2022-2023

Mathematical Physics Methods

Faculty of Science

Physics Department

Third academic year

Teaching

Dr. Asmaa Sayed

SOUTH VALLEY UNIVERSITY

متسلسلة فورييه

روجعت ونقحت في 1422/8/27 هـ

تحتل المتسلسلات عموماً مكاناً هاماً في كثير من موضوعات الفيزياء. وهناك العديد من المتسلسلات المشهورة ومنها متسلسلة فورييه : وهي متسلسلة في الدوال المثلثية sine و cosine وتواجهنا كثيراً عند دراسة الاهتزازات. إذ أن الاهتزازات تمثل في الغالب بدوال مثلثية من نوع الجيب وجيب التمام وتتميز هذه الدوال المثلثية بكونها دوال دورية ذات دورة معينة ولذلك يبدو طبيعياً أن ننشر دالة دورية بدلالة هذه الدوال المثلثية وهذا بالضبط ما يتم في متسلسلة فورييه . وتصلح متسلسلة فورييه للدوال المتصلة وغير المتصلة على السواء. وسوف نناقش في هذا الفصل الدوال الدورية والدوال المتعامدة ثم نناقش متسلسلة فورييه المثلثية والمركبة بشيء من التفصيل .

6 ـ 1 الدوال الدورية

لتكن $f(x)$ دالة تمثل عملية ما تتكرر دورياً بعد كل فترة D. تسمى الدالة $f(x)$ دورية إذا كان:

$$f(x) = f(x + D) \qquad (5 - 1)$$

وتسمى الكمية D " دورة الدالة $f(x)$ " وتعرف بأنها أصغر قيمة تحقق العلاقة (1 – 5) . من العلاقة (1 – 5) نجد أن:

$$f(x) = f(x + D) = f(x + 2D)$$

و بصورة أعم:

$$f(x \pm nD) = f(x) \quad ; \quad n = 1\,,2\,,\,\ldots\ldots \qquad (5-2)$$

ومـن الـدوال الدوريـة المعروفة الدوال المثلثية sin و cos ويمكن تحديد دورتها اعتماداً على الخاصية (1 – 5) كما توضح الأمثلة التالية:

مثال 1 . أوجد دورة الدالة $\cos(2x)$

الحل: من التعريف (1 – 5)

$$f(x) = \cos(2x) = f(x + D)$$
$$\cos(2x) = \cos(2(x + D))$$

وباستخدام العلاقات المثلثية نجد:

$$\cos(2x) = \cos(2x + 2D)$$
$$= \cos 2x \cos 2D - \sin 2x \sin 2D$$

وبمساواة معاملات الطرفين نجد أن

$$\cos 2D = 1 \Rightarrow 2D = 2m\pi\ ;\ m = 1, 2, \ldots\ldots$$
$$\sin 2D = 0 \Rightarrow 2D = n\pi\ ;\ n = 1, 2, \ldots\ldots$$

و $D = m\pi$ تحقق الشرطين السابقين معاً.

وأصغر قيمة للكمية D تقابل $m = 1$ أي أن $D = \pi$ وبالتالي فإن دورة الدالة $\cos 2x$ هي π.

تمـثل الدالـة $f(x)$ في أغلب التطبيقات الفيزيائية عملية معينة تتغير دورياً مع الزمن t بعد كل زمن T. ولذلك سنستخدم في هذا الفصل الدالة f على أنها دالة في الزمن t وزمنها الدوري T.

مثال 2 . في الدالة $f(t) = \cos\frac{t}{3} + \sin\frac{t}{4}$ احسب الدورة .

الحل :

$$f(t + T) = f(t)$$
$$\cos\left(\frac{t+T}{3}\right) + \sin\left(\frac{t+T}{4}\right) = \cos\frac{t}{3} + \sin\frac{t}{4}$$

وبنشر الطرف الأيسر باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$\left(\cos\frac{t}{3}\cos\frac{T}{3} - \sin\frac{t}{3}\sin\frac{T}{3}\right) + \left(\cos\frac{t}{4}\sin\frac{T}{4} + \sin\frac{t}{4}\cos\frac{T}{4}\right) = \cos\frac{t}{3} + \sin\frac{t}{4}$$

وبمساواة معاملات $\cos\frac{t}{3}\ ;\ \sin\frac{t}{4}$ في الطرفين نحصل على:

$$\cos\frac{T}{3}=1 \quad ; \quad \sin\frac{T}{3}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{3}=2m\pi$$

$$\cos\frac{T}{4}=1 \quad ; \quad \sin\frac{T}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{4}=2n\pi$$

حيث n, m أعداد صحيحة والنسبة بينهما هي:

$$\frac{m}{n}=\frac{4}{3}$$

وأصغر قيمة تتحقق عندها المعادلة $(5-1)$ هي $m=4$ ، $n=3$. إذن:

$$\frac{T}{3}=8\pi \quad ; \quad \frac{T}{4}=6\pi \quad \Rightarrow \quad T=24\pi$$

وهذه دورة الدالة.

خواص الدوال الدورية

إذا كانت $f(t)$ دالة دورية دورتها T ومعرفة في الفترة $[a , b]$ فإن:

$$\int_a^b f(t)dt=\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt \quad -1 \qquad (5-3)$$

البرهان: باستخدام متغير جديد للتكامل $\tau = t - T$ ، إذن:

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt=\int_a^b f(\tau+T)d\tau=\int_a^b f(\tau)d\tau$$

لأن الدالة f دورية. وحيث أن τ مجرد متغير التكامل فإن $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(\tau)d\tau$ وبالتالي فإن الخاصية (1) صحيحة.

$$\int_0^T f(t)dt=\int_a^{a+T} f(t)dt \quad -2 \qquad (5-4)$$

ويمكن إثبات هذه الخاصية بنفس الطريقة السابقة.

6 ــ 2 الدوال الزوجية والفردية

تسمى الدالة $f(t)$ زوجية إذا كان لكل قيم t تتحقق العلاقة:

$$f(-t)=f(t) \qquad (5-5)$$

وفردية إذا كان

$$f(-t)=-f(t) \qquad (5-6)$$

فالدوال t^2 ، $\cos t$ زوجية، بينما الدوال t ، $\sin t$ فردية.

ومن هذا التعريف يمكن التحقق من الخواص التالية :

1 ــ ضـــرب دالـــتين زوجيـــتين يعطي دالة زوجية وكذلك حاصل ضرب دالتين فرديتين. بينما يعطي ضرب دالة زوجية بأخرى فردية دالة فردية.

2 ــ إذا كانت $f(t)$ دالة زوجية فإن

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt \qquad (5-7)$$

3 ــ إذا كانت $f(t)$ دالة فردية فإن:

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 \qquad (5-8)$$

مثال 3 . احسب قيمة التكاملات $\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt$ ، $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt$

الحل : حيث أن الدالة $\cos t$ زوجية، إذن باستخدام $(5-7)$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos t\, dt = 2\sin t \Big|_{0}^{\pi/2} = 2$$

الدالة $\sin t$ فردية ، إذن باستخدام $(5-8)$ فإن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt = 0$$

ويمكن التحقق من هذه النتيجة الأخيرة بحساب التكامل مباشرة:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt = -\cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} = -[\cos \pi - \cos(-\pi)]$$

وحيث أن $\cos t$ دالة زوجية فإن $\cos(-\pi) = \cos(\pi)$ وبالتالي فإن

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt = 0$$

6 ــ 3 الدوال المتعامدة والمسواة

نعـــلم مـــن دراسة المتجهات أن الضرب المقياسي لمتجهين A ،B في الفراغ الثلاثي يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \end{aligned} \qquad (5-9)$$

حيث ترمز i إلى مركبات المتجه A أو B بالاتجاه x, y, z.

ونقول أن المتجهين A ، B متعامدان إذا كان:

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = 0 \quad , \quad B \neq 0 \quad ; \quad A \neq 0$$

أي إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i = 0 \qquad (5-10)$$

وإذا كان هناك فراغ متجه في n بعد ، فإن علاقة التعامد السابقة تأخذ الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i = 0 \qquad (5-11)$$

لنفترض الآن أن هذا الفراغ عبارة عن فراغ متصل بحيث يحتوي على عدد لا نهائي من الأبعاد بحيث تصبح المركبات A_i ، A_j كميات متصلة وليست منفصلة. عندئذ يمكن استبدال i بمتغير متصل x بحيث:

$$A_i \rightarrow A(x) \; ; \; \sum_{i=1}^{n} \rightarrow \int dx$$

وتكتب علاقة التعامد بالشكل:

$$\int_a^b A(x)B(x)dx = 0 \qquad (5-12)$$

حيـــث b, a حدود التكامل وتعرف الفترة التي يكون فيها B, A متعامدين. عندئذ نقول أن الدالتين $A(x)$ ، $B(x)$ متعامدتان إذا تحققت العلاقة (12-5).

وبصورة عامة إذا كان لدينا دالتان مركبتان $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ معرفتان في الفترة $[a , b]$ فإن f_2 , f_1 متعامدتان إذا كان:

$$\langle f_1 \cdot f_2^* \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2^*(x) dx = 0 \qquad (5-13)$$

وذلك في الفترة $[a , b]$ حيث ترمز * إلى المرافق المركب للدالة المركبة.

وإذا حققت الدوال f_2 , f_1 منفردة العلاقات:

$$\begin{aligned} \langle f_1 \cdot f_1^* \rangle &= \int_a^b f_1(x) f_1^*(x) dx = 1 \\ \langle f_2 \cdot f_2^* \rangle &= \int_a^b f_2(x) f_2^*(x) dx = 1 \end{aligned} \qquad (5-14)$$

سميت كل دالة على حدة دالة مسواة. وإذا حققت الدوال f_2 , f_1 العلاقتين (13- 5) و (14 - 5) في نفس الوقت بحيث كانت متعامدة ومسواة فإنها تسمى عندئذ دوال مسواة ومتعامدة أو دوال مسعامدة اختصاراً (orthonormal).

فإذا رمزنا لإحدى الدالتين بالرمز $f_m(x)$ وللأخرى $f_n(x)$ فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلتين (13 - 5) و (14 - 5) بصورة مختصرة بالشكل:

$$\int_a^b f_m(x) f_n^*(x) dx = \begin{cases} 0 \; ; \; m \neq n \\ 1 \; ; \; m = n \end{cases} \tag{5 – 15}$$

أو:

$$\int_a^b f_m(x) f_n^*(x) dx = \delta_{mn} \tag{5 – 16}$$

حيث δ_{mn} يسمى رمز كرونكر ويعرف بالعلاقة:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \; ; \; m = n \\ 0 \; ; \; m \neq n \end{cases} \tag{5 – 17}$$

بالـــرجوع إلى المعادلات (14 – 5) نجد أنه قد لا تحقق جميع الدوال هذه المعادلة ولكن قد يكون الطرف الأيمن في هذه المعادلة يساوي عدداً وليكن R: أي قد يكون لدينا:

$$\int_a^b f_1(x) f_1^*(x) dx = R > 0 \tag{5 – 18)a}$$

وفـــي هـــذه الحالة فإن الدالة f_1 ليست مسواة. ولكن يمكن تحويلها إلى دالة مسواة بقسمة طرفي المعادلة $(5 - 18)a$ على R وكتابتها بالشكل:

$$\int_a^b \frac{f_1(x)}{\sqrt{R}} \frac{f_1^*(x)}{\sqrt{R}} dx = 1 \tag{5 – 18)b}$$

عندئذ فإن الدالة $\frac{f_1(x)}{\sqrt{R}}$ تحقق الشرط (14–5) وبالتالي فهي مسواة.

وعموماً فإنه يمكن إعادة كتابة الشرط (16 – 5) بالشكل العام التالي:

$$\int_a^b f_m(x) f_n^*(x) dx = R\delta_{mn} \tag{5 – 19}$$

والدوال المسواة في هذه الحالة هي $\frac{1}{\sqrt{R}} f_m(x)$ ، $\frac{1}{\sqrt{R}} f_n(x)$ وليست $f_m(x)$ ، $f_n(x)$.

6 ــ 4 تعامد الدوال المثلثية

لتكن لدينا مجموعة الدوال المثلثية:

$$\{ f_m(t) \} = \{1, \cos t, \cos(2t), \ldots, \cos(mt), \ldots \sin t, \sin(2t), \ldots\}$$

والمعـــرفة فـــي الفترة $[-\pi,\pi]$. سوف نبين الآن أن مجموعة الدوال هذه متعامدة في هذه الفترة كالآتي:

أولاً: بالنسبة للدوال: $\cos t, \cos 2t, \ldots\ldots, \cos mt$:

1 ــ لجميع قيم $m \neq 0$ فإن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt = 0 \tag{5 – 20)a}$$

2 ـــ إذا كانت m ≠ n (أي دالتين مختلفتين)

$$(5-20)b \quad \int_{-\pi}^{\pi} cos(mt)cos(nt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[cos(m+n)t + cos(m-n)t]dt = 0$$

3 ـــ إذا كانت $m = n\ ,\ m\neq 0,\ n\neq 0$

$$(5-20)c \qquad \int_{-\pi}^{\pi} cos(mt)cos(mt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1 + cos(2mt)]dt = \pi$$

إذن من هذه النتائج الثلاث (20 – 5) يمكن الوصول إلى العلاقة التالية:

$$(5-21) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} cos(mt)cos(nt)dt = \pi\delta_{mn}$$

ثانياً: الدوال $\sin t,\ \sin 2t,\ \ldots\ldots,\ \sin mt$

1 ـــ لجميع قيم $m \neq 0$ فإن:

$$(5-22)a \qquad \int_{-\pi}^{\pi} sin(mt)dt = 0$$

2 ـــ إذا كانت m ≠ n (أي دالتين مختلفتين)

$$(5-22)b \quad \int_{-\pi}^{\pi} sin(mt)sin(nt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[cos(m-n)t - cos(m+n)t]dt = 0$$

3 ـــ إذا كانت $m = n\ ,\ m\neq 0,\ n\neq 0$

$$(5-22)c \qquad \int_{-\pi}^{\pi} sin(mt)sin(mt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1 - cos(2mt)]dt = \pi$$

أو اختصاراً للمعادلات (22 – 5) نكتب:

$$(5-23) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} sin(mt)sin(nt)dt = \pi\delta_{mn}$$

كذلك أيضاً فإن:

$$(5-24) \quad \int_{-\pi}^{\pi} sin(mt)sin(nt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[sin(m+n)t - sin(m-n)t]dt = 0,\ m,n\neq 0$$

من العلاقات الثلاث (21 – 5) ، (22 – 5) ، (24 – 5) نستنتج أن الدوال المثلثية $\sin(mt)$ ، $\cos(mt)$ دوال متعامدة في الفترة [-π , π] وتحقق العلاقة (19 – 5) حيث R = π وإن الدوال $sin(mt)/\sqrt{\pi}$ و $cos(mt)/\sqrt{\pi}$ مسواة في الفترة [-π , π].

مثال 4 . أثبت أن الدوال e^{ix} ، e^{2ix} متعامدة في الفترة [-π , π] وأوجد الدوال المسواة .

الحل : لتكن $f_1 = e^{ix}$ ، $f_2 = e^{2ix}$. وحتى تكون هذه الدوال متعامدة لا بد من تحقق الشرط (16 – 5) . إذن بحساب التكامل:

$$\langle f_1 \cdot f_2^* \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} e^{-2ix} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix} dx = \frac{1}{-i} e^{-ix} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{-i} \left[cos\, x - i\, sin\, x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

نجـد أن شرط التعامد تحقق وبالتالي فإن الدوال e^{ix} ، e^{2ix} متعامدة في الفترة [π ، π-]. لإيجاد الدوال المسواة ، لا بد من تحقق العلاقة (14 – 5) فنجد:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} e^{-ix} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

إذن $R = 2\pi$ وبالتالي فإن الدالة المسواة الأولى هي $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix}$.

بالنسبة للدالة الأخرى e^{2ix} :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{2ix} e^{-2ix} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

والدالة المسواة هي $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2ix}$ إذن الدوال $\frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}$ ، $\frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}}$ مسعامدة في الفترة [π ، π-].

6 – 5 متسلسلة فورييه المثلثية:

إذا كانت $f(t)$ دالة دورية في الفترة [π ، π-] ودورتها 2π فإن متسلسلة فورييه للدالة $f(t)$ تعرف بالعلاقة:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1\, cos\, t + a_2\, cos\, 2t + ... + a_n\, cos\, nt$$
$$+ b_1\, sin\, t + b_2\, sin\, 2t + ... + b_n\, sin\, nt$$

أو

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n\, cos\, nt + b_n\, sin\, nt \right] \qquad (5-25)$$

حيث a_n ، b_n كميات ثابتة تسمى معاملات فورييه للدالة $f(t)$ وتحسب كالتالي:

بضرب طرفي المعادلة(25–5) في $\cos(mt)$ ثم المكاملة من π- إلى π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(mt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0\, cos(mt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos(mt) cos(nt) dt$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} cos(mt) sin(nt) dt$$

وباستخدام خواص التعامد للدوال المثلثية في الفقرة [π ,π-] نجد أن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(mt) dt = \pi a_m$$

أو

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(mt)dt \qquad (5-26)$$

وبضرب طرف المعادلة (25 – 5) في الدالة $\sin(mt)$ ثم المكاملة من π- إلى π نجد أن:

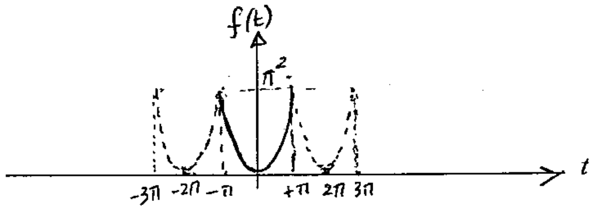
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(mt)dt \qquad (5-27)$$

أما الثابت a_0 فنحصل عليه من (26 – 5) بوضع m = 0 ثم حساب التكامل (5–26).

تعطينا العلاقات (5–25) إلى (5–27) الصيغة المطلوبة لإيجاد مفكوك فورييه لأي دالة دورية معرفة في الفترة [π , π-] كما توضح الأمثلة التالية.

مثال 5 . أوجد مفكوك فورييه للدالة الدورية $f(t)$ المعرفة في المدى [π , π-] بالشكل $f(t) = t^2$ والتي دورها 2π .

الحــل : يـــبين الشكل المرافق الدالة $f(t) = t^2$ وحيث أن الدالة دورية في المدى [π , π-]، إذن يمكن إيجاد مفكوك فورييه لها.



نحسب أولاً معاملات فورييه:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(nt)dt$$

وبالتكامل بالتجزيء نجد أن:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)dt = \frac{1}{\pi n}\left[t^2 \sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[t^2 \sin(nt) + \frac{2}{n}(t\cos(nt)) - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[t^2 \sin(nt) + \frac{2}{n}\left(t\cos nt + \frac{1}{n}\sin nt\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[0 + \frac{2}{n}\left(\pi\cos(n\pi) + \pi\cos(-n\pi) + \frac{1}{n}\cdot 0\right)\right]$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$$a_n = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

وبالمثل فإن:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)t^2 dt = 0$$

وهـــذا الـــتكامل يساوي الصفر لأن الدالة تحت التكامل فردية. بالتعويض عن a_0 ، a_n ، b_n في المعادلة (25 – 5) نجد

$$f(t) = t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos t - \frac{\cos 2t}{4} + \frac{\cos 3t}{9} - \ldots\ldots\ldots\right)$$

وهذا هو مفكوك فوريبه للدالة t^2.

إن مفكـــوك فورييـــه ذو أهمية كبيرة في حساب مجموع بعض المتسلسلات التي قد يستغرق حســـابها بطـــرق أخـــرى وقتاً طويلاً ولكن باستخدام مفكوك فورييه يمكن بسهولة بالغة حساب مجموعها كما يوضح المثال التالي.

مثال 6 . أوجد مجموع المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \ldots\ldots$$

الحل : من متسلسلة فورييه في المثال السابق نضع $t = \pm\pi$ فنجد:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\dots\dots\right)$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\dots\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

وبوضع $t = 0$ في المثال السابق أيضاً نحصل على المتسلسلة الأخرى:

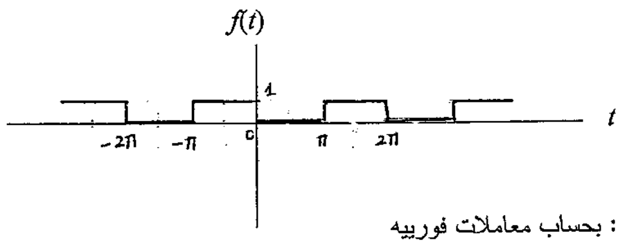
$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\dots\dots\right)$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\dots\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

مـــثال 7 . أوجـــد متسلســـلة فورييـــه لـــلدالة $f(t)$ المبيـــنة بالشـــكل حيـــث

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; \ -\pi < t < 0 \\ 0 & ; \ 0 < t < \pi \end{cases}$$

$f(t + T) = f(t)$ ، $T = 2\pi$.



الحل : بحساب معاملات فورييه

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} cos(nt)dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} sin(nt)dt = \frac{-1}{n\pi}cos(nt)\Big|_{-\pi}^{0}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{زوجي } n \\ \dfrac{-2}{n\pi} & ; \quad \text{فردي } n \end{cases}$$

بالتعويض عن معاملات فورييه:

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+........\right)$$

مثال 8 .أوجد مجموع المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-.........$$

الحل : من مفكوك فورييه في المثال 6 السابق نضع $t=\frac{\pi}{2}$ ، ومن تعريف الدالة $f(t)=0$ عندما $t=\pi/2$ فإن

$$0=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-.........\right)$$

أو:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-.........=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}=\frac{\pi}{4}$$

6 ـــ 6 تقارب متسلسلة فورييه وشرط ديريخليه

تعطينا العلاقات (25 – 5) ـــ (27– 5) صيغة رياضية لإيجاد مفكوك فورييه لدالة دورية $f(t)$. والسؤال الذي لا بد من طرحه هنا هو ما الذي يضمن أن المتسلسلة في الطرف الأيمن والمعطاة بالمعادلـــة (25 – 5) تعطي الدالة $f(t)$. وبمعنى آخر هل تتقارب هذه المتسلسلة بحيث عند جمع حدودهـــا المختـــلفة نحصل على الدالة $f(t)$ ؟. أجاب على هذا التساؤل ديريخليه (Derichlet) ووضـــع شروطا على الدالة $f(t)$ بحيث إذا تحققت هذه الشروط فإن متسلسلة فورييه تتقارب إلى الدالة $f(t)$. وسنذكر هنا هذه الشروط بدون برهان.

ينص شرط ديريخليه على أنه إذا كانت $f(t)$ دالة وحيدة القيمة معرفة في الفترة $[-\pi , \pi]$ ولها دورة 2π بحيث:

1 ـــ لها عدد نهائي محدود من القيم العظمى والصغرى.

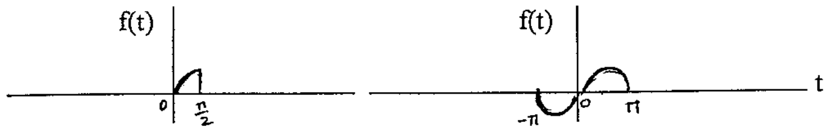
2 ـــ لها عدد نهائي من نقط عدم الاتصال.

فإن متسلسلة فورييه (25 – 5) للدالة $f(t)$ تتقارب نحو الدالة $f(t)$ لجميع قيم t والتي تكون عندها الدالـــة متصـــلة بينما تتقارب متسلسلة فورييه عند نقط عدم الاتصال إلى متوسط قيمة الدالة $f(t)$ عند تلك النقط.

وســـنكتفي هنا بتوضيح هذه الشروط : تعني الدالة وحيدة القيمة أن لكل قيمة للمتغير t فإن الدالة $f(t)$ لها قيمة وحيدة فقط.

فمـــثلاً $f(t)=\pm\sqrt{t^2-1}$ ليســت وحيــدة القيمـــة لأنه لكل قيمة للمتغير t هناك قيمتان هما $+\sqrt{t^2-1}$ و $-\sqrt{t^2-1}$، بينما $f(t)=+\sqrt{t^2+1}$ وحيدة القيمة ولذلك فإن $\pm\sqrt{t^2-1}$ لا تحقق شرط ديريخليه بينما $+\sqrt{t^2+1}$ تحققه.

والدالــة $\sin(t)$ لا تحقــق شرط ديريخليه في المدى $[-\infty\ ,\ \infty]$ وذلك لأنها تحتوي على عدد لا نهــائي من النهايات العظمى والصغرى، بينما تحقق الدالة $\sin(t)$ شرط ديريخليه في مدى محدد مثل $[-\pi\ ,\ \pi]$ أو $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. كما في الشكل المرافق .



شكل 5-4 .

والدالة $f(t)=e^{-t^2}$ تحقق شرط ديريخليه وتحتوي على عدد محدد من النهايات العظمى.

ويقصـــد بالشرط الثاني أنه إذا كان هناك نقط تكون عندها الدالة غير متصلة فلا بد أن يكون عدد هــذه النقط محدداً. فمثلاً الدالة المعطاة في المثال 7 والمعرفة على المدى $[-\pi\ ,\ \pi]$ تحتوي على عــدد محدد من نقط عدم الاتصال وهي نقطة واحدة عند $t = 0$. بينما لو كانت نفس الدالة معرفة في المدى $[-\infty\ ,\ \infty]$ فإن عدد نقط عدم الاتصال سيكون لا نهائياً في هذه الحالة ولا ينطبق عليها شرط ديريخليه.

إذن يعطينا شرط ديريخليه ضماناً بأن المتسلسلة (5 – 25) تتقارب نحو الدالة $f(t)$.

يجـــب التـــنويه هنا على أن معكوس شرط ديريخليه غير صحيح: بمعنى أنه قد توجد دوال لا تحقق شرط ديريخليه ولكن يمكن نشرها حسب مفكوك فوريه ولكن مثل هذه الدوال قليلة جداً في كـــثير من التطبيقات. وسوف نفترض دائماً أن الدوال التي ندرسها تحقق شرط ديريخليه وبالتالي يمكن إيجاد مفكوك فوريه لها ومتسلسلة فوريه تتقارب نحو الدالة.

6 ــ 7 متسلسلة فوريه المركبة

وجدنا في الفصل الأول العلاقات التالية:

$$cos(nt)=\frac{1}{2}\left(e^{int}+e^{-int}\right) \quad ; \quad sin(nt)=\frac{1}{2i}\left(e^{int}-e^{-int}\right)$$

بتعويض هذه العلاقات في متسلسلة فوريه:

$$(5-28)\qquad f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}a_n\left(e^{int}+e^{-int}\right)+\frac{1}{2i}b_n\left(e^{int}-e^{-int}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{int}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{-int}$$

وبوضع:

$$(5-29)\qquad \begin{aligned} C_0&=\frac{1}{2}a_0\\ C_n&=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\\ C_{-n}&=C_n^*=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\end{aligned}$$

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{int}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}e^{-int}$$

وحيث أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}e^{-int}=\sum_{n=-1}^{-\infty}C_ne^{int}$$

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{int}+\sum_{n=-1}^{-\infty}C_ne^{int}$$
$$=C_0+C_1e^{it}+C_2e^{2it}+\dots\dots\dots+C_{-1}e^{-it}+C_{-2}e^{-2it}+\dots\dots$$

$$(5-30)\qquad f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_ne^{\text{int}}$$

والمعادلة (30 – 5) هي متسلسلة فورييه المركبة وترتبط معاملات فورييه المركبة C_n بمعاملات فورييـــه a_n ، b_n بالعلاقات (29 – 5) . ولحساب المعاملات C_n نضرب المعادلة (30 – 5) في الدالة e^{-imt} ثم بالمكاملة من π- إلى π نجد:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-imt}dt=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)t}dt$$

والتكامل في الطرف الأيمن يساوي الصفر إلا عندما $m = n$. إذن في هذه الحالة.

$$(5-31)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-imt}dt=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{0}dt=\sum_{-\infty}^{\infty}2\pi C_n\delta_{mn}=2\pi C_m$$

$$(5-32)\qquad C_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-imt}dt$$

وبوضع $m = 0$ نجد أن:

$$(5-33)\qquad C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{2}a_0$$

ولوضيح استخدام هذه الصيغة نناقش فيما يلي بعض الأمثلة.

مثال 9 . أوجد متسلسلة فورييه المركبة للدالة

$$f(t)=\begin{cases}1 & ; \; -\pi<t<0 \\ 0 & ; \; 0<t<\pi\end{cases}$$

حيث $f(t+T)=f(t)$ ، $T=2\pi$.

الحل :

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dt+0=\frac{1}{2}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt+0=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{in}\right)\left[1-e^{in\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{-2ni\pi}\left[1-cos(n\pi)-i\,sin(n\pi)\right]$$

$$C_n=\begin{cases}0 & \text{، n زوجي} \\ \dfrac{-1}{ni\pi} & \text{، n فردي}\end{cases}$$

بالتعويض عن C_0 ، C_n لقيم n الفردية في المعادلة (5 – 30):

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}\left[e^{it}+\frac{1}{3}e^{3it}+\frac{1}{5}e^{5it}+\dots\dots\dots+\frac{e^{-it}}{-1}+\frac{e^{-3it}}{-3}+\frac{e^{-5it}}{-5}+\dots\dots\right]$$

بحيث يحتوي المجموع على الحدود الفردية الموجبة والسالبة لقيم n. وهذه متسلسلة فورييه المركبة، ولمقارنتها بالمتسلسلة المثلثية الواردة في المثال 6 نستخدم العلاقات المثلثية السابقة:

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}\left[2i\,sin\,t+\frac{2}{3}i\,sin(3t)+\frac{2}{5}i\,sin(5t)+\dots\dots\dots\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left[sin\,t+\frac{sin(3t)}{3}+\frac{sin(5t)}{5}+\dots\dots\dots\right]$$

وهي نفس المتسلسلة.

حالات خاصة : فردية

مفكوك الجيب : يلاحظ أن مفكوك فورييه لدالة يحتوي على الدوال sin فقط لأنها فردية ولا يحتوي على الدوال cos ، وهذه نتيجة عامة لجميع الدوال الفردية . فإذا كانت الدالة $f(t)$ زوجية أو فردية فإن متسلسلة فورييه تبدو أكثر سهولة منها عندما لا تكون الدالة كذلك لأن بعض

معـــاملات فورييــه تخــتفي. فإذا كانت الدالة $f(t)$ فردية فإن الدالة $f(t)\cos(mt)$ التي تظهر في لــتكامل(5-26) عــند حســاب a_m تكــون فــردية. ومـــن خواص الدوال الفردية فإن التكامل عـــلى دالــة فــردية يساوي الصفر وبالتالي $a_m = 0$. بينما الثابت b_m في المعادلة(27 – 5) لا يساوي الصفر. وهذا يعني أن مفكوك فورييه والمعطى بالمعادلة (25– 5) لا يحتوي على الحدود cos لأن $a_m = 0$ ومفكوك فورييه في هذه الحالة هو:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \qquad (5-34)$$

$$a_0 = a_n = 0 \qquad ; \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

ويسمى المفكوك (34 – 5) في هذه الحالة بمفكوك الجيب لأنه يحتوي على الدوال sin فقط .

مثال 10 . أوجد مفكوك الجيب للدالة الدورية $f(t) = t$ في الفترة $[-\pi , \pi]$ ودورتها 2π ؟

الحل : حيث أن الدالة $f(t) = t$ فردية ، إذن

$$a_o = a_n = 0$$

$$\therefore$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot sin(nt)\cdot dt = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{-1}{n}t\cdot cos(nt) - \int\frac{-1}{n}cos(nt)\cdot dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{-1}{n}\cdot t\cdot cos(nt)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cdot sin(nt)\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi}{n}\cdot cos(n\pi)$$

$$b_n = \frac{-2}{n}(-1)^n$$

$$\cdot f(t) = -2\left[-sin\,t + \frac{1}{2}sin\,2t - \frac{1}{3}sin\,3t + \frac{1}{5}sin\,5t - ......\right]$$

$$f(t) = 2\left[sin\,t - \frac{1}{2}sin\,2t + \frac{1}{3}sin\,3t - \frac{1}{5}sin\,5t + ...\right]$$

مفكـــوك جيـــب التمام :وإذا كانت الدالة $f(t)$ زوجية فإن الثوابت b_n تساوي الصفر لأن التكامل (5–27) يســـاوي الصـــفر حســـب خواص الدوال الزوجية. وبالتالي فإن مفكوك فورييه في هذه الحالة لا يحتوي على الحدود sin وتعطى المتسلسلة بالشكل:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,cos(nt) \qquad (35-5)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \ , \ b_n = 0$$

وتسمى المتسلسلة (5 – 35) بمتسلسلة جيب التمام لأنها لا تحتوي على الحدود sin، كما يوضح ذلك المثال التالي .

مـــثال 11. أوجــد مفكوك متسلسلة فورييه للدالة $f(t) = \cosh(at)$ المعرفة في الفترة$[-\pi \ , \ \pi]$ حيث $f(t+T) = f(t)$.

الحل :

نحسب الثابت C_n:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(at)e^{-int}dt$$

لحساب هذا التكامل نستخدم التكامل بالتجزيء:

$$I = \int \cosh(at)e^{-int}dt = \int e^{-int}\left[\frac{1}{a}d\sinh(at)\right]$$
$$= \frac{1}{a}\left[\sinh(at)e^{-int} - (-in)\int \sinh(at)e^{-int}dt\right]$$

$$I = \int \cosh(at)e^{-int}dt = \frac{1}{a}\left[\sinh(at)e^{-int} + in\int \sinh(at)e^{-int}dt\right]$$

وبالتكامل بالتجزيء مرة أخرى:

$$I = \frac{1}{a}\left[\sinh(at)e^{-int} + \frac{ni}{a}\left(\cosh(at)e^{-int} + ni\int \cosh(at)e^{-int}dt\right)\right]$$
$$= \frac{1}{a}\left[\sinh(at)e^{-int} + \frac{ni}{a}\cosh(at)e^{-int} - \frac{n^2}{a}\int \cosh(at)e^{-int}dt\right]$$

والتكامل الأخير هو نفس التكامل I. إذن:

$$I = \frac{1}{a}\sinh(at)e^{-int} - \frac{n^2}{a^2}I + \frac{ni}{a^2}\cosh(at)e^{-int}$$
$$I = \frac{a^2}{n^2+a^2}\left[\frac{1}{a}\sinh(at)e^{-int} + \frac{ni}{a^2}\cosh(at)e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

وبالتعويض عن حدود التكامل واستخدام خواص الدوال المثلثية الزائدية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosh(at)e^{-int}dt = \frac{a^2}{n^2+a^2}\left[\frac{1}{a}\left(sinh(a\pi)e^{-in\pi} - sinh(-a\pi)e^{in\pi}\right) + \frac{ni}{a^2}\left(cosh(a\pi)e^{-in\pi} - cosh(-a\pi)e^{in\pi}\right)\right]$$

$$= \frac{a^2}{n^2+a^2}\cdot\frac{(-1)^n}{a}\cdot 2\,sinh(a\pi) = \frac{2a\,sinh(a\pi)}{n^2+a^2}(-1)^n$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}(-1)^n\frac{2a\,sinh(a\pi)}{n^2+a^2} = \frac{a}{\pi}\frac{sinh(a\pi)}{n^2+a^2}(-1)^n$$

$$C_0 = \frac{a\,sinh(a\pi)}{\pi a^2}$$

وبالتعويض عن C_n ، C_0 نجد:

$$f(t) = cosh(at) = \frac{a}{\pi}sinh(a\pi)\cdot\left[\frac{1}{a^2} - \frac{e^{it}}{1+a^2} + \frac{e^{2it}}{4+a^2} + \ldots\ldots\ldots - \frac{e^{-it}}{1+a^2} + \frac{e^{-2it}}{4+a^2} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$f(t) = cosh(at) = \frac{a}{\pi}sinh(a\pi)\left[\frac{1}{a^2} - \frac{2cos\,t}{1+a^2} + \frac{2cos\,2t}{4+a^2} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$cosh(at) = \frac{2a\,sinh(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2} - \frac{cos\,t}{1+a^2} + \frac{cos\,2t}{2^2+a^2} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

تجـــدر الملاحظـــة إلى أن معـــرفة كون الدالة فردية أو زوجية يوفر كثيراً من الجهد في حساب التكاملات (5 – 26) ,(5 – 27). إذ بمجرد تطبيق خواص الدوال الزوجية والفردية يمكن معرفة أي الحـــدود ستختفي وأيها يبقى وهذا على جانب كبير من الأهمية خاصة عند حساب التكاملات المعقدة.

6 ــ 8 متسلسلة فوريبه في فترة اختيارية

اقتصرنا فيما سبق على دراسة مفكوك فوريبه لدوال معرفة في الفترة [π , π-]. ولكن هذا ليس شـــرطاً لازماً لتعريف مفكوك فوريبه. إذ ليس كل الدوال معرفة في تلك الفترة، فقد تكون الدوال معرفة على فترات أخرى. إذن من المناسب تعريف مفكوك فوريبه لدالة دورية معرفة على فترة اختيارية.

تعـرف متسلسـلة فورييه لدالة دورية $f(t)$ ودورها T في الفترة $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ بالشكل المركب بالعلاقة:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \qquad (5-36)$$

بينما تعطى في الصورة المثلثية بالشكل:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right] \qquad (5-37)$$

حيث

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (5-38)$$

تمرين : أثبت أن الدوال $\cos(n\omega t)$, $\sin(n\omega t)$ متعامدة في الفترة $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

وتعطى معاملات فورييه حسب الطريقة السابقة بالمعادلات التالية:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad (5-39)$$

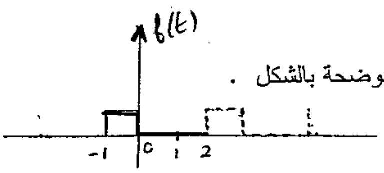
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt \qquad (5-40)$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}dt \qquad (5-41)$$

من هذه المعادلات يمكن ملاحظة أنه إذا كانت الفترة المعرفة عليها الدالة هي $[-\pi , \pi]$ فإن $T/2 = \pi$ وتؤول $(39 - 41)$ لها المعادلات $(26 - 27)$.

وإذا كـانت الدالـة $f(t)$ معـرفة في الفترة $[a , b]$ ودورتها $T = b - a$ بحيث تكون الدوال المثلـثية مـتعامدة فـي هذه الفترة، فإن المعادلات السابقة $(5 - 36)$ ــ $(5 - 41)$ تظل سارية المفعـول مع استبدال حدود التكامل من a إلى b بدلاً من $-\frac{T}{2}$ ، $\frac{T}{2}$ ودورة الدالة $T = b - a$ كما يوضح المثال التالي.

مثال 12. أوجد مفكوك فورييه للدالة $f(t) = \begin{cases} 1 \; ; & -1 < t < 0 \\ 0 \; ; & 0 < t < 2 \end{cases}$ الموضحة بالشكل .



الحل : دورة الدالة هي $T = b - a = 2 - (-1) = 3$

إذن لدينا دالة دورية دورتها $T=3$. وبتطبيق العلاقات (41 – 5):

$$C_n=\frac{1}{T}\int_a^b f(t)e^{-in\omega t}dt$$

$$C_0=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}f(t)dt=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}1dt=\frac{1}{3}$$

$$C_n=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}e^{-in\omega t}dt=\frac{1}{3}\frac{1}{3(-in\omega)}e^{-in\omega t}\Big|_{-1}^{0}=\frac{i}{3n\omega}\left[1-e^{in\omega}\right]$$

$$\omega=\frac{2\pi}{b-a}=\frac{2\pi}{3}$$

$$C_n=\frac{i}{2\pi n}\left[1-e^{in\frac{2\pi}{3}}\right]$$

بالتعويض عن C_n في (36 – 5):

$$f(t)=\frac{1}{3}+\frac{i}{2\pi}\left\{\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)e^{i\omega t}+\frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)e^{2i\omega t}+\dots\dots\dots\right.$$
$$\left.-\left(1-e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)e^{-i\omega t}-\frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{-4\pi i}{3}}\right)e^{-2i\omega t}+\dots\dots\dots\right\}$$

وبجمع الحدود المختلفة ووضع $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$

$$f(t)=\frac{1}{3}+\frac{i}{2\pi}\left\{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}t}-e^{-i\frac{2\pi}{3}t}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{4\pi}{3}t}-e^{-i\frac{4\pi}{3}t}\right)+\dots\dots\dots\right.$$
$$\left.+\left(-e^{i\frac{2\pi}{3}(t+1)}+e^{-i\frac{2\pi}{3}(t+1)}\right)+\frac{1}{2}\left(-e^{i\frac{4\pi}{3}(t+1)}+e^{-i\frac{4\pi}{3}(t+1)}\right)+\dots\dots\dots\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}\left[sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)+\frac{1}{2}sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right)+\frac{1}{3}sin(2\pi t)+\dots\dots\dots\dots\right]$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[sin\frac{2\pi}{3}(1+t)+\frac{1}{2}sin\frac{4\pi}{3}(1+t)+\frac{1}{3}sin\frac{6\pi}{3}(1+t)+\dots\dots\dots\dots\right]$$

مسائل

1 ــ أوجد دورة كل من الدوال $\cos t$ ، $\sin t$ ، $\tan t$ ، $\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$.

2 ــ حدد أي الدوال زوجية وأيها فردية: t^2 ، t^1 ، $\sin t$ ، $\cos t$ ، $t \cot t$ ، ثم أثبت أن أي دالة $f(t)$ يمكن كتابتها كمجموع دالة فردية وأخرى زوجية. وأكتب الدوال te^t ، $1 - e^t$ ، $t^3 - t^2 + 1$ ، $t + \cos t$ كمجموع دوال فردية وزوجية.

3 ــ أثبت أن الدوال: $P_1(x) = x$ ، $P_2(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2}$ متعامدة في الفترة [1 , 1-] ثم حول الدوال P_1 ، P_2 إلى دوال مسواة ؟

4 ــ إذا كانت $H_0 = 1$ ، $H_1 = 2x$ ، $H_2 = 4x^2 - 2$ فأثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx = \delta_{mn}$$

ثم احسب قيمة الثابت R وحول الدوال H_m إلى دوال مسواة ؟

5 ــ إذا كانت $L_0 = 1$ ، $L_1 = 1 - x$ ، $L_2 = 1 - 2x + \dfrac{1}{2}x^2$ فأثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_m L_n dx = \delta_{mn}$$

أي أن الدوال L_m مسعامدة في الفترة $[-\infty , \infty]$.

6 ــ أثبت صحة العلاقات: (21 – 5) ، (23 – 5) ، (24 – 5) بالتفصيل.

7 ــ إذا كانت $f(t) = t^2$ في الفترة $\left[-\dfrac{\pi}{2} , \dfrac{\pi}{2}\right]$، ارسم الدالة في هذا المدى ثم كرر الدالة بين $-5\dfrac{\pi}{2} , 5\dfrac{\pi}{2}$. أوجد مفكوك فورييه للدالة $f(t)$ في المدى $\left[-\dfrac{\pi}{2} , \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ثم بوضع $t = 0$ ، $t = \dfrac{\pi}{2}$ أوجد مجموع المتسلسلات الناتجة.

8 ــ أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(t) = 1 + t$ ، $-\pi < t < \pi$

حيث $f(t + T) = f(t)$ ، $T = 2\pi$.

9 ــ أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(t) = \sinh(at)$ حيث $-\pi < t < \pi$.

10 ــ أعد حل المسألة 9 في الفترة $-\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{1}{2}$.

11 ــ أوجد متسلسلة فورييه للدوال:

أ ــ $f(t)=t \ , \ -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$

ب ــ $f(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{2} \ , & 0<t<2 \\ 1 \ , & 2<t<3 \end{cases}$

ج ــ $f(t)=\begin{cases} -1 \ , & -2<t<0 \\ 1 \ , & 0<t<2 \end{cases}$

12 ــ أوجد متسلسلة فورييه للدالة:

$$f(t)=\begin{cases} 1+\dfrac{t}{\pi} \ , & -\pi<t<0 \\ 1-\dfrac{t}{\pi} \ , & 0<t<\pi \end{cases}$$

ثم أثبت أن $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}.........=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$

13 ــ أوجد متسلسلة فورييه للدوال:

$$f(t)=\begin{cases} \sin\alpha t \ , & 0<\alpha t<\pi \\ -\sin\alpha t \ , & -\pi<\alpha t<0 \end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases} 0 \ , & -\pi\le\alpha t<0 \\ \sin\alpha t \ , & 0\le\alpha t<\pi \end{cases}$$

14 ــ يمكــن كــتابة متسلسلة فورييه للدالة $f(t)$ بالشكل: $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nt-\phi_n)$
حيث A_n ، ϕ_n معاملات فورييه. أثبت أن هذا المفكوك يكافىء المفكوك في المعادلة (25 – 5) ثم أوجد قيمة المعاملات A_n ، ϕ_n كدوال في معاملات فورييه a_n , b_n.

المصفوفات والمحددات

روجعت ونقحت في 1424/4/4 هـ

نناقش في هذا الفصل المصفوفات والمحددات والتي تظهر في كثير من المسائل الرياضية والفيزيائية. فمثلاً عند حل المعادلات الخطية يمكن تحويل نظام المعادلات إلى معادلة على شكل مصفوفة. وبالتالي إيجاد حلها عن طريق التعامل مع مصفوفات. أيضاً يمكن كتابة طريقة جاوس لحل المعادلات الخطية بدلالة محددات وإجراء بعض العمليات الجبرية على المحددة نفسها. وهناك تطبيقات أخرى مثلاً عند إيجاد القيم الذاتية في ميكانيكا الكم إلى غير ذلك من الأمثلة.

2 ـ 1 المصفوفات

تعريف : المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ عبارة عن ترتيب لمجموعة من العناصر عددها $m \times n$ في m صف وn عمود وتسمى عناصر المصفوفة. ونقول أن المصفوفة من الرتبة $m \times n$ ونقرأ رتبة المصفوفة من اليسار إلى اليمين. ونكتب المصفوفة A على الصورة :

$$(3-1) \qquad A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

وتسمى الكميات a_{ij} عناصر المصفوفة حيث ترمز i , j إلى الصف i والعمود j (بهذا الترتيب) الذي يوجد فيه العنصر a_{ij} . فمثلاً في المصفوفة A من الرتبة 2×3 :

$$A=\begin{pmatrix}1+i & 2\\ 0 & -i\\ 5 & e^x\end{pmatrix}$$

$a_{32}=e^x$, $a_{11}=1+i$. وفيما يلي بعض التعريفات المرتبطة بالمصفوفات.

تعريف 1: المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف والأعمدة ، أي $m=n$.

تعريف 2: العناصر المحورية (القطرية) لمصفوفة مربعة هي العناصر التي يتساوى فيها i مع j أي $i=j$ وتكتب بالشكل a_{jj} أو a_{ii}.

مثال 1 .

ما هي رتبة المصفوفة C وما هي عناصرها المحورية $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ؟

الحل : عدد صفوف C 2 وأعمدتها 2 ، إذن رتبتها 2×2 وعناصرها المحورية هي $c_{22}=4, c_{11}=1$.

تعريف 3: تتساوى مصفوفتان $B=(b_{ij})_{m\times n}$ و $A=(a_{ij})_{p\times q}$ إذا كان:

أ ــ $n=q$, $m=p$ أي B , A من نفس الرتبة.

ب ــ $a_{ij}=b_{ij}$ لجميع قيم j, i.

مثال 2 .

المصفوفة $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ لا تساوي المصفوفة C في المثال السابق لأن $c_{21}=3$, $b_{21}=-3$, $c_{21}\neq b_{21}$ ولذلك فهما غير متساويتين.

2 ــ 3 جبر المصفوفات

2 ــ 3 ــ 1 الجمع . يعرف جمع مصفوفتين B, A من نفس الرتبة على أنه مصفوفة أخرى C من نفس الرتبة ونحصل عليه بجمع العناصر المتناظرة في A مع B أي أنه إذا كانت:

$$B=(b_{ij})_{m\times n} \quad , \quad A=(a_{ij})_{m\times n}$$

فإن:

$$C=A+B=(c_{ij})_{m\times n} \qquad (3-2)$$

و

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

مثال 3 .

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ فأوجد $A+B$.

الحل:

$$A+B=\begin{pmatrix}5-2 & 2+7\\ -1+4 & 3+0\end{pmatrix}=C=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

خواص الجمع:

أ ــ الجمع غير معرف إذا كانت B, A مختلفتين في الرتبة.

ب ــ $A+B=B+A$.

ج ــ إذا كانت C مصفوفة ثالثة فإن: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2 ــ 3 ــ 2 الضرب

أ ــ ضرب مصفوفة بعدد: ضرب مصفوفة A بعدد α يعطي مصفوفة أخرى نحصل عليها بضرب كل عنصر من A بالعدد α.

مثال 4 .

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ فإن $3A=\begin{pmatrix}3\times 2 & 3\times 1\\ 3\times 4 & 3\times 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 12 & 0\end{pmatrix}$.

ب ــ ضرب صف بعمود: ليكن لدينا الصف $R_i=(r_{i1}\ \ r_{i2}\ \ldots\ldots r_{in})_{1\times n}$ من المصفوفة R والعمود:

$$D_j=\begin{pmatrix}d_{1j}\\ d_{2j}\\ \vdots\\ d_{nj}\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

من المصفوفة D . حاصل ضرب الصف R بالعمود D عبارة عن عدد بحت هو:

$$RD=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d_{11}\\ d_{21}\\ \vdots\\ d_{n1}\end{pmatrix}=\left(r_{11}d_{11}+r_{12}d_{21}+\cdots r_{1n}d_{n1}\right)$$

مثال 5 .

إذا كانت $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ فاحسب RD ؟

الحل :

$$RD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = (1\times 2)+(2\times 0)+(3\times 4) = 14$$

لاحظ أنه إذا تصورنا الصف R_i على أنه متجه R_i والعمود D_j متجه آخر D_j فإن الضرب R_iD_j يمكن تمثيله بالضرب القياسي $R_i{\cdot}D_j$. لاحظ كذلك أن حاصل ضرب الصف بالعمود هو عدد بحت.

ج ـ ضرب مصفوفة بمصفوفة : لتكن A مصفوفة من الرتبة $m \times p$ وB مصفوفة من الرتبة $p \times n$ بحيث عدد الأعمدة في A يساوي عدد الصفوف في B. نعرف الضرب AB على أنها مصفوفة C من الرتبة $m \times n$ (عدد صفوف الأولى وعدد الأعمدة من الثانية) وتحسب عناصرها كالتالي:

إذا كانت $A = (a_{ij})_{m\times p}$ ، $B = (b_{ij})_{p\times n}$ فإن:

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times n} \quad ; \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (2-3)$$

لاحظ أن شرط تعريف الضرب AB هو تساوي عدد الأعمدة في A مع عدد الصفوف في B وإذا اختــل هــذا الشرط فإن الضرب غير معرف ، وتكون المصفوفة الناتجة من الرتبة $m \times n$.

مثال 6 .

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

فاحسب AB و BA إذا كانا معرفين؟

الحل : عدد الأعمدة في A هو 2 والصفوف في B هو 3 ولذلك فإن الضرب AB **غير معرف.** وعدد الأعمدة في B هو 2 وعدد الصفوف في A هو2 والضرب BA معرف.

لحساب BA نستخدم العلاقة $(2-3)$:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

لحساب BA نضرب كل صف R_i في B مع كل عمود D_j في A وناتج الضرب يمثل العنصر c_{ij} في المصفوفة BA . فمثلاً ضرب الصف $(5 \quad 0)$ من B في العمود $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ من A يعطي العنصر c_{11} في BA ، بينما ضرب الصف $(2 \quad 1)$ بالعمود $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ يعطى العنصر c_{22} .

$$BA = C = \begin{pmatrix} 0\times1+5\times-2 & 0\times5+5\times4 \\ 1\times1+2\times-2 & 1\times5+2\times4 \\ 3\times1-2\times-2 & 3\times5-2\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ -3 & 13 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

خواص الضرب

أ ـ $AB \neq BA$

ب ـ $\alpha (A+B) = \alpha A + \alpha B$

ج ـ $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$ $\qquad (2-4)$

د ـ $A(B+C) = AB + AC$

هـ ـ $(AB)C = A(BC)$

حيث α، β ثوابت، C, B, A مصفوفات.

الخواص أ ـ د مباشرة ويمكن إثباتها مباشرة باستخدام تعريف المصفوفة وضرب المصفوفة. الخاصية هـ ليست مباشرة ولكن يمكن إثباتها أيضاً بافتراض $C,\ B,\ A$ مصفوفات بحيث يكون الضرب (AB) معرفاً أولاً وكذلك (BC). وهذا يعني أنه إذا كانت A من الرتبة $m \times p$ فإن B من الرتبة $p \times k$ حتى يتم تعريف الضرب (AB). كذلك فإن C لا بد أن تكون من الرتبة $k \times n$ حتى يمكن تعريف الضرب BC. إذن:

$$A = (a_{ij})_{m \times p}$$
$$B = (b_{ij})_{p \times k}$$
$$C = (c_{ij})_{k \times n}$$

تمرين: إذا كانت $n = 2, k = 2, p = 2, m = 3$ فتحقق من صحة الخاصية هـ حيث C, B, A هي المصفوفات السابقة.

مثال 7 .

تحقق من صحة الخاصية هـ إذا كانت

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} ، B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ، A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

الحل : لاحظ أن رتبة A هي 2×3 وB هي 2×2 و C هي 3×2. إذن الضرب BC, AB معرفان لتحقق شروط تعريف الضرب. إذن:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -8 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -8 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & -6 \\ 15 & -11 & 23 \\ 9 & -15 & 18 \end{pmatrix}$$

وضرب BC يعطي:

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

وأخيراً:

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & -6 \\ 15 & -11 & 23 \\ 9 & -15 & 18 \end{pmatrix}$$

إذن، في هذا المثال فإن الخاصية هـ صحيحة لأن $(AB)\,C = A\,(BC)$.

2 ــ 4 بعض أنواع المصفوفات

1 ــ مصفوفة الوحدة : مصفوفة الوحدة من الرتبة n هي مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها جميعاً تساوي 1 على المحور وصفراً عدا ذلك ويرمز لها بالرمز I_n.

مثال 8 .

مصفوفة الوحدة من الرتبة 2 هي

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومصفوفة الوحدة من الرتبة 3 هي : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ومصفوفة الوحدة من الرتبة n هي:

$$(2-5) \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ومن خواص مصفوفة الوحدة أنه إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times m$ فإن

$$(2-6) \qquad \mathrm{I}_n A = A\, \mathrm{I}_m = A$$

2 ــ المصفوفة السلّمية أو الدرجية وتسمى كذلك المصفوفة المثلثية الفوقية : هي مصفوفة جميع عناصرها تحت المحور تساوي أصفاراً.

مثال 9 .

المصفوفة A التالية سلمية لأن عناصرها تحت المحور تساوي أصفاراً.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 ــ منقول المصفوفة : منقول المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ هو مصفوفة أخرى من الرتبة $n \times m$ يرمز لها بالرمز A^{T} ونحصل عليها بتبديل جميع صفوف A بجميع الأعمدة.

مثال 11.

منقول المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ هو المصفوفة $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

خواص منقول المصفوفة

ا ــ $(\mathrm{I}_n)^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n$ حيث I_n مصفوفة الوحدة من الرتبة n.

ب ــ لأي مصفوفتين B, A $\quad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

ج ــ $\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$.

مثال 12 .

إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

تحقق من الخاصية ج؟

الحل :

$$BC=\begin{pmatrix}0&5\\1&2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&20\\-3&8\\7&-8\end{pmatrix}$$

$$(BC)^T=\begin{pmatrix}-10&-3&7\\20&8&-8\end{pmatrix}$$

$$C^TB^T=\begin{pmatrix}1&-2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\5&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-3&7\\20&8&-8\end{pmatrix}$$

$$(BC)^T=C^T B^T$$

4 ــ معكوس المصفوفة : يعرف معكوس مصفوفة مربعة A من الرتبة n بمصفوفة أخرى من نفس الرتبة يرمز لها بالرمز A^{-1} بحيث يكون:

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I_n \qquad (2-7)$$

حيث I_n مصفوفة الوحدة من الرتبة n ، نفس رتبة A.

يعرف المعكوس للمصفوفات المربعة فقط وسنرى فيما بعد كيف يمكن حساب معكوس مصفوفة.

5- المصفوفة الهيرميتية : إذا كانت A مصفوفة أعداد مركبة من الرتبة $m\times n$ فإن :

آ ــ المصفوفة المرافقة لها هي A^* ونحصل عليها بأخذ المرافقات المركبة للعناصر في المصفوفة A.

ب ــ منقول المصفوفة المرافقة A^+ هو $A^+=\left(A^*\right)^T$.

تعريف: نقول أن المصفوفة A هيرميتية إذا كان:

$$A^+=A \qquad (2-8)$$

مثال 12.

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1&1+i\\1-i&3\end{pmatrix}$ فإن المصفوفة المرافقة هي $A^*=\begin{pmatrix}1&1-i\\1+i&3\end{pmatrix}$ ومنقول المصفوفة المرافقة A^* هي المصفوفة $A^+=\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix}1&1+i\\1-i&3\end{pmatrix}$ وبمقارنة A^+ مع A نجد أن $A^+=A$ وبالتالي فإن المصفوفة A هيرميتية.

6 ــ المصفوفة الأحادية : تسمى المصفوفة المربعة A أحادية إذا كان:

$$AA^+=I \qquad (2-9)$$

من هذا التعريف ينتج بضرب الطرفين في A^{-1} أن

$$A^{-1}AA^+=A^{-1}I$$

$$A^+=A^{-1} \qquad (2-10)$$

مثال 13 .

المصفوفة $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & -1\end{pmatrix}$ أحادية لأن $A^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & -1\end{pmatrix}$ و $AA^{+}=I_2$.

7 ــ المصفوفة المتعامدة : تسمى المصفوفة A متعامدة إذا كان:

$$AA^{T}=I \quad \text{أو} \quad A^{T}=A^{-1} \qquad (2-11)$$

مثال 14.

مصفوفة الوحدة $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ متعامدة لأن:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{T}=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

2 ــ 5 المحددات

2 ــ 5 ــ 1 التباديل والتعاكسات

إن التباديل الممكنة للأعداد 3 ,2 ,1 والتي تعطى أعداداً مختلفة هي :

123 , 132 , 213 , 231 , 312 , 321

وعددها $3!=6$ تبديلا .

وتباديل الأعداد 4 ,3 ,2 ,1 عددها $4!=24$ وهي :

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2341	3214	4213
1342	2314	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

وبصورة عامة يمكن تكوين !n تبديل من الأعداد n ,... ,3 ,2 ,1.

وكما نرى من الأمثلة السابقة فإن الأعداد في التباديل ليست مرتبة حسب قيمتها. ففي بعض التباديل يوجد أعداد كبيرة تأتي قبل أعداد أخرى صغيرة كما هو الحال في التباديل 4123 ,312 وعندما يسبق في إحدى الترتيبات عدد j عدداً آخر i مع أن $i<j$ عندئذ نقول أنه يوجد تعاكس بحيث تكون الأعداد مرتبة في غير الترتيب الطبيعي فيها.

ولحساب عدد التعاكسات في تبديل ما. يجب أن نأخذ بعين الاعتبار جميع الأعداد الصغيرة التي يأتي قبلها العدد الأكبر (بحيث يكون الترتيب من اليسار إلى اليمين). ففي التبديل 321 يوجد ثلاث تعاكسات وذلك لأن العدد الأكبر 3 يسبق العدد 2 والعدد 1 ، والعدد 2 يأتي قبل العدد 1. وفي التبديل 4321 هناك 6 تعاكسات لأن العدد 4 يأتي قبل الأعداد 1 ,2 ,3 والعدد 3 يسبق العدد ين 1,2 ويعطي تعاكسين اثنين بينما العدد 2 يسبق العدد 1 ويعطي تعاكساً واحداً.

تعريف 1 : إذا كان عدد التعاكسات في تبديل ما عدداً زوجياً فإن التبديل يسمى زوجيا وإذا كان عددها فردياً سمي التبديل فرديا.

تعريف 2 : يعرف رمز ليفي ــ شيفيتا (Levi – Chivit*a*) من الرتبة الثانية ε_{ij} بالعلاقة:

$$\varepsilon_{ij} = 1 \quad \text{إذا كان عدد التعاكسات زوجية} \qquad (2-11)$$
$$\varepsilon_{ij} = -1 \quad \text{إذا كان عدد التعاكسات فردية}$$

فإذا كانت $i = 1$ ، $j = 2$ فإن $\varepsilon_{12} = 1$ لأنه لا يوجد تعاكس ، بينما $\varepsilon_{21} = -1$ لأنه يوجد تعاكس فردي.

ويعرف رمز ليفي ــ شيفيتا من الرتبة n بالعلاقة:

$$\varepsilon_{j_1 j_2 j_3 \ldots\ldots j_n} = \begin{cases} +1 & \text{for even number of permuation} \\ \\ -1 & \text{for odd number of permutations} \end{cases} \qquad (2-12)$$

مثال 15 .

في رمز ليفي ــ شيفيتا من الرتبة الرابعة ε_{1234} احسب قيمة كل من ε_{1324} ، ε_{1342} ، ε_{1234}.

الحل : $\varepsilon_{1234} = 1$ لأنه لا يوجد تعاكس.

$\varepsilon_{1324} = -1$ لأنه يوجد تعاكس واحد: العدد 3 يسبق العدد 2.

$\varepsilon_{1342} = +1$ لأنه يوجد تعاكسان اثنان: العدد 4 يسبق العدد 2 والعدد 3 يسبق العدد 2.

2 ــ 5 ــ 2 محددة مصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2-13)$$

نكون من عناصر A ، حاصل الضرب:

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots\ldots\ldots a_{nj_n} \qquad (2-14)$$

في n عنصر من عناصر A، بحيث يؤخذ عنصر واحد فقط من كل صف وكل عمود من صفوف وأعمدة A .

إن العناصر في (14–2) مرتبة بحيث أن معلقات الصفوف (1,2,........ n) لا تعطى أي تعاكسات أي أنهما مختارة بالترتيب (1 2 3 ....n) وأما معلقات الأعمدة (j_1 j_2 ....j_n) فيمكن أن تكون أي تبديله من تبديلات الأعداد (1 2 3 ....n).

تعريف : محددة المصفوفة المربعة A عبارة عن عدد يرمز له بالرمز $|A|$ أو $\det A$ أو D_n وينتج من الجمع الجبري للأعداد:

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots\ldots j_n}\, a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots\ldots\ldots a_{nj_n} \qquad (2-15)$$

على أن تؤخذ جميع التبديلات الممكنة (j_1 j_2 ....j_n). أي أن:

$$|A| = \sum_{(j_1 \ldots j_n)} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots\ldots j_n}\, a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots\ldots\ldots a_{nj_n} \qquad (2-16)$$

بحيث يجري الجمع في (15 – 2) على كل التباديل الممكنة للأعداد (j_1 j_2 ....j_n).

مثال 16 .

احسب محددة المصفوفة من الرتبة الثانية. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

الحل : حيث أن المحددة من الرتبة الثانية فإن رمز ليفي ــ شيفيتا من الرتبة الثانية أي ε_{12}. وباستخدام المعادلة (2 – 16):

$$|A| = \varepsilon_{12}\, a_{11}\, a_{22} + \varepsilon_{21}\, a_{12}\, a_{21}$$

وحسب القاعدة السابقة: أخذنا العنصر a_{11} من الصف الأول والعمود الأول وهذا يعني أننا لا نستطيع أن نأخذ في الضرب أي عنصر من الصف الأول والعمود الأول والعنصر الوحيد الذي يمكن ضربه مع a_{11} هو العنصر a_{22} لأنه ليس في الصف الأول أو العمود الأول. وفي حد الضرب الثاني أخذنا العنصر a_{12} من الصف الأول والعمود الثاني والعنصر الوحيد غير الموجود من هذا الصف وهذا العمود هو a_{21}، وهكذا نكون أخذنا من الصف الأول عنصراً وكذلك من الصف الثاني. ونفس الشيء من العمود الأول والعمود الثاني.

وبالنسبة للإشارة فإن $\varepsilon_{12} = +1$ بينما $\varepsilon_{21} = -1$ وذلك من التعريف (11 – 2) ، لأن هناك تعاكساً هو 21 .

إذن:

$$|A| = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

وكمثال عددي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3 \,.\, 4 - (-2) \,.\, 1 = 14$$

مثال 17 .

أحسب محددة المصفوفة من الرتبة الثالثة والمعطاة بالشكل:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

الحل : من التعريف السابق وبنفس الخطوات المتبعة في المثال السابق فإن:

$$\begin{aligned} |A| &= \varepsilon_{123}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + \varepsilon_{132}\, a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \\ &+ \varepsilon_{213}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + \varepsilon_{231}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \\ &+ \varepsilon_{312}\, a_{13}\, a_{21}\, a_{32} + \varepsilon_{321}\, a_{13}\, a_{22}\, a_{31} \end{aligned}$$

نلاحظ هنا أنه في كل الحدود التي يضرب فيها عناصر المصفوفة بعضها ببعض، نأخذ فقط عنصراً واحداً من كل صف وعمود، ورمز ليفي ـ شيفيتا من الرتبة الثالثة معلقاته هي معلقات الأعمدة لأن الصفوف مرتبة بحيث لا يوجد تعاكسات. من المعادلة (12 – 2) نحدد الآن إشارة الرمز ε_{123} ، ... من التعريف:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_{132} = -1 & \varepsilon_{123} = +1 \\ \varepsilon_{231} = +1 & \varepsilon_{213} = -1 \\ \varepsilon_{321} = -1 & \varepsilon_{312} = +1 \end{array}$$

أي أن:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \\ &+ a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} \end{aligned}$$

وكمثال عددي ، إذا كانت المصفوفة A هي المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

فإن محددة A هي:

$$\begin{aligned} |A| &= 1\cdot5\cdot9 - 1\cdot8\cdot6 - 2\cdot4\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 \\ &= 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 = 0 \end{aligned}$$

2 ـ 6 مفكوك لابلاس لحساب محددة مصفوفة

لحساب محددة مصفوفة من الرتبة n نعرف أولاً ما يسمى بالمصغرات والمرافقات. لتكن A المحددة:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2-17)$$

المحددة المصغرة للعنصر a_{ij} هي المحددة المتبقية من المحددة $|A|$ بعد حذف الصف i والعمود j في $|A|$ ونرمز لها بالرمز M_{ij}. ففي المحددة $|A|$ السابقة، مصغرة a_{11} هي المحددة M_{11} حيث:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2-18)$$

ونعرف المحددة المرافقة للعنصر a_{ij} ويرمز لها بالرمز C_{ij} بالمحددة:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij} \qquad (2-19)$$

أي أن المحددة المرافقة هي المحددة المصغرة M_{ij} مضروبة بالكمية $(-1)^{i+j}$.

مثال 18.

أوجد المحددة المرافقة للعناصر a_{32} , a_{11} في المحددة A؟

$$A=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 7\end{vmatrix}$$

الحل : مصغرة العنصر $a_{11} = 3$ هي المحددة $M_{11}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}=34$ والمحددة المرافقة هي:

$C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=+\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}=+34$.

ومصغرة العنصر $a_{32}=1$ هي المحددة $M_{32}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-2=1$ ومرافقته هي:

$C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-1$.

مفكوك لابلاس

نحسب قيمة المحددة A حسب طريقة لابلاس كالتالي:

أ ــ يضرب كل عنصر a_{ij} من عناصر صف (أو عمود) مختار بالمحددة المرافقة C_{ij}.

ب ــ تجمع الحدود الناتجة جمعاً جبرياً.

أي أن قيمة المحددة $|A|$ يعطى بالعلاقة:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij} \qquad \text{i ــ ثابت} \qquad (2-20)a$$

عند اختيار الصف i ، وبالعلاقة:

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij} \qquad \text{j ــ ثابت} \qquad (2-20)b$$

إذا تم اختيار العمود j. لاحظ أن اختيار الصف أو العمود لإيجاد قيمة المحددة هو أمر اختياري بحت. والاختيار الأنسب هو الذي يجعل العملية الحسابية أبسط ما يمكن.

مثال 19.

احسب قيمة المحددة

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

باستخدام الصف الثاني أولاً ثم باستخدام العمود الثالث ثانياً؟

الحل : 1 ــ باستخدام الصف الثاني : المصغرات المقابلة للعناصر $a_{23}=2$ ، $a_{22}=5$ ، $a_{21}=2$ هي على التوالي :

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3&4\\4&1\end{vmatrix}=-13 \text{ ، } M_{22}=\begin{vmatrix}3&1\\4&3\end{vmatrix}=5 \text{ ، } M_{21}=\begin{vmatrix}4&1\\1&3\end{vmatrix}=11$$

والمحددات المرافقة لهذه العناصر هي:

$$C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-11 \text{ ، } C_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=2 \text{ ، } C_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=14$$

إذاً $|A|=2\times(-11)+5\times(5)+2\times(14)=29$

2 ــ باستخدام العمود الثالث : مرافقات العناصر $a_{13}=1$ ، $a_{23}=2$ ، $a_{33}=3$ هي على الترتيب : $C_{13}=$:

$C_{33}=7$ ، $C_{23}=13$ ، -18

وقيمة المحددة $|A|$ هي:

$$|A|=1\times(-18)+2\times(13)+3\times(7)=29$$

وهي نفس القيمة السابقة باستخدام الصف الثاني.

عند حساب المحددة نحاول دائماً الحصول على صف أو عمود أكثر عناصره أصفار لأن ذلك يسهل إيجاد المحددة. وإذا لم يكن صف أو عمود في المحددة محتوياً على أصفار فإنه يمكن باستخدام خواص المحددات تحويل المحددة إلى أخرى يسهل التعامل معها.

2 ــ 7 خواص المحددات

1 ــ لا تتغير قيمة المحددة إذا بدلت جميع الصفوف بجميع الأعمدة وهذا يعني أن محددة المصفوفة A تساوي محددة منقولها أي:

$$|A^T|=|A| \qquad (2-21)$$

مثال 20 .

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-2\end{pmatrix}$ فاحسب $|A|$ ، $|A^T|$

الحل :

$A^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}$ وبالتالي فإن :

$|A|=-2-6=-8$ ، $|A^T|=-2-6=-8$ أي أن $|A^T|=|A|$

2 ــ تتغير إشارة المحددة إذا بدل صفان (أو عمودان). لتكن:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

وعند تبديل الصف الأول والثاني نحصل على المصفوفة

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وحسب تعريف مفكوك المحددة فإن $|A'| = -|A|$

3 ــ إذا تساوى صفان أو عمودان فإن قيمة المحددة تساوي الصفر. لتكن

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

محددة يتساوى فيها الصفان الثاني والثالث. بتبديل عناصر الصف الثاني والثالث واستخدام الخاصية (2) السابقة فإن إشارة المحددة $|A|$ تتغير بحيث : $|A| = -|A|$

والعدد الوحيد الذي يساوي سالب نفسه هو الصفر. إذن $|A| = 0$

مثال 21 .

احسب محددة المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

الحل : $|A| = 1 \times 4 - 4 \times 1 = 0$

4 ــ قيمة المحددة تساوي الصفر إذا كانت جميع عناصر صف أو عمود تساوي الصفر.

5 ــ إذا ضربت عناصر صف (أو عمود) بعدد k فإن قيمة المحددة تضرب بالعدد k. فإذا كانت

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ فإن $\lambda |A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

مثال 22 .

إذا كانت $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ فبضرب العمود الأول في 2 نحصل على المحددة $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ ، $|A| = -1$ ، $|B| = -2$ ، $|A| = 2|B|$

6 ــ إذا تناسبت عناصر صفين أو عمودين فإن قيمة المحددة تساوي الصفر.

فإذا كانت

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

بحيث تتناسب عناصر العمودين الأول والثاني ، فإنه يمكن كتابة المحددة $|A|$ باستخدام الخاصية (5) كالتالي:

$$|A| = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv 0$$

وذلك من الخاصية (3) لأن العمودين الأول والثاني متساويان. فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} \equiv 0$$

7 ــ إذا كان كل عنصر في صف (أو عمود) في محددة يعطى كحاصل جمع عنصرين آخرين فإن المحددة تساوي حاصل جمع محددتين وتكتب بالشكل:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12} \\ a_{21}+c & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a_{12} \\ c & a_{22} \end{vmatrix}$$

مثال 23 .

احسب قيمة المحددة $|A| = \begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ 2-i & 3 \end{vmatrix}$ باستخدام الخاصية (7) وبالحساب المباشر للمحددة.

الحل : قيمة المحددة بالحساب المباشر $|A| = 3 + 3i - 4 + 2i = -1 + 5i$ وباستخدام الخاصية (7) فإن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & 2 \\ -i & 3 \end{vmatrix} = (3-4) + (3i+2i) = -1+5i$$

وهي نفس النتيجة بالحساب المباشر.

8 ــ قيمة المحددة لا تتغير إذا ضربت كل عناصر صف (أو عمود) وجمعت إلى العناصر المماثلة لهـــا فـــي الصف (أو العمود) الآخر.

فإذا كانت المحددة $|A|$ هي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وبضرب عناصر العمود الثاني بالعدد λ وإضافتها إلى عناصر العمود الأول فإن:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وباستخدام الخواص 3 ــ 7 فإن $|A'| = |A|$

مثال 24 .

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ فاحسب قيمة المحددة $|A|$ والمحددة الناتجة عن ضرب العمود الثاني في 2 وإضافته إلى العمود الأول.

الحل:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=4 \ .$$

والمحددة الناتجة عن ضرب العمود الثاني في 2 وإضافتها إلى العمود الأول هي:

$$|A'|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=4$$ إذن $|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}'|$

9 ــ إذا كانت A ، B مصفوفتين مربعتين من نفس الرتبة فإن

$$|AB|=|A|\times|B| \qquad (2-22)$$

أو

$$\det(AB)=\det(A)\times\det(B)$$

مثال 25 .

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$

تحقق من الخاصية (9) السابقة.

الحل :

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 18\\ 15 & 35\end{pmatrix} \text{ ، } |A|=5 \text{ ، } |B|=-19$$

$|AB|= -95$ ، $|A|\times|B|= -95$ إذن $|AB|=|A|.|B|$

إن هذه الخواص السابقة تساعد كثيراً في التعامل مع المحددات خاصة عند حل المعادلات الجبرية. فمثلاً باستخدام طريقة جاوس لحل المعادلات الجبرية نحتاج إلى تحويل المحددة إلى شكل يسهل فيه التعامل معها واستخلاص الحلول المطلوبة كما سنرى في الفقرات القادمة. كذلك يمكن استخدام تلك الخواص في تبسيط المحددة لحساب قيمة محددة مصفوفة كما يوضح المثال التالي.

مثال 26 .

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحددة $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$

الحل : بطرح العمود الثالث من العمود الأول (خاصية 8) نجد أن:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

بطرح ضعف الصف الثالث من الصف الأول (خاصية 8 أيضاً)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

نحسب الآن قيمة المحددة باستخدام العمود الأول فنجد $|A| = 29$.

وهذه الطريقة تختصر كثيراً من الخطوات والحسابات خاصة في المحددات الكبيرة $n \geq 4$.

2 ـ 8 معكوس مصفوفة مربعة

نعرف ابتداءً المصفوفة المصاحبة للمصفوفة المربعة A والتي يرمز لهـا بـالرمز adjoint A أو $adjA$ اختصاراً . وتعرف بالمصفوفة التي نحصل عليها بأخذ منقول المصفوفة التي تكون عناصرها هـي مرافقـات عناصر محددة المصفوفة A أي أنه إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة المصاحبة $adj\,A$ هي:

$$adjA = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

حيث C_{ij} هي مرافقات العناصر a_{ij} في محددة المصفوفة A ، T هو المنقول.

مثال 27 .

احسب $adj\,A$ حيث
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

الحل :

مرافقات عناصر محددة المصفوفة A هي :

$$C_{11} = 11\ ,\ C_{12} = -7\ ,\ C_{13} = 2\ ,\ C_{21} = -9\ ,\ C_{22} = 9$$
$$C_{23} = -3\ ,\ C_{31} = 1\ ,\ C_{32} = -2\ ,\ C_{33} = 1$$

ومن تعريف $adj\,A$ أعلاه

$$adjA=\begin{pmatrix}11 & -7 & 2\\ -9 & 9 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T$$

وبحساب المنقول فإن

$$adjA=\begin{pmatrix}11 & -9 & 1\\ -7 & 9 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

ويمكن الآن أن نعرف معكوس مصفوفة A.

تعريف : معكوس مصفوفة مربعة A هو مصفوفة أخرى يرمز لها بالرمز A^{-1} وتعطى بالعلاقة:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\times adjA$$

على أن يكون $\det A\neq 0$. وإذا كان $\det A=0$ فإن A ليس لها معكوس.

مثال 28 .

احسب معكوس المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & 12\end{pmatrix}$

الحل : نحسب قيمة المحددة A فنجد

$$\det A=|A|=(36-25)-2(12-5)+3(5-3)=3\neq 0$$

وباستخدام نتيجة المثال السابق في حساب $adj\,A$ إذن

$$A^{-1}=\frac{1}{3}adjA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}11 & -9 & 1\\ -7 & 9 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/3 & -3 & 1/3\\ -7/3 & 3 & -2/3\\ 2/3 & -1 & 1/3\end{pmatrix}$$

تمرين : تحقق من أن $AA^{-1}=I_3$ ، I_3 مصفوفة الوحدة من المرتبة الثالثة.

مثال 29 .

احسب معكوس المصفوفة $A=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

الحل : أ ــ نحسب محددة A

$$|A|=30-27=3\neq 0$$

ب ــ نحسب مرافقات العناصر ونكون مصفوفة المرافقات B :

$$B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 6\end{pmatrix}$$

ومنه نوجد المصفوفة المصاحبة $adj\ A = B^{T}$

$$adjA=\begin{pmatrix}5 & -9\\ -3 & 6\end{pmatrix}$$

ج ــ معكوس المصفوفة A هو:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times adjA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -9\\ -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5/3 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

تمرين : تحقق من أن $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ ، I_2 مصفوفة الواحدة من الرتبة الثانية.

مسائل

1 ــ إذا كانت

أ- $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

ب- $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$ و $D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

احسب AB ، BA ، $A+B$ ، $3A-4B$ ، CD ، DC ، $C+D$ ، $5C-D$.

2 ــ باستخدام نتائج السؤال السابق تحقق من أن:

$$AB \neq BA \;\; ; \;\; CD \neq DC$$
$$\det(AB) = \det A \times \det B$$
$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$
$$(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$$
$$(CD)^{T} = D^{T}C^{T}$$
$$\det(CD) = \det C \times \det D$$

3 ــ من المصفوفات التالية احسب: المنقول، المرافق، منقول المرافق، والمعكوس.

$$C=\begin{pmatrix}0 & 2i & -1\\ -i & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix} ; \; B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2i\\ i & -3 & 0\\ 1 & 0 & i\end{pmatrix} ; \; A=\begin{pmatrix}i & -1\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

أي هذه المصفوفات هيرميتية ، أحادية ، متعامدة ؟

4 ــ أثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)$

تسمى هذه المحددة بمحددة فاندرموند [Vander monde]

5 ــ إذا كانت $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & 0 \\ 0 & 1 & z & z^2 \\ z^2 & 0 & 1 & z \\ z & z^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

حيث z عدد مركب:

أ ــ أثبت أن $D_4 = 1 + z^4 + z^8$

ب ــ ضع $D_4 = 0$ ثم حل المعادلة $1 + z^4 + z^8 = 0$ وارسم الحلول في المستوى المركب

[مساعدة للحل: لحل المعادلة ضع $U = z^4$ ثم استخدم نظرية دي موافر لحساب $z = U^{1/4}$].

6 ــ إذا كانت $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

فأثبت أن $A(\theta)\,A(\phi) = A(\theta+\phi)$ وإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فاحسب A^2 ، A^{-1} ، A^+ .

7 ــ مصفوفات باولي : تعرف مصفوفات باولي في ميكانيكا الكم كالتالي

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

أثبت أن:

أ ــ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$

ب ــ $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\sigma_3\right)} = i\sigma_3$

ج ــ $\sigma_1\sigma_2 = I\sigma_3$ ، $\sigma_2\sigma_3 = I\sigma_1$ ، $\sigma_3\sigma_1 = I\sigma_2$

8 ــ إذا كانت العناصر a_{ij} في المحددة D_n دوالاً في متغير t فإن مشتقة المحددة هي :

$$\frac{dD_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\,\frac{da_{ij}}{dt}$$

حيث C_{ij} هي المحددة المرافقة للعنصر a_{ij} . فإذا كانت $D_n = D_2$ حيث:

$$D_2 = \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2t & \cos t \end{vmatrix}$$

فاحسب $\frac{dD_2}{dt}$ باستخدام التعريف السابق ، ثم بفك المحددة مباشرة ومفاضلة الناتج بالنسبة للمتغير t .

9 ــ تستخدم المصفوفة التالية عند مناقشة العدسات السميكة في الهواء

$$A=\begin{pmatrix}1 & (n-1)/R_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{d}{n} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -(n-1)/R_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

حيث d سمك العدسة، n معامل الانكسار، R_1 ، R_2, نصف قطر تحدب سطحي العدسة. فإذا كان البعد البؤري f للعدسة يعرف بالعلاقة $f=-1/a_{12}$ حيث a_{ij} هو عنصر المصفوفة A .

احسب A ، $\det A$ ، f .

10 ــ احسب قيمة المحددة المثلثية باستخدام خواص المحددات

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

نظم المعادلات الخطية

المعادلات الذاتية والتحويلات الخطية

نقحت وروجعت في 1424/4/7 هـ

بعد دراسة المصفوفات والمحددات وخواص كل منهما ننتقل الآن لدراسة أحد تطبيقاتها وهو حل المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة . وسوف نتعرض لثلاث طرق نتعرف من خلالها على كيفية حل هذه المعادلات . سنبدأ بطريقة جاوس ثم بطريقة كرامر ، وتعتمد هاتان الطريقتان على خواص المحددات ثم نناقش طريقة معكوس المصفوفة التي تعتمد على خواص المصفوفات .

1-4 تمهيد

إن إيجاد حل لنظام المعادلات

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \qquad (4-1)$$

عملية بسيطة حيث نحصل بجمع المعادلتين على $2x_1 = 4$ ومنه $x_1 = 2$ وبطرح المعادلة الثانية من الأولى نحصل على $2x_2 = 2$ ومنه $x_2 = 1$.

أما إيجاد حل لنظام المعادلات

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \qquad (4-2)$$

فإنه يحتاج إلى مجهود أكبر ولا يتم بنفس السهولة التي تم بها إيجاد حل لنظام المعـادلات (1–4). وفـي هـذا الفصل سنتعرف على عدة طرق لإيجاد حل لنظام من المعادلات في n مجهول $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots\ldots , x_n$ و m معادلة مستخدمين في ذلك المصفوفات والمحددات التي درسناها في الفصل السابق. والهدف من هذه الطرق هو الوصول إلى حل لنظام المعادلات الخطية:

$$(4-3) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

وهذا يعني الحصول على قيم المجاهيل $x_1 , x_2 , \ldots\ x_n$ التي تحقق نظام المعادلات(3 – 4).

يسمى نظام المعادلات (3–4) متجانسا إذا كان الطرف الأيمن يساوي الصفر أي إذا كانت جميع قيم b_i لجميـع قيم i تساوي الصفر . ويسمى غير متجانس إذا كان الطرف الأيمن لا يساوي الصفر .

4 ـ 2 طريقة جاوس

تعتمد طريقة جاوس لإيجاد حل لنظام المعادلات (3–4) على تحويل مصفوفة المعاملات إلى مصفوفة سلّمية أو درجية باستخدام العمليات الحسابية التي يمكن إجراؤها على المعادلات في هذا النظام وهي :

أ ـ ضرب طرفي أي معادلة بعدد $\alpha \neq 0$.

ب ـ ضرب أي معادلة بعدد $\alpha \neq 0$ وجمعها إلى معادلة أخرى.

ج ـ كتابة المعادلات بأي ترتيب وهذا يعني أنه يمكن تبديل معادلتين ببعضهما البعض . وقبل شرح طريقة جاوس نعرف لنظام المعادلات (3 –4) المصفوفات التالية:

1 ـ مصفوفة المعاملات A بالمصفوفة المكونة من معاملات المجاهيل والتي تأخذ الشكل :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 ـ مصفوفة المعاملات الموسعة B وهي مصفوفة المعاملات مضافا إليها المعاملات في الطرف الأيمن وتكتب على الشكل :

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

إن الفكرة الأساسية لطريقة جاوس هي تحويل مصفوفة المعاملات الموسعة B إلى مصفوفة مثلثية فوقية (انظر الفقرة 2 ــ 3 في الفصل السابق) باستخدام العمليات الحسابية المسموح بها والتي تعني بالنسبة للمصفوفة B:

أ ــ ضرب عناصر أي صف i من صفوف المصفوفة B بعدد $\alpha \neq 0$ ، وسوف نرمز لهذه العملية بــالرمز αR_i.

ب ــ ضرب عناصر صف j بالعدد α وإضافتها إلى عناصر الصف i ونرمز لهذه العملية بالرمز $\alpha R_j + R_i$.

ج ــ من الممكن تبديل الصفين i , j ونرمز لهذه العملية بالرمز $R_j \leftrightarrow R_i$.

وسنرى فيما يلي أمثلة على ذلك.

مثال 1 . أوجد حل نظام المعادلات الآتية

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

الحل : مصفوفة المعاملات الموسعة المكافئة لنظام المعادلات هي:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

نحول مصفوفة المعاملات الموسعة لنظام المعادلات إلى مصفوفة سلمية مستخدمين العمليات المذكورة أعلاه ثم نستنتج منها قيم المجاهيل .

أ ــ نضرب عناصر الصف الأول بالعدد 1- ونضيفها إلى الصف الثاني، $-1 \times R_1 + R_2$

ب ــ نضرب عناصر الصف الأول بالعدد 1- ونضيفها إلى الصف الثالث، $-1 \times R_1 + R_3$ فنحصل على:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

بضرب عناصر الصف الثاني في -1 ثم الجمع إلى الصف الثالث ينتج :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

وهذه مصفوفة سلمية . وبإعادة كتابتها على شكل المعادلة الأصلية نجد أن :

$$\begin{aligned} x+y+z&=5\\ 0-2y+0&=-2\\ 0+0-2z&=-4 \end{aligned}$$

ومن هذه المعادلات نجد مباشرة أن :

$$z=2$$
$$y=1$$
$$x=1$$

من المثال نرى أن الوصول إلى قيم المجاهيل مرتبط بجهد كبير بالنسبة للمعادلات المعطاة ولكن من المميـزات الهامة لهذه الطريقة إمكانية استخدامها لأي عدد من المجاهيل وإمكانية كتابة برنامج حاسب آلي يعتمـد عليهـا للوصول إلى قيم المجاهيل.

مثال 2 .

أوجد قيم المجاهيل x_4 , x_3 , x_2 , x_1 لنظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=-1\\ x_1-x_2-x_3-x_4&=3\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4&=6\\ -x_1+x_2-x_3+x_4&=-7 \end{aligned}$$

الحل : نحول نظام المعادلات إلى المصفوفة المكافئة التالية

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & -1 & 6\\ -1 & 1 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

ثم نحول هذه المصفوفة إلى سلمية . نقوم بالعمليات $-R_1+R_2$ ، $-2R_1+R_3$ ، R_1+R_4 فنحصل على:

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -2 & -2 & 4\\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

ثم نقوم بالعمليتين R_2+R_4 و $3/2R_2+R_3$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -2 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ثم بتبديل الصف الثالث مع الرابع $R_2 \Leftrightarrow R_3$ نحصل على:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

وهذه هي المصفوفة السلمية المطلوبة . والمعادلة الجبرية المكافئة لها هي

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$
$$0.x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4$$
$$0.x_1 + 0.x_2 - 2x_3 + 0.x_4 = -4$$
$$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 - 2x_4 = 6$$

ومنه فإن : $x_4 = -3$ ، $x_3 = 2$ ، $x_2 = -1$ ، $x_1 = 1$

تمرين : تأكد أن قيم المجاهيل التي حصلنا عليها تحقق نظام المعادلات.

4 ـــ 3 طريقة كرامر

تعتمد طريقة كرامر لإيجاد حل لنظام المعادلات (3 – 4) على خواص المحددات فإذا كانت Δ محددة مصفوفة المعاملات A (هذا يعني أن A مصفوفة مربعة) أي:

$$\Delta = \det A$$

فإن ضرب عناصر العمود الأول من المحددة Δ في x_1 يغير قيمة المحددة بحيث تصبح مساوية $\Delta x_1 = \Delta_1$ ، وإذا ضربت عناصر العمود الثاني في x_2 وأضيفت إلى عناصر العمود الأول فإن قيمة المحددة لا تتغير ، وإذا ضربت عناصر العمود الثالث في x_3 وأضيفت عناصر العمود الثالث إلى العمود الأول فإن قيمة Δ_1 لا تتغير وإذا ضربت عناصر العمود i بالكمية x_i وأضيفت إلى عناصر العمود الأول ، لكل القيم $i = 4, 5, 6,$ n , ………… فإن قيمة المحددة Δ_1 لا تتغير. وهذا يعني أن:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وبالعودة إلى نظام المعادلات (3 – 4) نجد أن عناصر العمود الأول هيb_n........ , b_1 , b_2 , b_3 ، أي

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta x_1 \qquad (4-4)$$

من العلاقة (4 – 4) نحصل على x_1 بالشكل

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad و \quad \Delta \neq 0 \qquad (4-5)$$

العلاقة (5 – 4) تعطي x_1 بدلالة المحددتين Δ_1 و Δ حيث Δ محددة مصفوفة المعاملات A .

$$\Delta = \det A$$

و Δ_1 المحددة التي نحصل عليها بتبديل عناصر العمود الأول في المحددة $|A|$ بالأعداد , b_1 , b_2 , b_3 b_n.......... من العلاقة (5 – 4) نرى أنه يجب أن تكون $\Delta \neq 0$ لكي يمكن حساب x_1 . وبنفس الطريقة نحصل على x_2 باتباع نفس الخطوات لنجد أن

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad و \quad \Delta \neq 0 \qquad (4-6)$$

حيث Δ_2 المحددة التي نحصل عليها بتبديل عناصر العمود الثاني في A بالأعداد b_n........ , b_1 , b_2 , b_3.

ولباقي المجاهيل فإن:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad و \quad \Delta \neq 0 \qquad (4-7)$$

حيث Δ_i المحددة التي نحصل عليها بتبديل عناصر العمود i بالكميات b_n.. , b_1 , b_2 , b_3 . وفيما يلي بعض الأمثلة.

مثال 3 .

باستخدام طريقة كرامر أوجد قيم المجاهيل لنظام المعادلات

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = -1$$

الحل : نوجد أولاً قيمة محددة المعاملات Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

أي أن الشرط الخاص بطريقة كرامر متحقق. لإيجاد قيمة المجاهيل x_3 , x_2 , x_1 نوجد قيم المحددات $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ حيث نبدل العمود الأول في المحددة Δ بالثوابت على يمين إشارات المساواة في نظام المعادلات فنحصل على Δ_1 بالشكل:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

وبنفس الطريقة:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{و} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

ومنه

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2$$

مثال 4 .

أوجد قيم المجاهيل لنظام المعادلات المعطى في المثال 3 باستخدام طريقة كرامر.

الحل: لنظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

نوجد أولاً قيمة محددة المعاملات Δ حيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

بفحص هذه المحددة نرى أن العمود الرابع يساوي العمود الثالث مضروباً بالعدد 1- وهذا يعني أن المحددة تساوي الصفر ويعني أيضاً أن عدد المعادلات الفعلي أقل من العدد المعطى ولاستخدام طريقة كرامر في هذه الحالة نبحث عن محددة رتبتها أقل من رتبة Δ لا تساوي الصفر. ولهذا المثال نحصل على مثل هذا المحددة باستبعاد العمود الثالث أو العمود الرابع . فلو استبعدنا العمود الثالث نحصل على المحددة:

$$\widetilde{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{vmatrix}=1\times(-4-3)+1\times(-4+1)-1\times(6+2)$$

$$\widetilde{\Delta}=-(7+3+8)=-18\neq 0$$

بما أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل بواحد فلا بد من اعتبار أحد المجاهيل بارامترا وبما أننا استبعدنا العمود الثالث نفترض أن $x_3 = t$. ويكون نظام المعادلات المعطى (بدون المعادلة الرابعة)

$$x_1 - x_2 - x_4 = -2 - t$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 + t$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -12 - 2t$$

ومحددة المعاملات لهذا النظام هي $\widetilde{\Delta}=-18$

و $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ هي:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-2-t & -1 & -1\\ 4+t & 2 & 1\\ -12-2t & 3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ -12 & 3 & -2\end{vmatrix}+t\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 3 & -2\end{vmatrix}$$

من الواضح أن المحددة المضروبة بالبارامتر t تساوي صفرا وذلك لتساوي العمود الثالث مع الأول . أما المحددة الأخرى فتعطى

$$= -2(-4-3) + 1(-8+12) - (12+24) = 14 + 4 - 36 \quad \Delta_1$$
$$= -18 \quad \Delta_1$$

ومنه $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\widetilde{\Delta}}=\dfrac{-18}{-18}=1$

و $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -2-t & -1\\ 2 & 4+t & 1\\ -1 & -12-2t & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & -12 & -2\end{vmatrix}+t\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{vmatrix}$

المحددة المضروبة بالبارامتر t تساوي الصفر لتساوي العمودين الثاني والثالث:

و $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & -12 & -2\end{vmatrix}=1(-8+12)+2(-4+1)+1(-24+4)=18$

ومنه $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}=\dfrac{18}{-18}=-1$

و $\Delta_4=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2-t\\ 2 & 2 & 4+t\\ -1 & 3 & -12-2t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 4\\ -1 & 3 & -12\end{vmatrix}+t\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{vmatrix}$

$$= 1(-24-12) + 1(-24+4) - 2(6+2) +$$
$$t\cdot[(-4-3) + 1(-4+1) - 1(6+2)]$$
$$= -72 - 18t$$

ومنه
$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\tilde{\Delta}} = \frac{-72-18t}{-18} = 4+t$$

بمقارنة هذه النتائج مع تلك التي حصلنا عليها في المثال 3 نجد أنها نفس النتائج . من المثال 6 أعلاه نرى أنـــه في حال كون المعادلات الفعلي أقل من عدد المجاهيل فإن محددة المعاملات تساوي الصفر وفي هــذه الحالــة نبحث عن محددة رتبتها أقل ولا تساوي الصفر ونعتبر المجهول الذي لم تؤخذ معاملاته بعين الاعتبار بارامترا ونحسب باقي المجاهيل بدلالته.

إن اختيار طريقة الحل المناسبة يعود الى المسألة المعطاة والى من يوجد الحل.

تمرين : أعد حل المثال أعلاه باستبعاد معاملات x_4 (العمود الرابع)

4 ــ 4 استخدام معكوس المصفوفة لحل المعادلات الخطية

كما رأينا من قبل فإنه إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت $\det A \neq 0$ فإنه يوجد للمصفوفة A معكوس هو المصفوفة A^{-1} حيث:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

فإذا كان عدد المعادلات في النظام المعطى (3–4) يساوي عدد المجاهيل فإن مصفوفة المعاملات A مصــفوفة مربعة . وإذا كانت $\det A \neq 0$ فإن المعكوس A^{-1} معرف ويمكن استخدامه في إيجاد قيم المجاهيل كالتالي:

أ ــ نكتب المجاهيل في مصفوفة من الرتبة (n × 1) فتكون

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ب ــ نكتب المعاملات $b_1 , b_2 , ... ,b_n$ في مصفوفة من الرتبة (n × 1) فتكون:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

وبالاستعانة بالمصفوفتين X و B نكتب نظام المعادلات (3 – 4) بالشكل

$$A\ X = B \qquad (4-8)$$

بضرب طرفي العلاقة (8 – 4) من اليسار بالمصفوفة A^{-1} نحصل على

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}B \qquad (4-9)$$

وبما أن $A^{-1}A = I_n$ و $I_nX = X$

فإن العلاقة (9 – 4) تصبح:

$$X = A^{-1}B \qquad (4-10)$$

العلاقة (10 – 4) هي حل نظام المعادلات (3 – 4) وتبين أنه إذا وجدت A^{-1} فإن المصفوفة X (التي تعطي قيم المجاهيل) نحصل عليها من الضرب $A^{-1}B$ كما يوضح ذلك المثال التالي .

مثال 5 .

باستخدام طريقة معكوس المصفوفة أوجد قيم المجاهيل لنظام المعادلات:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل : نوجد أولاً المحددة $\Delta = \det A$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

وهذا يعني وجود معكوس المصفوفة. لإيجاد معكوس المصفوفة نوجد المصفوفة المصاحبة $\operatorname{adj} A$ والتي تتكون عناصرها من مصغرات المحددة Δ ولذا نوجد أولاً المصغرات فنجد:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = (-1)^{1+1}(1+1) = 2 & C_{12} = (-1)^{1+2}(-1-1) = 2 & C_{13} = (-1)^{1+3}(-1+1) = 0 \\ C_{21} = (-1)^{2+1}(-1+1) = 0 & C_{22} = (-1)^{2+2}(-1-1) = -2 & C_{23} = (-1)^{2+3}(-1-1) = 2 \\ C_{31} = (-1)^{3+1}(1+1) = 2 & C_{32} = (-1)^{3+2}(1-1) = 0 & C_{33} = (-1)^{3+3}(-1-1) = -2 \end{array}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

و

$$\frac{1}{4}adj\,A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

ومصفوفة المجاهيل:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

وبمساواة الطرفين في هاتين المصفوفتين نحصل على قيم المجاهيل في نظام المعادلات فنجد :

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$$

تمرين : تحقق من أن قيم المجاهيل هذه تحقق نظام المعادلات.

ليس من الضروري أن نحصل على قيم عدديه لكل المجاهيل المعطاة في نظام معادلات خطية . فإذا كان عدد المعادلات m أقل من عدد المجاهيل n فإننا نفترض عدداً من المجاهيل (n-m مجهول) بارامترات ونحسب باقي المجاهيل بدلالة هذه البارامترات. ومن الممكن أن يكون عدد المعادلات المعطى m يساوي عدد المجاهيل n ولكن قد تكون إحدى المعادلات (أو أكثر) تنتج عن أخرى بضربها بعدد وهذا يعني أن عدد المعادلات الفعلي أقل من عدد المجاهيل ويظهر ذلك أثناء التعامل مع عناصر المصفوفة الموسعة B بظهور صف (أو أكثر) عناصره صفرية؛ ونقوم بهذه الحالة باعتبار أحد المجاهيل (أو أكثر) بارامتر ونحسب الباقي بدلالته وهذا يعني أن لنظام المعادلات عدد لا نهائي من الحلول تعتمد على قيم البارامترات.

من الممكن أن يكون عدد المعادلات المعطىm أكبر من عدد المجاهيل n وقد يحدث في هذه الحالة أن:

آ ـ يكون عدد المعادلات الفعلي مساوياً لعدد المجاهيل وفي هذه الحالة نحصل على قيم عددية للمجاهيل وهو حل وحيد.

ب ـ يكون عدد المعادلات الفعلي أكبر من عدد المجاهيل وفي هذه الحالة يكون هناك تضارب في المعادلات مما يؤدي إلى وجود أكثر من قيمة لأحد المجاهيل (أو أكثر).

ويظهر ذلك بظهور صف عناصر صفرية ما عدا في العمود الأخير وعند ترجمة هذا الصف إلى معادلة ينتج أن $0 = b \neq 0$ وهذا غير صحيح ولا يوجد في هذه الحالة حل لنظام المعادلات المعطى وفيما يلي أمثلة على ذلك.

مثال 6 .

أوجد قيم المجاهيل x_1 , x_2 , x_3 , x_4 التي تحقق نظام المعادلات

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -12$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 10$$

الحل : نكتب مصفوفة المعاملات الموسعة

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & -12 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

ونقوم بالعمليات $-2R_1 + R_2$ ، $R_1 + R_3$ ، $-3R_1 + R_4$ نحصل على:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & -14 \\ 0 & 4 & -5 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العملية $R_4 + R_2$ نحصل على:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & -8 & 8 & 24 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & -14 \\ 0 & 4 & -5 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العملية $1/8\ R_2$ نحصل على:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & -14 \\ 0 & 4 & -5 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العمليات $R_2 + R_1$ ، $-2R_2 + R_3$ ، $-4R_2 + R_4$ نحصل على:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العمليات $R_3\ /5$ و $R_3 + R_4$ نحصل على:

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفة B_5 مصفوفةسلمية . وإذا كتبنا نظام المعادلات الذي يقابلها نجد:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$
$$x_3 - x_4 = -4$$

وهذا يعني أن هناك ثلاث معادلات فعلية وبما أن عدد المجاهيل أربعة فإننا لا نحصل على قيم عددية للمجاهيل كلها ولذا نعتبر المتغير x_3 بارامترا t ونحصل على

$$x_1 = 1 \text{ و } x_2 = -1 \text{ و } x_3 = t \text{ و } x_4 = t + 4$$

وبما أن t اختيارية فإن هذا يعني أن للنظام عددا لا نهائيا من الحلول.

مثال 7 .

أوجد قيم المجاهيل x_1 , x_2 , x_3 التي تحقق نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

الحل : إن نظام المعادلات المعطى مكون من أربع معادلات وهناك ثلاثة مجاهيل ولإيجاد الحل نكتب مصفوفة المعاملات الموسعة

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & -12 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

بعد القيام بالعمليات $-2R_1 + R_2$ ، $R_1 + R_3$ ، $-3R_1 + R_4$ نحصل على:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العملية $R_3 + R_2$ نحصل على:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & -18 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

وبعد العملية $\frac{1}{3}R_2$ نحصل على:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العمليات $-R_2 + R_3$ ، $-2R_2 + R_4$ نحصل على:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العمليات $R_4 + R_3$ نحصل على:

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

وبعد العملية $-\frac{1}{2}R_3$ نحصل على:

$$B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

وبإجراء العمليات $5R_3 + R_4$ نحصل على

$$B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

وبكتابة نظام المعادلات الذي يقابل المصفوفة B_7 نحصل على:

$x_1 = 1$ ، $x_2 = -3$ ، $x_3 = 0$

ومن الصف الأخير نحصل على $2 = 0$!!! . وهذه المساواة الأخيرة غير صحيحة مما يعني وجود تعارض في نظام المعادلات ويمكن رؤية ذلك من B_6 حيث نحصل على قيمتين للمجهول x_3 هما $x_3 = 0$ (من الصف الثالث) و $x_3 = -2/5$ (من الصف الرابع) وهذا يعني عدم وجود حل لهذا النظام.

4 ـ 5 حل نظم المعادلات الخطية المتجانسة

كما ذكرنا يسمى نظام المعادلات:

$$(4-11) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

نظام معادلات خطية متجانسة. بينما يسمى النظام (3 – 4) نظام معادلات خطية غير متجانسة. درسنا في الفصول الماضية حلول المعادلات غير المتجانسة ونناقش هنا نظام المعادلات المتجانسة المعطي في العلاقة(11–4) . لهذا النظام حل مباشر هو:

$$(4-12) \quad x_1 = x_2 = x_3 = \ldots.. = x_n = 0$$

وينتج هذا الحل من معادلة كرامر كما يلي :

$$\Delta_i = \Delta . x_i \quad \text{ومنه} \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

وبما أن $\Delta_i = 0$ لأن $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots.. = b_n = 0$ (عمود كامل في Δ_i عناصره صفرية) فإن حل المعادلة $\Delta_i = \Delta\, x_i = 0$ يكون :

آ ـــ $x_i = 0$ بشرط $\Delta \neq 0$. وفي هذه الحالة نقول أن لنظام المعادلات المتجانس حلا بديهيا الحل (12–4) .

ب ـــ $\Delta = 0$ وهذا يعني أن $x_i \neq 0$. وبالتالي فهناك حل آخر هو $x_i \neq 0$ يسمى حل غير بديهي .

إن وجود حل آخر غير الحل البديهي يعني أن عدد المعادلات الفعلي أقل من عدد المجاهيل مما يؤدي إلى افتراض عدد من المجاهيل بارامترات وحساب باقي المجاهيل بدلالتها. لفحص وجود حل آخر غير الحل البديهي يمكننا استخدام طريقة جاوس حيث يؤدي كون عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل إلى ظهور صفوف كل عناصرها صفرية في المصفوفة القانونية. كما يظهر وجود حل غير الحل البديهي في طريقة كرامر إذا كانت $\Delta = 0$ كما رأينا أعلاه ، أي إذا كانت:

$$(4\text{–}13) \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

إن تحقق الشرط (13–4) يعني أن هناك صفين (أو عمودين) أو أكثر مرتبطان خطياً (ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ثابت) وهذه يعني بدوره أن عدد المعادلات الفعلي أقل من عدد المجاهيل (تنتج إحدى المعادلات عن أخرى بضربها بثابت) وهذا يعني بالنسبة لنظام المعادلات (11 – 4) أن هناك حلاً يكون فيه عدد من المجاهيل بارامترات كما رأينا من قبل عند إيجاد حل لنظام المعادلات في المثال 3 والمثال 6. وفيما يلي أمثلة على نظم المعادلات المتجانسة .

مثال 9 .

باستخدام طريقة جاوس أوجد جميع حلول نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

الحل : مصفوفة المعاملات الموسعة المكافئة لهذا النظام من المعادلات هي

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

ولتحويلها إلى مصفوفة سلمية نجري العمليات $R_1 + R_4, - R_1 + R_3, - 2R_1 + R_2$ فنحصل على:

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5 & 0\\ 0 & -3 & -7 & 11 & 0\\ 0 & -4 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 4 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

وبضرب كل من الصف الثالث والرابع في ¼ ثم جمع الصف الثالث إلى الرابع نحصل على

$$B_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5 & 0\\ 0 & -3 & -7 & 11 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

وأخيراً بإجراء العملية R_2 -3 R_3 نحصل على:

$$B_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5 & 0\\ 0 & -3 & -7 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

وهذه هي المصفوفة السلمية المطلوبة، والمعادلة المكافئة لها هي

$$x_1 + x_3 - 3x_4 = 0$$
$$x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$4x_3 + 8x_4 = 0$$

وبافتراض أن x_4 بارامتر فإن:

$$x_3 = 2k\ ,\ \ x_2 = -k\ ,\ \ x_1 = k\ ,\ \ x_4 = k$$

إن الحل الذي حصلنا عليه يعتمد على البارامتر k وإلى جانبه يوجد الحل البديهي.

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

مثال 10 .

أوجد جميع الحلول لنظام المعادلات في المثال السابق باستخدام طريقة كرامر.

الحل : لنظام المعادلات:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

حل بديهي هو:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

ويشترط لوجود حل غير الحل البديهي أن تكون:

$$\det A = 0$$

حيث A مصفوفة المعاملات:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

بالنظر إلى المصفوفة A نلاحظ أن الصف الرابع يساوي الصف الأول مضروباً بالعدد 1 - وهذا يعني حسب خواص المحددات أن $\det A = 0$. لنأخذ المحددة

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

التي حصلنا عليها من استبعاد الصف الرابع والعمود الرابع ونضيف الصف الثاني إلى الأول فنجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -16$$

بما أن معاملات x_4 غير موجودة في Δ نفترض x_4 بارامترا فتكون $x_4 = k$ ويكون نظام المعادلات هو:

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 - x_3 = k \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5k \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -k \end{gathered}$$

وتكون:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k & -2 & -1 \\ 5k & 2 & 3 \\ -k & 1 & -1 \end{vmatrix} = -16k$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & 5k & 3 \\ 2 & -k & -1 \end{vmatrix} = 16k$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 1 & 2 & 5k \\ 2 & 1 & -k \end{vmatrix} = -32k$$

ومنه فإن قيم المجاهيل هي

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16k}{-16} = k$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16k}{-16} = -k$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-32k}{-16} = 2k$$

6-4 معادلة القيم الذاتية

معادلة القيم الذاتية والدوال الذاتية على قدر كبير من الأهمية خاصة عند دراسة المؤثرات كما هو الحال في ميكانيكا الكم. فمثلاً يمكن اعتبار معادلة شروونجر في ميكانيكا الكم على أنها معادلة قيم ذاتية ويمكن حلها بإيجاد القيم الذاتية والدوال الذاتية. وسوف نقتصر هنا على دراسة مسألة القيم الذاتية في حالة المصفوفات ثم نناقش بعد ذلك كيف يمكن تحويل مصفوفة مربعة إلى مصفوفة أخرى ثم نستعرض بإيجاز التحويلات الخطية.

لتكن لدينا المعادلة المصفوفية التالية:

$$A\,X = \lambda\,X \qquad (4-14)$$

حيث A مصفوفة مربعة من الرتبة n ، X مصفوفة من n صف وعمود واحد ، λ بارامتر. هذه المعادلة يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$(A - \lambda I)\,X = 0 \qquad (4\text{-}15)$$

حيث I مصفوفة الوحدة من الرتبة n. المعادلة الأخيرة عبارة عن معادلة خطية متجانسة. بالإضافة إلى الحل البديهيX=0 ، فإنه يوجد حل آخر غير بديهي إذا كانت

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \qquad (4\text{-}16)$$

تسمى المعادلة (4-16) المعادلة المميزة للمصفوفة A ويعطي حلها n جذرا هي $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$.

وتسمى المعادلة (4-14) المعادلة الذاتية للعامل (المصفوفة) A بحيث عندما يؤثر هذا العامل على دالة X يحولها إلى نفس الدالة مضروبة في ثابت أوثوابت تساوي جذور المعادلة المميزة

وتسمى هذه الجذور القيم الذاتية أو القيم المناسبة للمصفوفة A.

المعادلة (16 – 4) يمكن إعادة كتابتها بالشكل :

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \qquad (4\text{-}17)$$

وتسمى $f(\lambda)$ كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A.

أي إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن:

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \tag{4-18}$$

وكثيرة الحدود المميزة هي:

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=\lambda_n+\alpha_{n-1}\lambda_{n-1}+\ldots..+\alpha_0 \tag{4-19}$$

حيث αi ثوابت . وكثيرة الحدود $f(\lambda)$ من الدرجة n حيث n رتبة المصفوفة A.

مثال 1 . إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ فأوجد كثيرة الحدود المميزة .

الحل :

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=(\lambda-2)\,(\lambda^2-4\lambda+2)=0$$

وهذه كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A وهي من الدرجة الثالثة لأن A من المرتبة الثالثة. ولإيجاد القيم الذاتية λ نحل هذه المعادلة فنحصل على

$$(\lambda-2)\,(\lambda^2-4\lambda+2)=0$$

أي أن

$$\lambda_1=2\,,\quad \lambda_2=2-\sqrt{2}\,,\quad \lambda_3=2+\sqrt{2}$$

في المعادلة (4-14) لكل قيمة من قيم λ يوجد حل X للمعادلة. بحيث يقابل كل قيمة λ_1 حل X_1 ، ويقابل λ_2 حل X_2 وهكذا. تسمى الحلول $X_1, X_2, \ldots$ "المتجهات الذاتية" أو "متجهات القيم المناسبة" للمصفوفة A .

4 ـ 7 نظرية كايلي ـ هاميلتون

تنص هذه النظرية على أنه إذا كانت $f(\lambda)$ كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A فإن A جــذر للمعادلــة $f(\lambda)$ بحيث $f(A)=0$. ولبرهان هذه النظرية يمكن الرجوع إلى أي كتاب في الجبر ونكتفي هنا بمثال يوضح الفكرة الأساسية.

مثال 2 . أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

ثم تحقق من نظرية كايلي ــ هاميلتون؟

الحل : نكتب المعادلة المصفوفية للمصفوفة A كما في (4-15) بالشكل:

$$A\,X=\lambda\,X$$

حيث λ ، X القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المطلوب حسابها. والمعادلة المميزة هي:

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$f(\lambda)=(5-\lambda)\,(2-\lambda)-4=\lambda^2-7\lambda+6=0$$
$$\lambda=1,6$$

آ ــ وقيم λ الذاتية هي $1, 6$.

ب ــ لتحقيق نظرية كايلي هاميلتون ، نعوض بالمصفوفة A في كثيرة الحدود $f(\lambda)$ فنجد

$$f(A)=A^2-7A+6I$$

حيث I مصفوفة الوحدة من الرتبة الثانية.

$$f(A)=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^2-7\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}+6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

وهذا يحقق النظرية لأن المصفوفة A جذر لكثيرة الحدود $f(A)$.

ج ــ لحساب المتجهات الذاتية نلاحظ كما سبق أنه لكل قيمة من القيم الذاتية يوجد حل هو المتجه الذاتي المناظر لتلك القيمة الذاتية وفي حالتنا هناك قيمتان ذاتيتان ولذلك فهناك متجهان ذاتيان يحسبان كالتالي:

نفرض أن القيمة الذاتية $\lambda = 1$ يناظرها المتجه الذاتي $X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ حيث ترمز x_1 ,y_1 إلى الحلول المنـــاظرة لقيمة $\lambda = 1$. ولإيجاد x_1 ,y_1 نعوض عن المتجه الذاتي X_1 في المعادلة

$A\,X=\lambda\,X$ حيث $\lambda = 1$, $X=X_1$ إذن:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

وبضرب المصفوفة ومساواة الطرفين نجد أن

$$5x_1-2y_1=x_1$$
$$-2x_1+2y_1=y_1$$

وأي من هاتين المعادلتين تؤول إلى المعادلة

$$y_1=2x_1$$

فإذا افترضنا أن $x_1=\alpha$ حيث α بارامتر فإن $y=2\alpha$ وبالتالي فإن المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتيـــة $\lambda = 1$ هو:

$$X_1=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

ولإيجاد المتجه الذاتي المقابل للقيمة 6 = λ نفرض أن $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ وبالتعويض في المعادلـــة $A\,X = \lambda\,X$ ،

إذن:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

أو:

$$5x_2 - 2y_2 = 6x_2$$
$$-2x_2 + 2y_2 = 6y_2$$

أو:

$$y_2 = -\frac{1}{2}x_2$$

فإذا افترضنا $x_2 = \beta$ حيث β بارامتر آخر فإن $y = -\frac{1}{2}\beta$ والمتجه الذاتي هو:

$$X_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}$$

إذن القيمة الذاتية 1 = λ يقابلها المتجه الذاتي $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$.

و6 = λ يقابلها المتجه الذاتي $X_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$.

لاحظ أن القيم الذاتية λ والمتجهات الذاتية المناظرة لها تحقق المعادلة المميزة وذلك لأن:

$$A\,X_1 = X_1 \qquad \lambda = 1$$
$$A\,X2 = 6X_2 \qquad \lambda = 6$$

أما قيم α ,β فإنها تتحدد من معلومات أخرى تعطى في المسألة فمثلاً إذا كان المتجه الذاتي X_1 يحقق العلاقـــة $X_1^{T} \cdot X_1 = 1$ فإن $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

تمرين : إذا كانت المتجهات الذاتية X_2, X_1 تحقق العلاقات:

$X_1^{T} X_1 = 1$ ، $X_2^{T} X_2 = 1$ فاحسب β, α ؟

8-4 تحويل مصفوفة مربعة إلى مصفوفة قطرية

في العديد من التطبيقات التي تدخل فيها المصفوفات يكون من المناسب أحياناً تحويل مصفوفة إلـــى مصـــفوفة قطرية وهذا قد يسهل دراسة المسألة قيد البحث. وسنرى فيما يلي كيف يمكن تحويل مصفوفة إلـــى مصـــفوفة قطرية. لتكن M مصفوفة مربعة غير قطرية:

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

و D مصفوفة قطرية عناصرها هي القيم الذاتية للمصفوفة M :

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}20)$$

فإذا وجدت مصفوفة مربعة أخرى C بحيث:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}21)$$

بحيث تكون C^{-1} معرفة و:

$$C^{-1} M\ C = D \qquad (4\text{-}22)$$

تسمى العلاقة (22-4) التي تحول M إلى مصفوفة قطرية D تسمى بالتحويل التشابهي المتماثل (Similarity transformation). والمشكلة الأساسية في تحويل المصفوفة هي حساب المصفوفة C . بضرب طرفي المعادلة (22-4) في C نحصل على

$$M\,C = C\,D \qquad (4\text{-}23)$$

وحسب قواعد ضرب المصفوفات فإنه يمكن كتابة هذه المعادلة بدلالة عناصرها:

$$\sum_{j=1} m_{ij} C_{jk} = C_{ik}\lambda_k \qquad (4\text{-}24)$$

حيث يسري الجمع هنا على j فقط . وهذه المعادلة يمكن حلها لإيجاد عناصر المصفوفة C. لاحظ أن هذه المعادلة تعطي عناصر العمود k في المصفوفة C.

لتوضيح ذلك نأخذ على سبيل المثال

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

بالتعويض في المعادلة (23-4) في C, M, D إذن:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

بضرب المصفوفات في هذه المعادلة ومساواة الطرفين نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} m_{11}c_{11} + m_{12}c_{21} &= c_{11}\lambda_1 \\ m_{21}c_{11} + m_{22}c_{21} &= c_{21}\lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}25)a$$

و

$$\left.\begin{aligned} m_{11}c_{12}+m_{12}c_{22}&=c_{12}\lambda_2 \\ m_{21}c_{12}+m_{22}c_{22}&=c_{22}\lambda_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}25)b$$

المجموعة (a) عبارة عن نظام معادلات خطية متجانسة في المجاهيل c11، c21 ويمكن حلها بإحدى الطرق المذكورة سابقاً في الفصل السابق ، بينما تعطي المجموعة (b) العناصر c12، c22. يلاحظ أن المجموعة الأولى تمثل عناصر العمود الأول في المصفوفة C بينما تحدد المجموعة (b) عناصر العمود الثاني في C. وفيما يلي بعض الأمثلة والتطبيقات.

مثال 3 . حول المصفوفة $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ إلى مصفوفة قطرية .

الحل : من المصفوفة A نحسب المصفوفة القطرية كالتالي:

أ ـــ نحسب القيم الذاتية للمصفوفة A:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 4\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ \lambda=-1,3$$

ب ـــ نكتب المعادلة القطرية بالشكل:

$D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ أو $D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ وكلاهما صحيح.

ج ـــ نفرض أن $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ من نفس رتبة المصفوفة A.

د ـــ نختار إحدى المصفوفتين القطريتين السابقتين ولتكن $D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ ثم نعوض عن D, C في المعادلة (4-23) . وبضرب المصفوفات نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} -c_{11}+4c_{21}&=-c_{11} \\ 3c_{21}&=-c_{21} \end{aligned}\right\}$$

و:

$$\left.\begin{aligned} -c_{12}+4c_{21}&=3c_{11} \\ 3c_{22}&=3c_{22} \end{aligned}\right\}$$

حل المعادلة (a) هو: $c_{11}=k, c_{21}=0$ حيث k بارامتر ما.

وتعطي المعادلة (b) $c_{12}=c_{22}$. فإذا اخترنا $c_{12}=l$ حيث l بارامتر آخر، فإن $c_{22}=l$ والمصفوفة C هي:

$C=\begin{pmatrix}k & l\\ 0 & l\end{pmatrix}$ ومنه فإن $C^{-1}=\begin{pmatrix}1/k & -1/k\\ 0 & 1/l\end{pmatrix}$

تمرين : تحقق أن المصفوفة C التي حصلنا عليها تحول المصفوفة A إلى أخرى قطرية ، أي تحقق:

$$C^{-1}A\ C=D$$

4-9 التحويلات الخطية

عندما نتحدث عن نقطة في الفراغ فإننا نعينها عن طريق إحداثياتها في ذلك الفراغ. والنقطة (x, y, z) تعني أن الإحداثي السيني هو x والصادي y والعيني (اتجاه z) هو z. وإذا كان الفراغ الذي ندرسه ذا n بعد فإننا نعين النقطة بإحداثياتها في هذا الفراغ على طول المحاور $x_1, x_2, \ldots x_n$ وتكون النقطة هي $(x_n, x_n, \ldots. x_n)$. وإذا كان لدينا المتجه $\bar{r}$ في الفراغ فإننا نحدده بواسطة مركباته على طول متجهات الوحدة في اتجاه محاور ذلك الفراغ. ففي ثلاثة أبعاد $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. حيث $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ متجهات الوحدة في اتجاه المحاور x, y, z. ومركبات المتجه في n بعد على طول تلك المحاور هي $x_1, x_2, \ldots x_n$.

من هذا نرى أنه يمكن الحديث عن نقطة في الفراغ كما لو أنها متجه أو عن المتجهة $\bar{r}$ كما لو كان نقطة في الفراغ.

يعرف التحويل الخطي بأنه "علاقة" أو "تحويل" بين متغير جديد وآخر قديم بحيث يكون المتغير الجديد دالة في المتغير القديم. فإذا كان لدينا المتغيرات x, y في الفراغ (x, y) فإن العلاقة:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad (4-26)$$

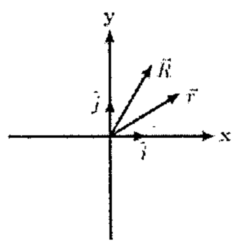
عبارة عن تحويل من (x, y) إلى (x', y') أو العكس، حيث d, c, b, a ثوابت، (x', y') متغيرات جديدة ودوال في (x, y) القديمة.

ويمكن تفسير المعادلة (4-26) بطريقتين مختلفتين:

الطريقة الأولى : ليكن لدينا المتجهان:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ \bar{R} &= X\hat{i} + Y\hat{j} \end{aligned} \qquad (4-26)a$$

من نفس محاور الإحداثيات أي في المستوي (x, y). لاحظ هنا أن محاور الإحداثيات ثابتة بينما اختلف المتجهان $\bar{R}, \bar{r}$.



تعطي المعادلة (4-26) الصيغة المطلوبة لحساب $\bar{R}$ بدلالة المتجه $\bar{r}$ في نفس محاور الإحداثيات. أي إذا أعطينا المتجه $\bar{r}$ فإنه يمكن باستخدام هذه المعادلة حساب $\bar{R}$. يمكن إعادة كتابة المعادلة (4-26) بالشكل:

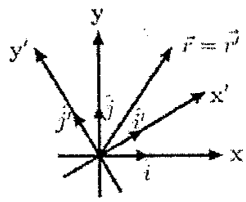
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (4-26)b$$

حيث تمثل مصفوفة العمود في الطرف الأيسر المتجه $\vec{R}$ بينما المصفوفة العمودية في الطرف الأيمن المتجه $\bar{r}$. والمصفوفة M المربعة عبارة عن تحويل من $\bar{r}$ إلى $\vec{R}$ وتحوي هذه المصفوفة كل المعلومات الضرورية لإجراء هذا التحويل. إذن يمكن أن نقول أن ضرب مصفوفة التحويل المربعة M بالمتجه $\bar{r}$ يحول المتجه $\bar{r}$ إلى متجه آخر هو $\vec{R}$ من نفس محاور الإحداثيات.

<u>الطريقة الثانية:</u> في هذه الطريقة نفترض أن هناك نظامي إحداثيات وهما (x, y) و(x', y') ومتجه واحد فقط هو $\bar{r} = \bar{r}'$ وإحداثياته في النظامين هي:

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = X\hat{i}' + Y\hat{j}' \qquad (4-27)$$

حيث $\hat{j}', \hat{i}'$ متجها الوحدة في الإحداثيات (X, Y).



وتفسير التحويل (4-27) في هذه الحالة هو أن مصفوفة التحويل M تمكننا من حساب مركبات المتجه $\bar{r} = \bar{r}'$ بالنسبة للمحاور X, Y إذا عرفنا مركبات نفس المتجه في المحاور x, y .

4-10 دوران في مستوى

وكمثال على التحويلات الخطية سندرس الآن الدوران في المستوى . وبالتحديد سندرس دوران المحاور X, Y بالنسبة للمحاور x, y مع بقاء المتجه $\bar{r} = \bar{r}'$ ثابتاً ونوجد العلاقة بين X, Y وبين x, y . من الشكل (5) السابق يمكن كتابة متجهي الوحدة $\hat{j}', \hat{i}'$ من المحاور X , Y الدائرة بدلالة مركباتهما والإحداثيات x , y الثابتة ، أي بدلالة متجهي الوحدة $\hat{j}, \hat{i}$:

$$\hat{i}' = \hat{i}c_x + \hat{j}c_y$$
$$\hat{j}' = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y$$

حيث b, c مركبات المتجهين $\hat{j}', \hat{i}'$ باتجاه $\hat{j}, \hat{i}$ على الترتيب. من الشكل

$$\cos\theta = \frac{c_x}{|\hat{i}'|} = c_x \;\; ; \; |\hat{i}'| = 1$$

$$\sin\theta = \frac{c_y}{|\hat{i}'|} = c_y \qquad (4-28)$$

وكذلك $b_x = -\sin\theta$ ، $b_y = \cos\theta$

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = x\,\hat{i}' + y\,\hat{j} = X(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) + Y(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

وبمساواة معاملات $\hat{j}, \hat{i}$ في الطرفين:

$$(4-29) \qquad \begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \end{aligned}$$

وهذه المعادلات يمكن كتابتها على شكل مصفوفة

$$(4\text{-}30) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ومنها يمكن الحصول على Y, X كدوال في x, y وذلك بعد حساب معكوس المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

أو:

$$(4\text{-}31) \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(4\text{-}32) \qquad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة $A(\theta)$ بمصفوفة الدوران وتصف كيف تتغير المحاور x, y عندما تدور حول المحور الثالث (z) بزاوية θ. وهذه المصفوفة على درجة كبيرة من الأهمية خاصة عند دراسةالمجموعات ونظريات التحويل.

المصفوفة $A(\theta)$ متعامدة لأن:

$$A^T(\theta) = A^{-1}(\theta)$$

ولذلك يقال التحويل (31 – 4) تحويل متعامد (orthogonal transformation) وأهم خصائص هذا التحويل المتعامد أن:

$$|\bar{r}| = |\bar{r}'|$$

أو

$$(4\text{-}33) \qquad x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$$

مسائل

1 ــ أوجد قيم المجاهيل x_1, x_2, x_3 التي تحقق نظم المعادلات التالية باستخدام طريقة جاوس .

آ ــ
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ب ــ
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 12x_2 + 6x_3 &= -1 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ج ــ
$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 2x - 3y - 4z &= -22 \\ 3x + 2y - z &= -12 \end{aligned}$$

د ــ
$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 &= 28 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 8 \\ -3x_1 - 9x_2 &= -24 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 24 \end{aligned}$$

هـ ــ
$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 20\\ 5x_1 + 2x_3 + x_4 &= 16\\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 22\end{aligned}$$

و ــ
$$\begin{aligned}2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 &= 26\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 18\\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 9\\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2\end{aligned}$$

ز ــ
$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 27\\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 &= 21\\ x_3 + x_4 &= 6\\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 &= 51\end{aligned}$$

2 ــ أوجد الحل لنظم المعادلات في السؤال 1 باستخدام طريقة كرامر؟

3 ــ أوجد الحل لنظم المعادلات في السؤال 1 باستخدام طريقة معكوس مصفوفة؟

4 ــ أوجد جميع حلول نظم المعادلات المتجانس في السؤال 1 بعد ضع جميع المعاملات على يمين المساواة تساوي الصفر .

5 ــ أوجد جميع حلول نظم المعادلات المتجانسة التالية مستخدماً طريقة جاوس أولاً ثم طريقة كرامر وتأكد من الحصول على نفس النتائج .

آ ــ
$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0\\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0\\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0\end{aligned}$$

ب ــ
$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0\\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

ج ــ
$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0\\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= 0\\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

د ــ
$$\begin{aligned}-x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0\\ 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 &= 0\\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

6- في المصفوفات التالية: أوجد القيم الذاتية، المتجهات الذاتية، المعادلة المميزة لكل مصفوفة ثم حقق نظرية كايلي ــ هاميلتون في كل حالة:

أ ــ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ب ــ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ج ــ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

د ـــ $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ هـــ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و ـــ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

7- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ثم حول المصفوفات التالية إلى قطرية

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

8- أثبت أن مصفوفة الدوران في المعادلة (22 – 4) متعامدة.

9- في المعادلة (20 – 5) أثبت بحساب المعكوس أن X, Y دوال في x, y كما في المعادلـــة (21 – 5) ثـــم أثبت أن $A(\theta) . A(\phi) = A(\theta + \phi)$

10- إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$: فاحسب مصفوفة الدوران $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

احسب محددة هذه المصفوفة.

احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية.

أوجد المصفوفة C التي تحول $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ إلى مصفوفة قطرية.

11- تعطى مصفوفة الدوران في الفراغ بالشكل

$$A(\theta,\phi) = A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\cos\phi\sin\phi & \sin\phi\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\cos\phi & -\sin\phi\cos\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

أ ـــ أوجد المصفوفة A^{-1}.

ب ـــ احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\phi = \frac{\pi}{2}$.

ج ـــ حول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية عندما $\phi = \theta = \frac{\pi}{2}$.

12- إذا كانت:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أثبت:

أ ـــ عندما تكون n زوجية $T^n = T^2$

وعندما تكون فردية $T^n = T$

ب ـــ إذا كانت $\phi = 0$ في المصفوفة A في السؤال (11) أثبت أن

. $e^{-i\theta t} = A(\theta , 0)$

13- حركة الذرات في الجسم الصلب

يمكن تمثيل حركة الذرات في الجسم الصلب بنموذج تمثل فيه الذرات بكرات صغيرة يربطها زنبرك ثابته Kويمثل قوة الربط بين الذرات . فمثلاً جزيء CO_2 يمكن تمثيله كما في الشكل المرافق:

بحيث تمثل M كتلة الأوكسجين ، mكتلة الكربون ، K ثابت شد الزنبرك والذي يمثل قوة الربط. وعندما تهتز الذرات فإنه يمكن تمثيل حركة الذرات الثلاث بالإحداثيات x_3, x_2, x_1 .

أ ـــ من قانون نيوتن الثاني تأكد أن معادلات الحركة للكتل الثلاث هي:

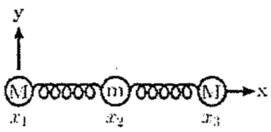
$$\ddot{x}_1 = -\frac{K}{m}(x_1 - x_2)$$
$$\ddot{x}_2 = -\frac{K}{m}(x_2 - x_1) - \frac{K}{m}(x_2 - x_3)$$
$$\ddot{x}_3 = -\frac{K}{m}(x_3 - x_2)$$

ب ـــ ضع $x_1 = x_{01}e^{i\omega t}$ ، $x_2 = x_{02}e^{i\omega t}$ ، $x_3 = x_{03}e^{i\omega t}$ حيث ω تردد الاهتزاز للنظام ، x_{01} , x_{02} , x_{03} سعات الاهتزازة للكتل الثلاثة ، ثم عوض في المعادلات (1) واكتب المعادلة الناتجة بالشكل $Ax = \lambda x$. من هذه المعادلة عين المصفوفة A ، x ، λ [والمعادلة $Ax = \lambda x$ هي معادلة القيم الذاتية].

ج ـــ أوجد المعادلة المميزة للمصفوفة A ثم أوجد القيم الذاتية أي قيم $\lambda = \omega^2$ ثم أوجد المتجهات الذاتية المناظرة لقيم ω^2.

د ـــ ارسم شكلل تقريبيا للتردد ω كدالة في K . هل تستطيع أن تصف شكل الحركة في هذه الحالات . [تسمى هذه العلاقة بعلاقة التشتت]

هـــ ـــ إذا كانت : (وحدة كتلة) $M = 16$ ، (وحدة كتلة) $M = 12$ ، احسب النسبة بين ترددات الأنماط الطبيعية (التي لا تساوي الصفر) ضع $K = 1$.



الأعداد المركبة

روجعت ونقحت في 1424/4/4 هـ

ندرس في هذا الفصل بداية ظهور الأعداد المركبة والعمليات الجبرية المعرفة عليها ثم نكتب الأعداد المركبة في الصورة الكارتيزية والقطبية ونناقش جبر الأعداد المركبة. بعد ذلك ندرس أسس وجذور ولوغاريتمات الأعداد المركبة ثم نناقش بعد ذلك تطبيق الأعداد المركبة في بعض المسائل الفيزيائية ونتعرض للحركة التوافقية البسيطة والقسرية.

2 ـ 1 تمهيد

تظهر عند حل بعض المعادلات الرياضية ضرورة توسيع مجال الأعداد التي يتم التعامل معها، فعند حل المعادلة

$$x + a = b$$

نجد أن هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية إذا كانت a أكبر من b ، وهذا يؤدي إلى تعريف الأعداد الصحيحة. وعند حل المعادلة

$$a\,x = b$$

نرى أن حل هذه المعادلة عندما لا تقبل b القسمة على a غير موجود ضمن الأعداد الصحيحة . ولكي يكون لهذه المعادلة حل فإنه يتم تعريف الأعداد القياسية.

وعند البحث عن حل المعادلة $x^2 = 2$ نجد أن الحل غير موجود ضمن مجموعة الأعداد القياسية مما يؤدي إلى تعريف مجموعة الأعداد غير القياسية. وكمجموعة شاملة لها ولمجموعات الأعداد الأخرى المذكورة أعلاه يتم تعريف مجموعة الأعداد الحقيقية R.

أما المعادلة $x^2 = -a$ $(a > 0)$ فليس لها حل ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية لأن مربع أي عدد حقيقي كمية موجبة ، ولإيجاد حل لها يتم تعريف مجموعة الأعداد التخيلية حيث يعرف العدد i بحيث تكون

$$\sqrt{-1} = \pm i \quad , \quad i^2 = -1 \qquad (2-1)$$

وتعرف مجموعة الأعداد المركبة C لتكون شاملة لكل الأعداد المذكورة أعلاه بحيث تكون عناصرها

$$a \in R \ , b \in R , \ z \in C \quad , \ z = a + i\, b \qquad (2-2)$$

حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية و C مجموعة الأعداد المركبة.

ويسمى a الجزء الحقيقي من z $(a = \text{Re}\, z)$ ، و b الجزء التخيلي من z $(b = \text{Im}\, z)$.

ويمثل العدد z في المستوي المركب كنقطة لها إحداثيتين هما a على المحور x $(\text{Re}\, z)$ الذي يمثل الجزء الحقيقي والإحداثية b على المحور y $(\text{Im}\, z)$ الذي يمثل الجزء التخيلي.

ويتساوى عددان مركبان إذا تساوى جزآهما الحقيقيين وجزآهما التخيليين ، أي أنه إذا كانت

$$z_2 = a_2 + i\, b_2 \, , z_1 = a_1 + i\, b_1$$

فإن

$$\Leftrightarrow z_1 = z_2 \qquad a_1 = a_2 \ \text{و} \ b_1 = b_2 \ .$$

وتسمى العلاقة (2-2) الشكل الكارتيزي للعدد المركب z وذلك للتمييز بينه وبين طريقة التمثيل الأخرى للأعداد المركبة والتي تسمى الشكل القطبي.

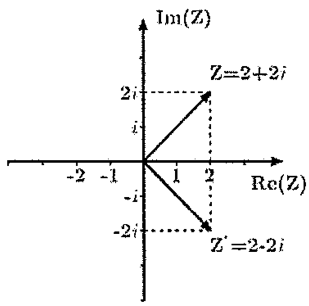
ويعرف العدد المرافق للعدد z والذي يرمز له بالرمز z^* أو $\bar{z}$ على أنه:

$$z^* = a - ib \qquad (2-3)$$

ومن خواص الأعداد المرافقة

$$(z^*)^* = z \qquad (2-4)$$

أي أن كلا من العددين z و z^* مرافق للآخر .



شكل 2 – 1 . التمثيل الكارتيزي للعدد المركب $z = 2+2i$ ومرافقه .

2 – 2 جبر الأعداد المركبة

2 – 2 – 1 الجمع

جمع العددين المركبين $z_2 = a_2 + ib_2 \, , z_1 = a_1 + ib_1$ يعطي عدداً مركباً $z = a + ib$ يتم الحصول عليه بجمع الأجزاء الحقيقية مع بعضها والأجزاء التخيلية مع بعضها للعددين z_1 و z_2 ، أي

$$z = a + ib = z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$
$$z = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$
$$a = a_1 + a_2 \qquad (2-5)$$
$$b = b_1 + b_2 \qquad (2-6)$$

خواص الجمع

أ ـ $z_2 + z_1 = z_1 + z_2$

ب ـ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

ج ـ $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

2 ـ 2 ـ 2 الطرح

عند طرح عدد مركب $z_2 = a_2 + ib_2$ من عدد مركب آخر $z_1 = a_1 + ib_1$ يتم ضرب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من z_2 بالعدد -1 وجمع الناتج إلى العدد z_1

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)$$
$$z = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2$$
$$z = (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2) = a + ib$$

ومنه: $a = a_1 - a_2 \quad , b = b_1 - b_2$

2 ـ 2 ـ 3 الضرب

حاصل ضرب العددين المركبين $z_2 = a_2 + ib_2 , z_1 = a_1 + ib_1$ هو عدد مركب آخر $z = a + ib$ نحصل عليه كالتالي:

$$z = a + ib = z_1\, z_2 = (a_1 + ib_1)\,(a_2 + ib_2)$$

وبضرب الحدود داخل الأقواس ببعضها البعض نحصل على الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من العدد المركب z

$$z = a + ib = a_1a_2 + i\,a_1b_2 + i\,b_1a_2 + i^2b_1b_2$$

وبإعادة ترتيب الحدود والأخذ بعين الاعتبار أن $i^2 = -1$ نجد

$$z = a + ib = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

ومنه

$$a = a_1a_2 - b_1b_2 = \mathrm{Re}\, z \qquad (2-7)$$
$$b = a_1b_2 + b_1a_2 = \mathrm{Im}\, z \qquad (2-8)$$

خواص الضرب

أ ـ $z_2 z_1 = z_1 z_2$

ب ـ $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ج ـ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

د ـ $z z^* = a^2 + b^2$. أي أن ضرب العدد z بالمرافق z^* يعطي عدداً حقيقياً موجباً و

$$z\,z^* = |z|^2 = a^2 + b^2 \qquad (2-9)$$

وتسمى الكمية

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2-10)$$

القيمة المطلقة للعدد z وهي كمية موجبة وتساوي المسافة بين نقطة الأصل والنقطة التي تمثل العدد z في المستوى المركب (انظر شكل 2 – 1) .

2 – 2 – 4 القسمة

لإيجاد حاصل قسمة العدد $z_1 = a_1 + ib_1$ على العدد $z_2 = a_2 + ib_2$ أي $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$ نتبع الخطوات التالية:

أ – نضرب البسط والمقام بمرافق العدد z_2 (أي z_2^*) فنحصل على $z = \dfrac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}$. وحسب العلاقة (9 – 1) فإن:

$$z = \frac{z_1 z_2^*}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} \qquad (2-11)$$

ب – نقسم الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من حاصل الضرب $z_1 z_2^*$ على العدد الحقيقي $a^2 + b^2$ لنحصل على الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من العدد z .

خواص القسمة

أ – $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

ب – $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

ج – $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3} = \dfrac{z_1}{z_3} + \dfrac{z_2}{z_3}$.

وفيما يلي بعض الأمثلة على جبر الأعداد المركبة.

مثال 1 .

أوجد حاصل جمع العددين المركبين

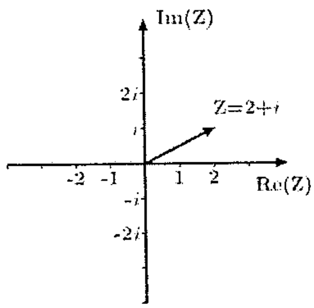
$$z_1 = 3 + 3i$$
$$z_2 = -1 - 2i$$

وارسم النقاط الثلاث التي تمثل العددين وحاصل الجمع في المستوى المركب.

الحل.

$$z = z_1 + z_2 = 3 + 3i - 1 - 2i$$
$$z = (3 - 1) + i\,(3 - 2)$$
$$z = 2 + i$$

ويوضح شكل 2-2 التمثيل الكارتيزي لهذا العدد .



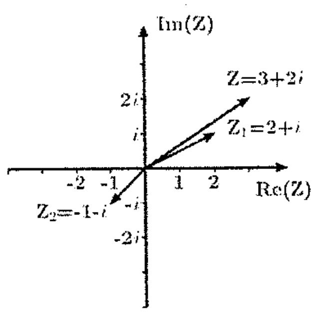
شكل 2-2 .

مثال 2 .

إذا كانت $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = -1 - i$ أوجد $z_1 - z_2$ وارسم النقاط التي تمثل z_1 و z_2 وناتج طرحهما.

الحل :

$$z = z_1 - z_2 = 2 + i - (-1 - i)$$
$$z = 2 + i + 1 + i = 3 + 2i$$



شكل 2 – 3.

ويبين شكل 2 – 3 النقاط التي تمثل z_1 و z_2 و z .

مثال 3 .

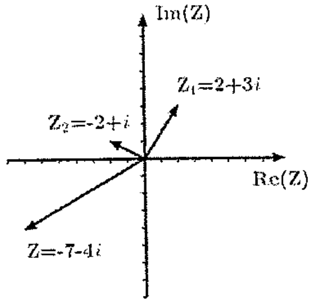
أوجد حاصل ضرب العددين $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = -2 + i$ ثم ارسم النقاط التي تمثل z_1 و z_2 والناتج في المستوى المركب.

الحل :

$$z = z_1\, z_2 = (2 + 3\,i)\,(-2 + i)$$

$$z = -4 + 2i - 6i + 3i^2$$
$$z = -4 - 3 - 4i = -7 - 4i$$

والأعداد z_1 ، z_2 ، z ممثلة في المستوى في شكل 2 – 4.



شكل 2 – 4.

مثال 4 .

أوجد حاصل ضرب العددين.

$$z^* = 4 - 3i \ , \ z = 4 + 3i$$

الحل :

$$z\,z^* = (4 + 3i)\,(4 - 3i)$$
$$z\,z^* = 16 + 12i - 12i - 9i^2$$
$$z\,z^* = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

وهي القيمة التي نحصل عليها حسب العلاقة (9 – 2).

مثال 5 .

أوجد المرافق للعدد $z = z_1 + z_2$ ثم أوجد $z_1^* + z_2^*$ وقارن النتائج إذا كانت: $z_1 = 3 - 2i$ و $z_2 = 2 + 4i$.

الحل : نوجد أولاً $z_1 + z_2$ فنجد أن $z = z_1 + z_2 = 5 + 2i$ ، ومرافقه $z^* = 5 - 2i$ ، ثم نوجد z_1^* و z_2^* و $z_1^* + z_2^*$ فنجد:

$$z_2^* = 2 - 4i \quad \text{و} \quad z_1^* = 3 + 2i$$
$$z_1^* + z_2^* = 3 + 2i + 2 - 4i = 5 - 2i$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها عند إيجاد المرافق بعد عملية الجمع .

مثال 6 .

إذا كانت $z_1 = 2 - i$ و $z_2 = 1 + 2i$ فأوجد $z = z_1\,z_2$ والمرافق ثم أوجد z_1^* و z_2^* وحاصل ضرب $z_1^* z_2^*$ وقارن النتائج .

الحل :

$$z = z_1 z_2 = (2-i)(1+2i)$$
$$= 2 - 2i^2 - i + 4i = 4 + 3i$$

والمرافق فهو $z^* = 4 - 3i$ وبإيجاد z_1^* و z_2^* نجد أن

$$z_1^* = 1 - 2i \, z_2^* = 2 + i$$

وحاصل الضرب هو

$$z_1^* z_2^* = (2+i)(1-2i) = 2 - 2i^2 + i - 4i$$
$$z_1^* z_2^* = 4 - 3i = z^*$$

مثال 7 .

أوجد القيمة المطلقة للعدد $z = 8 + 6i$

الحل : حسب العلاقة (10 – 1) فإن القيمة المطلقة هي

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{zz^*}$$

ولذا نحسب أولاً $z z^*$ فنجد:

$$z z^* = (8+6i)(8-6i) = 64 - 36i^2 + 48i - 48i$$
$$z z^* = 64 + 36 = 8^2 + 6^2 = 100$$

والقيمة المطلقة للعدد z هي:

$$|z| = +\sqrt{100} = 10$$

مثال 8 .

أوجد $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ إذا كانت $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 4 - 3i$

الحل : نضرب البسط والمقام بالمرافق للمقام فنجد

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$$
$$z = \frac{8 + 9i^2 + 12i + 6i}{16+9} = \frac{1}{25}(-1+18i)$$
$$z = -\frac{1}{25} + \frac{18}{25}i$$

مثال 9 .

أكتب العدد $\dfrac{i}{2-3i}$ بالشكل $z = a + ib$

الحل : نضرب البسط والمقام بمرافق المقام فنجد

$$z = \frac{i(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2i+3i^2}{2^2+3^2} = \frac{-3+2i}{13}$$

ومنه

$$z = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

مثال 10.

أوجد $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(4-2i)}{(2i-1)}$ ثم أوجد القيمة المطلقة للعدد z وقارنها بالكمية $\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

الحل. نوجد أولاً z

$$z = \frac{(4-2i)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = \frac{-4+4i^2-8i+2i}{2^2+1^2}$$

$$z = \frac{1}{5}(-8-6i)$$

والقيمة المطلقة للعدد z

$$|z| = \frac{1}{5}\sqrt{(-8)^2+(-6)^2} = 2$$

والقيمة المطلقة للعدد z_1

$$|z_1| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$$

وللعدد z_2

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$

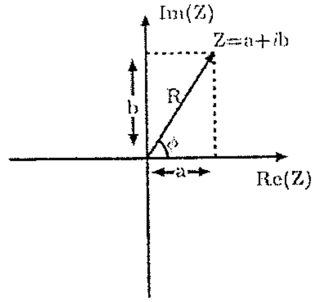
ومنه فإن $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2$

وهي نفس القيمة المطلقة للعدد z .

2 ـ 3 الشكل القطبي وجبر الأعداد المركبة

2 ـ 3 ـ 1 الشكل القطبي للأعداد المركبة

عند تمثيل العدد z في مستوى الأعداد المركبة نلاحظ أن النقطة التي تمثل z تبعد مسافة R (انظر شكل 2-5) عن نقطة الأصل وهذه المسافة تعطى بالعلاقة $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = R$ وتساوي القيمة المطلقة للعدد z.



شكل 2 – 5.

أما المستقيم الواصل من نقطة الأصل إلى النقطة المذكورة فإنه يصنع زاوية ϕ مع المحور الأفقي ($\mathrm{Re}\, z$) الذي تمثل عليه الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة ومن الشكل 2–5 نجد أن العلاقات بين R و ϕ و a و b هي

$$a = R\cos\phi \qquad (2-12)$$

$$b = R\sin\phi \qquad (2-13)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2-14)$$

$$\tan\phi = \frac{b}{a}$$

أو

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (2-15)$$

من هذه العلاقات يمكن كتابة العدد المركب $z = a + ib$ بالشكل

$$z = R\cos\phi + i\,R\sin\phi$$

أو:

$$z = R\,(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (2-16)$$

وتسمى R القيمة المطلقة للعدد المركب و ϕ الطور $\left(0 \le \phi \le 2\pi\right)$.

تسمى العلاقة (16 ــ 2) الشكل القطبي للعدد z . ويمكن كتابة العدد بشكل أبسط باستخدام علاقة أويلر (Euler) التي تربط بين الدوال المثلثية $\sin\phi$ و $\cos\phi$ والدالة الأسية $e^{i\phi}$ وتنص على أن:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \qquad (2-17)$$

$$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi \qquad (2-18)$$

وباستخدام هذه العلاقة يكتب العدد المركب بالشكل

$$z = R\,e^{i\phi} = R\,(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (2-19a)$$

وتسمى ($2-19a$) بصيغة أويلر للعدد المركب z وهي ذات أهمية كبيرة.

وتكون صيغة أويلر (الشكل القطبي) للعدد المرافق:

$$z^* = R\,e^{-i\phi} = R\,(\cos\phi - i\sin\phi) \qquad (2-19b)$$

من العلاقتين ($2-19a$) و ($2-19b$) ينتج أن

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) \qquad (2-20a)$$

$$(2-20b) \qquad \sin\phi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right)$$

مثال 11 .

اكتب العدد $z = 3 + 3i$ بالشكل القطبي ثم أوجد العدد المرافق له

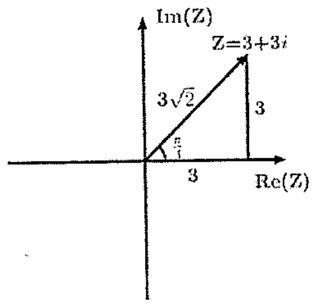
الحل : نوجد أولاً القيمة المطلقة للعدد فنجد

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

ثم نوجد الزاوية ϕ من العلاقات

$$a = R\cos\phi \quad \text{و} \quad b = R\sin\phi$$

فنحصل على



شكل 2 – 6 .

$$\cos\phi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\phi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وحيث أن $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن $\phi = \frac{\pi}{4}$

والشكل القطبي للعدد المركب هو

$$z = 3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

أما العدد المرافق فهو $z^* = 3 - 3i$

وشكله القطبي حسب العلاقة (20 – 2) هو:

$$z^* = 3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

لا بد من ملاحظة أنه يمكن إيجاد الزاوية ϕ من العلاقة $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ حيث نجد $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = \tan^{-1}1$

ومنه $\phi = \frac{\pi}{4}$ ، ولكن بسبب الخواص الدورية للدوال المثلثية وكون دورة $\sin x$ و $\cos x$ تساوي 2π بينما

دورة الدالة $\tan x$ تساوي π فإن تحديد الزاوية ϕ من العلاقة (15-2) فقط قد يؤدي إلى خطأ . فمثلاً بالنسبة للزاوية $5\pi/4$ فإن $tan(5\pi/4)=1$ ، بينما $sin(5\pi/4)=-1/\sqrt{2}$ و $cos(5\pi/4)=-1/\sqrt{2}$.

ولذا يجب أخذ إشارة $\sin\phi$ و $\cos\phi$ بعين الاعتبار عند إيجاد الزاوية ϕ.

من الملاحظ أن الزوايا ϕ و $\phi+m\,2\pi$ حيث $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$ تعطي نفس العدد المركب وذلك بسبب الخواص الدورية للدوال المثلثية حيث أن:

$$\sin(\phi+m\,2\pi)=\sin\phi$$
$$\cos(\phi+m\,2\pi)=\cos\phi$$

وسوف نرى فيما بعد أنه لا يكفي أخذ قيمة ϕ لتكون محدودة بين الصفر و 2π وإنما يجب أخذ القيم الأخرى بعين الاعتبار (عند إيجاد جذر عدد مركب ثنائي).

إن الشكل القطبي للأعداد المركبة يسهل عمليات الضرب والقسمة ولكن الجمع والطرح أبسط باستخدام الشكل الكارتيزي.

2 ـ 3 ـ 2 ضرب الأعداد بالشكل القطبي

لإيجاد حاصل ضرب العددين

$$z_1=r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$$

نكتبهما بصيغة أويلر حيث

$$z_2=r_2e^{i\phi_2} \quad \text{و} \quad z_1=r_1e^{i\phi_1}$$

ونستخدم خواص الدالة الأسية لنجد أن

$$z=z_1z_2=r_1e^{i\phi_1}r_2e^{i\phi_2}=r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

وبكتابة $z=R\,e^{i\phi}$

نجد أن:

$$R=r_1\,r_2 \quad , \quad \phi=\phi_1+\phi_2$$

وهذا يعني أن القيمة المطلقة للعدد الناتج عن ضرب عدد ين مركبين تساوي حاصل ضرب القيمتين المطلقتين والطور يساوي حاصل جمع الطور ين.

مثال 12 .

أوجد حاصل ضرب العدد ين $z_1=-1+i$ و $z_2=-4i$ باستخدام الشكل القطبي لهما.

الحل :

$$cos\,\phi_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin\phi_1=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad |z_1|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

ومنه $\phi_1=3\dfrac{\pi}{4}$ و $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

وبالنسبة للعدد z_2 فإن

$$\cos\phi_2 = \frac{0}{4} = 0 \text{ و } \sin\phi_2 = \frac{-4}{4} = -1 \text{ و } |z_2| = \sqrt{(-4)^2} = 4$$

ومنه فإن $\phi_2 = 3\frac{\pi}{2}$ و $z_2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$

وحاصل الضرب

$$z = z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z = 4 + 4i$$

وهو نفس العدد الذي نحصل عليه من الضرب المباشر:

$$(-1 + i)\,(-4i) = 4i - 4i^2 = 4 + 4i \; .$$

2 ــ 3 ــ 4 قسمة الأعداد المركبة بالشكل القطبي

إذا كانت $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ فإن حاصل القسمة:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

وإذا كانت $z = R\,e^{i\phi}$ فإنه ينتج أن

$$R = \frac{r_1}{r_2} \quad , \quad \phi = \phi_1 - \phi_2$$

أي أن القيمة المطلقة للعدد المركب الناتج من قسمة العدد المركب z_1 على z_2 تساوي حاصل قسمة القيمتين المطلقتين والطور يساوي طور البسط مطروحاً منه طور المقام.

مثال 13 .

أوجد العدد المركب $z = \frac{-1-i}{1-i}$ وذلك باستخدام الشكل القطبي للأعداد المركبة.

الحل : نوجد أولاً الأشكال القطبية للبسط والمقام فنجد

$$\cos\phi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } \sin\phi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } |z_1| = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

ومنه

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ و } \phi_1 = 5\frac{\pi}{4}$$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ و $\cos\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $sin\phi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ و

ومنه $\phi_2 = 7\pi/4$ و $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$

و

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

تمرين .

احسب حاصل القسمة أعلاه باستخدام الشكل الكارتيزي للأعداد المركبة وتأكد من الوصول إلى نفس النتيجة.

2 ــ 4 أسس وجذور الأعداد المركبة

آ ــ رفع عدد مركب إلى أس

لحساب z^n حيث $z = a + ib$ نكتب أولاً z بالشكل القطبي $z = r\,e^{i\phi}$ ونعتمد على خواص حساب الأسس والدالة الأسية فنجد

$$z^n = \left(re^{i\phi}\right)^n = r^n e^{in\phi}$$

وبالطبع من الممكن حساب $(a + ib)^n$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

إذا كانت $r = 1$ فإنه ينتج أن

$$z^n = r^n\ e^{in\phi} = e^{in\phi}$$

أي أن:

$$\left(e^{i\phi}\right)^n = e^{in\phi}$$

أو

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

وتسمى العلاقة الأخيرة نظرية دوموافر ومن الممكن إثباتها باستخدام الاستنتاج الرياضي.

مثال 15 .

أوجد z^4 إذا كانت $z = \sqrt{3} + i$

الحل : نكتب أولاً z بالشكل القطبي فنجد

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \sin\phi = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad |z| = \sqrt{3 + 1^2} = 2$$

ومنه $\phi = \frac{\pi}{6}$ و $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

و

$$z^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{6}} = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$$

وحسب نظرية ذات الحدين فإن:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 + 4\left(\sqrt{3}\right)^3 i + 6\left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 + 4\sqrt{3}\, i^3 + i^4$$
$$= 9 + 4\left(\sqrt{3}\right)^3 i - 18 - 4\sqrt{3}\, i + 1 = -9 + 1 + 8\sqrt{3}\, i$$
$$\left(\sqrt{3}+i\right)^4 = -8 + i8\sqrt{3}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام الصيغة القطبية.

ب ــ جذور الأعداد المركبة

لإيجاد الجذور من الرتبة n (n جذر) لعدد مركب z نكتب العدد بالشكل القطبي $z = R\, e^{i(\phi + m\, 2\pi)}$
آخذين بعين الاعتبار أن الطور له قيم كثيرة تعطي نفس العدد المركب ثم نوجد الجذور اعتماداً على خواص الأسس والدالة الأسية لنجد أن هناك n جذراً مختلفاً يتم الحصول عليها بأخذ القيم التالية للعدد m الذي يحدد الطور:

$$m = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,\ldots\ldots\ldots,\,n-1$$

وعندما تكون $m = n$ فإن الجذر الناتج هو نفس الجذر عند $m = 0$

وعندما تكون $m = n+1$ فإن الجذر الناتج هو نفس الجذر عند $m = 1$

وهكذا .... وهذا يعود إلى الخواص الدورية للدوال المثلثية.

والجذور هي:

1 ــ $m = 0$ $\qquad z_1 = R^{\frac{1}{n}} e^{i(\phi+0)\frac{1}{n}}$

2 ــ $m = 1$ $\qquad z_2 = R^{\frac{1}{n}} e^{i(\phi+2\pi)\frac{1}{n}}$

3 ــ $m = 2$ $\qquad z_3 = R^{\frac{1}{n}} e^{i(\phi+4\pi)\frac{1}{n}}$

$\vdots$

$m = n - 1$ $\qquad z_n = R^{\frac{1}{n}} e^{i(\phi+(n-1)2\pi)\frac{1}{n}}$

والجذر الذي نحصل عليه عندما تكون $m = n$ هو

$$z_m = R^{\frac{1}{n}} e^{i(\phi+n.2\pi)\frac{1}{n}} = R^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\phi}{n}+2\pi\right)}$$

أو $\qquad z_m = R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\phi}{n}} e^{i2\pi} = R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\phi}{n}} = z_1$

وذلك لأن $\qquad e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

أي أن الجذر هو نفس الجذر الذي نحصل عليه $m = 0$.

وبنفس الطريقة نرى أن الجذر الذي نحصل عليه عند $m = n+1$ هو نفس الجذر الذي نحصل عليه عند $m = 1$ وهكذا ....

مثال 16 .

أوجد $z^{\frac{1}{5}}$ إذا كانت $$z=-\frac{32}{\sqrt{2}}-i\frac{32}{\sqrt{2}}$$

الحل : نكتب z باشكل القطبي فنجد

$$|z|=\sqrt{\frac{32^2}{2}+\frac{32^2}{2}}=32$$

و $\sin\phi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\cos\phi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ومنه $\phi=5\frac{\pi}{4}$

و $z=32e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+m2\pi\right)}$

أما الجذور فنحصل عليها من

$$z^{\frac{1}{5}}=32^{\frac{1}{5}}\left(e^{i\left(5\frac{\pi}{4}+m2\pi\right)}\right)^{\frac{1}{5}}$$

وبأخذ القيم $m=0\,,1\,,2\,,3\,,4$

نجد

$m=0$ $$z_1=2e^{i\left(5\frac{\pi}{4}+0\right)\frac{1}{5}}=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$m=1$ $$z_2=2e^{i\left(5\frac{\pi}{4}+2\pi\right)\frac{1}{5}}=2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{5}}=z_1e^{i2\pi/5}$$

$$z_2=2e^{i\frac{13\pi}{20}}=2(-0.454+i0.891)=-0.908+i1.78$$

$m=2$ $$z_3=2e^{i\left(5\frac{\pi}{4}+4\pi\right)\frac{1}{5}}=2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{5}}=z_2e^{i2\pi/5}$$

$$z_3=2e^{i\frac{21\pi}{20}}=2(-0.988-i0.156)=-1.976-i0.313$$

$m=3$ $$z_4=2e^{i\left(5\frac{\pi}{4}+6\pi\right)\frac{1}{5}}=2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{6\pi}{5}}=z_3e^{i2\pi/5}$$

$$z_4=2e^{i\frac{29\pi}{20}}=2(-0.156-i0.988)=-0.313-i1.975$$

$m=4$ $$z_5=2e^{i\left(5\frac{\pi}{4}+8\pi\right)\frac{1}{5}}=2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{8\pi}{5}}=z_4e^{i2\pi/5}$$

$$z_5=2e^{i\frac{37\pi}{20}}=2(0.891-i0.454)=1.782-i0.908$$

وإذا أخذنا $m=5$ نجد أن :

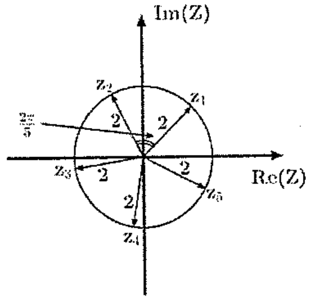
$$z_6=2e^{i\left(5\frac{\pi}{4}+10\pi\right)\frac{1}{5}}=2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i2\pi}=2e^{i\frac{\pi}{4}}=z_1$$

وإذا أخذنا $m = 6$ سنجد أن $z_7 = z_2$

وهكذا ....

أي أن هناك خمسة جذور مختلفة فقط .

ويمثل شكل 2 – 7 جذور العدد z في مستوى الأعداد المركبة ونرى أن كل جذر ينتج عن الذي قبله بتغيير الطور بمقدار $2\pi/5$ ، فمثلاً $z_2 = z_1 e^{i2\pi/5}$ ومنه نرى أن ضرب z_1



شكل 2 – 7.

بالعدد $e^{i2\pi/5}$ يعني تدويره زاوية $2\pi/5$ في الاتجاه الموجب ، وتقع كل الأعداد على دائرة نصف قطرها $|z_1|=2$.

2 – 5 لوغاريتم الأعداد المركبة

لإيجاد لوغاريتم عدد مركب $z = a + ib$ نكتبه بصيغة أويلر آخذين بعين الاعتبار أن للطور أكثر من قيمة ومن ثم نوجد اللوغاريتم فنجد :

$$z = R\, e^{i(\phi + m\, 2\pi)}$$

و

$$\ln z = \ln (R\ \ e^{i(\phi + m\ 2\pi)})$$

وحسب قواعد اللوغاريتم فإن

$$\ln z = \ln R + i(\phi + m\, 2\pi) \qquad (2-21)$$

من هذه العلاقة نرى أن $\ln z$ له أكثر من قيمة وذلك لأنه يعتمد على قيمة m وبالطبع فإن هذا مخالف لمفهوم الدالة التي لابد أن تكون وحيدة القيمة ، ولذا فإن اللوغاريتم يعرف على أنه:

$$\ln z = \ln R + i\phi \qquad (2-22)$$

ويسمى "الفرع الرئيسي" للوغاريتم .

مثال 17 .

أوجد لوغاريتم العدد $z = -5 - 5i$

الحل : الشكل القطبي للعدد هو

$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$

ومنه فإن

$$\ln z = \ln 5\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$$
$$\ln z = 1.956 + i\frac{5\pi}{4}$$

رفع عدد حقيقي أو مركب إلى أس مركب

بعد تعريف اللوغاريتم لعدد مركب فإنه يمكن تعريف العدد الذي ينتج عن رفع عدد مركب أو عدد حقيقي إلى أس مركب.

العدد $z_1^{z_2}$ يمكن تعريفه بالشكل

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 . \ln z_1}$$

مثال 18 .

اكتب العدد 2^i بالشكل الكارتيزي $\quad z = 2^i = e^{i.\ln 2}$

الحل :

$$z = \cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2) = 0.77 + i\,0.639$$

مثال 19 .

أكتب العدد i^{2i} بالشكل الكارتيزي

الحل : $i^{2i} = e^{2i.\ln i}$. وبما أن $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+m.2\pi\right)}$ فإن

$$\ln i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + m2\pi\right) = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + m2\pi\right)$$

ومنه فإن

$$\begin{aligned} i^{2i} &= e^{2i\left(i\frac{\pi}{2}+im2\pi\right)} \\ &= e^{-\pi-m4\pi} \end{aligned}$$

وبما أن m يمكن أن تأخذ القيم .... , $0 , \pm1 , \pm2 , \pm3 , \pm4$

فإن للعدد i^{2i} قيماً كثيرة منها $\quad e^{-\pi} , e^{-5\pi} , e^{3\pi} , e^{-9\pi} , e^{7\pi}$

$m = 0 , 1 , -1 , 2 , -2$

و $e^{-\pi} = 1/23.14$ إحدى القيم المطلوبة.وتسمى الفرع الأساسي للوغاريتم ونحصل عليها عند أخذ m=0 .
أيضاً لاحظ العدد اللانهائي للقيم (وكلها حقيقية) غند عدم أخذ الفرع الأساسي للوغاريتم.

مثال 20 .

أوجد الشكل الكارتيزي للعدد 10^{iz} حيث $z = 3 + 2i$

الحل :

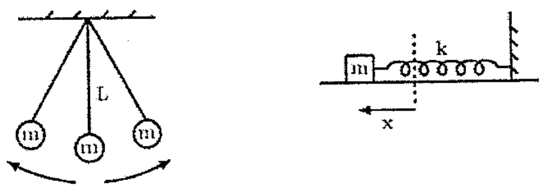
$$10^{iz} = e^{\,iz \ln 10} = e^{i(3.\ln 10 + 2i \ln 10)}$$
$$10^{iz} = e^{-2\ln 10}.\,[\cos(3 \ln 10) + i \sin(3 \ln 10)]$$
$$10^{iz} = 0.01 \times [0.81 + i\,0.585] = 0.008 + i\,0.00585 \; .$$

2 ـ 6 تطبيق على الحركة الاهتزازية

سوف ندرس في هذه الفقرة واحدة من أهم تطبيقات الأعداد المركبة في الفيزياء وهو استخدامها في حل المعادلة التفاضلية التي تصف الحركة التوافقية البسيطة والمخمدة.
توصف الحركة التوافقية البسيطة بالمعادلة:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \qquad (2-23)$$

حيث تمثل X إزاحة الجسم عن وضع التوازن و ω التردد الزاوي. ومن الأمثلة على هذه الحركة اهتزاز جسم موصول بزنبرك وحركة البندول البسيط.



شكل 2 - 8.

وترمز النقطة إلى الاشتقاق بالنسبة إلى الزمن. إن الدوال التي تحقق المعادلة (23 – 2) هي $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ وهي مرتبطة بالدالة الأسية $e^{i\omega t}$ حسب علاقة أويلر.
ولذا فإن الدوال $e^{i\omega t}$ و $e^{-i\omega t}$ تحقق المعادلة (23 – 2).
ولذا سنفرض أن حل المعادلة (23 – 2) هو الدالة المركبة $X = A\,e^{i\lambda t}$ حيث A ثابت . بحساب $\dot{X}$ و $\ddot{X}$ نجد

$$\ddot{X} = -\lambda^2 A e^{i\lambda t}$$

وبالتعويض في المعادلة (23 – 2) نجد أن

$$(-\lambda^2 + \omega^2)\, A e^{i\lambda t} = 0$$

ومنه فإن $\lambda^2 = \omega^2$ أو $\lambda = \pm\omega$

وهذا يعني أن الدوال $e^{i\omega t}$ و $e^{-i\omega t}$ تحقق المعادلة (23 – 2). وبما أن المعادلة خطية فإن التداخل:

$$A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

يحقق المعادلة أيضاً حيث A , A_1 , A_2 ثوابت.

أما بالنسبة للاهتزازة المخمدة فإنها توصف بالمعادلة التفاضلية:

$$\ddot{X} + 2b\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \qquad (2-24)$$

حيث b ثابت يمثل الإخماد . ونفترض أن الحل يأخذ الشكل:

$$X = A\, e^{i\lambda t}$$

وبالتعويض في المعادلة (24 – 2) نجد أن

$$(-\lambda^2 + 2i\lambda b + \omega_o^2) A e^{i\lambda t} = 0$$

ومنه

$$(\lambda^2 - 2i\lambda b - \omega_o^2) = 0$$

و

$$\lambda_{1,2} = \frac{2ib \pm \sqrt{-4b^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

أو

$$\lambda_{1,2} = ib \pm \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

وحسب العلاقة بين b و ω_0 تكون حركة الجسم . فإذا كانت $b > \omega_0$ فإن الكمية تحت الجذر تخيلية وعندئذ فإن الحركة مخمدة والجسم لا يهتز .

وإذا كانت $b < \omega_0$ فإن الكمية تحت الجذر حقيقية وعندئذ فإن الجسم يهتز ولكن السعة تتناقص مع الزمن وفي هذه الحالة تكون:

$$\lambda_{1,2} = ib \pm \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = ib \pm \omega'$$

والإزاحة هي

$$X = e^{-bt}(A_1 e^{i\omega' t} + A_2 e^{-i\omega' t})$$

وهذه تصف حركة توافقية مخمدة والحد e^{-bt} هو حد الإخماد الذي يؤدي إلى اضمحلال الحركة وتوقفها.

مسائل

1 ــ أجري العمليات التالية بحيث يكون الناتج بالشكل $a + ib$

ج ــ $(4+i)(4-i)$	ب ــ $\frac{5-i}{i}$	أ ــ $(2-8i)(1-2i)$
و ــ $(3+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{2})$	هــ ــ $\frac{6+12i}{3i+1}$	د ــ $i(i+1)$
ى ــ $\frac{9+7i}{7-9i}$	ح ــ $\frac{2+i}{6-i}$	ز ــ $\frac{3-i}{3+2i}$

2 ــ حل المعادلات التالية:

ب ــ $x - iy = 2 + 5i$ أ ــ $3y - 3 + (4x + 8)i = 0$

د ــ $3x + (y - x)\,i = 6$ ج ــ $4 - ix = y - 3i$

و ــ $7x + (x - 3y)\,i = 3y + 9i$ هــ ــ $x + 2y + 3i = 3 + (2x - y)i$

3 ــ حول الأعداد المركبة التالية إلى الصيغة القطبية (أو الكارتيزية) ثم ارسمها في المستوى المركب:

د ــ $1 + i\sqrt{3}$ ج ــ $2 - 2i\sqrt{3}$ ب ــ $-\sqrt{3} + i$ أ ــ $2 + 2i\sqrt{2}$

ح ــ $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ز ــ $1 + i$ و ــ $4 - 4i$ هــ ــ $4 + 2i$

ل ــ $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ ك ــ $5e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ى ــ $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ط ــ $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ع ــ $9e^{i\frac{13\pi}{6}}$ س ــ $3e^{i\frac{9\pi}{4}}$ ن ــ $4e^{i\frac{\pi}{2}}$ م ــ $6e^{i\frac{3\pi}{2}}$

4 ــ أكتب نتائج العمليات التالية بالشكل $a + ib$

ب ــ $5e^{2i\frac{\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ أ ــ $2e^{i\frac{\pi}{6}} \times 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

د ــ $2e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ج ــ $3e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{3i\frac{\pi}{4}}$

و ــ $\dfrac{6e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$ هــ ــ $\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{\pi}{6}}}$

5 ــ أكتب ناتج العمليات التالية بالشكل القطبي:

ب ــ $[2(\cos 45° + i\sin 45°)]^2$ أ ــ $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$

د ــ $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$ ج ــ $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right]^3$

و ــ $(1 + i)^5$ هــ ــ $\left[5\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right]^6$

ط ــ $\log(1 + i)^8$ ح ــ $(2 - 2i)^5$ ز ــ $(1 - i)^4$

م ــ $(2 + 2i)^{\frac{1}{2}}$ ل ــ $(1 + i)^{\frac{1}{2}}$ ك ــ $\log(4 - 2i)^3$ ى ــ $\log(8 - i)^2$

ف ــ $(4 + i)^{\frac{1}{2}}$ ع ــ $(8 - 9i)^{\frac{1}{4}}$ س ــ $(9 + 5i)^{\frac{1}{5}}$ ن ــ $(8 - 2i)^{\frac{1}{3}}$

6 ــ أكتب ناتج العمليات في السؤال 5 بالشكل الكارتيزي.

7 ــ أثبت أنه إذا كانت $z = e^{i\theta}$ فإن

$$\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) = 2\cos(m\theta) \quad \text{وأن} \quad \left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) = 2i\sin(m\theta)$$

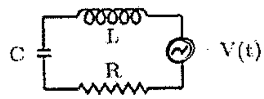
8 ــ أثبت أن $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$

9 ــ إذا كانت α, β عددين مركبين ثابتين ، γ متغير حقيقي (بارامتر) فإن الدالة
$z = \alpha + \gamma(\beta - \alpha)$ تمثل منحنى في المستوى المركب .
ضع $z = x + iy$ ثم احسب العلاقة البارامترية في المتغير γ ، أي أوجد $x = x(\gamma)$ ، $y = y(\gamma)$. ما هو شكل المنحنى؟ ارسم المنحنى عندما $\alpha = 2 + i$ ، $\beta = 1 + i$

10 ــ يوضح الشكل المرافق دارة RLC الكهربائية حيث $V(t)$ هو فرق الجهد بين النقطتين B ، A . فإذا كانت $V(t) = V_o \cos \omega t$ وكان التيار $I(t)$ المار في الدارة يحقق المعادلة:

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

فأثبت مستخدماً الأعداد المركبة أن حل هذه المعادلة هو $I = I_o \cos(\omega t - \phi)$.
ما هي ϕ و I_o ؟



شكل 2‒9 .

11 ــ أثبت أن $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\cdots\cdots + z^m = \dfrac{1 - z^{m+1}}{1 - z}$

حيث z عدد مركب ثم استنتج مطابقة لاجرانج المثلثية:

$$1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots\cdots\cdots + \cos(m\theta) = \frac{\cos\left(\frac{m\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{m\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

12 ــ أثبت أن $\ln(a+ib)=\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2)+i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

13 ــ نعرف الدوال الزائدية كما يلي:

$$\sinh z=\frac{(e^{z}-e^{-z})}{2} \quad , \quad \cosh z=\frac{(e^{z}+e^{-z})}{2}$$

أثبت أن:

$$e^{nz}=(\cosh z+\sinh z)^{n}=\cosh nz+\sinh nz$$

14 ــ أكتب الكميات التالية بالشكل الكارتيزي

أ ــ $\cosh(2\pi i)$ ب ــ $\sinh\left(4+i\frac{\pi}{2}\right)$

ج ــ $i^{\ln i}$ د ــ $\ln\left(i+\sqrt{3}\right)$

هـ ــ $\tanh\left(3\frac{\pi i}{4}\right)$ و ــ $(2+2i)^{1-2i}$

11 ــ 1 مقدمة

بعد دراسة الأعداد المركبة سوف نناقش في هذا الفصل الدوال المركبة وهي الدوال التي يكون فيها المتغير مركباً والدالة نفسها مركبة. وسوف ندرس تفاضل الدوال المركبة والشروط اللازمة لتكون تحليلية ثم نذكر بعض التطبيقات الفيزيائية على الدوال التحليلية ونتعرض بعد ذلك لتكامل الدوال المركبة ونظريات كوشي التكاملية ونظرية البواقي موضحين ذلك بالأمثلة، ولكن نبدأ بتعريف الدالة المركبة.

لأي عدد مركب $(z \in C)$ $z = x + iy$ نعرف دالة وحيدة القيمة في z تسمى دالة مركبة نرمز لها بالرمز $f(z)$. فمثلاً $f(z) = 2z^{*2}$ (حيث z^* مرافق z المركب) دالة مركبة يمكن كتابتها بالشكل:

$$f(z) = 2(x - iy)^2 = 2(x^2 - y^2) - i4xy$$

وعموماً فإنه يمكن فصل $f(z)$ إلى جزء حقيقي $u(x, y)$ وآخر تخيلي $\upsilon(x, y)$، وصورتها العامة هي

$$f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y)$$

حيث u , υ دوال حقيقية في x، y و $i = \sqrt{-1}$.

11 ــ 2 الدوال التحليلية

تعرف مشتقة دالة مركبة $f(z)$، كما هو الحال في الدوال الحقيقية، بالعلاقة:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{z + \Delta z - z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \qquad (11-1)$$

بشرط ألا تعتمد قيمة هذه النهاية على الطريقة التي تقترب فيها Δz من الصفر. في الدوال الحقيقية نشترط أن تكون النهاية اليمنى تساوي النهاية اليسرى حتى تكون

المشتقة $\frac{df(x)}{dx}$ معرفة عند نقطة $x = x_0$. وبنفس الطريقة فإننا نشترط في الـــدوال المركبة ألا تعتمد النهاية (1 – 11) على المسار المختار. لكن هـــذا الشـــرط قـــد لا يتحقق دائما لجميع الدوال المركبة كما نرى في المثال التالي.

مثال 1 . اختبر ما إذا كانت الدالتين قابلتين للاشتقاق $f(z) = z^*$ ، $f(z) = z^2$.

الحل :

$$z = x + iy \quad ، \quad z^* = x - iy$$

من العلاقة (1 – 11)
$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(z^* + \Delta z^*) - \cancel{f}(z)}{z + \Delta z - z} = \frac{\Delta z^*}{\Delta z}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

لننظر إلى نهاية هذا المقدار على مسارين مختلفين عندما $\Delta x = 0$ ، وعندما $\Delta y = 0$.

عند $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{+i\Delta y} = -1$$

عند $\Delta y = 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

واضح من هاتين القيمتين أن النهايتين غير متساويتين وبذلك فالمشتقة غير موجودة.

بنفس الطريقة يمكن اختبار مشتقة الدالة $f(z) = z^2$ فنجد

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$$

بأخذ نهاية هذه الكمية عندما $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2iy(i\Delta y)}{i\Delta y} + \frac{(i\Delta y)^2}{i\Delta y}$$
$$= 2iy = 2z$$

وعندما $\Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= 2x = 2z$$

وحيث أن النهايتين متساويتان فإن مشتقة الدالة z^2 معرفة وتساوي $2z$.

نعرّف الآن الدالة $f(z)$ بأنها تحليلية إذا كانت مشتقتها معرفة. فإذا كانت مشتقة الدالة معرفة عند النقطة z_0 فإن الدالة تحليلية عند النقطة z_0. وتكون الدالة تحليلية في منطقة ما إذا كانت مشتقتها معرفة عند كل نقطة داخل هذه المنقطة.

إن كون الدالة $f(z)$ تحليلية يقود مباشرة إلى تحقيقها لشروط معينة تسمى شروط كوشي – ريمان.

شروط كوشي – ريمان

سوف تشتق هذه الشروط اعتماداً على تعريفنا للدالة التحليلية ولمشتقة الدالة المركبة كما في العلاقة $(11-1)$.

من تعريف العدد $z = x + iy$ ، فإن التغير في z هو:

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y \qquad (11-2)$$

وكذلك التغير في الدالة f هو:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta \upsilon \qquad (11-3)$$

بالتعويض من $(11-2)$ ، $(11-3)$ في $(11-1)$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta \upsilon}{\Delta x + i\Delta y}$$

لنحسب هذه النهاية على المسارين $\Delta x = 0$ ، و $\Delta y = 0$

عندما $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta \upsilon}{i\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} \qquad (11-4)$$

وعلى المسار $\Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta \upsilon}{i\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \qquad (11-5)$$

حيث استخدمنا في المعادلتين (4 – 11) ، (5 – 11) تعريف مشتقة الدالة. وحيث أن الدالة f(z) تحليلية فإن مشتقتها معرفة وموجودة. وهذا يعني أن النهايتين (4 – 11) ، (5 – 11) يجب أن تكونا متساويتين. وبمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية في هاتين المعادلتين نصل إلى معادلات كوشي – ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y} \qquad (11-6)$$

إن شرطي كوشي – ريمان ضروريان حتى تكون مشتقة الدالة f(z) موجودة. بحيث إذا كانت مشتقة الدالة f(z) موجودة فإن هذين الشرطين لا بد أن يتحققا. وفي المقابل إذا تحقق شرطا كوشي – ريمان وكانت الدوال u ، υ ومشتقاتها الجزئية مستمرة فإن مشتقة الدالة f(z) معرفة.

مثال 2 . افحص هل الدالة $f(z)=z^2$ تحليلية ثم بين أنها تحقق شروط كوشي – ريمان.

الحل : وجدنا من المثال 1 أن مشتقة الدالة معرفة وتساوي 2z. وبذلك فالدالة تحليلية. لتحقيق شروط كوشي – ريمان نفصل الدالة z^2 إلى الدالتين u ، υ:

$$f(z)=(x+iy)^2$$
$$=(x^2-y^2)+2ixy$$

إذا

$$\upsilon=2xy \quad و \quad u=x^2-y^2$$

وباستخدام المعادلات (6 – 11):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

وبالتالي فالدالة $f(z)=z^2$ تحليلية وتحقق شروط كوشي – ريمان.

مثال 3 . إذا كان الجزء الحقيقي في دالة تحليلية هو $u=x+y$ فأوجد الجـزء التخيلي υ.

الحل : حيث أن الدالة تحليلية فإنها تحقق شروط كوشي – ريمان. ومنه فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=1$$

$$\upsilon=\int\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dy=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy+g(x)=\int 1dy+g(x)$$

$$\upsilon=y+g(x)$$

حيث $g(x)$ دالة في x فقط مطلوب حسابها.

ومن معادلة كوشي – ريمان الثانية :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=-g\frac{dg}{dx}$$

ولكن

$$\frac{\partial u}{\partial y}=1$$

إذا

$$1=-\frac{dg}{dx}$$

وبالمكاملة على x

$$g(x)=-\int dx+C=C-x$$

حيث C ثابت التكامل. وبالتالي فالدالة υ هي:

$$\upsilon=y-x+C$$

والدالة التحليلية هي:

$$f=u+i\upsilon=(x+y)+i(y-x+C)$$

11 ـ 3 الدوال التوافقية

إن معادلات كوشي – ريمان للدوال التحليلية ذات أهمية كبيرة في العديد من التطبيقات الفيزيائية خاصة عند دراسة معادلة لابلاس. إذ يمكن استخدام معادلات كوشي – ريمان في دراسة الدوال التوافقية وهي تلك الدوال التي تحقق معادلة لابلاس. وهذه الدوال لها تطبيقات في فروع الفيزياء المختلفة. سوف نبين الآن أن الدوال u و υ دوال توافقية، أي أنها تحقق معادلة لابلاس.

سنفرض أن الدالة f = u + iυ تحليلية وبالتالي تحقق شرطي كوشي – ريمان، وبالتالي فإن :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial y}$$

و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial y}$$

وبجمع المعادلتين فإن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial y}=0$$

أو

$$\nabla^2 u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0 \qquad (11-7)$$

وهذه معادلة لابلاس، حيث ∇^2 عامل نابلا في بعدين (x – y). وبنفس الطريقة فإن:

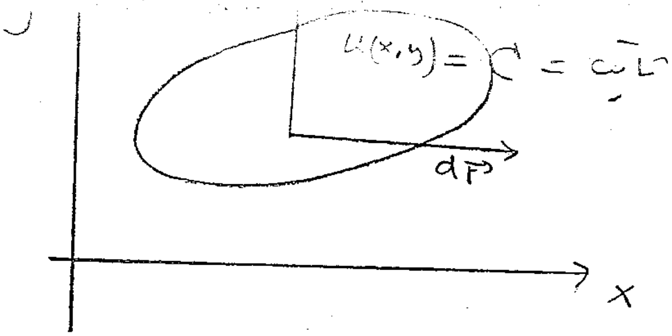
$$\nabla^2 \upsilon=0 \qquad (11-8)$$

وهذا يعني أن الدالتين u ، υ توافقيتان.

علاوة على تحقيق معادلة لابلاس فإن الدوال التوافقية تتميز كذلك بخاصية هامة هي خاصية التعامد.

لننظر في عائلة المنحنيات $u(x, y) = C_i$ و $\upsilon(x, y) = C_j$ حيث C_i و C_j ثوابت اختيارية. من تعريف التدرج فإن:

$$\vec{\nabla} u=\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial u}{\partial y}$$



لنفرض أن $d\vec{r} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy$ متجه في المستوى $u(x , y) = C_i$ كما في الشكل.

بتكوين الضرب المقياس للمتجه $d\vec{r}$ مع المتجه $\vec{\nabla} u$:

$$\vec{\nabla} u \cdot d\vec{r} = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\vec{\nabla} u \cdot d\vec{r} = du = dc = 0$$

وهذا يعني أن المتجه $\vec{\nabla} u$ عمودي على $d\vec{r}$. وحيث أن $d\vec{r}$ يقع في المستوى u فإن $\vec{\nabla} u$ كذلك عمودي على المستوي $u(x , y)$ وبالتالي عمودي على عائلة المستويات $u(x , y) = C_i$ وبالمثل فإن:

$$\vec{\nabla} \upsilon = \hat{i} \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

كذلك عمودي على عائلة المستويات $\upsilon(x , y) = C_j$

وبتكوين الضرب المقياسي $\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \upsilon$ نجد:

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \upsilon = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \upsilon = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (11-9)$$

حيث استخدمنا معادلات كوشي – ريمان. وهذا يعني أن الأعمدة المرسومة على المستويات $u = C_i$ و $\upsilon = C_j$ أيضاً متعامدة، وينتج من ذلك أنه عند رسم هذه المستويات في المستوي المركب فإنها تشكل منحنيات متعامدة، بحيث عند كل نقطة z في المستوي المركب تكون المستويات $u = C_i$ و $\upsilon = C_j$ متعامدة.

هاتان الخاصيتان للدوال التوافقية، أي: كونها تحقق معادلة لابلاس وكون $\vec{\nabla}u\ \vec{\nabla}\upsilon = 0$ هامتان ولها تطبيقات عديدة كما يوضح المثالان 4 و 5.

تطبيقات على الدوال التوافقية :

في النظرية الكهرومغناطيسية يحقق الجهد الكهربائي V معادلة لابلاس في ثلاثة أبعاد. وإذا افترضنا أن الجهد متماثل حول المحور z بحيث لا يعتمد V على z فإن معادلة لابلاس للجهد V في المستوي $y-x$ هي:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (11-10)$$

والمطلوب في مثل هذه المسائل عادة هو إيجاد الجهد V الذي يحقق معادلة لابلاس وشروط حدود معينة. وتنص نظرية الفردية على أن الجهد الذي يحقق معادلة لابلاس ويحقق شروط الحدود هو حل وحيد[1]. وهذا يعني أن هذه النظرية تعطينا الحرية الكاملة في إيجاد الجهد بأي طريقة مادام يحقق معادلة لابلاس ويحقق شروط الحدود. وسوف نستخدم هنا الدوال المركبة لايجاد الجهد الكهربائي.

لننظر في الدالة المركبة:

$$f(z) = \log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad (11-11)$$

من الواضح أن لهذه الدالة فروعاً عدة، وذلك لأن للطور arg(z) فرعاً أساسيا مضافاً إليه أعداداً صحيحة من 2π. ولذا سوف نقتصر في هذه الدالة على الفرع الأساسي حتى تكون الدالة وحيدة القيمة (انظر الفصل الأول). عندئذ يمكن كتابة الجزء الحقيقي u والتخيلي υ لهذه الدالة كالتالي:

$$u(x,y) = \log|z| = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (11-12)$$

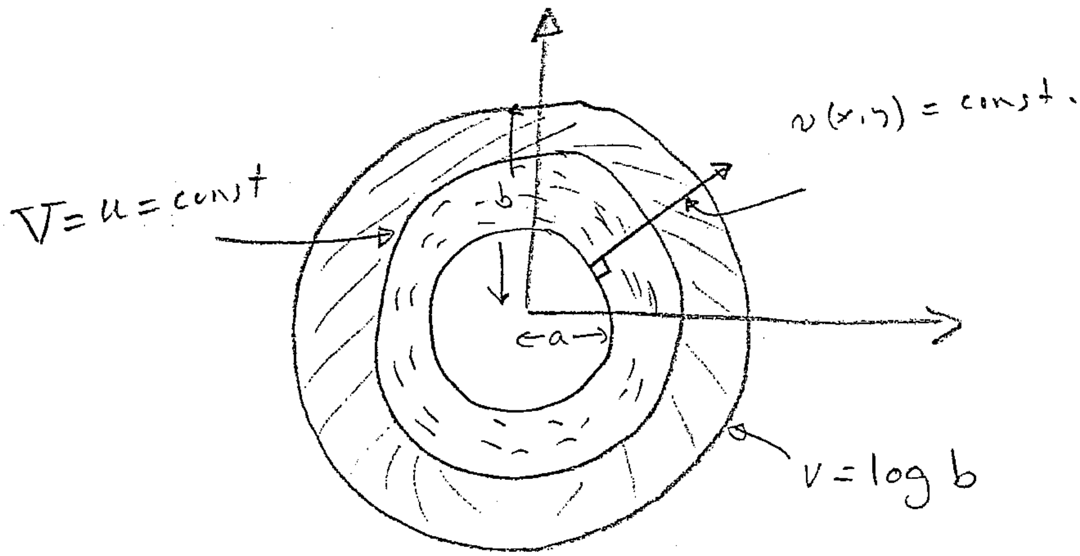
و:

[1] انظر مثلاً: Classical Electrodynamics , Jackson (1975) , P.42

$$(11-13) \qquad \upsilon(x,y)=\arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ويحقق هذان الجزءان u و υ شرطي كوشي – ريمان ومعادلة لابلاس (انظر المسائل). ولذا فإن الدالة u التي تحقق معادلة لابلاس تمثل دالة الجهد الكهربائي. والدوال u(x , y) = constant عبارة عن دوائر في المستوي x – y. وفي ثلاثة أبعاد فإن هذه الدوال عبارة عن أسطوانات محورها هو المحور z لأن الجهد V متماثل حول z. وحسب نظرية الفردية فإن u هي الحل الوحيد للجهد الكهربائي في المنطقة المحصورة بين أسطوانتين محوريتين كما في الشكل (1 – 11).

وإذا نظرنا إلى الدوال u = constant على أنها سطوح تساوي الجهد لأن عبارة عن أسطح للجهد،فإنه يمكن تفسير υ على أنها ترتبط بخطوط شدة المجال الكهربائي وذلك لأن خطوط المجال متعامدة مع سطوح تساوي الجهد، وكذا u و υ متعامدان كما أوضحنا ذلك آنفاً.



شكل (1 – 11)

أسطوانتان محوريتان نصف قطريهما a ، b. تمثل الأسطح u = constant الجهد الكهربائي في المنطقة داخل الأسطوانتين، والمنحنيات υ = constant عمودية عليها.

مثال 3 . أوجد الجهد والمجال الكهربائي لسلك رفيع على طول محور z يحمل شحنة كهربائية كثافتها الطولية ρ.

الحل: من قانون جاوس، شدة المجال الكهربائي $\vec{E}$ عند أي نقطة تبعد مسافة r من نقطة الأصل (الشكل (2 – 11)) هي:

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r} \quad ; \quad r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

حيث ε_0 سماحية الفراغ وتساوي 8.85×10^{-12} F/m . يرتبط الجهد الكهربائي V بالمجال $\vec{E}$ بالعلاقة $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ أو:

$$V = -\int_x^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\log r = u(x, y)$$

فإذا كتبنا العدد المركب z في الصورة القطبية:

$$z = re^{i\phi}$$

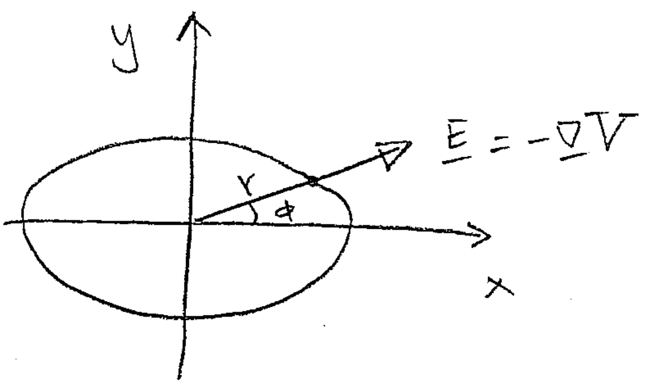
حيث $\phi = \arg(z)$ زاوية الطور فإن

$$\log z = \log r + i\phi$$

وبالتالي فإن الدالة V هي الجزء الحقيقي للدالة التحليلية

$$V = -\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\log z$$

أي أن: V = u = Re f(z) .



الشكل (2 – 11)

أما الجزء التخيلي للدالة f(z) فهو:

$$\upsilon(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$$

$$\upsilon(x,y)=-\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\arg(z)=-\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\phi$$

حيث:

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث: $0 \leq \phi \leq 2\pi$ والآن برسم الدالة u = constant نحصل على دوائر متحدة المركز تمثل سطوح تساوي الجهد، وبرسم الدالة υ = constant نحصل على خطوط مستقيمة تتعامد مع الدوائر السابقة عند نقط التقاطع وهذه الخطوط تمثل خطوط المجال الكهربائي أما قيمة واتجاه خطوط المجال فتحدد كالتالي:

قيمة المجال الكهربائي $|E|$ هي:

$$|E|=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$$

واتجاهه هو الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{E}$ مع المحور x وتحدد بالنسبة E_y/E_x

ومركبات المجال الكهربائي هي :

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}=-\operatorname{Re} f'(z)$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\operatorname{Im} f'(z)$$

$$\frac{E_y}{E_x}=-\frac{\operatorname{Im} f'(z)}{\operatorname{Re} f'(z)}=-\arg f'(z)$$

$$f'(z)=\frac{-\rho}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$|E|=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=|f'(z)|=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{E_y}{E_x}=\tan\phi=-\frac{y}{x}$$

مثال 3 . صفيحة لا نهائية موصلة عند جهد ثابت V_0. احسب شدة المجال الكهربائي واتجاهه إذا كانت الكثافة السطحية للصفيحة σ.

الحل : كما في الشكل نفرض أن الصفيحة تقع عند المستوى y = 0 على طول محدد x .

من قانون جاوس للمجال الكهربائي:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = const$$

والجهد الكهربائي المناظر لهذا المجال هو:

$$V = -\int E_y \cdot dy = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} y + C$$

والجهد الكهربائي الكلي هو

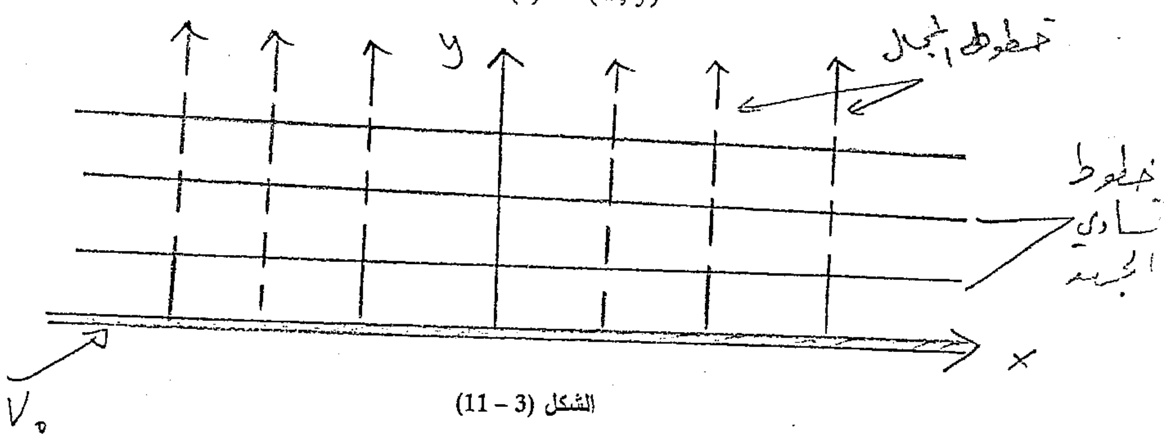
$$V = V_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} y$$

فإذا عرفنا الدالة التحليلية

$$f(z) = V_0 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z$$

فمن الواضح أن الجهد V هو الجزء الحقيقي لهذه الدالة.أي أن :

V = Re f(z) = u(x , y)



الشكل (3 – 11)

أما الجزء التخيلي فهو:

$$\upsilon(x,y)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

أيضاً:

$$f'(z)=i\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

وبذلك فإن:

$$|E|=|f'(z)|=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

والمجال $\vec{E}$ يصنع زاوية مع المحور x تحدد من العلاقة :

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im} f'(z)}{\operatorname{Re} f'(z)}\right)=\tan^{-1}(\infty)=\frac{\pi}{2}$$

حيث $E_x=0$.

11 ـ 4 تكامل الدوال المركبة

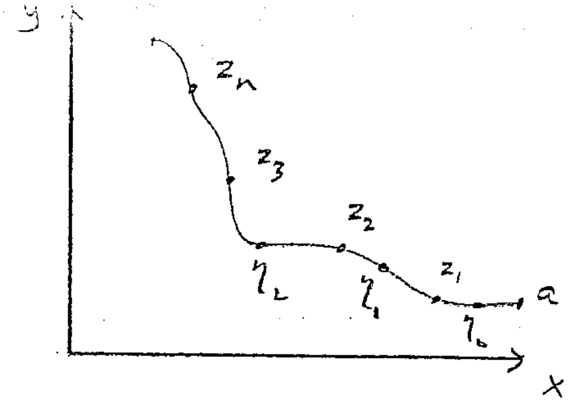
بعد أن تعرضنا لتفاضل الدوال المركبة نتحول الآن إلى مناقشة تكامل الدوال المركبة. يمكن تعريف تكامل الدوال المركبة كما هو الحال في الدوال الحقيقية باستخدام مجموع ريمان.

لنفرض أننا أردنا مكاملة دالة مركبة $f(z)$ على طول منحنى بين a_0 و b_0. نقسم هذا المنحنى بعدد من النقط $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_{n-1}$ بين a_0 و b_0 ثم نكون المجموع:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(z_i-z_{i-1}) \tag{11 – 14}$$

حيث η_i نقطة بين z_{i-1} ، z_i كما في الشكل (4 – 11).

وعندما تؤول n إلى ما لانهاية فإن طول الفترة z_{i-1} ـ z_i يؤول إلى الصفر ويتحول الجمع إلى تكامل على z :



الشكل (4 – 11) . تكوين المجموع الريماني لدالة مركبة.النقطة η_i تقع بين z_{i-1} ، z_i.

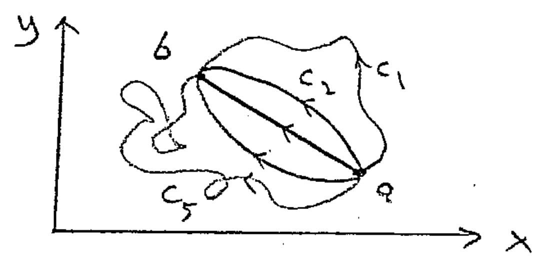
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(z_i - z_{i-1}) = \int_a^b f(z)dz \qquad (11-15)$$

يسمى الطرف الأيمن من هذه العلاقة التكامل الكنتوري للدالة f(z). ويسمى المسار من a إلى b الذي يحسب عليه التكامل كنتوراً. من الواضح أن هناك عدداً لانهائياً من هذه المسارات التي يمكن اختيارها لحساب التكامل. ولذلك فعند حساب التكاملات المركبة لابد من تحديد مسار التكامل أو الكنتور. ويوضح الشكل (5 – 11) بعض هذه المسارات.

من المعادلة (15 – 11) ومن العلاقة (1 – 11) نجد أن :

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+i\upsilon)(dx+idy) \qquad (11-16)$$

حيث يعني C التكامل بين a ، b على المسار C المحدد.



الشكل (5 – 11). توضح C_1 ، C_2 ، C_3 بعض المسارات الممكنة بين a ، b.

نظرية كوشي الأولى:

هذه النظرية هي إحدى نظريتين هامتين في دوال المتغير المركب. وتنص هذه النظرية على أنه إذا كانت f(z) دالة تحليلية في منطقة D ومشتقاتها مستمرة وإذا كان C منحنى بسيطاً مغلقاً في D كما في الشكل (6-11) فإن :

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (11-17)$$

هذا التكامل خطي ويسمى بالتكامل الكنتوري. والمقصود بالمنحنى البسيط أي أنه لا يتقاطع مع نفسه. وتعني الدائرة على التكامل أنه تكامل مغلق.

لبرهان العلاقة (17 – 11) سوف نستخدم نظرية ستوكس.

من العلاقة (16 – 11):

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - \upsilon dy) + i\oint_C (\upsilon dx - udy) \qquad (11-18)$$

ومن نظرية ستوكس لأي متجه $\vec{B}$:

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

فإن:

$$\oint_C (B_x dx + B_y dy) = -\oint_C \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right)dxdy \qquad (11-19)$$

وبتطبيق هذه النظرية على التكامل الأول في (18 – 11) نجد أن:

$$\oint_C (udx - \upsilon dy) = -\oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)dxdy$$

$$= -\oint_C \left(-\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)dxdy \qquad (11-20)a$$

$$= 0$$

حيث استخدمنا شرطي كوشي – ريمان إذ أن الدالة f(z) تحليلية. وبالمثل بتطبيق العلاقة (19 – 11) على التكامل الثاني واستخدام شرطي كوشي – ريمان نجد أن:

$$\oint_C (\upsilon dx + u dy) = -\oint_C \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy$$

$$= -\oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \qquad (11-20)\text{b}$$

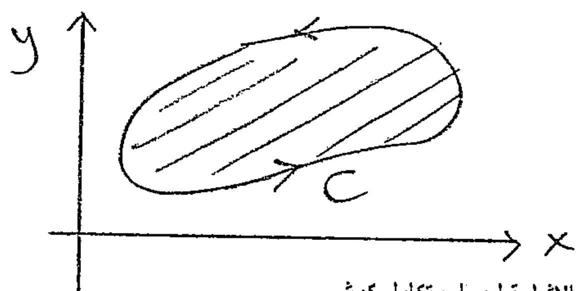
$$= 0$$

ومن (20 – 11) ينتج التكامل (17 – 11) وهذا يثبت النظرية.

من العلاقة (17 – 11) نرى أن تكامل الدالة f(z) لا يعتمد على المسار، بل يعتمد على نقطتي البداية والنهاية، وعلى هذا فيمكن النظر إلى الدالة f(z) على أنها تمثل مركبة قوة محافظة على طول المسار z.

نلاحظ كذلك في المعادلة (19 – 11) أن الطرف الأيسر تكامل خطي والأيمن سطحي ولذلك لابد من تحديد اتجاه مسار الكنتور C. سوف نصطلح أن يكون اتجاه مسار الكنتور عكس عقارب الساعة بحيث تكون المساحة المحصورة داخل C واقعة على يسار شخص يتحرك على هذا المنحني في عكس اتجاه عقارب الساعة وعندئذ يكون التكامل موجباً ويوضح الشكل (7–11) اصطلاح الإشارة.

عند اشتقاق النظرية السابقة اشترطنا أن تكون مشتقات الدالة f(z) الجزئية مستمرة، ولكن هذا الشرط ليس ضرورياً. فلقد استطاع غورسات (GOURSAT) إثبات النظرية دون الحاجة إلى هذا الشرط ، ولذا تسمى هذه النظرية أحياناً نظرية كوشي – غورسات * .



الشكل (6 – 11) . اصطلاح الإشارة لحساب تكامل كوشي .

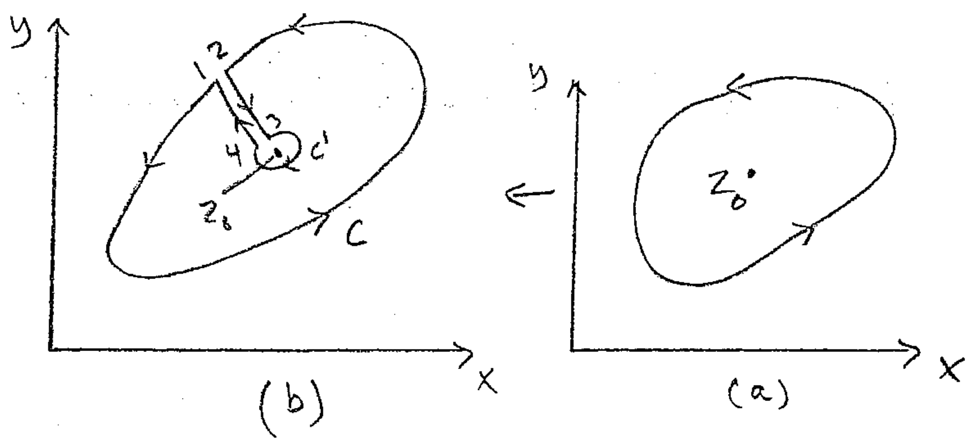
* انظر Mathematical Methods for Physicists, G. Arfken , Academic Press (1985)

نظرية كوشي الثانية أو صيغة تكامل كوشي:

تتعلق هذه النظرية بحساب قيمة دالة مركبة داخل منحني مغلق وتنص على أنـــه إذا كانت f(z) دالة تحليلية على المنحني المغلق C (كنتور) وكذلك داخله، وإذا كانت z_0 نقطة واقعة داخل المنحنى المغلق C فإن قيمة الدالة f عند النقطة z_0 تحســـب مــن العلاقة:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad (11-21)$$

وتسمى هذه العلاقة صيغة تكامل كوشي. سوف نبرهن أولاً على صحة هذه العلاقـــة ثم نشرح هذه الصيغة بعد ذلك ببعض الأمثلة. كما يوضح الشكل a(7 – 11) الدالـــة f(z) تحليلية على المنحنى C المغلق وبداخله، بينما الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ ليست تحليليـــة إذ أنها تعاني نقطة مفرد أو قطبا عن $z = z_0$.



الشكل (8 – 11) . (a) الدالة f(z) تحليلية داخل المنحني C وخارجه. (b) طريقة شـــق القنـــاة للحصول على منحني مغلق يجعل استخدام نظرية كوشي الأولى ممكناً .

من الواضح أنه لا يمكن استخدام نظرية كوشي الأولى لحساب التكامل في الطرف الأيمن من (12 – 11) إذ أن الدالة تحت التكامل ليست تحليلية عند النقطة z_0.
وسوف نحاول الآن تحويل المنحني المغلق C إلى منحني آخر بحيث تقع النقطة z_0 خارجه وتصبح الدالة المكامل عليها تحليلية ويمكن عندئذ استخدام علاقة كوشي (17 – 11). لعمل ذلك نستخدم ما يسمى طريقة " شق القناة " كما في الشكل (7 – 11)b. نعمل دائرة صغيرة C' حول z_0 ثم نصل هذه الدائرة، التي تشكل مساراً مغلقاً حول z_0 ، بالمنحني C وذلك بفتح قناة بينهما عبارة عن خطين صغيرين متعاكسين الممثلين بالسهمين 2 – 3 ، 4 – 1. وحتى لا نغير الشكل (a) فإننا سوف نجعل الدائرة C' تؤول إلى الصفر، والخطين المتعاكسين يلغيان بعضهما بعضاً.

نضع $\phi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$. من الواضح الآن أن الدالة $\phi(z)$ تحليلية داخل المنحني المغلق المبين في الشكل (8 – 11)b وبالتالي يمكن استخدام نظرية كوشي الأولى كالتالي:

$$\int_{1\to2}\phi(z)dz+\int_{2\to3}\phi(z)dz+\int_{3\to4}\phi(z)dz+\int_{4\to1}\phi(z)dz=0 \qquad (11-22)a$$

حيث يعني $2 \to 1$ التكامل على المسار C بين النقطتين 1 ، 2.
من الواضح أن التكاملين الأخيرين متساويان ومتعاكسا الاتجاه ولذلك يلغيان بعضهما بعضاً وعندها يصبح التكامل (22 – 11) تكاملاً على المسارين المغلقين C و C':

$$\oint_C\phi(z)dz+\oint_{C'}\phi(z)dz=0 \qquad (11-22)b$$

ولكن اتجاه مسار المنحنى C' معاكس لاتجاه مسار المنحنى C ، لذلك وبعد نقل التكامل الثاني إلى الطرف الأيمن وعكس اتجاه C' ليصبح نفس اتجاه C نحصل على:

$$\oint_C\phi(z)dz=\oint_{C'}\phi(z)dz \qquad (11-23)$$

دعنا نحسب التكامل في الطرف الأيمن على المنحني C'.

نضع:

$$z = z_0 + re^{i\theta} \qquad , \qquad dz = ire^{i\theta} d\theta$$

حيث r نصف قطر المنحني C'.

إذاً:

$$\oint_{C'} \phi(z) dz = \oint_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta$$

$$\oint_{C'} \phi(z) dz = i \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad (11-24)$$

ولكي يعود الشكل b إلى الشكل الأصلي a فإننا نجعل المنحنى C' ينكمش إلى النقطة z_0 ، وهذا يحدث عندما $r \to 0$. وبذلك فإن :

$$f\left(z_0 + ire^{i\theta}\right) \to f(z_0)$$

و

$$\oint_C \phi(z) dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

ومن المعادلات $(23 - 11)$ و $(24 - 11)$ نحصل على صيغة تكامل كوشي:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \qquad (11-25)$$

نلاحظ أن التكامل السابق يحسب على المسار الكنتوري C، وبذلك فإن z عبارة عن نقطة على هذا المسار بينما z_0 داخله ولذا فإن $z \neq z_0$ وهذا يعني أن التكامل معروف وموجود ويساوي $2\pi i f(z_0)$.

أما إذا كانت z_0 خارج المنحنى C فإن الدالة $\phi(z)$ تحليلية داخل C لجميع قيم z، والتكامل في هذه الحالة يساوي الصفر وذلك من علاقة كوشي الأولى.

المعادلة $(25 - 11)$ أو $(21 - 11)$ يمكن تفسيرها بشكل آخر: إذا كانت الدالة $f(z)$ معطاة على المنحنى المغلق C فإن هذه العلاقة تعطي قيمة الدالة عند أي نقطة z_0 داخل C. ومن هنا يمكن إعادة كتابة $(25 - 11)$ بالشكل التالي:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{z'-z} \qquad (11-26)$$

حيث z' نقطة على المنحنى C و z داخله. وعلى هذا يمكن حساب مشتقة الدالـة f(z) عند النقطة z:

$$\frac{df(z)}{dz}=f^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z)^2}$$

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}=f^{(2)}(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z)^3}$$

وبتكرار التفاضل n مرة نجد أن:

$$\frac{d^nf(z)}{dz^n}=f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z)^{n+1}} \qquad (11-27)$$

وتعطي هذه المعادلة المشتقة النونية للدالة f(z).

تجدر الملاحظة هنا أنه عند حساب التكاملات من نوع المعادلة (21 – 11) لابد مـن كتابة التكامل بالشكل المبين بحيث يحتوي المقام على الكمية $z - z_0$ صريحـة كمـا توضح الأمثلة التالية .

مثال 5 .

احسب التكامل $\oint_C \frac{\sin(z)dz}{2z-\pi}$

حيث C هو الكنتور المغلق المحدد بالمنحنى:

(a) $|z|=1$ (b) $|z|=2$

الحل :

لحساب هذا التكامل نعيد كتابة التكامل كما في العلاقة (16 – 11):

$$\oint_C \frac{\sin(z)}{2z-\pi}dz=\frac{1}{2}\oint_C \frac{\sin(z)}{z-\frac{\pi}{2}}dz$$

وعندئذ فإن النقطة $z_0=\dfrac{\pi}{2}$ وليست π.

(a) الكنتور $|z|=1$ عبارة عن الدائرة $|z|=1$ أو $x^2+y^2=1$ التي نصف قطرها 1 كما في الشكل.

والنقطة $z_0=\dfrac{\pi}{2}=1.6$ خارج هذا الكنتور C وبذلك فإن الدالة تحت التكامل تحليلية داخل المنحنى C. ومن نظرية كوشي الأولى فإن التكامل على المنحني $|z|=1$ يساوي الصفر:

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{\sin(z)}{z-\dfrac{\pi}{2}}dz=0$$

(b) الكنتور $|z|=2$ عبارة عن الدائرة نصف قطرها 2 أي $x^2+y^2=4$ وبالتالي فالنقطة $z_0=1.6$ تقع داخل هذا الكنتور.

ومن نظرية كوشي الثانية فإن:

$$\oint_C \frac{\sin(z)}{2z-\pi}dz=\frac{1}{2}\oint_C \frac{\sin(z)}{z-\dfrac{\pi}{2}}dz$$

$$\oint_C \frac{\sin(z)}{2z-\pi}dz=\left(\frac{1}{2}\right)(2\pi i)f(z_0)$$

حيث $f(z)=\sin(z)$.

وحيث أن: $f(z_0)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ ، فإنه ينتج:

$$\oint_C \frac{\sin(z)}{2z-\pi}dz=\frac{1}{2}\times 2\pi i\times 1=\pi i$$

نظرية موريرا (Morera) :

السؤال الذي يتبادر للذهن هو هل إذا كانت الدالة المركبة تحقق العلاقة(12 – 11) فهل هذا يعني أنها تحليلية ؟ والجواب هو نعم. وهذا هو محتوى نظرية موريرا وهي معكوس نظرية كوشي – غورسات.

وتنص على أنه إذا كانت f(z) دالة مستمرة في منطقة D وإذا كان:

$$\oint_C f(z)dz=0$$

حيث C مسار مغلق في D فإن الدالة f(z) تحليلية في المنطقة D. لبرهان هذه النظرية نحيل القارئ إلى المصادر.

11 – 5 مفكوك لوران والبواقي

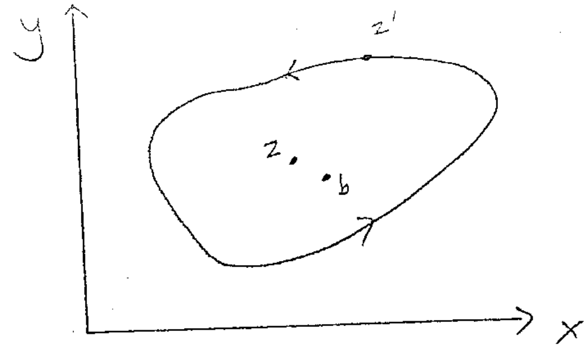
تشكل نظرية البواقي مع النظريتين السابقتين أهم ثلاث نظريات في دوال المتغير المركب وتمكن من حساب كثير من التكاملات التي نواجهها في كثير من التطبيقات الفيزيائية. وقبل الحديث عن نظرية البواقي نناقش أولاً متسلسلة لوران التي تمكننا من حساب ما يسمى باقي دالة مركبة ومن ثم نناقش نظرية البواقي.

متسلسلة لوران Laurent Series :

لتكن f(z′) دالة تحليلية في المنطقة D و z′ نقطة على المنحنى المغلق C.

من نظرية كوشي الثانية فإن قيمة الدالة عند النقطة z داخل C هي:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$



الشكل (11 – 8) . z' على المنحني C و z ، b داخل المنحني بحيث $|z-b|<|z'-b|$.

لنفرض أن b نقطة أخرى قريبة من z بحيث يكون :

$$|z-b|<|z'-b|$$

بكتابة المقام في العلاقة السابقة بالشكل:

$$\frac{1}{z'-z}=\frac{1}{(z'-b)-(z-b)}=\frac{1}{z'-b}\left[\frac{1}{1-\dfrac{z-b}{z'-b}}\right]$$

$$\frac{1}{z'-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(z'-b)^{n+1}}$$

وبالتعويض في f(z) نجد أن:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-b)^n\oint_C\frac{f(z')dz'}{(z'-b)^{n+1}} \qquad (11-28)$$

وباستخدام العلاقة (11 – 27) فإن:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n f(z)}{dz'^n}\bigg|_{z'=b}(z-b)^n$$

و بتعويض:

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n f(z)}{dz'^n} \tag{11-29}$$

فإنه ينتج:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n \tag{11-30}$$

عند اشتقاق هذه العلاقة افترضنا أن الدالة f(z) تحليلية في جميع نقط المنطقة D بما فيها b، لذلك فإن المجموع (30 – 11) يشمل قيم n الموجبة فقط.

أما إذا كانت الدالة ليست تحليلية عند بعض النقط فإن العلاقة (30 – 11) سيظهر فيها حدود تحتوي على z في المقام وعندئذ يمكن تعميم المفكوك السابق ليشمل الدوال التي لها نقط مفردة وذلك بتحويل المجموع ليشمل قيم n السالبة، أي أن:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \tag{11-31}$$

حيث يوجد للدالة f(z) نقط مفردة. يسمى المفكوك (31 – 11) مفكوك لوران (Laurent) للدالة f(z) المركبة. ويمكن فصل الجزء التحليلي للدالة عن الجزء غير التحليلي بكتابة المفكوك كالتالي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{(z-b)^m} \tag{11-32}$$

فإذا كانت الدالة تحليلية عند جميع النقط فإن $a_m = 0$ ويؤول المفكوك (32 – 11) إلى العلاقة (30 – 11). أما إذا كان للدالة نقط مفردة فإن $a_m \neq 0$ ، والنقط المفردة تمثلها المقادير $\frac{1}{(z-b)^m}$.

من المعادلة (32 – 11) :

$$f(z) = \left[a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots\cdots\right] + \left[\frac{a_{-1}}{z-b} + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \cdots\cdots\right] \tag{11-33}$$

يسمى القوس الأول في هذه العلاقة الجزء التحليلي في مفكوك لوران، بينما يسمى القوس الثاني والذي يحوي على قوى سالبة الجزء الأساسي.

تسمى النقطة b في المفكوك (33 – 11) التي تكون عندها f(z) ليست تحليلية نقطة مفردة أو نقطة شاذة أو قطباً مفرداً.

وإذا كان أكبر أس في الجزء الأساسي في (33 – 11) هو m فإن للدالة f(z) قطباً مفرداً عند النقطة b من الرتبة m، أو أن b قطب من الرتبة m.

وإذا كانت m = 1 بحيث يحتوي الجزء الأساسي للمفكوك على الحد الأول فقط فإن القطب b يكون بسيطاً.

وإذا كانت $m \to \infty$ بحيث يحتوي مفكوك لوران على جميع الحدود ذات قيم m السالبة نقول أن هناك قطباً أساسياً عند z = b.

وللحد a_{-1} أهمية خاصة في الدوال المركبة ويسمى باقي الدالة f(z) عند z =b، ويعرف بأنه معامل $\frac{1}{(z-b)}$ في مفكوك لوران، كما يوضح المثال التالي.

مثال 6 . عين قطب الدالة ورتبته وباقي الدالة فيما يلي:

(a) $1+\frac{1}{z}$ (b) $e^{1/z}$ (C) $\frac{z}{z^2+1}$

الحل :

(a) في الدالة $f(z)=1+\frac{1}{z}$

الجزء التحليلي هو 1 والأساسي $\frac{1}{z}$. وهناك قطب عند z = 0. وأعلى أس سالب في الجزء الأساسي لهذه الدالة هو m = 1. ولذلك فإن القطب z = 0 بسيط. وباقي الدالة هو معامل $\frac{1}{z}$ ويساوي 1.

(b) مفكوك الدالة الأسية هو:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots\cdots$$

من الواضح أن مفكوك هذه الدالة ليس نهائيا ويحتوي على جميع الحدود إلى ما لانهاية وهناك قطب أساسي $z = 0$ لأنه يحوي جميع الحدود $m \to \infty$. وباقي الدالة هو معامل $\frac{1}{z}$ ويساوي 1.

(C) لتعيين أقطاب الدالة $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$ نوجد قيم z التي يكون عندها المقام صفراً فنجد أن الأقطاب هي $z=i$ ، $z=-i$. ولذلك فإن للدالة:

$$f(z)=\frac{z}{(z-i)(z+i)}$$

قطبين هما $\pm i$. لمعرفة رتبة كل قطب وباقي الدالة نحاول كتابة الدالة حسب مفكوك لوران كالتالي : بوضع $t = z + i$ نجد:

$$f(z)=\frac{t-i}{t(t-2i)}=\frac{i}{2}\frac{t-i}{t\left(1-\frac{t}{2i}\right)}$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين وإجراء الضرب وتبسيط الحدود نجد أن:

$$f(z)=\frac{i}{4}+\frac{1/2}{z+i}+\frac{1}{8}(z+i)+\cdots\cdots$$

واضح من هذا المفكوك أن للدالة قطباً بسيطاً عند $z = -i$ وباقي الدالة هو معامل $\frac{1}{z+i}$ ويساوي 1/2 . وبنفس الطريقة يمكن حساب باقي الدالة عند القطب $z = i$.

11 ــ 6 طرق حساب البواقي

ذكرنا سابقاً أن الكمية a_{-1} والتي تسمى باقي الدالة ذات أهمية كبرى في دوال المتغير المركب، وكما سنرى لاحقاً فإن حساب التكاملات الكنتورية تعتمد على معرفة هذا الباقي. وسوف نذكر فيما يلي بعض طرق حساب باقي الدالة.

أ – مفكوك الدالة لحساب الباقي عند قطب بسيط

وجدنا في مفكوك لوران أن هناك حداً يتناسب مع $(z-b)^{-1}$ وذكرنا أن معامل هـذا الحد هو باقي الدالة a_{-1} وبفك الدالة المركبة وتعيين هذا الحد يمكن حساب الباقي كما رأينا في الأمثلة السابقة. وعموماً إذا كان للدالة $f(z)$ قطب بسيط عند $z = b$ وأمكـن كتابتها في الصورة:

$$f(z)=\frac{R(z)}{z-b} \qquad (11-34)$$

حيث $R(z)$ دالة مركبة معرفة وموجودة عند $z = b$، فإن باقي الدالة هو $R(z)$ كمـا توضح الأمثلة التالية.

مثال 7 . احسب باقي الدالة $\frac{z}{z^2+1}$.

الحل :

نكتب الدالة $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$ على الصورة (34 – 11):

$$f(z)=\frac{z}{(z-i)(z+i)}$$

$$f(z)=\frac{R(z)}{z+i} \quad ; \quad R(z)=\frac{z}{z-i}$$

حيث $R(z)=\frac{z}{z-i}$. للدالة قطب بسيط عند $z=-i$ وباقي الدالة هو:

$$R(-i)=\frac{-i}{-i-i}=\frac{1}{2}$$

لحساب باقي الدالة عند القطب $z=i$ نكتب:

$$f(z)=\frac{z/(z+i)}{z-i}$$

حيث $R(z)=\frac{z}{z+i}$. للدالة قطب بسيط عند $z=i$ والباقي هو:

$$R(i)=\frac{i}{i+i}=\frac{1}{2}$$

مثال 8 . احسب بواقي الدالة

$$f(z)=\frac{1+z^2}{(z-2)(z-2i)}$$

الحل : لحساب الباقي عند $z = 2$ نكتب:

$$f(z)=\frac{R(z)}{z-2} \quad ; \quad R(z)=\frac{1+z^2}{z-2i}$$

والباقي عند القطب $z = 2$ هو:

$$R(2)=\frac{1+4}{2-2i}=\frac{5}{2-2i}$$

عند القطب $z = 2i$ نكتب:

$$f(z)=\frac{R(z)}{z-2i} \quad ; \quad R(z)=\frac{1+z^2}{z-2}$$

والباقي عند القطب البسيط $z = 2i$ هو:

$$R(2i)=\frac{1-4}{2i-2}=\frac{3}{2-2i}$$

ب – طريقة لأوبيتال.

جـ – صيغة تفاضلية لحساب البواقي

إذا كان قطب الدالة ليس بسيطاً وتعذر كتابة الدالة $f(z)$ على الصورة (34 – 11) فإنه يمكن استخدام علاقة تفاضلية لحساب الباقي عند قطب رتبته n .

من مفكوك لوران:

$$f(z)=a_0+a_1(z-b)+\cdots\cdots+\frac{a_{-1}}{z-b}+\frac{a_{-2}}{(z-b)^2}+\cdots\cdots+\frac{a_{-m}}{(z-b)^m}$$

نرى أن للدالة قطباً من الرتبة m عند b. بضرب هذه المعادلة بالكمية $(z-b)^n$ ثم المفاضلة $(n-1)$ مرة ووضع $z=b$ نحصل على :

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-b)^n f(z)\right]_b=(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1\cdot a_{-1}$$

أو

$$a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-b)^n f(z)\right]_{z=b} \qquad (11-36)$$

حيث n عدد صحيح يساوي أو أكبر من رتبة قطب الدالة أي $n \geq m$.

تعطي العلاقة (36 – 11) صيغة تفاضلية عامة لحساب باقي دالة مركبة كما في المثال التالي.

مثال 10 . استخدم مفكوك لوران ثم العلاقة (36 – 11) لحساب باقي الدالة $\frac{\sin(z)}{z^6}$.

الحل : للدالة قطب عند $z=0$. ومفكوك الدالة $\sin(z)$ حول هذه النقطة هو:

$$\sin(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\cdots$$

و

$$f(z)=\frac{\sin(z)}{z^6}=\frac{1}{z^5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z}-\frac{z}{7!}+\cdots\cdots$$

وحيث أن القطب عند $b=0$ فإن الباقي هو معامل $1/z$ ويساوي $1/5!$. أما رتبة هذا القطب فهي $m=5$ لأن أكبر أس في المقام هو 5 (في الحد $1/z^5$).

ومن العلاقة (36 – 11) وبوضع $n=6$ فإن :

$$a_{-1} = \frac{1}{5!} \cdot \frac{d^5}{dz^5}\left[z^6 \cdot \frac{\sin(z)}{z^6}\right]_{z=0} = \frac{1}{5!} \cdot \frac{d^5}{dz^5} \cdot (\sin(z))\Big|_{z=0}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{5!} \cdot \frac{d^5}{dz^5} \cdot (\sin(z))\Big|_{z=0} = \frac{1}{5!}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من مفكوك لوران.

مثال 11 . باستخدام العلاقة (36 – 11) احسب باقي الدالة $\frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}$.

الحل : للدالة قطب من الرتبة m = 2 عند z = π . من العلاقة (36 – 11) نضع n = 2 فنجد أن :

$$a_{-1} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{dz}\left[(z-\pi)^2 \cdot \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}\right]_{z=\pi}$$

$$a_{-1} = \frac{d}{dz} \cdot \cos(z)\Big|_{z=\pi} = 0$$

باقي الدالة عند هذا القطب يساوي الصفر.

11 – 7 نظرية البواقي

وجدنا سابقا أن مفكوك لوران للدالة f(z) يعطى بالعلاقة (31 – 11). بمكاملة هذه العلاقة كل حد على حدة على مسار مغلق بحيث تكون جميع الأقطاب داخل هذا المسار، نجد أن:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n dz$$

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C (z-b)^n dz \qquad (11-37)$$

لحساب هذا التكامل نضع : $z-b=re^{i\theta}$ ، ومنه $dz=ire^{i\theta}d\theta$.

وبذلك فإن:

$$\oint_C f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\int_0^{2\pi}\left[re^{i\theta}\right]^{n+1}id\theta$$

حيث n عدد صحيح وهذا التكامل يساوي الصفر لجميع قيم n ما عدا n = -1 وذلك لأن الدالة الأسية تساوي 1 للقيم 0 أو مضاعفات 2π.

وعندما n = -1

$$\oint_C f(z)dz=a_{-1}\int_0^{2\pi}id\theta$$

وبالمكاملة على θ بين 0 و 2π فإن:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i a_{-1} \qquad (11-38)$$

حيث a_{-1} باقي الدالة عند z = b. تنص هذه العلاقة على أن تكامل دالة مركبة f(z) على مسار C مغلق يساوي 2πi مضروباً في باقي الدالة عند b.

وإذا كان للدالة أكثر من قطب فإنه يمكن تعميم هذه العلاقة ليشمل الباقي عند جميع الأقطاب: فإذا رمزنا بالباقي عند أحد الأقطاب بالرمز R_j فإن باقي الدالة هو مجموع البواقي عند هذه الأقطاب ويكون:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_j R_j \qquad (11-39)$$

حيث يسري الجمع على جميع الأقطاب داخل المسار المغلق C. تعرف هذه الصيغة بنظرية البواقي.

فإذا أمكن حساب الكميات R_j أمكن بسهولة حساب التكاملات من النوع (39 – 11)، ويمكن باستخدام الطرق السابقة حساب بواقي الدالة f(z).

وإذا كانت الدالة تحليلية بحيث لا تحتوي على أي قطب بداخلها فإن R = 0 والطرف الأيمن في (39 – 11) يؤول إلى علاقة كوشي الأولى (17 – 11). وسوف نستخدم العلاقة (17 – 11) لحساب تكاملات كما توضح الأمثلة التالية.

1 – تكاملات من النوع : $\int_0^{2\pi} d\theta F(\cos\theta, \sin\theta)$

في هذا النوع من التكاملات نستخدم التعويض $z = e^{i\theta}$ ومنه

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

كما يوضح المثال التالي.

مثال 12 :

احسب التكامل: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\cos\theta}$

الحل:

لحساب هذا التكامل نحول إلى تكامل في المستوى المركب ثم نستخدم نظرية البواقي

وذلك بوضع: $z = e^{i\theta}$

و

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\cos\theta} = \oint_C \frac{dz}{iz} \frac{1}{5 - 3 \times \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$$

$$I = 2i \oint_C \frac{dz}{\left(3z^2 - 10z + 3\right)}$$

حيث C منحني مغلق. والمنحني المناسب لحساب هذا التكامل هو الدائـــرة $|z| = 1$ نصف قطرها الوحدة باتجاه عكس عقارب الساعة كما في الشكل .

بتبسيط المقام في التكامل نجد أن:

$$I=\frac{2i}{3}\oint_C \frac{dz}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

ويتضح من هذا أن للدالة المكامل عليها قطبين عند z =3 و $z=1/3$ ومن نظرية البواقي فإن قيمة التكامل هي:

$$I=2\pi i\times\left(\sum_i R_i\right)$$

حيث R_i باقي الدالة عند الأقطاب داخل المنحنى المغلق (الكنتور). القطب $z=3$ يقع خارج المنحنى $|z|=1$ بينما القطب z=1/3 داخله. ولذلك فإن القطب الذي يساهم في حساب الباقي هو z=1/3 لأنه داخل C. أما القطب الأول فيستبعد. إذاً:

$$\sum_i R_i=R(1/3)$$

$$\sum_i R_i=\left(z-\frac{1}{3}\right)\cdot\left.\frac{2i/3}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\right|_{z=\frac{1}{3}}$$

$$\sum_i R_i=-\frac{2}{8}i$$

وبالتالي:

$$I=2\pi i\times-\frac{2}{8}i=\frac{\pi}{2}$$

2 – التكاملات من النوع : $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$

نستخدم لهذه التكاملات التعويض

$$x = \mathrm{Re}^{i\theta}$$

ثم نختار منحنى مغلقا بحيث يشمل محور x ويمتد من ∞- إلى ∞+. وعادة ما يكون هذا المنحنى نصف دائرة نصف قطرها R كما يوضح المثال التالي.

مثال 13. احسب قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \qquad .\ a > 0$$

الحل : لحساب هذا التكامل نحول x إلى المتغير المركب z حيث $z = \mathrm{Re}^{i\theta}$ ثم نختار منحنى (كنتوراً) يحوي المحور x ويكون مغلقاً كما في الشكل .

يتكون المنحنى المغلق من الجزء الممتد على محور x بين R - و R + ومن نصف الدائرة على الجزء العلوي لمحور y.

وبنفس الطريقة يمكن أن نختار الجزء السفلي لمحور y لجعل المنحنى مغلقاً وسوف يعطي هذا نفس النتيجة. التكامل المطلوب هو:

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^2 + a^2} = \oint_C \frac{dz}{(z - ai)(z + ai)}$$

ولهذا التكامل قطبان هما ai + في النصف العلوي و ai - في النصف السفلي. فـــإذا اخترنا النصف العلوي لمحور y كان للدالة قطب واحد داخل C هـــو ai + بينمـــا القطب الآخر خارجه والعكس صحيح.

وحسب المنحنى C الموضح فإن قيمة التكامل هي:

$$I = 2\pi i \times R(ai)$$

حيث $R(ai)$ باقي الدالة عند القطب ai ويساوي:

$$R(ai) = (z - ai)\frac{1}{(z-ai)(z+ai)}\bigg|_{z=ai} = \frac{1}{2ai}$$

$$I = \oint \frac{dz}{z^2 + a^2} = 2\pi i \times \frac{1}{2ai} = \frac{\pi}{a}$$

وهذا التكامل المركب يشمل التكامل على المحور x بيـــن R - و R + والنصـــف العلوي للدائرة الموضحة. وبذلك نستطيع أن نكتب:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+a^2}$$

حيث يعني التكامل الثاني التكامل على المنحنى المفتوح γ. وعلى هذا الجزء فـــإن $z = Re^{i\theta}$. أما التكامل الأول على x فإن z = x والتكامل ممتد من R - إلى R +.

التكامل الأول هو التكامل المطلوب حسابه عندما $R \to \infty$.

لمعرفة قيمة التكامل الثاني نضع $z = Re^{i\theta}$ فنجد:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+a^2} = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{R^2 e^{2i\theta} + a^2}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{R^2 e^{2i\theta}} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^{\pi} ie^{-i\theta} d\theta$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{R}\int_0^{\pi} ie^{-i\theta} d\theta \to 0 \qquad\qquad R \to \infty$$

وهذا يعني أن التكامل الثاني يؤول إلى الصفر عندما $R \to \infty$ وبذلك فإن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x^2+a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$$

وهو التكامل المطلوب.

لاحظ من هذا النوع من التكاملات فإن التكامل على نصف الدائرة يؤول إلى الصفر عندما $R \to \infty$ وسوف نستخدم هذا مراراً. وهذه النتيجة هي فحوى نظرية في دوال المتغير المركب هي نظرية جوردان * (Jordan).

مثال 14: احسب قيمة التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{x^2+a^2} dx$$

الحل : الدالة cos(x) هي الجزء الحقيقي من الدالة الأسية e^{ix} والتكامل I هو الجزء الحقيقي للتكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx$$

وهذا التكامل يمكن تحويله إلى تكامل مركب في المستوى z المركب على المسار C:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz$$

حيث C منحنى مغلق.

لتحديد هذا المنحني نلاحظ أن التكامل معرف حتى عندما تكون z كبيرة جداً. وعندما نضع $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix} \cdot e^{-y}$ نلاحظ أن الجزء السفلي للمحور y يجعل هذه الدالة تؤول إلى ما لانهاية (y سالبة) وبالتالي يتباعد وهذا غير صحيح.

---

* انظر مثلا : Mathematical Methods for Physicists , G. Arfken , Academic Press, 1985 .

أما إذا أخذنا الجزء العلوي للمحور y ليكون المنحنى مغلقاً فإن الدالة تتناقص أســـياً ولكنها معرفة. ولذلك فإن المنحنى C المطلوب هـــو المنحنـــي الموضـــح بالشـــكل المرافق في النصف العلوي للمحور y.

وعلى هذا فلتكامل المركب قطبان هما $\pm ai$. القطب ai داخـــل المنحـــنى C و ai- خارجه. وباقي الدالة عند القطب ai الموجود داخل C هو:

$$R(ai)=\frac{e^{i(ai)}}{2ai}=\frac{e^{-a}}{2ai}$$

وقيمة التكامل على z هي:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz=2\pi i\cdot R(ai)=\frac{\pi}{a}e^{-a}$$

وكما ذكرنا في المثال السابق فإن التكامل على النصف العلوي يساوي الصفر مـــن نظرية جوردان. والتكامل المطلوب هو الجزء الحقيقي للتكامل أعلاه أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)}{x^2+a^2}dx=Re\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-a}$$

حيث تعني Re الجزء الحقيقي . وكنتيجة لذلك يمكن أن نستنتج أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin(x)}{x^2+a^2}dx=0$$

مثال 15 . احسب قيمة التكامل

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

الحل : حيث أن الدالة تحت التكامل زوجية فإن التكامل المطلوب هو

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

والتكامل المركب المناظر هو

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{\sin(z)}{z} dz$$

حيث C منحنى مغلق . ولحساب هذا التكامل نكتبه بالصورة:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\int \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i}\int \frac{e^{-iz}}{z} dz\right]$$

والتكاملات المطلوبة هي:

$$I_1 = \frac{1}{4i}\oint \frac{e^{iz}}{z} dz \qquad ; \qquad I_2 = \frac{-1}{4i}\oint \frac{e^{-iz}}{z} dz$$

ولكل منهما قطب عند $z = 0$.

لحساب التكامل عند I_1 نختار المنحني C_1 كالموضح بالشكل المرافق بحيث نتفـــادى القطب $z = 0$ عن طريق شق القناة وذلك بعمل دائرة حول $z = 0$ نصف قطرها r.

وبذلك فإن القطب $z = 0$ يقع خارج المنحني C_1 ومن نظرية كوشي الأولى التكامل I_1 يساوي الصفر، $I_1 = 0$.

في التكامل I_2 نختار المنحني C_2 بحيث يكون القطب $z = 0$ داخله والمنحني C_2 يقع في النصف السفلي من المحور y (انظر المثال 14).

وحيث أن اتجاه المنحنى C_2 بعكس عقارب الساعة فإن:

$$I_2 = (-)2\pi i R(0)$$
$$I_2 = -2\pi i\left(\frac{-1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$$

وبذلك فالتكامل $I = \pi/2$.

وباستخدام نتيجة نظرية جوردان فإن التكامل على نصف الدائرة يساوي الصفر.

والتكامل المطلوب هو:

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2} .$$

المعادلات التفاضلية الجزئية

$1 \to 8$

10 ـ 1 مقدمة

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية من الوسائل المهمة في وصف الظواهر الفيزيائية ونذكر على سبيل المثال:

أ ـ معادلة انتشار الأمواج $\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

حيث تصف الدالة $\psi(x, y, z, t)$ انتشار الموجة.

ب ـ معادلة انتشار الحرارة في بعد واحد $\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حيث تمثل الدالة $u(x, t)$ درجة الحرارة وK ثابت.

جـ ـ معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ حيث يمكن أن تكون $u(x, y, z)$ جهد الجذب العام في منطقة ليس فيها كتل أو الجهد الكهربائي في منطقة ليس فيها شحنات أو درجة الحرارة لجسم في حالة توازن حراري في منطقة ليس فيها منابع حرارية.

د ـ معادلة شرودنجر $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$

حيث $\psi(x, y, z, t)$ الدالة الموجبة التي تصف الجسيم و $\hat{H}$ مؤثر هاملتون يحتوي على المؤثرات $\frac{\partial}{\partial x}$ ، $\frac{\partial}{\partial y}$ ، $\frac{\partial}{\partial z}$ وغيرها.

وسوف نقوم بحل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية في هذا الفصل باتباع طريقة فصل المتغيرات وستكون جميع المعادلات خطية ولن تكون رتبتها أعلى من اثنين وسنقوم أولاً بتصنيف المعادلات التفاضلية الخطية الجزئية من الرتبة الثانية وسنهتم أولاً بالمعادلات التي لها متغيرين فقط.

10 ــ 2 المعادلات التفاضلية الخطية الجزئية من الرتبة الثانية

الشكل العام لهذه المعادلة هو

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x,y) \qquad (10-1)$$

حيث

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ , \ u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \ , \ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \ u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

وتسمى المعادلة متجانسة إذا كانت $G(x , y) \equiv 0$ وغير متجانسة عدا ذلك.

وعادة ما تكون A , B , C , D , E , F دوال في y , x.

ومن المعادلات المعروفة

أ ــ معادلة لابلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ب ــ معادلة انتشار الأمواج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

جـ ــ معادلة بواسون $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(x,y)$

ولا يتم الحديث عند إيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية عن الحل العام كما هو الحال في المعادلات التفاضلية العادية وإنما يتم إيجاد الحل لشروط حدية معينة.

10 ــ 3 الخاصية الخطية وتداخل الحلول

من غير الممكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية ولذا من المهم إيجاد وسيلة تساعد في تركيب الحل المطلوب من الحلول المعروفة وبالنسبة للمعادلات المتجانسة فإن مبدأ تركيب (تداخل) الحلول يمثل وسيلة مهمة لهذا الغرض.

مبدأ تداخل الحلول

إذا كانت $u_1 , u_2 , u_3 , \ldots\ldots u_n$ حلولا للمعادلة التفاضلية الخطية الجزئية المتجانسة من الرتبة الثانية فإن:

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \ldots\ldots + c_nu_n$$

الدالة على يسار إشارة المساواة في العلاقة (4 – 10) دالة في x فقط والدالة علـــى يمينها دالة في y فقط وهما متساويتان لكل قيم x و y وهذا ممكن فقط إذا كان كــل منهما يساوي ثابتا وليكن k. ومنه نحصل على المعادلتين التفاضليتين العاديتين:

$$\frac{\hat{H}_1(x)u_1(x)}{u_1(x)} = k \quad , \qquad (10-5\ a,b)$$

$$\frac{\hat{H}_2(y)u_2(y)}{u_2(y)} = -k$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على حل المعادلة (4 – 10).

هذا ويمكن اتباع نفس الطريقة إذا كانت المعادلة من الشكل

$$\hat{H}_1(x)u(x,y) + \hat{H}_2(y)u(x,y) = G_1(x) + G_2(y)$$

مثال 2 . أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

الحل :

المؤثر $c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ يؤثر فقط على المتغير x والمؤثر $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ يؤثر فقط على المتغير t

ومنه فإنه يمكن كتابة الحل $u(x , t)$ بالشكل:

$$u(x , t) = u_1(x)\, u_2(t)$$

وبالتعويض في المعادلة والقسمة على $u_1\, u_2$ نجد

$$\frac{1}{u_1(x)}c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{u_2(t)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = const$$

وباختيار الثابت ليكون $-\omega^2$ نحصل على المعادلتين

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}u_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 u_2 = 0$$

وباستخدام الحلول

$$u_1 = e^{\pm i\frac{\omega}{c}x}$$
$$u_2 = e^{\pm i\omega t}$$

نجد أن حلول المعادلة هي:

$$u = \begin{cases} e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}x} \\ e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c}x} \\ e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}x} \\ e^{-i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c}x} \end{cases}$$

والحل بالطبع هو تداخل من هذه الحلول.

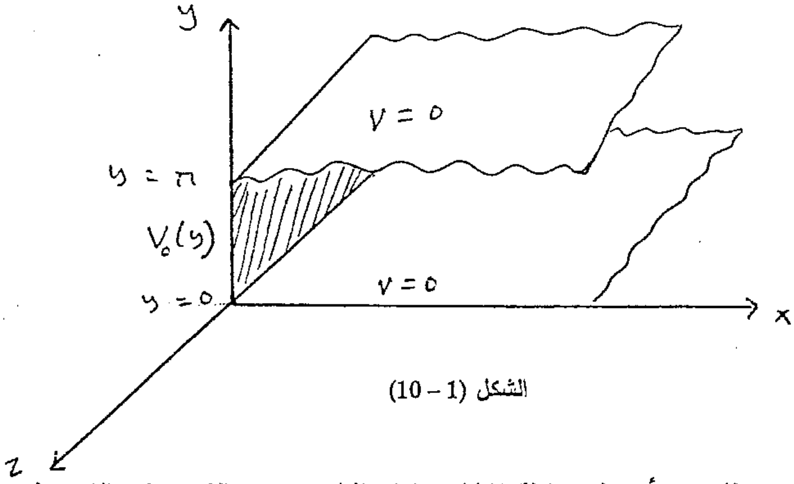
10 ـ 5 تطبيقات على استخدام طريقة فصل المتغيرات

10-5-1 الجهد الكهربائي بين صفيحتين معدنيتين متوازيتين

ليكن الجهد الكهربائي (شكل 10-1) للصفيحتين المعدنيتين المتوازيتين اللانهائيتين عند المستوى $y = 0$ والمستوى $y = \pi$ والموازيان للمستوى z – x يساوي صفرا (جهد الأرض). الصفيحتان موصولتان عند $x = 0$ بشريط معدني جهده الكهربائي $V_o(y)$.

والمطلوب إيجاد الجهد الكهربائي داخل المجال المحصور بين الصفيحتين.

الحل : بما أن الجهد الكهربائي على الصفيحتين ثابت (يساوي الصفر) وعلى الشريط المعدني دالة في y فقط فإن الجهد الكهربائي بين الصفيحتين لا يعتمد على



الشكل (1 – 10)

المتغير z. وهذا يعني أن حل معادلة لابلاس بالإحداثيات x و y الذي يحقق الشروط الحدية المعطاة يعطي الجهد المطلوب.

وعندئذ فإن معادلة لابلاس هي

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (10-6)$$

والشروط الحدية هي

أ ـــ عند $y = 0$ تكون $V = 0$.

ب ـــ عند $y = \pi$ تكون $V = 0$.

جـ ـــ عند $x = 0$ و $0 < y < \pi$ تكون $V = V_0(y)$.

د ـــ عند $x \to \infty$ تكون $V = 0$ لأن الجهد الكهربائي عند ∞ يساوي صفرا.

حسب طريقة فصل المتغيرات فإن

$$V(x, y) = X(x)\, Y(y)$$

ومنه فإن

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad (10-7)$$

بقسمة المعادلة (7 – 10) على X Y نحصل على

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

أو

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \qquad (10-8)$$

بالنظر إلى المعادلة (8 – 10) نرى أن الطرف الأيمن دالة في y فقط وأن الطرف الأيسر دالة في x فقط وهما متساويان لكل قيم y و x وهذا ممكن فقط إذا كان كل منهما يساوي ثابتاً. ولو لم يكن الأمر كذلك، كأن تكون الدالة Y تتغير مع y والدالة X تتغير قيمتها مع قيمة x، فإنه باختيار قيمة معينة لأحد المتغيرين x أو y وترك الآخر يتغير فإن الدالة المتعلقة بالمتغير تتغير قيمتها وتبقى الدالة الأخرى ثابتة وهذا يتعارض مع المعادلة (8 – 10) . ولذا فإن كلا منهما يجب أن يكون مساوياً لنفس الثابت وليكن α ، أي أن

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\alpha$$

وبذا فإن

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\alpha \qquad (10-9)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\alpha \qquad (10-10)$$

وحل المعادلة (9 – 10) هو

$$e^{-\sqrt{\alpha}x} \quad \text{أو} \quad e^{\sqrt{\alpha}x}$$

وحل المعادلة (10 – 10) هو

$$\cos\sqrt{\alpha}y \quad \text{أو} \quad \sin\sqrt{\alpha}y$$

أي أن الحلول الممكنة هي

$$XY=\begin{cases}\sin\sqrt{\alpha}\,ye^{\sqrt{\alpha}x}\\ \sin\sqrt{\alpha}\,ye^{-\sqrt{\alpha}x}\\ \cos\sqrt{\alpha}\,ye^{\sqrt{\alpha}x}\\ \cos\sqrt{\alpha}\,ye^{-\sqrt{\alpha}x}\end{cases}$$

ولتفادي ظهور الجذر سنضع $\alpha = k^2$ فتصبح الحلول

$$XY = \begin{cases} \sin ky e^{kx} \\ \sin ky e^{-kx} \\ \cos ky e^{kx} \\ \cos ky e^{-kx} \end{cases}$$

ولا تحقق هذه الحلول الممكنة جميعها الشروط الحدية المعطاة . ونبحث فيما يلـي أي منها يحقق الشروط المطلوبة.

1 ــ الحلان $e^{-kx}\cos ky , e^{kx}\cos ky$ لا يحققان الشرط $V(y = 0) = 0$ لأن أي منهما لا يساوي صفرا عند $y = 0$ ، ولكن الحليـــن $e^{-kx}\sin ky , e^{kx}\sin ky$ يحققان هذا الشرط .

2 ــ عند $x \to \infty$ يجب أن تكون $V \to 0$ ولا يحقق الحل $e^{ky}\sin kx$ هذا الشـــرط ولكن يحققه الحل $e^{-kx}\sin ky$. وهذا يعني أن الحل $e^{-kx}\sin ky$ يحقق الشـــرطين الأول والثاني. أي أن

$$V(x,y) = Ce^{-kx}\sin ky \qquad .(10-11)$$

3 ــ الشرط $V(y = \pi) = 0$ يجب تحقيقه أيضاً.

بالتعويض في $(10-11)$ عن $y = \pi$ نحصل على

$$V(x, y = \pi) = C\sin k\pi e^{-kx} = 0$$

ومنه ينتج أن $\sin k\pi = 0$ لأن $e^{-kx} \neq 0$ لأي قيمة x ولأن $C \neq 0$ ، لأنه إذا كـــانت $C = 0$ فإن $V = 0$ لأي قيمة x و y وهو غير صحيح فيزيائياً.

إن $\sin k\pi = 0$ يعني أن k عدد صحيح محدد بالقيم

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots \qquad (10-12)$$

وهذا يعني أن هناك العديد من الحلول

$$V_1 = C_1 e^{-k_1 x}\sin k_1 y , \quad V_2 = C_2 e^{-k_2 x}\sin k_2 y , \quad V_3 = C_3 e^{-k_3 x}\sin k_3 y$$

$$V_4 = C_4 e^{-k_4 x}\sin k_4 y$$

4 ــ الشرط $V(x = 0 , y) = V_0(y)$ للقيم $0 < y < \pi$.

نلاحظ أن الحل (11 – 10) لا يمكن أن يحقق هذا الشرط لأي قيمة k. ولكن بما أن هناك العديد من الحلول وكل منها يحقق الشروط الحدية ما عدا الشرط (4) وكذلك أي تداخل منها يحقق هذه الشروط ويحقق أيضاً معادلة لابلاس الخطية المتجانسة فإنه يمكن كتابة الحل الذي يحقق جميع الشروط بالشكل:

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-kx}\sin ky \qquad (10-13)$$

و $(k = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots)$ ثوابت مطلوب حسابها.

لإيجاد قيم C_k نضع $x = 0$ في العلاقة (13 – 10) فنحصل على

$$V(0,y)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin ky = V_0(y) \qquad (10-14)$$

بالنظر إلى المتسلسلة (14 – 10) نلاحظ إنها عبارة عن مفكوك فورييه للدالة $V_0(y)$ و C_k معاملات فورييه لها. ومن الفصل الخامس لإيجاد C_k نضرب طرفي العلاقة (14 – 10) بالدالة $\sin ny$ ونكامل من 0 إلى π فنحصل على

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_0^{\pi} \sin ky \sin ny dy = \int_0^{\pi} V_0(y)\sin ny dy$$

وباستخدام العلاقة

$$\int_0^{\pi} \sin ky \sin ny dy = \delta_{nk}\frac{\pi}{2}$$

نحصل على

$$C_n \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} V_0(y)\sin ny dy$$

ومنه

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V_0(y)\sin ny dy \qquad (10-15)$$

وتكون المتسلسلة

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-kx}\sin ky$$

هي الحل الذي يحقق الشروط المطلوبة. لتوضيح استخدام المتسلسلة نفترض أن: $V_0(y) = V_0$ (وهذا يعني يجب أن يكون الشريط معزولاً عن الصفيحتين المتصلتين بالأرض). وتكون حسب العلاقة (15 – 10):

$$C_n = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^\pi \sin ny dy = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{زوجي} \quad n \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{فردي} \quad n \end{cases}$$

ومنه فإن الجهد هو

$$(10-16) \qquad V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{k\ \text{فردي}}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-kx}\sin ky$$

ومجموع المتسلسلة في العلاقة (16 – 10) يعطى بالشكل

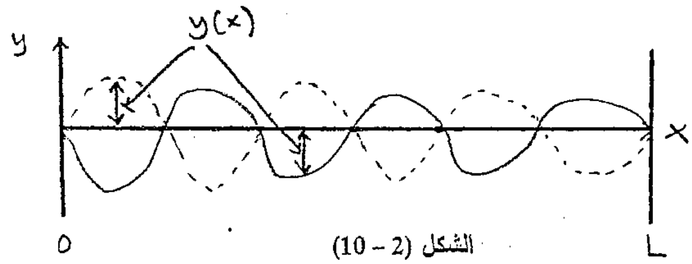
$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\sin y}{\sin nx}\right).$$

10–5–2 معادلة انتشار الأمواج في وتر مهتز

عندما يهتز وتر مشدود طوله L ومثبت الطرفين فإنه يبتعد عن وضع توازنه ولا تبتعد أجزاؤه نفس المسافة y عن وضع التوازن وإنما تكون أبعادها مختلفة ونصف ذلك مع الأخذ بعين الاعتبار أنه أثناء الاهتزازة تتغير الإزاحة أيضاً مع الزمن بكتابة y دالة من x ومن الزمن t. ويمكن أن يهتز الوتر بطريقتين:

أ ــ بإزاحته عن وضع التوازن وتركه يهتز.

ب ــ بضربه في مكان ما بحيث يتم إعطاءه سرعة معينة.



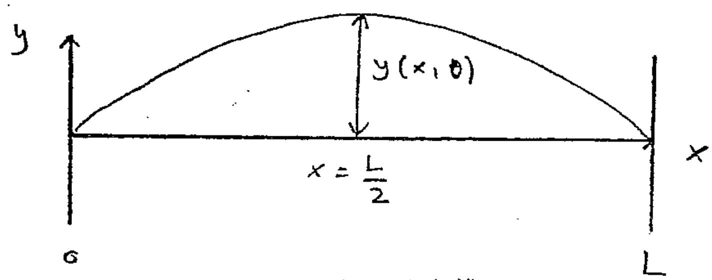
الشكل (2 – 10)

فيما يلي سوف نفترض إن الإزاحة y ومشتقتها $\frac{\partial y}{\partial t}$ ،والتي تمثل سـرعة حركـة الجزء dx من الوتر عند المكان x ، صغيرتان.

الدالة $y(x, t)$ تحقق معادلة انتشار الأمواج

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (10-17)$$

حيث υ سرعة انتشار الموجة في الوتر وهي ترتبط بقوة الشد في الوتـر وبالكثافـة الخطية لمادة الوتر. سوف (١) نفترض أنه تم إزاحة الوتر في بداية الحركة وترك يـهتز بحيث تكون أكبر إزاحة في وسط الوتر (عند $L/2$) كما في شكل (3 – 10).



الشكل (3 – 10)

والمطلوب هو إيجاد الدالة $y(x, t)$ التي تعطي الإزاحة عند المكـان x والزمـن t وتحقق أيضاً الشرط $y(x, t=0) = y_0 = f(x)$ ، و $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$.

لحل المعادلة (17 – 10) نستخدم طريقة فصل المتغيرات ونكتب:

$$y(x, t) = X(x)\,T(t)$$

بالتعويض والقسمة على X T نحصل على

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2T}{Tdt^2}=-k^2$$

أو

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k^2X=0 \qquad (10-18a)$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+k^2\upsilon^2=0 \qquad (10-18b)$$

وتكون الحلول هي

$$X=\begin{cases}\sin kx\\ \cos kx\end{cases} \quad \text{و} \quad T=\begin{cases}\sin k\upsilon t\\ \cos k\upsilon t\end{cases}$$

وباستخدام العلاقات $\upsilon=\lambda\nu$ و $\omega=2\pi\nu$ و $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi\nu}{\upsilon}=\frac{\omega}{\upsilon}$

نجد أن:

$\omega = k\upsilon$

$$y=\begin{cases}\sin kx\ \sin\omega t\\ \sin kx\ \cos\omega t\\ \cos kx\ \sin\omega t\\ \cos kx\ \cos\omega t\end{cases} \qquad (10-19)$$

لا تحقق الحلول المعطاة في (19 – 10) الشروط الابتدائية الخاصة بالوتر وفيما يلي سنختار الحلول التي تحقق الشروط:

أ ـــ عن كون الوتر مثبت الطرفين ينتج أن: $y(x=0\ ,\ t)=0$ وكذلك $y(x=L\ ,\ t)=0$.

من الشرط $y(x=0\ ,\ t)=0$ نرى أن الحل المناسب هو:

$\sin kx\ \cos\omega t$ أو $\sin kx\ \sin\omega t$ لأن كلا منهما يساوي الصفر عندما تكون $x=0$ وعند أي زمن t.

ومن الشرط $y(x=L\ ,\ t)=0$ ينتج للحلين أن: $\sin kL=0$.

ويعني هذا أن: $kL=n\pi$ لأن $\sin n\pi=0$, $n=1\ ,2\ ,3\ ,\ \ldots\ldots.$

ب ـــ الشرط $y(x\ ,\ t=0)=f(x)$ وكذلك واقع الأمر أن سرعة جزيئات الوتر $u=\frac{\partial y}{\partial t}=0$ عند الزمن $t=0$ تعني أن الحل المناسب هو: $y=\sin kx\ \cos\omega t$

لأن:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=-\omega\sin kx\ \sin\omega t\big|_{t=0}=0$$

بينما لا يحقق الحل $y = \sin kx \sin\omega t$ هذا الشرط لأن:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega \sin kx \cos \omega t\big|_{t=0} = \omega \sin kx$$

$\frac{\partial y}{\partial t}$ لا تساوي الصفر لكل قيم x ولذا فإن الحل الذي يحقق $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ عند $t = 0$ هو:

$$y = \sin kx \cos\omega t$$

ولكي يحقق الحل الشرط $y(x , t = 0) = f(x)$

نأخذ بعين الاعتبار أن:

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{و} \quad n = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots$$

ونكتب $y(x , t)$ بالشكل:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \ \cos\frac{n\pi}{L}\upsilon t \qquad (10-20)$$

ونحدد المعاملات b_n من الشرط:

$$y(x,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x)$$

ومن العلاقة:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx$$

حيث $f(x)$ الدالة المعطاة في الشكل $(10-3)$.

ونجد:

$$y(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi}{L}x \cos\frac{\pi}{L}\upsilon t - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{L}x \cos\frac{3\pi\upsilon}{L}t + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi}{L}x \cos\frac{5\pi\upsilon}{L}t + \ldots\ldots\ldots\ldots\right) \qquad (10-21)$$

وهو الحل الذي يحقق الشروط البدائية المعطاة.

(٢) أما إذا اهتز الوتر بضربه في مكان ما فإن هذا يعني أنه قد تم إعطاء أجزائه سـرعة بدائية $u(x, t=0) = u_0(x)$ وأصبح الشرط الخاص بالإزاحة $y(x, t=0) = 0$ وفي هذه الحالة يكون الحل: $y = \sin kx \sin k\upsilon t$ هو المناسب لأنه:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = k\upsilon \sin kx \cos k\upsilon t\big|_{t=0} = k\upsilon \sin kx$$

والحل الذي يحقق جميع الشروط الحدية هو:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{n\pi}{L}\upsilon \cdot t$$

ويتم إيجاد C_n من الشرط:

$$u(x, t=0) = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{c_n}{\cancel{C_n}} \frac{n\pi}{L}\upsilon \sin\frac{n\pi}{L}x = u_0(x)$$

$$u(x, t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

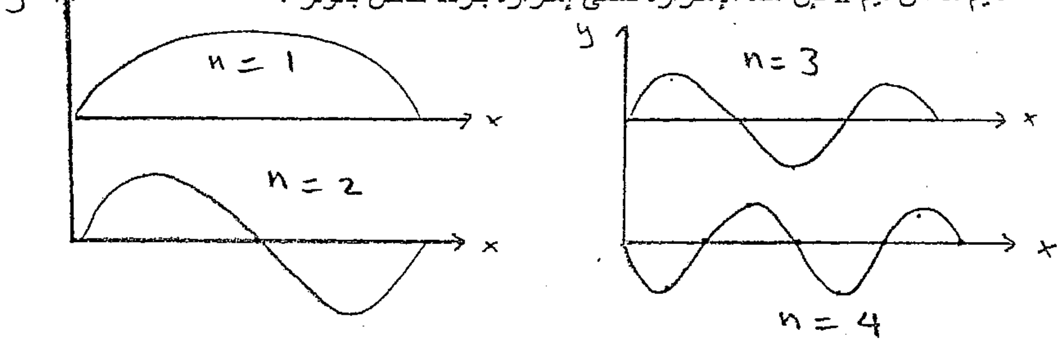
حيث:

$$C_n = c_n\frac{n\pi}{L}\upsilon = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

(3) إذا اهتز الوتر بحيث يصف أحد الحلين:

$$y_2 = A_2 \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{n\pi}{L}\upsilon t \qquad ، \qquad y_1 = A_1 \sin\frac{n\pi}{L}x \cos\frac{n\pi}{L}\upsilon t$$

لقيم ما من قيم n فإن هذه الإهتزازة تسمى إهتزازة بتردد خاص بالوتر .



الشكل (4 – 10)

لنفترض أن y_1 هو الحل الذي يصف الاهتزازة فتكون $cos\frac{n\pi}{L}\upsilon t$ تساوي 1 عنـــد زمن ما ويكون شكل الوتر كما هو مبين في الشكل (4 – 10) حسب قيمة n.

وتهتز في هذه الحالة أي نقطة من الوتر بالتردد $\nu_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n = \frac{n\upsilon}{2L}$ وتسمى هـــذه الترددات "نغمات الوتر" و $\nu_1 = \frac{\upsilon}{2L}$ تسمى النغمة الأساسية.

10–5–3 توزيع درجة الحرارة المستقر في أسطوانة

لدينا أسطوانة مصمتة نصف قطرها r = 1 وارتفاعها مـــن z = 0 إلـــى z → ∞ (نصف لا نهائية) ودرجة الحرارة على محيطها T = 0 وعلى قاعدتها T = 100°C ونود إيجاد توزيع درجة الحرارة المستقر داخل الأسطوانة.

يوصف توزيع درجة الحرارة المستقر بواسطة معادلة لابلاس:

$$\nabla^2 T = 0$$

ومن المناسب في هذا المثال كتابتها بالإحداثيات الأسطوانية r , θ , z فتكون:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad (10-21)$$

ولإيجاد توزيع درجة الحرارة المطلوب يجب حل المعادلة (21 – 10) واختيار الحل الذي يحقق الشروط الحدية التالية:

أ ــ $T(r = 1 , \theta ,z) = 0$

ب ــ $T(r , \theta ,z = 0) = 100$

نحل المعادلة (21 – 10) بطريقة فصل المتغيرات ونكتب:

$$T(r , \theta ,z) = Y(r , \theta)\, Z(z)$$

بالتعويض والقسمة على $Y\,Z$ نحصل على

الشكل (10 – 5)

$$-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Y}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}\right]=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \qquad (10-22)$$

وبما أن الحد على يمين العلاقة (22 – 10) دالة من z فقط وعلى يمينها دالة من θ , r لكل قيم z , r , θ فإن كلا منهما يجب أن يساوي ثابتا ويكون $-k^2$ فنحصل على:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}=k^2$$

وحل هذه المعادلة هو

$$Z=\begin{cases} e^{kz} \\ e^{-kz} \end{cases}$$

والحل المناسب فيزيائياً هو e^{-kz} لأن T يجب أن تؤول إلى الصفر عنـــد $z \to \infty$ وأن لا تنمو إلى ما لا نهاية.

كما نحصل على المعادلة:

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right)+\frac{1}{Y}\frac{1}{r^2}\frac{d^2Y}{d\theta^2}+k^2=0 \qquad (10-23)$$

التي نكتب حلها بالشكل :

$$Y(r, \theta)=R(r)\,\Theta(\theta)$$

وبالتعويض في المعادلة والقسمة على R , Θ ثم الضرب في r^2 وإعادة الترتيب نحصل على :

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} \qquad (10-24)$$

نختار ثابت الفصل ليكون n^2 في العلاقة (24 – 10) فنجد أن:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-n^2$$

ومنه فإن:

$$\Theta(\theta)=\begin{cases}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{cases}$$

ويجب أن تكون n عدد صحيح لأن θ زاوية لا يؤدي تغييرها بمقدار 2π إلى أي تغيير في درجة الحرارة أي أن:

$$\sin n(\theta+2\pi)=\sin n\theta$$

وعليه فإن: $2\pi\, n$ يجب أن تكون عددا صحيحا من 2π أي

$$n=0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,\ldots\ldots$$

وبما أن درجة الحرارة في قاعدة الأسطوانة لا تتغير مع الزاوية θ فإن القيمة المناسبة هي $n=0$ عند الدالة $\cos n\theta$ وهذا يعطي $\Theta(0)=1$ (أو $\Theta(0)=\text{const}$).

أما المعادلة الخاصة بالمتغير r فهي :

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-n^2+k^2r^2=0$$

الشكل (6 – 10)

أو

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2r^2-n^2\right)R=0 \qquad (10-25)$$

وهذه المعادلة هي معادلة بيسل التي نقشناها في الفصل السابق وحلولـــها هـــي دوال بيسل $N_n(kr)$ و $J_n(kr)$. وبسبب كون قاعدة الأسطوانة تحتوي على نقطة الأصل $r = 0$ ودرجة الحرارة هناك نهائية فلا يمكننا استخدام الدوال $N_n(kr)$ لأنها تنتـــهي إلى ما لا نهاية عند $r \to 0$ وبذلك فإن الحل الوحيد هو:

$$R(r) = J_n(kr)$$

والحل المطلوب يجب أن يحقق الشرط :

$$R(r = 1) = 0$$

أي:

$$R(r = 1) = J_n(k) = 0$$

وعند إيجاد الدالة $\Theta(\theta)$ وجدنا أن : $n = 0$ وهذا يعني بالنسبة للدالة $R(r)$ أن:

$$R(r) = J_0(kr)$$

والشرط الحدي $R(r = 1) = 0$ يعني أن:

$$J_0(k) = 0 \qquad (10-26)$$

وهذه العلاقة تحدد قيم k على أنها النقاط الصفرية أو جذور الدالة $J_0(x)$. وهكـــذا فإن الحل هو:

$$T = e^{-kz}\ J_0(kr)$$

وبما أنه يجب تحقيق الشرط $T\ (r\ ,\ \theta\ ,\ z = 0) = 100$ فنكتب الحل بالشكل:

$$T(r,\theta,z)=\sum_{m=1}^{\infty}C_mJ_0\left(k_mr\right)e^{-k_m\cdot z} \qquad (10-27)$$

حيث k_m النقاط الصفرية للدالة $J_0(x)$ المعرفة بالعلاقة $(10-26)$. وبالتعويض عن $z = 0$ في العلاقة $(10-27)$ نحصل على:

$$T(r,\theta,z=0)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m J_0(k_m r)=100 \qquad (10-28)$$

لإيجاد الثوابت C_m في العلاقة (28 – 10) نستخدم خاصية التعـــامد لـــدوال بيســـل (الفصل السابق) فنضرب طرفي العلاقة (28 – 10) بدالة بيسل $J_0(k_n r)$ وبالكميـــة r ونكامل من 0 إلى 1 فنجصل على:

$$C_n\int_0^1 r[J_0(k_n r)]^2 dr=\int_0^1 100 r J_0(k_n r)dr$$

وباستخدام الخواص التالية لدوال بيسل نحصل على قيمة C_n:

أ ـــ $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)$

ب ـــ $\int_0^1 r[J_0(k_n r)]^2 dr=\frac{1}{2}J_1^2(k_n)$

ومنه

$$\int_0^1 rJ_0(k_n r)dr=\frac{1}{k_n}rJ_1(k_n r)\Big|_0^1=\frac{1}{k_n}J_1(k_n)$$

و

$$C_n=\frac{100J_1(k_n)}{k_n}\cdot\frac{2}{J_1^2(k_n)}=\frac{200}{k_n\cdot J_1(k_n)}$$

و

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{200}{k_n J_1(k_m)}J_0(k_m r)e^{-k_m z}$$

وإذا كان توزيع درجة الحرارة في قاعدة الأسطوانة أكثر تعقيداً ، مثلاً $f(\theta , r)$ فـإن الحل يكون بالشكل:

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_n(k_{mn}r)[a_{mn}\cos n\theta+b_{mn}\sin n\theta]e^{-k_{mn}z}.$$

10-5-4 توزيع درجة الحرارة المستقر في الكرة

يعطى توزيع درجة الحرارة T على سطح كرة نصف قطرها r = 1 بحيث تكون T = 100 على النصف العلوي من الكرة و T = 0 على النصف السفلي منها والمطلوب إيجاد توزيع درجة الحرارة المستقر داخل الكرة.

يتبع توزيع درجة الحرارة المستقر داخل الكرة معادلة لابلاس ، أي أن:

$$\nabla^2 T(x,y,z) = 0$$

وبما أن الجسم عبارة عن كرة فإنه من المناسب كتابة معادلة لابلاس بالإحداثيات الكروية ϕ , θ , r :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (10-29)$$

نتبع في حل المعادلة (29 – 10) كما في حل طريقة فصل المتغيرات ونكتب:

$$T = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$$

وبالتعويض عن T في المعادلة (29 – 10) والضرب بالكمية $r^2\sin^2\theta$ والقسمة على $R\Theta\Phi$ نحصل على :

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\sin^2\theta}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0$$

أو

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\sin^2\theta}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \qquad (10-30)$$

في العلاقة (30 – 10) يمثل الحد على يمين المساواة دالة من ϕ فقط وعلى يسارها دالة من r , θ والدالتان متساويتان لكل قيم ϕ , θ , r وهذا ممكن فقط إذا كانت كل منهما تساوي ثابت وليكن m^2 ومنه فإن :

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2$$

وحل هذه المعادلة هو

$$\Phi=\sin\phi$$

أو

$$\Phi=\cos\phi$$

وقد تم اختيار ثابت الفصل بهذا الشكل لكي تكون الدالة في ϕ دالة دورية لأنه إذا تغيرت ϕ بمقدار 2π نعود إلى نفس المكان ويجب أن لا تتغير درجة الحرارة.

وتصبح المعادلة الخاصة بالمتغيرات θ , r بالشكل:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0 \qquad (10-31)$$

وبنفس الطريقة نفصل المتغيرات في المعادلة $(10-31)$ ونجعل ثابت الفصل k لنحصل على المعادلة القطرية

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=k$$

والمعادلة السمتية

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta+k\Theta=0$$

وحل المعادلة القطرية هو :

$$R=r^{l}$$

أو

$$R=1/r^{l+1}$$

حيث l عدد صحيح. أما حل المعادلة السمتية الخاصة بالزاوية θ فهو:

$$\Theta=P_l^m(\cos\phi)$$

الحل r^{-l-1} غير مناسب فيزيائياً لأنه ينتهي إلى ما لا نهاية عند $r \to 0$.

بقي أن نختار الحلول التي تحقق الشروط الحدية المعطاة:

أ ـــ درجة الحرارة $T = 0$ عند الجزء السفلي من الكـــرة ، وتســـاوي 100 للجـــزء العلوي منها وهذا يعني أن درجة الحرارة لا تعتمد على الزاوية ولـــذا فـــإن الحـــل المناسب هو $\cos m\phi$ مع $m = 0$.

وهذا يعني أن الحل هو:

$$(10-32) \quad T = r^l \cos(o.\phi) P_l^o(\cos\phi) = r^l P_l(\cos\phi)$$

حيث $P_l(x)$ دوال لاجندر o , l .

ب ـــ يجب أن تكون درجة الحرارة تساوي 100 عند $r = 1$ للجزء العلوي من الكرة وتساوي الصفر للجزء السفلي وهذا يعني رياضياً أن :

$$(10-33) \qquad T(r=1,\theta,\phi) = \begin{cases} 100 & 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

لكي يتحقق الشرط (33– 10) نكتب الحل بالشكل:

$$(10-34) \quad T(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\phi)$$

مع الشرط:

$$(10-35) \quad T(r=1,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\phi) = 100 f(x)$$

حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 100 & 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

لإيجاد المعاملات C_l للحل (35 – 10) نستخدم خاصية التعامد لدوال لاجندر التـــــي تنص على أن

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{إذا كانت } l \neq m \\ \dfrac{2}{2l+1} & \text{إذا كانت } l = m \end{cases}$$

فنجد:

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{10}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - ......$$

ومنه فإن توزيع درجة الحرارة المستقر يعطى بالعلاقة:

$$T(r,\theta,\phi) = 100\left[\frac{1}{2}P_0(\cos\phi) + \frac{3}{4}rP_1(\cos\phi) - \frac{7}{10}r^3P_3(\cos\phi) + \frac{11}{32}r^5P_5(\cos\phi) - ....\right]$$

لم نذكر عند حل المسألة أي سلم حراري ومن الممكن استخدام الحل لأي سلم حراري ومن الممكن برهان أنه إذا كانت T حلا لمعادلة لابلاس $\nabla^2 T = 0$ أو لمعادلة انتشار الحرارة

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial T}{\partial t}$$

فإن $T + C$ و CT حلول للمعادلة حيث C ثابت.

وهذا يعني أنه إذا وجد الحل لسلم حراري معين فإنه يمكن إيجاده لأي سلم آخر.

1 ـ أثبت أن الدوال $U = f(x \pm \upsilon t)$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الأقل (معادلة انتشار الأمواج $\nabla^2 U = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$) ثم أثبت أن الدالة $U = \sin(x \pm \upsilon t)$ تحقق هذه المعادلة .

2 ـ تعطى معادلات ماكسويل في النظرية الكهرومغناطيسية بالمعادلات :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

أثبت أن أي مركبة من $\vec{E}$ أو $\vec{H}$ تحقق معادلة انتشار الأمواج حيث $\upsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$

للمساعدة: استخدم العلاقة $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \nabla^2 \times \vec{V}$.

3 ـ أوجد توزيع درجة الحرارة المستقر لصفيحة نصف لا نهائية درجة حرارتها على الجوانب I و II تساوي الصفر وعند القاعدة كما يلي:

أ ـ $T = 100$ ب ـ $T = f(x) = x$ بين الصفر و a

جـ ـ $T = \begin{cases} x & , 0 < x < 30 \\ 60 - x & , 30 < x < 60 \end{cases}$ د ـ $T = \cos x$

4 ــ أوجد توزيع درجة الحرارة لصفيحة مربعة طول ضلعها 10 cm إذا كانت درجة حرارة إحدى الجهات 100°C والجهات الثلاثة الأخرى صفر.
أوجد درجة الحرارة في مركز الصفيحة.

5 ــ أوجد توزيع درجة الحرارة في صفيحة مربعة طول ضلعها 60 cm ودرجة الحرارة على جوانبها كالتالي:
$T = 100$ على الجهة السفلى و$T = 120$ على الجهة اليسرى المجاورة وصفر على باقي الجهات.
استخدم الخاصية الخطية لمعادلة لابلاس لإيجاد الحل وذلك بإيجاد الحل للمربع في حال كون توزيع الحرارة كما في الشكلين وبجمع الحلين بعد ذلك.

6 ــ يهتز وتر بحيث تكون إزاحته في بداية الحركة كما في الشكل علماً أن طول الوتر L ومثبت عند نهايتيه. أوجد الدالة $y(x, t)$ التي تصف اهتزازة الوتر ثم أوجد إزاحة الوتر وسرعة الجزء منه عند النقطة $x = \frac{L}{3}$ والزمن $t = 1\ \text{sec}$ إذا كانت سرعة انتشار الموجة $v = 400\ \text{m/sec}$ و $L = 1\text{m}$.

7 ــ أوجد نفس المطلوب إذا كانت الإزاحة للوتر عند الزمن $t = 0$ كما هو مبين في الشكل.

8 ــ أوجد توزيع درجة الحرارة المستقر لأسطوانة نصف لا نهائية الارتفاع إذا كانت الشروط الحدية لتوزيع الحرارة هي:
أ ــ $T = 0$ على محيط الأسطوانة ونصف قطرها $r = 1$.
ب ــ عند قاعدة الأسطوانة $T = T(\theta) = r\sin\theta$.

للمساعدة: في الحل الخاص بالأسطوانة تحتاج للدالة التي تحتوي $\sin\theta$ ولذا للدالـــة $J_1(x)$ ولمكاملة $r^2\, J_1(x)$.

9 ــ أوجد توزيع درجة الحرارة في السؤال (8) إذا كانت $r = 5$ cm وتوزيع درجـة الحرارة في القاعدة هو $T = T(\theta) = r\cos^2\theta$.

10 ــ أوجد توزيع درجة الحرارة المستقر في كرة، إذا كان نصـــف قطـــر الكـــرة $r = 3$ cm ودرجة حرارة السطح معطاة كما يلي:

أ ــ $T(\theta , \phi) = 35\cos^3\theta$

ب ــ $T(\theta , \phi) = \cos\theta - (\sin\theta)^3$

جـ ــ $T(\theta , \phi) = \cos\theta - 3\sin^2\theta$

د ــ $T(\theta , \phi) = 5\cos^3\theta - 3\sin^2\theta$

هـ ــ
$$T(\theta,\phi)=\begin{cases}\cos\theta & 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}$$

و ــ $T(\theta , \phi) = \cos\phi\, \cos\theta$