل علي مزدوجين متساويين عند A,A' محوراهما يميلان بالزاويتين $[\alpha,(\pi-\alpha)]$ علي محور x .

أي أن صورة مزدوج في مستوي صلب هي مزدوج له نفس الشدة .

٥- صورة دوامة في مستوي لا نهائي صلب Image of a vortex in a rigid plane :

لنعتبر دوامة دورانها Γ عند $z=z_1$ حيث $\operatorname{Re}(z_1)>0$ ثم لندخل دوامة أخري دورانها $-\Gamma$ عند $z_1=-\bar{z}_1$ حيث $(-\bar{z}_1)$ هي صورة z_1 في المستوي $X=0$.

$\therefore$ الجهد المركب عند أي نقطة z هو :

$$w=\frac{-i\Gamma}{2\pi}\left[\ln(z-z_1)-\ln(z+\bar{z}_1)\right]$$

$$\therefore \frac{dw}{dz}=\frac{-i\Gamma}{2\pi}\left[(z-z_1)^{-1}-(z+\bar{z}_1)^{-1}\right]$$

عند $z = iy$ (أي عند المستوي $X = 0$) يكون :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-i\Gamma}{2\pi}\left[\left(z_1 - iy\right)^{-1} + \left(\bar{z}_1 + iy\right)^{-1}\right]$$

وحيث أن الكميتين $\left(z_1 - iy\right)^{-1}$ ، $\left(\bar{z}_1 + iy\right)^{-1}$ مترافقتان فإن :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=iy} = 0$$

$$\therefore (u)_{z=iy} = 0$$

أي أنه لا يوجد انسياب خلال المستوي لأن السرعة في اتجاه عمودي عليه تساوي صفرا . وعلي ذلك فإن صورة دوامة في مستوي صلب هي دوامة دورانها نفس دوران الأولي مقدارا ولكن يخالفها إشارة وموضوعة عند الصورة الضوئية لموقع الدوامة الأولي .

٦- صورة منبع في دائرة Image of a source in a Circle :

بالنسبة إلي دائرة ما إذا كان لدينا منبع شدته m عند A ووضعنا منبعا مساويا له في الشدة أي شدته m عند النقطة العكسية للنقطة A بالنسبة للدائرة O ولتكن B (يقال للنقطتين A, B إنهما متعاكستان بالنسبة للدائرة O إذا كان $ff' = a^2$ حيث $OA = f$ ، $OB = f'$ ، a نصف قطر الدائرة) فإن :

مركبة السرعة عند أي نقطة P علي الدائرة في اتجاه عمودي علي الدائرة :

$$\frac{m}{AP}Cos\left(O\hat{P}A\right)+\frac{m}{BP}Cos\left(O\hat{P}B\right)$$

ولكن :

$$Cos\left(O\hat{P}A\right)=Cos\left(O\hat{P}B\right)=\frac{AP+OPCos\left(P\hat{B}A\right)}{OA}=\frac{BP}{OP}+\frac{BP}{AP}Cos\left(P\hat{B}A\right)$$

في دائرة شدته وذلك لأن المثلثين OPA, OBP مشابهان حيث أن $\hat{O}$ مشتركة ، لأن $\frac{OB}{OP}=\frac{OP}{OA}$. $ff'=a^2$

وعلي ذلك يكون :

$$\frac{OB}{OP}=\frac{OP}{OA}=\frac{BP}{PA}$$

وتكون الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية .

وعلي ذلك فإن مركبة السرعة في اتجاه عمودي علي الدائرة تساوي :

$$\frac{m}{AP}Cos\left(O\hat{P}A\right)+\frac{m}{OP}+\frac{m}{AP}Cos\left(P\hat{B}A\right)=\frac{m}{OP}$$

ولذلك فإذا وضعنا مصبا $-m$ عند O فإن مركبة السرعة في الاتجاه العمودي علي الدائرة عند P تنعدم .

أي أن صورة منبع m هي منبع m عند النقطة العكسية بالنسبة للدائرة ومصب $-m$ عند مركز الدائرة .

وعلي العكس إذا وضعنا منبعين m ، m عند A,B ومصب $-m$ عند O فان معادلات الخطوط الانسيابية هي :

$$-m\theta - m\theta' + m\theta'' = Const$$

حيث $\theta, \theta', \theta''$ هي الزوايا الاتجاهية عند A,B,O ولأي نقطة P علي الدائرة يكون :

$$\theta + \theta' - \theta'' = P\hat{A}x + P\hat{B}A - P\hat{O}A = O\hat{P}A + P\hat{O}A + P\hat{B}A - P\hat{O}A = \pi = Const$$

أي أن الدائرة خط انسيابي . أو بعبارة أخري فإن المائع لا ينساب خلال الدائرة .

٧- صورة مزدوج في دائرة Image of double in a Circle :

بنفس الطريقة المذكورة في البند السابق يمكن إثبات أن صورة المزدوج عند A بالنسبة إلي دائرة هي مزدوج آخر عند النقطة العكسية B حيث محورا المزدوجين يصنعان زاويتين متكاملتين مع نصف القطر $O\hat{B}A$ كما في الشكل .

والنسبة بين عزمي المزدوجين عند A,B هي $BB' : AA'$ أي هي $a^2 : f^2$ حيث $OA = f$ ، a نصف قطر الدائرة . إذ أنه من تشابه المثلثين OBB' ، $OA'A$ يكون (في النهاية) :

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{OB}{OA} \approx \frac{a^2/f}{f} = \frac{a^2}{f^2}$$

$$\therefore \frac{mBB'}{mAA'} = \frac{a^2}{f^2}$$

$$\therefore \frac{\mu'}{\mu} = \frac{a^2}{f^2}$$

ملحوظة :

الجهد المركب هو :

$$w=\frac{\mu e^{i\alpha}}{z-f}+\frac{\mu' e^{i(\pi-\alpha)}}{z-a^2/f}=\frac{\mu e^{i\alpha}}{z-f}+\frac{\mu' a^2/f^2}{z-a^2/f}e^{-i\alpha}$$

وعلي الدائرة يكون :

$$z=ae^{i\theta}$$

ويمكن إثبات أن الدائرة خط انسيابي .

٨- نظرية جوكوفسكي للضغط على اسطوانة :

وتنص علي " في حالة الانسياب الدوراني علي اسطوانة دائرية لمائع مثالي غير قابل للانضغاط يؤثر علي الاسطوانة قوة في اتجاه عمودي علي السرعة في اللانهاية V وتساوي حاصل ضرب V في الدوران Γ وفي الكثافة ρ أي أن القوة تساوي $\rho\Gamma V$ ولتعيين اتجاه قوة الدفع هذه ندير متجه السرعة بزاوية 90° في اتجاه مضاد لاتجاه الدوران Γ " .

ولإثبات ذلك نعتبر الانسياب مع وجود دوران علي اسطوانة دائرية نصف قطرها a في هذه الحالة بأخذ الجهد المركب للانسياب الصورة :

$$w=V\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$$

وبذلك دالة جهد السرعة φ هي :

$$\varphi = V\left(r+\frac{a^2}{r}\right)Cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\therefore q_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -V\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)Cos\theta$$

$$\therefore (q_r)_{r=a} = 0 \quad ، \quad q_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = V\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\frac{Sin\theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$\therefore$ سرعة الانسياب علي الاسطوانة هي :

$$q = 2VSin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

ولإيجاد قوة الضغط المحصل R للانسياب علي الاسطوانة نتبع الآتي :

قوة الضغط علي عنصر من محيط الاسطوانة ds هي pds ومركبتا هذه القوة في اتجاهي المحورين Ox ، Oy هما علي الترتيب $-pdsCos\theta$ ، $-pdsSin\theta$ فإذا كانت مركبتا R هما X,Y فإن :

$$X = -\int_L pdsCos\theta$$

$$Y = -\int_L pdsSin\theta$$

حيث L هو محيط الاسطوانة التي نصف قطرها a .

حيث p تتعين من معادلة برنولي كالآتي :

$$p = C - \frac{1}{2}\rho q^2$$

$$\therefore X = -\int_L \left(C - \frac{1}{2}\rho q^2 \right) Cos\theta ds$$

$$\therefore Y = -\int_L \left(C - \frac{1}{2}\rho q^2 \right) Sin\theta ds$$

لكي نحسب X نضع فيما سبق عند p من معادلة برنولي ونضع q بما يساويها علي الاسطوانة حيث علي الاسطوانة $ds = ad\theta$ فنجد أن :

$$X = -\int_0^{2\pi} \left\{ C - \frac{\rho}{2}\left[4V^2 Sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} + \frac{2V\Gamma}{\pi a} Sin\theta \right] \right\} aCos\theta d\theta$$

$$X = -Ca\int_0^{2\pi} Cos\theta d\theta + 2\rho aV^2 \int_0^{2\pi} Sin^2\theta Cos\theta d\theta + \frac{\Gamma^2 \rho}{8\pi^2 a}\int_0^{2\pi} Cos\theta d\theta + \frac{\rho V\Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi} Sin\theta Cos\theta d\theta$$

وحيث أن :

$$\int_0^{2\pi} Cos\theta d\theta = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} Sin^2\theta Cos\theta d\theta = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} Cos\theta Sin\theta d\theta = 0;$$

فإن :

$$X = 0$$

كذلك فإن :

$$Y=-\int_0^{2\pi}\left\{C-\frac{\rho}{2}\left[4V^2Sin^2\theta+\frac{\Gamma^2}{4\pi^2a^2}+\frac{2V\Gamma}{\pi a}Sin\theta\right]\right\}aSin\theta d\theta$$

$$Y=-Ca\int_0^{2\pi}Sin\theta d\theta+2\rho aV^2\int_0^{2\pi}Sin^3\theta d\theta+\frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2a}\int_0^{2\pi}Cos\theta d\theta+\frac{\rho V\Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}Sin^2\theta d\theta$$

لكن :

$$\int_0^{2\pi}Sin\theta d\theta=0;$$

$$\int_0^{2\pi}Sin^3\theta d\theta=0;$$

$$\int_0^{2\pi}Sin^2\theta d\theta=\pi$$

ومن ثم نجد أن :

$$Y=\rho\Gamma V$$

وهو المطلوب .

٩- تناقص أويلر – دالمبير Paradox of Euler D'Lambere :

في حالة انسياب مائع مثالي غير قابل ل لانضغاط دون دوران علي اسطوانة دائرية قائمة يمكن بسهولة إثبات أن قوة الضغط المحصل علي الاسطوانة تساوي صفرا (لأن $\Gamma=0$).

وهذه النتيجة صحيحة في حالة أي جسم ينساب علي تيار أو جهد دون تكوين دوامات ودون انفصال المائع عن الجسم وهذه هي

أو بمعني آخر فإن الجسم لا يتعرض لأي ضغط عليه وبذلك لا يبذل أي تعاون وقد نشأ هذا ا تناقص نتيجة إهمال لزوجة المائع .

أمثلة :

(١) منبع مستوي لـه الشدة m موضوع عند النقطـة $(a,0)$ ومحـور y كحد ثابت . أوجد النقط التي تكون عندها السرعة نهاية عظمي بين أن محصلة الضغط الواقع علي الجزء من محور y المحصور بين $y=\pm b$ هو :

$$2P_o b-\frac{2m^2\rho}{a}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a}-\frac{ab}{a^2+b^2}\right]$$

حيث P_o الضغط عند مالا نهاية .

الحل :

الجهد المركب للمنبع وصورته خلال الحائط هو :

$$W=-m\log(z-a)-m\log(z+a)=-m\log\left(z^2-a^2\right)$$

$$\therefore\frac{dW}{dz}=-\frac{2mz}{z^2-a^2}$$

عند الحائط $x=0$

$$\frac{dW}{dz}=-\frac{2miy}{-y^2-a^2}$$

$$\therefore q^2=\frac{dW}{dz}\cdot\frac{d\overline{W}}{dz}=\frac{4m^2y^2}{\left(y^2+a^2\right)^2}$$

$$\therefore q=\frac{2my}{y^2+a^2}$$

$$\therefore \frac{dq}{dy}=\frac{2m}{y^2+a^2}\left(y^2+a^2-2y^2\right)=0$$

$\therefore$ **السرعة تكون نهاية عظمي عند النقط** $y=\pm a$ **علي الحائط .**

من معادلة برنولي :

$$P=P_o-\frac{1}{2}\rho q^2$$

$$P=\int_{-b}^{b}P_o dy-\frac{1}{2}\rho\cdot 4m^2\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{\left(y^2+a^2\right)^2}dy$$

$$P=2bP_o-\frac{4\rho m^2}{a}\int_{0}^{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}Sin^2\theta d\theta$$

حيث $y=a\tan\theta$

$$P=2bP_o-\frac{4\rho m^2}{a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{ab}{a^2+b^2}\right]$$

(٢) كرة صلبة نصف قطرها a تتحرك في خط مستقيم في سائل مثالي كثافته ρ ويتحرك حركة غير دورانية وتسكن في اللانهاية . بين أن مقدار محصلة الضغط للسائل علي الكرة عند أي لحظة هو $\frac{2}{3}\pi a^3 \rho f$ حيث f هي القيمة اللحظية لعجلة الكرة .

<u>الحل :</u>

دالة الجهد هي :

$$\Phi = -\frac{Ua^2}{2r^2} Cos\theta$$

حيث $U = U(t)$ ، علي سطح الكرة يكون :

$$\Phi = \frac{1}{2} UaCos\Phi,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = UCos\theta$$

طاقة الحركة تعطي من :

$$T = \frac{1}{2}\rho \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \frac{1}{2}\rho \int_{\Psi=0}^{\Psi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} -\frac{Ua}{2} Cos\theta UCos\theta \cdot aSin\theta d\theta \cdot ad\Psi$$

$$\therefore T = \frac{1}{3}\pi \rho a^3 U^2$$

وإذا كانت M هي كتلة الكرة فتكون الطاقة الكلية هي :

$$\frac{1}{2}MU^2+\frac{1}{3}\rho\pi a^3U^2$$

وحيث أن معدل الزيادة في الطاقة الكلية يجب أن يتساوي مع معدل الشغل المبذول بالقوة الخارجية . بفرض أن F هو القوة المؤثرة علي الكرة :

$$FU=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}MU^2+\frac{1}{3}\rho a^3\pi U^2\right]=MUf+\frac{2}{3}\pi\rho a^3Uf$$

$$F-\frac{2}{3}\pi\rho a^3f=Mf$$

$\therefore$ الكمية $\frac{2}{3}\pi\rho a^3$ تمثل محصلة الضغط للسائل علي الكرة ويكون في الاتجاه العكسي للحركة .

(٣) مزدوج شدته $\mu\vec{i}$ (مستوي) موضوع عند النقطة $z=ia$ في انسياب سرعة هي $-V\vec{i}$ في سائل نصف لا نهائي كثافته ثابتة ويشغل نصف المستوي $y>0$ وحيث $y=0$ من صلب ($\vec{i}$ وحدة متجه في الاتجاه الموجب لمحور x) . أثبت أن الجهد المركب هو $w=Vz+2\mu i/\left(z^2+a^2\right)$ أثبت أيضا أنه إذا كان $0<\mu<4a^2V$ فإنه لا توجد نقط توقف علي الحد وان الضغط عليه يكون نهاية صغري عند نقطة الأصل ونهاية عظمي عند $z=\pm a\sqrt{3}$.

<u>الحل :</u>

شكل (١) يبين النموذج الطبيعي للمسألة بينما شكل (٢) يبين مجموعة من الصور . حيث صورة المزدوج $\mu\vec{i}$ عند $A(o,\alpha)$ هي مزدوج $\mu\vec{i}$ كذلك عند $A'(o,-\alpha)$.

جهد السرعة نتيجة الانسياب المنتظم هو Vx ، ولهذا فإن جهده المركب هو Vz ولتكن p أي نقطة في الانسياب حيث $\overline{OP} = z$ عندئذ يكون :

$$\overline{AP} = z - ia$$
$$\overline{A'P} = z + ia$$

وبذلك يكون الجهد المركب للمزدوج عند A وصورته عند A' هما :

$$\mu(z+ia)^{-1} \quad ، \quad \mu(z+ia)^{-1}$$

ومن ثم يكون الجهد المركب الكلي عند p هو :

$$w = V_z + \frac{\mu}{z-ia} + \frac{\mu}{z+ia}$$
$$\therefore w = V_z + \frac{2\mu z}{z^2 + a^2}$$

وهو المطلوب أولا.

$$\therefore \frac{dw}{dz} = V + 2\mu \frac{a^2 - z^2}{\left(a^2 + z^2\right)}$$

وعلي الحائط (الحد) يكون $y = 0$ أي يكون $z = x$ وبذلك يكون :

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=x} = V + \frac{2\mu\left(a^2 - x^2\right)}{\left(a^2 + x^2\right)^2}$$

وبوضع $\frac{dw}{dz}=0$ **نجد أن :**

$$Vx^4+2\left(Va^2-\mu\right)x^2+\left(Va^4+2\mu a^2\right)=0,.....(1)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في x^2 **مميزها** Δ **هو :**

$$\Delta=4\left\{\left(Va^2-\mu\right)^2-V\left(Va^4+2\mu a^2\right)\right\}=4\mu\left(\mu-4a^2V\right)$$

وإذا كانت $0<\mu<4a^2V$ **فان** Δ **تكون سالبة وعندئذ لا يكون للمعادلة (١) جذور حقيقية . وهذا معناه لا توجد نقط توقف علي الحد** $y=0$ **عند** (x,o) **علي الحد نجد أن :**

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}\left\{V+\frac{2\mu\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^2}\right\}^2=Const.$$

وعلي ذلك فإن P **تكون نهاية عظمي إذا كان** $V+\frac{2\mu\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^2}$ **نهاية صغري والعكس صحيح .**

وبوضع :

$$\xi=\left\{V+\frac{2\mu\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^2}\right\}^2$$

$$\therefore\xi^{\frac{1}{2}}=V+\frac{2\mu\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\xi' = -\frac{4\mu x\left(3a^2 - x^2\right)}{\left(a^2 + x^2\right)^3}$$

ومن ثم $\xi' = 0$ إذا كانت $x = 0$ او $x = \pm a\sqrt{3}$ صورة المقدار $\frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\xi'$ توضح أن $\xi' < 0$ عند $x = O+$ وأن $\xi' > 0$ عند $x = O-$.

وهذا يبين لنا أن ξ نـهاية عظمي وبذلك تكون p نـهاية صغري عند نقطة الاصل . وأيضا $\frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\xi'$ يوضح لنا أنه عند $x = a\sqrt{3}+$ يكون $\xi' > 0$ وعند $x = a\sqrt{3}-$ يكون $\xi' < 0$ أي أنه عند $x = a\sqrt{3}$ تكون ξ نـهاية صغري ومن ثم p عندها نـهاية عظمي .

كذلك عند $x = a\sqrt{3}+$ يكون $\xi' > 0$ وعند $x = a\sqrt{3}-$ يكون $\xi' < 0$ ومن ثم تكون ξ نـهاية صغري أي ان p تكون نـهاية عظمي عند $x = -a\sqrt{3}$

$\therefore$ p تكون نـهاية عظمي عند النقطتين $z = \pm a\sqrt{3}$ وهو المطلوب ثانيا .

تمارين

١- (أ) أوجد دالة الجهد المركب لمائع يتحرك بسرعة ثابتة U في الاتجاه الذي يصنع زاوية α مع محور السينات .

(ب) أوجد دالة جهد السرعة ودالة الانسياب .

(ج) أوجد معادلات خطوط الانسياب وخطوط تساوي الجهد .

٢- دالة الجهد لمائع هي :

$$W(Z)=U\left(Z+\frac{a^2}{Z}\right)$$

حيث a,U هي ثوابت موجبة .

(أ) أوجد معادلات خطوط الانسياب وخطوط تساوي الجهد وأرسمها موضحا تقاطعهما .

(ب) برهن علي أن تفسير حركة هذا المائع مثل حركة مائع مارا بدائرة نصف قطرها a .

(ج) أوجد السرعة عند أية نقطة وعين قيمتها بدلالة البعد عن الحاجز .

(د) أوجد نقطة الخمود .

٣- ينبعث مائع بمعدل ثابت من منبع علي هيئة خط لانهائي عموديا علي مستوي Z عند $Z=0$.

(أ) اثبت أن سرعة المائع عند مسافة r من المنبع هي $v=\frac{K}{r}$ حيث K مقدار ثابت .

(ب) برهن علي أن دالة الجهد المركب هي :

$$W(Z) = K \log Z$$

(ج) ما هو التعديل المطلوب إذا كان المنبع عند النقطة $Z = b$ **.**

(د) ما هو التعديل المطلوب في (ب) إذا وضع مصب بدلا من منبع الذي في هذه الحالة يمتص المائع بمعدل ثابت .

٤- (أ) أوجد دالة الجهد المركب الناتجة عن تواجد منبع عند النقطة $Z = -a$ **ومصب عند** $Z = a$ **وكلا منهما قوته** K **.**

(ب) أوجد خطوط تساوي الجهد وخطوط الانسياب وأرسمها .

(ج) أوجد السرعة عند أية نقطة .

٥- ناقش حركة مائع دالة جهده المركب

$$W(Z) = iK \log Z, K > 0$$

برهن علي أن الدوران حول الدوامة يساوي $\Gamma = 2\pi K$ **.**

٦- ناقش حركة المائع الذي جهده المركب

$$W(Z) = U\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + \frac{i\gamma}{2n} \log Z$$

وهذه تمثل دالة الجهد المركب لمائع يمر علي اسطوانة دائرية نصف قطرها a **مع وجود دوامة .**

٧- منبعان شدة كلا منهما m موضعان عند $(\pm C,0)$ ومصب شدته $2m$ موضوع عند نقطة الأصل . أثبت أن معادلات الخطوط الانسياب هي :

$$\left(x^2+y^2\right)=C^2\left(x^2-y^2+\lambda xy\right)$$

حيث λ بارامتر متغير . اثبت أيضا أن سرعة المائع عند أي نقطة هي $\dfrac{2mC}{r_1 r_2 r_3}$ حيث r_1, r_2, r_3 هي علي الترتيب أبعاد النقطة عن المنبعين وعن المصب .

الباب الخامس
أساسيات ديناميكا الموائع التجريبية

مقدمة :

نظرا للصعوبة الشديدة التي تتميز بها مسائل حركة الموائع عند حلها رياضيا ونظرا لشدة حاجتنا في الحياة العملية إلي طرق سريعة للحصول علي هذه الحلول فإننا نلجأ إلي التجربة للحصول علي القوانين المطلوبة تجريبيا وليس نظريا . ولتصميم التجارب أصول يجب مراعاتها . فالتجارب تجري علي نمازج شبيهه بالأصل وباستخدام نظرية التشابه والتحليل البعدي يمكن أن تبسط التجارب ونستخلص القوانين المطلوبة دون الوقوع في أخطاء قد تسبب كوارث .

التحليل البعدى :

ينص قانون البعاد علي ما يلي :

" أي كميات طبيعية مجموعة (مطروحة) لابد أن يكون لها نفس الأبعاد (الوحدات) "

ورغم بساطة هذا القانون ال انه له أعظم الفائدة في حل عدد كبير جدا من المشاكل العلمية المعقدة كما انه يساهم في وضع العلاقات الصحيحة بين المتغيرات المختلفة .

ويمكن تقسيم الوحدات إلي وحدات أساسية مثل وحدة الطول L ووحدة الكتلة M ووحدة الزمن T . ووحدات غير أساسية والتي يمكن أن نعبر عن وحداتها بواسطة الوحدات الأساسية والجدول الآتي يعطي وحدات بعض الكميات الهامة في الهيدروديناميكا .

الكميـــــــة Quantity	معادلة التقريـب Formula	البعـــــد Dimension
١ـ المساحة Area	$A = L^2$	L^2
٢ـ الحجم Volume	$V = L^3$	L^3
٣ـ السرعة Velocity	$v = \frac{L}{t}$	LT^{-1}
٤ـ العجلة Acceleration	$a = \frac{dv}{dt}$	LT^{-2}
٥ـ السرعة الزاوية Angular Velocity	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	T^{-1}
٦ـ العجلة الزاوية Angular acceleration	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	T^{-2}

٧- القوة **Force**	$F = ma$	MLT^{-2}
٨- الوزن **Weight**	$W = mg$	MLT^{-2}
٩- عزم القوة **Moment of force**	$M = Fl$	ML^2T^{-2}
١٠- الضغط **Pressure**	$P = \frac{F}{A}$	$ML^{-1}T^{-2}$
١١- انحدار الضغط **Pressure gradient**	$gradP = \frac{dP}{dt}$	$ML^{-2}T^{-2}$
١٢- الكثافة **Density**	$\rho = \frac{m}{V}$	ML^{-3}
١٣- معامل اللزوجة المطلقة **Viscosity**	$\mu = \frac{-F}{A(dv/dL)}$	$ML^{-1}T^{-1}$
١٤- معامل اللزوجة الكينماتيكية **Kinematic viscosity**	$\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$	LT^{-1}
١٥- الإجهاد **Stress**	$\tau = \frac{F}{A}$	$ML^{-1}T^{-2}$

$ML^{-1}T^{-2}$	$E = \frac{Stress}{Strain}$	١٦ـ معامل المرونة **Modulus of elasticity**
$L^{3}T^{-1}$	$Q_V = \frac{dV}{dt}$	١٧ـ معدل الانسياب الحجمي **Volumetric flow rate**
LT^{-1}	$q_V = \frac{Q_V}{dt}$	١٨ـ كثافة معدل السريان الحجمي **Volumetric flow rate density**
$ML^{2}T^{-3}$	$P = F \times v$	١٩ـ القدرة **Power**
MLT^{-1}	$I = Ft$	٢٠ ـ الدفع **Impulse**
MLT^{-1}	$P = mv$	٢١ـ كمية الحركة **Momentum**
$ML^{2}T^{-2}$	$W = flCos\left(f;l\right)$	٢٢ـ الشغل والطاقة **Work and Energy**
$ML^{-1}T^{-2}$	$e = \frac{E}{V}$	٢٣ـ كثافة الطاقة **Energy Density**
$ML^{2}T^{-1}$	Mt	٢٤ـ دفع عزم القوة **Impulse of momentum of force**

٢٥- الزمن الدوري **Period**	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	T
٢٦- التردد **Frequency**	$\upsilon=\frac{1}{T}$	T^{-1}
٢٧- معامل الانضغاط الحجمي **Coefficient of bulk compression**	$\beta=-\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$	$M^{-1}LT^{2}$
٢٨- معامل التوتر السطحي **Coefficient of surface tension**	$T=\frac{f}{L}$	MT^{-2}
٢٩- معامل الانتشار **Diffusion Coefficient**	$D=\frac{\Delta m}{\Delta t A\left(d\rho/\ dL\right)}$	$L^{2}T^{-1}$
٣٠- عزم القصور الذاتي **Moment of inertia**	$I=\int_{V} r^{2}dm$	ML^{2}
٣١- العزم الاستاتيكي للأشكال السطحية **Statical moment of plane figures**	$S_{Z}=\int_{A} rdA$	L^{3}

التطبيقات الهامة للتحليل البعدى :

١ـ التأكد من صحة القوانين .

٢ـ استنتاج القوانين .

٣ـ إنقاص عدد المتغيرات في التجارب .

٤ـ استنتاج مبادئ تصميم النماذج عند إجراء التجارب .

النموذج الحقيقى :

هو النموذج الذي له كل خواص الأصل بمقياس معين (النموذج والأصل متشابهان هندسيا) كما أن النموذج يوفي بكل قيود التصميم (التشابه الكينماتيكي والديناميكي) .

التشابه الهندسى :

يكون التشابه الهندسي بين النموذج والأصل إذا تساوت نسب كل الأبعاد المتناظرة في كل منهما .

$$\text{نسبة الطول } L = \frac{\text{بعد النموذج الطولي}}{\text{بعد الأصل}}$$

$$\text{نسبة المساحة } L_r = \frac{\text{المساحة في النموذج}}{\text{المساحة في الأصل}}$$

التشابه الكينماتيكى :

يحدث هذا التشابه إذا تشابه هندسيا مسار الجسيمات في كل من النموذج والأصل وكانت نسب السرعات في النموذج والأصل متساوية وهذا يتطلب :

في حالة السرعة
$$\frac{L_1}{T_1} = \frac{L_2}{T_2}$$

في حالة العجلـة
$$\frac{L_1}{T_1^2} = \frac{L_2}{T_2^2}$$

في حالة الانسياب الحجمي
$$\frac{L_1^3}{T_1} = \frac{L_2^3}{T_2}$$

الرمز السفلي 1 يرمز إلي النموذج ، الرمز السفلي 2 يرمز إلي الأصل .

التشابه الدينـاميكى :

يحدث التشابه الديناميكي بين نظامين إذا كانت نسب كل القوي المتناظرة في النموذج والأصل متساوية ومن أمثلة القوي في ديناميكا الموائع والمرونة هي قوي اللزوجة ، قوي الضغط ، الجاذبية الأرضية ، قوي الشد السطحي ، قوي المرونة .

تشابه قوى القصور :

في هذه الحالة يجب أن يكون :

الكتلة × العجلة للأصل = الكتلة × العجلة للنموذج

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$
$$\rho_1 V_1 a_1 = \rho_2 V_2 a_2$$
$$\rho_1 A_1 L_1 a_1 = \rho_2 A_2 L_2 a_2$$
$$\rho_1 A_1 L_1 \frac{V_1}{T_1} = \rho_2 A_2 L_2 \frac{V_2}{T_2}$$
$$\because V = \frac{L}{T}$$
$$\therefore \rho_1 A_1 V_1^2 = \rho_2 A_2 V_2^2$$

النسبة بين قوتى القصور والضغط (عدد أويلر) :

وهذه النسبة تعطي باستخدام :

الزمن : $\dfrac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

$$T = \frac{L}{V}$$

$$\frac{Ma}{PA} = \frac{\rho L^3 \frac{L}{T^2}}{PL^2} = \frac{\rho L^4 \frac{V^2}{L^2}}{\rho L^2} = \frac{\rho L^2 V^2}{PL^2} = \frac{\rho V^2}{P}$$

أي أن :

$$\frac{\rho_1 V_1^{\,2}}{P_1} = \frac{\rho_2 V_2^{\,2}}{P_2}$$

النسبة بين قوتى القصور الذاتى واللزوجة (رقم رينولد) :

$$\frac{Ma}{\tau A} = \frac{Ma}{\mu\left(\frac{dV}{dy}\right)A} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu \frac{V}{L} L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} = \mathrm{Re}$$

في حالة النماذج يكون :

$$\frac{\rho_1 V_1 L_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 V_2 L_2}{\mu_2}$$
$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2$$

أي أن يكون عدد رينولد في الأصل يساوي عدد رينولد في النموذج (التجربة)

النسبة بين قوتى القصور الذاتى والجاذبية (عدد فرويد) :

$$\frac{Ma}{Mg} = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{Lg} = F^2$$

في حالة النماذج يكون :

$$\frac{V_1^2}{L_1 g_1} = \frac{V_2^2}{L_2 g_2}$$

وتسمي الكمية $\frac{V}{\sqrt{Lg}}$ بعدد فرويد .

نسبة قوتى القصور والمرونة (عدد ماخ) :

$$\frac{Ma}{EA} = \frac{\rho L^2 V^2}{EL^2} = \frac{\rho V^2}{E} = \frac{V^2}{E/\rho}$$

الكمية $\frac{V}{\sqrt{E/\rho}}$ تسمي بعدد ماخ M .

وفي حالة النماذج يكون :

$$M_1 = M_2$$

ملاحظة :

العداد أويلر و رينولد و ماخ وغيرهم من الكميات الغير بعدية التي تدخل بمقارنة حدود المعادلات تسمي بمعايير التشابه .

التشابه الكامل والتشابه الجزئى :

يحدث التشابه الديناميكي الكامل بين النموذج والأصل إذا تساوت جميع معايير التشابه الديناميكي في كل من الأصل والتجربة وعمليا قد يعقد هذا تصميم التجربة وقد لا يتحقق هذا لأي نموذج أو لا تسمح الإمكانيات الموجودة بعمل مثل هذه التجربة المثالية أو تكون غير اقتصادية .

لذلك يجب التركيز علي نوع واحد من التشابه أو أثنين حسب أهم القوي المؤثرة مع إهمال التشابه بالنسبة للقوي الباقية . ومعايير التشابه نرمز لها بالرموز (أحيانا) :

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots\ldots\ldots$$

نظرية π :

إذا كان لدينا معادلة صحيحة كاملة علي الصورة :

$$\Phi(Q_1, Q_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, Q_n) = 0$$

والمشتمل علي n من الكميات البعدية التي يمكن التعبير عنها بدلالة K من الوحدات الأساسية .

من الممكن كتابة هذه المعادلة علي الصورة :

$$\Psi(\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \pi_{n-k}) = 0$$

وهي صورة غير بعدية وجميع متغيراتها كميات غير بعدية والدوال π هي جميع حواصل الضرب الممكنة اللابعدية المستقلة التي يمكن تكوينها من n من الكميات البعدية بأية كيفية .

ونستخدم هذه النظرية علي نطاق واسع في تصميم التجارب لإنقاص عدد المتغيرات إلي الحد الأدنى ووضع المسائل في صورة رتيبة لا تتطلب ال ادني مجهود ذهني .

تطبيقات على التحليل البعدي ونظرية π :

مثال(١) :

قوة المقاومة علي وحدة السطوح من جدار أنبوبة بفرض أن هذه القوة دالة في معامل اللزوجة μ والكثافة ρ والقطر d والسرعة المتوسطة للانسياب v . يمكن وضع القانون علي الصورة :

$$\tau = C\mu^x \rho^y d^z v^u ,..........(1)$$

وبأخذ وحدات الطرفين :

$$\begin{aligned}
&[\tau] = [C][\mu]^x [\rho]^y [d]^z [v]^u \\
&\frac{M}{LT^2} = \left[\frac{M}{LT}\right]^x \left[\frac{M}{L^3}\right]^y L^z \left[\frac{L}{T}\right]^u \\
&ML^{-1}T^{-2} = M^x L^{-x} T^{-x} M^y L^{-3y} L^z L^u T^{-u} \\
&ML^{-1}T^{-2} = M^{(x+y)} L^{-x-3y+z+u} T^{-z-u}
\end{aligned}$$

وشرط تجانس الأبعاد يقتضي أن يكون أس أي بعد في الطرف الأيسر يساوي نفس البعد في الطرف اليمن .

$x + y = 1$ (أس البعد M)

$-x - 3y + z + u = -1$ (أس البعد L)

$-x - u = -2$ (أس البعد T)

وهي ثلاث معادلات في أربعة مجاهيل – أي يمكن التعبير عن ثلاثة بدلالة الرابع وليكن u وعليه يكون

$$x = 2 - u$$
$$y = u - 1$$
$$z = u - 2$$

والمعادلة (1) تأخذ الصورة :

$$\tau = C\,\frac{\mu^2}{\rho d^2}\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)^u$$

$$or$$

$$\frac{\tau}{\left(\mu^2/\rho d^2\right)} = C\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)^u$$

$$\pi_1 = C\pi_2^u \quad ، \quad \rho = \frac{M}{V}$$

$$\pi_1 = C\,\mathrm{Re}^u$$

حيث أن :

$$\pi_1 = \frac{\tau}{\left(\mu^2/\rho d^2\right)} \quad , \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu}$$

ملاحظة هامة :

في المثال السابق توصلنا إلي قانون القوة علي الصورة :

$$\pi_1 = C\pi_2^u,..........(2)$$

حيث C,u **مجاهيل .**

لتعيين كلا من C,u **نلجأ إلي التجربة وتمثيل النتائج بيانيا ، ويستخدم ورق بياني من النوع اللوغاريتمي . بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة** (2) **نحصل علي :**

$$\log\pi_1 = u\log\pi_2 + \log C,..........(3)$$

المعادلة السابقة (3) **تمثل خط مستقيم ميله** u **والجزء الذي يقطعه من محور الصادات** $\log C$ **وبذلك يتحدد القانون الجديد تحديدا تاما .**

مثال(٢) :

إيجاد قانون المقاومة في المثال السابق باستخدام نظرية π **. العلاقة بين المتغيرات يمكن وضعها علي الصورة :**

$$F(\tau,\rho,v,d,\mu) = 0$$

وحيث أن :

$$[\tau]=\frac{M}{LT^2} \quad ، \quad [\rho]=\frac{M}{L^3} \quad ، \quad [v]=\frac{L}{T} \quad ، \quad [d]=L \quad ، \quad [\mu]=\frac{M}{LT}$$

وحيث أن عدد الوحدات الأساسية هي ثلاثة M,L,T فان الكميات الغير بعدية يكون عددها اثنين فقط وهما :

$$\pi_1=\frac{\tau}{\rho v^2} \quad ، \quad \pi_2=\frac{\rho v d}{\mu}$$

ويصبح القانون :

$$\Psi(\pi_1,\pi_2)=0$$
$$or$$
$$\frac{\tau}{\rho v^2}=F\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)=C\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)^u$$

<u>مثال(٣) :</u>

استنتج علاقة تربط بين إجهاد القص في مائع يمر خلال ماسورة بفرض أن الإجهاد دالة في قطرها وخشونتها وكثافة المائع ولزوجته وسرعته .

<u>الحل :</u>

يمكن وضع العلاقة علي الصورة :

$$\tau = f(v,d,\rho,\mu,K)$$

حيث K تمثل خشونة الماسورة وهي النسبة بين ارتفاع النتوءات الخشنة إلي قطر الماسورة $\frac{\varepsilon}{d}$ وهي رقم غير بعدي .

$$\tau = C v^{a} d^{b} \rho^{c} \mu^{d} K^{e}$$

وبأخذ وحدات الطرفين واعتبار القوة وحدة أساسية بدلا من الكتلة :

$$F^{1} L^{-2} T^{0} = \left(L^{a} T^{-a}\right)\left(L^{b}\right)\left(F^{c} T^{2c} L^{-4c}\right)\left(F^{d} T^{d} L^{-2d}\right)\left(L^{e} L^{-e}\right)$$

وبمقارنة الطرفين :

$$\begin{aligned} 1 &= c + d \\ -2 &= a + b - 4c - 2d + e - e \\ 0 &= -a + 2c + d \end{aligned}$$

وبوضع جميع المتغيرات بدلالة d ينتج أن :

$$\begin{aligned} c &= 1 - d \\ a &= 2 - d \\ b &= -d \end{aligned}$$

وبالتعويض نحصل علي :

$$\tau = Cv^{2-d} d^{-d} \rho^{L-d} \mu^{d} K^{e}$$

$$\frac{\tau}{K^{e} \rho v^{2}} = C\left(\frac{v d \rho}{\mu}\right)^{-d} = \frac{C}{\mathrm{Re}^{d}}$$

الباب السادس

أ- نظرية الطبقة الجدارية الرفائقية

Laminar Boundary Layer Theory

(١) السريان الجهدي :

في حالة المائع الغير قابل للانضغاط و إهمال حدود اللزوجة من معادلات الحركة نحصل علي ما يسمي بمعادلات أويلر كما سبق أن ذكرنا في الباب الثاني وفي حالة الحركة الغير دورانية يسمي السريان بالسريان الجهدي كما ذكرنا في الباب الثالث وعند كتابة معادلات حركة المائع اللزج في صورة غير بعدية نجد أن حدود اللزوجة تحتوي علي المعامل $\frac{1}{\mathrm{Re}}$ ولقيم Re الكبيرة تصبح هذه الحدود صغيرة القيمة مما يوحي بإهمال هذه الحدود واستخدام الحلول الجهدية للمسائل ولكن هذا المدخل غير سليم نظرا لأن الحل في هذه الحالة يحقق شرط عدم الانزلاق الموجود في حالة الموائع اللزجة وغير موجود في الموائع المثالية أو السريان الجهدي .

لذا كـان لزامـا علينـا حل معـادلات نـافيير ستوكس بالكامـل بـالقرب مـن السطوح واعتبـار أن حـدود اللزوجة وحدود القصور لـهما نفس الدرجة من الصـغر أو الكبـر فـي منطقـة سمكها صـغير بالنسبة لأبعاد الجسم وهذا الفرضان هما الفرضان الرئيسيان في نظريـة حركـة الموائـع اللزجـة بـالقرب مـن السطوح وتسمي بنظرية الطبقة الجدارية .

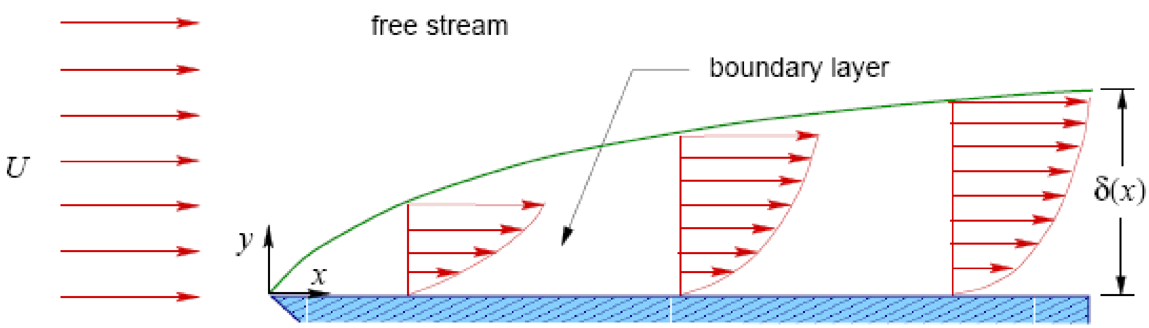
وخارج الطبقة الجدارية يمكن اعتبار حركة المائع معلومة وإنـها حركة ذات جهد (جهدية) .

وفي الحياه العملية نحتاج حسابات الطبقة الجدارية في إيجاد مقاومة الـهواء حـول جسم (ولـيكن أجنحة الطائرات) وفي هذه الحالة يكون عدد رينولد كبيرا .

(2) الجدارية حول مستوي لانـهائي :

استخدم براندل الفرضيين السابقين وهما صغر سمك الطبقة الجدارية δ بالنسبة إلي طول الجسم وتساوي درجة كلا من حدود اللزوجة والقصور في الصغر أو الكبر في تبسيط شكل معادلات حركة مائع لزج في مستوي .

وأفضل الأمثلة التي يمكن شرح ذلك عليها هو دراسة حركة مائع لزج فوق مستوي لانـهائي مثبت ويدخل عليه المائع بسرعة موازية U قد تكون ثابتة وقد تكون دالة في x .



وبفرض أن مركبات السرعة هي (u,v) وإنها تحقق معادلات الحركة :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\nabla^2 u,..........(1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\nabla^2 v,..........(2)$$

بالإضافة إلي معادلة الاتصال وهي :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,......................................(3)$$

تحت الشروط الحدية :

عندما يكون $y=0$ فان $u=v=0$.

وعندما يكون $y\to\infty$ فان $v=0$ ، $u=U$.

وقد أهملت القوي الحجمية واعتبرنا أن السريان لا يعتمد علي الزمن ويمكن اخذ هذه العوامل في الاعتبار بدون التأثير علي الخطوات والآن نحاول كتابة المعادلات في صورة غير بعدية فتضع :

$$\left.\begin{aligned} u &= Uu' \\ v &= U\frac{\delta}{l}v' \\ x &= lx' \\ y &= \delta y' \\ P &= \rho U^2 P' \end{aligned}\right\},..........(4)$$

بالتعويض في المعادلة (3) تصبح معادلة الاتصال بالصورة :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}=0,............(5)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن :

$$\frac{U^2}{l}u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{U^2\delta}{l\delta}v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{\rho U^2}{\rho l}\frac{\partial P'}{\partial x'}+\frac{\upsilon U}{l^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\upsilon U}{\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

$$\frac{U^2}{l}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)=-\frac{U^2}{l}\frac{\partial P'}{\partial x'}+\frac{\upsilon U}{l^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\upsilon U}{\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},...........(6)$$

نلاحظ أن نسبة معامل الحد قبل الأخيرة في الطرف الأيمن $\frac{\upsilon U}{l^2}$ إلي معامل الحد الأخير فيه $\left(\frac{\upsilon U}{\delta^2}\right)$

هي $\frac{\upsilon U}{l^2}\frac{\delta^2}{\upsilon U}=\frac{\delta^2}{l^2}$ ومن ثم يمكن إهمال الحد قبل الأخير بالنسبة إلي الحد الأخير .

وكذلك إذا قارنا حدود اللزوجة $\left(\frac{\upsilon U}{\delta^2}\right)$ وحدود القصور $\left(\frac{U^2}{l}\right)$ حسب الفرض الثاني :

$$\frac{U^2}{l} \approx \frac{\upsilon U}{\delta^2}$$

$$\delta^2 \approx \frac{\upsilon U l}{U^2} = \delta^2 \approx \frac{\upsilon l}{U}$$

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\upsilon l}{U}} = l\sqrt{\frac{\upsilon}{Ul}}$$

$$\because \mathrm{Re} = \frac{Ul}{\upsilon}$$

$$\therefore \delta \approx l\sqrt{\frac{1}{\mathrm{Re}}} = \frac{l}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \dots\dots\dots.(7)$$

وبذلك يمكن تقدير متوسط سمك الطبقة الجدارية بطريقة تقريبية وذلك باستخدام المعادلة (7) .

وبالتعويض من (7) في معادلة (2) نجد أن :

$$\frac{U^2\delta}{l^2}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\rho U^2}{\delta}\frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{\upsilon U\delta}{l^3}\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\upsilon U\delta}{l\delta^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}, \dots\dots\dots.(8)$$

وبقسمة معادلة (8) علي $\dfrac{U^2}{\delta}$

$$\frac{\delta^2}{l^2}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial P^2}{\partial y^2} + \frac{\upsilon\delta^2}{Ul^3}\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\upsilon}{Ul}\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}$$

وحيث أن حدود اللزوجة والقصور يجب أن تكون لهما نفس الدرجة أي $\frac{\delta^2}{l^2}$ حسب الفرض الثاني ومعامل التدرج في الضغط هو الوحدة وبذلك يجب إهمال كل من حدود القصور واللزوجة بالنسبة إلي حد التدرج في الضغط وبذلك تؤول المعادلة (8) إلي الصورة :

$$\frac{\partial P'}{\partial y'} = 0, \qquad (9)$$

$$\therefore P' = P'(x), \qquad (10)$$

وهذا انجاز ضخم لتقريب الطبقة الجدارية فلقد أثبتنا أن الضغط لا يتغير بتغير الارتفاع سواء كنا في داخل الطبقة الجدارية أو خارجها . أي أن الضغط أصبح معلوما وحذف من المجاهيل وأصبح عددها اثنان بدلا من ثلاثة وأصبح عدد المعادلات اثنين بدلا من ثلاثة وتصبح المعادلات هي :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \qquad (11)$$

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\upsilon U}{\delta^2}\frac{l}{U^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \qquad (12)$$

تحت الشروط الحدية :

عندما يكون $y' = 0$ فان

$$u' = v' = 0, \qquad (13)$$

وعندما يكون $y' \to \infty$ فان

$$u' = 1 \ ، \ v' = 0, \ldots\ldots (14)$$

وتسمي المعادلات $(11),(12),(13),(14)$ بمعادلات براندل للطبقة الجدارية في صورتها الغير بعدية .

(٣) الحلول التماثلية Similar Solutions :

في كثير من الأحيان ما يسعدنا الحظ فنستطيع تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلي معادلات تفاضلية عادية بتحويل المتغيرات . وطبعا التعامل مع المعادلة التفاضلية العادية أسهل بكثير جدا من التعامل مع المعادلة التفاضلية الجزئية وتسمي حلول هذه المعادلة بالحلول التماثلية .

وتتلخص هذه الطريقة في إتباع الخطوات الآتية :

نفرض أن لدينا دالة مجهولة $\Psi = \Psi(x, y)$ تحقق معادلة تفاضلية جزئية واستخدمنا متغيرين جديدين x, η بدلا من المتغيرين x, y بحيث أن :

$$\eta = \Phi_1(x) y$$
$$\Psi = \Phi_2(x) f(\eta)$$

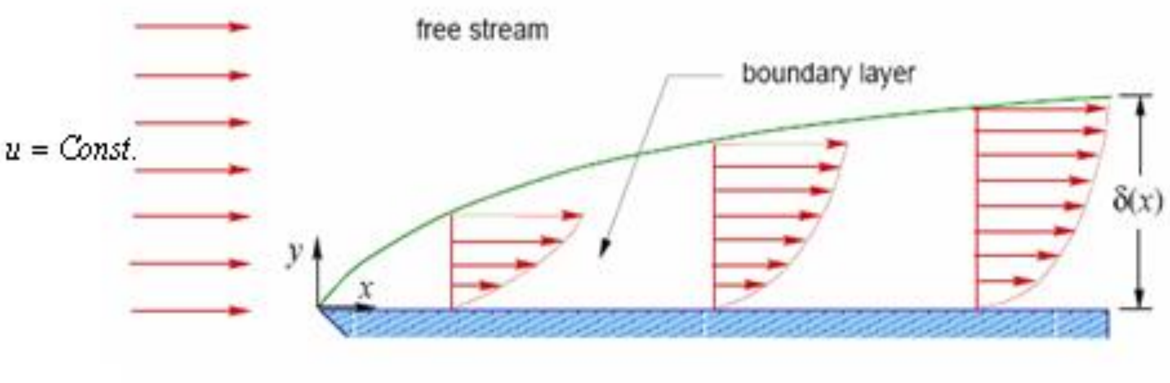
وعوضنا في المعادلة التفاضلية فإننا نحصل علي معادلة تفاضلية تحتوي علي تفاضلات الدالة المجهولة f ومعاملات هذه التفاضلات تكون دوالا في x . إذا أمكن التعبير عن معاملات هذه المعادلة بمقادير ثابتة تصبح المعادلة التفاضلية عادية ونقول انه يوجد حل تماثلي f للمشكلة .

وفي بعض الأحيان يمكن التحويل في الصورة :

$$\eta = ax^n y \quad ، \quad \Psi = bx^m f(\eta)$$

(٤) المعادلة التماثلية لحالة السريان حول نصف المستوى :

رغم التبسيط الذي حصلنا عليه عند كتابة معادلات براندل للطبقة الجدارية فان المعادلات مازالت بعيدة عن الحل ويلزم تحويل المعادلات إلي معادلات تفاضلية عادية والآن سوف ندرس الحالة عندما تكون السرعة بعيدا عن السطح وتساوي U ثابتة .



في هذه الحالة يكون

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

وتصبح معادلات براندل هي :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

تحت الشروط الحدية :

عندما يكون $y = 0$ **فان** $u = v = 0$.

وعندما يكون $y \to \infty$ **فان** $v = 0$ ، $u = U$.

فإذا أخذنا :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ، \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

فان المعادلة (2) تحقق أوتوماتيكيا . وتصبح المعادلة (1) علي الصورة :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \upsilon \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} ,..........(3)$$

والشروط الحدية هي :

عندما يكون $y = 0$ فان

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

وعندما يكون $y \to \infty$ فان

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U$$

المعادلة (3) يمكن البحث عن حل تماثلي لها وذلك باستخدام التعويض :

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{2\upsilon x}} = \left(\frac{U}{2\upsilon x}\right)^{1/2} y$$

$$\Psi = \sqrt{2U\upsilon x}\, f(\eta) = (2U\upsilon x)^{1/2}\, f(\eta)$$

$$\because u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = (2U\upsilon x)^{1/2} \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dy}$$

$$u=(2U\upsilon x)^{1/2}\left(\frac{U}{2\upsilon x}\right)^{1/2}\frac{df}{d\eta}=U\frac{df}{d\eta}$$

$$v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2yU}{x}\right)^{1/2}f+(2\upsilon Ux)^{1/2}\frac{1}{x}\left(\frac{U}{2\upsilon x}\right)^{1/2}\frac{y}{x}\frac{df}{d\eta}$$

$$v=\left(\frac{U\upsilon}{2x}\right)\left(\eta\frac{df}{d\eta}-f\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u\left(\frac{U}{2\upsilon x}\right)^{1/2}\frac{d^2f}{d\eta^2}\quad,\qquad\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{U}{x}\eta\frac{d^2f}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=U\left(\frac{U}{2\upsilon x}\right)\frac{d^3f}{d\eta^3}$$

بالتعويض في المعادلة (3) نحصل علي :

$$f'''+ff'=0,.........(4)$$

تحت الشروط :

عندما يكون $\eta=0$ فان

$$f=0\quad,\qquad f'=0$$

وعندما يكون $\eta\to\infty$ فان

$$f'=1$$

ولقد قام بلازيس **Blasius** بإجراء تكامل عددي لهذه المعادلة وأعطي الحل في صورة جداول نظرا لان المعادلة (4) معادلة غير خطية ولا يوجد حل تحليلي مضبوط لها وفي حالة ما إذا كانت U دالة في x فان $\frac{dP}{dx}$ لا يساوي الصفر ومعادلات براندل يكون لها حل تشابهي فقط إذا وضعت :

$$U = \alpha x^m$$

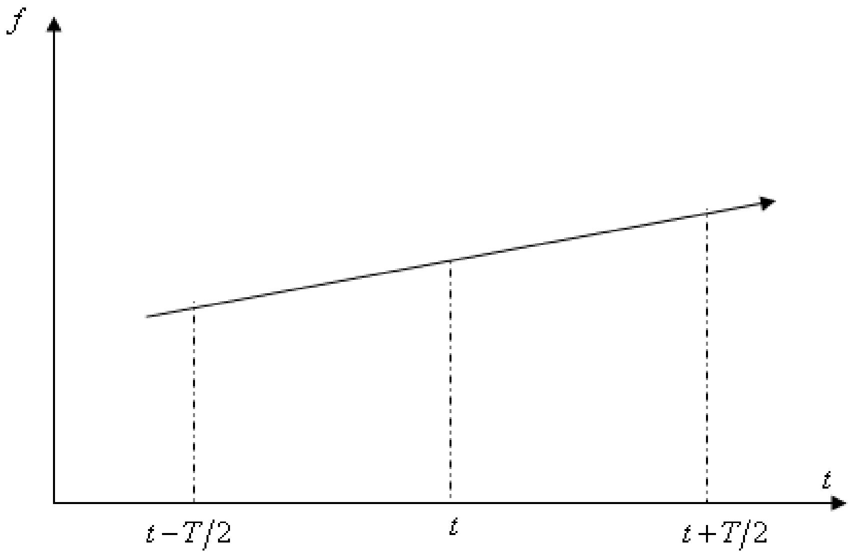
المعادلة (4) تسمي بمعادلة بلازيس .

ب- الحركة الاضطرابية Turbulent Flow

عند دراسة حركة الموائع في الأنابيب لأعداد رينولد متفاوتة لوحظ أن الحركة تفقد استقرارها بعد عدد رينولد الحرج الذي يساوي تقريبا ($Re = 2300$) والذي تكون الحركة عشوائية لجسيمات المائع وسرعة ومعدل تغير السرعة بالنسبة للزمن تكون في صورة مشتتة في جميع الاتجاهات .

وقد بينت التجارب المعملية أن متغيرات الحركة المختلفة مثل السرعة والضغط والكثافة عند أي نقطة ليست متغيرات عادية وإنما متغيرات عشوائية . وفي حالة إجراء تجربة وتكرارها تحت نفس الظروف لا نحصل علي نفس النتائج . لذلك الحديث عن المتغيرات نفسها لا يكون ذات معني (عند نقطة معينة أو لحظة معينة) ولذلك يجب التعامل مع متوسطات هذه الكميات سواء أخذ المتوسط بالنسبة للزمن أو بالنسبة للفراغ نظرا لأن الخواص الإحصائية للظاهرة هي التي يمكن قياسها وملاحظتها .

وبالبحث والتجربة وجد من المفيد أخذ المتوسطات بالنسبة للزمن وذلك للقياسات النظرية والتجريبية . فمثلا بدلا من المنحني المبين بالشكل لدالة مثل السرعة يمكن استبداله بمنحني أملس يمثل المتوسط كما هو موضح بالشكل التالي :



والمتوسط $\bar{f}$ لدالة f خلال فترة زمنية T يعطي من :

$$\bar{f}(x,y,z,t)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x,y,z,t)dt$$

ويمكن وضع القيمة الحقيقية f علي صورة مجموع كميتين الأولي المتوسط $\bar{f}$ والثانية الانحراف عن المتوسط f' :

$$f = \bar{f} + f'$$

خواص المتوسطات والانحراف :

$$(1)\ \overline{f'} = 0$$
$$(2)\ \overline{\overline{f}} = \overline{f}$$
$$(3)\ \overline{\overline{f} f_1} = \overline{f}\,\overline{f_1}$$
$$(4)\ \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}$$
$$(5)\ \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}$$
$$(6)\ \overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'},\ \overline{f'g'} \neq 0,\ \overline{f'g'} \neq 0$$
$$(7)\ \overline{f^2} = \overline{f}^2 + \overline{f'}$$

معادلات الحركة الاضطرابية :

يمكن اعتبار أن القيم الحقيقية أو اللحظية للمتغيرات تحقق معادلات حركة المائع اللزج ولكن يفضل وضعها في صورة متغيرات عادية وليست متغيرات عشوائية أي لابد من التعامل مع المتوسطات . وعلي هذا الأساس يفضل وضع أي دالة f علي الصورة :

$$f_1 = \overline{f} + f'$$

في معادلات الحركة ثم أخذ المتوسطات وبذلك تكون جميع الكميات الموجودة في المعادلات هي متوسطات وبالطبع المتوسطات هي متغيرات عادية يمكن قياسها والتعامل معها . بفرض أن مركبات السرعة الحقيقية (u,v,w) والضغط P تحقق المعادلات :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\nabla^2 u,..............(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\nabla^2 V,..............(2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\upsilon\nabla^2 w,...........(3)$$

وذلك بفرض إهمال القوي الخارجية .

بإعادة كتابة المعادلات السابقة بعد استخدام قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين وتصبح علي الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}(uv)+\frac{\partial}{\partial z}(uw)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\nabla^2 u,..............(1)'$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uv)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}(vw)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\nabla^2 V,..............(2)'$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uw)+\frac{\partial}{\partial y}(vw)+\frac{\partial}{\partial z}\left(w^2\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\upsilon\nabla^2 w,...........(3)'$$

حيث استخدمت معادلة الاتصال للموائع الغير قابلة للانضغاط باعتبار المتوسطات لا تعتمد علي الزمن والتعويض بالكميات :

$$\left.\begin{aligned} u&=\bar{u}+u' \\ v&=\bar{v}+v' \\ w&=\overline{w}+w' \\ P&=\overline{P}+P' \end{aligned}\right\},..\otimes$$

في المعادلات $\left((1)' - (2)'\right)$ لتأخذ الصورة :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u})^2 + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}'^2 v) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \upsilon\nabla^2\bar{u}, ...(4)$$

والتي يمكن كتابتها علي الصورة :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u})^2 + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \upsilon\nabla^2\bar{u} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}'^2 v) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'})\right)$$

أو علي الصورة :

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \upsilon\nabla^2\bar{u} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}'^2 v) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'})\right), ...(5)$$

وبالمثل يمكن كتابة المعادلات في اتجاهي y, z علي الصورة :

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \upsilon\nabla^2\bar{v} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'w'})\right), ...(6)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \upsilon\nabla^2\bar{w} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'\bar{w}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'^2}\right)\right), ...(7)$$

ومعادلة الاتصال تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0, \qquad (8)$$

المعادلات $(5-8)$ تحتوي علي عشرة مجاهيل هي $\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{P},\bar{u}'^2,\bar{v}'^2,\bar{w}'^2,\overline{u'v'},\overline{u'w'},\overline{v'w'}$ ولذلك يلزم إضافة معادلات أخري كي يكون عدد المعادلات مساو لعدد المجاهيل . ويمكن اعتبار فروض مماثلة لفروض قانون نيوتن المعمم لتربط بين متوسطات الانحرافات من الرتبة الثانية بتفاضلات السرعة المتوسطة حيث تمثل هذه الانحرافات مضروبة في الكثافة اجهادات جديدة تسمي اجهادات رينولد للحركة الاضطرابية أي أن الإجهاد يكون من جزئيين جزء P^T للحركة الاضطرابية وجزء P_{ij}^l للحركة الرقائقية (المتوسطة) حيث :

$$\begin{array}{lll} P_{xx}^T=-\rho\bar{u}'^2 & , & P_{xy}^T=-\rho\overline{u'v'} \\ P_{yy}^T=-\rho\bar{v}'^2 & , & P_{xz}^T=-\rho\overline{u'w'} \\ P_{zz}^T=-\rho\bar{w}'^2 & , & P_{yz}^T=-\rho\overline{v'w'} \end{array}$$

ويكون الإجهاد الكامل في الحركة الاضطرابية علي الصورة :

$$P_{xx} = -\overline{P} + 2\mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'}^2$$

$$P_{yy} = -\overline{P} + 2\mu \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} - \rho \overline{w'}^2$$

$$P_{zz} = -\overline{P} + 2\mu \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} - \rho \overline{w'}^2$$

$$P_{xy} = \mu\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right) - \rho \overline{u'v'}$$

$$P_{xz} = \mu\left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) - \rho \overline{u'w'}$$

$$P_{yz} = \mu\left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right) - \rho \overline{v'w'}$$

وبإدخال معامل اللزوجة الاضطرابي ε في الفروض الإضافية السابقة يمكن أن تكتب علي الصورة

$$\rho \overline{u'}^2 = -2\varepsilon \frac{\partial \overline{u}}{\partial x},$$

$$\rho \overline{v'}^2 = -2\varepsilon \frac{\partial \overline{v}}{\partial y},$$

$$\rho \overline{w'}^2 = -2\varepsilon \frac{\partial \overline{w}}{\partial z},$$

$$\rho \overline{u'v'} = -\varepsilon\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right),$$

$$\rho \overline{u'w'} = -\varepsilon\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial x}\right),$$

$$\rho \overline{v'w'} = -\varepsilon\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial y}\right),$$

وبذلك المعادلات $(5-7)$ تأخذ الصورة :

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+(\upsilon+\varepsilon)\nabla^2\bar{u},$$
$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+(\upsilon+\varepsilon)\nabla^2\bar{v},$$
$$\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+(\upsilon+\varepsilon)\nabla^2\bar{w},$$

والمعادلات السابقة يطلق عليها معادلات رينولد للحركة الاضطرابية في حالة عندما $\varepsilon=0$ تؤول إلي معادلات نافيير – ستوكس للحركة الطبقية .

معامل اللزوجة الاضطرابى ε :

معامل اللزوجة الاضطرابي ε يختلف عن معامل اللزوجة في الحركة الرقائقية (الطبقية) حيث لا يعتبر مقدارا ثابتا . ويكون مقدارا صغيرا بالقرب من الجدار في حالة الأنابيب ثم يزداد حتي يصل إلي نهاية عظمي في منتصف نصف القطر ثم يقل حتي نهاية صغري عند محور الأنبوبة .

الاجهادات الاضطرابية وتفاضلات متوسطات السرعة :

فرض براندل :

افترض براندل في حالة السريان في بعد واحد أن العلاقة بين إجهاد القص الاضطرابي وتفاضل السرعة المتوسطة علي الصورة :

$$\tau = \rho \chi^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 ,..........(1)$$

حيث χ مقدار ثابت .

أي أن معامل اللزوجة الاضطرابي هو $\rho \chi^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$ والثابت χ يتعين من التجربة . وبما أن الحركة في بعد واحد وهو السريان بجوار السطح لانهائي وفي هذه الحالة نجد أن $\bar{u} = \bar{u}(y)$ ومعادلة الحركة تصبح :

$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \Rightarrow \tau = \tau_o = Const.$$

حيث τ_o الإجهاد علي الجدار . بفرض أن :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad , \quad \bar{u} = u^* u^+ \quad , \quad y = \frac{\upsilon}{u^*} y^+$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل علي :

$$\frac{du^+}{dy^+}=\frac{1}{\chi y^+},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$u^+=\frac{1}{\chi}\ln y^+ + C_o,\ldots\ldots(3)$$

نلاحظ انه عندما $y^+ \rightarrow 0$ تكون $u^+ \rightarrow -\infty$ وهذا غير وارد لان القانون (3) صالح فقط في منطقة تلامس الجدار وعليه لا يجب افتراض وجود الحركة الاضطرابية في هذه المنطقة وبذلك نفترض أن السريان في منطقة قريبة من الجدار رقائقي ثم يليه بعد ذلك الطبقة الجدارية الاضطرابية التي يصلح لها القانون اللوغاريتمي وتسمي الطبقة الرقائقية بالطبقة الرقائقية التحتية $(y^* < 5)$ وتوزيع السرعة فيها هو توزيع خطي . واقرب مثال يطبق فيه القانون اللوغاريتمي للسرعة هو حركة الهواء فوق سطح الأرض . المنطقة الصغيرة التي ارتفاعها عدة أمتار هي سريان رقائقي تحتي وما فوقها بعد ذلك سريان اضطرابي يخضع للتوزيع اللوغاريتمي .

وبالنسبة للثوابت فلقد وجد أن :

$$\frac{1}{\chi}=2.5 \qquad , \qquad C_o=5.5$$

أي أن :

$$u^* = 2.5\ln y^+ \qquad y^+ > 30$$

$$u^+ = 5\ln y^+ - 3.05 \qquad 5 < y^+ < 30$$

في حالة السريان في الأنابيب فان معامل اللزوجة الاضطرابي يؤخذ بحيث يتفق مع التوزيع النوني للسرعة .

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n$$

حيث R **نصف القطر ،** $n = \frac{1}{7}$ **،** y **البعد عن الجدار .**

بفرض أن $u^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}y}$ **وباستخدام المعادلة** (1) **نحصل علي :**

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u^*}{\chi y}$$

وتكامل هذه المعادلة يعطي :

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\chi}\ln y + \ln C_o$$

حيـث C_o **ثابـت . وبوضـع** $y = \frac{\upsilon}{u^*}y^+$ **،** $\bar{u} = u^* u^+$ **،** $u^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$ **فـي المعادلـة** (1) **فإنهـا تأخـذ الصورة :**

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{\chi y^+}$$

$$u^+ = \frac{1}{\chi}\ln y^+ + C_o$$

المــراجع

١- " الهيدروديناميكا و المرونة" – أ.د/ عفاف صبري .

٢- " ميكانيكا الموائع و تطبيقاتها الهندسية " – د. روبرت ل دوجرتى و جوزيف فرانزينى – دار ماكجروهيل للنشر – ١٩٨٣م.

3- Advanced hydrodynamics and fluid dynamics by M. D. Raisinghania and R. S. Aggarwal S Chandand Company LTD , Ram Nagar, New Delhi, 1982.
4- Viscous fluid dynamics, J. L. Bansal, (1977).
5- Fluid mechanics, Boher and Kenyon, (1980).
6- Mechanics of fluid by SHAMES, McGraw-Hill, 2002.
7- Fluid Mechanics, by Streeter, McGraw-Hill, 1998.
8- Theory and applications of fluid mechanics by Subramanya, McGraw-Hill, 1993.
9- Fundament mechanics of fluids, By I. G. Currie,1974
10- Fluid Dynamics by R. Von Mises.
11- Fluid Dynamics by Ratherford.
12- Hydrodynamics by A. S .Ramsey.
13- Theoretical Hydrodynamics by Melne-Tomson.
14- Boundary - Layer Theory by Hermann Schlichting.

تم بحمد الله ،،،

مع خالص تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د/ رمضان عبد الله محمد