بحتة ١٥

جزء:التوبولوجي

المحتويات

الصفحة

الفصل الخامس

مسلمات الانفصال والعد

Separation Axioms and Countability

مقدمة.

يستطيع دارس التوبولوجي أن يلاحظ أن العديد من خواص الفضاء التوبولوجى تعتمد على توزيع المجموعات المفتوحة فى هذا الفضاء. كما يلاحظ أن أكثر الفضاءات شهرة فى الهندسة والتحليل تقع ما بين الفضاء التوبولوجي المتقطع والفضاء التوبولوجي الغير متقطع وذلك لمدى الارتباط الوثيق بين مفهومي المجموعات المفتوحة و الدوال المتصلة المعرفة على هذه الفضاءات ، فمثلاً الدالة الوحيدة المستمرة المعرفة على الفضاء الغير متقطع هي الدالة الثابتة، فكلما زاد عدد المجموعات المفتوحة فإنه يقابله مزيداً من الدوال المتصلة المعرفة على هذا الفضاء.

ولكى نستطيع توفير العديد من المجموعات المفتوحة في الفضاء التوبولوجى سوف نقوم بدراسة مفهوم مسلمات الانفصال على هذا الفضاء. خلال دراسة مسلمات الانفصال سوف ندرس أي من هذه المسلمات تحقق خاصية كونها خاصية وراثية و التي ستتحقق في جميع المسلمات عدا مسلمة كون الفضاء عادياً.

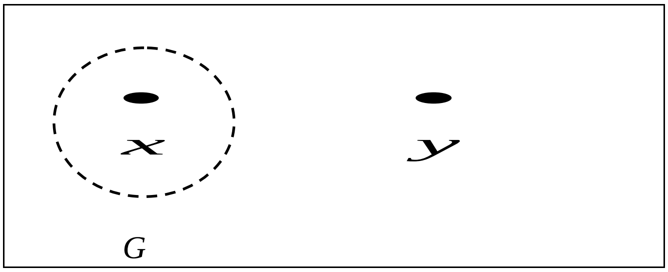
(٥,١) الفضاء - T_0 Kolmogorff Space

تعريف (٥,١)

يسمى الفضاء التوبولوجى (X,τ) فضاء – T_0 إذا تحقق الشرط :

$$\forall\, x,y \in X\,, x \neq y, \exists G \in \tau : x \in G, y \notin G \;\; or \;\; y \in G, x \notin G$$

أي أنـه لكل نقطتين مختلفتين $x,y \in X$ توجد مجموعة مفتوحة G بحيث تحوي إحداهما و لا تحتوي النقطة الأخرى.



شكل (٥,١)

مثال (٥,١)

نفرض أن $\tau = \{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$. إذاً الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_0 و ذلك لأن:

$(i) \quad a \neq b \;,\; \exists \{b\} \in \tau : \; b \in \{b\} \,,\, a \notin \{b\};$

$(ii) \quad a \neq c \;,\; \exists \{a,b\} \in \tau : \; a \in \{a,b\} \,,\, c \notin \{a,b\};$

$(iii) \quad a \neq d \;,\; \exists \{a,b\} \in \tau : \; a \in \{a,b\} \,,\, d \notin \{a,b\};$

$(iv) \quad b \neq c \;,\; \exists \{b\} \in \tau : \; b \in \{b\} \,,\, c \notin \{b\}.;$

$(v) \quad b \neq d \;,\; \exists \{b\} \in \tau : \; b \in \{b\} \,,\, d \notin \{b\}.;$

$(vi) \quad c \neq d \;,\; \exists \{b,c\} \in \tau : \; c \in \{b,c\} \,,\, d \notin \{b,c\}.$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على إحدى النقطتين دون الأخرى، و من ثم فإن الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_0.

هذا المثال لفضاء يحقق شرط كونه فضاء- T_0.ولكن هل يوجد فضاء لا يحقق هذا الشرط ؟.

الإجابة على هذا السؤال تتضح من المثال التالي:

مثال (٥,٢)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. إذاً الفضاء (X,τ) ليس فضاء- T_0 و ذلك حيث أن $c\neq d$ مع أنه لا يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة تحتوي إحدى النقطتين دون أن تحتوي على الأخرى، مع العلم أن المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي c أو d هي X وهذه المجموعة تحتوي على النقطتين cو d.

نظرية (٥,١)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء – T_0 إذا و فقط إذا كان $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ لكل $x,y\in X$ حيث أن $x\neq y$

البرهان

نفرض أن الفضاء (X,τ) هو فضاء – T_0.نفرض أن $x\neq y$.إذاً توجد مجموعة مفتوحة و لتكن Gتحوي إحدى النقطتين x,y و لا تحوي الأخرى. ليكن $x\in G$ و $y\notin G$ وبذلك يكون $G\cap\{y\}=\phi$ و هذا يعني أن $x\notin\overline{\{y\}}$ و لكن $x\in\overline{\{x\}}$. لذا نجد أن $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

نفرض أن $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ لأي $x\neq y$ في X. فإن $x\notin\overline{\{y\}}$ أو $y\notin\overline{\{x\}}$ و إلا

$x \in \overline{\{y\}}$ و $y \in \overline{\{x\}}$ وهذا يقتضي أن $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. في حالة $x \notin \overline{\{y\}}$ نجد أن $x \in X - \overline{\{y\}} = G$ و G مجموعة مفتوحة تحوي نقطة ولا تحوي الأخرى .إذاً الفضاء (X,τ) يكون فضاء $- T_0$.■

تعريف (٥,٢)

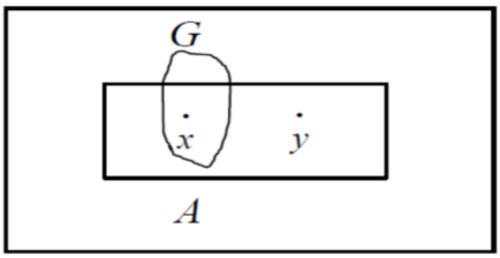
بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي، يقال لخاصيةٍ ما بأنها خاصية وراثية (Hereditary Property) إذا و فقط إذا كانت متحققة لأي فضاء جزئي (A,τ_A) من (X,τ)، طالما كانت متحققة في الفضاء (X,τ).

نظرية (٥,٢)

خاصية كون الفضاء $-T_0$ هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء $-T_0$ ، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) . نفرض أن $x,y \in A$ حيث أن $x \neq y$، إذاً $x,y \in X$ وحيث أن (X,τ) هو فضاء $-T_0$،إذاً توجد مجموعة مفتوحة $G \in \tau$ تحتوي على إحدى النقطتين ولا تحتوي على الأخرى ، و ليكن $x \in G \, , \, y \notin G$.



شكل (٥,٢)

$$\because H=(A\cap G)\in\tau_A : x\in H\ ,\ y\notin H$$

إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء $-T_0$. ■

نظرية (٥,٣)

إذا كان (X,τ) فضاء $-\ T_0$ و $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ دالة تقابل و مفتوحة من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) ، فإن (Y,υ) هو أيضا فضاء $-T_0$.

البرهان

نفـــرض أن $a,b\in Y$ بشـــرط أن $a\neq b$. إذاً العنصـــران $x=f^{-1}(a)$ و $y=f^{-1}(b)$ مختلفان. و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء-T_0، إذاً توجد مجموعة مفتوحة $G\in\tau$ تحتوي على نقطة واحدة من النقطتين x,y و ليس الأخرى، مثلاً $x\in G\ ,\ y\notin G$. و بما أن الدالة

$$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$$

مفتوحة ، فإن $f(G)\in\upsilon$ و $a=f(x)\in f(G)\ ,\ b=f(y)\notin f(G)$، إذاً (Y,υ) هو فضاء $-T_0$. ■

نتيجة (٥,١)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء $-T_0$ هي خاصية توبولوجية.

بعد أن عرفنا ما هو المقصود بالفضاء-T_0وما يحققه من خواص وايضا عرفنا أن هناك فضاءات توبولوجية ليست من النوع-T_0 . الآن ننتقل لتعريف ودراسة فضاء آخر يحقق مسلمة أخرى قد لا يحققها فضاء-T_0.

(٥,٢) الفضاء-T_1

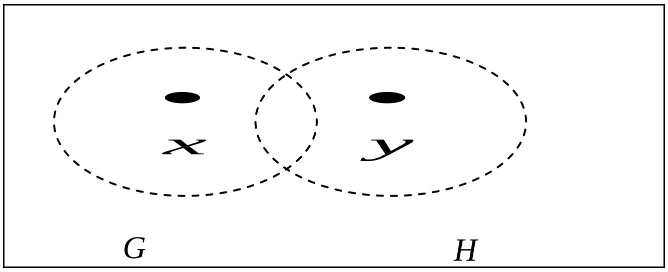
هذا الفضاء يلعب دوراً اساسياً في تكوين وتعريف انواع من الفضاءات التوبولوجية مثل فضاءات T_i حيث أن $i = 3,3\frac{1}{2},4$.

تعريف (٥,٣)

الفضاء التوبولوجى (X,τ) يسمى فضاء – T_1 إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall\ x,y\in X\ ,x\neq y,\exists G,H\in\tau : x\in G, y\notin G\ \ ,y\in H\ ,x\notin H$$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين $x,y\in X$ توجد مجموعتان مفتوحتان G,H بحيث تحتوي أحداهما على النقطة x و **لا** تحتوي على النقطة y ، و المجموعة الأخرى تحتوي على النقطة y و لا تحتوي على النقطة x .



شكل (٥,٣)

مثال (٥,٣)

نفــرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ توبولــوجي معــرف علـــى المجموعـــة $X=\{a,b\}$. إذاً الفضاء (X,τ) هو فضاء$-T_1$ و ذلك لأن:

$$a\neq b\ ,\ \exists\{a\},\{b\}\in\tau : a\in\{a\},b\notin\{a\},b\in\{b\}\ ,\ a\notin\{b\};$$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين توجد مجموعتان مفتوحتان تحتوي إحداهماعلى النقطة a ولا تحتوي النقطة b ، كذلك المجموعة الثانية تحتوي النقطة b

ولا تحتوي على النقطة a .

هذا المثال لفضاء يحقق شرط كونه فضاء$-T_1$.ولكن هل يوجد فضاء لا يحقق هذا الشرط ؟.

الإجابة على هذا السؤال تتضح من مثال (٥,١) ، حيث لا توجد مجموعة تحوي العنصر a و لا تحوي العنصر b ، فالفضاء التوبولوجي (X,τ) في هذا المثال هو فضاء $-T_0$ و ليس فضاء $-T_1$.

الآن نضع الشرط الضروري و الكافي لكي يكون الفضاء التوبولوجي فضاء$-T_1$، وذلك من خلال النظرية التالية.

نظرية (٥,٤)

يكون الفضاء التوبولوجى (X,τ) هو فضاء$-T_1$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية وحيدة العنصر مغلقة.

البرهان

أولاً : ليكن (X,τ) فضاء$-T_1$ وأن $p \in X$. المطلوب إثبات أن $\{p\}^c$ مجموعة مفتوحة. لإثبات ذلك نفترض أن :

$$x \in \{p\}^c \Rightarrow x \neq p$$

من شرط كون الفضاء (X,τ) فضاء$-T_1$، فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_X تحوي النقطة x ولا تحوى النقطة p أي أن :

$$x \in G_X \ , \ p \notin G_X$$

وهذا يؤدى إلى أن :

$$x \in G_x \subseteq \{p\}^c$$

ومن ثم فإن :

$$\{p\}^c = \cup\{G_x : x \in \{p\}^c\}$$

وهذا يعنى أن $\{p\}^c$ مجموعة مفتوحة ومن ثم فإن $\{p\}$ مجموعة مغلقة.

ثانيا : نفرض أن المجموعة $\{p\}$ مغلقة لكل $p \in X$ ونفرض أن $x, y \in X$ بحيث يكون $x \neq y$. فإن ذلك يعنى أن :

$$x \in \{y\}^c \quad and \quad y \in \{x\}^c$$

ولكن كل من $\{x\}^c, \{y\}^c$ مجموعة مفتوحة تحوي نقطة و لا تحوي الأخرى.

وهذا هو إثبات الشرط أن الفضاء (X, τ) هو فضاء $-T_1$. ■

نظرية (٥,٥)

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون فضاء $-T_1$ إذا وفقط إذا كان $\{x\}^` = \phi$ لكل $x \in X$.

البرهان

اولاً :نفرض أن (X, τ) هو فضاء $-T_1$ وأن $x \in X$.إذاً $\{x\}$ مجموعة مغلقة و من ثم يكون $\{x\} = \overline{\{x\}}$ و لكن $\overline{\{x\}} = \{x\}^` \cup \{x\}$ . إذاً $\{x\} = \{x\}^` \cup \{x\}$ و حيث أن $x \notin \{x\}^`$ فإن $\{x\}^` = \phi$.

ثانياً : نفرض أن $\{x\}^` = \phi$ لكل $x \in X$ . بفرض $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإن $y \notin \{x\}^`$ و من ثم توجد مجموعة مفتوحة تحوي y و لتكن G_y بحيث أن

$G_y \cap \{x\} = \phi$. لذا نجد أن $x \notin G_y$. بالمثل $\{y\}^{`} = \phi$، فإنه توجد مجموعة

مفتوحة G_x تحوي x وتحقق $G_x \cap \{y\} = \phi$ و من ثم يكون $y \notin G_x$ وبالتالي

يكون الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_1. ■

نتيجة (٥,٢)

إذا كان الفضاء (X,τ) هو هو فضاء– T_1 فإنه لأي مجموعة جزئية منتهية

$A \subseteq X$ فإن $A^{`} = \phi$.

البرهان

نفرض أن $A \subseteq X$ مجموعة منتهية ولتكن $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ و من ثم تكون

$A = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \{x_i\}$ و حيث أن الفضاء (X,τ) هو هو فضاء– T_1 فإن $\{x\}^{`} = \phi$.

وبذلك يكون $A^{`} = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \{x_i\}^{`} = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \phi = \phi$. ■

نظرية (٥,٦)

خاصية كون الفضاء– T_1 هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء– T_1 ، وأن (A,τ_A) فضاء

جزئي من (X,τ) . نفرض أن $x, y \in A$ حيث أن $x \neq y$ ، إذاً $x, y \in X$

وحيث أن (X,τ) هو فضاء– T_1، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G, H \in \tau$

بحيث يكون $x \in G \,,\, y \notin G, y \in H, x \notin H$.

ولكن

$$V=(A\cap G)\in\tau_A : x\in V\ ,\ y\notin V$$

و

$$W=(A\cap H)\in\tau_A : y\in W\ ,\ x\notin W$$

إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء- T_1. ■

نظرية (٥,٧)

إذا كان (X,τ) فضاء- T_1 و $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة تقابل و مفتوحة من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) ، فإن (Y,υ) هو أيضا فضاء- T_1.

البرهان

نفرض أن $a,b\in Y$ بشرط أن $a\neq b$، إذاً العنصران $x=f^{-1}(a)$ و $y=f^{-1}(b)$ مختلفان في المجال X. و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_1 ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون :

$$x\in G\ ,\ y\notin G, y\in H, x\notin H.$$

و بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن:

$$f(G)\in\upsilon, a=f(x)\in f(G)\ ,\ b=f(y)\notin f(G)$$

$$f(H)\in\upsilon, b=f(y)\in f(H)\ ,\ a=f(x)\notin f(H)$$

إذاً (Y,υ) هو فضاء- T_1. ■

نتيجة. (٥,٣)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء- T_1 هي خاصية توبولوجية.

(٥,٣) الفضاء - T_2 (فضاء هاوسدورف) Hausdorff Space

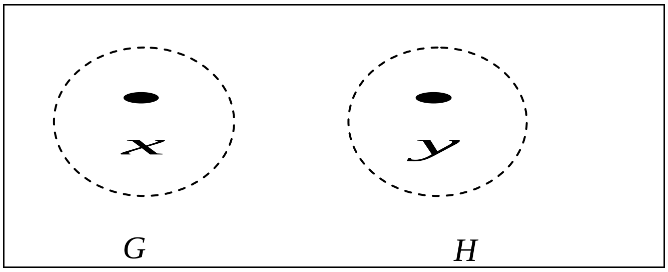
يعود اسم هذا الفضاء نسبة لعالم الرياضيات الأشهر هاوسدورف (Hausdorff) الذي عاش خلال الفترة (١٨٦٨م-١٩٤٢م). تعود أهمية شرط هاوسدورف هو أن المتتاليات التقاربية في هذا الفضاء تتقارب لنقطة وحيدة ، بينما ذلك ليس ضرورياً في فضاءات توبولوجية أخرى لا تحقق شرط هاوسدرف.

تعريف (٥,٤)

الفضاء التوبولوجى (X,τ) يسمى فضاء – T_2 إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall\ x,y\in X\,,x\neq y,\exists G,H\in\tau:x\in G\,,y\in H\,,G\cap H=\phi$$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين $x,y\in X$ توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتين G,H بحيث تحتوي أحداهما على النقطة x ، و المجموعة الأخرى تحتوي على النقطة y .



شكل (٥,٤)

مثال (٥,٤)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c\}$. إذاً الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_2

وذلك لأن:

$$(i)\quad a\neq b\ ,\ \exists\,\{a\},\{b\}\in\tau : a\in\{a\},\, b\in\{b\}\ ,\{a\}\cap\{b\}=\phi;$$

$$(ii)\quad a\neq c\ ,\ \exists\,\{a\},\{c\}\in\tau : a\in\{a\},\, c\in\{c\}\ ,\{a\}\cap\{c\}=\phi;$$

$$(iii)\quad b\neq c\ ,\ \exists\,\{b\},\{c\}\in\tau : b\in\{b\},\, c\in\{c\}\ ,\{b\}\cap\{c\}=\phi.$$

مثال (٥,٥)

كل فضاء متري هو فضاء $-\ T_2$

البرهان

أنظر نظرية (٢,٥).■

مثال (٥,٦)

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية وأن υ التوبولوجي المعرف على R والمولد بواسطة الفترات $(a,b]$ فإن الفضاء (R,υ) يكون فضاء $-\ T_2$.

الحل :

بفرض أن $a,b\in R$ وأن $a\neq b$ وليكن $a<b$. باختيار المجموعة $G=(a-1,a]$ والمجموعة $H=(a,b]$ فإننا نجد أن :

$$G,H\in\tau\ ,a\in G\ ,\ b\in H\ ,\ G\cap H=\phi$$

ومن ثم فإن (R,τ) يحقق الشرط T_2.

نظرية (٥,٨)

كل فضاء $-\ T_2$ هو فضاء $-\ T_1$.

البرهان

من التعريف تتحقق شروط كون الفضاء $-\ T_1$. لكن عكس هذه النظرية ليس

صحيحاً دائماً وذلك يتضح من خلال المثال التالي:

مثال (٥,٧)

بفرض أن X مجموعة غير منتهية. فإن فضاء المكملات المنتهية (X,C) هو فضاء– T_1 وليس فضاء – T_2.

الحل:

نفرض أن $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$ ، من تعريف التوبولوجي

$$C=\{\phi,G\subseteq X:G^c\ finite\}$$

نجد ن $\{x\},\{y\}$ مجموعات منتهيه و بالتالي فإن

$G=X-\{y\}=\{y\}^c$ مجموعة مفتوحة تحوي x ولا تحوي y و كذلك المجموعة $H=X-\{x\}=\{x\}^c$ مجموعة مفتوحة تحوي y ولا تحوي x. إذاً (X,C) هو فضاء– T_1 .

ولكن إذا كان $x\in G\in\tau$ و $y\in H\in\tau$ و X غير منتهي فإن $G\cap H\neq\phi$

إذاً هذا الفضاء ليس– T_2.■

نظرية (٥,٩)

خاصية كون الفضاء– T_2 هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء– T_2 ، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) . نفرض أن $x,y\in A$ حيث أن $x\neq y$ ، إذاً $x,y\in X$ وحيث أن (X,τ) هو فضاء– T_2، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون : $x\in G\ ,y\in H,G\cap H=\phi$. ولكن بما أن المجموعتين

$V=(A\cap G)\in\tau_A$ و $W=(A\cap H)\in\tau_A$ غير متقاطعتين. إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء$-T_2$.■

ملاحظة:

حيث أن كل فضاء متري هو فضاء$-T_2$،فإن أي فضاء جزئي من مجموعة الاعداد الحقيقية هو فضاء$-T_2$وذلك باعتباره فضاء جزئي من الفضاء المتري الاقليدي على R.

نظرية (١٠,٥)

إذا كان (X,τ) فضاء$-T_2$ و $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة تقابل و مفتوحة من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) ، فإن (Y,υ) هو أيضا فضاء$-T_2$.

البرهان

نفرض أن $a,b\in Y$ بشرط أن $a\neq b$، إذاً يوجد $x,y\in X$ بحيث أن

$x=f^{-1}(a)$ و $y=f^{-1}(b)$ و $x\neq y$.

و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء$-T_2$ ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون :

$$x\in G\ ,y\in H,G\cap H=\phi.$$

و بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن:

$$f(G)\in\upsilon,a=f(x)\in f(G)$$

$$f(H)\in\upsilon,b=f(y)\in f(H)$$

و حيث أن $f(G)\cap f(H)=f(G\cap H)=f(\phi)=\phi$. إذاً (Y,υ) هو فضاء- T_2 .■

نتيجة (٥,٤)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء- T_2 هي خاصية توبولوجية.

نظرية (٥,١١)

بفرض أن الفضاء (Y,τ_2) فضاء هاوسدورف وأن الدالتين

$$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2) \text{ و } g:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$$

متصلتان فإن المجموعة $A=\{x: f(x)=g(x)\}$ مجموعة مغلقة.

البرهان

نحاول اثبات أن المجموعة $A^c=\{x: f(x)\neq g(x)\}$ مفتوحة. نفرض أن $x\in A^c$ إذاً $f(x)\neq g(x)$ وحيث أن (Y,τ_2) هو فضاء- T_2، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G,H\in\tau_2$ بحيث أن $f(x)\in H, g(x)\in G$. بما أن f,g دالتان متصلتان فإن $f^{-1}(H), g^{-1}(G)\in\tau_1$ و من ثم يكون $x\in f^{-1}(H)\cap g^{-1}(G)=W\in\tau_1$ و بالتالي $x\in W\subseteq A^c$. إذاً A^c مجموعة مفتوحة.■

نتحول الآن لمعرفة العلاقة بين فضاء هاوسدورف وتقارب المتتاليات وأن المتتالية التقاربية تتقارب لنهاية وحيدة، حيث علمنا من قبل أن نهاية المتتالية في الفضاءات التي لا تحقق خاصية هاوسدورف ليس من الضروري أن تكون وحيدة.

نظرية (٥,١٢)

إذا كان (X,τ) فضاء هاوسدورف فإن كل متتالية تقاربية في X تكون لها نهاية وحيدة.

البرهان

نفرض أن للمتتالية $x_n \in X$ نقطتي نهاية ، هما a و b بحيث أن $a \neq b$. بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_2 فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين H,G بحيث أن $a \in G , b \in H$. نعرف أنه يوجد عدد $n_a \in N$ بحيث أن $x_n \in G$ لكل $n \geq n_a$ و ايضاً العدد $n_b \in N$ بحيث أن $x_n \in H$ لكل $n \geq n_b$. لذا فإنه لكل $n \geq \max\{n_a, n_b\}$ نحصل على أن $x_n \in G \cap H$ وهذا يتعارض مع كون $G \cap H = \phi$. إذاً $a = b$. أي أن النهاية وحيدة.■

تمارين (٥,١)

(١) بفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- (X,τ) فضاء- T_0 و ليس فضاء- T_1.
- (X,τ) فضاء- T_1.
- (X,τ) فضاء- T_2 .

(٢) بفرض أن $X = \{a,b,c,d\}$. كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- $\{d\},\{a,b\} \in \tau$ و يكون (X,τ) هو فضاء- T_0 .
- $\{d\},\{b,c\},\{a,b,c\} \in \tau$ و يكون (X,τ) هو فضاء- T_1.

(٣) بفرض أن X مجموعة منتهية وأن (X,τ) هو فضاء- T_1 . برهن أن

(X,τ) هو فضاء منفصل (متقطع).

(٤)هل الفضاء المنفصل (X,D) هو فضاء- T_0؟

(٥)هل الفضاء الغير منفصل (X,I) هو فضاء- T_0؟

(٦)هل فضاء المكملات المنتهية (X,C) هو فضاء- T_0؟ **حيث أن**

$$C=\{\phi,G\subseteq X,G^c \; finite\}$$

(٧)هل الفضاء (R,τ) هو فضاء- T_0؟ حيث أن

$$\tau=\{\phi,R,E_a=(a,\infty):a\in R\}$$

(٨)برهن أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء – T_2 إذا و فقط إذا كانت مجموعة الخط القطري $\Delta=\{(x,y):x=y\}\subseteq X\times X$ مغلقة **.**

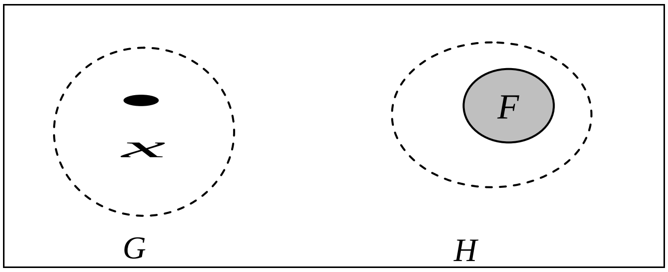
(٥,٤) الفضاءات المنتظمة Regular Spaces

فيما سبق لاحظنا أن الاهتمام كان منصباً ، في كل من الفضاءين T_1 و T_2،على فصل نقاط الفضاء عن بعضها البعض وذلك بأنه لكل نقطتين مختلفتين توجد مجموعتان مفتوحتان كل مجموعة تحوى نقطة واحدة دون الأخرى. أما الآن سوف نحاول استبدال إحدى النقطتين بمجموعة مغلقة أو استبدالهما معاً بمجموعتين مغلقتين وسوف ندرس حال الانفصال في كلتا الحالتين.

تعريف (٥,٥)

يُقال للفضاء التوبولوجى (X,τ) إنه فضاء منتظم Regular إذا كان لأي مجموعة مغلقة F في X و لأي نقطة $x\in X$ ولا تنتمي إلى F توجد

مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين G,H بحيث يكون $x \in G, F \subseteq H$.



شكل (٥,٥)

مثال (٥,٨)

نفرض أن $X=\{a,b,c\}$ مجموعة غير خالية و أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ توبولوجي معرف على X .المجموعات المغلقة في X هي $\phi, X, \{b,c\}, \{a\}$.

بتطبيق شرط الانتظام على المجموعات المغلقة نلاحظ الآتي:

$$a \notin \{b,c\} \Rightarrow \exists \{a\},\{b,c\} \in \tau : a \in \{a\}, \{b,c\} \subseteq \{b,c\} \wedge \{a\} \cap \{b,c\} = \phi$$

$$b \notin \{a\} \Rightarrow \exists \{b,c\},\{a\} \in \tau : b \in \{b,c\}, \{a\} \subseteq \{a\} \wedge \{a\} \cap \{b,c\} = \phi$$

$$c \notin \{a\} \Rightarrow \exists \{b,c\},\{a\} \in \tau : c \in \{b,c\}, \{a\} \subseteq \{a\} \wedge \{a\} \cap \{b,c\} = \phi$$

و بالتالي فإن الفضاء (X,τ) هو فضاء منتظم و لكنه ليس فضاء- T_1 وبالطبع لا يكون فضاء- T_2 .

مثال (٥,٩)

كل فضاء غير منفصل (X,I) هو فضاء منتظم و لكنه ليس T_2، ومن ثم لا يكون T_1 أو T_0 .

قد يتبادر لذهن القارئ السؤال التالي : هل هناك فضاء يحقق شرط T_1 ولا يكون منتظماً؟. الاجابة من خلال المثال التالي:

مثال (٥,١٠)

إذا كانت X غير منتهي، فضاء المكملات المنتهية (X,C) هو فضاء-T_1 وليس منتظماً

البرهان

يترك للقارئ كتمرين.

الآن عرفنا أنه ليس من الضروري أن كل فضاء منتظم يحقق شرط كونه فضاء-T_1.ولكن في حالة كون الفضاء محقق للشرطين معا نحصل على فضاء جديد يسمى فضاء-T_3 .

تعريف (5.6)

يقال لفضاء منتظم إنه فضاء-T_3 إذا كان يحقق شرط كونه فضاء-T_1.

مثال (٥,١١)

كل فضاء منفصل (X,D) هو فضاء – T_3.

نظرية (٥,١٣) :

كل فضاء – T_3 هو فضاء – T_2.

البرهان

نفرض أن (X,τ) هو فضاء – T_3 وأن $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$. من شرط كون الفضاء – T_1 ، نجد إن $\{x\}$ مجموعة مغلقة و $x\notin\{y\}$،و من شرط كون الفضاء منتظماً فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين G,H بحيث يكون $x\in\{x\}\subseteq G\ ,\ y\in H$ و عليه فإن (X,τ) هو فضاء-T_2. ■

عكس النظرية السابقة ليس صحيحاً دائماً. فالمثال التالي يبين أنه ليس من الضروري أن يكون كل فضاء- T_2 هو فضاء- T_3.

مثال(٥,١٢)

نفرض أن T توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R مولد بأنظمة الجوارات المفتوحة.

$$N_x = \begin{cases} (x-\varepsilon, x+\varepsilon) & \forall x \neq 0 \\ (-\varepsilon,\varepsilon)-\{\frac{1}{n}\} : n \in Z^+ & x = 0 \end{cases}$$

هذا الفضاء التوبولوجى (R,T) هو فقط فضاء- T_2 و ليس فضاء- T_3.

أولاً: نبين أنه فضاء $- T_2$. نفرض أن $x, y \in R$ بحيث أن $x \neq y$. فإذا كانت $x \neq 0, y \neq 0$ ، فإن المجموعتين :

$$G = (x - \frac{|x-y|}{2}, x + \frac{|x-y|}{2}) \text{ و } H = (y - \frac{|x-y|}{2}, y + \frac{|x-y|}{2})$$

مفتوحتين وغير متقاطعتين وأن $x \in G$, $y \in H$. إذاً (R,T) هو فضاء- T_2.

لإثبات أنه ليس فضاء- T_3.نفرض أن $x = 0$ وأن $F = \{\frac{1}{n}\}$ حيث أن n عدد صحيح موجب. المجموعة $F = \{\frac{1}{n}\}$ مغلقة. بفرض أن $V = (-\varepsilon,\varepsilon)-\{\frac{1}{n}\}$ أي جوار للنقطة $x = 0$.لذا لا يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة W بحيث أن $F \subseteq W$ و $V \cap W = \phi$ و هذا يعني أن الفضاء (R,T) ليس منتظماً و من ثم لا يكون T_3.

نظرية (٥,١٤)

الفضاء التوبولوجى (X,τ) يكون فضاءً منتظماً إذا وفقط إذا كان لكل نقطة

$x \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة G بحيث أن $x \in G$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$$

البرهان

أولاً : نفرض أن (X,τ) فضاء منتظم وأن $x \in G$ وأن G مجموعة مفتوحة فإن G^c مجموعة مغلقة وأن $x \notin G^c$. من شرط الانتظام نجد أنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين H,W بحيث أن : $x \in H, G^c \subseteq W$. بما أن $H \cap W = \phi$ ، فإن $H \subseteq W^c$ ومن ثم فإن :

$$x \in H \subseteq W^c \subseteq G$$

وبما أن W^c مغلقة فإن :

$$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq W^c \subseteq G$$

وهذا هو المطلوب أولاً.

ثانيا : نفرض أنه لكل $x \in G$ ولكل مجموعة مفتوحة G توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$$

والمطلوب إثبات أن الفضاء منتظم. لتكن F مجموعة مغلقة و $x \notin F$.المجموعة $F^c = G$ مجموعة مفتوحة تحتوي النقطة x . من الشرط نجد أنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$ و من ثم نجد أن :

$$x \in H ,\ \overline{H} \subseteq G ,F = G^C \subseteq \overline{H}^C ,H \cap \overline{H}^C = \phi$$

أي أنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $H,\overline{H}^{C}$ ،إحداهما تحتوي على النقطة x، و الأخرى تحتوي على المجموعة المغلقة F.وهذا هو إثبات أن (X,τ) فضاء منتظم.■

نظرية (٥,١٥)

خاصية أن يكون الفضاء (X,τ)منتظماً هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء منتظم، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ). نفرض أن $a\in A$ و $B\subseteq A$ مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A، بحيث أن $a\notin B$. بما أن المجموعة B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A ، إذاً توجد مجموعة مغلقة Fفي X بحيث أن $B=F\cap A$ (انظر نظرية (٣,١٩) حيث أن $F^{C}\in\tau$). بما أن $a\notin B$ ، فإن $a\notin F$. بما أن (X,τ) هو فضاء منتظم و $a\notin F$ ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون $a\in G\ ,F\subseteq H,G\cap H=\phi$

ولكن من تعريف التوبولوجي النسبي نجد أن:

$$V=(A\cap G)\in\tau_A : a\in V$$

$$W=(A\cap H)\in\tau_A : B=F\cap A\subseteq W$$

و من ثم نجد أن

$$V\cap W=(A\cap G)\cap(A\cap H)=A\cap(G\cap H)=A\cap\phi=\phi$$

إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء منتظم.■

نتيجة (٥,٥)

خاصية أن يكون الفضاء (X,τ)فضاء $-T_3$ هي خاصية وراثية.

نظرية (٥,١٦)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي منتظماً هي خاصية توبولوجية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) منتظم وأن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

تقابل و مفتوحة ومتصلة. لإثبات أن الفضاء (Y,υ) منتظم. نفرض أن $y\in Y$ و $F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة في Yبشرط أن $y\notin F$. بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تقابل و متصلة فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X وأن $x=f^{-1}(y)\notin f^{-1}(F)$. و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء منتظم ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G,H\in\tau$ بحيث يكون $x\in G$ و $f^{-1}(F)\subseteq H$. بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن:

$$F=f(f^{-1}(F))\in f(H)\quad y=f(x)\in f(G),\ f(G),f(H)\in\upsilon,$$

و حيث أن $f(G)\cap f(H)=f(G\cap H)=f(\phi)=\phi$ إذاً (Y,υ) هو فضاء منتظم .■

نتيجة (٥,٦)

خاصية أن يكون الفضاء (X,τ) فضاء $-T_3$ هي خاصية توبولوجية.

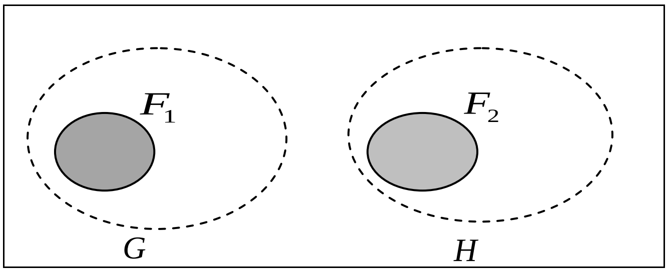
(٥,٥) الفضاءات العادية Normal Spaces

بعد أن عرفنا مفهوم الفضاء الذي يحقق خاصية الفصل بين المجموعات المغلقة و النقاط التي لا تنتمي لهذه المجموعات، سوف نتعرض فيما يلي لنوع جديد من مسلمات الفصل والتي فيها تتحقق خاصية فصل المجموعات المغلقة الغير متقاطعة بمجموعات مفتوحة وغير متقاطعة ايضا. في هذه الحالة يسمى الفضاء التوبولوجي بالفضاء العادي.

تعريف (5.7)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه فضاء عادي Normal إذا وفقط إذا كانت لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين F_1, F_2 في X (أي أن $F_1 \cap F_2 = \phi$)، توجد مجموعتان $G, H \in \tau$ بحيث يكون

$$F_1 \subseteq G,\ F_2 \subseteq H, G \cap H = \phi$$



شكل (٥,٦)

مثال (٥,١٣)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c\}$. هل الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي ؟.

الحل

المجموعات المغلقة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) هي:

$$\phi, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$$

واضح أن هذا الفضاء هو فضاء عادي ،و لكنه ليس فضاءً منتظماً ، حيث توجد مجموعة مغلقة $\{b,c\}$و نقطة $a \notin \{b,c\}$ ، و لكنه لا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين بحيث تحتوي إحداهما على النقطة a و الأخرى تحتوي على المجموعة المغلقة $\{b,c\}$.

مثال (٥,١٤)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c\}$ من السهل التأكد من أن (X,τ) هو فضاء عادي و لكنه ليس فضاء- T_0.

مثال (٥,١٥)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$. من السهل التأكد من أن الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي و فضاء- T_0. لكنه ليس منتظم ولا فضاء- T_1 .

مثال (٥,١٦)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$. من السهل التأكد من أن الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي و منتظم و لكنه ليس فضاء $- T_1$.

بعد أن عرفنا أنه ليس من الضروري أن كل فضاء عادي هو فضاء $- T_1$، فإنه في حالة كون الفضاء عادياً و $- T_1$، فإن هذا يقودنا للتعريف التالي:

تعريف (5.8)

يُقال لفضاءٍ عاديٍ أنه فضاء $- T_4$ إذا كان فضاء $- T_1$.

مثال (٥,١٧)

كل فضاء منفصل (X,D) هو فضاء $-T_4$.

نظرية (٥,١٧)

كل فضاء $-T_4$ هو فضاء $-T_3$.

البرهان

نفرض أن (X,τ) هو فضاء $-T_4$. نفرض أن $x\in X$ و $F\subseteq X$ مجموعة مغلقة بحيث أن $x\notin F$. من شرط كون الفضاء $-T_1$ ، فإن $\{x\}$ مجموعة مغلقة و $\{x\}\cap F=\phi$، و لكون الفضاء (X,τ) عادياً فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين G,H بحيث يكون $F\subseteq H$, $x\in\{x\}\subseteq G$ و عليه فإن (X,τ) هو فضاء منتظم و من ثم يكون فضاء T_3-.■

عكس هذه النظرية ليس صحيحاً دائما. المثال التالي لفضاء - يسمى فضاء موور (Moore) أو فضاء نيمتزكي (Niemytzki plane) – هذا الفضاء هو فضاء $-T_3$ وليس T_4. كما إنه يصلح أن يكون مثالاً لفضاء منتظم و T_2 ولكنه ليس عاديا.

مثال (٥,١٨) (مستوي نيمتزكي Niemytzki plane)

نفرض المجموعات التالية:

(1) $X=\{(x,y)\in R^2 : y\geq 0\}$

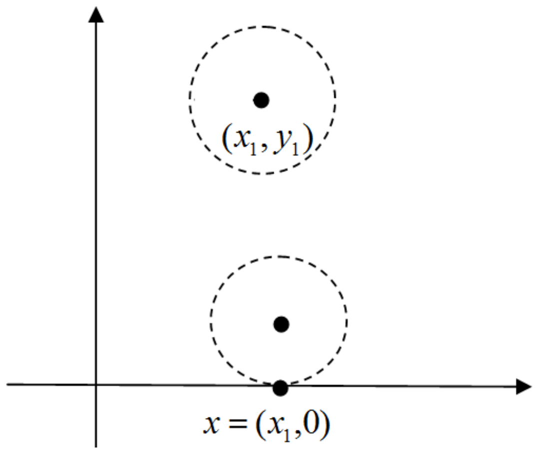
(2) $X_u=\{(x,y)\in R^2 : y>0\}$

(3) $T=\{(x,0): x\in R\}$

نفرض أن τ_u التوبولوجي الاقليدي (الاعتيادي) على X_u المولد بالأقراص المفتوحة

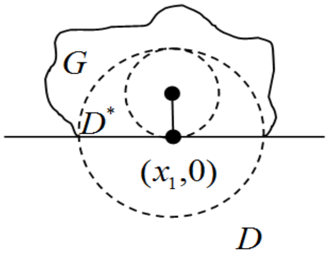
$$D(x,\varepsilon)=\{(x_2,y_2)\in X_u:\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\varepsilon\}$$

حيث أن $x=(x_1,y_1)\in X_u$ و $\varepsilon>0$. نعرف التوبولوجي τ^* على $X=X_u\cup T$ بإضافة المجموعات التي من النوع $D\cup\{p\}$ إلى التوبولوجي τ_u ، حيث أن $p\in T$ و D هي قرص مفتوح في X_u و يمس المحور T عند النقطة p (انظر الشكل(٥،٧)). بفرض أن $G\subset X$ مجموعة مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي الاقليدي على X ، ونفرض أن $x=(x_1,x_2)\in G$. فإذا كانت $x\in X_u$ ، فإنه يوجد جوار مفتوح لهذه النقطة.



شكل (٥،٧)

وإذا كانت $x\in T$ ،فإنه يوجد القرص المفتوح $D(x,\frac{\varepsilon}{2})$ مركزه النقطة $x=(x_1,0)$ بحيث أن $D(x,\frac{\varepsilon}{2})\cap X\subset G$. ولذا يمكن إيجاد قرص مفتوح آخر $D^*((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4})$ وبحيث أن $D^*((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4})\subset X_u$ ويمس محور السينات (كما في الشكل التالي)



شكل (٥,٨)

في حالة $x=(x_1,0)\in T$ نجد أن $\{x\}\cup D((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4})\subset D((x_1,x_2),\frac{\varepsilon}{4})$

أولاً: إثبات أن الفضاء (X,τ^*) هو فضاء هاوسدورف، نختار النقطتين المختلفتين $a=(a_1,a_2)$ و $b=(b_1,b_2)$ في X بحيث أن:

$$d(a,b)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\varepsilon>0$$

ليكن

$$O_{(x_1,x_2)}=\begin{cases} D((x_1,x_2),\frac{\varepsilon}{2}) & if\ \ x_2\neq 0 \\ \{x\}\cup D((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4}) & if\ \ x_2=0 \end{cases}$$

في حالة $a,b\in X_u$ فإن :

$$O_a\cap O_b=D((a_1,a_2),\tfrac{\varepsilon}{2})\cap D((b_1,b_2),\tfrac{\varepsilon}{2})=\phi$$

في حالة $b\in T$ و $a\in X_u$ ، فإن:

$$O_a\cap O_b=D((a_1,a_2),\tfrac{\varepsilon}{2})\cap(\{b\}\cup D((b_1,\tfrac{\varepsilon}{4}),\tfrac{\varepsilon}{4}))=\phi$$

بالمثل في حالة $b\in X_u$ و $a\in T$ ، أو أن $a,b\in T$. في جميع الحالات نجد أن $O_a\cap O_b=\phi$ مما يعني أن (X,τ^*) هو فضاء هاوسدورف.

ثانياً: إثبات أن (X,τ^*) منتظم، نفرض أن F مجموعة مغلقة في (X,τ^*) وأن $a=(a_1,b_1)\in X$ بحيث أن $a=(a_1,b_1)\notin F$.

إذا كانت $a\notin T$ أي أن $a\in X_u$ ، نفرض أن $\varepsilon=d(a,F\cup T)$ فإنه توجد

مجموعتين مفتوحتين

$$G = D(a,\tfrac{\varepsilon}{2}), H = \{(x_1,x_2) \in X : d((x_1,x_2),a) > \varepsilon\}$$

بحيث أن $a \in G$ و $F \subseteq H$ و $G \cap H = \phi$.

أما في حالة أن $a \in T$. بما أن F^c مجموعة مفتوحة تحوي النقطة a، فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $\{(a_1,0)\} \cup D((a_1,0),\varepsilon) \subset F^c$. إذاً :

(i) $V = \left(\overline{D}((a_1,\tfrac{\varepsilon}{2}),\tfrac{\varepsilon}{2})\right)^c$ مجموعة مفتوحة تحوي F

(ii) $U = D((a_1,\tfrac{\varepsilon}{2}),\tfrac{\varepsilon}{2})$ مجموعة مفتوحة تحوي a

و ايضاً $U \cap V = \phi$.

ثالثاً: أثبات أن هذا الفضاء ليس عادياً.

نختار المجموعتين $A = \{(a,0) : a \in Q\}$ و $B = \{(a,0) : a \in R - Q\}$. هاتين المجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين و نفس الوقت لا نستطيع ايجاد مجموعتين مفتوحتين وغير متقاطعتين بحيث أن أحداهما تحوي المجموعة A والثانية تحوي المجموعة B.

نظرية (٥,١٨)

الفضاء التوبولوجى (X,τ) يكون فضاءً عادياً إذا وفقط إذا كان لأي مجموعة مغلقة $F \subseteq X$ ولكل مجموعة مفتوحة G بحيث أن $F \subseteq G$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$F \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq G.$$

البرهان

أولاً : نفرض أن (X,τ) فضاء عادي وأن F مجموعة مغلقة في X وأن G مجموعة مفتوحة بحيث أن. المجموعة G^c مجموعة مغلقة وأن $F \cap G^c = \phi$

من شرط كون الفضاء عادياً، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين H,W بحيث أن $F\subseteq H, G^c\subseteq W$. بما أن $H\cap W=\phi$ ، فإن $H\subseteq W^c$

ومن ثم فإن :

$$F\subseteq H\subseteq W^c\subseteq G$$

وبما أن W^c مغلقة فإن :

$$F\subseteq H\subseteq \overline{H}\subseteq W^c\subseteq G$$

وهذا هو المطلوب أولاً.

ثانيا : نفرض أن الشرط متحقق و أن F_1 , F_2 مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين، و من ثم يكون $F_1\subseteq F_2^C$ حيث أن F_2^C مجموعة مفتوحة.

وبموجب تحقق الشرط، فإنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$F_1\subseteq H\subseteq \overline{H}\subseteq F_2^C$$

باختيار $G=X-\overline{H}$ ، فإن H,G مجموعتان مفتوحتان يحققان

$$F_1\subseteq H,\ F_2\subseteq G, H\cap G=\phi$$

وهذا هو إثبات أن (X,τ) فضاء عادي.■

نظرية (٥,١٩)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي عادياً هي خاصية توبولوجية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء عادي ، أن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

توبولوجية و المطلوب إثبات أن الفضاء (Y,υ) فضاءً عادياً.

نفرض أن F_1 و F_2 مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين في Y ، بما أن

الدالة $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ تقابل و مستمرة فإن $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2)$

مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين في X . و بما أن الفضاء (X,τ) هو

فضاء عادي ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون :

$$f^{-1}(F_1)\subseteq G \ , f^{-1}(F_2)\subseteq H , G\cap H=\phi \ .$$

و بما أن الدالة $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن $f(G), f(H)$

مجموعتان مفتوحتان و يحققان أن

$$F_1\subseteq f(G), F_2\subseteq f(H)$$

و حيث أن

$$f(G)\cap f(H)=f(G\cap H)=f(\phi)=\phi$$

إذاً (Y,υ) هو فضاء عادي .■

نتيجة (٥,٧)

خاصية كون الفضاء- T_4 هي خاصية توبولوجية.

ملاحظة:

فيما سبق استطعنا إثبات أن خاصية كون الفضاء التوبولوجي (X,τ) فضاء–

T_i، حيث أن $i=0,1,2,3$ ، هي خاصية وراثية ، ولكن المثال

التالي يوضح أن هذا ليس صحيحاً في حالة الفضاء العادي ومن ثم الفضاء– T_4.

مثال (٥,١٩)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. واضح أن الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي وذلك لأن عائلة المجموعات المغلقة في X هي

$$\tau^{C}=\{\phi,X,\{a,c,d\},\{c,d\},\{a,d\},\{d\}\}$$

ولا توجد أي مجموعتين مغلقتين فعليتين غير متقاطعتين ، و لذا فإن (X,τ) فضاء عادي لعدم وجود ما يمنع ذلك. و بفرض أن $A=\{a,b,c\}$ مجموعة جزئية وأن

$$\tau_{A}=\{A,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

توبولوجي نسبي على المجموعة A ، وأن (A,τ_{A}) فضاء جزئي من (X,τ) .

بالرغم من أن الفضاء (X,τ) فضاءً عاديا، إلا أن الفضاء الجزئي (A,τ_{A}) ليس عادياً ، وذلك يتضح مما يلي:

المجموعات المغلقة في الفضاء الجزئي (A,τ_{A}) هي:

$$\phi,A,\{a,c\},\{c\},\{a\}$$

نلاحظ أنه توجد مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين هما $\{c\},\{a\}$، و لا يمكن إيجاد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين في الفضاء الجزئي (A,τ_{A})، بحيث تحتوي إحداهما المجموعة المغلقة $\{a\}$، وتحتوي الأخرى على المجموعة المغلقة $\{c\}$، حيث لا يوجد سوى $\{a,b\}\in\tau_{A}$ و $\{b,c\}\in\tau_{A}$ بحيث أن

$$\{a\}\subseteq\{a,b\}\text{،}\{c\}\subseteq\{b,c\}$$

ولكن $\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}\neq\phi$ وعلى ذلك فإن خاصية كون الفضاء فضاءً عادياً ليست خاصية وراثية.

نظرية (٥,٢٠)

الفضاء الجزئي المغلق من فضاء عادي يكون فضاءً عادياً.

البرهان

نفرض أن (A,τ_A) فضاء جزئي مغلق من الفضاء العادي (X,τ)، ونفرض أن $B_1\,,\,B_2$ مجموعتان مغلقتان بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A وغير متقاطعتين .فإنه توجد مجموعتان $F_1\,,\,F_2$ مغلقتان في X وغير متقاطعتين بحيث يكون

$$B_2=A\cap F_2 \quad \text{و} \quad B_1=A\cap F_1$$

بما أن المجموعة A مغلقة في X ، فإن المجموعتان $B_1\,,\,B_2$ مغلقتان بالنسبة للتوبولوجي τ في X وغير متقاطعتين ،وبموجب كون الفضاء (X,τ) عادياً، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G,\,H\in\tau$ بحيث يكون

$$B_1\subseteq G,\,B_2\subseteq H$$

ومن ثم فإن

$$B_1\subseteq H_1=A\cap G,\,B_2\subseteq H_2=A\cap H$$

من تعريف الفضاء الجزئي يتضح لنا أن $H_1,H_2\in\tau_A$ وأن

$$H_1 \cap H_2 = (A \cap G) \cap (A \cap H) = A \cap (G \cap H) = A \cap \phi = \phi$$

وعلى ذلك فإن (A, τ_A) فضاء عادي.■

نظرية (٥,٢١):

كل فضاء توبولوجي قابل للتمتر هو فضاء عادي.

البرهان.

نفرض أن (X, τ) فضاء قابل للتمتر بالنسبة لدالة المسافة d. نفرض أن $A, B \subseteq X$ مجموعتين مغلقتين بحيث أن $A \cap B = \phi$. لكل نقطة $a \in A$ نختار ε_a بحيث أن $B_d(a, \varepsilon_a) \cap B = \phi$. بالمثل لكل نقطة $b \in B$ نختار ε_b بحيث أن $B_d(b, \varepsilon_b) \cap A = \phi$.

باختيار

$$H = \cup_{b \in B} B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2}) \text{ , } G = \cup_{a \in A} B_d(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2})$$

نلاحظ أن كل من G و H مجموعة مفتوحة وأن $A \subseteq G, B \subseteq H$. يتبقى لنا الآن اثبات أن $G \cap H = \phi$. لاثبات ذلك نفرض العكس أي أن $G \cap H \neq \phi$، لذا يوجد عنصر $p \in G \cap H$ وفي هذه الحالة

$$p \in B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2}) \cap B_d(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2})$$

هذا يقتضي أن $p \in B_d(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2})$ و $p \in B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2})$ ومن ثم يكون $d(a, p) < \tfrac{\varepsilon_a}{2}$ و $d(p, b) < \tfrac{\varepsilon_b}{2}$. بتطبيق الخاصية المثلثية نجد أن

$$d(a, b) \le d(a, p) + d(p, b) < \tfrac{\varepsilon_a}{2} + \tfrac{\varepsilon_b}{2}$$

فإذا كانت $\varepsilon_a \le \varepsilon_b$، فإن $d(a, b) < \varepsilon_b$ ومن ثم $a \in B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2})$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن $B_d(b, \varepsilon_b) \cap A = \phi$. وبالمثل إذا كانت $\varepsilon_b \le \varepsilon_a$، فإن

$d(a,b)<\varepsilon_a$ ومن ثم $b\in B_d(b,\frac{\varepsilon_b}{2})$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن

$B_d(a,\varepsilon_a)\cap B=\phi$. إذاً $G\cap H=\phi$.■

نظرية (٥,٢٢) (تمهيدية يوريسون) Urysohn`s Lemma

بفرض أن (X,τ) فضاءً عادياً وأن A,B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X ، فإنه توجد دالة متصلة

$$f:X\to[0,1]$$

بحيث يكون $f(B)=0$ و $f(A)=1$.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء عادي وأن A,B مجموعتين مغلقتين بحيث أن $A\cap B=\phi$. بما أن $A\cap B=\phi$ فإن $A\subseteq B^c$ و $U_1=B^c\in\tau$.

باستخدام نظرية (٥,١٨) يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة U_0 بحيث أن $A\subseteq U_0\subseteq\overline{U_0}\subseteq U_1$. فيكون لدينا $A\subseteq U_0$ و $\overline{U_0}\subseteq U_1$.

باستخدام نظرية (٥,١٨) بالنسبة للمجموعتين $\overline{U_0}\subseteq U_1$ يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة $U_{\frac{1}{2}}$ بحيث أن $\overline{U}_0\subseteq U_{\frac{1}{2}}\subseteq\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subseteq U_1$. فيكون لدينا $A\subseteq U_0\subseteq\overline{U}_0\subseteq U_{\frac{1}{2}}\subseteq\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subseteq U_1$.

باستخدام نظرية (٥,١٨) بالنسبة للمجموعتين $\overline{U}_0\subseteq U_{\frac{1}{2}}$ يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة $U_{\frac{1}{3}}$ بحيث أن

$$U_0\subseteq U_{\frac{1}{3}}\subseteq\overline{U_{\frac{1}{3}}}\subseteq U_{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

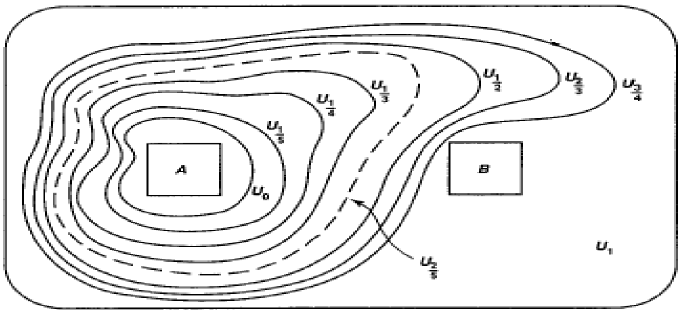
باستخدام نظرية (٥,١٨) بالنسبة للمجموعتين $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_1$ يمكن إيجاد مفتوحة $U_{\frac{2}{3}}$ بحيث أن

$$\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{2}{3}} \subseteq \overline{U_{\frac{2}{3}}} \subseteq U_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$A \subseteq U_0 \subseteq U_{\frac{1}{3}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{3}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{2}{3}} \subseteq \overline{U_{\frac{2}{3}}} \subseteq U_1$$

بتكرار العملية لعدد من المرات نحصل على مجموعات مفتوحة موضحة في الشكل (٥,٩).



شكل (٥,٩)

بتكرار هذه العملية ، لكل عدد كسري ثناوي (dyadic rational number) معطى في الصورة $t = \frac{m}{2^n}$ (حيث أن $n = 1,2,3,\ldots$ و $m = 1,2,\ldots,2^n - 1$) يمكن ايجاد مجموعة مفتوحة U_t بحيث أن

$$t_1 < t_2 \Rightarrow A \subseteq U_{t_1} \subseteq U_{\frac{1}{3}} \subseteq \overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2} \subseteq \overline{U_{t_2}} \subseteq U_1$$

الآن نعرف الدالة $f : X \to [0,1]$ كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \ x \in \forall U_t \\ \sup\{t : x \notin U_t\} \end{cases}$$

يتضح من هذا التعريف أن $f(x)$ تقع في الفترة المغلقة $[0,1]$ وأن

. $f(B)=1$ و $f(A)=0$

لإكمال البرهان يتبقى اثبات أن الدالة $f: X \to [0,1]$ متصلة. كل الفترات التي في الصورة $[0,a)$ أو $(a,1]$، حيث أن $0<a<1$، تشكل أساس جزئي بالنسبة للفضاء $[0,1]$. لذا يكفي اثبات أن كل من $f^{-1}(a,1]$ و $f^{-1}[0,a)$ مجموعات مفتوحة. من السهل اثبات أن $f(x)<a$ إذا و فقط إذا كانت x تنتمي لبعض U_t لكل $t<a$ و من هذا نجد أن

$$f^{-1}([0,a))=\{x: f(x)<a\}=\bigcup_{t<a} U_t$$

و التي هي مجموعة مفتوحة. بالمثل $f(x)>a$ إذا و فقط إذا كانت x تقع خارج $\overline{U}_t$ لبعض $t>a$ ومن ثم نجد أن

$$f^{-1}((a,1])=\{x: f(x)>a\}=\bigcup_{t>a} (\overline{U}_t)^c$$

والتي هي مجموعة مفتوحة.■

نظرية (٥,٢٣)

بفرض أن (X,τ) فضاءً عادياً وأن A,B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X ، فإنه توجد دالة متصلة

$$f: X \to [a,b]$$

بحيث يكون : $f(B)=b$ و $f(A)=a$.

البرهان

إذا كانت $a=b$ ، سنحتاج فقط لتعريف دالة بالصيغة $f(x)=a$ لكل $x \in X$ و هذه الدالة متصلة. سوف نفترض أن $a<b$. بفرض أن

$$g : X \to [0,1]$$

بنفس شروط تمهيدية يوريسون ، فإن الدالة $f = (b-a)g + a$ تحقق الخواص المطلوبة في هذه النظرية.■

في النظرية التالية سوف نبرهن أن عكس تمهيدية يوريسون يكون صحيحاً

نظرية (٥,٢٤)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي بحيث أنه لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين A,B في X ، فإنه توجد دالة متصلة

$$f : X \to [0,1]$$

بحيث يكون $f(B) = 1$ و $f(A) = 0$. فإن الفضاء (X,τ) فضاء عادي.

البرهان

نفرض أن A,B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X بحيث أن $f(B) = \{1\}$ و $f(A) = \{0\}$.

المجموعتين :

$$G = \{x \in [0,1] : 0 \le x < \tfrac{1}{2}\}$$

$$H = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} < x \le 1\}$$

مفتوحتين في $[0,1]$ غير متقاطعتين . بما أن الدالة $f : X \to [0,1]$ متصلة،

فإن $f^{-1}(G), f^{-1}(H) \in \tau$ ومفتوحتين و $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \phi$ و ايضا

$$A \subseteq f^{-1}(G)$$

$$B \subseteq f^{-1}(H)$$

إذاً (X,τ) فضاء عادي.■

يترتب على تمهيدية يوريسون نظرية من النظريات الهامة في التوبولوجي التي تخبرنا عن الظروف التي تسمح بتوسيع دالة حقيقية متصلة معرفة على فضاء جزئي لتكون دالة متصلة ومعرفة على الفضاء الكلي.

نظرية (٥,٢٥) (نظرية تيتز Tietze extension theorem)

بفرض أن (X,τ) فضاء عادي، A مجموعة جزئية مغلقة في X :

(i) لكل دالة متصلة $f : A \to [a,b]$ من A إلى الفترة المغلقة $[a,b]$ من R، توجد دالة متصلة و موسعة $g : X \to [a,b]$.

(ii) لكل دالة متصلة $f : A \to R$ ،توجد دالة متصلة و موسعة $g : X \to R$

البرهان

سوف نكتفي ببرهان الفقرة (i). إذا كانت $a = b$ فإنه من تطبيق تمهيدية يوريسون تتحقق النظرية. لذلك سنفرض أن $a < b$ و أن $[a,b]$ هي أصغر فترة مغلقة بحيث أن $f(A) \subseteq [a,b]$. اسلوب برهان نظرية (٥,٢٣) يسمح لنا باختيار الفرض أن $a = -1$ و $b = 1$.سوف نبدأ بتعريف الدالة f_0 لتكون هي الدالة f . أي أن $f_0 : A \to [-1,1]$. نعرف المجموعتين الجزئيتين :

$$A_0 = \{x : f_0(x) \le -\tfrac{1}{3}\} \subseteq A$$

$$B_0 = \{x : f_0(x) \ge \tfrac{1}{3}\} \subseteq A$$

المجموعتان B_0 , A_0 مغلقتان في A وغير متقاطعتين وغير خاليتين . و هما أيضاً مغلقتان في X لأن A مغلقة. بتطبيق نظرية (٥,٢٣) على المجموعتين المغلقتين B_0 , A_0 فيمكن إيجاد دالة متصلة $g_0 : X \to [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}]$ بحيث أن

$g_0(B_0)=\frac{1}{3}$ ، $g_0(A_0)=-\frac{1}{3}$.

من السهل ملاحظة أن $|f_0(a)-g_0(a)|\le \frac{2}{3}$ لكل $a\in A$. فإذا كانت

$$A_1=\{x: f_1(x)\le -\tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})\}\subseteq A$$

$$B_1=\{x: f_1(x)\ge \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})\}\subseteq A$$

بتطبيق نظرية (٥،٢٣) على المجموعتين المغلقتين B_1, A_1 فيمكن إيجاد دالة متصلة $g_1: X\to[-\frac{1}{3}(\frac{2}{3}),\frac{1}{3}(\frac{2}{3})]$ بحيث أن $g_1(A_1)=-\frac{2}{9}$ و $g_1(B_1)=\frac{2}{9}$.

بتطبيق نفس الإجراءات نعرف الدالة f_2 على المجموعة المغلقة A بالصيغة

$$f_2=f_1-g_1=f_0-(g_0+g_1): A\to[-\tfrac{4}{9},\tfrac{4}{9}]$$

و من ثم نلاحظ أن $|f_2(a)|\le(\frac{2}{3})^2$.

بتكرار نفس الإجراءات السابقة، نحصل على متتالية من الدوال المتصلة

$$f_n: A\to[-(\tfrac{2}{3})^n,(\tfrac{2}{3})^n]$$

بحيث أن $|f_n(a)|\le(\frac{2}{3})^n$ لكل $a\in A$. ومن ثم يمكن ايجاد متتالية من الدوال المتصلة

$$g_n: X\to[-(\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^n,(\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^n]$$

بحيث أن $|g_n(x)|\le(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^n$ لكل $x\in X$ ، مع الاعتبار بأن $f_n=f_0-(g_0+g_1+\ldots+g_{n-1})$.

الآن نعرف

$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ لكل $x\in X$.

يمكن للقارئ ملاحظة أن المتسلسلة اللانهائية $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ أنها تقاربية وذلك باستخدام أختبار المقارنة (تأكد من ذلك؟) مع المتسلسلة الهندسية

$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n-1}$ والتي تتقارب من الواحد الصحيح. لذا نستطيع القول بأن $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ تتقارب بانتظام في X إلى دالة حقيقية محدودة f^* بحيث أن $|f^*(x)|\leq 1$. يمكن تلخيص هذا البرهان بملاحظة أنه بما أن $|f_n(x)|\leq(\frac{2}{3})^n$ و $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ تتقارب بانتظام في A إلى $f_0=f$ و من ثم فإن $f^*=f$ في A و g توسيع متصل للدالة f على الفضاء الكلي X. ■

ملاحظة:

هذه النظرية قد تكون أحيانا غير صحيحة لو تم التغاضي عن شرط كون المجموعة A مغلقة. هذا الأمر يتضح من المثال التالي:

مثال (٥,٢٠)

بفرض أن $X=[0,1]$ ، $A=(0,1]$ و $f:A\to[0,1]$ دالة على A معرفة بالصيغة $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$. واضح أن الفضاء $X=[0,1]$ عادي و أن A ليست مغلقة و من ثم لا يمكن تمديد الدالة f كدالة متصلة على كل X .

تمارين (٥,٢)

١) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- (X,τ) فضاء منتظم .
- (X,τ) فضاء منتظم و ليس T_1.
- (X,τ) فضاء عادي.
- (X,τ) فضاء عادي و ليس T_1.

٢) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$. كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- $\{a\},\{b\}\in\tau$ و يكون الفضاء (X,τ) هو فضاء منتظماً .
- $\{a,b\},\{c,d\}\in\tau$ و يكون الفضاء (X,τ) هو فضاء عاديا.

٣) ضع مثال لفضاء يكون منتظم و ليس هاوسدورف.

٤) برهن أن كل فضاء متري هو فضاء عادي.

٥) بفرض أن τ التوبولوجي المولد على R بالفترات $[a,b)$ حيث أن $a,b\in R$

.بين أن (R,τ) فضاء عادي.

٦) بين أي فضاء $-T_1$ منته هو فضاء متقطع .

٧) برهن أن الفضاء المتري (R^2,d) منتظم، حيث أن

$$d(a,b)=\sqrt{(a_2-b_2)^2+(a_1-b_1)^2}$$

لكل $a=(a_1,a_2),b=(b_1,b_2)$ في R^2 .

٨) اثبت أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاءً عادياً إذا و فقط إذا كان لكل $A,B\in\tau$ بحيث $A\cup B=X$ فإنه توجد مجموعتان مغلقتان F_1,F_2 في X بحيث أن $F_1\subseteq A,F_2\subseteq B$ بحيث أن $F_1\cup F_2=X$.

٩) ضع مثلاً توضح فيه أن تمهيدية يوريسون قد تكون غير صحيحة لو تغاضينا عن شرط كون المجموعتين $A,B\subseteq X$ مغلقتين؟.

(٥,٦) الفضاءات المنتظمة تماماً Completely regular spaces

هذا الفضاء كان من الطبيعي أن يكون موضع دراسته بعد الفضاء المنظم ولكن للاستفادة من تمهيدية يورسون تم اراجه في هذا الموضع ليسهل على القارئ تخيل هذا الفضاء .

تعريف (5.9)

يُقال للفضاء التوبولوجى (X,τ) إنه منتظم تماماً إذا كان لكل مجموعة مغلقة $F \subseteq X$ ولكل نقطة $x \in X$ بحيث يكون $x \notin F$ فإنه توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث يكون $f(x)=0$ و $f(F)=1$.

تعريف (5.10)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه فضاء تيكونوف (Tychonoff Space) أو فضاء $-T_{3\frac{1}{2}}$، إذا كان فضاء $-T_1$ و منتظم تماماً.

نظرية (٥,٢٦)

الفضاء المنتظم تماماً هو فضاء منتظم.

البرهان

بفرض ان (X,τ) فضاء تام الانتظام ، وأن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة لا تحتوي النقطة x حيث $x \in X$. بما أن الفضاء (X,τ) منتظم تماماً ، فإنه توجد دالة مستمرة $f : X \to [0,1]$ ، بحيث يكون $f(x)=0$ و $f(F)=1$.

ولكن $[0,1] \subseteq R$ و R هو فضاء $-T_2$، أي أن $[0,1]$ هو فضاء $-T_2$. إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G=[0,\frac{1}{2}), H=(\frac{1}{2},1]$. نجد أن $0 \in G$, $1 \in H$.بما أن الدالة $f : X \to [0,1]$ مستمرة ، فإن $f^{-1}(G)$, $f^{-1}(H)$ مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين وايضا $x \in f^{-1}(G)$, $F \subseteq f^{-1}(H)$، و بذلك يكون (X,τ) فضاءً منتظماً.

نظرية (٥,٢٧)

كل فضاء منتظم وعادي هو فضاء منتظم تماماً.

البرهان

بفرض ان (X,τ) فضاءً منتظماً و عادياً ، وأن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة لا تحوي النقطة x حيث $x \in X$. بما أن الفضاء (X,τ) منتظم ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان G,H بحيث يكون

$$x \in G \ , \ F \subseteq H \ , G \cap H = \phi$$

نعتبر $E = H^c$ مجموعة مغلقة تحقق $F \cap E = \phi$. بموجب كون الفضاء (X,τ) فضاءً عادياً ، فإنه توجد دالة مستمرة $f : X \to [0,1]$ ، بحيث يكون $f(E)=0 \ , \ f(F)=1$. أي أن $f(x)=0 \ , \ f(F)=1$ ، $x \in f^{-1}(G) \ , \ F \subseteq f^{-1}(H)$ ، و بذلك يكون (X,τ) تام الانتظام. ■

مثال (٥,٢١) (مستوي نيمتزكي Niemytzki plane) منتظم تماماً.

الحل

نعتبر الفضاء (X,τ^*) كما ورد في مثال (٥,١٨) .

لإثبات أن الفضاء (X,τ^*) هو فضاء منتظم تماماً، نختار المجموعة المغلقة A والنقطة $b=(b_1,b_2) \notin A$. إذا كانت $b \in X_u$ ، فإنه يوجد جوار G للنقطة b بحيث أن $G \subseteq X - A$. الجوار G مفتوح بالنسبة لكل من التوبولوجي الاقليدي و التوبولوجي τ^* لذا فإن $(X-G)$ مغلقة بالنسبة للتوبولوجي الاقليدي و بما أن التوبولوجي الاقليدي منتظم تماماً، فإنه توجد دالة منصلة $f : X_u \to [0,1]$ بحيث

أن $f(X-G)=1$ و $f(b)=0$ وهذه الدالة متصلة أيضا بالنسبة للتوبولوجي τ^* وتحقق نفس الشروط السابقة.

في حالة أن $b\in T$. أي أن $b=(b_1,0)$ فإنه يوجد قرص مفتوح D يمس الخط T عند النقطة b بحيث أن $D\cap A=\phi$. دعنا نفترض أن نصف قطر هذا القرص $\varepsilon>0$. نعرف الدالة $f:X\to[0,1]$ تحت الشروط:

$f(x)=1$ إذا كانت $x\notin D\cup\{b\}$ و $f(b)=0$ وعند النقطة $(x,y)\in D$ نعرف الدالة بالصيغة $f(x,y)=\frac{((x-b_1)^2+y^2)}{2\varepsilon y}$. الدالة f متصلة لأن $f^{-1}([0,\alpha))$ هي المجموعة المفتوحة $D_\alpha\cup\{b\}$ حيث أن D_α هو القرص المفتوح الذي نصف قطره $\varepsilon\alpha$ و يمس T عند النقطة b وذلك لأن

$f^{-1}([0,\alpha))=\{(x,y):(x-b_1)^2+(y-\varepsilon\alpha)^2\le\varepsilon^2\alpha^2\}$. وأيضاً $f^{-1}((\alpha,1])$ هي المجموعة المفتوحة $X-\overline{D_\alpha}$. إذاً الدالة $f:X\to[0,1]$ متصلة و تحقق أن $f(A)=1$ و $f(b)=0$ ما يعني أن (X,τ^*) هو فضاء منتظم تماماً.

نظرية (٥,٢٨)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي منتظم تماماً هي خاصية وراثية.

البرهان

(يترك للطالب كتمرين)

نتيجة (٥,٨)

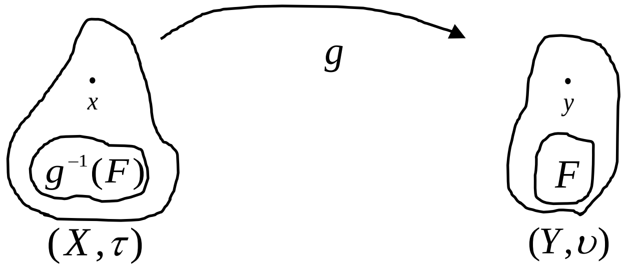
خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$ هي خاصية وراثية.

نظرية (٥,٢٩)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي منتظم تماماً هي خاصية توبولوجية.

البرهان

نفرض أن $g: X \to Y$ دالة توبولوجية من الفضاء تام الانتظام (X,τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y,υ)، و المطلوب اثبات أن (Y,υ) هو فضاء منتظم تماماً .



شكل (٥,١٠)

لاثبات ذلك نفرض أن $F \subseteq Y$ مجموعة مغلقة وأن $y \notin F$ حيث أن $y \in Y$

إذاً $g^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X و لا تحوي $x = g^{-1}(y)$.

بما أن الفضاء (X,τ) منتظم تماماً ، فإنه توجد دالة متصلة $h: X \to [0,1]$،

بحيث يكون $h(x) = h(g^{-1}(y)) = 0$ و $h(g^{-1}(F)) = 1$. بما أن الدالة

$$g: X \to Y$$

دالة توبولوجية ، فإن $g^{-1}: Y \to X$ دالة متصلة و من ثم فإن دالة التحصيل $f = h \circ g^{-1}: Y \to [0,1]$ متصلة و تحقق الآتي:

$$f(y) = h \circ g^{-1}(y) = h(g^{-1}(y)) = 0$$

$$f(F) = h \circ g^{-1}(F) = h(g^{-1}(F)) = 1$$

إذاً (Y,υ) فضاء منتظم تماماً.

نتيجة (٥,٩)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$ هي خاصية توبولوجية

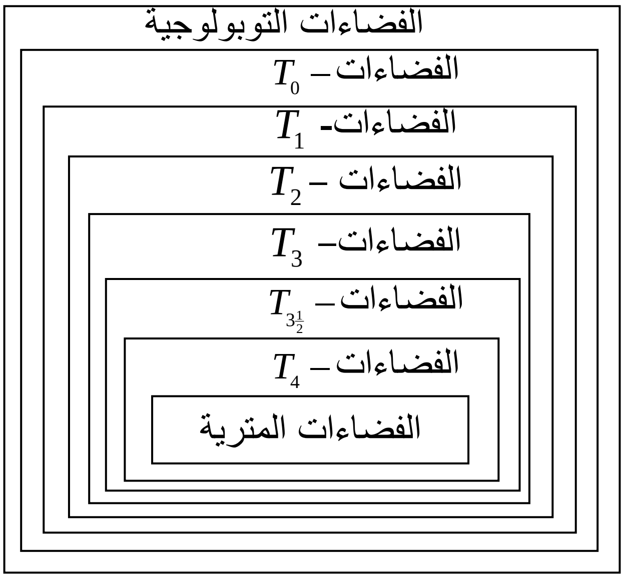
نظرية (٥,٢٩)

في الفضاء – $T_{3\frac{1}{2}}$،إذا كان $x, y \in X$ بحيث $x \neq y$ ، فإنه توجد دائماً دالة حقيقية $f : X \to R$ بحيث يكون $f(x) \neq f(y)$

البرهان

بموجب أن الفضاء (X,τ) هو فضاء $T_{3\frac{1}{2}}$ ، إذاً هو فضاء– T_1 ، و عليه فإن $\{y\}$ مجموعة مغلقة لا تحوي النقطة x (أي أن $x \notin \{y\}$) و بموجب كون الفضاء (X,τ) منتظم تماماً ، فإنه توجد دالة مستمرة $f : X \to [0,1] \subseteq R$ بحيث يكون $f(x) = 0\ ,\ f(y) = f(\{y\}) = 1$ وعليه فإن $f(x) \neq f(y)$.■

نختم هذا الفصل بتوضيح العلاقة بين كل الفضاءات $T_4\ ,\ T_3,\ T_2\ ,T_1$ يمكن ملاحظتها من خلال المخطط التالي :



تمـاريـن (٥,٣)

١- لــتكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ توبولــوجي معرفــة علــى المجموعــة $X\{a,b,c\}$. فهل الفضاء (X,τ) منتظم أم عادي؟.

٢- أعط مثالاً لفضاء منتظم و ليس عادياً. (فكرة الحل: عرف توبولوجي τ على مجموعة غير خالية X بحيث يكون عادياً و منتظماً معا، ثم اختر مجموعة جزئية $A\in\tau$ و عرف عليها توبولوجي نسبي τ_A، فحينها يكون الفضاء الجزئي (A,τ_A) فضاءً منتظماً و ليس عاديا).

٣- أعط مثالاً يوضح أنه ليس كل فضاء T_3 يكون فضاء T_4.

٤- برهن أن الفضاء الجزئى المغلق من الفضاء العادي يكون عادياً.

٥- أعط مثـالاً يوضـح أنـه لـيس مـن الضـروري أن تكـون الصـورة المتصـلة للفضاء $-T_2$ هي فضاء $-T_2$.

٦- برهن أن خاصية كون الفضاء تام الانتظام هي خاصية وراثية.

(٥,٧) مسلمات العد The Countability Axioms

تعريف (5.11)

إذا كـان (X,τ) فضـاء توبولـوجي فـأن عائلـة المجموعـات المفتوحـة β_x التـي تحوي النقطة x تسمى اساس موضعي عند x إذا كان لكل مجموعة مفتوحـة G تحوي x يوجد عنصر B_x في β_x بحيث يكون $x\in B_x\subseteq G$.

مثال (5.22)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة

$X=\{a,b,c,d\}$ ، فإن

$$\beta_a=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

$$\beta_b=\{\{a,b\}\}$$

$$\beta_c=\{\{a,b,c\}\}$$

تعريف (5.12)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه يحقق مسلمة العد الأولى إذا كان لكل نقطة x في X يوجد اساس موضعي قابل للعد.

مثال (٥,٢٣)

الفضاء التوبولوجي القوي $(X,P(X))$ يحقق مسلمة العد الأولى و ذلك لأنه لكل نقطة x في X فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة و تنتمي لأي اساس على التوبولوجي $P(X)$ وبهذا فإن أي جوار للنقطة x يحوي الجوار $\{x\}$.

مثال (٥,٢٤)

الفضاء المعتاد على R يحقق مسلمة العد الأولى و ذلك لأن عائلة الفترات المفتوحة $\beta_x^n=\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}):n\in N\}$ تمثل اساس موضعي قابل للعد لكل نقطة x في R.

ملاحظة:

كل فضاء توبولوجي قابل للتمتر يحقق مسلمة العد الأولى لأن عائلة الكرات $(B_d(x,\frac{1}{n}))_{n\in N}$ التي مركزها x تمثل أساس قابل للعد عند النقطة x. لذا سوف نقدم النظريات التالية بدون برهان لتطابق براهينها مع براهين نظريات ذكرت في الفصل الثالث.

نظرية (٥,٣٠)

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الأولى، فإن النقطة x تنتمي إلى الانغلاق $\overline{A}$ للمجموعة $A \subseteq X$ إذا و فقط إذا وجدت متتالية من نقاط المجموعة A تتقارب إلى النقطة x.

البرهان

أنظر برهان نظرية (٣,٢٢).■

نظرية (٥,٣١)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً يحقق مسلمة العد الأولى، فإن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لكل متتالية تقاربية $x_n \in X$ و تتقارب من النقطة x فإن المتتالية $f(x_n)$ تتقارب من النقطة $f(x)$.

البرهان

أنظر برهان نظرية (٤,٨).■

نظرية (٥,٣٢)

كل فضاء جزئي من فضاء توبولوجي (X,τ) يحقق مسلمة العد الأولى، فإنه يحقق مسلمة العد الأولى.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الأولى و نفرض أن (A,τ_A) فضاء جزئي منه. لتكن $a \in A$، عندئذ تكون $a \in X$ و حيث أن (X,τ) يحقق مسلمة العد الأولى فإنه توجد عند a قاعدة محلية قابلة للعد

$\beta_a = \{B_n\}_{n\in N}$ و عندئذ تكون $\beta_a^* = \{B_n \cap A : n \in N\}$ اساس موضعي قابل للعد بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A عند النقطة a. أي أن (A,τ_A) يحقق مسلمة العد الأولى.■

تعريف (5.13)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه يحقق مسلمة العد الثانية إذا كان للتوبولوجي τ أساس قابل للعد.

مثال (٥,٢٥)

الفضاء الاقليدي (R,u) يحقق مسلمة العد الثانية، حيث أن عائلة الفترات:

$$\beta = \{(a,b) : a,b \in Q\}$$

تشكل أساس قابل للعد للتوبولوجي المعتاد u .

يتضح أن كل فضاء يحقق مسلمة العد الثانية فهو يحقق مسلمة العد الأولى ولكن العكس ليس صحيح دائماً كما يتضح من المثال التالي:

مثال (٥,٢٦)

الفضاء المتقطع $(X,P(X))$ على مجموعة غير قابلة للعد لا يحقق مسلمة العد الثانية، لكنه يحقق مسلمة العد الأولى لأن المجموعات أحادية العنصر تشكل أساساً عند نقاط X. طالما أن X غير قابلة للعد فإن العائلة $\{p\}$ لكل $p \in X$ غير قابلة للعد وعليه فإن الفضاء $(X,P(X))$ لا يحقق مسلمة العد الثانية بينما يحقق مسلمة العد الأولى.

نظرية (٥,٣٣)

كل فضاء جزئي من فضاء توبولوجي (X,τ) يحقق مسلمة العد الثانية، فإنه يحقق مسلمة العد الثانية.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الثانية و نفرض أن (A,τ_A) فضاء جزئي منه. نفرض أن $\beta=\{B_n : n\in N\}$ أساس قابل للعد للتوبولوجي τ. العائلة $\beta_A=\{A\cap B_n : n\in N\}$ هي أساس قابل للعد للتوبولوجي τ_A و عليه فإن (A,τ_A) يحقق مسلمة العد الثانية .■

تعريف (5.14)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه قابل للانفصال (separable) إذا وجدت مجموعة كثيفة في X و قابلة للعد.

مثال (٥,٢٧)

كل فضاء توبولوجي متقطع قابل للعد يكون قابل للانفصال بينما الفضاء المتقطع والغير القابل للعد يكون غير قابل للانفصال.

نظرية (٥,٣٤)

كل فضاء يحقق مسلمة العد الثانية هو قابل للانفصال.

البرهان

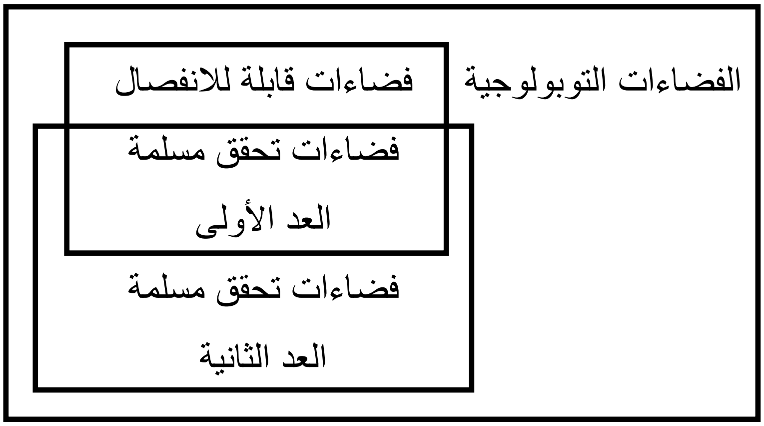
نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الثانية أي أن له أساس قابل للعد و ليكن $\beta=\{B_n : n\in N\}$، لكل $n\in N$ نختار $a_n\in B_n$ و نكون المجموعة A على النحو التالي:

$$A=\{a_n : n\in N\}$$

واضح أن A مجموعة قابلة للعد ، و من ناحية أخرى نجد أن أي نقطة $p\in A^c$ هي نقطة نهاية للمجموعة A ، حيث أن أي مجموعة مفتوحة $G\in\tau$ تحوي

النقطة p سوف تحتوي على نقطة من A غير النقطة p لأن $p \notin A$ ، حيث يوجد عنصر من الأساس و ليكن B_{n_0} بحيث يكون $p \in B_{n_0} \subseteq G$ و لكن $a_{n_0} \in A \cap B_{n_0}$ بموجب تكوين A ، عندئذ يكون $\overline{A} = A \cup A' = X$ ، إذاً A مجموعة كثيفة في X و قابلة للعد و من ثم يكون الفضاء (X,τ) قابل للانفصال.■

مما سبق نستطيع رسم الشكل التوضيحي التالي:



تمارين (٥,٤)

(١) بين أن كل فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الثانية يحقق مسلمة العد الأولى والعكس ليس صحيحاً دائماً؟

(٢)برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الأولى هي خاصية وراثية.

(٣) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الأولى هي خاصية توبولوجية.

(٤) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الثانية هي خاصية وراثية.

(٥) بـرهن أن خاصـية تحقيـق الفضـاء لمسـلمة العـد الثانيـة هـي خاصـية توبولوجية.

(٦) اعط مثال لفضاء قابل للانفصـال يحقق مسلمة العد الأولـى ولا يحقق مسلمة العد الثانية ؟

(٧) برهن أن قابلية الانفصال هي خاصية توبولوجية.؟

(٨) برهن نظرية (٥,٣٠)؟

(٩) برهن نظرية (٥,٣١)؟.

(١٠) بـرهن أن أي فضــاء يحقـق مسـلمة العـد الثانيـة يكـون قابـل للانفصال؟

(١١) اعط مثال لفضاء قابل للانفصال يحقق مسلمة العد الأولـى و لا يحقق مسلمة العد الثانية؟

(١٢) بين أن فضاء المكملات المنتهية علـى مجموعـة الأعداد الحقيقيـة لا يحقق مسلمة العد الأولى.

الفصل السادس

التراص
Compactness

مقدمة

ندرس في هذا الفصل خاصية توبولوجية لها دوراً فعالاً وبارزاً ليس في الفضاءات التوبولوجية فحسب بل في التحليل أيضاً وغيره من فروع الرياضيات المختلفة. هذه الخاصية هى خاصية التراص . وأول فكرة ساهمت في وضع تعريف مفهوم التراص و فتح المجال لدراسته هى نظرية هاينة – بوريل (Heine –Borel Theorem) المعروفة في التحليل الحقيقى والتى تقرر الآتى :

إذا كانت X مجموعة جزئية - مغلقة ومحدودة - من خط الأعداد الحقيقية فإن أى عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة في R والتى اتحاداتها تحتوى على X فثمة عائلة جزئية منتهية من X بحيث أن اتحاد عناصرها يحتوى على X أيضاً.

ونظرية هاين – بوريل هذه لها نتائج كثيرة منها : أنه إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[0,1]$ فحينئذ تصل الدالة f إلى قيمتها العظمى وإلى قيمتها الصغرى على الفترة المغلقة $[a,b]$.

الفترة المغلقة $[a,b]$ تسمى فترة متراصة متى كانت محدودة أيضاً. هذا التعريف الخاص بتراص الفترات المغلقة هل يمكن تعميمه إلى جميع

المجموعات في الفضاء المتري ؟. قبل الإجابة عن هذا السؤال يجب أن نعلم أنه لكى تكون المجموعة الجزئية A - من الفضاء المتري – متراصة يجب أن تكون مغلقة ومحدودة. ولكن هذا التعريف غير مناسب للاستخدام مع الفضاءات التوبولوجية الأكثر تعميماً من الفضاءات المترية وذلك لصعوبة استخدام مفهوم المجموعات المحدودة.

لتعريف المجموعة المتراصة في الفضاء المتري توجد طريقتان إحداهما باستخدام مفهوم نقاط التجمع (Cluster points) والأخرى باستخدام مفهوم الغطاءات المفتوحة (Open covers). الطريقتان متكافئتان ولكن توجد ثمة فروق بينهما ، فالأولى تمتاز بسهولة الاستيعاب وسهولة التطبيق ولكنها لا تسمح بتعميمها على فضاءات أخرى سوى الفضاء المتري. أما التعريف الثانى فهو يتكافأ مع التعريف الأول في حالة الفضاء المتري فضلاً عن أنه يمتاز بإمكانية تعميمه على فضاءات أخرى أكثر تعميماً من الفضاء المتري.

(٦,١) الغطاءات المفتوحة Open covers

تعريف (٦,١)

بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X,τ). الغطاء المفتوح للمجموعة A هو التجمع $O=\{G_i\}$ من المجموعات المفتوحة G_i والتي اتحادها يحوي المجموعة A .أي أن $A\subseteq \cup_i G_i$. الغطاء الجزئي من الغطاء المفتوح $O=\{G_i\}$ هو التجمع الجزئي $\{G_{i_1},G_{i_2},...,G_{i_n}\}$ من O بحيث أن $A\subseteq \{G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup ...,\cup G_{i_n}\}$.

مثال (٦,١)

بفرض أن $A=[0,5]$،وبفرض أن العائلة

$O=\{(n-1,n+1):n=-\infty,\dots,\infty\}$ غطاء للمجموعة A . الغطاء الجزئي $\{(-1,1),0,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ هو أصغر غطاء جزئي من O يحوي المجموعة A .

تعريف (٦,٢)
بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. يقال أن المجموعة جزئية $A\subseteq X$ متراصة إذا كان كل غطاء مفتوح لهذه المجموعة يحوي غطاءً جزئياً منتهياً.

مثال (٦,٢)
المجموعة $A=(0,1)\subset R$ ليست متراصة ، لأنه بإختيار العائلة :

$$G=\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}):n\in N\}$$

كغطاء مفتوح للمجموعة A . لحساب إمكانية وجود الغطاء الجزئي للمجموعة A نستبعد على الأقل عنصر من عناصر الغطاء و ليكن $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$، نجد أن العائلة الجزئية $\zeta=\{(\frac{1}{3},1),(\frac{1}{5},\frac{1}{3}),(\frac{1}{6},\frac{1}{4}),\dots\}$ لا تكون غطاء جزئي للمجموعة A و ذلك لعدم وجود غطاء للعنصر $\frac{1}{3}\in A$ حيث أن

$$\frac{1}{3}\notin(\frac{1}{3},1)\cup(\frac{1}{5},\frac{1}{3})\cup\dots$$

و هكذا في كل مرة نحاول استبعاد أي فترة سوف يبقى عنصر بدون غطاء .

مثال (٦,٣)
المجموعة $A=[1,\infty)\subseteq R$ ليست متراصة ، لأنه بإختيار العائلة :

$$G=\{(0,2),(1,3),(2,4),..\}$$

كغطاء للمجموعة A يتكون من فترات مفتوحة. ولكن هذا الغطاء لا يحتوي على أي غطاء جزئي منه و يمكن ملاحظة ذلك باستبعاد أي فترة من عناصر G فمثلاً لو استبعدنا $(1,3)$نجد أن العائلة $\zeta=\{(0,2),(2,4),(4,6),...\}$ لا تكون غطاء جزئي للمجموعة $A=[1,\infty)$ و ذلك لكون العنصر $2\in A$ بدون غطاء وهذا يعني أن G لا يحتوي على أي غطاء جزئي منته للمجموعة A .

مثال (٦,٤)
المجموعة $A=R$ ليست متراصة ، لأنه بإختيار العائلة :

$$G=\{(n,n+2):n\in Z\}$$

كغطاء لمجموعة الأعداد الحقيقية $A=R$ و لكنها لا تحتوي على أي غطاء جزئي منته، حيث أن أي محاولة لاستبعاد ولو عنصر واحد من عناصر G سوف يتسبب في عدم وجود غطاء لعنصر من $A=R$ ، فعلى سبيل المثال لو تم استبعاد الفترة $(2,4)$فإن العدد 3 لا يوجد له غطاء.

نظرية (٦,١) (نظرية كانتور للفترات المتداخلة)

إذا كانت $\{[a_n,b_n]:n=1,2,...\infty\}$ متتابعة من الفترات المغلقة و المتداخلة ، فإن $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\phi$. و إذا كان طول هذه الفترات يتقارب للصفر فإن تقاطع هذه الفترات يتكون على وجة الدقة من نقطة واحدة.

البرهان

بما أن $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ لكل عدد صحيح موجب n ، فإن المتواليات $\{a_n\}$و $\{b_n\}$ لنقاط الحدود اليمنى و اليسرى للفترة $[a_n,b_n]$ لهما الخواص التالية:

(1) $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots$

(2) $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots$

(3)كل نقطة حدية من جهة اليسار هى أقل من كل نقطة حدية من جهة اليمين.

نفرض أن c ها أصغر حد علوي لنقاط الحدود من جهة اليسار و d هي أكبر حد سفلي لنقاط الحدود من جهة اليمين. وجود النقطتين c,d مضمون من خلال خاصية الحدود العليا و الصغرى.

من الشرط (٣) نجد أن $c \le b_n$ لكل n و من ثم يكون $c \le d$. بما أن $a_n \le c \le d \le b_n$ فإن $[c,d] \subset [a_n,b_n]$ لكل n. لذا فإن $\cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ تحوي الفترة المغلقة $[c,d]$ و من ثم لا تكون خالية.

أخيراً إذا كانت المتتابعة $[a_n, b_n]$ تتقارب إلى الصفر فإنه يجب أن تكون $c = d$ و النقطة c النقطة الوحيدة للتقاطع.■

نظرية (٦,٢)

الفترة المغلقة $[0,1]$ متراصة

البرهان

نفرض أن O غطاء مفتوح للفترة $[0,1]$.أفترض أن الفترة $[0,1]$ لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر الغطاء O، فإن إحدى الفترتين $[0,\frac{1}{2}]$ أو $[\frac{1}{2},1]$ لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوح O . نفترض أن $[a_1,b_1]$ هو النصف الذي لم يغطى بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوحO.

بتطبيق نفس الفكرة على الفترة $[a_1,b_1]$ فيكون لدينا واحدة من الفترتين $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ و $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصرالغطاء

المفتوح. نفترض أن $[a_2,b_2]$ هو أحد النصفين $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ و $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ الذي لم يغطى بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوح O. بتكرار هذه العملية لنحصل على متوالية من الفترات المغلقة المتداخلة $\{[a_n,b_n]:n=1,2,...\infty\}$ و التي تتميز بأن اي منها لا يغطى بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوح O. باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع الحصول على ان $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}$. لذا نستطيع القول بأن أول طول الفترات $[a_n,b_n]$ تتقارب من الصفر.

باستخدام نظرية الفترات المتداخلة لكانتور نجد أنه توجد نقطة في تقاطع كل هذه الفترات المتداخلةو لتكن $p\in[a_n,b_n]$ لكل n. بما أن $p\in[0,1]$ ، فإنه توجد فترة مفتوحة $O_1\in O$ بحيث أن $p\in O_1$. أي أن يوجد $\varepsilon>0$ بحيث يكون $(p-\varepsilon,p+\varepsilon)\subset O_1$. نفترض أن N عدد صحيح موجب بحيث أن $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$. بما أن $p\in[a_N,b_N]$ ، فإن $p\in[a_n,b_n]\subset(p-\varepsilon,p+\varepsilon)\subset O_1$ و هذا معناه أنه يمكن تغطية $[a_N,b_N]$ بعنصر من عناصر الغطاء المفتوح O و هذا يتعارض مع الفرض بأن الفترة $[a_N,b_N]$ لا يمكن تغطيتها بغطاء جزئي منته من الغطاء المفتوح O. هذا التعارض يبين أنه يوجد غطاء جزئي منته للفترة $[0,1]$ و أن هذه الفترة متراصة.■

نظرية (٦,٣)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). فإذا كانت $A\subseteq X$ مجموعة متراصة في X فإن $f(A)$ تكون أيضا متراصة في Y .

البرهان

نفـرض أن A مجموعـة متراصــة فــي X وأن $\{G_i : i \in I\}$ غطــاء مفتــوح للمجموعة $f(A)$ ، أي أن $f(A) \subseteq \cup_i \{G_i\}$ بما أن

$$\therefore A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\cup_i G_i) = \cup_i f^{-1}(G_i)$$

و على ذلك فإن $\{f^{-1}(G_i)\}$ غطاء مفتوح للمجموعة A لأن الدالة متصلة و $\{G_i : i \in I\}$ مجموعات مفتوحة فمن ثم فإن $f^{-1}(G_i)$ تكون مجموعات مفتوحة لكل i. بما أن A مجموعة متراصة فإن الغطاء $\{f^{-1}(G_i)\}$ يحتوي على غطاء جزئى منته وليكن :

$$\{f^{-1}(G_{i_1}), f^{-1}(G_{i_2}), \ldots, f^{-1}(G_{i_m})\}$$

بحيث أن

$$A \subseteq f^{-1}(G_{i_1}) \cup f^{-1}(G_{i_2}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{i_m})$$

وعليه فإن :

$$f(A) \subseteq f[f^{-1}(G_{i_1}) \cup f^{-1}(G_{i_2}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{i_m})] \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m}$$

ومن ثم فإن $f(A)$ تكون مجموعة متراصة. ■

مثال (٦,٥)

(١) في المستوي R مع التوبولوجي المعتاد، فإن الفترة المغلقة $[a,b]$ متراصة وذلك باعتبارها صورة متصلة للفترة المتراصة $[0,1]$ تحت تأثير الدالة

$$f : [0,1] \to [a,b]$$

المعرفة بالصورة $f(x) = (b-a)x + a$ لكل $a,b \in R$ حيث أن $a \neq 0$.

(٢) في المستوي $X = R\times R$ مع التوبولوجي المعتاد، فإن دائرة الوحدة

$$C = \{(x,y)\in X : x^2 + y^2 = 1\}$$

تعتبر مجموعة متراصة لكونها صورة مستمرة للمجموعة المتراصة $[0,2\pi]$ تحت تأثير الدالة المعرفة بالصورة $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

الآن هل المجموعة الجزئية من الفضاء المتراص تكون أيضا مجموعة متراصة ؟. للإجابة على هذا السؤال نرجع إلى الأمثلة السابقة فنلاحظ أن الفترة المحدودة والمغلقة $[0,1]$ من خط الأعداد R تكون متراصة (نظرية هاين – بوريل). في حين أن الفترة المفتوحة $(0,1)$ ليست متراصة مع كونها مجموعة جزئية من الفترة المتراصة $[0,1]$. لهذا فإنه ليس من الضرورى أن تكون المجموعة الجزئية من الفضاء المتراص هى مجموعة متراصة. أما شرط تحقق تراص المجموعة الجزئية من الفضاء المتراص يبدو من خلال النظرية التالية :

نظرية (٦,٤)

المجموعة الجزئية المغلقة من الفضاء المتراص هي أيضاً متراصة.

البرهان

نفرض أن A مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المتراص (X,τ) وبفرض أن $\{G_i\}$ غطاءً مفتوحاً للمجموعة المغلقة A . أي أن $A\subseteq \underset{i}{\cup} G_i$. عندئذ يكون $X = \underset{i}{\cup}\{G_i\}\cup A^c$ ،وبما أن A^c مجموعة مفتوحة فإن $\{G_i\}\cup A^c$ هو غطاء مفتوح للمجموعة X . بما أن الفضاء (X,τ) متراص فإنه يوجد غطاء جزئى منته وليكن:

$$\{G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_m}, A^c\}$$

بحيث أن :

$$X = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m} \cup A^c$$

بما أن $X = A \cup A^c$ فإن :

$$X = A \cup A^c = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m} \cup A^c$$

ومن ثم فإن :

$$A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m}$$

وذلـك معنـاه أن أى غطـاء مفتـوح $\{G_i\}$ للمجموعـة A يحتـوى علـى غطاء جزئي منته $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_m}\}$ وذلك هو إثبات أن A مجموعة متراصة.

بعد أن عرفنا أن المجموعة الجزئية المغلقة من الفضاء المتراص تكون دائماً متراصة، ولكن رب سائل قد يسأل هل كل مجموعة جزئية متراصة هي بالضرورة مجموعة مغلقة؟ ، أو بمعنى آخر هل عكس النظرية السابقة صحيح دائماً. المثال التالي يبن أن ذلك ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً دائماً.

مثال (٦,٦)

بفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة الغير خالية $X = \{a,b,c,d\}$. بفرض أن $A = \{a,b\} \subseteq X$. واضح أن المجموعة A ليست مغلقة ولكن العائلة $\{\{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ تكون غطاء مفتوح للمجموعة A ، ومن ثم باستبعاد أي عنصر من عناصر الغطاء المفتوح نحصل على غطاء جزئي منته .إذاً المجموعة A متراصة و لكنها ليست مغلقة.

تعريف (٦,٣) (خاصية التقاطع المنته (Finite Intersection Property)

يقال إن عـائلة المجموعات $\{G_i\}$ تحقق خاصة التقاطع المنته إذا كان تقاطع أي عائلة جزئية منتهية $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\}$ هو مجموعة غير خالية، أى أن :

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \neq \phi .$$

مثال (٦,٧)

العائلة $\{(0,1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}), \ldots\}$ تحقق خاصية التقاطع المنته وذلك لأن تقاطع أي عائلة جزئية منتهية $\{(0,1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}), \ldots, (0, \frac{1}{m})\}$ هو مجموعة غير خالية لأن

$$(0,1) \cap (0, \tfrac{1}{2}) \cap (0, \tfrac{1}{3}) \cap \ldots \cap (0, \tfrac{1}{m}) = (0, b) \neq \phi$$

حيث أن $b = \min\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}\}$.

مثال (٦,٨)

العائلة $\xi = \{[n, n+2] : n \in Z\}$ ليس لها خاصية التقاطع المنته، فعلى سبيل المثال $[2,4] \cap [5,7] = \phi$.

الآن نسـأل أنفسـنا عـن العلاقـة بـين مفهـوم خاصــة التقـاطع المنتــه وبـين مفهـوم التراص . هذه العلاقة يمكن صياغتها في النظرية التالية :

نظرية (٦,٥)

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون متراصاً إذا وفقط إذا كان لكل عائلة $\{F_i\}_{i \in I}$ من المجموعات المغلقة لها خاصية التقاطع المنته فإن $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \phi$.

البرهان

نفرض أن (X, τ) فضاء متراص وأن $\{F_i\}_{i \in I}$ عائلة من المجموعات المغلقة

التي لها خاصية التقاطع المنته و المطلوب إثبات أن $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi$. نفترض جدلاً

أن $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$، فباستخدام قانون ديمورجان De Morgan نحصل على أن

$$(\bigcap_{i\in I} F_i)^c = \phi^c = X \Rightarrow \bigcup_{i\in I} F_i^c = X$$

و بذلك تكون العائلة $\{F_i^c\}_{i\in I}$ غطاءً مفتوحاً للفضاء المتراص (X,τ)

وعليه فإنه يوجد غطاء جزئي منته $\{F_{i_1}^c, F_{i_2}^c, ..., F_{i_m}^c\}$ بحيث أن :

$$X = \{F_{i_1}^c \cup F_{i_2}^c \cup ... \cup F_{i_m}^c\}$$

وأيضا باستخدام قانون دى مورجان فإن :

$$\phi = X^c = (F_{i_1}^c \cup F_{i_2}^c \cup ... \cup F_{i_m}^c)^c = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_m}$$

وعليه فإن $\{F_i\}_{i\in I}$ لا تحقق خاصة التقاطع المنته و هذا يتناقض مع الفرض بأن العائلة تحقق خاصية التقاطع المنته . إذاً $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi$.

لاثبات الاتجاه المعاكس نفرض أن الفضاء (X,τ) غير متراص إذاً يوجد غطاء مفتوح $\{G_i\}_{i\in I}$ من المجموعات المفتوحة في X و هذا الغطاء لا يحوي غطاءً منتهيا. فإن عائلة المجموعات المغلقة $\{G_i^c\}_{i\in I}$ لها خاصية التقاطع المنته و هذا يقتضي أن $\bigcap_{i\in I} G_i^c = \phi$ وهذا يعني أن عائلة المجموعات المغلقة $F_i = \{G_i^c\}_{i\notin I}$ لا تحقق خاصية التقاطع المنته.■

نظرية (٦,٦) (نظرية القيمة العظمى و الصغرى)

بفرض $f : X \to R$ دالة متصلة من الفضاء المتراص (X,τ) إلى مجموعة الاعداد الحقيقية R، فإنه يوجد $c,d \in X$ بحيث أن $f(c) \le f(x) \le f(d)$ لكل $x \in X$.

البرهان

بما أن (X,τ) فضاء متراص وأن $f: X \to R$ دالة متصلة فإن $f(X)=A$ مجموعة متراصة في R و من ثم فهي مغلقة. سوف نحاول اثبات أن A تحوي العنصر لأكبر M و العنصر أصغر m و من ثم نحصل على أن $m=f(c)$ و $M=f(d)$ لأي نقطتين $c,d \in X$.

اولاً إذا كانت A لا تحوي عنصر أكبر، فإن العائلة

$$\{(-\infty,a): a \in A\}$$

تشكل غطاء مفتوح للمجموعة المتراصة A ، و من ثم يوجد غطاء منته للمجموعةA و ليكن $\{(-\infty.a_1),(-\infty,a_2),\ldots,(-\infty,a_n)\}$. فإذا كان a_i هو أكبر عنصر في العناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n$، فإن $a_i \notin \bigcup_{i=1}^{n}(-\infty,a_i)$ و هذا تناقض لأن $A \subseteq (-\infty.a_1)\cup(-\infty,a_2)\cup\ldots\cup(-\infty,a_n)$.

إذاً A تحوي أكبر عناصرها و هو M.

بالمثل يمكن اثبات أن A تحوي أصغر عناصرها و ليكن m.■

(٦,٢) التراص و مسلمات الأنفصال

Compactness and Separation Axioms

فيما يلي سوف نقوم بدراسة العلاقة بين مفهومي التراص و مسلمات الانفصال و سنعرف دور خاصية كون الفضاء هاوسدورف على المجموعات والفضاءات المتراصة .

نظرية (٦,٧)

لتكن A مجموعة متراصة في الفضاء التوبولوجى (X,τ). فإذا كان

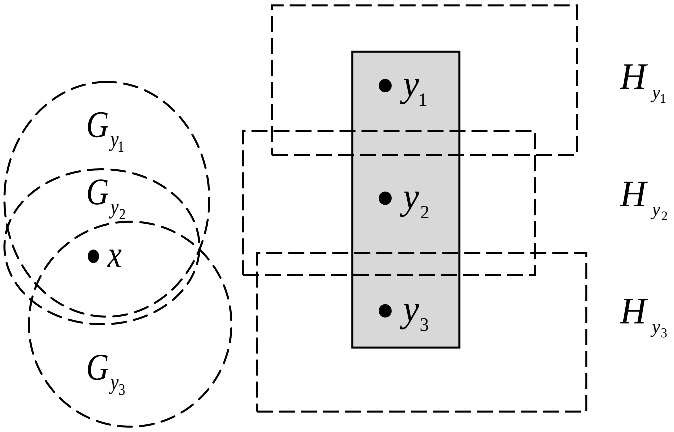
الفضاء (X,τ) هو فضاء T_2 – فإن:

$$.\forall x\in X, x\notin A, \exists G,H\in\tau : x\in G, A\subseteq H, G\cap H=\phi$$

البرهان

نفرض أن $A\subseteq X$ مجموعة متراصة و أن $x\notin A$. لأي عنصر آخر $y\in A$ فإن $x\neq y$ و بموجب أن الفضاء (X,τ) هو فضاء T_2 – ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان G_y, H_y بحيث يكون $x\in G_y, y\in H_y$, $G_y\cap H_y$.

بما أن $y\in A$ فإن العائلة $\{H_y : y\in A\}$ تؤلف غطاءً مفتوحاً للمجموعة المتراصة A ومن ثم فإنه يوجد غطاء جزئي منته للمجموعة A وليكن $\{H_{y_1}, H_{y_2},...,H_{y_m}\}$ بحيث يكون $A\subseteq H_{y_1}\cup H_{y_2}\cup...\cup H_{y_m}=H$



شكل (٦,١)

نفرض أن $G=G_{y_1}\cap G_{y_2}\cap...\cap G_{y_m}=G$ فإن المجموعة G مجموعة مفتوحة لأنها تقاطع عدد منته من مجموعات مفتوحة وكذلك المجموعة H مجموعة مفتوحة لأنها اتحاد لعدد منته من مجموعات مفتوحة أيضا وعليه فإن :

$$\begin{aligned} G\cap H &= G\cap(H_{y_1}\cup H_{y_2}\cup\ldots\cup H_{y_m}) \\ &= (G\cap H_{y_1})\cap(G\cup H_{y_2})\cup\ldots\cup(G\cap H_{y_m}) \\ &= \phi. \blacksquare \end{aligned}$$

نتيجة (٦,١)

كل مجموعة جزئية متراصة في الفضاء T_2- هي مجموعة مغلقة.

البرهان

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء الهاوسدورفي (X,τ)ولتكن $p\in X$ نقطة بحيث أن $p\notin A$. بما أن (X,τ) هو فضاء T_2- فإنه ، بناءً على النظرية السابقة ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان G,H بحيث يكون

$\forall p\in G, A\subseteq H, G\cap H=\phi$.

وهذا يقتضي أن $p\in G\subseteq A^c$ لكل $p\notin A$ و هذا يعني أن p نقطة داخلية للمجموعة A^c بما أن النقطة p نقطة اختيارية، فإن A^c جوار لكل نقطة من نقاطها و من ثم فهي مجموعة مفتوحة.■

المثال التالي يوضح أنه إذا لم يكن الفضاء T_2، فإنه قد توجد مجموعة متراصة ولكنها غير مغلقة.

مثال (٦,٩)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. نلاحظ أن الفضاء (X,τ) ليس T_2(تأكد من ذلك).

باختيار المجموعة $A=\{a,b\}$ ليست مغلقة ولكن نلاحظ أنها متراصة ، حيث أن كل غطاء مفتوح لها يحوي غطاءً جزئياً منتهياً(تأكد من ذلك؟).

نظرية (٦,٨)

بفرض أن $A, B \subseteq X$ مجموعتان متراصتان و غير متقاطعتين في الفضاء الهاوسدورفي (X, τ)، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان و غير متقاطعتين $G, H \subseteq X$ بحيث أن $A \subseteq G, B \subseteq H$.

البرهان :

نفرض أن A, B مجموعتان متراصتان في الفضاء الهاوسدورفي (X, τ) بحيث أن $A \cap B = \phi$. لكل نقطة $a \in A$ نجد أن $a \notin B$. بما أن المجموعة B متراصة وأن الفضاء (X, τ) هو فضاء هاوسدورف، فإنه من نظرية (٦,٧) توجد مجموعتان مفتوحتان G_a, H_a بحيث أن :

$$a \in G_a, B \subseteq H_a, G_a \cap H_a = \phi$$

وهذا يؤدى إلى أن $\{G_a, a \in A\}$ غطاء مفتوح للمجموعة المتراصة A و عليه فإنه يوجد غطاء جزئي منته للمجموعة A و ليكن

$$\{G_{a_1}, G_{a_2}, \ldots, G_{a_m}\}$$

حيث أن

$$A \subseteq \{G_{a_1} \cup G_{a_2} \cup \ldots \cup G_{a_m}\}$$

نفرض أن

$$H = \{H_{a_1} \cap H_{a_2} \cap \ldots \cap H_{a_m}\},\ G = \{G_{a_1} \cup G_{a_2} \cup \ldots \cup G_{a_m}\}$$

يتضح أن $A \subseteq G$ ، $B \subseteq H$، أن G مجموعة مفتوحة لكونها اتحاد مجموعات مفتوحة، كما أن H مجموعة مفتوحة لكونها تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة. إذاً توجد المجموعتان المفتوحتان G و H بحيث أن

$A \subseteq G, B \subseteq H$.

$$\begin{aligned} G \cap H &= (G_{a_1} \cup G_{a_2} \cup \ldots \cup G_{a_m}) \cap H \\ &= (G_{a_1} \cap H) \cup (G_{a_2} \cap H) \cup \ldots \cup (G_{a_m} \cap H) \\ &= \phi \cup \phi \cup \ldots \cup \phi = \phi. \end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب إثباته.■

نتيجة (٦,٢)

كل فضاء توبولوجى متراص وهاوسدورف هو فضاء عادي.

البرهان :

نفرض أن (X,τ) فضاء متراص و T_2 ، والمطلوب أثبات أن (X,τ) هو فضاء عادي. لاثبات ذلك نفرض ان F_1 و F_2 مجموعتان مغلقتان و غير متقاطعتين. بموجب أن (X,τ) فضاء متراص ، فإن كل من F_1 و F_2 مجموعة متراصة (من نظرية (**6,4**)). بما أن $F_1 \cap F_2 = \phi$ وبموجب كون الفضاء (X,τ) فضاء- T_2 فإنه – (من نظرية (**6,8**)) – توجد مجموعتان مفتوحتان H,G بحيث أن $G \cap H = \phi$, $F_1 \subseteq G, F_2 \subseteq H$ وهذا هو إثبات أن (X,τ) هو فضاء عادي.■

نظرية (٦,٩)

الدالة المتصلة $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ من الفضاء المتراص (X,τ) إلى الفضاء الهاوسدورفي (Y,υ) هي مغلقة.

البرهان

نفرض أن $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ متصلة من الفضاء المتراص (X,τ) إلى الفضاء الهاوذدورفي (Y,υ). نفرض أن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة ، عندئذ

تكـون هـذه المجموعـة متراصــة (انظـر نظريــة (٦,٤))، و بموجـب نظريــة ((٦,٣)) نجـد أن الصــورة المتصــلة $f(F)$ للمجموعــة المتراصــة F هــي مجموعـة متراصـة فـي Y. بمـا أن (Y,υ) هـو فضـاء $-\mathrm{T}_2$ و $f(F)$ مجموعـة متراصــــة ، فــإن $f(F)$ مجموعـــة مغلقـــة (نتيجـــة (٦,١)). إذاً الدالــــة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة. ■

نتيجة (٦,٣)

دالة التقابل المتصلة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء المتراص (X,τ) إلى الفضاء الهاوسدورفي (Y,υ) هي دالة توبولوجية.

تمرين محلول

بفـرض أن (X,τ) فضــاء تــام الانتظــام وأن A,B مجموعتــان مغلقتــان و غيــر متقــاطعتين . بـين أنــه إذا كانــت A مجموعــة متراصــة فإنــه توجـد دالــة متصــلة $f:X\to[0,1]$ بحيث يكون $f(A)=\{0\}$ و $f(B)=\{1\}$.

الحل

بما أن (X,τ) فضاء تام الانتظام و B مجموعـة مغلقـة فـي X ، فإنـه لكل نقطـة a في A ، حيث أن $a\notin B$ ، يمكن ايجاد دالة متصلة $g_a:X\to[0,1]$ بحيث أن $g_a(B)=\{1\}$ و $g_a(a)=\{0\}$. إذاً لكــــل $a\in A$ بحيــــث أن $a\notin B$ نجــــد أن $a\in g_a^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ و $B\subseteq g_a^{-1}(\{1\})$ ومن ثم نجد أن

$$A\subseteq \bigcup_{a\in A} g_a^{-1}([0,\tfrac{1}{2})) \text{ و } B\subseteq \bigcap_{a\in A} g_a^{-1}(\{1\})$$

بما أن A مجموعة متراصة و $A\subseteq \bigcup_{a\in A} g_a^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ ، فإن الغطاء المفتوح $\{g_a^{-1}([0,\frac{1}{2}))\}$ يحوي غطاءً منتهياً وليكن

$$g_{a_1}^{-1}([0,\tfrac{1}{2})),\, g_{a_2}^{-1}([0,\tfrac{1}{2})),\ldots,\, g_{a_m}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))$$

للمجموعة المتراصة A . أي أن

$A\subseteq g_{a_1}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))\cup g_{a_2}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))\cup\ldots\cup g_{a_m}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))$ و من ثم يكون

$B\subseteq \bigcap_{i=1}^{m} g_{a_i}^{-1}(\{1\})$. لذا نحصل على أن

$g_{a_i}(A)\subseteq[0,\tfrac{1}{2})$ و $g_{a_i}(B)\subseteq(\tfrac{1}{2},1]$.

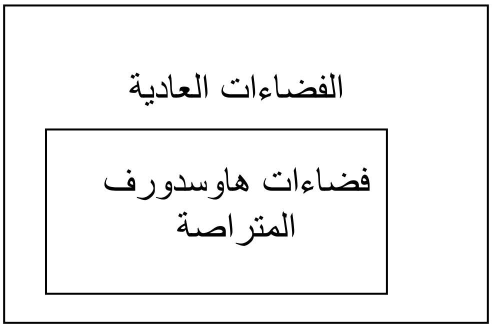
نفرض أن $h=\inf g_{a_i}$ ، فنجد أن $h(B)=1$ و $h(A)<\tfrac{1}{2}$

بتعريف الدالة $f:X\to[0,1]$ بالصيغة

$f(x)=2\max\{h(x)-\tfrac{1}{2},0\}$.

هذه الدالة متصلة وتحقق $f(A)=0$ و $f(B)=1$.

بعد أن عرفنا العلاقة بين مفهومي التراص ومسلمات الانفصال، فيمكننا تلخيص العلاقة بين التراص و مسلمات الانفصال في المخطط التالي:



شكل (٦,٢)

(٦,٣) الفضاءات المتراصة موضعياً Locally Compact Spaces

تعريف (٦,٤)

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ)متراص موضعياً إذا وجد جوار متراص لكل نقطة $x \in X$.

مثال (٦,١٠)

الفضاء المعتاد $(\mathbf{R},u)$متراص موضعياً حيث يوجد لكل $\mathrm{a} \in \mathbf{R}$ و لكل $\varepsilon > 0$ الجوار المغلق والمحدود $[\mathrm{a}-\varepsilon, \mathrm{a}+\varepsilon]$ ، وهذا الجوار متراص بناءً على نظرية هين بورل وعلى ذلك فإن $\mathbf{R}$ متراص موضعياً على الرغم كونه غير متراص(انظر مثال ٤,٦).

مثال (٦,١١)

الفضاء المنفصل (X,D) متراص محلياً لأن لكل $p \in X$ تكون $\{p\}$جوار متراص للنقطة p لأن المجموعة $\{p\}$ متراصة لكونها (منتهية)

نظرية (٦,١٠)

أي مجموعة مغلقة من فضاء متراص موضعيا تكون متراصة موضعياً.

البرهان

إذا كانت A مجموعة مغلقة من فضاء متراص موضعياً (X,τ). نفرض أن $a \in A$نقطة اختيارية. بما أن $a \in X$ و الفضاء (X,τ)متراص موضعياً، فإنه لكل $a \in A$ يوجد جوار متراص وليكن K_a. نفرض أن $C_a = K_a \cap A$. الآن C_aمجموعة مغلقة في K_a. إذاً C_a مجموعة متراصة من A. بما أن $a \in K_a^o \cap A \subseteq C_a$فإن C_a هي جوار متراص للنقطة a في Aو هذا يعني أن

المجموعة A متراصة موضعياً.■

نظرية (٦,١١)

إذا كان (X,τ) فضاء متراصاً موضعياً و $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة و مفتوحة ، فإن المجموعة $f(X)$ متراصة موضعيا.

البرهان

نفرض أن $y\in f(X)$ ، نختار $x\in X$ بحيث يكون $f(x)=y$. بما أن الفضاء (X,τ) متراص موضعياً ، فإنه يوجد جوار متراص N_x لكل $x\in X$.بما أن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة ، و بما أن N_x مجموعة متراصة ، فإن $f(N_x)$ مجموعة متراصة في $f(X)$. بما أن N_x^o مجموعة مفتوحة ، و الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، إذاً $f(N_x^o)$ مجموعة مفتوحة تحتوي على y لأن $x\in N_x^o$،و عليه فإن

$$y\in f(N_x^o)\subseteq f(N_x)$$

أي أن y لها جوار متراص و هو $f(N_x)$ و من ثم فإن $f(X)$ متراص موضعياً.■

نتيجة (٦,٤)

خاصية كون الفضاء متراصاً موضعياً هي خاصية توبولوجية.

نظرية (٦,١٢)

الفضاء- T_2 يكون متراص موضعياً إذا و فقط كان لكل $x\in X$ يوجد جوار مفتوح N_x بحيث تكون $\overline{N}_x$ مجموعة متراصة.

البرهان

أولاً: نفرض أن الفضاء (X,τ) متراص موضعياً وأن $x \in X$. إذاً يوجد جوار متراص للنقطة x وليكن H. بوضع $N_x = H^o$ و بعد ملاحظة أن H مجموعة مغلقة لأنها مجموعة متراصة في فضاء-T_2 (نتيجة (٦,١)) نحصل على الآتي:

$$\overline{N}_x = \overline{H^o} \subseteq \overline{H} = H$$

و لما كانت $\overline{N}_x$ مجموعة مغلقة و جزئية من مجموعة متراصة، إذاً $\overline{N}_x$ مجموعة متراصة.

ثانياً: نفرض ان (X,τ) فضاء-T_2 وأنه لكل $x \in X$ يوجد جوار جوار مفتوح N_x بحيث تكون $\overline{N}_x$ مجموعة متراصة، فإن $\overline{N}_x$ تعد جواراً متراصاً للنقطة x، وعلى ذلك فإن (X,τ) يكون متراصاً موضعياً.■

تمارين (٦,١)

(١) برهن أن أي فضاء-T_2 و متراص موضعياً هو فضاء منتظم.

(٢) برهن أن أي فضاء-T_2 و متراص موضعياً هو فضاء تام الانتظام.

(٣) بفرض أن (X,τ) فضاء هاوسدورف و متراص موضعياً وأن H,A مجموعتان جزئيتان من X، بحيث أن A مجموعة متراصة و H مجموعة مفتوحة و $A \subseteq H \neq X$. بين أنه توجد دالة متصلة $f: X \to [0,1]$ بحيث يكون $f(A) = \{0\}$ و $f(X-H) = \{1\}$.

(٤) لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ عدد منته من المجموعات الجزئية المتراصة من الفضاء التوبولوجي (X,τ). فبرهن أن $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ يكون أيضا مجموعة متراصة.

(٥) برهن أن الفضاء المتراص و المنتظم هو فضاء عادي.

(٦) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة و (X,τ) فضاء توبولوجي متراص و (Y,υ) فضاء $-\mathrm{T}_2$ فبرهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة مغلقة.

(٦,٤) فضاءات بيير Baire Spaces

أخيراً سنختم هذا الفصل بتعريف و دراسة فضاءات بيير، سوف نبين أن كل من الفضاءات المترية التامة وفضاءات هاوسدورف المتراصة هي أنواع من فضاءات بيير .

تعريف (٦,٥)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي . يقال أن الفضاء (X,τ) يسمى فضاء بيير إذا كان لكل عائلة A_n قابلة للعد من المجموعات الجزئية المغلقة في X بحيث أن $(A_n)^o=\phi$. فإن $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n)^o=\phi$.

مثال (٦,١٢)

مجموعة الاعداد القياسية Q لا تحقق شروط فضاء بيير لأن Q هي اتحاد قابل للعد لمجموعاتها الوحيدة العنصر وكذلك $\{x\}$ مجموعة مغلقة و $\{x\}^o=\phi$ لكل $x\in Q$.

مثال (٦,١٣)

مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة Z_+ تحقق شروط فضاء بيير لأن كل مجموعة جزئية في Z_+ مفتوحة و من ثم لا توجد محموعة جزئية ليس لها نقاط داخلية.

مثال (٦,١٤)

كل فضاء متري تام، هو فضاء بيير.

تمهيدية (٦,١)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن A_n عائلة قابلة للعد من المجموعات الجزئية المفتوحة و الكثيفة في X. الفضاء (X,τ) يكون فضاء بيير إذا و فقط إذا كان $\overline{\cap A_n} = X$.

البرهان

البرهان يمكن اسنباطة من ملاحظتين

(١) المجموعة $A \subseteq X$ تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $X - A$ مغلقة.

(٢) $B^O = \phi \Leftrightarrow \overline{X - B} = X$.■

نظرية (٦,١٣)

كل فضاء توبولوجي متراص وهاوسدورف، يكون فضاء بيير.

البرهان

نفرض أن $\{A_n\}$ عائلة معدودة من المجموعات المغلقة في (X,τ) بحيث أن $(A_n)^o = \phi$ في X ونحاول اثبات أن $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^o = \phi$ في X. لاثبات ذلك نفترض أن $G_0 \neq \phi$ مجموعة جزئية مفتوحة في X .

بما أن $(A_n)^o = \phi$ فإننا نستطيع أن نجد نقطة x من G_0 لا تنتمي إلى أي من المجموعات المغلقة A_n.

بالنسبة للمجموعة الأولى A_1 فإنها لا تحوي المجموعة G_0، لذا باختيار النقطة $y \in G_0$ بحيث أن $y \notin A_1$. بمان أن الفضاء (X,τ) منتظم (متراص و T_2)

وأن A_1 مجموعة مغلقة فإنة توجد محموعة مفتوحة G_1 بحيث أن

$y \in G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq G_0$ و $y \in G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq A_1^c$.

أي أن

$\overline{G_1} \subseteq G_0$ و $\overline{G_1} \cap A_1 = \phi$.

بتكرار عملية اختيار المجموعات المغلقة A_n، فإنه يمكن اختيار مجموعة مفتوحة G_{n-1}، وباختيار نقطة من G_{n-1} بحيث لا تقع في المجموعة المغلقة A_n.

فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_n بحيث أن

$\overline{G_n} \subseteq G_{n-1}$ و $\overline{G_n} \cap A_n = \phi$.

مما سبق ، نستنتج أن $\cap \overline{G_n} \neq \phi$. فإذا كانت $x \in \cap \overline{G_n}$ فإن $x \in G_0$ لأن $\overline{G_1} \subseteq G_0$ و لكل n النقطة x لا تنتمي إلى A_n لأن $\overline{G_n} \cap A_n = \phi$. برهان أن $\cap \overline{G_n} \neq \phi$ يعتمد على كون الفضاء X متراص و هاوسدورف . فإذا كان X فضاء هاوسدورف ومتراص، باعتبار المتوالية المتداخلة

$$\overline{G}_1 \supset \overline{G}_2 \supset \ldots$$

من المجموعات الغير خالية من X. العائلة $\{\overline{G}_n\}$ تحقق خاصية التقاطع المنته لأن الفضاء متراص و من ثم يكون $\cap \overline{G_n} \neq \phi$.

نظرية (٦,١٤)

أي فضاء جزئي مفتوح من فضاء بيير يكون فضاء بيير.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء بيير وأن (A,τ_A) فضاء جزئي مفتوح من الفضاء (X,τ). نفرض أن $\{B_n\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المغلقة في (A,τ_A) بحيث أن $(B_n)^o=\phi$ في (A,τ_A) ونحاول اثبات أن $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B_n)^o=\phi$ في (A,τ_A). لاثبات ذلك نفترض أن $\overline{B_n}$ هو انغلاق B_n في (X,τ)، فإن $\overline{B_n}\cap A=B_n$. بما أن (X,τ) هو فضاء بيير فإن $(\overline{B}_n)^o=\phi$. فإذا كانت $G\in\tau$ مجموعة غير خالية بحيث أن $G\subseteq\overline{B}_n$، فإن هذا يقتضي أن $G\cap A$ مجموعة مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A محتواة في $\overline{B}_n$ و هذا يتعارض مع الفرض بأن $(B_n)^o=\phi$

فإذا كان اتحاد المجموعات B_n يحوي مجموعة غير خالية $W\in\tau_A$، فإن اتحاد المجموعات $\overline{B}_n$ يحوي أيضا المجموعة W التي تنتمي أيضا للتوبولوجي τ لأن $A\in\tau$ و لكن $(\overline{B}_n)^o=\phi$ في X و هذا يتعارض مع الفرض بأن الفضاء (X,τ) هو فضاء بيير.■

تمارين (٦,٢)

(١) بين أن كل فضاء هاوسدورف متراص موضعياً هو فضاء بيير.

(٢) بين أنه إذا كانت كل نقطة $x\in X$ لها جوار هو فضاء بيير ، فإن X يكون فضاء بيير.

(٣) بين أن مجموعة الاعداد القياسية ليست فضاء بيير

(٤) بين أن كل مجموعة مفتوحة من فضاء بيير هي فضاء بيير.

(٥) بين أن كل فضاء متري تام هو فضاء بيير.

(٦) بالاعتماد على نظرية بيير أثبت أن فضاء نيمتزكي ليس فضاءً عادياً.

(٧) اثبت أن أي فترة في R لا يمكن أن تساوي اتحاد لانهائي قابل للعد لمجموعات مغلقة و غير متقاطعة و غير خالية.

(٨) اثبت أن $R \setminus Q$ يمكن كتابته كتقاطع قابل للعد لمجموعات مفتوحة من R وأن Q لا يمكن كتابته كتقاطع قابل للعد لمجموعات مفتوحة.

(٩) لتكن $f : R \to R$ دالة تحقق $\lim_{n \in N, n \to \infty} f(nx) = 0$ لكل $x \in R$

اثبت أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

(١٠) لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق مالانهاية من المرات على $(0,1)$ بحيث أنه لكل x في $(0,1)$ يوجد $k \in N$ بحيث أن المشتقة النونية $f^{(n)}(x) = 0$. اثبت أن f كثيرة حدود.

الفصل السابع

الترابط
Connectedness

مقدمة

لقد تعاملنا إبان دراستنا لحساب التفاضل و التكامل و مبادئ التحليل مع نظرية مهمة من النظريات المتعلقة بالدوال المتصلة ألا و هي نظرية القيمة البينية أو القيمة الوسيطة (Intermediate value theorem) والتي كانت تنص على أنه إذا كانت $f:[a,b]\to R$ دالة متصلة وكان r عدد حقيقي يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد عنصر $c\in[a,b]$ بحيث أن $f(c)=r$. هذه النظرية تعتمد على خاصية من خواص الفترة$[a,b]$ تسمى خاصية الترابط والتي من خلالها ينظر للفترة $[a,b]$ على إنها كما لو كانت قطعة واحدة غير قابلة للتجزئة لفترتين مفتوحتين غير متقاطعتين.

الفضاء التوبولوجي المترابط يمكن تخيله كما لو كان شكلاً هندسياً مكون من قطعة واحدة فقط ولا يمكن تخيله مكوناً من مجموعات مفتوحة غير خالية وغير متقاطعة.

هذا الفصل مخصص لدراسة مفهوم الترابط وخواصه على الفضاءات التوبولوجية . سوف نبدأ أولاً بدراسة مفهوم المجموعات الغير متلاصقة (separated sets) ثم المجموعات المترابطة وبعد ذلك ننتقل لتعريف ودراسة

الفضاء التوبولوجي المترابط وخواصه و كذلك مفاهيم أخرى من ترابط الفضاءات التوبولوجية مثل الترابط الموضعي و الترابط المساري.

(٧,١) المجموعات الغير متلاصقة Separated sets

قبل أن نتعرض لتعريف ما هو المقصود بالمجموعة المترابطة وغير المترابطة ، دعنا نتخيل المجموعة $A \neq \phi$ كما لو كانت خريطة لأحدى الدول المحاطة بمياه البحر من جميع جوانبها. فكيف نفرق بين حال كون هذه الدولة مكونة من جزيرة واحدة أو أنها عبارة عن اتحاد جزيرتين أو أكثر ؟ سننظر لخريطة الدولة المكونة من جزيرة واحدة كمجموعة مترابطة ، أما الحالة الثانية فتمثل مجموعة غير مترابطة.

سنبدأ أولاً بتعريف المجموعات الغير متلاصقة ، كما في التعريف التالي:

تعريف (٧,١)

المجموعتان $A\,,\,B$ فى الفضاء المترى (X,τ) يقال أنهما مجموعتين غير متلاصقتين إذا تحقق الشرطين :

$$\overline{A} \cap B = \phi\,,\; A \cap \overline{B} = \phi$$

ويقال أنهما متلاصقتان إذا كان

$$A \cap \overline{B} \neq \phi \;\text{ أو }\; \overline{A} \cap B \neq \phi$$

مثال (٧,١)

١) في الفضاء العادي (R,u):

- إذا كانت $A_1 = (0,1),\; B_1 = (1,2), C_1 = [2,3)$ فإن المجموعتان A_1, B_1 غير متلاصقتين لأن

. $A_1 \cap \overline{B_1} = (0,1) \cap [1,2] = \phi$ و $\overline{A_1} \cap B_1 = [0,1] \cap (1,2) = \phi$

ولكن B_1, C_1 متلاصقتين لأن $\overline{B_1} \cap C_1 = [1,2] \cap [2,3) = \{2\} \neq \phi$.

- إذا كانت $A_2 = (0,\infty),\ B_2 = (-\infty,0), C_2 = (-\infty,0]$ فإن المجموعتان A_2, B_2 غير متلاصقتين ، بينما B_2, C_2 متلاصقتين.

٢) في الفضاء R^2 ،إذا كانت

$$A_3 = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 < 1\}$$
$$B_3 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$$
$$C_3 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$$

فإن المجموعتان A_3, B_3 غير متلاصقتين ، بينما B_3, C_3 متلاصقتين.

نظرية (٧,١)

فــى الفضــاء التوبولــوجي (X,τ)،أي مجمــوعتين غيــر متقــاطعتين $A, B \in \tau$ تكونان غير متلاصقتين .

البرهان

بفرض أن $A, B \subseteq X$ بحيث أن $A \cap B = \phi$. بما أن المجموعتين A^c, B^c مغلقتان، فإن:

$$(i)\ B \subseteq A^c \Rightarrow B \subseteq \overline{B} \subseteq A^c \Leftrightarrow \overline{B} \cap A = \phi$$
$$(i)\ A \subseteq B^c \Rightarrow A \subseteq \overline{A} \subseteq B^c \Leftrightarrow \overline{A} \cap B = \phi$$

أي أن A, B غير متلاصقتين. ■

نظرية (٧,٢)

إذا كانـت A, B مجمـوعتين غيـر متلاصـقتين فـى الفضـاء التوبولـوجي (X,τ) وكانت $C \subseteq A, D \subseteq B$ فإن C, D مجموعتان غير متلاصقتين أيضا.

البرهان

بما أن المجموعتين A,B غير متلاصقتين فإن :

$(i)\ A\cap\overline{B}=\phi$

$(ii)\ \overline{A}\cap B=\phi$

وبما أن $C\subseteq A\ ,\ D\subseteq B$،فإن

$$C\cap\overline{D}\subseteq A\cap\overline{B}=\phi$$

وأيضا فإن :

$$\overline{C}\cap D\subseteq\overline{A}\cap B=\phi$$

وهذا هو إثبات عدم تلاصق المجموعتين C,D.■

نظرية (٧,٣)

المجموعتان المغلقتان F_1,F_2 فى الفضاء التوبولوجي (X,τ) تكونان غير متلاصقتين إذا وفقط إذا كان $F_1\cap F_2=\phi$

البرهان

نفرض أن F_1,F_2 مجموعتان غير متلاصقتين ومغلقتان فإن :

$$\overline{F_1}\cap F_2=F_1\cap\overline{F_2}=F_1\cap F_2=\phi\ .■$$

نتيجة (٧,١)

إذا كان (X,τ) فضاء T_1- فإن أي مجموعتين منتهيتين و غير خاليتين وغير متقاطعتين في X يكونان غير متلاصقتين .

البرهان

بفرض أن $A,B\subseteq X$ مجموعتين منتهيتين حيث أن

$$A\cap B=\phi\ \ ,A\neq\phi\ ,B\neq\phi$$

بما أن كل مجموعة منتهية في فضاء T_1- هي مجموعة مغلقة وذلك لكونها اتحاد مجموعـات منتهيـة وحيـدة العنصـر فـإن المجمـوعتين A,B مغلقتـان وعليـه يكون $\overline{A}\cap B = A\cap\overline{B} = A\cap B=\phi$.■

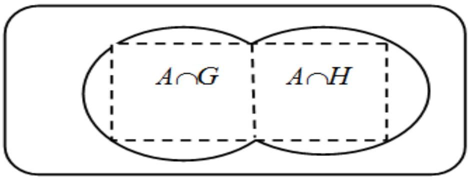
تعريف (٧,٢)

في أي فضاء توبولوجي (X,τ). يقال للمجموعتين $G,H\in\tau$ انهما مجموعتي انفصال للمجموعة الجزئية $A\subseteq X$ إذا تحقق الآتي:

$(i)\ A\cap G\neq\phi\ ,\ A\cap H\neq\phi$.

$(ii)\ (A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi$.

$(iii)\ (A\cap G)\cup(A\cap H)=A.$



شكل (٧,١)

مثال (٧,٢)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ وأن التوبولوجي المعرف على هذه المجموعة هو $\tau=\{X,\phi,\{c\},\{a,b,c\},\{c,d,e\}\}$. المجموعتين :

$$H=\{c,d,e\}\in\tau \quad G=\{a,b,c\}\in\tau$$

هما مجموعتي انفصال للمجموعة $A=\{a,d,e\}$ لأن:

(1) $A\cap G=\{a\}\neq\phi\ ,\ A\cap H=\{d,e\}\neq\phi$

(2) $(A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi$

(3) $(A\cap G)\cup(A\cap H)=A.$

تعريف (٧,٣)

يُقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) فضاءً مترابطاً إذا كان من غير الممكن التعبير عن X كإتحاد لمجموعتين غير خاليتين ومفتوحتين وغير متلاصقتين. خلاف ذلك يقال أن الفضاء غير مترابط (disconnected).

من هذا التعريف يمكن القول بأن الفضاء مترابط إذا لم توجد مجموعتان $G,H \in \tau$ بحيث يكون

$$X = G \cup H \, , \, \overline{G} \cap H = \phi \, , \, G \cap \overline{H} = \phi \, , \, G \neq \phi \, , \, H \neq \phi$$

ملاحظات (٧,١)

حيث أن $G,H \in \tau$ و $G \neq \phi \, , \, H \neq \phi$ فإن الشرط :

$\overline{G} \cap H = \phi \, , \, G \cap \overline{H} = \phi$ يكافئ أن $G \cap H = \phi$

وذلك لأن $G \subseteq \overline{G}, \, H \subseteq \overline{H}$. لذا يمكن القول بأن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون مترابطاً إذا تحقق أحد الشرطين:

(i) إذا لم توجد فيه مجموعتان غير خاليتين $G,H \in \tau$ بحيث أن $X = G \cup H \, , \, G \cap H = \phi$.

(ii) إذا كانت $A, A^c \in \tau$ ، فإن $A = \phi$ أو $A = X$. أي أن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد في (X,τ).

ملاحظات (٧,٢)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون غير مترابط إذا وجدت فيه مجموعة جزئية غير خالية $X \neq A$ بحيث تكون A مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت لأنه إذا كانت $A \subseteq X$ مجموعة جزئية فعلية مفتوحة و مغلقة فإن $A^c = X - A$ تكون مجموعة مغلقة و مفتوحة و حيث أن $A \cap A^c = \phi$ و $A \cup A^c = X$. و من ذلك نستنتج أن

الفضاء (X,τ) فضاء غير مترابط.

مثال (٧,٣)

الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D) ، حيث أن X تحتوي على عنصرين على الأقل ، هو فضاء غير مترابط وذلك لأن أي مجموعة جزئية فعلية فيه تكون مفتوحة ومغلقة.

مثال (٧,٤)

الفضاء التوبولوجي الغيرمتقطع (X,I) هو فضاء مترابط وذلك لأن المجموعتين المفتوحتين و المغلقتين معاً هما فقط X,ϕ .

مثال (٧,٥)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. الفضاء التوبولوجي (X,τ) مترابط وذلك لأن المجموعتين المفتوحتين و المغلقتين معاً هما فقط X,ϕ .

مثال (٧,٦)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. الفضاء التوبولوجي (X,τ) غير مترابط لأنه توجد في X المجموعتين $\{a\},\{b,c,d,e\}$كل منهما مفتوحة و مغلقة و ان $\{a\}\cup\{b,c,d,e\}=X$.

تعريف (٧,٤)

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي و $A\subseteq X$. يقال أن المجموعة A غير مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) غير مترابط. أما إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) مترابط فإن المجموعة A تسمى مترابطة.

مثال (٧,٧)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. فإذا كانت $A=\{b,d,e\}$ و $B=\{a,b\}$. فإن المجموعة A مترابطة وذلك لأنه لا توجد مجموعتان منفصلتان و مفتوحتان و غير خاليتين في الفضاء الجزئي (A,τ_A) حيث أن $\tau_A=\{A,\phi,\{b\}\}$. بينما المجموعة $B=\{a,b\}$ غير مترابطة لأنه توجد المجموعتان المنفصلتان و غير الخاليتان $\{a\},\{b\}$ في الفضاء الجزئي (B,τ_B)، حيث أن $\tau_B=\{B,\phi,\{a\},\{b\}\}$.

مثال (٧,٨)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. المجموعة $A=\{b,d,e\}$ مترابطة وذلك أنه في التوبولوجي الجزئي $\tau_A=\{A,\phi,\{d\}\}$ لا توجد مجموعات مفتوحة ومغلقة في آن واحد غير المجموعتين A,ϕ .

نظرية (٧,٤)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً. العبارات التالية متكافئة:

(i) الفضاء (X,τ) مترابط.

(ii) لا يمكن التعبير عن X كإتحاد مجموعتين غير خاليتين مغلقتين و غير متقاطعتين.

(iii) إذا كانت $A,A^c\in\tau$ ، فإن $A=\phi$ أو $A=X$.

(iv) لأي مجموعة جزئية فعلية $A\neq X$ من X يكون $b(A)\neq\phi$.

البرهان.

$(i) \Leftarrow (ii)$:

نفرض العكس، أي توجد مجموعتين مغلقتين A,B في X بحيث أن

$$X = A \cup B, A \cap B = \phi, A \neq \phi, B \neq \phi$$

و بالتالي فإن A^c, B^c مجموعتين مفتوحتين حيث أن

$$X = A^c \cup B^c, A^c \cap B^c = \phi$$

وهذا يتعارض مع الفرض بأن الفضاء (X,τ) مترابط.

$(ii) \Leftarrow (iii)$:

نفرض العكس، أي توجد مجموعة جزئية A من X مفتوحة و مغلقة في آن واحد بحيث أن $A \neq \phi, A \neq X$ فإن هذا يقتضي أن $A^c \neq X, A^c \neq \phi$ و حيث أن $X = A \cup A^c, A \cap A^c = \phi$ وعليه تكون المجموعتين A, A^c مغلقتين وغير متقاطعتين و اتحادهما يساوي X و هذا يتعارض مع الفرض (ii) و من ثم فإن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المغلقتان و المفتوحتان في آن واحد في X .

$(iii) \Leftarrow (iv)$:

نفرض أن A مجموعة جزئية فعلية من X و غير خالية بحيث أن $b(A) = \phi$ ولكن

$$\overline{A} = A^o \cup b(A) \Rightarrow \overline{A} = A^o$$

و هذا يعني أن $A = \overline{A}, A = A^o$ أي أن A مجموعة مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت و هذا يتعارض مع الفرض (iii).

$(iv) \Leftarrow (i)$:

نفرض أن الفضاء (X,τ) غير مترابط ، لذا يمكن ايجاد مجموعة جزئية فعلية

A في X بحيث تكون مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت أي أن

$A=\overline{A}, A^c=\overline{A^c}$. لذا فإن $b(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}=A\cap A^c=\phi$ وهذا يتعارض مع

الفرض (iv).■

تمهيدية (٧,١)

الفترة المغلقة $[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$ في الفضاء التوبولوجي العادي

(R,u) تكون مترابطة.

البرهان

نفرض أن الفترة المغلقة $[a,b]$ ليست مترابطة لذا توجد مجموعتان مفتوحتان

G,H بحيث يكون

$$[a,b]=G\cup H, G\cap\overline{H}=\phi,\ \overline{G}\cap H=\phi$$

نفرض أن $a\in G, b\in H$ و أن $a<b$. نظراً لكون المجموعة $G\cap[a,b]$

غير خالية محدودة من أعلى بالعنصر b فيمكن فرض أن

$$c=\sup(G\cap[a,b])$$

وعليه فإن $c\in G$ أو $c\in H$. فإذا كانت $c\in G$ و $G\neq\phi$ مجموعة مفتوحة

فإنه يوجد $r>0$ بحيث أن $(c-r,c+r)\subseteq G$. و هذا يعني أن $c+r\in G$ و

$c+r<b$ و هذا يتعارض مع تعريف العنصر c لأن $c=\sup(G\cap[a,b])$.

أما في حالة $c\in H$ و $H\neq\phi$ مجموعة مفتوحة فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن

$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subseteq H$ و هذا يعني أن $c+\varepsilon\in H$ و يناقض الفرض بأن

$c=\sup(G\cap[a,b])$ و من ثم فإن $[a,b]$ مجموعة مترابطة.■

نظرية (٧,٥)

أي مجموعة $A \subseteq R$ تحوي أكثر من عنصر تكون مترابطة إذا وفقط إذا كانت فترة.

البرهان

أولاً سنبرهن إنه إذا كانت $A \subseteq R$ مجموعة مترابطة تحوي أكثر من عنصر فإنها تكون فترة.

نفرض العكس، أي أن A ليست فترة و هذا يعني أنه يوجد $a,b \in A$ و كذلك عدد $c \in R$ بحيث أن $a < c < b$ و لكن $c \notin A$ و من ثم يمكن التعبير عن المجموعة A في الصورة $A = G \cup H$ حيث أن

$$H = A \cap (c,\infty),\ G = (-\infty, c) \cap A.$$

بما أن $a \in G$, $b \in H$ فإن المجموعتين $G \neq \phi, H \neq \phi$ وكل منهما مجموعة مفتوحة في A وكذلك $G \cap H = \phi$ وهذا يعني أن A مجموعة غير مترابطة وهذا تعارض.

ثانياً: سنكمل البرهان بتوضيح أنه إذا كانت A فترة ، فإنه من الضروري أن تكون مترابطة. خطتنا في الاثبات هي الافتراض بأن المجموعة A ليست مترابطة بهدف الوصول لتعارض مع الفرض بأنها فترة. نفرض أن G, H هما مجموعتي انفصال المجموعة الغير مترابطة A. بما أن كل من G و H مجموعة غير خالية وأن $G \cap H = \phi$ ، فإنه يمكن اختيار نقطة $a \in G$ و $b \in H$ بحيث أن $a \neq b$. نفترض أن $a < b$. بما أن A فترة ، فإن $[a,b] \subseteq A$ و كل نقطة في $[a,b]$ تقع في G أو في H. نفرض أن $c = \sup([a,b] \cap G)$. فإنه يتضح أن $a \le c \le b$ ومن ثم نجد أن $c \in A$. بما أن G مجموعة مغلقة في A فإن تعريف العنصر c يبين أن $c \in G$. من هذا نستخلص أن $c < b$. و ايضاً من تعريف

العنصر c نجد أنه، لكل $\varepsilon > 0$ ، فإن العنصر $c+\varepsilon$ ينتمي للمجموعة H بحيث أن $c+\varepsilon \leq b$ و بما أن H مغلقة في A ، فإن $c \in H$. الآن لدينا $c \in G$ و $c \in H$ و هذا يتعارض مع الفرض بأن $G \cap H = \phi$.■

نظرية (٧,٦)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن G,H مجموعتي انفصال للفضاء X. إذا كانت A مجموعة جزئية مترابطة في X. فإن A تقع بالكامل داخل المجموعة G او داخل المجموعة H.

البرهان

بما أن كل من G و H مجموعتي انفصال للمجموعة X فإن $G \cap H = \phi, G \cup H = X$ حيث أن $G,H \in \tau$ و من ثم يكون $(A \cap H), (A \cap G) \in \tau_A$ و أيضا نجد أن

$(i)\ (A \cap H) \cap (A \cap G) = A \cap (G \cap H) = A \cap \phi = \phi$

$(ii)\ (A \cap H) \cup (A \cap G) = A \cap (G \cup H) = A \cap X = A$

وهذا يعني أن $(A \cap H), (A \cap G)$ هما مجموعتي انفصال للمجموعة A و هذا يتعارض مع الفرض بأن A مترابطة. لذا فإن واحدة من المجموعتين يجب أن تكون خالية. فإذا كانت $(A \cap H) = \phi$ فإن $A \subseteq H^c \subseteq G$ أي أن A تقع بالكامل داخل المجموعة G او داخل المجموعة H.■

نتيجة (٧,٢)

إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ) فإنه لأي مجموعة جزئية B من X بحيث أن $B, B^c \in \tau$. فإن $A \subseteq B$ أو $A \subseteq B^c$.

البرهان

بما أن $B, B^c \in \tau$ فإن $X = B \cup B^c$ و من ثم تقع A بالكامل في B أو في B^c. ■

نتيجة (٧,٣)

إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ) و المجموعة B أي مجموعة جزئية من X بحيث أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ فإن المجموعة B تكون أيضاً مترابطة.

البرهان:

نفرض أن A مجموعة مترابطة و أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. نفترض أن B غير مترابطة وأن المجموعتين $G, H \in \tau$ هما مجموعتا انفصال لها. أي أن

$$B \subseteq G \cup H, B \cap G \neq \phi, B \cap H \neq \phi, (B \cap G) \cap (B \cap H) = \phi.$$

بناءاً على النظرية السابقة فيجب أن تقع A بالكامل داخل المجموعة $(B \cap G)$ أو داخل المجموعة $(B \cap H)$. نفترض أن $A \subset B \cap H$ فإن هذا يؤدي أن $\overline{A} \subset \overline{H}$ وحيث أن $G \cap \overline{H} = \phi$ فإن $\overline{A} \cap G = \phi$ وحيث أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ فإن $B \cap G = \phi$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن $B \cap G \neq \phi$. إذاً B مترابطة.■

مما سبق ، فإذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ) فإن $\overline{A}$ تكون أيضاً مترابطة.

تمرين محلول

إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ).

(i) هل A^o مترابطة؟.

(ii) هل $b(A)$ مترابطة؟.

الحل

(i) إذا كانت A مجموعة مترابطة في X ، فليس من الضروري أن تكون A^o مترابطة كما يتضح من المثال التالي:

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,d\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. بفرض أن $A=\{a,b,c\}$ مجموعة جزئية من X .

واضح أن A مترابطة ، حيث لا يمكن التعبير عنها كإتحاد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين ، بينما $A^o=\{a,b\}$ هي مجموعة غير مترابطة حيث توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين هما $\{a\},\{b\}$ و يحققان $A^o=\{a\}\cup\{b\}$.

(ii) إذا كانت A مجموعة مترابطة في X ، فليس من الضروري أن تكون $b(A)$ مترابطة كما يتضح من المثال التالي:

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. بفرض أن $A=\{a,c,e\}$ مجموعة جزئية من X . بإيجاد التوبولوجي النسبي $\tau_A=\{A,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,e\}\}$ نجد أن المجموعة A مترابطة . بما أن $A^o=\{a,c\}$, $ext(A)=(\{b,d\})^o=\phi$ فإن $b(A)=\{b,d,e\}$ بإيجاد التوبولوجي النسبي $\tau_{b(A)}=\{b(A),\phi,\{d\},\{b,e\}\}$ نجد أن المجموعة $b(A)=\{b,d,e\}$ ليست مترابطة.

نتيجة (٧,٤)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون مترابط إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة ومترابطة.

البرهان:

بفرض أن A مجموعة كثيفة ومترابطة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) فإن $A\subseteq\overline{A}=X$ وحيث أن $\overline{A}$ مترابطة فإن X تكون أيضاً مترابطة.■

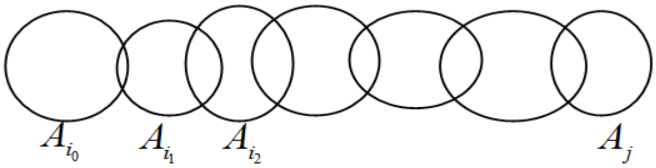
نظرية (٧,٧)

بفرض أن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية المترابطة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) ، بحيث أنه لأي زوج i,j ،من الأدلة، توجد أدلة منتهية $i=i_0,i_1,i_2,...,i_{n-1},i_n=j$ بحيث أن $A_{i_k}\cap A_{i_{k+1}}\neq\phi$ لكل $0\leq k\leq n-1$.

فإن المجموعة $A=\cup_i A_i$ مترابطة.

البرهان

نفرض أن $A=\cup_i A_i$ ليست مترابطة وأن G,H هما مجموعتا انفصال المجموعة A. نختار الدليل $i\in I$. ترابط عناصر العائلة $\{A_i\}_{i\in I}$ يقتضي أن $A_i\subseteq G$ أو $A_i\subseteq H$. نفرض أن $A_i\subseteq G$. نفرض أن $j\in I$ دليل آخر وأن $i=i_0,i_1,i_2,...,i_{n-1},i_n=j$.



شكل (٧,٢)

بما أن $G\cap A_{i_1}\neq\phi$،فإن G تحوي A_{i_1} و هذا يقتضي أن $G\cap A_{i_2}\neq\phi$ و من ثم نجد أن G تحوي A_{i_2} و بالاستقراء الرياضي يمكن أن نجد أن G تحوي A_{i_n}.

أي أن G تحوي A_j. لذا فإن المجموعة G تحوي $A=\cup_i A_i$ ومن ثم يكون $G=A$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن H مجموعة غير خالية. إذا $A=\cup_i A_i$

مترابطة.■

نتيجة (٧,٥)

بفرض أن $\{A_i\}$ عائلة من المجموعات الجزئية المترابطة في الفضاء (X,τ) .

(i) إذا وجد عنصر من العائلة يتقاطع مع باقى عناصر العائلة، فإن المجموعة $\cup_i A_i$ مترابطة.

(ii) إذا كان $\cap A_i \neq \phi$، فإن المجموعة $\cup_i A_i$ مترابطة.

نظرية (٧,٨)

الصورة المتصلة للفضاء المترابط تكون مجموعة مترابطة.

البرهان

نفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي المترابط (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,δ). نريد اثبات أن $f(X)$ مجموعة جزئية مترابطة في Y. لإثبات ذلك نفترض العكس بأن $f(X)$ غير مترابطة وأن $G,H\in\delta|_{f(X)}$ هما مجموعتي انفصال المجموعة $f(X)$. لذا نجد أن

$$f(X)=G\cup H, G\cap H=\phi, G\neq\phi, H\neq\phi$$

و من ذلك نستنتج أن

$$X = f^{-1}(G)\cup f^{-1}(H)\ ,\ f^{-1}(G)\cap f^{-1}(H)=\phi$$

حيث أن $f^{-1}(G),\ f^{-1}(H)$ مجموعتين جزئيتين مفتوحتين في X و غير متقاطعتين فإنهما مجموعتي إنفصال للمجموعة X و هذا يتعارض مع الفرض بأن X مجموعة مترابطة.■

نتيجة (٧,٦)

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ دالة متصلة و شاملة من الفضاء التوبولوجي

المترابط (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,δ) فإن الفضاء (Y,δ) مترابط.

نتيجة (٧,٧)

خاصية أن يكون الفضاء مترابط هي خاصية توبولوجية.

نظرية (٧,٩)

مدى الدالة المتصلة $f: X \to R$ والمعرفة على الفضاء المترابط (X,τ) عبارة عن فترة.

البرهان

بما أن الدالة متصلة ، فإن $f(X) \subseteq R$ مجموعة مترابطة وبناءً على نظرية (٧,٨) فإنها تكون فترة.■

نظرية (٧,١٠)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون غير مترابط إذا وفقط إذا وجدت دالة متصلة وشاملة من X إلى الفضاء المتقطع $\{0,1\}$.

البرهان

نفرض أن الفضاء (X,τ) غير مترابط وأن A,B هما مجموعتي انفصال X. أي أن $X = A \cup B$. لذا يمكن تعريف دالة متصلة $f: X \to \{0,1\}$ من خلال الصيغة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \in A \\ 1 & if \quad x \in B \end{cases}$$

هذا التعريف متحقق نظرا لكون المجموعتين A,B غير متلاصقتين وأن $X = A \cup B$. بما أن A,B مجموعتين غير خاليتين وكل منهما مفتوحة، فإن الدالة f متصلة وشاملة.

من ناحية أخري،بفرض أن (X,τ) فضاء مترابط وأنه توجد دالة متصلة وشاملة $f:X\to\{0,1\}$ ، فإنه من نظرية (٧,٧) يكون لدينا الفضاء المتقطع $\{0,1\}$ مترابطاً و هذا تعارض.■

مثال (٧,٩)

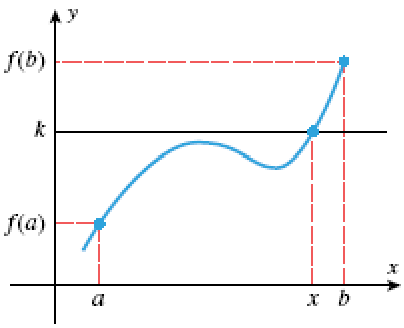
في المستوي R^2 ، الدائرة $C=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ تعتبر مجموعة مترابطة وذلك لكونها صورة متصلة للفترة المترابطة $[0,1]$ وذلك باعتبار الدالة المتصلة

$$f:[0,1]\to C$$

و المعرفة بالصيغة $f(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$ حيث أن $f([0,1])=C$.

من خلال دراستنا لمقررات التحليل و حساب التفاضل نعلم أن نظرية القيمة البينة تنص على التالي:

إذا كانت $f:[a,b]\to R$ دالة متصلة و كان $k\in R$ أي عدد حقيقي يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل العدد x في الفترة $[a,b]$ بحيث يكون $f(x)=k$.



شكل (٧,٣)

النظرية التالية تعتبر تعميم لنظرية القيمة البينة .

نظرية (٧,١١)

بفرض أن $f : X \to R$ دالة متصلة حيث أن (X,τ) فضاء مترابط . فإذا كانت $a,b \in X$ و $k \in R$ عنصر يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد $x \in X$ بحيث يكون $f(x)=k$.

تعتبر نظرية القيمة البينية الخاصة بحساب التفاضل و التكامل حالة خاصة من هذه النظرية وذلك يحدث لو أخذنا $X=[a,b] \subset R$.

البرهان

بما أن (X,τ) فضاء مترابط و $f : X \to R$ دالة متصلة فإن $f(X) \subset R$ مجموعة مترابطة و من ثم فهي فترة و حيث أن $f(a), f(b) \in f(X)$ و $f(a) < k < f(b)$ فإن $k \in f(X)$ و عليه يوجد $x \in X$ بحيث أن $f(x)=k$.■

(٧,٢) مركبات الفضاءات التوبولوجية

Components of Topological Spaces

بفرض أن X فضاء اختياري ، فإنه قد توجد طرق طبيعية لتقسيم هذا الفضاء إلى أجزاء مترابطة (أو مترابطة مسارياً). هذه الأجزاء سوف يطلق عليها مركبات الفضاء أو المركبات المترابطة.

قبل الشروع في تعريف و دراسة مفهوم المركبات المترابطة (Connected components)، دعنا نمهد لذلك بالتمهيدية التالية:

تمهيدية (٧,٢)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $\sim$ علاقة معرفة على X بالصورة:

$x \sim y$ إذا وجدت مجموعة مترابطة $A \subset X$ بحيث أن $x, y \in A$

فإن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

البرهان

هذه العلاقة عاكسة لأن المجموعات وحيدة العنصر دائماً مترابطة لذا فلكل $x \in X$ توجد مجموعة مترابطة وهي $\{x\}$.كما أن هذه العلاقة متماثلة. إثبات أن هذه العلاقة متعدية، نفترض أن $x \sim y$ وأن $y \sim z$ لأي $x, y, z \in X$. لذا توجد مجموعتان مترابطتان $A, B \in X$ بحيث أن كل من $x, y \in A$ و $y, z \in B$.

بما أن كل من A, B مجموعة مترابطة و $A \cap B \neq \phi$ فإن $A \cup B$ مجموعة مترابطة وأن $x, z \in A \cup B$.لذا $x \sim z$.■

تعريف (٧,٥)

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي وأن $\sim$ علاقة تكافؤ معرفة على X بالصورة:

$x \sim y$ إذا وجدت مجموعة مترابطة $A \subset X$ بحيث أن $x, y \in A$

فإن فصول تكافؤ هذه العلاقة تسمى مركبات الفضاء (X, τ).

نظرية (٧,١٢)

بفرض أن $A \subset X$ مجموعة جزئية مترابطة من الفضاء التوبولوجي (X, τ) وأن B هي إحدى مركبات هذا الفضاء بحيث أن $A \cap B \neq \phi$ فإن $A \subset B$.

البرهان

نفرض أن $x \in A \cap B$. يتضح أنه لكل نقطة $a \in A$ فإن $x \sim a$ وبما أن $x \in B$ فإن $x, a \in B$ ومن ثم يكون كل عنصر من عناصر A محتوى في المركبة B .■

نظرية (٧,١٣)

أي مركبة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) تكون مجموعة مترابطة.

البرهان

بفرض أن C مركبة من مركبات الفضاء التوبولوجي (X,τ) وأن $x \in C$. لذا لكل $y \in C$ توجد مجموعة مترابطة ولتكن $K_y \subset X$ بحيث أن $x, y \in K_y$. بما أن $x \sim y$ لكل نقطة y في K_y فإن $K_y \subset C$. من هذا نجد أن

$$C = \cup\{K_y : y \in C\}$$

و هذه المجموعة مترابطة لأنها عبارة عن اتحاد مجموعات مترابطة وأن $\cap K_y \neq \phi$ (لأن النقطة x موجودة في كل K_y).■

نظرية (٧,١٤)

أي مركبة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) تكون مجموعة مغلقة.

البرهان:

بفرض أن C مركبة مترابطة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) و حيث أن $C \subseteq \overline{C}$ فإن $\overline{C}$ مجموعة مترابطة تحوي المجموعة C وحيث أن C مركبة فهي أكبر مجموعة مترابطة و بالتالي فإن $\overline{C} \subseteq C$ و من ثم نجد أن $C = \overline{C}$ أي أن C مغلقة.■

مثال (٧,١٠)

بفرض أن $X = [0,1] \cup [2,3]$ فضاء جزئي من الفضاء التوبولوجي الاعتيادي (R,u). الفضاء X له المركبتين $[0,1]$ و $[2,3]$.

مثال (٧,١١)

بفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{b,c\}, \{a,d,e\}\}$ توبولوجي على المجموعة

$X=\{a,b,c,d,e\}$. فإن مركبات الفضاء التوبولوجي (X,τ)، هي
$\{b,c\},\{a,d,e\}$.

مثال (٧,١٢)

مركبات الفضاء التوبولوجي المتقطع هي عائلة المجموعات وحيدة العنصر.

تعريف (٧,٦)

يقال أن الفضاء (X,τ) غير مترابط بالكامل (Totally disconnected) إذا كانت كل مركبة من مركباته عبارة عن مجموعة وحيدة العنصر.

نظرية (٧,١٥)

كل فضاء غير مترابط بالكامل هو فضاء $-T_1$.

البرهان

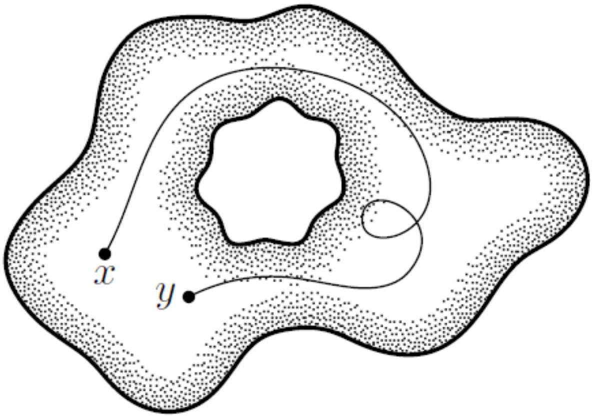
بما أن مركبات الفضاء الغير مترابط بالكامل مغلقة وهي مجموعات وحيدة العنصر فإن هذا الفضاء يكون فضاء $-T_1$.■

مثال (٧,١٣)

الفضاء التوبولوجي المتقطع هو فضاء غير مترابط بالكامل.

(٧,٣) الترابط المساري Path Connectedness

ترابط الفترات في R يقودنا لمفهوم مهم لنوع جديد من الترابط والذي يبن أن الفضاء X يكون مترابطاً ، تبعاً لهذ النوع من الترابط، متى كانت كل نقطتين فيه مرتبطتين بمسار يقع بالكامل داخل هذا الفضاء. هذا النوع من الترابط يسمى بالترابط المساري وهو ما سنُعرفه فيما يلي.



شكل (٧,٤) الترابط المساري

تعريف (٧,٧)

بفرض أن $x, y \in X$ نقطتين في الفضاء X ، المسار (Path) في X من النقطة x إلى النقطة y هو الدالة المتصلة $f:[a,b] \to X$ المعرفة من أي فترة مغلقة في R إلى الفضاء X بحيث أن $f(a)=x$ و $f(b)=y$.

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يسمى مترابط مسارياً (path connected) إذا كان لكل $x, y \in X$ يوجد مسار في X من النقطة x إلى النقطة y .

مثال (٧,١٤)

الفضاء التوبولوجي التافه مترابط مساريا وذلك لأن كل دالة $f:[0,1] \to X$ متصلة.

مثال (٧,١٥)

الفضاء العادي (R,u) مترابط مساريا وذلك لأي $a, b \in R$ فإن الدالة $f:[0,1] \to R$ و المعرفة بالصورة

$$f(x) = (1-x)a + bx, x \in [0,1], a, b \in R$$

هي دالة متصلة وتحقق $f(0)=a, f(1)=b$ وعليه فإنها تمثل

مسارمن a إلى b داخل R.

نظرية (٧,١٦)

كل فضاء مترابط مساريا هو فضاء مترابط.

البرهان

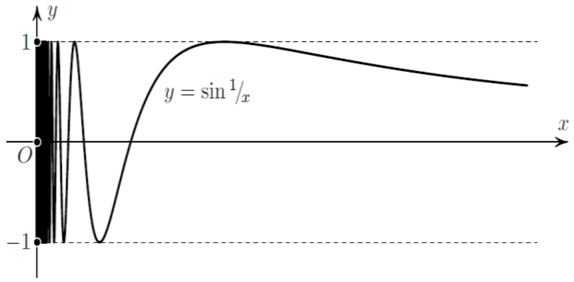
نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي مترابط مساريا . في حالة $X=\phi$ فإن النتيجة تصبح بديهية. لنفرض أن $X\neq\phi$ ، $x_0\in X$ نقطة ثابتة مختارة. من الترابط المساري للفضاء (X,τ) فإنه لكل $x\in X$ يوجد مسار $f_x:[a,b]\to X$ بحيث أن $f_x(a)=x_0$ ، $f_x(b)=x$ وحيث أن المسار دالة متصلة من الفترة المترابطة $[a,b]$، فإن المجموعة $f_x([a,b])$ مجموعة مترابطة لكل $x\in X$. لكن $X=\underset{x\in X}{\cup} f_x([a,b])$. إذاً X مترابطة لكونها اتحاد مجموعات مترابطة تقاطعها غير خال. ■

عكس هذه النظرية ليس من الضروري أن يكون صحيحاً دائما وهذا يتضح من خلال المثال التالي

مثال (٧,١٦)

باعتبار المجموعة $A=\{(x,y):0<x\leq 1, y=\sin(\frac{1}{x})\}\subset R^2$ مترابطة وذلك لكونها صورة متصلة للفترة $(0,1]$ تحت تأثير الدالة $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$.

من ذلك يكون $\overline{A}=A\cup\{(0,y):-1\leq y\leq 1\}$ فضاء مترابط ولكنه غير مترابط مسارياً وذلك لعدم أي مسار من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(0,\frac{1}{\pi})$مثلاً.



شكل (٧,٥): منحي الدالة $y = \sin\frac{1}{x}$

(٧,٤) الترابط الموضعي Locally Connectedness

خاصية الترابط تعتبر من الخواص المهمة التي يجب أن تتحقق في فضاء ما. ولكنه أحياناً تستدعي الحاجة أن يحقق الفضاء شرط الترابط موضعياًعند نقطة ما دون غيرها . أو بمعنى آخرأن هذه النقطة يتوفر لها جوار صغير مترابط. هذا النوع من الترابط يعرف في السطور التالية:

تعريف (٧,٨)

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) مترابط موضعياً عند النقطة x إذا كان كل جوار U للنقطة x يحوي جوارا مترابطاً V للنقطة x بحيث يكون $V \subseteq U$.

إذا كان الفضاء (X,τ) مترابطاً موضعياً عند كل نقاطه، فإنه يسمى فضاءً مترابطاً موضعياً.

تعريف (٧,٩)

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) مترابط ترابط مساري موضعي عند النقطة x إذا كان كل جوار U لنقطة x يحوي جوارا مترابطاً مسارياً V

للنقطة x بحيث يكون $V \subseteq U$.

إذا كان الفضاء (X,τ) مترابط ترابط مساري موضعي عند كل نقاطه، فإنه يسمى فضاء مترابط ترابط مساري موضعي.

مثال (٧,١٧)

(١) كل فترة في خط الأعداد مترابطة و مترابطة موضعياً

(٢) أي فضاء متقطع مترابط موضعياً

(٣) أي فضاء تافه مترابط موضعياً

(٤) الفضاء الجزئي $X = [-1,0) \cup (0,1]$ من خط الاعداد غير مترابط ولكنه مترابط موضعياً

(٥) مجموعة الاعداد القياسية Q ليست مترابطة ولا مترابطة موضعياً.

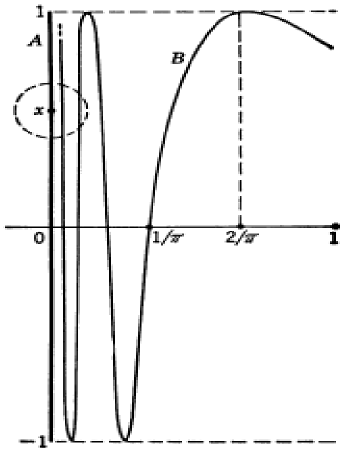
لاحظنا من المثال السابق أن الترابط الموضعي لا يعني الترابط، في المقابل ما يمكننا أن نقول عندما يكون الفضاء (X,τ) مترابط هل بالضرورة يكون مترابطاً موضعياً؟ هذا السؤال تتضح اجابته من خلال المثال التالي:

(٦) بفرض أن X فضاء جزئي من المستوي الأقليدي وأن $X = A \cup B$ حيث أن

$$A = \{(x,y) : x = 0, -1 \le y \le 1\}$$

$$B = \{(x,y) : 0 < x \le 1,\ y = \sin(1/x)\}$$

المجموعة B مترابطة وذلك لكونها صورة الفترة $(0,1]$ تحت تأثير الدالة المتصلة f المعرفة بالصيغة $f(x) = (x, \sin(1/x))$. بما أن $X = \overline{B}$ فإن الفضاء X مترابط ولكنه غير مترابط موضعياً لأنة يمكن بسهولة ملاحظة أن كل نقطة $x = (0,b)$ في A لها جوار لا يحوي أي جوار مترابط.

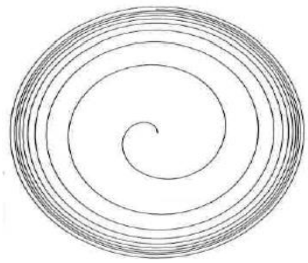


شكل (٧,٦)

(٧) في المستوي مع التوبولوجي الاعتيادي، افترض أن $X = A \cup B$ فضاء جزئي من R^2 حيث أن

$$B = \{(\cos t, \sin t) : t \in R\} \text{ و } A = \{(r\cos t, r\sin t) : r = 1 - \frac{1}{t}, t \geq 1\}$$

المجموعة $X = A \cup B$ مترابطة لأن المجموعة A مترابطة لكونها صورة مستمرة للفترة المترابطة $R_0 = [0, +\infty)$ و $X = A \cup B$ مترابطة لكنها غير مترابطة موضعيا لأنه باختيار النقطة $(1,0)$ فإن كل جوار مفتوح وصغير بقدر كاف للنقطة $(1,0)$ لا يكون مترابطاً.



شكل (٧,٧)

نظرية (٧,١٧)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون مترابطاً ترابطاً موضعيً إذا وفقط إذا كانت مركبة أي مجموعة مفتوحة A ، في X ،هي مجموعة مفتوحة.

البرهان

اولاً نفرض أن (X,τ) فضاء مترابط موضعياً وأن $A \subseteq X$ مجموعة جزئية مفتوحة في X وأن C مركبة للمجموعة المفتوحة A. إذا كانت $x \in C$ فإنه يمكن اختيار جوار مترابط V للنقطة x بحيث أن $V \subset A$. حيث أن V مجموعة مترابطة فإنه يجب أن تقع بالكامل في داخل المركبة C للمجموعة A ومن ثم فإن C تكون مجموعة مفتوحة في X.

ثانياً نفترض أن مركبات المجموعات المفتوحة في X هي مجموعات مفتوحة. باختيار $x \in X$ كنقطة اختيارية وبفرض أن $V \in \tau$ جوار لهذه النقطة و C مركبة للمجموعة V و تحوي النقطة x. الآن المركبة C مترابطة ومفتوحة في X. إذاً الفضاء (X,τ) مترابط ترابط موضعي عند النقطة x.■

تمـاريـن (٧,١)

١) إذا كـان $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجيـا معرفـة علـى المجموعـة $X = \{a,b,c,d,e\}$. ادرس تـرابط الفضـاء (X,τ)؟. هـل المجموعة الجزئية $A = \{b,d,e\}$ مترابطة؟.

٢) المجموعات التالية جزئية من R^2. ادرس ترابط هذه المجموعات :

- $A = \{(a,b) : b = 0\} \cup \{(a,b) : a > o, b = \frac{1}{a}\}$.
- $A = R^2 - \{0\}$.

- $S^1=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$.
- $B=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$.

٣) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ دالة تشاكل توبولوجي ، برهن أن الفضاء (Y,δ) يكون مترابطًا إذا و فقط إذا كان الفضاء (X,τ) فضاءً مترابطاً .

٤) بين بمثال أن خاصية الترابط ليست خاصية وراثية؟

٥) بفرض أن كل من A,B مجموعة جزئية مترابطة من الفضاء التوبولوجى (X,τ) حيث أن $A\cap B\neq\phi$ ..فبرهن أن $A\cup B$ مجموعة مترابطة.

٦) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ دالة متصلة و مفتوحة و شاملة من الفضاء التوبولوجي المترابط موضعياً (X,τ) إلى (Y,δ).فبين أن الفضاء (Y,δ) مترابط موضعياً.

٧) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجى المترابط موضعياً (X,τ) وبحيث أن $b(A)$ مجموعة مترابطة موضعياً. فبين أن $\overline{A}$ مجموعة مترابطة موضعياً.

٨) اثبت أن الصورة المتصلة لأي مجموعة جزئية مترابطة مسارياً هي مجموعة مترابطة مسارياً.

٩) ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي و لتكن $A\subseteq X$ مجموعة جزئية كثيفة في X و مترابطة مسارياً. هل الفضاء (X,τ) مترابط مسارياً.

١٠) برهن أن اتحاد عائلة المجموعات المترابطة مسارياً ذات التقاطع غير الخال هو مجموعة مترابطة مسارياً.

١١) إذا كان (X,τ) فضاءً مترابطاً موضعياً و لتكن $A\subseteq X$ و المجموعة B مركبة في A. برهن أن

$$(1)\ B^{o}=B\cap A^{O}$$
$$(2)\ b(B)\subseteq b(A)$$
$$(3)\, if\ \ A=\overline{A}\Rightarrow b(B)=B\cap b(A).$$

١٢) ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً مترابطاً موضعياً و A مجموعة جزئية من X بحيث أن الفضاء الجزئي (A,τ_A) مترابط موضعيا .برهن أن المجموعة $\overline{A}$ مترابطة موضعياً.

١٣) أثبت أن الفضاء $R^2-\{0\}$ مترابط؟.

١٤) لتكن $f:R^2-\{0\}\rightarrow[0,1]$ دالة متصلة و شاملة. اثبت أنه لكل $0<c<1$ فإن $f^{-1}(c)$ غير قابل للعد.؟

١٥) اثبت أن كل مفتوح مترابط في R^n يكون مترابط مسارياً و هو مترابط موضعياً.؟

١٦) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين R و المجموعة $\{(x,y)\in R^2: xy=0\}$.؟

١٧) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين R و اي مجموعة مفتوحة جزئية من R.؟

١٨) بين أن الفضاء ذو بعد صفري إما غير متقطع أو غير مترابط.؟

١٩) بين أن الفضاء صفري البعد و الذي فيه كل مجموعة وحيدة العنصر مغلقة هو غير مترابط بالكامل؟

٢٠) برهن أن كل فضاء هاوسدورف و صفري البعد هو غير مترابط بالكامل؟

٢١) ضع مثال لفضاء صفري البعد و غير مترابط بالكامل و مثال لفضاء غير مترابط بالكامل وليس صفري البعد.؟

٢٢) برهن أن كل فضاء جزئي من الفضاء الغير مترابط بالكامل هو فضاء غير مترابط بالكامل؟

محاضرات في تطبيقات الجبر الخطى

إعداد
د. عمرو محمد الراوي

المحتوى

-مقدمة-

الجبر الخطي هو فرع من الرياضيات ويعتبر أهم أفرع الجبر الـــحديث.

يهتم الجبر الخطي بدراسة الفضاءات المتجه والتحويلات الخطية والنظم الخطية.

يستعمل الجبر الخطي كثيرا في كلا من الجبر المجرد والتحليل الـــــدالي والهندسة التحليلية كما له أيضا تطبيقات في العلوم الطبيعيـة والعـــــــلوم الاجتماعية.

أما عن تاريخ الجبر الخطي فقد انبثقت دراسة الجبر الخطي لأول مرة من دراسة المحددات، التي كانت تُستعمل في حل نظم المعادلات الخـــــطية. واستعملت المحددات من طرف لايبنز في عام 1693، وفيمـــــــــا بعد، استخلص جابرييل كرامر1750 قاعدة كرامر التي تمكن من خـــلال حل الأنظمة الخطية. ثم عمل جاوس في نظرية حل الأنظمة الخطية باستعمال طريقة الحذف.

في بدايات القرن التاسع عشر ظهرت دراسة المصفوفات لأول مـــرة في إنجلترا، في عام 1848، قدم جيمس جوزيف سلفستر مفهوم (Matrix) المصفوفات.

استطاع عالم الرياضيات أرثر كايلي من خلال دراسته لتركيبـــــــــات التحويلات الخطية، تعريف ضرب المصفوفات وإلى تعريف معكـــوس مصفوفة . كما وجد أيضا العلاقة التي تربط المصفوفات بالمــــــحددات.

التحويلات الخطية

الباب 1

التحويلات الخطية
Linear Transformations

في هذا الفصل سوف نقدم بتعريف ودراسة مفهوم التحويل الخطي بين الفضاءات المتجة وكذلك نواة ومدي " صورة" التحويل الخطي وأيضا صفرية ورتبة التحويل الخطي.

تعريف:
بفرض أن $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ فضاءين متجهين علي الحقل $\boldsymbol{K}$ ، وأن $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ داله (راسم) من الفضاء $\boldsymbol{V}$ إلى الفضاء $\boldsymbol{W}$ فيقال بأن $\boldsymbol{T}$ تحويلاً خطياً إذا تحقق:

$$(1) \quad \boldsymbol{T(u+v) = T(u) + T(v)}, \forall\, \boldsymbol{u, v} \in \boldsymbol{V}.$$

$$(2) \quad \boldsymbol{T(k\,u) = k\,T(u)}, \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}.$$

ويمكن دمج الشرطين السابقين في شرط واحد كالاتي:

$$\boldsymbol{T(ku + rv) = k\,T(u) + rT(v)}, \forall\, \boldsymbol{u, v} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{k, r} \in \boldsymbol{R}$$

- وإذا كان $\boldsymbol{V = W}$ في التحويل الخطي $\boldsymbol{T}$ فإن $\boldsymbol{T}$ يسمى بمؤثر خطي Linear operator .

مثـــال:

تحقق من كون $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تحويل خطي حيث

$$T(x, y, z) = (x - y, y - z)$$

الحـــل:

$$Let (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}, then$$

$$(1) T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2)$$

$$= (x_1 - y_1, y_1 - z_1) + (x_2 - y_2, y_2 - z_2)$$

$$= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2).$$

$$(2) T(k(x_1, y_1, z_1)) = T(k\,x_1, k\,y_1, k\,z_1)$$

$$= (k\,x_1 - ky_1, k\,y_1 - kz_1)$$
$$= k(x_1 - y_1, y_1 - z_1)$$
$$= kT(x_1, y_1, z_1).$$

مثـــال:

وضح ما إذا كان $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تحويل خطي أم لا حيث

$$T(x, y) = (x + 2, y + 3)$$

الحـــل:

$Let(1,2),(2,1) \in \mathbb{R}^3, then$

$$(1)T((1,2) + (2,1)) = T(\,3,3)$$
$$= (5,6)$$
$$\neq (3,5) + (4,4)$$
$$\neq T(1,2) + T(2,1).$$

وبالتالي T لا يمثل فضاء خطي.

مثـــال:

وضح ما إذا كان $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تحويل خطي أم لا حيث

$$T(x, y) = (xy, y)$$

الحـــل:

$Let(1,2),(2,1) \in \mathbb{R}^3, then$

$$(1)T((1,2) + (2,1)) = T(\,3,3)$$
$$= (9,3)$$
$$\neq (2,2) + (2,1)$$
$$\neq T(1,2) + T(2,1).$$

وبالتالي T لا يمثل فضاء خطي.

ملحوظة:

راسم التناظر أحادي يكون تحويل خطي والعكس ليس بصحيح.

مثــال:

تحقق من كون $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{T}$ تحويل خطي وليس تناظر أحادي حيث

$$T(x,y,z) = (3x + y, 2z)$$

الحــل:

$$Let (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 and\ k \in \mathbb{R}, then$$

$$\begin{aligned}(1) T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\\ &= (3x_1 + 3x_2 + y_1 + y_2, 2z_1 + 2z_2)\\ &= (3x_1 + y_1, 2z_1) + (3x_2 + y_2, 2z_2)\\ &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) T(k(x_1, y_1, z_1)) &= T(k\,x_1, k\,y_1, k\,z_1)\\ &= (3\,k\,x_1 + ky_1, 2kz_1)\\ &= k(3x_1 + y_1, z_1)\\ &= kT(x_1, y_1, z_1).\end{aligned}$$

التحويل T لا يكون أحادي حيث $u = (0,6,1), v = (2,0,1) \in \mathbb{R}^3$ وأن

$$T(u) = T(v)\ but\ \ u \neq v.$$

نظرية:

بفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطي فإن:

$(i)\ T(u - v) = T(u) - T(v)$.

$(ii)\ T(-u) = -T(u)$.

$(iii)\, T(O_V) = O_W.$

البرهان:

$(i)\, T(u-v) = T(u+(-1)\,v)$

$= T(u) + T((-1)\,v)$

$= T(u) + (-1)T(v)$

$= T(u) - T(v).$

$(ii)\, T(-u) = T((-1)\,u) = (-1)T(u)$

$= -T(u).$

(iii)متروك للطالب.

نظرية:

بفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطي وكان $U \subset V$ فضاء جزئي فإن $T(U) \subset W$ فضاء جزئي من W وكذلك $T(V) \subset W$ فضاء جزئي.

البرهان:

$Let u_1, u_2 \in U and k \in K, then \exists v_1, v_2 \in T(U) s.t., T(u_1) = v_1, T(u_2) = v_2.$

$Now,$

$(1) v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2)$

$= T(u_1 + u_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in T(U).$

$(2) kv_1 = kT(u_1)$

$= T(k\,u_1) \Rightarrow kv_1 \in T(U).$

أما الجزء الثاني فيترك للطالب.

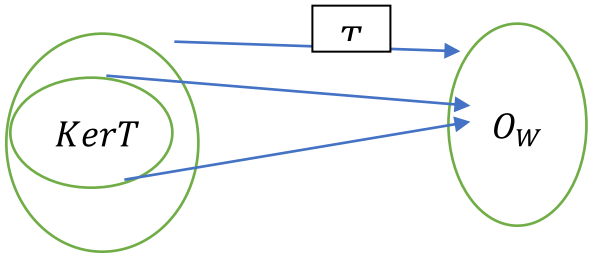
2- نواة ومدى التحويل الخطي

Kernel & Image Linear Transformation

تعريف:

بفرض أن $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ تحويل خطي فإن نواة التحويل تعرف كالتالي:

$$\boldsymbol{KerT} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}: \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{W}}\} \subset \boldsymbol{V}.$$



مثـــال:

إذا كان $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تحويل خطي. فأوجد نواة التحويل حيث

$$T(x, y, z) = (x, 0,0)$$

الحــل:

$$Let u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 and\ u \in kerT, then$$

$$T(u) = (0,0,0) \Longrightarrow (x, 0 , 0) = (0,0,0) \Rightarrow x = 0,$$

وبالتالي

$$Ker\, T = \{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}^3\}.$$

تعريف:

بفرض أن $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ تحويل خطي فإن مدى "صورة" التحويل تعرف كالتالي:

$$\boldsymbol{Im\, T} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}: \boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}.$$

مثـــال:

إذا كان $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تحويل خطي. فأوجد **مدى** التحويل حيث

$$T(x, y, z) = (x, 0,0)$$

الحـــل:

$Let\ \ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 and\ \ v \in \mathbb{R}^3,$

$$v = T(u) = (x, 0\,, 0)$$

وبالتالي

$Im\, T = \{(a, 0,0): a \in \mathbb{R}^3\}.$

أي أن مدى التحويل يمثل محور السينات في الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$.

نظرية:

بفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطي فإن:

(1) نواة التحويل فضاء جزئي من V.

(2) مدى التحويل فضاء جزئي من W.

البرهان:

$(1) Let\ u, v \in KerT and\ \ k \in K,\ \ then\ \ T(u) = O, T(v) = O$

$Now,$

$(i) T(u) + T(v) = T(u + v) = O \Rightarrow u + v \in KerT.$

$(ii)kT(u) = T(k\,u) = kO = O \Rightarrow ku \in KerT.$

وبالتالي نواة التحويل تكون فضاء جزئي V.

$(2) Let\ u_1, u_2 \in Im\,T\ and\ \ k \in K, then\ \exists\ \ v_1, v_2 \in V s.t.,$

$$T(v_1) = u_1, T(\,v_2) = u_2$$

$Now,$

$(i)\ u_1 + u_2 = T(v_1) + T(\,v_2)$

$\qquad = T(v_1 + v_2) \Rightarrow u_1 + u_2 \in Im\,T\,.$

$(ii)ku_1 = kT(v_1)$

$\qquad = T(kv_1) \Rightarrow ku_1 \in Im\,T.$

وبالتالي مدى التحويل فضاء جزئي من W .

نظرية:

بفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطي فإن:

(1) إذا كان A مجموعة متجهات مرتبطة خطيا في V فإن T(A) تكون مرتبطه أيضا في W .

(2) إذا كان A مجموعة متجهات مستقلة خطيا في V فإن $T(A)$ تكون مستقلة أيضا في W .

البرهان:

(1) نفرض أن $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ حيث $A \subset V$ مرتبطة خطيا في V فإن

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = O$$

فإنه يوجد علي الأقل $c_i \neq O \forall i = 1,2, \ldots, n$ وبالتالي

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n) = T(O),$$

$$c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \ldots + c_n T(v_n) = O,$$

حيث وهي $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n) \in W$ أيضا مرتبطة خطيا.

(2) متروك للطالب

نظرية:

بفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطي وأن $U \subset V$ فضاء جزئي بحيث $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ فإن $T(U) = [T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)]$.

البرهان:

لكي نثبت أن $T(u_i) \forall i = 1,2, \ldots n$ يولد الفضاء $T(U)$

$Let v \in T(U), then \ \exists u \in U s.t., v = T(u).$

$Since \ u = c_1 u_1 + \ldots . + c_n u_n$

$$\begin{aligned} v = T(u) &= T(c_1 u_1 + \ldots . + c_n u_n) \\ &= T(c_1 u_1) + \ldots . + T(c_n u_n) \\ &= c_1 T(u_1) + \ldots . + c_n T(u_n) \end{aligned}$$

أي أن أي متجه في $T(U)$ يمكن التعبير عنه كمجموع من المتجهات

$T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$

3- رتبة وصفرية التحويل

Rank &Nullity

تعريف:

- رتبة التحويل الخطي $T: V \rightarrow W$ والتي يرمز لها ب $rankT$ تعرف كالتالي

$$rank\, T = dim(\, Im\, T).$$

- صفرية التحويل الخطي $T: V \rightarrow W$ والتي يرمز لها ب $nullityT$ تعرف كالتالي

$$nullityT = dim(\, KerT).$$

مثال:

أوجد $rankT$ و $nullityT$ للتحويل الخطي المعرف

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

الحل:

$$rankT = 1$$

$$nullityT = 2$$

نظرية:

$$dim(\, V) = nullityT + rankT.$$

البرهان:

نفرض أن $rankT = n - r, dim(\, V) = n$ وبفرض أن مجموعة المتجهات $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ تكون أساس للفضاء الجزئي $KerT$.
بإكمال هذه المجموعة بعدد $n - r$ من المتجهات $v_1, v_2, \dots, v_{n-r}$ بحيث تكون المجموعة $\{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_{n-r}\}$ أساس للفضاء V ..

بفرض أن

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{n-r}v_{n-r} \rightarrow (1)$$

$$T(v) = T(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{n-r}v_{n-r})$$
$$= T(c_1v_1) + T(c_2v_2) + \ldots + T(c_{n-r}v_{n-r})$$
$$= c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots + c_{n-r}T(v_{n-r})$$

فعند $v = O$ فنحصل علي (من تعريف الأساس) $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-r} = 0$ أي أن

$$T(v) = O \Rightarrow v \in KerT$$

$$v = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_ru_r \rightarrow (2)$$

بطرح (1) و (2) نحصل علي

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{n-r}v_{n-r} - b_1u_1 - b_2u_2 - \ldots - b_ru_r = o$$

ومن تعريف الأساس نلاحظ بأن

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-r} = o$$
$$b_1 = b_2 = \ldots = b_r = o$$

أيضا فإن المتجهات $T(v_1), T(v_2) \ldots, T(v_{n-r})$ تكون مستقلة وهي تولد الفراغ الجزئي $T(v)$.

$$dim\, T(V) = dim(im\, T) = rank\, T = n - r$$
$$= dim\, V - nullity\, T$$
$$\therefore dim\, V = nullity\, T + rank\, T$$

نظرية:

إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويل خطي فإنه يكون أحادي إذا كان وكان فقط نواة التحويل مساوية للمتجه الصفري أي أن

$$\boldsymbol{KerT = \{o\} \Leftrightarrow T\, is\, a\, 1-1.}$$

البرهان:

<u>الاتجاه الأول:</u> نفرض أن T تحويل أحادي وسنثبت أن $KerT = \{o\}$

$Let\ \ u \in KerT,\ then\ T(u) = o\ and\ T(o) = o.$

$Since\ \ T\ \ is\ 1-1, \qquad then$

$$T(u) = T(o) \Rightarrow u = o.$$

$Thus,\ \ KerT = \{o\}.$

<u>الاتجاه العكسي:</u> نفرض أن النواة مساوية للمتجه الصفري وسوف نثبت أن التحويل أحادي

$$
\begin{aligned}
let u, v \in V, and\, T(u) = T(v) &\Rightarrow T(u) - T(v) = o \\
&\Rightarrow T(u - v) = o \\
&\Rightarrow u - v \in ker\, T \\
&\Rightarrow u - v = o \\
&\Rightarrow u = v.
\end{aligned}
$$

$Thus,\ \ T\ is\ \ 1 - 1.$

ملحوظة:

1- يقال بأن التحويل الخطي T صفري إذا كان $ImT = \{o\}$.

2- يقال بأن التحويل الخطي T فوقي onto إذا كان $ImT = W$.

3- يقال بأن التحويل الخطي T تناظر أحادي فإن 1 و2 متحققين.

4- إذا كان $dim\ \ (ImT) = 0$ فإن $dim\ \ (Ker\ \ T) = dim\, V$ وبالتالي فإن T يكون التحويل الصفري.

5- إذا كان $dim\ \ (ImT) = dim\, V$ فإن $dim\ \ (Ker\ \ T) = 0$ وبالتالي فإن T يكون تحويل تناظر أحادي "غير مفرد".

6- إذا كان $dim\ \ (imT) < dim\, V$ فإن $dim\ \ (Ker\ \ T) > 0$ وفي هذه الحالة يكون التحويل يكون تحويل مفر او شاذ.

المصفوفات والتحويلات الخطية

بفرض أن V فضاء اتجاهي علي الحقل K ذو الأساس $v_1, v_2, \ldots, v_n$ فإن أي تحويل خطي (مؤثر خطي) تناظره مصفوفة وحيدة مربعة من النوع $n \times n$ علي نفس الحقل والعكس صحيح وهذا ما توضحه النظرية التالية.

نظرية:

يوجد تناظر أحادي بين مجموعة المصفوفات المربعة من النوع $n \times n$ علي الحقل K وبين مجموعة التحويلات الخطية للفضاء الاتجاهي المعرف علي نفس الحقل بالنسبة للإساس $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

البرهان:

بفرض أن لدينا التحويل الخطي $T: V \to W$ أن صور متجهات الأساس هي $u_1, u_2, \ldots, u_n$ حيث

$$u_1 = T(v_1), u_2 = T(v_2), \ldots, u_n = T(v_n)$$

وبالتالي فإن صور متجهات الأساس يمكن أن نكتبها كارتباط خطي لمتجهات الأساس $v_1, v_2, \ldots, v_n$ أي أن

$$u_1 = T(v_1) = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n$$
$$u_2 = T(v_2) = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n$$
$$\vdots$$
$$u_n = T(v_n) = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n$$

ويمكن كتابة نظام المعادلات السابق في الصورة المصفوفية كالتالي:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(v_1) \\ T(v_2) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

لذا فإن لأي أساس في الفضاء الاتجاهي V أي تحويل خطي تناظره مصفوفة.

الاتجاه العكسي: بفرض أن لدينا المصفوفة المربعة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

وكان $v_1, v_2, \dots, v_n$ أساس للفضاء V فإننا سوف نحصل علي المتجهات

$$u_1 = T(v_1), u_2 = T(v_2), \dots, u_n = T(v_n)$$

وأي v متجه في الفضاء V يمكن كتابته في الصورة

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

ومن خواص التحويل الخطي نجد

$$\begin{aligned} T(v) &= T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) \\ &= c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_n T(v_n) \\ &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \end{aligned}$$

أي من خلال المصفوفة يمكن الحصول علي صورة وحيدة في نفس الفضاء أي حصلنا علي تحويلة خطية للفراغ V.

ملحوظة:

المصفوفة المعتادة هي مصفوفة التحويل بالنسبة للأساس القياسي أو المعتاد .

مثـــال:

إذا كان $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تحويل خطي. فأوجد المصفوفة المناظرة للتحويل حيث

$$T(x, y, z) = (x + y, x - y, z + y)$$

الحــل:

هنا باعتبار المجموعة $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساس $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ حيث

$$T(e_1) = (1,1,0)$$
$$T(e_2) = (1,-1,1)$$
$$T(e_3) = (0,0,1)$$

وبالتالي فإن المصفوفة المناظرة للتحويل تكون

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ويمكن إيجاد هذه المصفوفة بطريقة أخري

$$T(e_1) = T(1,0,0) = c_{11}\, e_1 + c_{12}\, e_2 + c_{13}\, e_3$$
$$T(e_2) = T(0,1,0) = c_{21}\, e_1 + c_{22}\, e_2 + c_{23}\, e_3$$
$$T(e_3) = T(0,1,0) = c_{31}\, e_1 + c_{32}\, e_2 + c_{33}\, e_3$$

ومنها نحصل

$$(1,1,0) = c_{11}(\,1,0,0) + c_{12}(\,0,1,0) + c_{13}(\,0,0,1) \Rightarrow c_{11} = c_{12} = 1, c_{13} = 0$$
$$(1,-1,1) = c_{21}(\,1,0,0) + c_{22}(\,0,1,0) + c_{23}(\,0,0,1)$$
$$\Rightarrow c_{21} = c_{23} = 1, c_{22} = -1$$
$$(0,0,1) = c_{31}(\,1,0,0) + c_{32}(\,0,1,0) + c_{33}(\,0,0,1) \Rightarrow c_{31} = c_{32} = 0, c_{33} = 1$$

وبالتالي تكون

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثـــال:

إذا كان $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{T}$ تحويل خطي. فأوجد المصفوفة المناظرة للتحويل حيث

$$T(x,y,z) = (4x-2y,2x+y)$$

حيث الأساس $\{v_1=(1,1),v_2=(-1,0)\}$ لـ $\mathbb{R}^2$.

الحــل:

$$T(v_1) = T(1,1) = c_{11}\,v_1 + c_{12}\,v_2$$

$$T(v_2) = T(-1,1) = c_{21}\,v_1 + c_{22}\,v_2$$

ومنها نحصل

$$(2,3) = c_{11}(\,1,1) + c_{12}(\,-1,0) \Rightarrow c_{11} = 3, c_{12} = 1$$

$$(-4,-1) = c_{21}(\,1,1) + c_{22}(\,-1,0) \Rightarrow c_{21} = -1, c_{22} = 3$$

وبالتالي تكون

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

تمارين

1- حدد أي من التحويلات الاتية يكون خطي

I. $T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(a,b) = (3a-b, b^2)$

II. $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(a,b,c) = (3a+2c, b)$

III. $T:\ M_{2\times 2} \to \mathbb{R}, T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$

2- أوجد Im T و Ker T لكل من التحويلات اd4لخطية الاتية:

I. $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(a,b,c) = (3a-2c, b+c)$

II. $T:\ \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t], T(a+bt+ct^2) = a+2c+(b-c)t+(a+2b)t^2.$

3- اثبت أن التحويل $T(a,b,c) = (a+3b, b, a+6c)$ خطي وأوجد المصفوفة التي تمثله بالنسبة للأساس $B_1\ \ B_2$ في الحالات الاتيه

a) $B_1 = B_2 = \{e\}.$

b) $B_1 = \{(4,1,-2),(3,-2,1),(1,1,0)\}, B_2 = \{e\}.$

c) $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(6,-2,-1)\}, B_2 = \{(1,0,1),(3,1,0),(8,4,2)\}.$

4- بين $T^2 = I$ حيث $T^2 = TT$ عندما $T\ (a,b) = (a, 3a-b)$

5- حدد فيما إذا كان التحويل T قابل للعكس في الحالات الاتية:

I. $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(a,b,c) = (a-2b+c, 2a+b-c, b-3a)$

II. $T:\ \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^2, T(a+bt) = (2a+b, 3a+b).$

III. $T:\ \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], T(a+bt) = a+3at+bt^2.$

6- أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي في التحويلات الخطية المعطاه في 5

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

الباب 2

القيم الذاتية "المميزة" والمتجهات الذاتية
Eigenvalues and Eigenvectors

في هذا الفصل سوف نناقش أحد أهم موضوعات الجبر الخطي لما له العديد من التطبيقات المختلفة في الرياضيات والفيزياء.

تعريف:
بفرض أن $\boldsymbol{V}$ فضاءمتجه علي الحقل $\boldsymbol{K}$ ، وأن $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{T}$ مؤثر خطي فإن يقال بأن $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ متجه ذاتي للمؤثر $\boldsymbol{T}$ إذا وجد عدد $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{K}$ بحيث

$$\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{\lambda x}.$$

ويسمي العنصر $\boldsymbol{\lambda}$ بالقيمة الذاتية للمؤثر.

نظرية:
مجموعة المتجهات الذاتية للمؤثر $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ المناظرة للقيمة الذاتية $\boldsymbol{\lambda}$ بالإضافة الي المتجه الصفري تكون تكون فضاء جزئي من $\boldsymbol{V}$.

البرهان:

نفرض أن $V_\lambda = \{O, w_1, w_2, \dots\}$ مجموعة المتجهات الذاتية المناظرةللقيمة الذاتية $\boldsymbol{\lambda}$مضافا اليها المتجه الصفري وبالتالي

$$\forall\, w_1, w_2 \in V_\lambda, \qquad Tw_1 = \boldsymbol{\lambda} w_1 \,, Tw_2 = \boldsymbol{\lambda} w_2$$

نحصل علي

$$\begin{aligned} 1 - \; T(w_1 + w_2) &= T(w_1) + T(w_2) \\ &= \boldsymbol{\lambda} w_1 + \boldsymbol{\lambda} w_2 \\ &= \boldsymbol{\lambda}(w_1 + w_2) \end{aligned}$$

أي أن $w_1, w_2 \in V_\lambda$

$$1 - T(\alpha w_1) = \alpha T(w_1)$$
$$= \alpha \boldsymbol{\lambda} w_1$$

أي أن $\alpha w_1 \in V_\lambda$

تعريف:
المتجه $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{O}$ يسمي بالمتجه المميز للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ إذا وجد العدد $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{K}$ بحيث يكون

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x.}$$

ويسمي العنصر $\boldsymbol{\lambda}$ بالقيمة الذاتية للمصفوفة

ملحوظة:

لا يوجد متجه مميز x للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ يكون مناظر لقيمتين مميزتين ويمكن توضيح ذلك كالتالي:

نفرض أن لدينا قيمتن $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$ مميزتين وتناظران المتجة المميز x للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ أي أن

$$\boldsymbol{Ax = \lambda_1 x \;\; and \;\; Ax = \lambda_2 x}$$

وبالتالي

$$\boldsymbol{\lambda_1 x = \lambda_2 x \implies (\lambda_1 - \lambda_2)x = o \implies \lambda_1 = \lambda_2}$$

وهذا تناقض

ملحوظة:

قد يكون هناك قيمة أكثرمن متجه مميز مناظر لقيمة مميزة واحده ويمكن استنتاج ذلك من المعادلة

$$\boldsymbol{Ax = \lambda\, x \implies Akx = \lambda\, kx}$$

وبالتالي يوجد متجه ذاتي اخر هو $\boldsymbol{\lambda\, k}$

ملحوظة:

عندما نقول القيم الذاتية والمتجه الذاتي للمصفوفة A فإننا نعني المصفوفة المعتاده للتحويل الخطي $T : V \rightarrow V$

المعادلة المميزة Characteristic equation

تعريف:

بفرض أن A مصفوفة مربعه من النوع $n \times n$ فإن

$$Ax = \lambda x \implies (A - \lambda I)\, x = o$$

وهو نظام من المعادلات الخطية المتجانسة والتي لها عدد لانهائي من الحلول إذا كان وكان فقط

$$det(A - \lambda I) = o$$

ونلاحظ أن مفكوك هذا المحدد هو داله في λ أي كثيرة حدود من الدرجة النونية أي أن

$$\phi_n(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

$$= \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

وهذه المعادلة من الدرجة n في λ وتسمي بالمعادلة المميزة للمصفوفة A وتسمي جذورها بالجذور المميزة للمصفوفة A.

مثال:

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\therefore \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-\lambda)(4-\lambda)-10=0$$

$$\Rightarrow 4-5\lambda+\lambda^2-10=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-5\lambda-6=0.$$

وجذور هذه المعادلة تكون:

$$(\lambda-6)(\lambda+1)=0$$
$$\therefore \lambda=6\,,\,\lambda=-1$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة A .

لذلك نفرض أن $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ هو المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=6$

$$\therefore (A-\lambda I)X=0$$
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5x+2y \\ 5x-2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore -5x+2y=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}y$$

وبوضع $y=5$ نحصل على $x=2$

وإذاً المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=6$ يكون هو $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

وفي حالة $\lambda=-1$ يكون: $(A-\lambda I)X=0$

$$\therefore \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}-(-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+2y \\ 5x+5y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore 2x+2y=0 \Rightarrow x=-y$$

وبوضع $y=1$ نحصل على $x=-1$

وإذاً المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=-1$ يكون هو $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

مثال:

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

الحل:

المعادلة الذاتية للمصفوفة تُعطى من:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1-\lambda)^3=0$$

ومن ثم القيم الذاتية للمصفوفة تكون:

$$\lambda=1,1,1$$

مثال:

أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

الحل:

المعادلة الذاتية للمصفوفة A تُعطى من:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-2]-[2-2(2-\lambda)]=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)[6-5\lambda+\lambda^2-2+2]\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$$

وإذاً القيم الذاتية للمصفوفة A تكون

$$\lambda=1,2,3$$

لايجاد المتجهات الذاتية للمصفوفة A بما أن

$$(A-\lambda I)X=0$$

فإن

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

عند $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow -z=0\,,\ x+y+z=0\Rightarrow z=0\,,\ x=-y$$

وبوضع $y=1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=1$ يكون

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

عند $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x=-z\,,\ 2y=z$$

وبوضع $y=1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=2$ يكون

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

عند $\lambda=3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x=y-z\,,\ 2y=z$$

وبوضع $y=1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=3$ يكون

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

نظرية: " كيلي هاميلتون"

كل مصفوفة A مربعة تحقق معادلتها أي أن

$$\phi_n(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_{n-1} A + c_n I = O$$

البرهان:

نفرض ان لدينا المصفوفة B وهي المصفوفة المترافقة للمصفوفة $(A - \lambda I_n)$ وبالتالي عناصرها تكون عبارة عن كثيرات حدود من الدرجة $n - 1$ أو أقل ومعاملات λ في كثيرات الحدود هذه كل منها كثيرة حدود في العناصر a_{ij} وبالتالي يمكن كتابة في الصورة

$$B = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \cdots + \lambda^{n-1} B_{n-1}$$

حيث $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ كل منها مصفوفة مربعة من الرتبة $n - 1$ وعناصرها كثيرات حدود في a_{ij}. بما أن

$$(A - \lambda I_n) \frac{B}{det(A - \lambda I_n)} = I_n$$

ومنها نحصل علي

$$(A - \lambda I_n)(B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \cdots + \lambda^{n-1} B_{n-1}) = (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n) I_n$$

وبمقارنة معاملات λ في الطرفين نحصل علي

الحد المطلق	AB_0
معامل λ	$-B_0 + AB_1$
....	...

معامل λ^{n-1}	$-B_{n-2}+AB_{n-1}$
معامل λ^{n}	$-B_{n-1}$

وبضرب هذه المعاملات في $I, A, \dots, A^{n-1}, A^{n}$ علي الترتيب والجمع نحصل علي

$$A^{n}+c_{1}A^{n-1}+\cdots+c_{n-1}A+c_{n}I=O$$

وهو المطلوب اثباته.

ملحوظة:

سوف نستخدم نظرية كيلي هاملتون في إيجاد معكوس المصفوفة الغير شاذة وسوف نوضح كالتالي :

بفرض أن A مصفوفة مربعة وغير شاذة ومن نظرية كيلي هاملتون نحصل علي

$$A^{n}+c_{1}A^{n-1}+\cdots+c_{n-1}A+c_{n}I=O$$

وبضرب طرفي المعادلة في A^{-1} فنحصل علي

$$A^{n-1}+c_{1}A^{n-2}+\cdots+c_{n-1}I+c_{n}A^{-1}=O$$

ومنها

$$A^{-1}=-\frac{1}{c_{n}}(A^{n-1}+c_{1}A^{n-2}+\cdots+c_{n-1}I)$$

نلاحظ أيضا

$$det\,(A)=c_{n}=(-1)^{n}\lambda_{1}\lambda_{2}\dots\lambda_{n}$$

$$Tr(A)=c_{1}=-(\lambda_{1}+\lambda_{2}+\cdots+\lambda_{n})$$

مثال:

باستخدام نظرية كيلي هاملتون أوجد محدد وأثر وكذلك معكوس المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

الحل:

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\therefore \left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1-\lambda)(4-\lambda)-10=0$$

$$\Rightarrow 4-5\lambda+\lambda^2-10=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-5\lambda-6=0.$$

وبالتالي فإن محدد المصفوفة يكون

$$\boldsymbol{det(A)=-6}$$

وأثر المصفوفة يكون

$$\boldsymbol{Tr(A)=5}$$

بما أن

$$\boldsymbol{A^2-5A-6I=O \Rightarrow A^{-1}=\frac{-1}{6}(A-5I)}$$

أي أن

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}}.$$

خواص القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

سوف نستعرض بعض خواص القيم الذاتية والمتجه للمصفوفات

نظرية:

القيم الذاتية للمصفوفة الصفرية تكون منعدمة.

البرهان:

بما أن المعادلة الذاتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ هي

$$det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}) = \boldsymbol{O}$$

لكن $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ فهذا يؤدي الي

$$det(\boldsymbol{O} - \boldsymbol{\lambda I_n}) = det(-\boldsymbol{\lambda I_n}) = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_i} = \mathbf{0}\ \forall\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \boldsymbol{n}.$$

نظرية:

القيم الذاتية للمصفوفة الوحدة تكون متساوية وتساوي الواحد الصحيح.

البرهان:

بما أن المعادلة الذاتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ هي

$$det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}) = \boldsymbol{O}$$

لكن $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$ فهذا يؤدي الي

$$det(\boldsymbol{I_n} - \boldsymbol{\lambda I_n}) = det([\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}]\boldsymbol{I_n}) = \boldsymbol{O}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}]^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_i} = \mathbf{1}\ \ \forall\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \boldsymbol{n}.$$

نظرية:

القيم الذاتية للمصفوفة القطرية تكون عناصر القطر الرئيسي.

البرهان:

بما أن المعادلة الذاتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ هي

$$det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I_n})=\boldsymbol{O}$$

لكن $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}=\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_n})$ فهذا يؤدي الي

$$det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\lambda I_n})=\boldsymbol{O}$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{a_1}-\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{a_2}-\boldsymbol{\lambda})\dots(\boldsymbol{a_n}-\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_i}=\boldsymbol{a_i}\ \forall\ \boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\dots \boldsymbol{n}.$$

نظرية:

المصفوفة $\boldsymbol{A}$ تكون شاذة إذا كان وكان فقط إحدي قيمها الذاتية مساوية للصفر.

البرهان:

بما أن المعادلة الذاتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ هي

$$det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I_n})=\boldsymbol{O}$$

لكن $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}$ فهذا يؤدي الي

$$det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{0I_n})=\boldsymbol{O}$$

$$\Rightarrow det(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$$

نظرية:

المصفوفتان $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{A}$ لهما نفس القيم الذاتية.

البرهان:

بما أن المعادلة الذاتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ هي

$$\begin{aligned}
O &= det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I_n})\\
&= \det((\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{\boldsymbol{T}}-\boldsymbol{\lambda I_n})\\
&= (\,det(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}-\boldsymbol{\lambda I_n}))^{T}\\
&= det(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}-\boldsymbol{\lambda I_n})\ \ .
\end{aligned}$$

نظرية:

إذا كانت $\boldsymbol{\lambda}$ هي القيمة الذاتية للمصفوفة القابلة للانعكاس $\boldsymbol{A}$ فإن $\boldsymbol{\lambda^{-1}}$ هي القيمة الذاتية للمصفوفة$\boldsymbol{A^{-1}}$.

البرهان:

بما أن المصفوفة $\boldsymbol{A}$ قابلة للانعاس فإن $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$ وبالتالي فإن وجود $\boldsymbol{\lambda^{-1}}$ محقق بما أن

$$Ax = \boldsymbol{\lambda x} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda A^{-1} x}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lambda^{-1} x} = \boldsymbol{A^{-1} x}$$

نظرية:

المتجهات الذاتية المناظرة لقيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة خطيا.

البرهان:

متروك للطالب

التحويل إلي الصورة القطرية

باستخدام العمليات الأولية علي صفوف أو أعمدة المصفوفة يمكن تحويل مصفوفة ما إلي مصفوفة قطرية هنا سوف نستعرض طريقة اخري لتحويل المصفوفة إلي مصفوفة قطرية

تعريف:
بفرض أن $\boldsymbol{A}$ مصفوفة مربعه من النوع $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ فإن

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

حيث $\boldsymbol{P}$ مصفوفة أعمدتها هي المتجهات الذاتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{D}$ هي مصفوفة قطرية عناصر القطر فيها عبارة عن القيم الذاتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$.

مثال:

حول المصفوفة التالية إلي مصفوفة عمودية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

بما أن مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

وبحساب المعكوس الضربي لهذه المصفوفة يكون

$$P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

فنجد أن:

$$P^{-1}AP = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة $P^{-1}AP$ تكون مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

مثال: أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

ثم حولها إلي مصفوفة قطرية؟

الحل:

بما أن المعادلة الذاتية للمصفوفة A تُعطى من:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (3-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda)-2]-[2(3-\lambda)-2]+[2-(4-\lambda)]=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda-2)=0$$

وبالتالي فإن القيم الذاتية هي

$$\lambda=6,2,2$$

الان سوف نوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A بواسطة العلاقة

$$(A-\lambda I)X=0$$

كالتالي:

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

بوضع $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow z=-x-y$$

وعند فرض

$$x=r,\ y=s$$

نحصل علي

$$z=-r-s$$

وبالتالي فإن المتجه الذاتي يكون:

$$X=\begin{pmatrix} r\\ s\\ -r-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\\ 0\\ -r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ s\\ -s\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

وبالتالي نحصل على متجهين مستقلين مناظرين للقيمة $\lambda=2$ "جذر مكرر" هما

$$\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

وعند $\lambda=6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 4 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x=-y+3z\ ,\ y=2z$$

وبوضع $z=1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=6$ يكون

$$\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

وإذاً مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A تكون:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

ويمكننا التحقق من أن:

$$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

,

$$P^{-1}AP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

تعريف:
بفرض أن $\boldsymbol{A}$ مصفوفة مربعه من النوع $\boldsymbol{n \times n}$ يوجد مصفوفة قابلة للانعكاس $\boldsymbol{P}$ بحيث

$$\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$$

حيث $\boldsymbol{D}$ هي مصفوفة قطرية. في هذه الحالة يقال أن المصفوفة $\boldsymbol{A}$ قابلة للتحول إلي صورة قطرية أو قابلة للاستقطار diagonalization

الان سوف نستعرض مفهوم المصفوفات المتشابه

تعريف:
يُقال أن المصفوفتان المربعتان A, B واللتان من نفس النظام أنهما متشابهتان إذا وُجدت مصفوفة P غير مفردة بحيث يتحقق

$$A = PBP^{-1} \vee B = P^{-1}AP$$

مثال:

بمعلومية أن

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

فأوجد المصفوفة المشابهة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:
بما أن المصفوفة P غير مفردة ومعكوسها الضربى هو

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

ولكي تكون المصفوفة B تشابه المصفوفة A فإن

$$B=P^{-1}AP$$

أي أن

$$B=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&14&13\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نتيجة:

إذا كانت $\boldsymbol{A}$ مصفوفة مربعه من النوع $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ فإنها تشابه مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئسي هي القيم الذتية للمصفوفة $\boldsymbol{A}$.

مثال:

اثبت أن المصفوفة $\boldsymbol{A}$ تشابة مصفوفة قطرية $\boldsymbol{B}$ ثم أوجد المصفوفة التي تحقق $B=P^{-1}AP$ حيث

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

الحل:

المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&1\\1&3-\lambda&1\\1&2&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

ومن ثم تكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda=1,1,5$$

وكما سبق تكون المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن المصفوفة P من المتجهات الذاتية كما يلي:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة غير مفردة ومعكوسها الضربي يكون:

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

وحيث وُجدت مصفوفة غير مفردة P فالمصفوفة A تشابه المصفوفة $B = P^{-1}AP$:

$$\therefore B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

وواضح أن المصفوفة B مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية للمصفوفة A فتكون مشابهة لها.

مثال:

هل المصفوفة $\boldsymbol{A}$ تشابه مصفوفة قطرية حيث

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

الحل:

بما أن الجذور المميزه لهذا المصفوفة هي

$$\boldsymbol{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1}$$

وبالتالي فإن المعادلة المصفوفية تكون

$$(A+I)X=O$$

وحل هذا النظام يكون في الصورة

$$S=\{x_1(1,1,-1):x_1\in R\}$$

وبالتالي فإن الجذور الثلاثة متساوية وجمعيها تناظر متجها ذاتيا واحد وبالتالي فإن A لاتشابه مصفوفة قطرية.

الان سوف نستعرض بعض خصائص المصفوفات المتشابه:

نظرية:

أي مصفوفتان متشابهتان لهما نفس القيم الذاتية .

البرهان:

نفرض أن المصفوفتان A,B متشابهتان فإنهما يحققان العلاقة:

$$B=P^{-1}AP$$

$$\therefore B-\lambda I=P^{-1}AP-\lambda I$$

$$=P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P$$

$$=P^{-1}(A-\lambda I)P$$

$$\therefore |B-\lambda I|=|P^{-1}(A-\lambda I)P|$$

$$=|P^{-1}||A-\lambda I||P|$$

$$=|P^{-1}||P||A-\lambda I|$$

$$=|P^{-1}P||A-\lambda I|$$

$$=|I||A-\lambda I|$$

$$=|A-\lambda I|.$$

نظرية:

بفرض أن A,B مصفوفتان متشابهتان أي أن

$$B = P^{-1}AP$$

وكان X_i هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ_i فإن $Y_i = P^{-1}X_i$ يكون هو المتجه الذاتي للمصفوفة B المناظر للقيمة الذاتية λ_i.

البرهان:

نفرض أن X_i هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ_i وبالتالي فإن

$$AX_i = \lambda_i X_i$$

لكن $A = PBP^{-1} \vee B = P^{-1}AP$

هذا يؤدي إلي

$$(PBP^{-1})X_i = \lambda_i X_i \Rightarrow BP^{-1}X_i = \lambda_i P^{-1}X_i$$

وبوضع $Y_i = P^{-1}X_i$ نحصل علي $BY_i = \lambda_i X_i$ وبالتالي $Y_i = P^{-1}X_i$ يكون متجه ذاتي للمصفوفة B مناظر للقيمة الذاتية λ_i .

حساب مصفوفة القوى

يمكن استخدام تحويل المصفوفة إلي مصفوفة قطرية في حساب مصفوفة القوى من خلال العلاقة التاليه:

$$\boldsymbol{D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}}$$

مثال:

احسب $\boldsymbol{A^{13}}$ علما بأن

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

الحل:

القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي **2,2,1** "تحقق من ذلك وتكون مصفوفة القيم المتجه هي

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ومعكوسها هي

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

وبالتالي المصفوفة العمودية هي

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$A^{13}=PD^{13}P^{-1}=\begin{pmatrix}-8190 & 0 & -16382\\ 8191 & 8192 & 8191\\ 8191 & 0 & 16383\end{pmatrix}.$$

تمارين

1- إذا كانت λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A فبرهن أن $\alpha\lambda$ هي القيمة الذاتية للمصفوفة αA .

2- إذا كانت λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A فبرهن أن λ^k هي القيمة الذاتية للمصفوفة A^k حيث k عدد صحيح موجب .

3- إذا كانت λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A فبرهن أن $\lambda - c$ هي القيمة الذاتية للمصفوفة $A - cI$ حيث c عدد قياسي .

4- أوجد مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5- تحقق من أن المصفوفتين

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

يكون لهما نفس القيم الذاتية ولكن غير متشابهتين.

6- أوجد المصفوفة P بحيث يكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي القيم الذاتية للمصفوفة A ثم احسب A^{13} في كل من الحالات الآتية:

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

7- أوجد أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

التشفير

الباب 3

التشفير
Cryptography

في هذا الفصل ، نقدم طريقة ترميز"تشفير" وفك تشفير الرسائل. أيضًا ، نقوم باستخدام الحساب النمطي وشرح كيف يمكن أحيانًا استخدام إزالة تشفيرالعبارات.

التشفير

يعود تاريخ الرموز السرية إلى الأيام الأولى من الاتصال الكتابي ، وكان هناك زيادة في الاهتمام بالموضوع مؤخرًا بسبب الحاجة إلى الحفاظ على خصوصية المعلومات المنقولة عبر خطوط الاتصال العامة.

تعريف:
علم التشفير هو دراسة ترميز وفك تشفير الرسائل السرية.

أبسط أنواع الشفرات ، تسمى الشفرة الاستبدالية ، هي تلك التي تستبدل كل حرف من الحروف الأبجدية بحرف مختلف.

علي سبيل المثال سوف نقوم باستبدال الحرف كما في الجدول التالي:

Plain	A	B	C	D	E	F	J	H	I	J	K	L	M
Cipher	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Plain	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Cipher	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

مثال:

شفر النص التالي باستخدام الشفرة البديلة الاستبدالية طبقا للجدول السابق

ROME WAS NOT BUILT IN A DAY

الحل:

طبقا للجدول أعلاه نجد يصبح النص المشفر هو

URPH ZDV QRW EXLOW LQ D GDB

شفرة هيل

هنا سوف ندرس أحد أنواع الشفرات فيما تعرف بشفرة هيل والتي سوف نستخدم المصفوفات فيها لتحويل النص إلي نص اخر مشفر.

الآن ، نفترض أن كل حرف من الحروف لدية قيمة عددية من 1 حتي 25 علي حسب ترتيب الحروف الهجائية باستثناء Z تكون قيمتها طبقا للجدول (الجدول 5.1). لأسباب ستتضح لاحقًا ، تم تعيين قيمة Z إلى صفر.

Plain	A	B	C	D	E	F	J	H	I	J	K	L	M
Cipher	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Plain	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Cipher	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Table 5.1:

في أبسط نوع من شفرة هيل هو 2- هيل ، يتم تحويل الأزواج المتتالية من النص الصريح إلى نص مشفر من خلال الإجراءات التالي:

1- اختيار مصفوفة "تسمي بمصفوفة التشفير" قابله للانعكاس من النوع 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2- تقسيم النص المراد تحويلة الي نص مشفر الي أزواج من الحروف وفي حالة كون عدد حروف النص عدد فردي يتم تكرار اخر حرف.

3- يتم تحويل كل زوج من حروف النص الصريح إلي متجه وإعطاء قيمة كل حرف حسب الجدول 5-1

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

4- يتم حساب $A\,P$ وتحويل المتجه الناتج الي ما يناظره من الحروف طبقا للجدول 5-1.

مثال:

باستخدام المصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

شفر النص التالي باستخدام شفرة 2- هيل

I AM HIDING

الحل:

نكتب النص المراد تشفيرة إلي أزواج مثني مثني كالتالي

IA MH ID IN GG

نحول هذه الأزواج إلي ما يقابلها من الأرقام طبقا لجدول 5-1

9 1 13 8 9 4 9 14 7 7

الان سوف نجري عملية التشفير

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

نحول المتجات الي ما تناظرة من حروف لنحصل علي

KC CX QL KP UU

الخطوه الأخيرة سوف نحذف المسافات للحصول علي النص المشفر

KCCXQLKPUU

حساب التطابق بمقياس

من المهم دراسة زمرة الإئتلاف أو التطابق بمقياس لكي نستفيد منها في إعاده النص المشفر إلي النص الصريح " فك التشفير"

تعريف:

بفرض أن **m** عدد موجب وكان $a, b \in \mathbb{Z}$ فأنه يقال بان العددين a, b متطابقان بمقياس **m** إذا تحقق

$$a \equiv b \ (mod\ m) \Leftrightarrow \ m\,|(a-b)$$

$$\Leftrightarrow a-b = km \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$$

نلاحظ هنا أي عدد صحيح a يطابق $mod\ m$ يكون أحد العناصر

$$0, 1, 2, \dots m-1$$

هذه الاعداد تسمي بواقي a يطابق $mod\ m$ ويرمز لها بالرمز

$$Z_m = \{0, 1, 2, \dots m-1\}$$

مثال :

نلاحظ أن هذه العلاقات صحيحه

$$7 \equiv 7 \ (mod\ 5)$$

$$19 \equiv 3 \ (mod\ 2)$$

$$-1 \equiv 25 (mod\ 26)$$

$$12 \equiv 0 \ (mod\ 4)$$

النظرية التالية توضح كيف يمكن إيجاد بواقي a يطابق $mod\ m$

نظرية:

لأي عدد صحيح a و $mod\ m$ وبفرض أن

$$R = remainder\ of\ \frac{|a|}{m}$$

فإن بواقي r ل $\boldsymbol{a}$ يطابق $\boldsymbol{mod\ m}$ تعطي من

$$r = \begin{cases} R & if\ a \geq 0 \\ m - R & if\ a < 0\ and\ R \neq 0 \\ 0 & if\ a < 0\ and\ R = 0 \end{cases}$$

مثال:

احسب بواقي $\boldsymbol{mod\ 26}$ ل

$\boldsymbol{1)\ 87.}$

$\boldsymbol{2)-38.}$

$\boldsymbol{3)-26.}$

الحل:

$$\boldsymbol{1)R = remainder\ \frac{|87|}{26} = 9 \Rightarrow r = 9}$$

أي أن

$$\boldsymbol{87 \equiv 9 \pmod{26}}$$

$$\boldsymbol{2)R = remainder\ \frac{|-38|}{26} = 12 \Rightarrow r = 26 - 12 = 14}$$

أي أن

$$\boldsymbol{-38 \equiv 14 \pmod{26}}$$

$$\boldsymbol{3)R = remainder\ \frac{|-26|}{26} = 0 \Rightarrow r = 0}$$

أي أن

$$\boldsymbol{-26 \equiv 0 \pmod{26}}$$

تعريف:
بفرض أن $a \in Z_m$ فأنه يقال بان هذا العنصر له معكوس a^{-1} إذا تحقق

$$aa^{-1} \equiv 1 \ (mod\ m)$$

نلاحظ هنا أنه يمكن إثبات أنه إذا لم يكن لدى a و m عوامل أولية مشتركة ،عندئذٍ يكون لدى m معكوس وحيد في $mod\ m$ ؛ على العكس من ذلك ، إذا كان a و m لها عامل أولي مشترك ، إذن لا يحتوي a على معكوس وحيد في $mod\ m$.

مثال:
العدد 3 له معكوس ضربي في $mod\ 26$ حيث لايوجد عوامل أولية مشتركة بين 3 و 26
الان سوف نجد هذا المعكوس:
بفرض أن المعكوس هو a ومن تعريف المعكوس

$$3a \equiv 1 \ (mod\ 26) \Leftrightarrow 3a - 1 = 26k \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{26k+1}{3}$$

هنا سوف نختار قيمة ل k لكي تجعل قيمة a عدد صحيح لذا فإن $k = 1$ وبالتالي فإن قيمة المعكوس $a = 9$.

مثال:
العدد 4 ليس له معكوس ضربي في $mod\ 26$ حيث يوجد 2 عوامل أولية مشتركة بين 4 و 26.

الجدول التالي يعطي العناصر التي لها معكوس ضربي في $mod\ 26$

a	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
a^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

Table 5.2: multiplicative inverse in Modulo 26

فك الشفرة

يجب أن يكون لكل تشفير مفيد إجراء لفك التشفير. في حالة تشفير هيل ، يستخدم لفك التشفير معكوس $(\boldsymbol{mod\ 26})$ لمصفوفة التشفير. على وجه الدقة ، إذا كانت m عددًا صحيحًا موجبًا ، فيُقال إن المصفوفة المربعة A معرفة علي $\boldsymbol{Z_{26}}$ تكون قابلة للانعكاس $\boldsymbol{mod\ 26}$ إذا كانت هناك مصفوفة B معرفة علي $\boldsymbol{Z_{26}}$ بحيث

$$\boldsymbol{AB \equiv BA \equiv I\ (mod\ m)}$$

<u>الان سوف نعرض خطوات فك الشفرة:</u>

1- نوجد معكوس مصفوفة التشفير في $\boldsymbol{mod\ 26}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

2- تقسيم النص المراد فك شفرته الي أزواج من الحروف وفي حالة كون عدد حروف النص عدد فردي يتم تكرار اخر حرف.

3- يتم تحويل كل زوج من حروف النص الصريح إلي متجه وإعطاء قيمة كل حرف حسب الجدول 5-1

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

4- يتم حساب BC وتحويل المتجه الناتج الي ما يناظره من الحروف طبقا للجدول 5-1.

من المفيد عرض كيف يمكن إيجاد معكوس المصفوفة التي عناصرها موجوده في $\boldsymbol{Z_{26}}$

بفرض أن مصفوفة التشفير هي

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

والتي عناصرها موجوده في $\boldsymbol{Z_{26}}$ فإن

$$\det(A) = ad - bc\ \ \boldsymbol{mod\ 26}$$

وبما أن A مصفوفة قابلة للانعكاس فبالتالي $ad - bc$ لاتقبل القسم عل 2 أو 13

ونستطيع حساب المعكوس من العلاقة :

$$A^{-1} = (ad-bc)^{-1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \pmod{26}$$

مثال :

أوجد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

في $\boldsymbol{mod\ 26}$.

الحل:

بما أن محدد المصفوفة يعطي من العلاقة

$$\det(A) = 5.3 - 6.2 = 3$$

وبالتالي فإن معكوس محدد المصفوفة في $\boldsymbol{mod\ 26}$ هو

$$(ad-bc)^{-1} = 3^{-1} = 9$$

لذا فإن معكوس المصفوفة يكون

$$A^{-1} = 9\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & -54 \\ -18 & 45 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

مثال:

استرجع النص الأصلي للرسالة المشفرة بشفرة 2- هيل

GTNKGKDUSK

إذا علمت بأن مصفوفة التشفير هي

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل:

أولا: سوف نوجد معكوس المصفوفة A في $\boldsymbol{mod\ 26}$ من المثال السابق نجد أن معكوس المصفوفة A هي المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$$

ثانيا: سوف نحول حروف الرسالة إلي منا تناظرة من أرقام طبقا للجدول الجدول 5-1 فنحصل علي

7 20 14 11 7 11 4 21 19 11

للحصول علي النص الأصلي سوف نضرب كل متجه مشفر في المصفوفة B كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 487 \\ 436 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{mod\ 26})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 278 \\ 321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{mod\ 26})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271 \\ 265 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{mod\ 26})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 508 \\ 431 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{mod\ 26})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 361 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{mod\ 26})$$

وبتحويل قيم المتجهات الناتجة إلى حروف نحصل علي

ST RI KE NO WW

وبالتالي النص الأصلي هو

STRIKE NOW

تمارين

1- احصل علي شفرة 2-هيل للرسالة التالية

DARK NIGHT

باستخدام المصفوفة التالية

$i)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$ii)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2- أوجد معكوس المصفوفات التالية في $\boldsymbol{mod\ 26}$

$i)\ \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$

$ii)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

$iii)\ \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$

ثم استخدم هذا المعكوس في استرجاع النص الأصلي للنص المشفر التالي

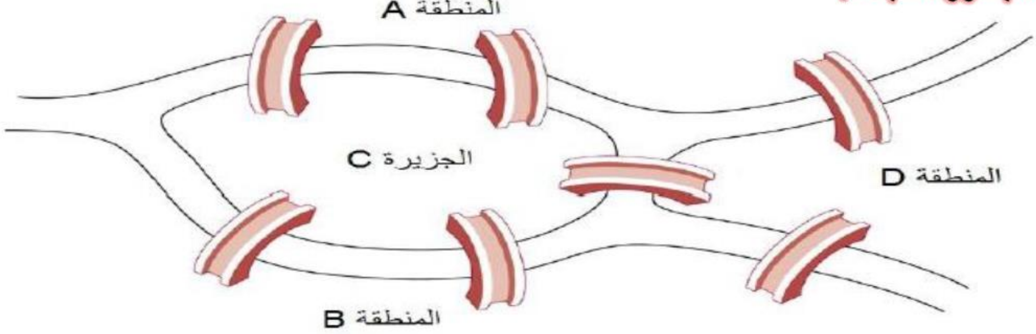
SAKNOXAOJX

الباب 3

نظرية البيان
Graph Theory

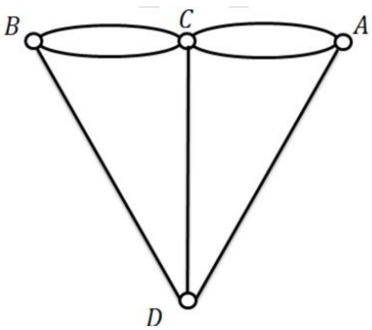
تعتبر نظرية البيان لها الفضل في استكشاف طرق البرهان في الرياضيات المتقطعة ، بالإضافة إلي العديد من التطبيقات في شتي النواحي الحسابية والجتماعية والعلوم الطبيعيةً وكذلك يستند إلى نتائجها كما أن نظرية البيان تعد من العلم الحديث نسبيا ، حيث ظهرت في بداية القرن الثامن عشر ، ويعود الفضلً في ظهورها إلى عالم الرياضيات السويسري ليونارد أولر حيث قام بتقديم أقدم وثيقة في نظرية البيان في عام 1763 م ، وهذه الوثيقة تعرف بمسألة الجسور السبعة لمدينة كونغ سبرنغ ، حيث ظهرت في البداية نظرية البيان بوصفها أداة كل الألغاز والألعاب.

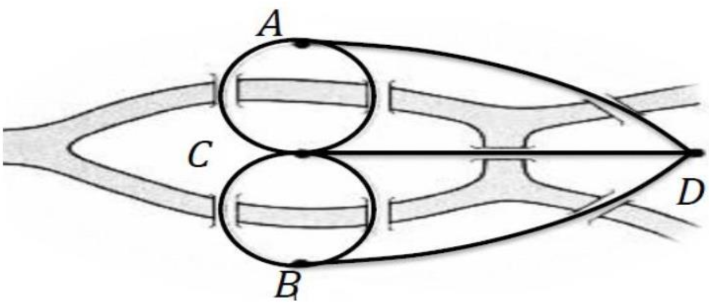
مسألة الجسور السبعة :



هل نستطيع التجوال في هذه الجسور السبعة دون أن نمر على الجسر مرتين ؟؟

حاول العالم أويلر حل هذه المسألة لمدة 11عاماً لكن دون جدوى ، فحاول أويلر أن يرسم نموذجاً لهذه المسألة ، فكانت الرسمة كالآتي:





حيث أطلق على كل يابسة (منطقة) اسم عقدة ورمز لها $\{A, B, C, D\}$، وعبر عن الجسور بأضلاع واصلة بين العقد ، وبما أنه بين المنطقة A والمنطقة C جسران يصلان بينهما فرسم ضلعين ، وبالمثل للمنطقتين C و B وكذلك الامر للمنطقة Dحيث تصل المناطق الثلاث ببعضها.

مسألة الألوان الأربعة:

وهي من المسائل القديمة في البيان ، كان قد طرحها الطالب فريدريك كوثري على العالم دي مورغان عام1852م وقد كانت تنص على ما يلي:
هل صحيح أن أي خارطة يمكن تلوينها بأربعة ألوان بحيث أي دولتين متجاورتين لها ألوان مختلفة ؟
بقيت المسألة دون برهان قرابة قرن وأكثر ، قدم الُمحامي كيمب حلاً إيجابياً للمسألة وقد كرم على حله ، حيث انتخب رئيساً للأكاديمية الرياضية في لندن ، لكن في عام 1890م اثبت هاود أن إثبات كيمب خاطئ ، كما تعد مسألة الألوان الأربعة من أهم مسائل البيان لأنها كانت خطوة كبيرة، كما قادت إلى دراسة في تلوين البيان وأنواع جديدة في الدراسات.

تطبيق الجبر الخطي في الرسم البياني الموجه ونظرية الألعاب

Directed Graph & Games Theory:

في ضوء دراستنا لنظرية المجموعات علمنا أن التعريف الرياضي للمجموعة هو أنها " تجمع من العناصر المعرفة تعريفاً جيداً أو المحددة تحديداً تاماً " .

وإذا احتوت المجموعة على عدد محدود من العناصر تُسمى مجموعة منتهية Finite Set

أما إذا احتوت المجموعة على عدد لانهائي من العناصر تُسمى مجموعة غير محدودة ، أو مجموعة لانهائية Infinite Set .

ويمكن لمجموعة منتهية $G = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ أن تكون عناصرها (أشخاص، حيوانات ، بلدان، مؤسسات، مدن، فِرق رياضية، وما إلى ذلك ...).

وقد يرتبط العنصران p_1, p_2 من عناصر المجموعة ببعضهما البعض بعلاقة ما كما يلي: الشخص p_1 قريب للشخص p_2 ، أو الحيوان p_1 يعتمد في طعامه على الحيوان p_2 أو البلدة p_1 تابعة للبلدة p_2 ، أو المدينة p_1 مرتبطة بالمدينة p_2 بخط سكة حديد ، أو المؤسسة p_1 تبيع منتجاتها للمؤسسة p_2 ، أو الفرِقة الرياضية p_1 تلعب مع الفرقة p_2 في نفس الدوري ، أو ....مثل هذه المجموعات يمكن تمثيلها برسم بياني موجه ، وعناصر هذه المجموعة تُسمى بالقمم أو الرؤوس الموجهه Directed Vertices

وعندما يرتبط العنصر p_i بالعنصر p_j بحيث $i \neq j$ بعلاقة ما نكتب $p_i \to p_j$ (ويُقرأ p_i تصل إلى p_j) ، وتُسمى مجموعة الثنائيات المرتبة (p_i, p_j) بمجموعة الحواف أو الحدود الموجهه Directed Edges .

ويناظر كل رسم بياني موجه مصفوفة تُسمى مصفوفة القمة Vertex Matrix تُحسب عناصرها (m_{ij}) طبقاً للقاعدة:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & if \;\; p_i \to p_j \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

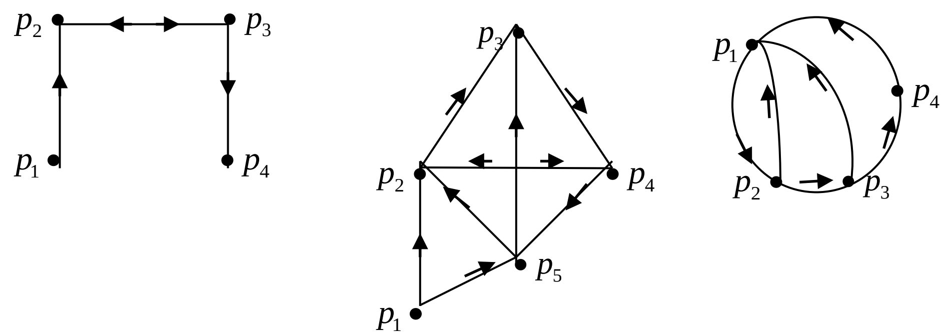
أمثلة:

1- مصفوفة القمة المناظرة لكل من الرسوم البيانية الموجهه الآتية:

$$G_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\};\ p_1 \to p_2\,, p_2 \to p_3\,, p_3 \to p_2\,, p_3 \to p_4\,.$$

$$G_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\};\ p_1 \to p_2\,, p_1 \to p_5\,, p_2 \to p_3\,, p_2 \to p_4\,,$$
$$p_3 \to p_4\,, p_4 \to p_2\,, p_4 \to p_5\,, p_5 \to p_2\,, p_5 \to p_3\,.$$

$$G_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\};\ p_1 \to p_2\,, p_2 \to p_1\,, p_2 \to p_3\,, p_3 \to p_1\,,$$
$$p_3 \to p_4\,, p_4 \to p_1\,.$$



تكون على الترتيب:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ **ملاحظات:**

(1) عناصر مصفوفة القمة تكون إما 0 أو 1

(2) عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة القمة تكون جميعها أصفارا.

وبالتالي فإن كل مصفوفة بالمواصفات السابقة تناظر رسم بياني موجه وحيد ، والعكس صحيح.

(مثال): المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ تناظر الرسم البياني الموجه الآتي:

$$G=\{p_1,p_2,p_3,p_4\};\ p_1\to p_2\,,p_1\to p_3\,,p_2\to p_3\,,p_3\to p_1\,,p_3\to p_4\,.$$

2- أسرة مكونة من أم وأب وبنت وابنين ، والأم يمكنها التأثير على كل من ابنتها وابنها الأكبر ، والأب يمكنه التأثير على كل من الابنين ، والبنت يمكنها التأثير على أبيها ، والإبن الأكبر يمكنه التأثير على أخيه الأصغر ، والإبن الأصغر يمكنه التأثير على والدته.

عبر عن علاقة التأثير التي بين أفراد هذه الأسرة بصورة مصفوفية.

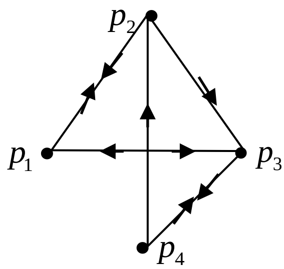
<u>الحل</u>: نعبر عن الأسرة كمجموعة رسم بياني موجه كما يلي:

$$G=\{M,F,D,OS,YS\};\ M\to D,M\to OS,F\to OS,F\to YS,D\to F\,.$$
$$OS\to YS\ ,\ YS\to M\,.$$

ومن ثم تكون مصفوفة القمة المناظرة كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3- الشكل التالي يمثل خط سير رحلة طيران بين أربعة مدن رئيسية $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$



عبر عنه بصورة مصفوفية.

الحل: نعبر عن خط سير رحلة الطيران كمجموعة رسم بياني موجه كما يلي:

$$G = \{p_1, p_2, p_3, p_4\};\ p_1 \to p_2,\ p_1 \to p_3,\ p_2 \to p_1,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to p_1,\ p_3 \to p_4,\ p_4 \to p_2,\ p_4 \to p_3.$$

ومن ثم تكون مصفوفة القمة المناظرة كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✓ **تمارين**:

اكتب الصورة المصفوفية المناظرة لكل من الرسوم البيانية الموجهه الآتية:

$$G_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\};\ p_1 \to p_3,\ p_1 \to p_4,\ p_2 \to p_1,\ p_2 \to p_3,\ p_2 \to p_4,\ p_3 \to p_1,\ p_3 \to p_2,\ p_3 \to p_4.$$

$$G_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\};\ p_1 \to p_2,\ p_1 \to p_3,\ p_1 \to p_4,\ p_2 \to p_1,\ p_2 \to p_3,\ p_2 \to p_4,\ p_3 \to p_1,\ p_3 \to p_2,\ p_4 \to p_1,\ p_4 \to p_3.$$

$$G_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\};\ p_1 \to p_3,\ p_1 \to p_4,\ p_2 \to p_1,\ p_2 \to p_3,\ p_2 \to p_5,\ p_3 \to p_4,\ p_4 \to p_2,\ p_5 \to p_1,\ p_5 \to p_3,\ p_5 \to p_4.$$

$$G_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\};\ p_1 \to p_2,\ p_1 \to p_3,\ p_2 \to p_5,\ p_3 \to p_1,\ p_3 \to p_4,\ p_4 \to p_3,\ p_5 \to p_3.$$

$$G_5 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\};\ p_1 \to p_2,\ p_1 \to p_4,\ p_2 \to p_1,\ p_3 \to p_2,\ p_3 \to p_4,\ p_3 \to p_5,\ p_3 \to p_6,\ p_4 \to p_6,\ p_5 \to p_6,\ p_6 \to p_3,\ p_6 \to p_5.$$

تعريف: ليكن $G = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ رسم بياني موجه. فإذا كان لأي عنصرين p_i, p_j إما $p_i \to p_j$ أو $p_j \to p_i$ حيث $i \neq j$ وليس الاثنان معاً
فإن G يُسمى رسم بياني موجه سائد Dominance Directed Graph
وعندما يكون $p_i \to p_j$ فهذا يعني أن العنصر p_i (سائد أو فائز) على العنصر p_j .
ومثال على ذلك الدورات الرياضية والتي يتبارى فيها عدد من الفِرق الرياضية بحيث يلاعب كل فريق منها فريق أخر مرة واحدة فقط ، وبالتالي يتم ترتيب الفِرق بناءاً على رصيد كل فريق من نقاط الفوز ، حتى التصفية النهائية ليتحدد من الفائز بالبطولة.
وتُحسب نقاط الفوز والتي تُسمى أيضاً نقاط القوى Power of Team كما يلي:
نكتب أولاً مصفوفة القمة المناظرة ، ولتكن M مثلاً (والتي تكون مصفوفة مربعة) ، ثم نحسب M^2 ثم نحسب المصفوفة الناتجة من المجموع $A = M + M^2$ ثم نجمع عناصر كل صف من صفوف المصفوفة A فتكون نقاط القوى للفريق الأول تساوي مجموع عناصر الصف الأول، ونقاط القوى للفريق الثاني تساوي مجموع عناصر الصف الثاني، وهكذا . ...

✓ **مثال**:

تتبارى خمس فِرق $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ في دورة رياضية بحيث يلاعب كل فريق منها فريق أخر مرة واحدة فقط ، وكانت نتائج الفوز على النحو التالي:

$$T_1 \to T_3, T_4 \ , \ T_2 \to T_1, T_3, T_5 \ , \ T_3 \to T_4 \ , \ T_4 \to T_2 \ , \ T_5 \to T_1, T_3, T_4 .$$

رتب الخمس فِرق حسب رصيد كل منها (وذلك باستخدام المصفوفات).

الحل: مصفوفة القمة المناظرة تكون:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\therefore M^2=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&2&3&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&1&2&0\end{pmatrix},$$

$$M+M^2=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&2&3&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&2&0\\2&0&3&3&1\\0&1&0&1&0\\1&1&1&0&1\\1&1&2&3&0\end{pmatrix},$$

$$\sum(a_{1j})=4\ ,\sum(a_{2j})=9\ ,\ \sum(a_{3j})=2\ ,\ \sum(a_{4j})=4\ ,\ \sum(a_{5j})=7.$$

وبالتالي ترتيب الفِرق يكون كالتالي:

الفِرقة Team	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
الرصيد Power	4	9	2	4	7
الرتبة Rank	3	1	4	3 (tie)	2

واضح أن الفريق T_2 هو الأول في الترتيب.

تمارين:

1- تتبارى أربع فِرق $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ في دورة رياضية بحيث يلاعب كل فريق منها فريق أخر مرة واحدة فقط ، وكانت نتائج الفوز على النحو التالي:

$$T_1 \to T_3, T_4 \ , \ T_2 \to T_1 \ , \ T_3 \to T_2, T_4 \ , \ T_4 \to T_2 .$$

رتب الأربع فِرق حسب رصيد كل منها (باستخدام المصفوفات).

==

2- تتبارى خمس فِرق $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ في دورة رياضية بحيث يلاعب كل فريق منها فريق أخر مرة واحدة فقط ، وكانت نتائج الفوز على النحو التالي:

$$T_1 \to T_2, T_3, T_4 \ , \ T_2 \to T_3, T_5 \ , \ T_3 \to T_4, T_5 \ , \ T_4 \to T_2 \ , \ T_5 \to T_1, T_4 .$$

رتب الخمس فِرق حسب رصيد كل منها (باستخدام المصفوفات).

==

3- تتبارى خمس فِرق $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ في دورة رياضية بحيث يلاعب كل فريق منها فريق أخر مرة واحدة فقط ، وكانت نتائج الفوز على النحو التالي:

$$T_1 \to T_2, T_3, T_4 \ , \ T_2 \to T_4, T_5 \ , \ T_3 \to T_2, T_4, T_5 \ , \ T_4 \to T_5 \ , \ T_5 \to T_1 .$$

رتب الخمس فِرق حسب رصيد كل منها (باستخدام المصفوفات).

==

الباب الرابع

تطبيقات الجبر الخطي

فيما يلي سنعرض بعض التطبيقات للجبر الخطي في أفرع الرياضيات المختلفة مثل التحليل الرياضي ، والمعادلات التفاضلية ، والهندسة.

١- الدالة الأسية في حالة المصفوفات:

(**١-١**)**مقدمة**: لدراسة الدالة الأسية $y=e^x$ في حالة المصفوفات والتي تلعب دوراً هاماً في التحليل الرياضي توجد عدة طرق لتعريف الدالة الأسية من ضمن هذه الطرق وأسهلها الطريقة المباشرة لتعريف الدالة الأسية باستخدام متسلسلات القوى ، أي أن

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \qquad ; |x| \prec \infty .$$

متسلسلة القوى في الطرف الأيمن تتقارب لأي قيمة حقيقية (أو مركبة) للمتغير x ويكون المجموع لهذه المتسلسلة مساوياً e^x وفي دراستنا هذه سنبحث امتداد هذا التعريف في حالة المصفوفات التي عناصرها الداخلية أعداد حقيقية أو مركبة ، ونعرف تقارب متسلسلة المصفوفات:

$A_0+A_1+A_2+\dots ; A_n = (a_{ij}^{(n)})$.

لبحث هذا التقارب سوف نستخدم صور متسلسلات مركباتها كما يلي:

$a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \dots ; (1\le i \le n , 1\le j \le n)$.

وفي هذه الحالة يكون $\sum_{n=0}^{\infty} A = (\sum_{n}^{\infty} a_{ij}^{n})$.

ويُقال أنه مجموع متسلسلة لانهائية (من المصفوفات) ، وبنفس الأسلوب لمفهوم التقارب والتباعد والنهايات ، وما إلى ذلك للمتتابعات من المتجهات يمكن تعريفه للمصفوفات .

(١-٢)تعريف: لتكن $A = (a_{ij}^{(0)}), A_1 = (a_{ij}^{(1)}), A_2 = (a_{ij}^{(2)}), \ldots$ متتابعة مصفوفات من النوع $m\times n$ فإن لأي زوج من الأعداد الصحيحة i,j تكون المتسلسلة $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{ij}^{(n)})$ تقاربية ، والمجموع اللانهائي من المصفوفات...A_0, A_1, A_2 يُعرف بالمصفوفة $C = (c_{ij})$ حيث C مصفوفة من النوع $m\times n$ ولأي زوج من الأعداد الصحيحة i,j يكون $c_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ij}^{(n)}$.

(١-٣)مثال:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} & \frac{1}{1!} \\ 0 & \frac{1}{3^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2!} \\ 0 & \frac{-1}{3^3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^4} & \frac{1}{3!} \\ 0 & \frac{1}{3^4} \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

(١-٤)تعريف: إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n فإن $\exp(A)$ تُعرف بالمصفوفة:

$$E + A + A^2/2! + A^3/3! + \ldots$$

حيث E مصفوفة الوحدة ، وإذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \,,\ \lim_{n\to\infty} B_n = B \,.$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B \,,\ \lim_{n\to\infty} A_n B_n = AB \,.$$

(١–٥)نتيجة: الدالة الأسية للمصفوفات تحقق قانون الدالة الأسية العادية وهذا يعنى أنه إذا كانت A,B تبادليتين أي أن $AB = BA$ فإن

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

وإثبات هذا القانون يشبه تماماً إثبات القانون $e^{a+b} = e^a.e^b$ في حالة الدالة الأسية للأعداد .

(١–٦)نظرية: إذا كانت $F(t) = \exp(tA)$ فإن $(d/dt)\,F(t) = F'(t) = A.F(t)$.

حيث t قيمة حقيقية ، وأن المشتقة $F'(t)$ لمصفوفة عناصرها دوال من المتغيرات الحقيقية المعرفة .

(١–٧)مثال: احسب قيمة $\exp(tA)$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

الحل:

$$\exp(tA) = E + tA + (t^2/2!)A^2 + (t^3/3!)A^3 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(t^n/n!)A^n].$$

وبوضع المصفوفة A على الصورة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E+K.$$

$$\therefore k^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3K,$$

$$K^3 = K^2.K = 3K.K = 3K^2 = 3.3K = 9K,$$
$$K^4 = K^3.K = 9K.K = 9K^2 = 9.3K = 27K,$$

وهكذا يمكن حساب $K^5, K^6, \ldots$ ، نحسب بعد ذلك قيم $A^2, A^3, \ldots, A^n$ فيكون

$$A^2 = (E+K)^2 = E + 2K + K^2 = E + 2K + 3K = E + 5K,$$
$$\therefore A^2 = E + (1+4)K$$
$$A^3 = (E+K)^3 = (E+K)(E+K)^2 = (E+K)(E+5K)$$
$$= E + 6K + 5K^2 = E + 6K + 15K = E + 21K,$$
$$\therefore A^3 = E + (1+4+4^2)K.$$

وباستخدام الاستنتاج الرياضي ينتج أن

$$A^n = E + (1+4+\ldots+4^{n-1})K.$$

والمتسلسلة التي بين القوسين هندسية حدها الأول 1 وأساسها 4

$$\therefore A^n = E + ((4^n-1)/3)K.$$

ومن ثم يكون:

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n [E + (\frac{4^n - 1}{3})K]$$
$$= E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4t)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!})(\frac{K}{3})$$
$$= E e^t + \frac{1}{3}(e^{4t} - e^t)K.$$

وبالتعويض عن

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

تنتج قيمة $\exp(tA)$.

٣- إيجاد الحل العام لمجموعة المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبة الأولى:

(٣-١)**تعريف**: مما سبق علمنا كيفية تعيين المتجهات الذاتية لأي مصفوفة مربعة A المناظرة لقيمة ذاتية λ وعرفنا أنها هي المتجهات غير الصفرية التي تحقق المعادلة $Ax = \lambda x$ (وبطريقة أخرى المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية λ هي المتجهات غير الصفرية في فضاء الحل للمعادلة $(\lambda I\text{-}A)x = 0$ ويُسمى فضاء الحل هذا **الفضاء الذاتي** للمصفوفة A

المناظر للقيمة الذاتية λ .

ويمكن تعريف القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمؤثرات الخطية بالمثل للمصفوفات.

يُسمى العدد القياسي λ **قيمة ذاتية** للمؤثر الخطي$T{:}V\rightarrow V$ إذا وُجد متجه غير صفري x في V بحيث يكون $T\,x = \lambda\, x$ ويُسمى المتجه x **متجهاً ذاتياً** للمؤثر T مناظرا للقيمة λ . والمتجهات الذاتية للمؤثر الخطي T المناظرة للقيمة λ تكون هي المتجهات غير الصفرية في نواة $(\lambda I\text{ -}T)$ تُسمى هذه النواة **الفضاء الذاتي** للمؤثر T المناظر للقيمة λ .

(٣-٢)**مثال**: أوجد أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون $(\lambda\text{-}1)(\lambda\text{-}5)^2 = 0$

(تحقق من ذلك ؟)

وإذاً القيم الذاتية للمصفوفة A تكون $\lambda=1$, $\lambda=5$ مكرر

والمتجه $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ يكون متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظرا للقيمة λ

إذا وإذا فقط كانت X حلا غير تافه للمعادلة $(\lambda I-A)X = 0$ أي أن:

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1).$$

وإذا كانت $\lambda = 5$ فإن المعادلة (1) تصبح كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ويكون الحل هو $x_1 = -s$,$x_2 = s$, $x_3 = t$ (تحقق من ذلك ؟).

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة $\lambda = 5$ هي

المتجهات غير الصفرية والتي تكون على الصورة:

$$X = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

وحيث إن المجموعة $S = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ تُنشئ الفضاء الذاتي للمصفوفة A

وأن متجهات S مستقلة خطياً (تحقق من ذلك؟)

فتكون S أساساً للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda = 5$.

وإذا كانت $\lambda = 1$ فإن (1) تصبح:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ويكون الحل هو $x_1 = t\ , x_2 = t\ , x_3 = 0$ (تحقق من ذلك ؟).

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة $\lambda=1$ هي المتجهات غير الصفرية والتي على الصورة:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

وإذاً يكون المتجه $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ أساس للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda=1$.

(**٣-٣**)**تعريف**: سنوضح فيما يلي إحدى الطرق التي يُطبق فيها الجبر الخطي لحل مجموعة معينة من المعادلات التفاضلية .

نفرض أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى على الصورة:

$y' = ay \qquad (1).$

حيث a ثابت ، والدالة $y = f(x)$ دالة مجهولة يُراد تعيينها ، وأن $y' = (dy/dx)$ مشتقتها وأن لهذه المعادلة حلول لا نهائية في الصورة:

$y = c\,e^{ax} \qquad (2) .$

حيث c ثابت اختياري .

كل دالة على هذه الصورة تكون حل للمعادلة $y'= ay$ حيث

$y' = c\,ae^{ax} = ay .$

وبالعكس كل حل للمعادلة $y' = ay$ يجب أن يكون دالة على الصورة $c\,e^{ax}$

وتُسمى المعادلة (2) **الحل العام** للمعادلة التفاضلية $y' = ay$.

وأحيانا تنص المسألة على بعض الشروط الابتدائية التي تسمح بتعيين حل خاص من الحل العام ، وذلك بالتعويض بهذه الشروط الابتدائية .

ولدراسة حلول مجموعة المعادلات التفاضلية التي على الصورة:

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3) \\ y'_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n . \end{aligned}$$

حيث $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots , y_n = f(x_n)$ دوال يُراد تعيينها ،

والمعاملات a_{ij} ثوابت وباستخدام المصفوفات يمكن كتابة (3) على الصورة:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

أو في الصورة المصفوفية المختصرة:

$y' = A\,y.$

(**٣-٤)مثال**: اكتب مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$y'_1 = 3y_1 , \quad y'_2 = 2y_2 , \quad y'_3 = 5y_3 .$

في صورة مصفوفات. ثم أوجد الحل العام لها ، والحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية الآتية:

$y_1(0) = 1 , \quad y_2(0) = 4 , \quad y_3(0) = -2.$

الحل:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

أي أن $y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ويمكننا حل المعادلات بحل كل معادلة على حده لأن كل معادلة تتضمن دالة مجهولة واحدة فقط وباستخدام (2) نحصل على:

$y_1 = c_1\,e^{3x} , \quad y_2 = c_2\,e^{-2x} , \quad y_3 = c_3\,e^{5x} .$

وبصيغة المصفوفات يكون:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{pmatrix}.$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائية المعطاة نحصل على:

$$1 = y_1(0)=c_1e^0 = c_1 .$$
$$4 = y_2(0)=c_2e^0 = c_2 .$$
$$-2 = y_3(0)=c_3e^0 = c_3 .$$

لهذا يكون الحل المستوفي للشروط الابتدائية لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{pmatrix} .$$

(**٣–٥)ملاحظة:** مجموعة المعادلات التفاضلية في المثال السابق كانت سهلة الحل لأن كل معادلة تضمنت دالة مجهولة واحدة فقط ، وذلك لأن مصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات التفاضلية كانت مصفوفة قطرية والسؤال الآن كيف نبحث حل مجموعة المعادلات التفاضلية $Y' = AY$ والتي لها المصفوفة A ليست قطرية ؟.

الإجابة على هذا السؤال في الطريقة الآتية:

(٣–٦)حل مجموعة المعادلات التفاضلية $Y'= AY$ إذا كانت A مصفوفة غير قطرية:

الفكرة تتلخص في تحويل المصفوفة A إلى مصـــفوفة قطرية ، ولذلك سنجرى تعويضاً عن المصفوفة Y يؤدى إلى مجموعة معادلات تفاضلية بمصفوفة معاملات قطرية ، وبذلك نستطيع حل هذه المجموعة الجديدة بالطريقة السابقة ، ومن ثم نســتخدم هذا الحل لتعيين حل المجموعة الأصلية ،

كما سيتضح فيما يلي:

نفرض لدينا مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\begin{aligned} y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \ldots + p_{1n}u_n \\ y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \ldots + p_{2n}u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \ldots + p_{nn}u_n . \end{aligned} \qquad (5)$$

ويمكن كتابة (5) بصيغة المصفوفات على الصورة:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

أي أن

$$Y = P\,U \qquad (6).$$

والمعاملات P_{ij} ثوابت يُراد تعيينها بحيث يكون لمجموعة المعادلات الجديدة المتضمنة للدوال المجهولة $u_1, u_2, \ldots, u_n$ مصفوفة معاملات قطرية .

وبإجراء عملية التفاضل على كل معادلة من (5) ينتج أن:

$$Y' = P\,U' \qquad (7) .$$

وبالتعويض بالمعادلتين (7) , (6) في المعادلة $Y' = AY$ نحصل على:

$$PU' = A\,(P\,U) .$$

وإذا اعتبرنا أن المصفوفة P قابلة للانعكاس فإننا نحصل على:

$$U' = (P^{-1}\,A\,P)\,U = D\,U .$$

حيث $D = P^{-1}\,A\,P$ ويكون الآن اختيار P واضحاً ، فإذا أردنا لمصفوفة المعاملات D أن تكون قطرية ،فيجب أن نختار P لتكون مصفوفة تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية .

مما سبق نستنتج أنه لحل مجموعة المعادلات التفاضلية $Y' = AY$ والتي لها مصفوفة معاملات A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية نتبع ما يلي:

(١) نوجد المصفوفة P التي تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية .

(٢) نستخدم التعويض $Y = PU, Y' = PU'$ لنحصل على مجموعة معادلات جديدة على الصورة $U' = D U$ حيث $D = P^{-1}A P$.

(٣) نحل مجموعة المعادلات التفاضلية $U' = D U$.

(٤) نعين قيمة Y من المعادلة $Y = P U$.

(**٣–٧**)**مثال**: أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$y'_1 = y_1 + y_2 \ , \quad y'_2 = 4y_1 - 2y_2 \ .$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$$y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 6 \ .$$

الحل: مصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات المعطاة تكون هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ووفقاً للمفهوم السابق للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات فإن المصفوفة A تكون قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية بواسطة أي مصفوفة أعمدتها متجهات مميزة مستقلة خطياً للمصفوفة A وحيث إن:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \ .$$

فتكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 2, \lambda = -3$

ومن تعريف المتجهات الذاتية يكون $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ متجهاً مميزاً للمصفوفة A مناظراً للقيمة الذاتية λ إذا وإذا فقط كان x حلاً غير صفرياً للمعادلة $(\lambda I-A)\,x=0$ أي أن:

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1\\ -4 & \lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

فإذا كانت λ=2 فإن

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

ويكون الحل هو $x_1=t\ ,\ x_2=t$ ، ولهذا فإن

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

وإذاً يكون المتجه $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ أساساً للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة λ =2 .

وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن المتجه $p_2=\begin{pmatrix}-1/4\\1\end{pmatrix}$ يكون أساساً للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة λ = -3 .

وإذاً المصفوفة $P=\begin{pmatrix}1 & -1/4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية ويكون:

$$D=P^{-1}A\,P=(4/5)\begin{pmatrix}1 & 1/4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/4\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

وبذلك يؤدى التعويض $Y=P\,U\ ,\ Y'=P\,U'$ إلى مجموعة المعادلات القطرية الجديدة الآتية:

$$U' = D\,U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow u'_1 = 2u_1\ ,\ \ u'_1 = 2u_1\ .$$

ويكون حل مجموعة المعادلات هذه هو $u_1 = c_1\, e^{2x}\ ,\ \ u_2 = c_2\, e^{-3x}$.

$$\therefore U = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

ومن ثم تعطى المعادلة $Y= P\,U$ الحل بالنسبة إلى Y كما يلي:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} - (1/4) c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

أي أن الحل العام لمجموعة المعادلات يكون:

$$y_1 = c_1\, e^{2x} - (1/4)\, c_2\, e^{-3x}\ \ ,\ \ \ y_2 = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-3x}\ .$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائية نحصل على:

$$c_1 - (1/4)\, c_2 = 1\ ,\ \ c_1 + c_2 = 6\ .$$

$$\therefore\ c_1 = 2\ \ ,\ c_2 = 4\ .$$

ويكون الحل الخاص المطلوب لمجموعة المعادلات التفاضلية هو:

$$y_1 = 2e^{2x} - e^{-3x}\ ,$$
$$y_2 = 2e^{2x} + 4e^{-3x}\ .$$

ملاحظة: لقد افترضنا في دراستنا هذه أن مصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات التفاضلية $Y' = AY$ تكون قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ، فإذا لم تكن الحالة كذلك ، فيجب أن نستخدم طرق أخرى للحل . سنبحث هذه الطرق في دراسات عليا عن مجال دراستنا هذه.

٤- الصيغة التربيعية – تطبيق في القطوع المخروطية:

(٤-١)تعريف: تُسمى المعادلة:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \qquad (1).$$

بمعادلة الدرجة الثانية في x ,y حيث a, b, c, f, g, h أعداد حقيقية.

ويُشترط أن يكون أحد الأعداد a, h, b على الأقل لا يساوى الصفر .

التعبير $ax^2 + 2hxy + y^2$ يُسمى **الصيغة التربيعية المرافقة** .

سندرس الآن كيفية تدوير المحاور لحذف معامل xy ، ثم كيفية التعرف على القطوع المخروطية التي تم تدويرها ، وذلك بوضعها في الصورة القياسية .

هذا ويمكن كتابة المعادلة (1) بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0.$$

أو في الصورة المختصرة:

$$X^T A X + K X + c = 0 \qquad (2).$$

حيث

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}.$$

وبهذا الاصطلاح تكون الصيغة التربيعية المرافقة للمعادلة (2) هي $X^T A X$

تُسمى المصفوفة المتماثلة A **مصفوفة الصيغة التربيعية** $X^T A X$.

(٤–٢) إيجاد المحاور الأساسية (الرئيسية) للقطع المخروطي:

إذا اعتبرنا قطعاً مخروطياً ممثلاً بالمعادلة:

$$X^T\ A\,X + K\,X + c = 0.$$

يمكن تدوير محاور الإحداثيات X,Y بحيث ينعدم معامل x′y′ في الإحداثيات الجديدة وذلك باتباع الخطوات التالي:

(١) نوجد مصفوفة $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ تحول المصفوفة A عمودياً إلى الصورة القطرية.

(٢) نبدل أعمدة P إذا لزم الأمر لجعل $|P| = 1$ ويؤكد هذا أن تحويل الإحداثيات العمودي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (3).$$

أي أن $X = P\,X'$ يكون دوراناً .

(٣) للحصول على معادلة القطع المخروطي في الإحداثيات الجديدة X′Y′ نعوض من (3) في (2) فنحصل على:

$$(PX')^T\ A\ (PX') + K(PX') + c = 0\ .$$

أو على الصورة:

$$X'^T\ (P^T A\ P)X' + (KP)X' + c = 0 \qquad (4).$$

حيث P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية:

$$P^T\ A\ P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

حيث λ_1, λ_2 هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A .

ولذلك يمكن كتابة المعادلة (4) في الصورة:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + c = 0 .$$

أو في الصورة:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' x' + g' y' + c = 0 .$$

حيث $f' = f p_{11} + g p_{21}$, $g' = f p_{12} + g p_{22}$.

وهذه معادلة من الدرجة الثانية خالية من معامل $x'y'$ وباستخدام إكمال المربع يمكن تعيين نوع القطع وأطوال المحاور الأساسية له .

ونخلص مما سبق بالنتيجة الآتية:

(٤–٣)نتيجة: لتكن $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ معادلة قطع مخروطي ، ولتكن $X^T A X = ax^2 + 2hxy + by^2$ الصيغة التربيعية المرافقة. فإنه يمكن دوران المحاور بحيث يكون لمعادلة القطع المخروطي الإحداثيات الجديدة $x'y'$ في الصورة:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' x' + g' y' + c = 0.$$

حيث λ_1, λ_2 هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A

وذلك باســـتخدام التعويض $X = PX'$ حيث P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية بحيث يكون $|P| = 1$.

(٤ – ٤) أمثلة:

١- صف القطع المخروطي $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

الحل: الصورة المصفوفية لهذه المعادلة تكون $X^T A X - 36 = 0$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

والمعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون

$$|\lambda I - A| = \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 8 \end{pmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0 .$$

وإذاً القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A هما $\lambda = 9$, $\lambda = 4$.

المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda = 4$ هي الحلول الغير صفرية للمعادلة:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

وبحل هذا النظام نحصل على:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

وإذاً المتجه $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ يكون أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 4$.

نجعل هذا المتجه متجه قياسي فنحصل على $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

وبالمثل يكون المتجه القياسي $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ أساس للفضاء الذاتي المناظر

للقيمة $\lambda = 9$.

وإذاً فالمصفوفة $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ تحول المصفوفة A عمودياً إلى الصورة القطرية ، بالإضافة إلى ذلك فإن $|P| = 1$ وعليه فإن التحويل العمودي للإحداثيات $X = PX'$ يكون دورانياً ، وبالتعويض في الصورة المصفوفية لمعادلة القطع نحصل على:

$$(PX')^T A\, (PX') - 36 = 0.$$

أو

$$(X')^T (P^T A P)\, X' - 36 = 0.$$

وحيث إن $P^T A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ فهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة:

$$(x' \;\; y') \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0.$$

$$\therefore\ 4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0.$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها أيضاً في الصورة $x'^2/9 + y'^2/4 = 1$

وهي تمثل قطع ناقص.

٢- صف القطع المخروطي:

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + (20/\sqrt{5})x - (80/\sqrt{5})y + 4 = 0 .$$

الحل: الصورة المصفوفية لهذه المعادلة تكون $X^T A X + K X + 4 = 0$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad , \; K = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

ومن المثال السابق وجدنا أن المصفوفة:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

تحول المصفوفة A عمودياً إلى الصورة القطرية ، وبوضع $X= PX'$

في الصورة المصفوفية لمعادلة القطع نحصل على:

$$(P X')^T A (P X') + K (P X') + 4 = 0 .$$

أو المعادلة

$$X'^T (P^T A P) X' + (K P) X' + 4 = 0 . \qquad (*)$$

حيث إن

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, K P = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -36 \end{pmatrix}.$$

إذاً يمكن كتابة (*) على الصورة:

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 .$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة في الصورة:

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = 4$$
$$\therefore 4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36.$$

$\therefore 4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2) = 36.$

ولتحويل معادلة القطع المخروطي هذه إلى الصورة القياسية

ننقل المحاور $X'Y'$ وذلك بوضع

$x'' = x' - 1\ ,\ \ y'' = y' - 2\ .$

فتصبح المعادلة السابقة في الصورة:

$4x''^2 + 9\,y''^2 = 36$

$\therefore\ x''^2/9 + y''^2/4 = 1.$

وهذه المعادلة تمثل قطع ناقص .

تمارين

١- تحقق من أن exp (tA) للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ يكون هو:

$$\exp(tA) = (1/3)e^{3t}(E + K).$$

حيث $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

٢- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكل من المصفوفات الآتية:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

٣- تحقق من أن المصفوفتين $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ يكون لهما نفس القيم الذاتية ولكنهما غير متشابهتين.

٤- أوجد المصفوفة Z بحيث يكون $Z^{-1}AZ$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي القيم الذاتية للمصفوفة A في كل من الحالات الآتية:

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

٥- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل المعادلتين التفاضليتين:

$y'_1 = y_1 + 3y_2,$
$y'_2 = 4y_1 + 5y_2.$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$y_1(0) = 2 , y_2 (0) =1.$

٦- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$y'_1 =4 y_1 + y_3 ,$
$y'_2 = -2y_1 + y_2 ,$
$y'_3 = -2y_1 .$

ثم أوجد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$y_1(0)=-1, y_2 (0)=1, y_3 (0)= 0.$

٧- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$y'_1 = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$
$y'_2 = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3$
$y'_3 = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 .$

٨- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل المعادلة التفاضلية

$y'' - y' - 6y = 0.$

(**إرشاد**): افرض أن $y_1= y , y_2 = y'$

ثم اثبت أن $y'_1 = y_2 , y'_2 = y''= y'+6y = 6y_1+ y_2$

٩- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل المعادلة التفاضلية

$y''' -6 y'' +11 y' -6y = 0 .$

(**إرشاد**): افرض أن $y_1= y , y_2 =y', y_3 = y''$

ثم اثبت أن $y'_1 = y_2 , y'_2 = y_3 , y'_3 = 6y_1-11y_2 +6y_3$

١٠- بتطبيقات الجبر الخطي صف كلا من القطوع المخروطية الآتية:

(1) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0.$

(2) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0.$

(3) $5x^2 - 4xy - 5y^2 = 9.$

(4) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0.$

(5) $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 2y = 5.$

************************ تم بحمد الله ***********************