اسم المقرر : بحتة (11) (تحليل عددي + تحليل مركب)

استاذ المقرر : د. اسماعيل جاد امين

الفرقـــة : الثالثـــة

الشعبـــــة : الرياضيات عام

الفصل الدراسي الثاني

# التحليل العدديII

## الباب الاول

## الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية

## (Numerical solutions for ordinary differential equations)

### (١.١) مقدمة

من المعروف ان الكثير من المعادلات التفاضلية وخاصة غير الخطية لا يمكن حلها بالطرق التحليلية ولا بد من استخدام الطرق العددية لحل مثل هذه المعادلات.

في هذا الباب سنتعرف على بعض الطرق العددية المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الاولى التي على الصورة :

$x$ $x_0$ $y$ $y_0$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(a) = y_0 \qquad (1.1)$$

في الفترة $[a,b]$.

$x_0$ $a$ $h$ $x_2 = x_0 + 2h$ $x_1 = x_0 + h$ $x_n$ $b$

ومما يجب ذكره ان المعادلة التفاضلية (1.1) ذات القيمة الابتدائية المعطاة كثيرا ما يشار اليها بـ (Intial value problem).

و باستخدام الطرق العددية فانه يمكننا ايجاد القيمة التقريبية الدالة $y(x)$ عند النقاط $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ التي تقسم الفترة $[a,b]$ الى اجزاء متساوية.

كما سنتطرق في هذا الباب الي طرق حل انظمة المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى وكذلك الى طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتب العليا.

ويمكن تصنيف الطرق العادية التي تستخدم لحل المعادلات التفاضلية العادية الى نوعين رئيسيين هما

- **الطرق أحادية الخطوة** (One-step methods)
- **الطرق متعددة الخطوات** (Multi-step methods)

ففي الطرق أحادية الخطوة يتم تقدير قيمة الدالة عند نقطة معينة باستخدام قيمة الدالة عند النقطة السابقة فقط ، اما في الطرق متعددة الخطوات فيتم تقدير قيمة الدالة عند نقطة معينة باستخدام قيمة الدالة عن نقاط عديدة سابقة لتلك النقطة.

و من بعض الطرق أحادية الخطوة والتي تستخدم لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى

- طريقة بيكارد (Picard method)
- طريقة تايلور (Taylor method)
- طريقة أويلر (أويلر المعدلة) (Euler method)
- طريقة رونج - كوتا (Runge-Kutta method)

## ٢.١ طرق الخطوة الواحدة (Single-step methods)

في الطرق احادية الخطوة يتم تقدير قيمة الدالة عند نقطة معينة باستخدام قيمة الدالة عند النقطة السابقة فقط.

### ١.٢.١ طريقة بيكارد (وهي طريقة تعتمد على التكامل)

و هي من الطرق أحادية الخطوة التي تستخدم لحل المعادلات من التفاضلية من الرتبة الاولى

بفرض ان $y' = f(x, y)$ و القيمة الابتدائية $y(x_0) = y_0$

والمطلوب ايجاد قيمة $y(x_0 + h)$ حيث ان

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

بتكامل هذه المعادلة من $x_0$ الى $x$ نحصل على

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y) dx$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y) dx \qquad (2)$$

التقريب الاول $y_1$ لـ $y$ يمكن الحصول عليه بإبدال $y_0$ بدلا من $y$ في الطرف الايمن للمعادلة (2)

اي ان

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0) dx \qquad (3)$$

التقريب الثاني $y_2$ يمكن الحصول عليه بأبدال $y_1$ بدلا من $y$ في الطرف الايمن للمعادلة (2)

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(x, y_1)\,dx \qquad (4)$$

بالاستمرار في هذه العملية يمكن الحصول على العلاقة التكرارية الاتية

$$\boxed{y_{n+1} = y\,(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\,(x, y_n(x))\,dx \;, \quad \forall n \ge 0} \qquad (5)$$

و تقف هذه العملية التكرارية عندما يتحقق الشرط

$$\left|y_{n+1} - y_n\right| \le \epsilon$$

حيث $\epsilon$ مقدار صغير موجب.

**مثال (١)**

استخدم طريقة بيكارد لإيجاد قيمة تقريبية لـ $y$ عند $x = 0.2$ اذا علمت ان

$$y' = x - y \;, \quad y(0) = 1$$

$x_0$

**الحل**

$$y_{n+1} = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx$$

$$= y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(x - y_n\right)dx$$

$$= 1 + \int_{x_0}^{x} \left(x - y_n\right)dx \,, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$n=0$

$y_0$

$$y_1(x) = 1 + \int_{0}^{x} \left(x - 1\right)dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_{0}^{x} \left[x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right]dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$$

$(x-y_1)$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left[ x - \left( 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \right] dx$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left[ x - \left( 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} \right) \right] dx$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$$

$$y_5(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{720}$$

عندما $x = 0.2$

$y_0 = 1,\qquad y_1 = 0.2,\qquad y_2 = 0.83867$

$y_3 = 0.83740,\qquad y_4 = 0.83746,\qquad y_5 = 0.83746$

$y(0.2) = 0.83746$

الفرق صغير جداً لـ ٦ مراتب عشرية وتوقف عند $y_5$

**مثال (٢)** الطلب

باستخدام طريقة بيكارد اوجد حل مسألة القيمة الابتدائية الاتية:

$$y' = y,\ y(0) = 1$$

الحل التحليلي هو $\left( y(x) = e^x \right)$

**الحل**

$$y_{n+1} = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} y_n\, dx$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dx = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+x)\,dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

.........................................................................................

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

**مثال (٣)**

باستخدام طريقة بيكارد اوجد حل مسالة القيمة الابتدائية الاتية:

$$\frac{dy}{dx} = xe^y \ , \qquad y(0) = 0$$

ثم اوجد $y(0.1), y(0.2), y(1)$ .

(حيث الحل التحليلي هو $y(x) = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ )

**الحل**

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\,dx$$

$$= y_0 + \int_0^x xe^{y_n}\,dx$$

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x xe^0\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x x\left(e^{x^2/2}\right)dx = e^{x^2/2} - 1$$

$$y(x) = e^{x^2/2} - 1$$

$$y(0.1) = 0.0050125$$
$$y(0.2) = 0.0202013$$
$$y(1) = 0.6487213$$

**مثال (٤)** ضروري

استخدم طريقة بيكارد لايجاد قيمة تقريبية لـ $y$ عند $x = 0.1, 0.2, 0.3$ وذلك بفرض ان

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy \, , \, y(0) = 1$$

**الحل**

نستخدم العلاقة التكرارية الخاصة بطريقة بيكارد وهي

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

$$= 1 + \int_0^x (1 + xy_0)\, dx$$

$$= 1 + \int_0^x (1 + x)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + xy_1\right) dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left[1 + x\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\, dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + xy_2\right) dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left[1 + x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right)\right] dx$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{48}$$

$$y_4(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_3)\, dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + xy_3\right) dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left[1 + x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{48}\right)\right] dx$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^7}{120} + \frac{x^8}{284}$$

**اولا:** للحصول على الحل عند $x = 0.1$ نعوض عن $x = 0.1$ نحصل على

$$y_1 = 1.105, \quad y_2 = 1.1053458, \quad y_3 = 1.1053465$$

$$y_4 = y_3$$

و منها

$$y(0.1) = 1.105$$

**ثانيا:** للحصول على الحل عند $x = 0.2$ نعوض عن $x = 0.2$ نحصل على

$$y_1 = 1.22, \quad y_2 = 1.2228667, \quad y_3 = 1.2228894, \quad y_4 = 1.2228895$$

و منها

$$y(0.2) = 1.223$$

**ثالثا:** للحصول على الحل عند $x = 0.3$ نعوض عن $x = 0.3$ نحصل على

$$y_1 = 1.345, \quad y_2 = 1.35550125, \quad y_3 = 1.3551897, \quad y_4 = 1.355192$$

و منها

$$y(0.3) = 1.355$$

**– عيوب هذه الطريقة:**

نظرا للتكاملات التي تحتويها هذه الطريقة تعتبر هذه الطريقة غير عملية وقد يصعب وضع برنامج لحلها باستخدام الحاسب الالي.

معادله (٢)

### ١.٢.٢ طريقة متسلسلة تايلور (و هي طريقة تعتمد علي التفاضل)

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(a) = y_0 \qquad (1.1)$$

نفرض ان $y(x)$ هو حل المعادلة $(1.1)$ بفك $y(x)$ باستخدام مفكوك تايلور حول النقطة $x = x_0$ نجد ان

$$y(x) = y_0 + (x - x_0) y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + R_{n+1}$$

حيث

$$R_{n+1}=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\eta)\,,\qquad \eta\in(x_0,x)$$

$h = x - x_0$

بفرض ان $x-x_0=h$ نحصل علي

$$y(x)=y_0+hy_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\cdots+\frac{h^n}{n!}y_0^{(n)}+R_{n+1} \qquad (1)$$

$x = x_0 + h$

$$R_{n+1}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\eta)\,,\qquad \eta\in(x_0,x_0+h)$$

للحصول على الحل نعين القيم

$$y'(x_0),y''(x_0),y'''(x_0)$$

وذلك بتفاضل المعادلة $y'=f(x,y)$ بالنسبة الى $x$ اي ان

$$y'(x)=f(x,y)$$

$$\begin{aligned} y''(x)&=f'(x,y)=f_x(x,y)+f_y(x,y)y' \\ &=f_x(x,y)+f_y(x,y)f \end{aligned} \qquad (2)$$

وبالمثل بالنسبة لباقي المشتقات من الرتب العليا يمكن ايجادها بنفس الطريقة اي نوجدها بدلالة $f(x,y)$ ومشتقاتها الجزئية.

و بالتعويض من (2) في (1) نحصل علي

$$y(x)=y_0+hy_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\cdots+\frac{h^n}{n!}y_0^{(n)}+R_{n+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_0+h)&=y_0+hf_0+\frac{h^2}{2!}\left(f_x+f_yf\right)_{(x_0,y_0)} \\ &+\frac{h^3}{3!}\left(f_{xx}+2f_{xy}+f_{yy}f^2+f_xf_y+f_y^2f\right)_{(x_0,y_0)}+\cdots \end{aligned}} \qquad (3)$$

الخطا في هذه الطريقة عندئذ يؤخذ الصورة

$$\text{Error} = \frac{h^{n+1} y^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}, \quad 0 < \eta < h$$

**اولا:** للحصول على $y(x_1)$ ، نحسب التفاضلات $y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0)$ حيث:-

$y'$ هي $f(x, y)$ من المعادلة التفاضلية.

$y''$ نحصل عليها بمفاضلة $y'$ بالنسبة لـ $x$

$y'''$ نحصل عليها بمفاضلة $y''$ بالنسبة لـ $x$

..........................................................................

مع التعويض فى كل مرة عن $x$ بـ $x_0$

اذن يمكن كتابة المعادلة التالية بوضع $x_1 = x_0 + h$

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \cdots$$

وبذلك نكون قد حسبنا $y(x_1)$ حيث $x_1 = x_0 + h$

**ثانيا:** للحصول على $y(x_2)$

نحسب التفاضلات $y'(x_1), y''(x_1), y'''(x_1), \cdots$ وبالتالي يمكن كتابة

$$y_2 = y(x_2) = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!} y_1'' + \frac{h^3}{3!} y_1''' + \cdots$$

حيث $x_2 = x_1 + h$.

**ثالثا:** للحصول على $y(x_3)$

نحسب التفاضلات $y'(x_2), y''(x_2), y'''(x_2), \cdots$ وبالتالي يمكن كتابة

$$y_3 = y(x_3) = y_2 + hy_2' + \frac{h^2}{2!}y_2'' + \frac{h^3}{3!}y_2''' + \cdots$$

حيث $x_3 = x_2 + h$ و هكذا

وبالتالي يمكن القول بان هذه العملية تتكرر للحصول على القيم $y_n = y(x_n)$ عند النقاط $x_n = x_0 + nh$ ، $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$\boxed{y_n = y(x_n) = y_{n-1} + hy_{n-1}' + \frac{h^2}{2!}y_{n-1}'' + \frac{h^3}{3!}y_{n-1}''' + \cdots}$$

**مثال (١)**

استخدام طريقة تايلور لايجاد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = x - y, \qquad y(0) = 1, \quad h = 0.2$$

**الحل**

ناخذ

الدالة

$$\begin{aligned}
y &= y(x) & y(0) &= 1\\
y' &= f(x,y) = x - y & y'(0) &= -1 \quad \Rightarrow y'(0) = -y(0) = -1\\
y'' &= 1 - y' & y''(0) &= 2 \quad = y''(0) = 1 - y'(0) = 1 + 1 = 2\\
y''' &= -y'' & y'''(0) &= -2\\
y^{\text{iv}} &= -y''' & y^{\text{iv}}(0) &= 2\\
y^{\text{v}} &= -y^{\text{iv}} & y^{\text{v}}(0) &= -2
\end{aligned}$$

ثم بالتعويض في العلاقة التالية

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \cdots$$

$x - x_0 = h$

$$y(0.2) = y_1 = 1 + (0.2)(-1) + \frac{(0.2)^2}{2!}(2) + \frac{(0.2)^3}{3!}(-2)$$
$$+ \frac{(0.2)^4}{4!}(2) + \frac{(0.2)^5}{5!}(-2) + \cdots$$

$$y(0.2) = y_1 = 0.83746$$

**مثال (٢)**

اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 2$$

ثم اوجد $y(0.1), y(0.2)$.

**الحل**

في البداية نحسب التفاضلات المتتالية لـ $y$ بالنسبة الى $x$

$$\begin{cases} y = y(x), & y'(x) = x + y, & y''(x) = 1 + y' \\ y'''(x) = y'', & y^{iv}(x) = y''', & y^{v} = y^{iv}, \cdots \end{cases} \quad (1)$$

**اولا:** لحساب $y(0.1)$ نعوض في الطرف الايمن من التفاضلات السابقة $(1)$ عن $x$ بـ $0$ لنحصل على

$$y(0) = 2, y'(0) = 0 + 2 = 2, y''(0) = 1 + 2 = 3$$
$$y'''(0) = 3, y^{iv}(0) = 3, y^{v} = 3, \cdots$$

ثم نعوض بهذه القيم في المعادلة

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + hy'(0) + \frac{h^2}{2!}y''(0) + \frac{h^3}{3!}y'''(0) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(0)$$
$$+ \frac{h^5}{5!}y^{v}(0) + \cdots,$$

$$h = x_1 - x_0 = 0.1 - 0 = 0.1$$

$$y_1 = y(0.1) = 2 + (0.1)(2) + \frac{(0.1)^2}{2!}(3) + \frac{(0.1)^3}{3!}(3) + \frac{(0.1)^4}{4!}(3)$$
$$+ \frac{(0.1)^5}{5!}(3) = \frac{88.62051}{40} = 2.2$$

**ثانيا:** لحساب $y\,(0.2)$ نعوض في الطرف الايمن من التفاضلات السابقة (1) عن $x$ بـ $x = 0.1$ لنحصل علي

$$y(0.1) = 2.2,\, y'(0.1) = 0.1 + 2.2 = 2.3,\, y''(0.1) = 1 + 2.3 = 3.3$$
$$y'''(0.1) = y''(0.1) = 3.3,\, y^{iv}(0) = y'''(0.1) = 3.3\,,$$
$$y^{v}(0.1) = y^{iv}(0) = 3.3, \cdots$$

ثم نعوض بهذه القيم في المعادلة

$$y(x_2) = y_2 = y(x_1) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2!}y''(x_1) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_1)$$
$$+ \frac{h^4}{4!}y^{iv}(x_1) + \frac{h^5}{5!}y^{v}(x_1) + \cdots,$$

$$h = x_2 - x_1 = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

و منها نحصل علي

$$y_2 = y\,(0.2) = 2.2 + (0.1)(2.3) + \frac{(0.1)^2}{2!}(3.3) + \frac{(0.1)^3}{3!}(3.3)$$
$$+ \frac{(0.1)^4}{4!}(3.3) + \frac{(0.1)^5}{5!}(3.3) = \frac{88.62051}{40} = 2.21551275$$

**مثال (٣)**

استخدم طريقة تيلور لايجاد حل المعادلة التفاضلية هدى

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2\,, y(0) = 1$$

**الحل**

$$f(x,y)=x^2+y^2,\ x_0=0, y_0=1$$

$$\begin{aligned} y &= y(x) & y(0)&=1 \\ y' &= f(x,y)=x^2+y^2 & y'(0)&=1 \\ y'' &= 2x+2yy' & y''(0)&=2 \\ y''' &= 2+2yy''+2\left(y'\right)^2 & y'''(0)&=8 \end{aligned}$$

**بالتعويض في العلاقة التالية**

$$y(x)=y_0+\left(x-x_0\right)y'(x_0)+\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2!}y''(x_0)+\cdots$$

**نحصل علي**

$$y(x)=1+x+x^2+\frac{8}{3!}x^3$$

**عيوب هذه الطريقة**

من الواضح ان طريقة تايلور غير عملية وذلك للتفاضلات التي تحتويها هذه الطريقة ولهذا فاننا نقدم بعض الطرق التي يمكن التعامل معها من الناحية العملية.

### ٣.٢.١ طريقة أويلر العادية

هذه الطريقة مشتقة من طريقة تايلور السابقة وذلك بفرض ان $h \ll 1$ في مفكوك تايلور. و بالتالي يمكن الاكتفاء بثلاثة حدود من هذا المفكوك. بالتعويض في المفكوك نجد ان

$$y(x)=y(x_0+h)=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2!}y''(\xi),\ x_0<\xi<x_0+h \qquad (1)$$

الحد الثالث في هذه المعادلة يمثل الخطا في طريقة اويلر ويكون هذا الخطا اقل ما يمكن عندما تكون $h$ صغيرة

$$\text{Error}=E=\frac{y''(\xi)h^2}{2}=O\left(h^2\right) \qquad (2)$$

المعادلة (١) تمثل الحل عند النقطة $x = x_0 + h$ بمعلومية الحل عند $x = x_0$ اي بمعلومية $y(x_0)$ المعطاة كقيمة ابتدائية. وهكذا يمكن ايجاد الحل عند $x = x_0 + 2h$ وبتكرار هذه العملية يمكن ايجاد الحل عند $x = x_0 + (n-1)h$ وبذلك فان طريقة اويلر التكرارية تاخذ الصورة

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + O(h^2)$$

بما ان

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

يمكن كتابة صيغة اويلر في الصورة

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)} \qquad (3)$$

$$E = \frac{h^2}{2} y''(\xi), \qquad x_n < \xi < x_{n+1}$$

**مثال (١)**

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y(0) = 1$ , $\frac{dy}{dx} = x + y$ في الفترة $[0, 0.1]$ ، حيث $h = 0.02$

**الحل**

نستخدم العلاقة التكرارية (3)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y(0.02) = y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$= 1 + (0.02)(0+1) = 1.02$$

$$y(0.04) = y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$
$$= 1.02 + (0.02)(0.02 + 1.02) = 1.0408$$

$$y(0.06) = y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$
$$= 1.0408 + (0.02)(0.04 + 1.0408) = 1.0624$$

$$y(0.08) = y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1.0048$$

$$y(0.1) = y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1.1081$$

**ملحوظة:** الحل التحليلي لهذه المعادلة عند $x = 0.1$ هو $1.1103$ وبذلك يكون الخطأ العددي

$$E = 1.1103 - 1.1081 = 0.0022$$

### ٤.٢.١ طريقة أويلر المعدلة

طريقة اويلر المعدلة مستنتجة ايضا من مفكوك تايلور باخذ حد زيادة عن اويلر العادية اي ان

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n \qquad (1)$$

حيث $y''_n = \dfrac{y'_{n+1} - y'_n}{h}$ (وذلك من التعريف الأولي للمشتقات)

ثم بالتعويض في المعادلة (١) عن $y''_n$ نحصل علي

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{y'_{n+1} - y'_n}{h}\right)$$

$$= y_n + h\left(y'_n + \frac{1}{2}y'_{n+1} - \frac{1}{2}y'_n\right)$$

$$= y_n + \frac{h}{2}(y'_n + y'_{n+1})$$

طريقة أويلر المعدلة تاخذ الصورة

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(y'_n + y'_{n+1})}{2} \qquad (2)$$

?

حيث

$$y'_n = f(x_n, y_n)\ ,\ \ y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

**ملحوظة:** تعين $y'_{n+1}$ والتي تظهر في الطرف الايمن من المعادلة $(2)$ يعتمد على قيمة $y_{n+1}$ المجهولة المراد ايجادها ولذلك فان خطوات حل المعادلة التفاضلية باستخدام طريقة اويلر المعدلة هي كالتالي

١. نعين $y_{n+1}$ باستخدام طريقة أويلر العادية السابقة

٢. نستخدم القيمة السابقة $y_{n+1}$ في حساب $y'_{n+1}$ وذلك باعتبار ان

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(y'_n + y'_{n+1})}{2} \qquad y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

**٣.** نعوض عن قيم $y_n, y'_n, y'_{n+1}$ في الطرف الايمن من المعادلة (٢) وذلك لنحصل على $y_{n+1}$ المحسوبة بطريقة اويلر المعدلة ولهذا فان طريقة اويلر المعدلة تسمى $(\text{Predictor Corrector method})$

$$y_1^{(P)} = y_0 + hy'_0 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1^{(C)} = y_0 + \frac{h}{2}(y'_0 + y'_1) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(P)})\right]$$

**مثال (١)**

اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y, \quad y(0) = 1$$

عند $x = 0.2$ . اعتبر ان $h = 0.1$ مستخدما طريقة اويلر المعدلة.

**الحل**

٠ ٠.١ ٠.٢

$$y_1^{(P)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(0+1) = 1.1$$

$$y_1^{(C)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(P)})\right]$$

$$= 1 + \frac{0.1}{2}\left\{(0+1) + \left[(0.1)^2 + 1.1\right]\right\} = 1.1055$$

$$y(0.1) = 1.1055$$

$$\begin{aligned} y_2^{(P)} &= y_1 + hf(x_1, y_1^{(C)}) \\ &= 1.1055 + (0.1)\left[(0.1)^2 + 1.1055\right] \\ &= 1.22605 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2^{(C)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(P)})\right] \\ &= 1.1055 + \frac{0.1}{2}\left\{\left[(0.1)^2 + 1.1055\right] + \left[(0.2)^2 + 1.22605\right]\right\} \\ &= 1.224577 \end{aligned}$$

$$y_2^{(C)} = 1.224577$$

**مثال (٢)**

باستخدام طريقة اويلر المعدلة اوجد حل المعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

0 0.02 0.04

عند $x = 0.04$ اعتبر ان $h = 0.02$.

**الحل**

$$y_1^{(P)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (0.02)(0+1) = 1.02$$

$$\begin{aligned} y_1^{(C)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(P)})\right] \\ &= 1 + \frac{0.02}{2}\left\{(0+1) + [0.02 + 1.02]\right\} = 1.0204 \end{aligned}$$

$$y_2^{(P)} = y_1 + hf(x_1, y_1^{(C)}) = 1.0204 + 0.02(0.02 + 1.0204) = 1.041208$$

$$y_2^{(C)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f\ (x_1, y_1) + f\ (x_2, y_2^{(P)})\right]$$

$$= 1.0204 + \frac{0.02}{2}[(0.02 + 1.0204) + (0.04 + 1.041208)] = 1.0416$$

$$y\ (0.04) = 1.0416$$

**مثال (٣)**

استخدم طريقة اويلر المعدلة لحل المعادلة

$$y' = -xy^2\ , y(0) = 2$$

للحصول علي $y(0.2)$ مستخدما $h = 0.025$

**الحل**

اولا: نعين $y_{n+1}$ والتي تعني $y(0.2)$ باستخدام طريقة اويلر العادية. نطبق العلاقة التكرارية

$$y_{n+1} = y_n + hf\,(x_n, y_n)$$

$$y(0.025) = y_1 = y_0 + hf\,(x_0, y_0)$$
$$= 2 + (0.025)\big[(0)(4)\big] = 2$$

$$y(0.05) = y_2 = y_1 + hf\,(x_1, y_1)$$
$$= 2 + (0.025)\big[(0)(4)\big] = 2$$

$$y(0.075) = y_3 = y_2 + hf\,(x_2, y_2)$$
$$= 2 + (0.025)\big[(0)(4)\big] = 2$$

.............................................................................

$$y(0.100) = y(0.125) = y(0.150) = y(0.175) = y(0.200) = 2$$

$$y_{n+1} = y(0.2) = 2\ ,\ y'_{n+1} = -(x_{n+1})\left(y_{n+1}^2\right) = -(0.2)(4) = -0.8$$

ثم نستخدم العلاقة الخاصة بطريقة اويلر المعدلة وهي

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\left(y'_n + y'_{n+1}\right)}{2}, \; y_n = y(0.175) = 2$$

$$y'_n = -\left(0.175\right)\left(4\right) = -0.700$$

$$y_{n+1} = y(0.2) = -0.7 + \frac{0.025\left(-0.7-0.8\right)}{2} = -0.7187$$

### ٥.٢.١ طريقة رونج كوتا (Runge-Kutta method)

تعتبر من اهم الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية وهذه الطريقة يمكن استنتاجها باستخدام مفكوك تايلور وتختلف هذه الطريقة على حسب رتب مفكوك تايلور المستخدم للحصول على هذه الطريقة

**(ا) طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية**

تستخدم طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x\,,y\,), y\,(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

و يمكن استنتاج هذه الطريقة وذلك بفرض ان

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = y_n + a\,k_1 + bk_2\,, \qquad (2)\\ &k_1 = hf\,(x_n\,, y_n),\\ &k_2 = hf\,(x_n + \alpha h\,, y_n + \beta k_1) \end{aligned}$$

حيث $a, b, \alpha, \beta$ ثوابت يمكن تعينهم كالتالي

باستخدام مفكوك تايلور للمعادلة $(1)$ عند النقطة $x_n$ نجد ان

$$y_{n+1} = y_n + hf\,(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f\,'(x_n, y_n) + O\,(h^3) \qquad (3)$$

حيث

$$f'(x_n,y_n)=\frac{df_n}{dx}=\left(f_x+f_y\frac{dy}{dx}\right)_n=\left(f_x+f_y f\right)_n$$

و بالتعويض في المعادلة $(3)$ نحصل علي

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}\left(f_x+f_y f\right)_n+O(h^3) \qquad (4)$$

الحد $k_2$ المستخدم في طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية يمكن كتابته علي الصورة (باستخدام مفكوك تايلور لدالة في متغيرين)

دالة في متغيرين

$$\begin{aligned}k_2&=hf\left(x_n+\alpha h, y_n+\beta k_1\right)\\&=hf(x_n,y_n)+\alpha h^2 f_x(x_n,y_n)+\beta h k_1 f_y(x_n,y_n)\\&=h\left(f_n+\alpha hf_x+\beta k_1 f_y\right)_n=h\left(f_n+\alpha hf_x+\beta hf_y f\right)_n \quad (\text{Since } k_1=hf\ )\end{aligned}$$

بالتعويض عن $k_2$ في المعادلة $(1)$ نحصل علي $y_{n+1}=y_n+a\,k_1+bk_2$ ,

$$y_{n+1}=y_n+ahf(x_n,y_n)+bh\left(f+\alpha hf_x+\beta hf_y f\right)_n$$

و التي يمكن كتابتها علي الصورة $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}\left(f_x+f_y f\right)_n+O(h^3) \qquad (4)$

$$y_{n+1}=y_n+(a+b)hf(x_n,y_n)+h^2\left(\alpha b f_x+\beta b f_y f\right)_n \qquad (5)$$

بمقارنة $(4)$ ، $(5)$ نحصل على

$$a+b=1,\ \alpha b=\frac{1}{2},\quad \beta b=\frac{1}{2} \qquad (6)$$

المعادلات $(6)$ عبارة عن ثلاث معادلات تحتوي على اربع مجاهيل لذلك يكون لها عدد لانهائي من الحلول وذلك باختيار قيم مختلفة لاي من المجاهيل الاربعة.

$\alpha b-\beta b = b(\alpha-\beta)=0$

المعادلات $(6)$ يمكن وضعهم على الصورة

$$b(\alpha-\beta)=0, b\neq 0 \Rightarrow \alpha-\beta=0 \Rightarrow \alpha=\beta$$

١. باختيار $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ نحصل علي $a = 0$ ، $b = 1$ لذلك يفشل هذا الاختيار حيث من المفروض ان $(a \neq 0)$

٢. باختيار $\alpha = \beta = 1$ نحصل على $a = b = 1/2$.

بالتعويض عن $a, b, \alpha, \beta$ في المعادلة $(2)$ نحصل علي

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

$y_1 = -1 + \frac{1}{2}$

حيث

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$
$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

هذه المعادلة تمثل طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية.

$k_1 = 0.1(4+1)$

**مثال (١)**

استخدم طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(2) = -1$$

$k_2 = 0.1 f(2.1, -1+$

عند النقطة $x = 2.3$ ، $h = 0.1$.

**الحل**

$x_0$: 2, 2.1, 2.2, 2.3

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2},$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(2, -1)$$
$$= (0.1)(4+1) = 0.5,$$

$$k_2 = hf\ (x_0 + h, y_0 + k_1)$$
$$= hf\ \left(2 + 0.1, -1 + 0.5\right) = hf\ (2.1, -0.5)$$
$$= (0.1)\left[(2.1)^2 + (-0.5)^2\right] = 0.466$$

$$y_1 = -1 + \frac{1}{2}\left(0.5 + 0.466\right) = -0.517$$

$$y_2 = y_1 + \frac{k_1 + k_2}{2},$$
$$k_1 = hf\ (x_1, y_1) = hf_1 = hf\ (2.1, -0.517)$$
$$= (0.1)\left[(2.1)^2 + (-0.517)^2\right] = 0.468,$$
$$k_2 = hf\ (x_1 + h, y_1 + k_1)$$
$$= hf\ \left(2.1 + 0.1, -0.517 + 0.468\right) = hf\ (2.2, -0.049)$$
$$= (0.1)\left[(2.2)^2 + (-0.049)^2\right] = 0.484$$

$$y_2 = -0.517 + \frac{1}{2}\left(0.468 + 0.484\right) = -0.041$$

$$y_3 = y_2 + \frac{k_1 + k_2}{2},$$
$$k_1 = hf\ (x_2, y_2) = hf_2 = hf\ (2.2, -0.041)$$
$$= (0.1)\left[(2.2)^2 + (-0.041)^2\right] = 0.484\ ,$$
$$k_2 = hf\ (x_2 + h, y_2 + k_1)$$
$$= hf\ \left(2.2 + 0.1, -0.041 + 0.484\right) = hf\ (2.3, 0.443)$$
$$= (0.1)\left[(2.3)^2 + (0.443)^2\right] = 0.548$$

$$y_3 = -0.041 + \frac{1}{2}\left(0.484 + 0.548\right) = 0.475$$

**مثال (٢)**

اذا كان لدينا المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y\,,\ \ y(0) = 1$$

اوجد $y(0.1)$ ، $y(0.2)$ باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية.

**الحل**

$$f(x,y) = x^2 - y$$

$$x_0 = 0\,,\ y_0 = 1\ \Rightarrow f(x_0,y_0) = -1$$

طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية تكون

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0,y_0) = (0.1)[0-1] = -0.1, \\
k_2 &= hf(x_0+h, y_0+k_1) \\
&= hf(0.1, 0.9) = (0.1)\left[(0.1)^2 - 0.9\right] \\
&= -0.089
\end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{1}{2}(-0.1+0.089) = -0.0945$$

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + k = 1 - 0.0945 = 0.9055$$

ثم بحساب $y(0.2)$

نأخذ $(x_1,y_1) = (0.1, 0.9055)$ بدلا من $(x_0,y_0)$ ثم نكرر الطريقة

$$k_1 = hf\ (x_1, y_1) = h\left(x_1^2 - y_1\right)$$
$$= (0.1)\left[(0.1)^2 - 0.905\right] = -0.08955,$$
$$k_2 = hf\ (x_0 + h, y_0 + k_1)$$
$$= hf\ \left(0.2, 0.81595\right) = (0.1)\left[(0.2)^2 - 0.81595\right]$$
$$= -0.077595$$

$$K = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(-0.08955 - 0.077595) = -0.0835725$$
$$y_2 = y(0.2) = y_1 + k = 0.9055 - 0.0835725 = 0.821975$$

### ٦.٢.١ طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة

طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة تعتبر اكثر الطرق استخداما لانها اكثر دقة من طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية و يمكن استنتاج هذه الطريقة بتكرار خطوات استنتاج طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية. هذه الطريقة تاخذ الصورة

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

حيث

$$k_1 = hf\ (x_n, y_n),$$
$$k_2 = hf\ (x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1),$$
$$k_3 = hf\ (x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2),$$
$$k_4 = hf\ (x_n + h, y_n + k_3)$$

**مثال (١)**

استخدم طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

0 0.1

عند $x = 0.1$ مستخدما $h = 0.1$

**الحل**

$$k_1 = hf\,(x_0, y_0) = hf\,(0,1) = (0.1)(0+1) = 0.1$$

$$k_2 = hf\,(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$
$$= hf\,(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0.1}{2})$$
$$= hf\,(0.05, 1.05)$$
$$= (0.1)(0.05 + 1.05) = 0.11$$

$$k_3 = hf\,(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$
$$= (0.1)f\,(0.05, 1.055)$$
$$= (0.1)(0.05 + 1.055) = 0.11050$$

$$k_4 = hf\,(x_0 + h, y_0 + k_3)$$
$$= (0.1)f\,(0.1, 1.11050) = 0.12105$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y\,(0.1) = 1.0 + \frac{1}{6}(0.1 + 0.22 + 0.221 + 0.1205)$$
$$= 1.11034$$

**مثال (٢)**

من المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y, \ \ y(0) = 1$$

اوجد $y(0.1)$ ، $y(0.2)$ باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة.

**الحل**

$$k_1 = hf\ (x_0, y_0) = hf\ (0,1) = (0.1)(0-1) = -0.1$$

$$k_2 = hf\ (x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$
$$= hf\ (0.05, 0.95)$$
$$= (0.1)\left[(0.05)^2 - 0.95\right] = 0.09475$$

$$k_3 = hf\ (x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$
$$= (0.1)f\ (0.05, 0.952625)$$
$$= (0.1)\left[(0.05)^2 - 0.952625\right] = -0.0950125$$

$$k_4 = hf\ (x_0 + h, y_0 + k_3)$$
$$= (0.1)\left[(0.1)^2 - 0.9049875\right] = 0.0894987$$

$$K = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$
$$= \frac{1}{6}\Big[-0.1 + 2(-0.09475)$$
$$+ 2(-0.0950125) - 0.0894987\Big]$$
$$= -0.0948372$$

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + K = 1 - 0.0948372 = 0.9051627$$

ثم لحساب $y(0.2)$ نأخذ $(x_1, y_1) = (0.1, 0.9051627)$ بدلا من $(x_0, y_0)$ ثم نكرر الطريقة لنحصل على

$$k_1 = hf\ (x_1, y_1) = hf\ (0.1, 0.9051627)$$
$$= (0.1)\left[(0.1)^2 - 0.9051627\right] = -0.0895162$$

$$k_2 = hf\ \left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = hf\ (0.15, 0.8604046)$$
$$= (0.1)\left[(0.15)^2 - 0.8604046\right] = -0.837904$$

$$k_3 = hf\ \left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = hf\ (0.15, 0.8632674)$$
$$= (0.1)\left[(0.15)^2 - 0.8632674\right] = -0.0840767$$

$$k_3 = hf\ \left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = hf\ (0.15, 0.8632674)$$
$$= (0.1)\left[(0.15)^2 - 0.8632674\right] = -0.0840767$$

$$k_4 = hf\ (x_1 + h, y_1 + k_3) = hf\ (0.2, 0.8210859)$$
$$= (0.1)\left[(0.2)^2 - 0.8210859\right] = -0.0781085$$

$$K = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$
$$= \frac{1}{6}\Big[-0.0895162 + 2(-0.0837904)$$
$$+ 2(-0.0840767) - 0.0781085\Big]$$
$$= -0.0838931$$

$$y_2 = y\,(0.2) = y_1 + K$$
$$= 0.9051627 - 0.0838931$$
$$= 0.08212695$$

مثال (٣)

استخدم طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{dy}{dx} = y - x \ , \ y(0) = 2$$

عند $x = 0.2$ مستخدما $h = 0.2$

**الحل**

$$k_1 = hf\ (x_0, y_0) = hf\ (0,2)$$
$$= (0.2)[2-0] = 0.4$$

$$k_2 = hf\ \left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = hf\ (0.1, 2.2)$$
$$= (0.2)[2.2-0.1] = 0.42$$

$$k_3 = hf\ \left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = hf\ (0.1, 2.21)$$
$$= (0.2)[2.21-0.1] = 0.422$$

$$k_4 = hf\ \left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = hf\ (0.2, 2.422)$$
$$= (0.2)[2.422-0.2] = 0.4644$$

$$y\,(0.2) = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$
$$= 2 + \left[0.4 + 2(0.42) + 2(0.422) + 0.4644\right]$$
$$= 2.4247266$$

**تمرين**

استخدم طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة لإيجاد قيم $y(0.1)$ ، $y(0.2)$ ، $y(0.3)$ من المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = xy + y^2 \,,\;\; y(0) = 1$$

# الباب الثاني

## (١.٢) حل انظمة المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى

الشكل العام لنظام المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الاولى هو

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)
\end{aligned}
$$

حيث

$$y_1(x_0) = \alpha_1 , y_2(x_0) = \alpha_2 , \cdots, y_n(x_0) = \alpha_n$$

جميع الطرق التي ذكرت سابقا والتي استخدمت لحل معادلة تفاضلية واحدة يمكن استخدامها لحل نظام المعادلات التفاضلية المذكورة اعلاه.

سنشرح الان كيف ان الطرق التي اوجدناها سابقا لحل معادلة واحدة يمكن توسيعها لمجموعة من المعادلات. وسنركزاهتمامنا على حل النظام المكون من معادلتين ولزيادة التوضيح سنستخدم الرموز البديلة كالاتي نفرض

$$\boxed{\begin{gathered} y' = f(x, y, z) \,,\ \ z' = \phi(x, y, z) \\ \\ y(x_0) = y_0 , z(x_0) = z_0 \end{gathered}}$$

هو نظام مكون من معادلتين ذات الشروط الابتدائية

### ١.١.٢ طريقة بيكارد

نفرض ان

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = \phi(x, y, z) \end{cases} \qquad (1)$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0 , \qquad z(x_0) = z_0$$

التقريب الاول $y_1, z_1$ يمكن الحصول عليهما كما سبق في حالة المعادلة التفاضلية الواحدة

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0, z_0)dx$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_0, z_0)dx$$

التقريب الثاني

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1, z_1)dx$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_1, z_1)dx$$

و هكذا

**مثال (١)**

استخدم طريقة بيكارد لايجاد قيمة تقريبية لـ $y, z$ لحل المعادلتين التفاضليتين

$$\frac{dy}{dx} = z \ , \quad \frac{dz}{dx} = x^3(y+z)$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(\overset{x_0}{0}) = \overset{y_0}{1}, \quad z(\overset{x_0}{0}) = \overset{z_0}{\frac{1}{2}}$$

نفس النقطة

**الحل**

حيث ان

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = \phi(x, y, z) = x^3(y+z)$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)dx$$

$$z = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x,y,z)dx$$

التقريب الاول

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0, z_0)dx = 1 + \int_0^x (1/2)dx = 1 + \frac{x}{2}$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_0, z_0)dx = \frac{1}{2} + \int_0^x x^3\left(1+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8}$$

$y_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$

$z_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8}$

$f(x, y_1, z_1) = z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8}$

التقريب الثاني

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1, z_1)dx = 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8}\right)dx$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^4}{40}$$

$\phi(x, y_1, z_1) = x^3(y_1 + z_1)$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_1, z_1)dx = \frac{1}{2} + \int_0^x x^3\Big(\underbrace{1 + \frac{x}{2}}_{y_1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8}}_{z_1}\Big)dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64}$$

$\Rightarrow z_2(0.1)$

التقريب الثالث

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2, z_2)dx = 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64}\right)dx$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^4}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192}$$

$$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_2, z_2)dx$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x x^3 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64} + \frac{7x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$$

عند $x = 0.1$

$y_1 = 1.05$ ,    $y_2 = 1.500008$ ,    $y_3 = 1.500008$

$z_1 = 0.5000375$ ,    $z_2 = 0.5000385$ ,    $z_3 = 0.5000385$

## ٢.١.٢ طريقة تايلور

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = \phi(x, y, z) \end{cases} \qquad (1)$$

نفرض ان $y(x), z(x)$ هو الحل للمعادلات $(1)$

$$y(x_0) = y_0 , \quad z(x_0) = z_0$$

بفك $y(x), z(x)$ باستخدام مفكوك تايلور حول النقطة $x = x_0$ نجد ان

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hy'_0 + \dfrac{h^2}{2!}y''_0 + \dfrac{h^3}{3!}y'''_0 + \cdots \\ z_1 = z_0 + hz'_0 + \dfrac{h^2}{2!}z''_0 + \dfrac{h^3}{3!}z'''_0 + \cdots \end{cases} \qquad (2)$$

هنا تعتمد على المشتقات

للحصول على الحل نعين القيم $y'_0, y''_0, y'''_0, \cdots$ وكذلك $z'_0, z''_0, z'''_0, \cdots$ وذلك بتفاضل المعادلات $\boxed{y' = f(x, y, z), z' = \phi(x, y, z)}$ بالنسبة الى $x$ ثم بالتعويض عنها في المعادلات $(2)$ سوف نحصل على $y_1, z_1$ في الخطوة الاولى.

وبالمثل في الخطوة الثانية

$$y_2 = y_1 + hy'_1 + \frac{h^2}{2!}y''_1 + \frac{h^3}{3!}y'''_1 + \cdots$$

$$z_2 = z_1 + hz_1' + \frac{h^2}{2!} z_1'' + \frac{h^3}{3!} z_1''' + \cdots$$

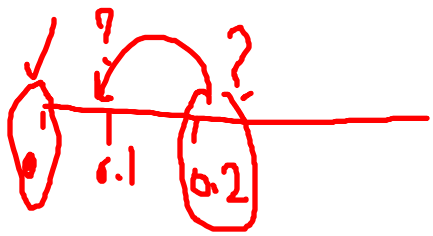
حيث $y_1, z_1$ تم حسابهم من المعادلة (٢) و كذلك $y_1', y_1'', y_1''', \cdots$ و $z_1', z_1'', z_1''', \cdots$ يمكن حسابهما و هكذا بالنسبة لباقي الخطوات

**مثال (١)**

باستخدام طريقة تايلور اوجد حل المعادلتين

$$\frac{dy}{dx} = x + z \quad , \qquad y(0) = 2$$

$$\frac{dz}{dx} = x - y^2, \qquad z(0) = 1$$




عند النقطة $x = 0.2$ حيث $h = 0.1$.

**الحل**

حيث

$$y' = x + z \;, \qquad y(0) = 2$$

$$z' = x - y^2 \;, \qquad z(0) = 1$$

يمكن حساب المشتقات كالاتي

$$y' = x + z,$$
$$y'' = 1 + z',$$
$$y''' = z''$$

و هكذا

$$z' = x - y^2,$$
$$z'' = 1 - 2yy'$$
$$z''' = -2[yy'' + y'^2]$$

نستخدم مسلسلة تايلور لإيجاد $y_1 , z_1$

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \cdots \qquad \text{(i)}$$

$$z_1 = z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2!} z_0'' + \frac{h^3}{3!} z_0''' + \cdots \qquad \text{(ii)}$$

عند

$$x_0 = 0,\ y_0 = 2,\ z_0 = 1,\ h = 0.1$$

نحصل على

$$y_0' = x_0 + z_0 = 1\ , \qquad z_0' = x_0 - y_0^2 = -4,$$

$$y_0'' = 1 + z_0' = 1 - 4 = -3, \qquad z_0'' = 1 - 2y_0 y_0' = 1 - 2(2)(1) = -3$$

$$y_0''' = z_0'' = -3, \qquad z_0''' = -2[y_0 y_0'' + y_0'^2] = -2[2(-3) + 1^2] = 10$$

بالتعويض بهذه القيم في $\text{(ii)}, \text{(i)}$ نحصل علي

$$y_1 = 2 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-3) + \frac{(0.1)^3}{3!}(-3) + \cdots$$
$$= 2 + 0.1 - 0.015 - 0.0005 = 2.0845$$

$$z_1 = 1 + (0.1)(-4) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-3) + \frac{(0.1)^3}{3!}(10) + \cdots$$
$$= 1 - 0.4 - 0.015 + 0.001667 = 0.5867$$

$$y(0.1) = 2.0845$$

$$z(0.1) = 0.5867$$

وكذلك لإيجاد $z(0.2), y(0.2)$

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + \frac{h^3}{3!}y_1''' + \cdots \qquad \text{(iii)}$$

$$z_2 = z_1 + hz_1' + \frac{h^2}{2!}z_1'' + \frac{h^3}{3!}z_1''' + \cdots \qquad \text{(iv)}$$

عند

0.1

$x_1$

نتائج الخطوة الاولى

$$x_1 = 0.1, \quad y_1 = 2.0845, \quad z_1 = 0.5867$$

نحصل علي

$$y_1' = x_1 + z_1 = 0.06867\,, \qquad z_1' = x_1 - y_1^2 = -4.2451403,$$

$$y_1'' = 1 + z_1' = -3.2451403, \qquad z_1'' = 1 - 2y_1 y_1' = -1.8628523$$

$$y_1''' = z_1'' = -1.8628523, \qquad z_1''' = -2[y_1 y_1'' + y_1'^2] = 12.585876$$

بالتعويض في المعادلتين $\text{(iv)},\text{(iii)}$ نحصل علي

$$y_2 = 2.0845 + (0.1)(0.6867) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-3.2451403)$$
$$+ \frac{(0.1)^3}{3!}(-1.8628523) + \cdots$$
$$= 2.1366338$$

$$z_2 = 0.5867 + (0.1)(-4.2451403) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-1.8628523)$$
$$+ \frac{(0.1)^3}{3!}(12.585876) + \cdots$$
$$= 0.1549693$$

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = \phi(x,y,z) \end{cases} \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \,, \quad z(x_0) = z_0$$

## ٣.١.٢ طريقة رونج كوتا (Runge-kutta method)

نعتبر المعادلتين الاتيتين

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x,y,z) \,, \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x,y,z)$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0 \quad , \qquad z(x_0) = z_0$$

**حل نظام المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية ياخذ الصورة**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

حيث

$$k_1 = hf_1(x,y,z) \,, \qquad l_1 = hf_2(x,y,z)$$

$$k_2 = hf_1(x+h, y+k_1, z+l_1), \qquad l_2 = hf_2(x+h, y+k_1, z+l_1)$$

**حل نظام المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة ياخذ الصورة**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

نعوض K L

**حيث**

$$k_1 = hf_1(x,y,z), \; l_1 = hf_2(x,y,z)$$

$$k_2 = hf_1(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}, z+\frac{l_1}{2}),$$

$$l_2 = hf_2(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}, z+\frac{l_1}{2})$$

$$k_3 = hf_1(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}, z+\frac{l_2}{2}),$$

$$l_3 = hf_2(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}, z+\frac{l_2}{2})$$

$$k_4 = hf_1(x+h, y+k_3, z+l_3),$$

$$l_4 = hf_2(x+h, y+k_3, z+l_3)$$

$\frac{dy}{dx} = f_1(x,y,z)$ , $\frac{dz}{dx} = f_2(x,y,z)$

$y(x_0) = y_0$ , $z(x_0) = z_0$

**مثال (١)**

باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة اوجد حل المعادلتين

$$\frac{dy}{dx} = yz + x \, , \quad \frac{dz}{dx} = xz + y$$

$$y(0) = 1, \qquad z(0) = -1$$

ثم اوجد قيمة $y(0.2), z(0.2)$ .

$f_1 = yz + x$ , $f_2 = xz + y$

$x_0 = 0$ , $y_0 = 1$ , $z_0 = -1$

? 0.1 ?? 0 0.2

Let $h = 0.1$

**الحل**

حيث

$$f_1(x,y,z) = yz + x \quad , \qquad f_2(x,y,z) = xz + y$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = -1$$

بفرض ان $h = 0.1$

$$k_1 = hf_1(x_0, y_0, z_0) = (0.1)[(1)(-1)+0] = -0.1$$

$$l_1 = hf_2(x_0, y_0, z_0) = (0.1)[(0)(-1)+1] = 0.1$$

$$k_2 = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}) = hf_1(0.05, 0.95, -0.95)$$
$$= (0.1)[(0.95)(-0.95) + 0.05] = -0.08525$$
$$l_2 = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}) = hf_2(0.05, 0.95, -0.95)$$
$$= (0.1)[(0.05)(-0.95) + 0.95] = 0.09025$$

$$k_3 = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2})$$
$$= hf_1(0.05, 0.957375, -0.954875)$$
$$= (0.1)[(0.957375)(-0.954875) + 0.05] = -0.0864173$$
$$l_3 = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2})$$
$$= hf_2(0.05, 0.957375, -0.954875)$$
$$= (0.1)[(0.05)(-0.954875) + 0.957375] = -0.0909631$$

$$k_4 = hf_1(x + h, y + k_3, z + l_3)$$
$$= hf_1(0.1, 0.9135827, -0.9090369)$$
$$= (0.1)[(0.9135827)(-0.9090369) + 0.1]$$
$$= -0.073048$$
$$l_4 = hf_2(x + h, y + k_3, z + l_3)$$
$$= hf_2(0.1, 0.9135827, -0.9090369)$$
$$= (0.1)[(0.1)(-0.9090369) + 0.9135827]$$
$$= 0.822679$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= \frac{1}{6}[0.1 + 2(-0.08525) + 2(-0.0864173) - 0.073048]$$
$$= -0.0860637$$

$$l = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= \frac{1}{6}[0.1 + 2(0.09025) + 2(0.0909631) - 0.0822679]$$

$$= -0.0907823$$

$y_1 = y_0 + K$
$z_1 = z_0 + l$

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + k = 1 - 0.0860637 = 0.9139363$$

$$z_1 = z(0.1) = z_0 + l = -1 + 0.0907823 = -0.9092176$$

$$x_1 = 0.1, y_1 = 0.9139363, z_1 = -0.9092176$$

و لإيجاد $y(0.2), z(0.2)$ نتبع الاتي

$$k_1 = hf_1(x_1, y_1, z_1) = h(y_1 z_1 + x_1) = -0.0730966$$

$$l_1 = hf_2(x_1, y_1, z_1) = h(x_1 z_1 + y_1) = -0.08230145$$

$$k_2 = hf_1(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}, z_1 + \frac{l_1}{2})$$

$$= hf_1(0.15, 0.877388, -0.8680669)$$

$$= (0.1)[(0.877388)(-0.8680669) + 0.15] = -0.0611631$$

$$l_2 = hf_2(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}, z_1 + \frac{l_1}{2})$$

$$= hf_2(0.15, 0.877388, -0.8680669)$$

$$= (0.1)[(0.15)(-0.8680669) + 0.877388] = 0.0747177$$

$$k_3 = hf_1(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}, z_1 + \frac{l_2}{2})$$
$$= hf_1(0.15, 0.8833547, -0.8718587)$$
$$= (0.1)[(0.8833547)(-0.8718587) + 0.15] = -0.062016$$

$$l_3 = hf_2(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}, z_1 + \frac{l_2}{2})$$
$$= hf_2(0.15, 0.8833547, -0.8718587)$$
$$= (0.1)[(0.15)(-0.8718587) + 0.8833547] = 0.0750851$$

$$k_4 = hf_1(x + h, y + k_3, z + l_3)$$
$$= hf_1(0.2, 0.8519203, -0.8341324)$$
$$= (0.1)[(0.8519203)(-0.8341324) + 0.2]$$
$$= -0.0510614$$

$$l_4 = hf_2(x + h, y + k_3, z + l_3)$$
$$= hf_2(0.2, 0.8519203, -0.8341324)$$
$$= (0.1)[(0.2)(-0.8341324) + 0.8519203]$$
$$= 0.0685093$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حطي بالك من
الرموز

$$= \frac{1}{6}[-0.0730966 + 2(-0.0611631)$$
$$+ 2(-0.062016) - 0.0510614]$$
$$= -0.0617527$$

$$l = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$
$$= \frac{1}{6}[0.08230145 + 2(-0.0747177)$$
$$+ 2(0.0750851) + 0.0685093]$$
$$= 0.0750693$$

$$y_2 = y(0.2) = y_1 + k = 0.9139363 - 0.0617527$$
$$= 0.8521836$$

$$z_2 = z(0.2) = z_1 + l = -0.9092176 + 0.0750693$$
$$= -0.8341482$$

$y', y'', y''', \cdots, y^{(n)}$ أكبر من الرتبة الاولى

## (٢.٢) المعادلات التفاضلية العادية من الرتب العليا

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة $n$ هي

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

والقيم الابتدائية هي

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, y''(x_0) = \alpha_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

ويمكن حل هذه المعادلة التفاضلية بعد تحويلها الى نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى الذي تم شرح طريقة حله سابقا.

لتحويل المعادلة التفاضلية $(1)$ اعلاه الى نظام من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الاولى نفرض ان

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \cdots, y^{(n-1)})$$

$$y_1 = y,$$
$$y_2 = y',$$
$$y_3 = y'',$$
$$\vdots$$
$$y_n = y^{(n-1)}$$

let $y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \cdots, y^{(n-1)} = y_n$

$y_1' = y' = y_2, \; y_2' = y'' = y_3, \cdots, \; y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$

باشتقاق هذا النظام نحصل علي

$$y_1' = y' = y_2,$$
$$y_2' = y'' = y_3,$$
$$y_3' = y''' = y_4,$$
$$\vdots$$
$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots, y_n)$$

اي انه تم تحويل المعادلات التفاضلية من الرتب العليا الى نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى.

سوف نكتفي بحل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية باستخدام الطرق التي ذكرت سابقا.

### ١.١.٢ طريقة بيكارد لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (1)$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0 \,,\; y'(x_0) = y'_0$$

نكتب هذه المعادلة بشكل نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى وذلك بفرض ان

$$y' = z$$
$$z' = y'' = f(x, y, z)$$

$\frac{dy}{dx} = z$

$\frac{dz}{dx} =$ دالة $x, y, z$

اذن المعادلة التفاضلية $(1)$ حولت الى معادلتين تفاضليتين من الرتبة الاولى يمكن حلهم بطريقة بيكارد كما سبق.

**مثال (١)**

اوجد حل المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية التالية

$$\begin{cases} y'' + 2xy' + y = 0, \\ y(0) = 0.5,\; y'(0) = 0.1 \end{cases} \qquad (i)$$

وذلك باستخدام طريقة بيكارد عند $x = 0.1$.

**الحل**

نفرض ان

$$y' = z \;\Rightarrow\; y'' = z' = \frac{dz}{dx}$$

نظام

$\frac{dy}{dx} = z$ , $\frac{dz}{dx} = -(2xz+y)$

$\frac{dz}{dx} + 2x(z) + y = 0$

و بالتالي تتحول المعادلة $(i)$ الي

$$\frac{dz}{dx} + 2xz + y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = -(2xz + y)$$

اذن يمكن وضع المعادلة $(i)$ علي شكل النظام التالي

$$y' = z,$$
$$z' = -(2xz + y) \qquad \{y(0) = 0.5,\ y'(0) = 0.1\}$$

$x_0$ $y_0$ $z(0) = 0.1$ $z_0$ $y_0$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0 = 0.5,\ z(0) = z_0 = 0.1$$

نفرض ان

$$y' = f(x, y, z) = z, \qquad z' = \phi(x, y, z) = -(2xz + y)$$

باستخدام طريقة بيكارد نحصل علي

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)dx$$

$$z = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y, z)dx$$

التقريب الاول

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0, z_0)dx$$
$$= 0.5 + \int_{x_0}^{x} z_0 dx = 0.5 + \int_{x_0}^{x} (0.1)dx$$
$$= 0.5 + (0.1)x$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_0, z_0)dx$$
$$= 0.1 - \int_{x_0}^{x} (2xz_0 + y_0)dx = 0.1 - \int_{x_0}^{x} (0.2x + 0.5)dx$$
$$= 0.1 - (0.5)x - (0.1)x^2$$

التقريب الثاني

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1, z_1)dx$$

$$= 0.5 + \int_{x_0}^{x} z_1 dx = 0.5 + \int_{x_0}^{x} (0.1 - (0.5)x - (0.1)x^2)dx$$

$$= 0.5 + (0.1)x - \frac{(0.5)x^2}{2} - \frac{(0.1)x^3}{3}$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_1, z_1)dx$$

$$= 0.1 - \int_{x_0}^{x} (2xz_1 + y_1)dx$$

$$= 0.1 - \int_{x_0}^{x} \left[(2x(0.1 - 0.5x - 0.1x^2) + (0.5 + 0.1x)\right]dx$$

$$= 0.1 - (0.5)x - \frac{(0.3)x^2}{2} - \frac{(2.5)x^3}{6} + \frac{(0.2)x^4}{4}$$

التقريب الثالث

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2, z_2)dx$$

$$= 0.5 + \int_{x_0}^{x} z_2 dx = 0.5 + \int_{x_0}^{x} \left[0.1 - 0.5x + \frac{0.3}{2}x^2 - \frac{2.5}{6}x^3 + \frac{0.1}{4}x^4\right]dx$$

$$= 0.5 + (0.1)x - \frac{(0.5)x^2}{2} - \frac{(0.1)x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{(0.1)x^5}{10}$$

$$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(x, y_2, z_2)dx$$

$$= 0.1 - \int_{x_0}^{x} (2xz_2 + y_2)dx$$

$$= 0.1 - (0.5)x - \frac{(0.3)x^2}{2} - \frac{(2.5)x^3}{6} + \frac{(0.2)x^4}{4} + \frac{2x^5}{15} + \frac{(0.1)x^6}{6}$$

و الا ن عند $x = 0.1$

$$y_1 = 0.51, y_2 = 0.50746667, y_3 = 0.50745933,$$

$z_1, z_2, z_3$ قبل تغير

ويكون

$$y(0.1) = 0.5075$$

صحيح الي اربعة ارقام عشرية.

### ٢.٢.٢ طريقة تايلور

نفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (1)$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0$$

بتحويل هذه المعادلة الى معادلتين من الرتبة الاولى كالاتي

$$y' = z \qquad (2)$$

$$z' = f(x, y, z) \Rightarrow y'' = z' = f(x, y, z) \qquad (3)$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$$

باستخدام مفكوك تايلور للمعادلة $(3)$ يكون

$z' = f$

$$z_1 = z_0 + hz'_0 + \frac{h^2}{2!}z''_0 + \frac{h^3}{3!}z'''_0 + \cdots \qquad (4)$$

و مفكوك تايلور للمعادلة $(2)$ يكون

$y' = z$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \cdots \\ &= y_0 + hz_0 + \frac{h^2}{2!}z'_0 + \frac{h^3}{3!}z''_0 + \cdots \quad \rightarrow (5) \end{aligned}$$

حيث $z'_0, z''_0, z'''_0$ يمكن الحصول عليهم بتفاضل المعادلة $(2)$.

بالتعويض في المعادلات $(4)$،$(5)$ نحصل على $z_1, y_1$.

بالمثل يمكن الحصول على $z_2, y_2$ كالاتي

$$z_2 = z_1 + hz'_1 + \frac{h^2}{2!}z''_1 + \frac{h^3}{3!}z'''_1 + \cdots$$

$y' = z$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hy'_1 + \frac{h^2}{2!}y''_1 + \frac{h^3}{3!}y'''_1 + \cdots \\ &= y_1 + hz_1 + \frac{h^2}{2!}z'_1 + \frac{h^3}{3!}z''_1 + \cdots \end{aligned}$$

حيث $y_1, z_1$ قد تم حسابهما و هكذا بالنسبة لباقي الفترات.

**مثال (١)**

باستخدام مفكوك تايلور عند $x = 0.1, 0.2$ اوجد حل المعادلة التفاضلية الاتية

$$y'' - x(y')^2 + y^2 = 0$$

ذات الشرط الابتدائي

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

**الحل**

بوضع

$$y' = z \quad \Rightarrow y'' = z'$$

اذن المعادلة التفاضلية تاخذ الصورة

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = xz^2 - y^2 \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0 = 1,$$
$$z(0) = z_0 = 0$$

باستخدام مفكوك تايلور

$$z_1 = z_0 + hz'_0 + \frac{h^2}{2!} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0 + \cdots \qquad \text{(ii)}$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0 + \frac{h^4}{4!} y^{iv}_0 + \cdots \qquad \text{(iii)}$$

من (i) نحصل علي

$$z' = xz^2 - y^2, \qquad y'' = z'$$
$$z'' = z^2 + 2xzz' - 2yy', \qquad y''' = z''$$
$$z''' = 2zz' + 2[xzz' + x(z')^2 + zz']$$
$$- 2[yy'' + (y')^2], \qquad y^{iv} = z'''$$

و يكون

$$z'_0 = x_0 z_0^2 - y_0^2 = (0)(0)^2 - (1)^2 = -1$$
$$z''_0 = z_0^2 + 2x_0 z_0 z'_0 - 2y_0 y'_0$$
$$= (0)^2 + 2(0)(0)(-1) - 2(1)(0) = 0$$

$$z_0''' = 2z_0 z_0' + 2[x_0 z_0 z_0' + x_0 (z_0')^2 + z_0 z_0']$$
$$-2[y_0 y_0'' + (y_0')^2]$$
$$= 2(0)(-1) + 2[(0)(0)(-1) + (0)(-1)^2 + (0)(-1)]$$
$$-2[(1)(-1) + (0)^2] = 2$$

بالتعويض في (ii) ، (iii) نحصل علي

$$z_1 = 0 + (0.1)(-1) + \frac{(0.1)^2}{2!}(0) + \frac{(0.1)^3}{3!}(2) + \cdots$$
$$= -0.0997$$

$$y_1 = y(0.1) = 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-1) + \frac{(0.1)^3}{3!}(0) + \frac{(0.1)^4}{4!}(2) + \cdots$$
$$= 0.9950083 \approx 0.995$$

بالمثل

$$y_2 = y(0.2) = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!} y_1'' + \frac{h^3}{3!} y_1''' + \frac{h^4}{4!} y_1^{iv} + \cdots$$
$$= y_1 + hz_1 + \frac{h^2}{2!} z_1' + \frac{h^3}{3!} z_1'' + \frac{h^4}{4!} z_1''' + \cdots \qquad \text{(iv)}$$

هنا

$$y_1 = 0.995, \qquad z_1 = -0.0997$$
$$z_1' = x_1 z_1^2 - y_1^2 = (0.1)(-0.0997) - (0.995)^2$$
$$= -0.9890309$$
$$z_1'' = z_1^2 + 2x_1 z_1 z_1' - 2y_1 y_1' = -0.1687416$$

بالتعويض في (iv)

$$y_2 = 0.995 + \frac{(0.1)}{1!}(-0.0997) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-0.9890309)$$
$$+ \frac{(0.1)^3}{3!}(-0.1687416) + \cdots = 0.9801129 \approx 0.9801$$

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{1!}z_1' + \frac{h^2}{2!}z_1'' + \frac{h^3}{3!}z_1''' + \cdots$$
$$= -0.0997 + \frac{(0.1)}{1!}(-0.0997) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-0.9890309)$$
$$+ \frac{(0.1)^3}{3!}(-0.1687416) = -0.1145871$$

بالتالي يكون لدينا

$$y(0.1) = 0.9950\ ,\ \ y(0.2) = 0.9801$$

### ٣.٢.٢ طريقة رونج كوتا

نفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y'' = f(x, y, y')$$

ذات الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0\ ,\ \ y'(x_0) = y_0'$$

بفرض ان

$$y' = z \Rightarrow y'' = z'$$

هذه المعادلة تحولت الى معادلتين من الرتبة الاولى

$$y' = z = f_1(x, y, z)$$
$$y'' = z' = f_2(x, y, z)$$
$$y(x_0) = y_0\ , z(x_0) = z_0$$

واللذين يمكن حلهما باستخدام طريقة رونج كوتا.

مثال (١)

باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة، اوجد حل المعادلة التفاضلية الاتية

$$y'' = xy' - y, y(0) = 3, y'(0) = 0$$

عند النقطة $x = 0.1$.

**الحل**

نفرض ان

$$\begin{aligned} &y' = z = f_1(x, y, z), \\ &z' = xz - y = f_2(x, y, z) \\ &y(0) = 3, z(0) = 0, \end{aligned}$$

هنا

$$x_0 = 0, y_0 = 3, z_0 = 0$$

باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة

$$k_1 = hf_1(x_0, y_0, z_0) = h(z_0) = (0.1)(0) = 0$$

$$\begin{aligned} l_1 &= hf_2(x_0, y_0, z_0) = h(x_0 z_0 - y_0) \\ &= (0.1)[(0)(0) - 3] = -0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}) = hf_1(0.05, 3, -0.15) \\ &= (0.1)(-0.15) = -0.015 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}) = hf_2(0.05, 3, -0.15) \\ &= (0.1)[(0.05)(-0.15) - 3] = 0.030075 \end{aligned}$$

$$k_3 = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2})$$
$$= hf_1(0.05, 2.9925, -0.150375)$$
$$= (0.1)(-0.150375) = -0.0150375$$

$$l_3 = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2})$$
$$= hf_2(0.05, 2.9925, -0.150375)$$
$$= (0.1)[(0.05)(-0.150375) - 2.9925] = -0.03000018$$

$$k_4 = hf_1(x + h, y + k_3, z + l_3)$$
$$= hf_1(0.1, 2.9849624, -0.3000018)$$
$$= (0.1)(-0.3000018) = -0.03000018$$

$$l_4 = hf_2(x + h, y + k_3, z + l_3)$$
$$= hf_2(0.1, 2.9849624, -0.3000018)$$
$$= (0.1)[(0.1)(-0.3000018) - 2.9849624]$$
$$= -0.3014962$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= \frac{1}{6}[0 + 2(-0.015) + 2(-0.0150375) - 0.03000018]$$
$$= -0.0150125$$

$$l = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$
$$= \frac{1}{6}[-0.3 + 2(-0.30075) + 2(-0.3000018) - 0.3014962]$$
$$= -0.3004999$$

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + k = 3 - 0.0150125 = 2.9849875$$

$$z_1 = z(0.1) = z_0 + l = 0 - 0.3004999 = -0.3004999$$

# الباب الثالث

## (١.٣) الطرق متعددة الخطوات

الطرق السابقة التي درسناها تحتاج فقط معرفة الحل عند نقطة واحدة $\boxed{x = x_0}$ للحصول على $y$ عند $x = x_{n+1}$ ولكن الطرق متعددة الخطوات تحتاج معرفة الحل عند اكثر من نقطة للحصول على الحل المطلوب وهذه الطرق تحتاج حساب $y(x), y'(x)$ عند النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ و تعتمد هذه الطرق على التكامل العددي للمعادلات التفاضلية.

### ١.١.٣ طريقة ادم باشفورث (Adams Bashforth)

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات التفاضلية التي في الصورة

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)dx$

بتكامل الطرفين من $x_n$ الي $x_{n+1}$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

او

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

لتكامل الطرف الايمن من هذه المعادلة نقرب الدالة $f(x, y)$ في صورة كثيرة حدود من الدرجة الثانية باستخدام صيغة نيوتن للفروق الخلفية

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f_n + q\nabla f_n + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \cdots]dx$$

باستخدام التعويض

$$x = x_n + qh \quad \Rightarrow dx = hdq$$
$$x = x_n \quad \Rightarrow q = 0,$$
$$x = x_{n+1} \Rightarrow q = 1, (\text{since } x_{n+1} - x_n = h)$$

يتحول التكامل السابق الي

$$y_{n+1} = y_n + h\int_0^1 [f_n + q\nabla f_n + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \cdots]dq$$

$$y_{n+1} = y_n + h[qf_n + \frac{q}{2}\nabla f_n + \frac{(q^3/3) + (q^2/2)}{2!}\nabla^2 f_n]_0^1$$

ومنها نحصل علي

$$y_{n+1} = y_n + h[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n]$$

ثم بالتعويض عن $\nabla f_n, \nabla^2 f_n$

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1},$$
$$\nabla^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

مهم لازم

$$y_{n+1} = y_n + h[f_n + \frac{1}{2}(f_n - f_{n-1}) + \frac{5}{12}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})]$$

$n=2 \quad y_3 = y_2 + \frac{h}{12}(23 f_2 \cdots$

$f(x_2, y_2)$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}), n \geq 2}$$

يعني لازم يكون عندي

$y_0, y_1, y_2 = y(x_0), y(x_1), y(x_2)$

هذه المعادلة تمثل طريقة ادم لحل معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى عند نقطة معينة

**مثال (١)**

باستخدام طريقة ادم باشفورث اوجد حل المعادلة التفاضلية الاتية

$$y' = -y^2 \,, y(0) = 1, h = 0.1$$

$x_0$ $y_0$

ثم اوجد $y(0.3)$.

**الحل**

باستخدام طريقة ادم باشفورث من الدرجة الثالثة و هي

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23\,f_n - 16\,f_{n-1} + 5\,f_{n-2}),\ n \geq 2$$

اذن طريقة ادم تحتاج الى معرفة ثلاث قيم متتالية للدالة $f(x,y)$ احدى هذه القيم يمكن الحصول عليها مباشرة من القيمة الابتدائية و القيمتين التاليتين للدالة $f(x,y)$ نحصل عليهما باستخدام احدى طرق الخطوة الواحدة السابقة.

في هذا المثال نختار طريقة تايلور

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \cdots$$

حيث

$$y'_n = -y_n^2$$

$$y''_n = -2y_n y'_n = -2y_n(-y_n^2) = 2y_n^3$$

$$y'''_n = 6y_n^2 y'_n = 6y_n^2(-y_n^2) = -6y_n^4$$

$$\boxed{\therefore\ y_{n+1} = y_n + h(-y_n^2) + \frac{h^2}{2!}(2y_n^3) + \frac{h^3}{3!}(-6y_n^4) + \cdots}$$

$$y_1 = y_0 - hy_0^2 + h^2 y_0^3 - h^3 y_0^4$$

$$= 1 - (0.1)(1)^2 + (0.1)^2(1)^3 - (0.1)^3(1)^4 = 0.909$$

$$y'_1 = -y_1^2 \ \Rightarrow y'_1 = -(0.909)^2 = -0.826281$$

$$\therefore\ f_1 = -0.826281$$

$f(x,y) = -y^2$

$f_0 = -y_0^2 = -1$

$f_1 = -y_1^2 = -(0.909)^2$

$f_2 = -y_2^2 = -(\quad)$

$$y_2 = y_1 - hy_1^2 + h^2 y_1^3 - h^3 y_1^4$$
$$= 0.909 - (0.1)(0.909)^2 + (0.1)^2 (0.909)^3 - (0.1)^3 (0.909)^4$$
$$= 0.833200055$$
$$\therefore y_2' = -y_2^2 \Rightarrow y_2' = -(0.833200055)^2$$
$$= -0.69422233$$

$$\therefore f_2 = -0.69422233$$

باستخدام ادم باشفورث

$$y_3 = y_2 + \frac{0.1}{12}(23 f_2 - 16 f_1 + 5 f_0)$$
$$= 0.83300054 + \frac{0.1}{12}[23(-0.69422233)$$
$$-16(-0.826281) + 5(-1)] = 0.7686449074$$

### ٢.١.٣ طريقة ادم ميلتون (Adam's Maulton method)

هذه الطريقة من طرق الخطوة المتعددة ولكنها تختلف عن طريقة ادم باشفورث السابقة في انها طريقة ضمنية اي انها تصحح القيمة المتوقعة قبل الانتقال الى الخطوة التالية

نعتبر ان لدينا المعادلة التفاضلية الاتية

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

بتكامل طرفي المعادلة من $x_n$ الى $x_{n+1}$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)\,dx$$

لتكامل الطرف الايمن من هذه المعادلة نقرب الدالة $f(x, y)$ في صورة كثيرة حدود و ذلك باستخدام صيغة نيوتن للاستكمال الخلفي

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [\, f_{n+1} + q\nabla f_{n+1} + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 f_{n+1} + \ldots]dx$$

باستخدام التعويض

$$x = x_{n+1} + qh \;\Rightarrow dx = hdq$$

$$x = x_n \;\Rightarrow q = -1,$$

$$x = x_{n+1} \Rightarrow q = 0, \left(\text{since } x_{n+1} - x_n = h\right)$$

نحصل علي

$$y_{n+1} = y_n + \int_{-1}^{0} [\, f_{n+1} + q\nabla f_{n+1} + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 f_{n+1} + \ldots]dq$$

بتكامل المعادلة السابقة

$$y_{n+1} = y_n + h[q f_{n+1} + \frac{q}{2}\nabla f_{n+1} + \frac{(q^3/3)+(q^2/2)}{2!}\nabla^2 f_{n+1}]_{-1}^{0}$$

ثم بالتعويض عن $\nabla f_{n+1}, \nabla^2 f_{n+1}$

التزم
الاول

$$\nabla f_{n+1} = f_{n+1} - f_n\,,$$
$$\nabla^2 f_{n+1} = f_{n+1} - 2 f_n + f_{n-1}$$

نحصل على

$$y_{n+1} = y_n + h[\, f_{n+1} - \frac{1}{2}(\, f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{12}(\, f_{n+1} - 2 f_n + f_{n-1})]$$

ومنها نحصل على

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \quad n \geq 1} \qquad (1)$$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{12}(5f_2 + 8f_1 - f_0)$

هذه المعادلة تمثل طريقة ادم ميلتون لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى عند نقطة معينة.

**مثال (١)**

باستخدام طريقة ادم ميلتون اوجد $y(0.4)$ للمعادلة التفاضلية الاتية

$$y' = x + y, y(0) = 1, h = 0.1$$

$f(x,y) = x+y$

**الحل**

لتعيين $y(0.4)$ بطريقة ادم ميلتون و ذلك باستخدام المعادلة $(1)$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{12}(5\,f_4 + 8\,f_3 - f_2)$$

ولتعين $f_4$ لابد من الاستعانة بطريقة صريحة و لتكن ادم باشفورث

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{12}(23f_3 - 16f_2 + 5f_1) \qquad (3)$$

وكذلك

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12}(23f_2 - 16f_1 + 5f_0) \qquad (4)$$

والمطلوب هنا هو ايجاد $f_1, f_2$ و لتعيين ذلك لابد من الاستعانة ايضا بطريقة من طرق الخطوة الواحدة و لتكن رونج كوتا حيث

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (5)$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = h[x_0 + y_0] = (0.1)(1) = 0.1$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.1)\, f\,(0.05, 1.05)$$
$$= (0.1)[0.05 + 1.05] = 0.11$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = hf\,(0.05, 1.055)$$
$$= (0.1)[0.05 + 1.055] = 0.11050$$

$$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = hf\,(0.1, 1.1105)$$
$$= (0.1)[0.1 + 1.1105] = 0.12105$$

بالتعويض في المعادلة $(5)$ نحصل علي

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$
$$= 1.0 + \frac{1}{6}[0.1 + 0.22 + 0.221 + 0.12105]$$
$$= 1.11034$$

وبالمثل يمكن ايجاد $y_2$ باستخدام طريقة رونج كوتا مرة اخرى نجد ان $y_2 = 1.2428$

$$y' = f\,(x, y) = x + y$$

$$f_1 = x_1 + y_1 = 0.1 + 1.1034$$
$$= 1.21034$$

$$f_2 = x_2 + y_2 = 0.2 + 1.2428$$
$$= 1.4428$$

وبالتعويض $f_1, f_2$ في المعادلة $(4)$ نحصل على $y_3$ من خلال طريقة ادم باشفورث

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12}(23 f_2 - 16 f_1 + 5 f_0)$$

$$= 1.2428 + \frac{0.1}{12}[23(1.4428)$$

$$-16(1.21034) + 5(1)] = 1.399624667$$

$$f_3 = x_3 + y_3 = 0.3 + 1.399624667$$

$$= 1.699625$$

ثم بالتعويض عن $f_3 , y_3$ في المعادلة $(3)$ نحصل على $y_4$ من خلال طريقة ادم باشفورث

$$y_4^{(P)} = y_3 + \frac{h}{12}(23 f_3 - 16 f_2 + 5 f_1)$$

$$= 1.39962447 + \frac{0.1}{12}[23(1.699635) - 16(1.4428)$$

$$+ 5(1.21034)] = 1.583443599$$

$$f_4 = x_4 + y_4^{(P)} = 0.4 + 1.583443899$$

$$= 1.98344$$

ثم بالتعويض في المعادلة $(2)$ (طريقة ادم ميلتون) للحصول على المطلوب

$$y_4^{(C)} = 1.399624667 + \frac{0.1}{12}[5(1.98344)$$

$$+ 8(1.699625) - 1.4425]$$

$$= 1.58385045$$

**ملحوظة:** يمكن ايضا ايجاد $y_3$ باستخدام طريقة رونج كوتا بدلا من ادم باشفورث.

### ٣.١.٣ طريقة ميلن (Milne's method)

هذه الطريقة من الطرق متعددة الخطوات لكنها تختلف عن طريقة ادمز السابقة في انها تصحح القيمة المتوقعة قبل الانتقال الى الخطوة التالية. و كذلك تحتاج لمعرفة قيم $y$ عند اربعة نقاط متتالية $x_n , x_{n-1} , x_{n-2} , x_{n-3}$ للحصول علي قيمة $y$ عند النقطة $x_{n+1}$.

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

بتكامل المعادلة (١) من $x_{n-3}$ الي $x_{n+1}$ نحصل على

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} dy = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$$

كما في طريقة ادم نحول الدالة $f(x, y)$ الى كثيرة حدود من الدرجة الثانية وذلك باستخدام طريقة نيوتن للاستكمال الخلفي فتصبح المعادلة في الصورة الاتية

$$y_{n+1} - y_{n-3} = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} \left( f_n + q\nabla f_n + \frac{q(q+1)}{2!} \nabla^2 f_n + E \right) dx$$

حيث

$$E = \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} h^3 f^{(3)}(\xi), \; x_{n-3} \le \xi \le x_{n+1}$$

باستخدام التعويض

$$x = x_n + qh \Rightarrow dx = hdq$$

$$q = 1, q = -3$$

$$y_{n+1} = y_{n-3} + h \int_{-3}^{1} \left( f_n + q\nabla f_n + \frac{q(q+1)}{2!} \nabla^2 f_n \right) dq + E$$

باجراء التكامل بالنسبة للمتغير $q$ نحصل على

$$y_{n+1} = y_{n-3} + 4h \left( f_n - \nabla f_n + \frac{2}{3} \nabla^2 f_n \right) + O\left(h^5\right)$$

بالتعويض عن $\nabla f_n, \nabla^2 f_n$ باستخدام الفروق نحصل على

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}\right) + O\left(h^5\right)$$

$y_{n+1}$ الناتجة من هذه المعادلة تسمى القيمة المتوقعة ويرمز لها بالرمز $y_{n+1}^{(P)}$ ولتصحيح او تحسين هذه القيمة نستخدم طريقة سمبسون للتكامل. بتكامل المعادلة (١) من $x_{n-1}$ الى $x_{n+1}$ وايضا تغيير حدود التكامل كما سبق نحصل على

$$y_{n+1} = y_{n-3} + h\int_{-1}^{1}\left(f_n + q\Delta f_n + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_n + \cdots\right)dq$$

بالتكامل ثم بالتعويض عن $\Delta f_n, \Delta^2 f_n$ نحصل على

$$\boxed{y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_{n-1} + f_{n-1}\right)}$$

هذه القيمة $y_{n+1}$ والتي يرمز لها بالرمز $y_{n+1}^{(C)}$ تسمى القيمة الصحيحة للقيمة $y_{n+1}^{(P)}$.

**ملحوظة:** هذه الطريقة تتطلب معرفة اربعة قيم على الاقل للدالة المطلوبة $y$ لو ان الاربعة قيم الاولى لـ $y$ غير معطاة فانه يمكننا تعيينها باستخدام احدى الطرق كطريقة بيكارد او طريقة اويلر او طريقة رونج كوتا.

**مثال (١)**

لدينا المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$$

$$y(0) = 2, y(0.2) = 2.0933,$$
$$y(0.4) = 2.1755, y(0.6) = 2.2493$$

اوجد $y(0.8)$ باستخدام طريقة ميلن.

**الحل**

$y' = f \Rightarrow f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$



$$y_{n+1}^{(P)} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}\right) \qquad (1)$$

حيث $y_{n+1}^{(P)}$ هي القيمة المتوقعة لـ $y_{n+1}$.

لدينا

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, h = 0.2$$
$$y_0 = 2, y_1 = 2.0933, y_2 = 2.1755, y_3 = 2.2493$$

بوضع $n = 3$ في المعادلة $(1)$ فان القيمة المتوقعة تكون

$$y_4^{(P)} = y_0 + \frac{4h}{3}\left(2y'_3 - y'_2 + 2y'_1\right) \qquad (2)$$

$$y'_1 = \frac{1}{x_1 + y_1} = \frac{1}{0.2 + 2.0933} = 0.4360528$$

$$y'_2 = \frac{1}{x_2 + y_2} = \frac{1}{0.4 + 2.1755} = 0.3882741$$

$$y'_3 = \frac{1}{x_3 + y_3} = \frac{1}{0.6 + 2.2493} = 0.3509633$$

ثم بالتعويض في المعادلة $(2)$ نحصل على

$$y_4^{(P)} = 2 + \frac{4(0.2)}{3}\left[2(0.3509633) - (0.3882741) + 2(0.4360528)\right] = 2.3162022 \qquad (3)$$

والان معادلة ميلن للقيمة الصحيحة هي

$$y_{n+1}^{(C)} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(y'_{n-1} + y'_n + y'_{n+1}\right) \qquad (4)$$

حيث $y_{n+1}^{(C)}$ هي القيمة الصحيحة لـ $y_{n+1}$.

بوضع $n=3$ نحصل علي

$$y_4^{(C)} = y_2 + \frac{h}{3}\left(y_2' + 4y_3' + y_4'\right) \qquad (5)$$

من المعادلة $(3)$ نحصل على

$$y_4^{(P)} = 2.3162022,\ x_4 = 0.8$$
$$y_4' = \frac{1}{x_4 + y_4^{(P)}} = \frac{1}{0.8 + 2.3162022} = 0.3209034$$

من المعادلة $(5)$ نحصل على

$$\begin{aligned} y_4^{(C)} &= 2.1755 + \frac{0.2}{3}[0.3882741 + 4(0.3509633) \\ &\quad + 0.3209034] \\ &= 2.3163687 \end{aligned}$$
$$y(0.8) = y_4 = 2.3164$$

**مثال (٢)**

اوجد حل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)y,\ y(0) = 1$$

باستخدام طريقة ميلن و ذلك لحساب $y(0.4)$. احسب قيم $y$ عند $x=0.1,0.2,0.3$ باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة.

**الحل**

نحسب $y(0.1), y(0.2), y(0.3)$ باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة لنحصل على

$$y(0.1) = 1.11689,\ y(0.2) = 1.27739,\ y(0.3) = 1.50412,$$

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 1$$
$$x_1 = 0.1, \qquad y_1 = 1.11689$$
$$x_2 = 0.2, \qquad y_2 = 1.27739$$
$$x_3 = 0.3, \qquad y_3 = 1.1.50412$$

معادلة ميلن للقيمة المتوقعة هي

$$y_4^{(P)} = y_0 + \frac{4h}{3}\left(2y_3' - y_2' + 2y_1'\right) \qquad (1)$$

$$y' = (x+y)y$$

$$y_1' = (x_1 + y_1)y_1 = (0.1 + 1.11689)(1.11689) = 1.3591323$$

$$y_2' = (x_2 + y_2)y_2 = (0.2 + 1.27739)(1.27739) = 1.8872032$$

$$y_3' = (x_3 + y_3)y_3 = (0.3 + 1.50412)(1.50412) = 2.713613$$

بالتعويض في المعادلة $(1)$ نحصل على

$$y_4^{(P)} = 1 + \frac{4(0.1)}{3}\big[2(2.713613) - 1.8872032 \\ + 2(1.3591323)\big] = 1.8344383 \qquad (2)$$

والان معادلة ميلن للقيمة الصحيحة هي

$$y_4^{(C)} = y_2 + \frac{h}{3}\left(y_2' + 4y_3' + y_4'\right) \qquad (3)$$

من المعادلة $(2)$ نحصل على

$$y_4^{(P)} = 1.8344383, \; x_4 = 0.4$$

$$y_4' = \left(x_4 + y_4^{(P)}\right) y_4^{(P)} = (0.4 + 1.8344383)(1.8344383) \\ = 4.0989392$$

من المعادلة (3) نحصل على

$$y_4^{(C)} = 1.27739 + \frac{0.1}{3}\left[1.8872032 + 4(2.713613)\right.$$
$$\left.+4(4.0989392)\right]$$
$$= 1.8387431$$
$$y_4 = y(0.4) = 1.83874$$

**مثال (٣)**

اوجد للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$$

قيمة $y(0.5)$.

**الحل**

باستخدام معادلة ميلن للقيمة المتوقعة

$$y_{n+1}^{(P)} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}\right)$$

يلزم تعيين اربعة قيم لـ $y$ لذلك نستخدم طريقة رونج كوتا لتعيين $y$ و منها $f(x,y)$ المقابلة القيم التالية عبارة عن قيم $y$ و قيم $f(x,y)$ المناظرة لها

| $x$ | $y$ | $y' = f(x,y) = x + y$ |
|---|---|---|
| 0 | $y_{n-3} = 1$ | $f_{n-3} = 1$ |
| 0.1 | $y_{n-2} = 1.11$ | $f_{n-2} = 1.210$ |
| 0.2 | $y_{n-1} = 1.242$ | $f_{n-1} = 1.442$ |
| 0.3 | $y_n = 1.399$ | $f_n = 1.699$ |

$$y_4^{(P)} = 1 + \frac{4(0.1)}{3}\left[2(1.699) - (1.442) + 2(1.210)\right] = 1.58364$$

لحساب $y_{n+1}^{(C)}$ **نعين** $f_{n+1}$ **حيث**

$$f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{P}) = f(0.4,1.584) = 1.984$$

**و حيث ان**

$$y_4^{(C)} = y_2 + \frac{h}{3}\left(y_2' + 4y_3' + y_4'\right)$$

فان

$$y_4^{(C)} = 1.242 + \frac{(0.1)}{3}\left[1.984 + 4(1.699) + 1.442\right] = 1.58364$$

لاحظ ان $y_{n+1}^{(C)}$ , $y_{n+1}^{(P)}$ , لهما نفس القيمة اي لم يحدث تحسن في قيمة $y$ والان اصبح لدينا قيم الدالة $f$ جاهزة اي لا نحتاج الى استخدام طريقة رونج كوتا (نستخدم طريقة رونج كوتا في البداية فقط)

$$y_{n+1}^{(P)} = y(0.5) = 2.29742$$

$$y_{n+1}^{(C)} = y(0.5) = 2.29742$$

# الباب الرابع

## (١.٤) مسائل القيم الحدية ذات النقطتين في المعادلات التفاضلية العادية

### ١.١.٤ طريقة الفروق المحدودة

تحاول هذه الطريقة التعبير عن المعاملات التفاضلية في المعادلات بفروق بين قيم المتغيرات عند نقاط بينها مسافات متساوية فمثلا من مفكوك تايلور للدالة $y(x)$ اذا كانت النقطة $(x_n, y_n)$ فان النقطة المجاورة لها من اليمين هي $(x_n + h, y_n)$ و من اليسار هي $(x_n - h, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}_n + O(h^5) \qquad (1)$$

$$y_{n-1} = y_n - hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n - \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}_n + O(h^5) \qquad (2)$$

بالطرح فان

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hy'_n + O(h^3)$$

اي ان

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2) \qquad (3)$$

و بالجمع فان

$$y_{n+1} + y_{n-1} = 2y_n + h^2 y''_n + O(h^4)$$

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y''_n + O(h^2)$$

اي ان

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2) \qquad (4)$$

من المعادلة $(3)$ يمكن تقريب التفاضل الاول للدالة $y(x)$ عند النقطة $(x_n, y_n)$ بالشكل الاتي

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$

يكون خطأ الاقتطاع الموضعي من رتبة $O(h^2)$.

ويمكن تقريب التفاضل الثاني للدالة باستخدام المعادلة $(4)$ كالاتي

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$

ويكون خطا الاقتطاع الموضعي من رتبة $O(h^2)$.

**مثال (١)**

استخدم طريقة الفروق المحدودة لحل مسالة القيمة الحدية ذات النقطتين الاتية

$$y'' + xy' - y = x^2 \,, y(0) = 1, y(2) = 1$$

**الحل**

بفرض ان $h = 0.5$ و بالتعويض بصور الفروق المحدودة لـ $y'_n \,, y''_n$

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{(0.5)^2} + \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2(0.5)} x_n - y_n = x_n^2$$

$$4\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right) + x_n\left(y_{n+1} - y_{n-1}\right) - y_n = x_n^2$$

$$\left(4 + x_n\right) y_{n+1} - 9y_n + \left(4 - x_n\right) y_{n-1} = x_n^2$$

$$n = 1 \;\Rightarrow x_n = 0.5\,; \frac{9}{2} y_2 - 9y_1 + \frac{7}{2} y_0 = \frac{1}{4}; y_0 = 1$$

$$n = 2 \;\Rightarrow x_n = 1; 5y_3 - 9y_2 + 3y_1 = 1$$

$$n = 3 \;\Rightarrow x_n = \frac{3}{2}; \frac{11}{2} y_4 - 9y_3 + \frac{5}{2} y_2 = \frac{9}{4}; y_4 = 1$$

التي تكتب في الصورة

$$-9y_1 + 4.5y_2 = -\frac{13}{4}$$

$$y_1 - 9y_2 + 5y_3 = 1$$

$$2.5y_2 - 9y_3 = -\frac{13}{4}$$

بحل نظام المعادلات السابق نحصل على حل المعادلة التفاضلية عند النقاط $x = 1/2, 1, 3/2$ وباختيار

قيمة لـ $h < 0.5$ نحصل علي الحلول عند نقاط اكثر ومتقاربة من بعضها و في هذه الحالة يتطلب حل عدد من المعادلات اكبر.

### ٢.١.٤ طريقة التنشين

يتم محاكاة فكرة التنشين بطريقة مناظرة لحل مسالة القيمة الحدية ذات النقطتين

$$y' = f(x, y, y'),\ y(x_0) = y_0\ , y(x_n) = y_n$$

والفكرة تبدأ من تخمين قيمة ابتدائية للمعامل التفاضلي $y'(x_0)$ و لتكن $y'(x_0) = \alpha$ و استخدام طريقة من طرق حل مسائل القيمة الابتدائية لإيجاد الحل عند النقاط $x_1, x_2, \cdots, x_n$ فاذا وصلنا الى قيمة تقريبية للدالة عند $x_n$ وكانت تقترب من القيمة الحدية $y_n = y(x_n)$ يكون هذا التخمين ناجح. اما اذا اختلفت القيمة فيمكن محاكاة فكرة التنشين مع زيادة $\alpha$ او انقاصها و استخدام طريقة من طرق حل مسائل القيمة الابتدائية مرة ثانية لمحاولة الوصول الى حل اخر عند $x_n$ يكون قريبا قربا كافيا من القيمة الحدية $y_n = y(x_n)$ وهكذا حتى يتم المطلوب. عادة يستخدم برنامج رياضي لتحديد احسن قيم لاختيار $\alpha$ باستخدام طرق حل المعادلات غير الخطية.

## الحلول العددية للمعادلات الجبرية الخطية

**العديد من مشاكل التحليل العددي تتحول الى مشكلة حل مجموعة من المعادلات الخطية ومن بين هذه المشاكل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية باستخدام طرق الفروق المنتهية، وكذلك حل مشاكل توفيق المنحنيات باستخدام طريقة المربعات الصغرى واستخدام المصفوفات في هذا المجال ليست فقط مناسب ولكنه فعال في استنتاج العلاقات الاساسية.**

**يمكننا كتابة مجموعة من المعادلات الخطية**

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

**في صورة مبسطة باستخدام المصفوفات كالتالي**

$$AX = B$$

**حيث**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

**فمثلا**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 41 \end{bmatrix}$$

**هي نفس مجموعة المعادلات**

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 11$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 41$$

**المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها اصفارا ماعدا عناصر القطر الرئيسي $a_{ii}$ تسمى مصفوفة قطرية. و اذا كانت عناصر القطر الرئيسي متساوية و تساوي واحد فان المصفوفة تسمى مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز $I$.**

**اذا كانت كل العناصر فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر فان المصفوفة تسمى مصفوفة مثلثية عليا. اذا كانت العناصر التي اسفل القطر الرئيسي مساوية للصفر تسمى مصفوفة مثلثية سفلى. وعلى سبيل المثال المصفوفتان التاليتان من الرتبة الثالثة، الاولي $L$ مثلثية سفلي والثانية $U$ مثلثية عليا**

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**وحيث انه قد تظهر في المجالات العلمية مجموعة معادلات قد تصل الى مئات الالاف من المعادلات في نفس العدد من المجاهيل لذلك نحتاج الى عملية يمكن استخدامها بسهولة لحل مثل هذه النوعية من المشكلات. و سنتكلم الان عن بعض الطرق**

**طريقة الحذف**

**الطريقة الاولى التي سندرسها لحل مجموعة من المعادلات ما هي الا تعميم للطريقة المعروفة لحذف مجهول واحد بين زوج من المعادلات الانية و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس للحذف وهي تعد نموذج اساسي لعدد كبيرمن الطرق التي تسمي الطرق المباشرة.**

**ولشرح هذه الطريقة نعتبر مثال بسيط من ثلاث معادلات**

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

**نضرب المعادلة الاولى في $(-1)$ والمعادلة الثانية في $(3)$ والجمع كذلك نضرب المعادلة الاولى في $(-2)$ و الثالثة في$(3)$ ثم نجمع ايضا وذلك لحذف $x_1$ نحصل علي**

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12\\ 7x_2 + 7x_3 &= 21\\ -4x_2 - 7x_3 &= -18\end{aligned}$$

لحذف $x_2$ نضرب المعادلة الثانية في $(4)$ والثالثة $(7)$ والجمع وبذلك نحصل على مجموعة مثلثية عليا على الصورة

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12\\ 7x_2 + 7x_3 &= 21\\ -21x_3 &= -42\end{aligned}$$

من المعادلة الثالثة نحصل على $x_3 = 2$ و بالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $x_2 = 1$ ثم من المعادلة الاولى نحصل على $x_1 = 3$.

الان سوف نحل نفس المثال السابق لكن باستخدام المصفوفات وذلك بوضع مجموعة المعادلات على الصورة

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\ 11\\ 2\end{bmatrix}$$

نلاحظ ان العمليات الحسابية التي اجريت من قبل قد اثرت فقط على المعاملات والحدود المطلقة. لذلك سوف نتعامل مع مصفوفة المعاملات $A$ مضافا اليها المتجه $B$ (الطرف الايمن) والذي ياخذ الصورة

$$[A : B] = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & :12\\ 1 & 2 & 3 & :11\\ 2 & -2 & -1 & :2\end{bmatrix}$$

وسوف نجري بعد العمليات على هذه المصفوفة لتحويلها الى مصفوفة مثلثية عليا.

$$[A:B]=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & :12\\ 1 & 2 & 3 & :11\\ 2 & -2 & -1 & :2\end{bmatrix}\xrightarrow[3R_3-2R_1]{3R_2-R_1}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & :12\\ 0 & 7 & 7 & :21\\ 0 & -4 & -7 & :-18\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{7R_3+4R_2}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & :12\\ 0 & 7 & 7 & :21\\ 0 & -4 & -21 & :-42\end{bmatrix}\xrightarrow[2R_2+21R_1]{3R_2+R_3}\begin{bmatrix}63 & -21 & 0 & :168\\ 0 & 21 & 0 & :21\\ 0 & 0 & -21 & :-42\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1}\begin{bmatrix}63 & 0 & 0 & :189\\ 0 & 21 & 0 & :21\\ 0 & 0 & -21 & :-42\end{bmatrix}$$

**الخطوة الاولي هي ضرب الصف الثاني في$(3)$ والاول في$(-1)$ و الجمع ثم ضرب الصف الثالث في$(3)$ والاول في$(-2)$ والجمع.**

**الخطوة الثانية هي ضرب الصف الثالث في$(7)$و الصف الثاني في$(4)$ والجمع نلاحظ ان هذه النتيجة هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل مع ملاحظة ان العمود الاول يمثل معاملات $x_1$ والثاني يمثل معاملات $x_2$ والثالث يمثل معاملات $x_3$ والعمود الاخير يمثل الحدود المطلقة.**

**و الان يمكننا اجراء التعويض بسهولة بعد حذف المعاملات التي فوق القطر الرئيسي كما يلي:**

**نضرب الصف الثاني في$(3)$ و نجمعه علي الصف الثالث ثم نضرب الصف الثاني في$(2)$ و نجمعه علي على الصف الاول بعد ضربه في$(21)$. و اخيرا ننهي عملية الحذف بجمع الصف الثاني على الاول. و اذا قسمنا كل صف على عناصر القطر الرئيسي نحصل على متجه عناصره هي المجاهيل $x_1, x_2, x_3$ مساويا لعناصر المتجهه$B$.**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0:3\\ 0 & 1 & 0:1\\ 0 & 0 & 1:2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$$

**طريقة جاوس للحذف**

**في المثال السابق عرفنا كيفية حل المعادلات و كان سهل علينا اجراء الحسابات نظرا لانه كان لدينا ثلاثة معادلات فقط اما في حالة المجموعة الكبيرة من المعادلات فانه يصعب علينا اجراء تلك الحسابات الكثيرة والتي تحتاج الى الوقت الكثير جدا. لذلك يستخدم الحاسب الالي في حل هذه المسائل. لكننا لاحظنا ان عمليات الضرب في الطريقة السابقة سوف تعطي اعدادا كبيرة جدا تفوق احيانا قدرة الحاسب على تخزين هذه الارقام. لذلك سوف نتبع الطريقة التالية في حذف المعاملات والتي تسمى بطريقة جاوس للحذف.**

**لحذف المعامل الاول في الصف رقم $i$ نضرب الصف الاول في $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ ثم نطرحه من الصف رقم $i$ ونستعمل نسب مماثلة للمعاملات في حذف المعاملات في الاعمدة الاخرى و يجب ان نحترس من القسمة على الصفر والطريقة المفيدة لتجنب القسمة على الصفر هي اعادة ترتيب المعادلات بحيث نضع المعاملات ذات القيمة الاكبر في القطر في كل خطوة.**

**و لتوضيح هذه الطريقة سوف نحل المثال السابق مع ملاحظة ان التقريب سيكون الى اربعة ارقام اثناء الحسابات**

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & :12 \\ 1 & 2 & 3 & :11 \\ 2 & -2 & -1 & :2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-(2/3)R_1]{R_2-(1/3)R_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & :12 \\ 0 & 2.333 & 2.334 & :7.004 \\ 0 & -1.334 & -2.332 & :-5.992 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+(1.334/2.333)R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & :12 \\ 0 & 2.333 & 2.334 & :7.004 \\ 0 & 0 & -1.000 & :1.993 \end{bmatrix}$$

**في هذا المثال لا نحتاج لعملية اعادة ترتيب المعادلات لوضع المعاملات ذات القيمة الاكبر في القطر. عملية التعويض الخلفي تبدا بالمعادلة الثالثة ثم نتحرك الى المعادلات الثانية و الاولى فنحصل على**

$$x_1 = 3.007,\ x_2 = 1.008,\ x_3 = 1.993$$

**و الفرق بين هذه القيم و بين $2,1,3$ جاءت نتيجة لاخطاء التقريب.**

**والان نلخص خطوات طريقة جاوس للحذف في الصورة التي يمكن بها كتابة برنامج للحاسب الالي لحل مجموعة من المعادلات الخطية**

١. اضف الي مصفوفة المعاملات $(n\times n)$ متجة الحدود المطلقة فتتكون مصفوفة $(n\times(n+1))$
٢. ابدل الصفوف لجعل قيمة $a_{11}$ هي اكبر قيمة في المعاملات الموجودة في العمود الاول.
٣. اجعل جميع عناصر العمود الاول التي اسفل الصف الاول اصفار. لحذف العنصر الاول في الصف رقم $i$ نضرب الصف الاول في $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ثم طرحه من الصف رقم $i$.
٤. كرر الخطوات (٢) ، (٣) على باقي الصفوف مع وضع العامل ذو القيمة الاكبر في القطر بواسطة تبديل الصفوف (اعتبر فقط الصفوف من $j$ الي $n$) ثم نضرب الصف رقم $j$ في $\frac{a_{1j}}{a_{jj}}$ ثم اطرحه من الصف رقم $i$ لجعل جميع العناصر في العمود رقم $j$ تحت القطر الرئيسي اصفار. في نهاية هذه الخطوة نجد ان المصفوفة تصبح مثلثية عليا.
٥. احسب قيمة $x_n$ من المعادلة رقم $n$ بواسطة

$$x_n=\frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

احسب قيمة $x_1,x_2,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}$ من المعادلة رقم $(n-1)$ حتى المعادلة الاولى على التوالي بواسطة

$$x_i=\frac{a_{i,n+1}-\sum_{j=i+1} a_{ij}x_j}{l_{ii}}$$

ولزيادة ايضاح هذه الطريقة نعطي المثال التالي.

مثال

حل مجموعة المعادلات الاتية

$$\begin{aligned}
&2x_2+x_4=0\\
&2x_1+2x_2+3x_3+2x_4=-2\\
&4x_1-3x_2+x_4=-7\\
&6x_1+x_2-6x_3-5x_4=6
\end{aligned}$$

الحل

مصفوفة المعاملات والحدود المطلقة هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & : & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & : & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \end{bmatrix}$$

**نلاحظ انه يوجد صفر في الموضع $a_{11}$ لذلك نبدل الصف الاول مع الصف الرابع لكي نتجنب القسمة على الصفر وبذلك نحصل على**

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & : & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & : & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

**لجعل العناصر في العمود الاول اصفارا نضرب الصف الاول في$(6/2)$ ثم نطرحه من الصف الثاني وبعد ذلك من نضربه في$(6/4)$ ونطرحه من الصف الثالث فنحصل على**

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.667 & : & -4 \\ 4 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & : & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

**نبدل الصف الثاني الصف مع الصف الثالث لنضع العنصر ذو القيمة الاكبر في القطر الرئيسي. وبعد ذلك نلاشي العناصر التي تحت القطر الرئيسي في العمود الثاني نحصل على**

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & : & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & : & -9.001 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5600 & : & -3.1199 \end{bmatrix}$$

**نجري الان عملية التعويض الخلفي نحصل على**

$$x_4 = \frac{-3.1199}{1.5600} = -1.9999$$

$$x_3 = \frac{-9.001 - (5.6364)(-1.9999)}{6.8182} = 0.33325$$

$$x_2 = \frac{-11 - (4.333)(-1.9999) - 4(0.33325)}{-3.6667} = -1.000$$

$$x_3 = \frac{6 - (-5)(-1.9999) - (-6)(0.33325) - 1(1.000)}{6} = -0.5000$$

**والقيم الصحيحة هي على الترتيب**

$$x_4 = -2, x_3 = 1/3, x_2 = -1, x_1 = -1/2$$

**و توجد اضافات اخرى على طريقة جاوس للحذف وهي ان عملية التعويض الخلفي يمكن اجراءها بحذف العناصر الموجودة اعلى القطر الرئيسي ايضا باجراء بعض العمليات. و نبدأها من الصف الاخير. ويمكن جعل جميع عناصر القطر الرئيسي هي الوحدة كخطوة اولى قبل تخليق الاصفار في اعمدتها وهذا يجعل عملية التعويض اسرع.**

**طريقة جاوس جوردان**

**في هذه الطريقة يتم جعل العناصر التي اعلى القطر الرئيسي اصفارا في نفس الوقت الذي نجعل العناصر التي اسفل القطر الرئيسي اصفار. و عادة نجعل عناصر القطر الرئيسي الوحدة في نفس الوقت الذي يكون باقي العناصر اصفار و ذلك يحول مصفوفة المعاملات الى مصفوفة الوحدة.**

**عند الانتهاء من هذه العملية يصبح العمود الموجود فى الجانب الايمن هو متجة الحل المطلوب. مع ملاحظة تجنب القسمة على الصفر وذلك باجراء التبديل المناسب بين الصفوف. و لحل المثال السابق باستخدام طريقة جاوس جوردان نتبع الخطوات التالية**

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & : & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & : & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \end{bmatrix}$$

**نبدل الصف الاول مع الصف الرابع بعد ذلك نقسم الصف الاول علي $(6)$ ثم نحذف العناصر الموجودة في العمود الاول اسفل القطر الرئيسي فنحصل على**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.26667 & -1 & 0.83335 & : & 1 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.667 & : & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3334 & : & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

نبدل الصف الثاني مع الصف الثالث ثم نقسم الثاني علي $(-3.6667)$ثم نحذف عناصر العمود الثاني التي اعلى واسفل القطر الرئيسي فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.5000 & 1.20000 & : & 1.4000 \\ 0 & 1 & 2.9999 & 2.2000 & : & -2.4000 \\ 0 & 0 & 15.000 & 12.4000 & : & -19.8000 \\ 0 & 0 & -5.9998 & 3.4000 & : & 4.8000 \end{bmatrix}$$

هنا لا نحتاج لتبديل الصفوف نقسم الصف الثالث على$(15.0000)$ ثم نجعل جميع عناصر العمود الثالث اعلى واسفل القطر الرءيسي اصفارا فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & -0.9999 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 1.0001 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0.33326 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1.9999 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان هذا الحل هو نفسه الحل الذي حصلنا عليه باستخدام طريقة جاوس للحذف مع اختلاف بسيط بسبب اخطاء التقريب في الحسابات.

**طريقة شوليسكي**

هذه الطريقة هي تعديل لطريقة الحذف حيث تحول مصفوفة المعاملات$A$ الى حاصل ضرب مصفوفتين $L,U$ حيث $L$ هي مصفوفة مثلثية سفلى و $U$ مصفوفة مثلثية عليا بحيث يكون عناصر القطر الرئيسي فيها هو الوحدة.

الان نشرح الطريقة التي بها نستطيع ان نحول المصفوفة الى حاصل ضرب مصفوفتين من العلاقة $A = LU$ في حالة مصفوفة$(4\times4)$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**بضرب صفوف المصفوفة $L$ في العمود الاول في $U$ فنحصل على**

$$l_{11} = a_{11}, l_{21} = a_{21}, l_{31} = a_{31}, l_{41} = a_{41}$$

**نلاحظ ان العمود الاول في $L$ هو نفس العمود الاول في $A$ بعد ذلك نضرب الصف الاول في $L$ في اعمدة $U$ فنحصل على**

$$l_{11}u_{12} = a_{12}, l_{11}u_{13} = a_{13}, l_{11}u_{14} = a_{41}$$

**ومنها نستنتج ان**

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

**وبذلك نكون قد اوجدنا الصف الاول في $U$.**

**في هذه الطريقة يتعاقب الحصول على عمود في $L$ ثم صف $U$ وبعد ذلك نحصل على معادلات العمود الثاني في $L$ بضرب صفوف $L$ في العمود الثاني من $U$.**

$$\begin{aligned} & l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22}, \\ & l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32}, \\ & l_{41}u_{12} + l_{42} = a_{42} \end{aligned}$$

**ومنها نستنتج ان**

$$\begin{aligned} & l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}, \\ & l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12}, \\ & l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} \end{aligned}$$

**ونستمر بهذه الطريقة فنحصل على**

$$u_{23}=\frac{a_{23}-l_{21}u_{13}}{l_{22}}\ ,\ u_{24}=\frac{a_{24}-l_{21}u_{14}}{l_{22}}$$

**والصيغة العامة التي نحصل بها على عناصر $L,U$ اذا كانت مصفوفة المعاملات $A$ من رتبة $(n\times n)$ عند حل $n$ من المعادلات الخطية تكون في الصورة**

$$l_{ij}=a_{ij}-\prod_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}\ \ ,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

$$u_{ij}=\frac{a_{ij}-\prod_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}\ ,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

**الان نلخص طريقة شوليسكي في الخطوات التالية**

1. **نفرض ان مجموعة المعادلات الخطية كتبت باستخدام المصفوفات في الصورة**

$$AX=B$$

**نضع**

$$A=LU$$

**ومنها**

$$LUX=B$$

2. **نفرض ان $UX=Y$ اذن $LY=B$**
**اي اننا نحصل على المعادلتين**

$$UX=Y$$
$$LY=B$$

**من السهل حساب قيم $Y$ من المعادلة (٣) ثم نعوض في (٤) فنحصل على قيم $X$ .**

**مثال**

**حل مجموعة المعادلات الخطية الاتية**

$$3x_1-x_2+2x_3=12$$
$$x_1+2x_2+3x_3=11$$
$$2x_1-2x_2-x_3=2$$

**الحل**

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على

$$L=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 7/3 & 0\\ 2 & -4/3 & 1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}1 & -1/3 & 2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

باستخدام العلاقة (٣) نحصل على $LY=B$

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 7/3 & 0\\ 2 & -4/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 11\\ 2\end{bmatrix}$$

$$y_1=4, y_2=3, y_3=2$$

باستخدام العلاقة (٤) نحصل على

$$x_1=3, x_2=1, x_3=2$$

# التحليل المركب

كلية العلوم

# محاضرات
# في
# التحليل المركب

إعداد

قسم الرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

## مقدمة

يسرني أن أقدم هذا الجهد المتواضع في مقـــرر الـــدوال المركبـة والطرق الرياضية لطلاب كليات العلوم والهندسة. ويشتمل هذا الكتاب على نظرية دوال المتغير المركب وهي من أجدى وأعظم فــروع الرياضيــات. وعلى الرغم من أنها نشأت في جو من الغموض والشك وعدم الثقة، كمـــا يتضح من المصطلحات "تخيلي" و "مركب" التي تستخدم فيما ينشـــر عــن الموضوع، فقد وضعت نهائياً على أساس سليم في القرن التاســـع عشـر، وذلك نتيجة لجهود كوشي، ريمان، فيرلشترلس، جاوس وغيرهم من علمـاء الرياضيات الأفذاذ.

وفي أيامنا هذه يؤخذ الموضوع على أنه جزء أساسي مــن الخلفيـة الرياضية للمهندسين، الفيزيائيين، الرياضيين والعلماء الآخرين. والسبب في ذلك من وجهة النظر الرياضية أن كثير من المبــادئ الرياضيــة تصبـح موضحة وموحدة عند دراستها في ضوء نظرية المتغير المركـــب، ومــن وجهة النظر التطبيقية، فإن النظرية ذات أهمية قصوى فــي حــل مســائل سريان الحرارة، نظرية الجهد، النظرية الالكترومغناطيســية وكثـير مــن المجالات العلمية والهندسية الأخرى.

وتشتمل موضوعات الكتاب أيضاً على دراسة بعض الطرق الرياضية المتقدمة منها متسلسلات فورير، تكاملات فورير، تحويلات لابلاس والتي لها أهمية قصوى في حل مسائل كثيرة في الميكانيكا والكهرباء ومجالات أخرى في العلوم والهندسة.

وقد احتوى الكتاب على موضوعات متقدمة خاصة، وهي أساسية للعالم والمهندس والرياضي إذ أن يصبح ماهراً في مجاله المقصود.

ونأمل أن يؤدي هذا الكتاب دوره لتحقيق الهدف المنشود من تدريس الرياضيات. كما نرحب بأية ملحوظات ونقد بناء لنخرج الكتاب نافع للجميع.

**والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً وهو ولي التوفيق،**

# المحتويات

# الفصل الأول

# الأعداد المركبة

**تمهيد**

يعلم الطالب من دراسته أن الأعداد الطبيعية هي ... ,1, 2, 3 والتي تسمى أيضاً بالأعداد الصحيحة الموجبة والتي استخدمت في العد. والأعداد الصحيحة السالبة هي ... ,3-, 2-, 1- وقد ظهرت لتسمح بحلول المعادلات مثل $x + b = a$ حيث $a, b$ أي أعداد طبيعية، ويمكن أن نكتب $x = a - b$ وفئة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة وكذلك الصفر تسمى بفئة الأعداد الصحيحة. والأعداد الجذرية مثل $\frac{3}{5}, -\frac{7}{4}$ ظهرت لتسمح بحلول للمعادلات $a x = b$ لجميع الأعداد الصحيحة a، b حيث $b \neq 0$. ويمكن أن نكتب $x = \frac{b}{a}$ وفئة الأعداد الصحيحة هي فئة جزئية من فئة الأعداد الجذرية وذلك لأن الأعداد الصحيحة تناظر أعداداً جذرية $\frac{b}{a}$ حيث $a = 1$. والأعداد الغير جذرية مثل $\sqrt{2} = 1.41..$، $\pi = 3.14...$، أي أنه لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{b}{a}$ حيث $a, b$ هي أعداد صحيحة، $a \neq 0$.

وفئة الأعداد الجذرية والغير جذرية تسمى فئة الأعداد الحقيقية. ومن المفروض أن للطالب دراية تامة بالعمليات المختلفة على الأعداد الحقيقية. ولكن لا يمكن أن تفي مجموعة الأعداد الحقيقية بكل الأغراض فمثلاً لا يوجد عدد حقيقي x بحيث يحقق معادلة كثيرة الحدود $x^2 + 1 = 0$. لذلك فإن

فئة الأعداد المركبة ظهرت لكي تدمج بحلول هذه المعادلــــة والمعـــادلات المشابهة. فمثلاً المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$ لها جذران هما $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ أو $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ حيث $i = \sqrt{-1}$ والتي تسمى بالوحدة التخيلية.

ويمكننا أن نعتبر أن العدد المركب له الصورة $a + i b$ حيث $a, b$ عدديـــن حقيقيين، إذا كان $z = a + i b$ فإن $a$ يسمى بالجزء الحقيقي لــ $z$ ويسـمى $b$ بالجزء التخيلي لــ $z$ ويرمز لهما بــ $R_e\{z\}$، $I_m\{z\}$ على التوالي. الرمز $z$ الذي يعبر عن أي عنصر في أي فئة للأعداد المركبـــة يسـمى بــالمتغير المركب.

ويمكن أيضاً أن نكتب العدد المركب على صورة زوج مرتب مـــن الأعداد الحقيقية على الصورة $z=(a, b)$ أي أن $z = (a, b) = a + ib$.

**خواص الأعداد المركبة:**

نفرض أن $z_1 = (x_1, y_1)$، $z_2 = (x_2, y_2)$ عددان مركبان

**التساوي :**

$$(1)\ z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2\ ,\ y_1 = y_2$$

**الجمع :**

$$(2)\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)$$

**الطرح :**

$$(3)\ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

**الضرب :**

$$(4)\ z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2\ , x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

القسمة :

$$(5)\ \frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

الأبدال :

$$(6)\ z_1+z_2=z_2+z_1\,,\,z_1z_2=z_2z_1$$

الدمج :

$$(7)\ (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$$

التوزيع :

$$(8)\ z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

مرافق العدد المركب:

للعدد المركب $z=(x,y)$ نعرف مرافقه $\overline{z}$ كالآتي :

$$\overline{z}=(x,-y)=x-iy$$

وخواص المرافق للعدد المركب هي :

$$(1)\ z+\overline{z}=2x=2R_e(z)$$

$$(2)\ z-\overline{z}=2iy=2iI_m(z)$$

$$(3)\ \overline{\overline{z}}=z$$

$$(4)\ \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

$$(5)\ \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$(6)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

مقياس العدد المركب :

للعدد المركب $z=(x,y)$ نعرف مقياسه $|z|$ على الصورة :

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

## خواص مقياس العدد المركب :

(1) $|z|^2 = z\,\overline{z}$

(2) $|\overline{z}| = |z|$

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(5) $R_e(z) \le |z|$ , $I_m(z) \le |z|$

(6) $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(7) $|z_1 \pm z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

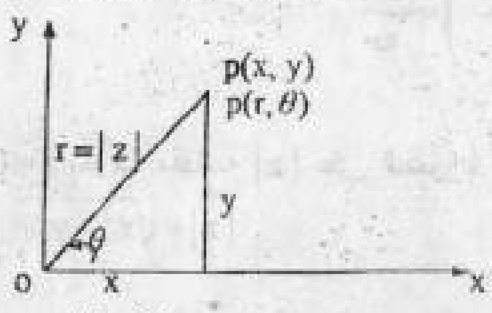
## التمثيل الهندسي للأعداد المركبة هندسيا في مستوى أرجاند :

يمكن تمثيل العدد المركب $z = (x, y) = x + i\,y$ هندسياً بالنقطة $p$ في المستوى $oxy$ وهو مستوى أرجاند. حيث تمثل الأعداد $(x, o)$ على المحور الحقيقي $x$ والأعداد $(o, y)$ على المحور التخيلي $y$.

## الصورة القطبية للأعداد المركبة :

بفرض أن $(r, \theta)$ هي الإحداثيات القطبية للنقطة $p(x, y)$ المناظرة لعدد مركب غير صفري $z = x + i\,y$ حيث :

$$x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta$$




شكل (١)

والعدد المركب يمكن كتابته في الصورة القطبية

$$z = x + i\,y = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\text{cis}\,\theta$$

حيث $\quad \text{cis}\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

أي أن :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\text{cis}\,\theta} \qquad (1)$$

والعدد r هو مقياس العدد المركب z أي أن :

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

والزاوية $\theta$ تسمى سعة العدد المركب z وتكتب على الصورة

$$\boxed{\theta = \arg z}$$

وهندسياً سعة العدد المركب z هي الزاوية التي يصنعها العدد المركب z مع الاتجاه الموجب للمحور الحقيقي شكل (١) وبالتالي فإن $\theta$ تأخذ عدد لانهائي من القيم الحقيقية (السعات) من بينها واحدة تسمى بالسعة الرئيسية أو الأساسية وهذه تقع في المدى $[-\pi,\pi]$ أي أن السعة الرئيسية تحدد من العلاقة $-\pi < \theta \le \pi$ ، وسعة العدد المركب $\theta$ يمكن تعيينها من العلاقة

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad \text{أو من} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

## صيغة أويلر للأعداد المركبة :

من مبادئ التفاضل نجد أن :

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \qquad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (4)$$

بفرض أن (2) يتحقق عندما $x = i\theta$ فإنه يمكن مع استخدام (3)، (4) أن نصل إلى النتيجة

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (5)$$

وهذه العلاقة تسمى بصيغة أويلر. وللسهولة يمكن أن نأخذ (5) كتعريف لـ $e^{i\theta}$ وعموماً فإننا نعرف

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\sin y) \qquad (6)$$

وأيضاً

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (7)$$

ويكون

$$z = r\,e^{i\theta}\ ,\ \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \qquad (8)$$

<u>نظرية دي موافر :</u>

إذا كانت $z_1 = x_1 + i\,y_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ ، $z_2 = x_2 + i\,y_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$ فإنه يمكن أن نبرهن أن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \qquad (9)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \qquad (10)$$

وتعميماً للعلاقة (9) فإنه

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) \qquad (11)$$

وإذا كان $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ فإن هذه العلاقة تؤول إلى

$$z^n = (r \operatorname{cis}\theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta \qquad (12)$$

والتي تسمى عادة بنظرية دي موافر.

**الجذور النونية للأعداد المركبة:**

لإيجاد الجذر النوني للعدد المركب z نكتب $z_j = z^{\frac{1}{n}}$ ويمكن أن نبرهن باستخدام نظرية دي موافر أنه إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن

$$z_j = z^{\frac{1}{n}} = (r \operatorname{cis}\theta)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2j\pi}{n}\right), \; j = 0,1,2,\ldots,(n-1) \qquad (13)$$

ومنها ينتج أنه يوجد n من القيم المختلفة للعدد المركب $z^{\frac{1}{n}}$، أي n من الجذور النونية المختلفة للعدد z بفرض أن $z \neq 0$

**المناطق في المستوى المركب:**

(١) تمثل العلاقة $|z| = r$ في المستوى المركب حركة النقطة p التي تمثل العدد المركب z على محيط دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r بينما تمثل العلاقة $|z| \leq r$ جميع النقط داخل وعلى محيط

الدائرة $|z|=r$ و $|z|>r$ تمثل كل المستوى المركب فيما عدا النقط الواقعة داخل وعلى محيط الدائرة $|z|=r$ أما $|z|\geq r$ فهي تمثل هندسياً المستوى المركب كلية فيما عدا النقط الواقعة داخل الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $r$.

(٢) تمثل $|z-z_0|\leq r$ و $|z-z_0|<r$ و $|z-z_0|=r$ و $|z-z_0|\geq r$ و $|z-z_0|>r$ مناطق مرتبطة بالدائرة $|z-z_0|=r$ التي مركزها النقطة $z_0$ ونصف قطرها $r$ كما في (١).

(٣) العلاقة $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ تمثل في المستوى المركب حركة النقطة $p$ التي تمثل العدد المركب $z$ بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى $p_1, p_2$ اللتان تمثلان العددين $z_1, z_2$ على الترتيب ثابت وهذا معناه أن $p$ تتحرك على محيط القطع الناقص الذي بؤرتيه هي $p_1, p_2$ وطول محوره الأكبر $2a$.

و $|z-z_1|+|z-z_2|\leq 2a$ و $|z-z_1|+|z-z_2|<2a$

و $|z-z_1|+|z-z_2|\geq 2a$ و $|z-z_1|+|z-z_2|>2a$

تمثل على الترتيب المنطقة داخل وعلى محيط القطع الناقص، المنطقة داخل محيط القطع الناقص، المستوى كله ما عدا النقط داخل محيط القطع الناقص، المستوى كله ماعدا النقط داخل وعلى محيط القطع.

## مسائل محلوله

١ـ إذا كان $z_1 = 2+i$ , $z_2 = 3-2i$ أوجد قيمة كل مما يلي

(أ) $|3z_1 - 4z_2|$ (ب) $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|^2$

الحل

(أ)
$$|3z_1 - 4z_2| = |3(2+i) - 4(3-2i)|$$
$$= |6+3i-12+8i|$$
$$= |-6+11i| = \sqrt{(-6)^2 + (11)^2} = \sqrt{157}$$

(ب)
$$\left|\frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|^2 = \left|\frac{2(3-2i) + (2+i) - 5 - i}{2(2+i) - (3-2i) + 3 - i}\right|^2$$
$$= \left|\frac{3-4i}{4+3i}\right|^2 = \frac{|3-4i|^2}{|4+3i|^2} = \sqrt{\frac{(3)^2 + (-4)^2}{(4)^2 + (3)^2}} = 1$$

٢ـ أوجد العددين الحقيقين $x$ , $y$ بحيث أن

$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$$

الحل

يمكن كتابة المعادلة المعطاة على الصورة $3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i$ وبمساواة الجزئين الحقيقيين بالطرفين وكذلك الجزئين التخيليين نحصل على $3x + 5y = 7$ , $2y - x = 5$ وبالحل آنياً، $x = -1$ , $y = 2$

٣ـ أثبت أن : (أ) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ (ب) $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$

الحل

(أ) اعتبر أن : $z_1=x_1+iy_1$ , $z_2=x_2+iy_2$ إذن

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2}=\overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}$$
$$=x_1+x_2-i(y_1+y_2)$$
$$=x_1-iy_1+x_2-iy_2$$
$$=\overline{x_1+iy_1}+\overline{x_2+iy_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

(ب) $$|z_1 z_2|^2=(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})=z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)$$
$$=|z_1|^2|z_2|^2$$

or $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$

٤ـ عبر عن كل من الأعداد المركبة التالية في الصورة القطبية

(أ) $2+2\sqrt{3}\,i$ (ب) $-5+5i$ (جـ) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$ (د) $-3i$

الحل

(أ) بفرض أن $z=2+2\sqrt{3}\,i$ إذن $x=2,\ y=2\sqrt{3}$

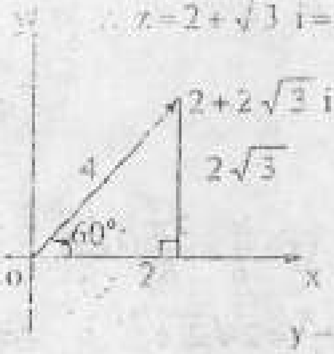
$\therefore$ المقياس $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+12}=4$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

∴ السعة $\theta = 60^\circ$ (لأن كلاً من الجيب وجيب التمام موجب)

∴ $z = 2 + \sqrt{3}\, i = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\text{cis}\,\theta = 4\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$




ويمكن كتابة هذه النتيجة باستخدام

قانون أويلر على الصورة

$$z = r e^{i\theta} = 4 e^{\frac{\pi}{3} i}$$

(ب) بفرض أن $z = -5 + 5i$ إذن $x = -5$ , $y = 5$

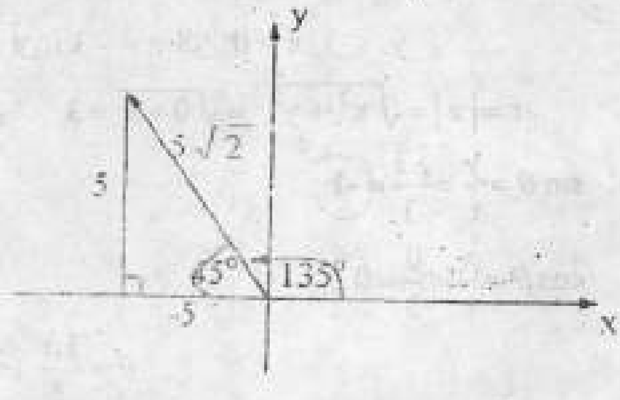
المقياس $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

∴ السعة $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (لأن الجيب موجب و جيب التمام سالب)

إذن $z = -5 + 5i = r\,\text{cis}\,\theta = 5\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4} = 5\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$




(جـ) بفرض أن $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i$ إذن $x = -\sqrt{6}$ , $y = -\sqrt{2}$

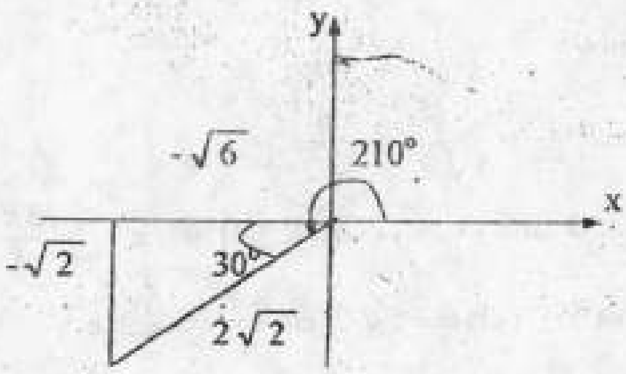
المقياس $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ السعة $\theta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ (لأن كلاً من الجيب وجيب التمام سالب).

إذن $z=-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i=r\operatorname{cis}\theta=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}=2\sqrt{2}\,e^{\frac{7\pi}{6}i}$




(ء) بفرض أن $z=-3i$ إذن $x=0$, $y=-3$

المقياس $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+9}=3$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-3}{3}=-1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{3}=0$$

∴ السعة $\theta=\frac{3\pi}{2}$

إذن $z=-3i=r\operatorname{cis}\theta=3\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}=3e^{\frac{3\pi}{2}i}$

٥ـ برهن التطابقات : (أ) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(ب) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل

**للتعبير عن $\cos n\theta , \sin n\theta$ بدلالة قوى النسب المثلثية للزاوية $\theta$**

**نستخدم نظرية ذات الحدين**

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n$$

حيث المعاملات $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ، $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

عندما $n = 3$ ونظرية ذات الحدين باستخدام نظرية دي موافر نجد أن

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + \binom{3}{1}\cos^2\theta\,(i\sin\theta) + \binom{3}{2}\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

حينئذ

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1 - \cos^2\theta\right)$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \ .$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

٦ـ برهن المتطابقات (أ) $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$

(ب) $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$

## الحل

للتعبير عن قوى $\sin\theta$، $\cos\theta$ بدلالة النسبة المثلثية لمضاعفات الزاوية نستخدم العلاقات الآتية :

أثبت
$$2\cos\theta = z + \frac{1}{z} \ , 2\cos n\theta = z^n + \frac{1}{z^n} \qquad (*)$$
$$2i\sin\theta = z - \frac{1}{z} \ . \ 2i\sin n\theta = z^n - \frac{1}{z^n} \qquad (**)$$

(أ) نستخدم العلاقات (**)

$$(2i\sin\theta)^3 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 - \binom{3}{1}z^2\left(\frac{1}{z}\right) + \binom{3}{2}z\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3$$

$$= \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) - 3\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$= (2i\sin 3\theta) - 3(2i\sin\theta)$$

$$\therefore \ \sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

(ب) نستخدم العلاقات (*) (يترك للقارئ).

٧ــ أثبت أن (أ) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ (ب) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

## الحل

لدينا

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (1)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (2)$$

(أ) بجمع (1)، (2) $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ أو $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

(ب) بطرح (1)، (2) $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$ أو $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

**تمرين:**

أثبت أن : (أ) $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ (ب) $\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$

٨ــ حل المعادلات الآتية (أ) $z^5+32=0$ (ب) $z^3+1-i=0$

## الحل

$$z^5+32=0 \Rightarrow z^5=-32 \Rightarrow z_j=(-32)^{\frac{1}{5}} \ , \ r=32, \theta=\pi$$

$$\Rightarrow z_j=(32)^{\frac{1}{5}} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi+2j\pi}{5}\right), j=0,1,2,3,4$$

$$\Rightarrow z_j=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi+2j\pi}{5}\right), j=0,1,2,3,4$$

إذا كان $j=0$ فإن $z_0 = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{5}$

" " $j=1$ " $z_1 = 2\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{5}$

" " $j=2$ " $z_2 = 2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{5}$

" " $j=3$ " $z_3 = 2\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{5}$

" " $j=4$ " $z_4 = 2\,\text{cis}\,\frac{9\pi}{5}$

(ب) $z^3+1-i=0 \Rightarrow z^3=-1+i$

$$\Rightarrow z_j = (-1+i)^{\frac{1}{3}}\ , r=\sqrt{2}\ ,\ \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_j = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2j\pi}{3}\right), j=0,1,2$$

إذا كان $j=0$ فإن $z_0 = 2^{\frac{1}{6}}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{12}$

" " $j=1$ " $z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{12}$

" " $j=2$ " $z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\,\text{cis}\,\frac{19\pi}{12}$

٩- صف وارسم المحل الهندسي الممثل بكل مما يأتي :

(أ) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2$ (ب) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|<2$

الحل

(أ) تكون المعادلة المعطاة مكافئة إلى $|z-3|=2|z+3|$

إذا كان $z=x+iy$ فإن $|x+iy-3|=2|x+iy+3|$

$$\Rightarrow |(x-3)+iy|=2|(x+3)+iy|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

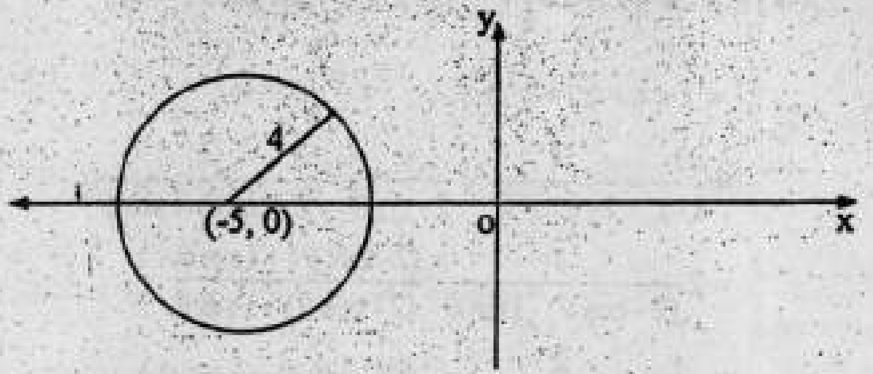
بالتربيع للطرفين نحصل على

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+30x+27=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+10x+9=0$$

$$\Rightarrow (x+5)^2+y^2=16$$

أي أن المحل الهندسي دائرة نصف قطرها 4 ومركزها النقطة (0 ,5-)




(ب) المتباينة المعطاة تكون مكافئة إلى $|z-3|<2|z+3|$

or $\sqrt{(x-3)^2+y^2}<2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$

or $x^2+y^2+10x+9>0$

or $(x+s)^2+y^2>16$

أي أن المحل الهندسي يتكون من كل النقط خارج دائرة نصف قطرها 4 ومركزها (0 ,5-) في الشكل المرسوم في (أ).

١٠ـ اجمع المتسلسلة : $1+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 3\theta+\dots$

الحل

نفرض أن

$$A=1+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 3\theta+\dots$$

$$B=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 3\theta+\dots$$

$$A+iB=1+\frac{1}{2}\operatorname{cis}\theta+\left(\frac{1}{2}\right)^2\operatorname{cis}2\theta+\left(\frac{1}{2}\right)^3\operatorname{cis}3\theta+\dots$$

$$=1+z+z^2+z^3+\dots,\quad z=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\theta$$

$$=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\operatorname{cis}\theta}=\frac{2}{2-\operatorname{cis}\theta}=\frac{2}{2-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=2\frac{1}{(2-\cos\theta)-i\sin\theta}\cdot\frac{(2-\cos\theta)+i\sin\theta}{(2-\cos\theta)+i\sin\theta}$$

$$=\frac{2}{(2-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\left((2-\cos\theta)+i\sin\theta\right)$$

$$=2\frac{(2-\cos\theta)+i\sin\theta}{5-4\cos\theta}$$

بمساواة الحقيقي بالحقيقي والتخيلي بالتخيلي في الطرفين نحصل على

$$1+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 3\theta+\dots=\frac{4-2\cos\theta}{5-4\cos\theta}$$

## مسائل متنوعة

(١) أوجد حاصل الضرب $(1-3i)(3+i)$ على الصورة $a+ib$ ثم اكتب الناتج في صورة المقياس والسعة

(٢) اختصر المقدار $\dfrac{2i-3}{(3+i)(i-8)}$ ثم أوجد مقياسه وسعته.

(٣) عبر عن $\dfrac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ على الصورة $x+iy$ وأثبت أن $x^2+y^2=4x-3$

(٤) اختصر المقادير الآتية :ـ

(أ) $\dfrac{(\cos 85^\circ+i\sin 85^\circ)(\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ)}{\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ}$

(ب) $\dfrac{\cos 30^\circ-i\sin 30^\circ}{(\cos 70^\circ-i\sin 70^\circ)(\cos 4^\circ+i\sin 4^\circ)}$

(جـ) $\dfrac{(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^8}{(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})^2}$

(ء) $\dfrac{1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}$

(٥) ضع $1+i$ في الصورة القطبية ثم اختصر : $(1+i)^8+(1-i)^8$

(٦) إذا كان n عدد صحيح أثبت أن

(أ) $\left(\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\dfrac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$

(ب) $\left(\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\cos\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right]+i\sin\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$

ومن ذلك نستنتج أن

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5+i\left(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\right)^2=0$$

(جـ) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\operatorname{cis}\frac{n\pi}{4}$

(د) $(\sqrt{3}+i)^n=2^n\operatorname{cis}\frac{n\pi}{6}$

(٧) إذا كان $|z_2|\neq|z_3|$ أثبت أن $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right|\leq\frac{|z_1|}{\left||z_2|-|z_3|\right|}$

(٨) أثبت أن $z+\frac{1}{z}$ حقيقي إذا وإذا فقط كان $I_m(z)=0$ أو $|z|=1$

(٩) أثبت أن $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

(١٠) أوجد المنطقة التي تحددها كلاً من العلاقات الآتية

(أ) $R_e(z)\geq 0$ (ب) $I_m(z)\leq 0$

(ت) $R_e(z-iz)\geq 2$ (ث) $|z-1|\geq|z+3|$

(جـ) $|z-1|\leq 4|z+1|$ (حـ) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leq 4$

(خـ) $4\geq|z|\geq 3$ (د) $|2z+3+5i|\leq 4$

(ذ) $|z-2|+|z+2|\leq 6$ (ر) $|z+i|+|z-i|\geq 5$

(ز) $-1<I_m(z-2)\leq 3$ (س) $|\bar{z}-(1+i)|\geq 9$

(١١) أثبت أن القطع الناقص $|z+3|+|z-3|=10$ يمكن التعبير عنه في نظام الإحداثيات المتعامدة بالمعادلة $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(١٢) إذا كان $|a|<1$ برهن أن

(i) $1+a\cos\theta+a^2\cos 2\theta+\ldots=\dfrac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$

(ii) $a\sin\theta+a^2\sin 2\theta+a^3\sin 3\theta+\ldots=\dfrac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$

(١٣) أثبت أن

$\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha+2\theta)+\ldots+\cos(\alpha+n\theta)=$

(i) $=\dfrac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left(\alpha+\dfrac{n+1}{2}\theta\right)$

$\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha+2\theta)+\ldots+\sin(\alpha+n\theta)=$

(ii) $\dfrac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(\alpha+\dfrac{n+1}{2}\theta\right)$

حيث $\alpha$، $\theta$ أعداد حقيقية، $\theta\neq 2\pi k$، $k$ عدد صحيح.

(١٤) اجمع المتسلسلات الآتية

(i) $1+\binom{n}{1}\cos\theta+\binom{n}{2}\cos 2\theta+\ldots+\binom{n}{n}\cos n\theta$

(ii) $1+\dfrac{a\cos\theta}{1!}+\dfrac{a^2\cos 2\theta}{2!}+\dfrac{a^3\cos 3\theta}{3!}+\ldots$

(١٥) عبر عن $\sin 4\theta, \cos 4\theta, \tan 4\theta$ بدلالة قوى النسب المثلثية للزاوية $\theta$

(١٦) عبر عن $\cos^2\theta\sin^3\theta$ ، $\cos^4\theta$ بدلالة النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية $\theta$.

(١٧) أوجد عوامل المقدار $x^5-1$ إذا علم أن $\cos 72=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$

# الفصل الثاني

# الدوال .النهايات والاتصال

## المتغيرات والدوال

يسمى الرمز z الذي يعبر عن أي عنصر في فئة الأعداد المركبة بالمتغير المركب إذا كان لكل قيمة للمتغير المركب z توجد قيمة واحدة أو عدة قيم بالمتغير المركب w، فإننا نقول أن w يكون دالة في z ونكتب $w=f(z)$ ويسمى المتغير z بالمتغير المستقل بينما w تسمى بالمتغير التابع.

## الدوال الوحيدة والمتعددة القيم :

إذا وجدت لكل قيمة للمتغير المستقل z قيمة واحدة فقط للمتغير التابع w، فإننا نقول أن w دالة وحيدة القيمة للمتغير z أو أن $f(z)$ وحيدة القيمة.
إذا وجدت لكل قيمة للمتغير z أكثر من قيمة واحدة للمتغير w، فإننا نقول أن w دالة متعددة القيم.

مثال (١) : إذا كان $w=z^2$ فإن لكل قيمة للمتغير z توجد فقط قيمة واحدة للمتغير w. وبالتالي $w=f(z)=z^2$ تكون وحيدة القيمة للمتغير z.

مثال (٢): إذا كان $w=z^{\frac{1}{2}}$ فإن لكل قيمة للمتغير z توجد قيمتان للمتغير w.
إذن $w=f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ تكون دالة متعددة القيم (في هذه الحالة ذات قيمتين) في المتغير z.

ما لم يذكر غير ذلك سوف نفترض أن f(z) دالـــة وحيـدة القيمــة، وعموماً فإنه يمكننا أن نكتب $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ حيــث u، v دالتان حقيقيتان في x، y.

مثال (٣) : $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$

وعلى ذلك $u(x,y) = x^2 - y^2$ ، $v(x,y) = 2xy$ وهذه تسمى علـى الترتيب الأجزاء الحقيقية والتخيلية للدالة $w = z^2$

**الدوال البسيطة :**

**١ـ الدوال الأسية :** تعرف كالآتي

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \operatorname{cis} y = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (١)$$

حيث $e = 2.71828$ هو الأساس الطبيعي للوغاريتمات.

**خواص الدوال الأسية المركبة :**

(i) $|e^z| = e^x$ , $e^0 = 1$

(ii) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

(iii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

(iv) $e^{iy} = \operatorname{cis} y$

(v) $e^{z+2n\pi i} = e^z$ ; $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

(vi) $e^{-z} = \left(e^z\right)^{-1}$

(viii) $\overline{\left(e^z\right)} = e^{\bar{z}}$

**الدوال المثلثية :**

تعرف الدوال المثلثية $\cos z$ , $\sin z$ بدلالة الدوال الأسية كالآتي :

(i) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

(ii) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(iii) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}$

(iv) $\sec z = \dfrac{1}{\cos z} = \dfrac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$

(v) $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$

(vi) $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}$

كثير من الخواص في حالة الدوال المثلثية الحقيقية تتحقق أيضاً فـــي حالـــة الدوال المثلثية المركبة. فمثلاً لدينا

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad 1 + \tan^2 z = \sec^2 z,$$

$$1 + \cot^2 z = \operatorname{cosec}^2 z, \qquad \sin(-z) = -\sin z,$$

$$\cos(-z) = \cos z, \qquad \tan(-z) = -\tan z$$

$$\sin\left(z_1 \pm z_2\right) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos\left(z_1 \pm z_2\right) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\tan\left(z_1 \pm z_2\right) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$$

### ٣ــ الدوال الزائدية :

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^{z} + e^{-z}}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^{z} - e^{-z}}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}$$

وتتحقق الخواص التالية :

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \qquad 1-\tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z,$$
$$\coth^2 z - 1 = \operatorname{cosech}^2 z, \qquad \sinh(-z) = -\sinh z,$$
$$\cosh(-z) = \cosh z, \qquad \tanh(-z) = -\tanh z,$$
$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_1 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$
$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$
$$\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$$

**ملاحظات :**

**(أ) الدوال المثلثية ترتبط بالدوال الزائدية بالعلاقات الآتية :**

$$\sin(iz) = i\sinh z, \qquad \sinh(iz) = i\sin z$$
$$\cos(iz) = \cosh z, \qquad \cosh(iz) = \cos z$$
$$\tan(iz) = i\tanh z, \qquad \tanh(iz) = i\tan z$$

**(ب) بعض المتطابقات الهامة :**

$$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$
$$\overline{\sin z} = \sin \overline{z}, \qquad \overline{\cos z} = \cos \overline{z}$$

**٤ـ الدوال اللوغاريتمية :ـ**

إذا كان $z = e^w$ فإننا نكتب $w = \ln z$ وتسمى اللوغـــاريتم الطبيعـــي للعدد $z$. ويمكن أن تعرف كالآتي :

$$w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حيث أن $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$ ، $r = |z|$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

وإحدى قيم $\ln z$ والمناظرة لـ $k=0$ تسمى القيمة الرئيسية للوغاريتم $\ln z$ وتكتب على الصورة $\ln z=\ln r+i\theta$

<u>خواص الدوال اللوغاريتمية المركبة :-</u>

$$\text{(i)}\ \ln(z_1 z_2)=\ln z_1+\ln z_2$$

$$\text{(ii)}\ \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\ln z_1-\ln z_2$$

$$\text{(iii)}\ \ln z^n=n\ln z$$ (ليس صحيح بصفة مطلقة)

<u>ملحوظة:</u> يجب ملاحظة أن $\ln z^n=n\ln z$ ليس صحيح بصفة مطلقة فمثلاً: $\ln i^2\neq 2\ln i$ لإثبات ذلك

$$\ln i^2=\ln -1=\ln 1+i(\pi+2k\pi)=i(\pi+2k\pi) \qquad (*)$$

$$2\ln i=2\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)=2i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=i(\pi+4k\pi) \qquad (**)$$

من (*), (**) يتضح أن $\ln i^2\neq 2\ln i$

<u>المواضع الصفرية لدوال المتغير المركب :</u>

المواضع الصفرية للدالة ذات المتغير المركب $f(z)$ هي قيمة $z$ التي تجعل الدالة $f(z)$ تساوي صفراً أي $f(z)=0$

## مسائل محلوله

١ـ أثبت أن (أ) $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$ (ب) $|e^z|=e^x$

(جـ) $e^{z+2k\pi i}=e^z\ ,k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

الحل

(أ) من التعريف $e^z = e^x \operatorname{cis} y$ حيث $z = x + iy$

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$

$$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{x_1} \operatorname{cis} y_1 . e^{x_2} \operatorname{cis} y_2 = e^{x_1} . e^{x_2} \operatorname{cis} y_1 \operatorname{cis} y_2$$

$$= e^{x_1 + x_2} \operatorname{cis}(y_1 + y_2)$$

$$= e^{z_1 + z_2}$$

(ب) $$\left|e^z\right| = \left|e^x \operatorname{cis} y\right| = \left|e^x\right| \left|\operatorname{cis} y\right| = e^x .1 = e^x$$

(جـ) $$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z \operatorname{cis} 2k\pi = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)$$

$$= e^z (1+0) = e^z$$

هذا يبين أن الدالة $e^z$ لها الدورة $2k\pi i$.

٢ــ برهن أن جميع أصفار (أ) $\sin z$ (ب) $\cos z$ حقيقية ثم أوجدها

الحل

(أ) بوضع $\sin z = 0$ أي أن $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$

$$\Rightarrow e^{iz} = e^{-iz}$$

$$\Rightarrow e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Rightarrow 2iz = 2k\pi i$$

$$\Rightarrow z = k\pi\ , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Rightarrow z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

هي الأصفار المطلوبة وكلها حقيقية.

(ب) بوضع $\cos z = 0$ أي أن $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0$

$$\Rightarrow e^{iz}=-e^{-iz}$$

$$\Rightarrow e^{2iz}=-1=e^{i(\pi+2k\pi)} \quad ,k=0,\pm1,\pm2,...$$

$$\Rightarrow 2iz=i\pi(2k+1)$$

$$\Rightarrow z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad k=0,\pm1,\pm2,...$$

$$\Rightarrow z=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2},...$$

هي الأصفار المطلوبة وكلها حقيقية.

---

٣ــ أوجد (أ) $\ln(i-1)$ (ب) $\ln(-2)$

(جـ) $\ln(3i)$ (د) $\ln\left(\sqrt{3}i-1\right)$

ثم أوجد للقيمة الرئيسية؟

الحل

(أ) نفرض أن $z=i-1$ إذن $r=\sqrt{2},\theta=\frac{3\pi}{4}$

$$\therefore \ln z=\ln(i-1)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right),k=0,\pm1,\pm2,...$$

وبوضع $k=0$ نحصل على القيمة الرئيسية للوغاريتم على الصورة

$$\ln z=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}i$$

(ب) بوضع $z=-2$ إذن $r=2,\ \theta=\pi$

$$\therefore \ln z=\ln(-2)=\ln 2+i(\pi+2k\pi) \quad ,k=0,\pm1,\pm2,...$$

وبوضع $k = 0$ نحصل على القيمة الرئيسية للوغاريتم على الصورة

$$\ln z = \ln(-2) = \ln 2 + i\pi$$

(جـ) بوضع $z = 3i$ إذن $r = 3, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \ln z = \ln(3i) = \ln 3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبوضع $k = 0$ نحصل على القيمة الرئيسية للوغاريتم على الصورة

$$\ln z = \ln(3i) = \ln 3 + i\frac{\pi}{2}$$

(د) بوضع $z = \sqrt{3}i - 1$ إذن $r = 2, \theta = \frac{2\pi}{3}$

$$\therefore \ln z = \ln\left(\sqrt{3}i - 1\right) = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

بوضع $k = 0$ القيمة الرئيسية هي :

$$\ln\left(\sqrt{3}i - 1\right) = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

**النهايات :**

تعاريف النهايات لدوال المتغير المركب مناظرة لتلك التعاريف الخاصة بالمتغير الحقيقي وبذلك يقال أن $L$ هي نهاية الدالة $f(z)$ عندما تقترب $z$ من $z_0$ ونكتب $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ إذا كان لأي $\varepsilon > 0$ هناك $\delta > 0$ بحيث $|f(z) - L| < \varepsilon$ حينما تكون $|z - z_0| < \delta$ .

وهندسياً إذا كان $z_0$ نقطة في المستوى المركب، فإن $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ إذا كانت القيمة المطلقة للفرق بين $f(z)$ و $L$ يمكن جعلها صغيرة بأي درجة نريد باختيار نقاط $z$ قريبة قرباً كافياً من النقطة $z_0$ (باستثناء $= z_0$

نفسها). ويجب أن تكون النهاية مستقلة عن الطريقة التي تقترب فيها z من $z_0$.

## مسائل محلوله

١ـ اعتبر $f(z)=\begin{cases} z^2, & z\neq i \\ 0, & z=0 \end{cases}$ حقق أن $\lim_{z\to i} f(z)=-1$

إذن عندما تقترب z من i تقترب f(z) من $i^2=-1$ وعلى ذلك نتوقع أن $\lim_{z\to i} f(z)=-1$ ويمكن إثبات ذلك باستخدام التعريف.

يجب أن نثبت لأي

$$\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{3}\right):$$

$$\left|z^2-i^2\right|<\varepsilon\ \forall|z-i|<\delta$$

$$\begin{aligned}
\text{but}\left|z^2-i^2\right| &= |(z-i)\cdot(z+i)| \\
&= |z-i||z+i| \\
&= \delta(|z+i|)<3\delta=\varepsilon \quad \forall|z-i|<\delta \\
&< 3\delta \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
&|z+i| \\
&=|z-i+2i| \\
&\leq|z-i|+2 \\
&<\delta+2,\ \delta<1 \\
&<3
\end{aligned}$$

باختيار $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ إذن بأخذ $\delta$ أقل من المقدارين ١، $\frac{\varepsilon}{3}$ ينتج المطلوب وهو أن العدد $\delta$ يعتمد على $\varepsilon$

٢ـ إذا كان $f(z)=z^3$ أثبت باستخدام التعريف أن $\lim_{z\to z_0} f(z)=z_0^3$

الحل

يجب أن نثبت لأي

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon,z_0)=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{1+3|z_0|+3|z_0|^2}\right):$$

$$|z^3-z_0^3|<\varepsilon\ \forall |z-z_0|<\delta$$

$$\text{but}\ |z^3-z_0^3|=|(z-z_0)(z^2+zz_0+z_0^2)|$$
$$=|z-z_0||z^2+zz_0+z_0^2|$$
$$\le\delta\left(|z|^2+|z||z_0|+|z_0|^2\right)$$
$$\le\delta\left((1+|z_0|)^2+|z_0|(1+|z_0|)+|z_0|^2\right)$$
$$=\delta\left(1+2|z_0|+|z_0|^2+|z_0|+|z_0|^2+|z_0|^2\right)$$
$$=\delta\left(1+3|z_0|+3|z_0|^2\right)$$
$$=\varepsilon\quad \forall |z-z_0|<\delta$$

$$|z|=|(z-z_0)+z_0|\le|z-z_0|+|z_0|<1+|z_0|$$

باختيار $\delta$ أقل من المقدارين ١، $\frac{\varepsilon}{1+3|z_0|+3|z_0|^2}$ ينتج المطلوب.

٣ــ أثبت أن $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ غير موجودة

الحل

إذا كانت النهاية موجودة فيجب أن لا تعتمد على الطريقة التي تقترب بها z إلى الصفر لذلك نعتبر مسارين مختلفين

(i) اعتبر $z\to 0$ على محور x إذن $y=0$

$$\therefore z=x+iy=x\ ,\ \bar{z}=x-iy=x\ ,\ z\to 0 \Rightarrow x\to 0$$

$$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1 \qquad (*)$$

(ii) اعتبر $z\to 0$ على محور y إذن $x=0$

$$\therefore z=x+iy=iy\ ,\ \bar{z}=x-iy=-iy\ ,\ z\to 0\Rightarrow y\to 0$$

$$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{y\to 0}\frac{-iy}{iy}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1 \qquad (**)$$

من (*)، (**) نجد أن النهاية غير موجودة لأنها تعتمد على المسار.

<u>حل آخر:</u> لإثبات أن النهاية ليست موجودة يكفي أن نثبت أنها ليست وحيدة.

أي أنها تعتمد على المسار الذي تسلكه z عندما تؤول إلى الصفر.

نضع $z=re^{i\theta}$ فيكون $\bar{z}=re^{-i\theta}$ وعندما $z\to 0$ فإن $r\to 0$ إذن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=\lim_{r\to 0}e^{-2i\theta}=\Phi(\theta)$$

وحيث أن $\Phi(\theta)$ تختلف كلما أخذنا قيمة للمتغير $\theta$ فيمكننا أن نقول أن النهاية ليست وحيدة، لذلك فهي ليست موجودة.

## <u>نظريات على النهايات :</u>

| |
|---|
| ١ـ إذا وجد $\lim_{z\to z_0} f(z)$ فإنها تكون وحيدة. |

البرهان

يجب أن نثبت أنه إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z)=L_1$ , $\lim_{z\to z_0} f(z)=L_2$ فإن $L_1=L_2$

من الفرض، نجد أن $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta_1>0,\delta_2>0$

(1) $$|f(z)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ |z-z_0|<\delta_1$$

(2) $$|f(z)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ |z-z_0|<\delta_2$$

باختيار $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ نحصل على

$$\begin{aligned}|L_1-L_2| &= |L_1-f(z)+f(z)-L_2|\\ &\le |L_1-f(z)|+|f(z)-L_2|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \forall\ |z-z_0|<\delta\end{aligned}$$

أي أن $|L_1-L_2|$ فيكون أقل من أي عدد موجب $\varepsilon$ (مهما كان صغير وبالتالي يجب أن يكون صفراً إذن $L_1=L_2$

٢ــ إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z)=L_1,\quad \lim_{z\to z_0} g(z)=L_2$ فإن :

(i) $\lim_{z\to z_0}\{f(z)\pm g(z)\}=L_1\pm L_2$

(ii) $\lim_{z\to z_0}\{f(z)g(z)\}=L_1 L_2$

(iii) $\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}=\frac{L_1}{L_2}$ (إذا كان $L_2\neq 0$)

البرهان

يترك للقارئ.

**الاتصال :**

اعتبر أن الدالة $f(z)$ معرفة ووحيدة القيمة في مجاور النقطة $z=z_0$ وكذلك عندما $z=z_0$. تكون الدالة $f(z)$ متصلة عند $z=z_0$ إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. وهذا يتضمن شروطاً ثلاثة يجب أن تتحقق لكي تكون $f(z)$ متصلة عند $z=z_0$:

١— $f(z_0)$ موجودة أي أن $f(z)$ تكون معرفة عند $z_0$

٢— $\lim_{z\to z_0} f(z)$ يجب أن يوجد

٣— $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

## مسائل محلوله

١— إذا كان $f(z)=z^2$، هل $f(z)$ متصلة عند $z=i$

الحل

$$\text{(i)}\quad f(i)=i^2=-1$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{z\to i} f(z)=\lim_{z\to i} z^2=i^2=-1$$

$$\text{(iii)}\quad \lim_{z\to i} f(z)=f(i)=-1$$

وتكون الدالة $f(z)$ متصلة عند $z=i$

٢ـ إذا كان $f(z)=\begin{cases} z^2 & , z\neq i \\ 0 & , z=i \end{cases}$ هل $f(z)$ متصلة عند $z=i$

الحل

(i) $f(i)=0$ (ii) $\lim\limits_{z\to i} f(z)=\lim\limits_{z\to i} z^2=i^2=-1$

(iii) $\lim\limits_{z\to i} f(z)\neq f(i)$

∴ تكون غير متصلة عند $z=i$

**ملحوظة:** (i) النقاط التي في المستوى $z$ التي لا تحقق عندها $f(z)$ شروط الاتصال تسمى بنقاط عدم الاتصال (انفصال) $f(z)$ وتكون $f(z)$ غير متصلة عند هذه النقاط.

(ii) إذا كانت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ موجودة ولكن لا تساوي $f(z_0)$، فإننا نسمي $z_0$ بنقطة عدم اتصال قابلة للرفع لأنه بإعادة تعريف $f(z_0)$ لتكون $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ تصبح الدالة متصلة.

(iii) إذا كانت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ غير موجودة فإننا نسمي $z_0$ بنقطة عدم اتصال غير قابلة للرفع.

• وبديلاً عن التعريف السابق للاتصال يمكن أن نعرف $f(z)$ كدالة متصلة عند $z=z_0$ بصورة أدق من التعريف السابق كالآتي :

$f(z)$ تكون متصلة عند $z_0$ ونكتب $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ إذا كان لأي $\varepsilon>0$ يمكن أن نجد $\delta>0$ بحيث $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ طالما $|z-z_0|<\delta$

**الاتصال في منطقة ما :**

تكون الدالة $f(z)$ متصلة في منطقة ما إذا كانت متصلة عند كل نقاط المنطقة.

**نظريات على الاتصال :**

١ـ إذا كانت كل من $g(z), f(z)$ متصلة عند النقطة $z=z_0$ فإن

$$(i)\ f(z)\pm g(z) \qquad (ii)\ f(z)\,.\,g(z) \qquad (iii)\ \frac{f(z)}{g(z)},\, g(z_0)\neq 0$$

تكون أيضاً متصلة عند النقطة $z_0$.

٢ـ إذا كانت $f(z)=u+iv$ متصلة في منطقة ما، فإن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للدالة $f(z)$ يكونان متصلان في المنطقة والعكس صحيح أيضاً.

**تمرين:** اثبت أن الدوال

(أ) كثيرات الحدود (ب) $e^z$ (جـ) $\cos z, \sin z$

(د) $\cosh z, \sinh z$ هي دوال متصلة في كل منطقة محددة.

## مسائل متنوعة

١ـ برهن أن $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}$

٢ـ برهن أنه لا توجد أي قيم محدودة للمتغير $z$ بحيث أن $e^z=0$

٣ـ برهن أن $2\pi$ هي دورة الدالة $e^{iz}$. هل توجد دورات أخرى؟

٤ـ أوجد جميع قيم $z$ التي لها (أ) $e^{3z}=1$ (ب) $e^{4z}=i$

٥ـ اثبت أن (أ) $\overline{\sin z}=\sin \overline{z}$ (ب) $\overline{\cos z}=\cos \overline{z}$

(جـ) $\overline{\tan z} = \tan \overline{z}$

٦ـ أوجد لكل من الدوال الآتية $u(x, y)$ , $v(x, y)$ بحيث أن $f(z) = u + i\,v$

(أ) $f(z) = e^{3iz}$ (ب) $f(z) = \cos z$ (جـ) $f(z) = z^2 e^{2z}$

٧ـ (أ) أثبت أن $\ln\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(ب) ما هي القيمة الرئيسية؟

٨ـ احصل على كل قيم (أ) $\ln(-4)$ (ب) $\ln(5\,i)$

(جـ) $\ln\left(\sqrt{3}\, i + 1\right)$ وأوجد القيمة الرئيسية في كل حالة.

٩ـ أثبت أن $\ln(z-1) = \frac{1}{2} \ln\left\{(x-1)^2 + y^2\right\} + i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right)$

١٠ـ أوجد أصفار (أ) $\sinh z$ (ب) $\cosh z$

١١ـ أثبت أن :

(i) $|\cos z|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x = \cos^2 x + \sinh^2 y$

ومن ثم استنتج أن $\sinh|y| \le |\cos z| \le \cosh y$

(ii) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - \sin^2 y$

ومن ثم استنتج أن $\sinh|x| \le |\cosh z| \le \cosh x$

١٢ـ إذا كان $\cos z_1 = \cos z_2$ أثبت أن $z_2 = \pm z_1 + 2n\pi$

١٣ـ أثبت أن

(i) $\cosh z = 0$ if and only if $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i$

(ii) $\sinh z =$ if and only if $z = n\pi i$

(iii) $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$

(iv) $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$

١٤ــ أوجد قيمة كل مما يلي :

(i) $\lim\limits_{z \to 1+i} \left(z^2 - 5z + 10\right)$ (ii) $\lim\limits_{z \to -2i} \dfrac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4}$

(iii) $\lim\limits_{z \to 1+i} \left\{ \dfrac{z-1-i}{z^2 - 2z + 2} \right\}^2$ (iv) $\lim\limits_{z \to e^{\frac{\pi i}{4}}} \dfrac{z^2}{z^4 + z + 1}$

(v) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 + 1}{z^6 + 1}$

١٥ــ برهن أنه إذا كان $f(z) = 3z^2 + 2z$، فإن

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 6z_0 + 2$$

١٦ــ أثبت باستخدام تعريف النهاية أن $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = 1$

١٧ــ إذا كان $f(z) = z^2 + 2z$، برهن أن $\lim\limits_{z \to i} f(z) = 2i - 1$

١٨ــ إذا كان $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ برهن أن $\lim\limits_{z \to z_0} \{f(z)\}^2 = L^2$

١٩ــ اعتبر أن

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 4}{z - 2i}, & z \neq 2i \\ 3 + 4i, & z = 2i \end{cases}$$

(أ) برهن أنه يوجد $\lim\limits_{z \to i} f(z)$

(ب) هل تكون $f(z)$ متصلة عند $z = 2i$، اشرح ذلك؟

(جـ) هل تكون $f(z)$ متصلة عند النقاط $z \neq 2i$، اشرح ذلك؟

(د) أجب عن (أ)، (ب)، (جـ) إذا كان $f(2i) = 4i$، واشـــرح لمـــاذا يجب أن تحدث اختلافات.

٢٠ـ برهن أن $f(z)=\frac{z}{z^4+1}$ تكون متصلة عند كل النقاط داخـــل وعلـى الدائرة $|z|=1$ ماعدا أربع نقاط وعين هذه النقاط.

٢١ـ إذا كانت $f(z)$ متصلة عند $z=z_o$، برهن أن $\{f(z)\}^2$ تكون أيضـــاً متصلة عند $z=z_o$

٢٢ـ أوجد جميع نقاط عدم الاتصال لكل من الدوال التالية :

(i) $f(z)=\frac{2z-3}{z^2+2z+2}$ (ii) $f(z)\frac{3z^2+4}{z^4-16}$

(iii) $f(z)=\cot z$ (iv) $f(z)=\frac{1}{z}-\sec z$

(v) $f(z)=\frac{\tanh z}{z^2+1}$

٢٣ـ برهن أن $f(z)=z^2-2z+3$ تكون متصلة في كل مكان في المستوى المحدود.

٢٤ـ برهـن أن الشـــرط الضروري والكـافي لكـل تكـــون الدالـة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ متصلة عند $z=z_o=x_o+iy_o$ هـو أن يكـون $u(x,y)$ و $v(x,y)$ متصلتين عند $(x_o,y_o)$

٢٥ـ أثبت أن الدالة $f(z)=z^3+3z^2+5z+1$ متصلة لكل $z$ في المســتوى المركب.

٢٦ـ أثبت أن الدالة $f(z)=|z|^2$ متصلة في المستوى المركب بأكمله.

# الفصل الثالث

## تفاضل الدوال المركبة ومعادلات كوشي - ريمان

**المشتقات :**

**تعريف مشتقة الدالة المركبة :-**

نفرض أن $w=f(z)$ دالة وحيدة القيمة في منطقة مفتوحة $D$ في المستوى المركب ونفرض أن $z_o$ تقع في $D$ نعرف مشتقة (تفاضل) الدالة $f(z)$ عند النقطة $z_o \in D$ كالآتي :

$$f'(z_o)=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}\ ,\ z,z_o \in D \qquad (1)$$

وذلك بشرط أن تكون النهاية موجودة ولا تعتمد على الطريقة التي تؤول بها $z \to z_o$. في مثل هذه الحالة نقول أن $f(z)$ قابلة للاشتقاق (للتفاضل) عند النقطة $z_o$.

يمكن كتابة التعريف (1) بصورة أخرى وذلك بوضع $h=z-z_o$ كالآتي :

$$f'(z_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_o+h)-f(z_o)}{h} \qquad (2)$$

وبصورة أعم يمكن كتابة المشتقة لأي نقطة $z$ في المنطقة $D$ كالآتي :

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \qquad (3)$$

**نظرية (١) :** إذا كانت الدالة $f(z)$ تفاضلية عند $z=z_o$ فإنها تكون متصلة عندها. والعكس غير صحيح.

البرهان

$\because$ الدالة $f(z)$ تفاضلية عند $z=z_o$ إذن

$$f'(z_o)=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$$

$$\because f(z)-f(z_o)=\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}(z-z_o)$$

$$\therefore \lim_{z\to z_o}\left[f(z)-f(z_o)\right]=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}\cdot\lim_{z\to z_o}(z-z_o)$$

$$=f'(z_o).0=0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_o} f(z)=f(z_o)$$

الدالة متصلة عند $z=z_o$

ولإثبات أن عكس هذه النظرية ليس صحيحاً نعطي المثال الآتي :

$$f(z)=\bar{z}$$

نثبت أولاً أنها متصلة عند النقطة $z_o$ في المستوى المركب كما يلي :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\varepsilon$$

$$|f(z)-f(z_o)|<\varepsilon\ \forall|z-z_o|<\delta$$

or $\quad |\bar{z}-\bar{z}_o|<\varepsilon\ \forall|z-z_o|<\varepsilon$

but $\quad |\bar{z}-\bar{z}_o|=|\overline{z-z_o}|=|z-z_o|<\delta=\varepsilon\ \ \forall|z-z_o|<\delta$

باختيار $\delta=\varepsilon$. هذا معناه أن الدالة $f(z)$ متصلة لكـــل $z$ فـــي المستوى المركب.

لكن
$$f'(z)=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$$

$$=\lim_{z\to z_o}\frac{\bar{z}-\bar{z}_o}{z-z_o}=\lim_{z\to z_o}\frac{\overline{z-z_o}}{z-z_o}$$

نضع $z-z_0=re^{i\theta}$ فيكون $\overline{z-z_0}=re^{-i\theta}$ وعندما $z\to z_0$ فإن $r\to 0$

$$\therefore \lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=\lim_{r\to 0}\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=\lim_{r\to 0}e^{-2i\theta}=e^{-2i\theta}=\Phi(\theta)$$

وهذه النتيجة تعتمد على قيم $\theta$ أي أن النهاية تعتمد على المسار ولذلك فهي ليست وحيدة وبالتالي ليست موجودة.

$\therefore$ الاتصال شرط ضروري ولكنه غير كافي كي تكون الدالة تفاضلية.

**تمرين:** اعتبر الدالة $f(z)=|z|^2, z\neq 0$
أثبت أنها متصلة دائماً ولكنها ليست تفاضلية.

يترك للقارئ.

**الدالة التحليلية :**

يقال للدالة $w=f(z)$ وحيدة القيمة أنها تحليلية عند النقطة $z_0$ إذا كانت للدالة مشتقة عند النقطة $z_0$ وعند كل النقط في أي جوار مباشر لها.
كما يقال أنها تحليلية في المنطقة D أو منتظمة في D إذا كانت الدالة تحليلية عند كل نقط المنطقة D.

## مسائل محلوله

١ــ أثبت أن الدالة $f(z)=z^2$ تفاضلية عند كل نقطة z في المستوى المركب.

الحل

نفرض أن $z_o$ أي نقطة في المستوى المركب:

$$\therefore f'(z_o)=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}=\lim_{z\to z_o}\frac{z^2-z_o^2}{z-z_o}=\lim_{z\to z_o}(z+z_o)$$

$$=2z_o$$

(مهما كان الطريق الذي تسلكه $z$ عندما تؤول إلى $z_o$).

$\therefore$ الدالة تفاضلية عند النقطة $z=z_o$ ، $\because$ $z_o$ اختيارية في المستوى المركب.

$\therefore$ الدالة $f(z)=z^2$ تفاضلية عند كل $z$ في المستوى المركب.

٢ــ اثبت أن الدالة $f(z)=zR_e(z)$ غير تفاضلية إلا عند $z=0$

الحل

$$f'(z_o)=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$$

$$=\lim_{z\to z_o}\frac{zR_e(z)-z_oR_e(z_o)}{z-z_o}$$

نعتبر مسارين مختلفين عندما $z\to z_o$

(i) اعتبر $z\to z_o$ خلال خط مستقيم موازي لمحور السينات

إذن $y-y_o=0$

$$\therefore z=x+iy=x+iy_o\ ,\ R_e(z)=x$$

$$z_o=x_o+iy_o\ ,\ R_e(z_o)=x_o$$

وعندما $z \to z_o$ فإن $x \to x_o$

$$\therefore f'(z_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{x(x+iy_o) - x_o(x_o+iy_o)}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 + ixy_o - x_o^2 - ix_o y_o}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{(x^2 - x_o^2)}{x - x_o} + iy_o \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)}{x - x_o}$$

$$= 2x_o + iy_o \qquad (1)$$

(ii) اعتبر $z \to z_o$ خلال خط مستقيم موازي لمحور الصادات

إذن $x - x_o = 0$

$$\therefore z = x + iy = x_o + iy \ , R_e(z) = x_o$$

$$z_o = x_o + iy_o \ , R_e(z_o) = x_o$$

وعندما $z \to z_o$ فإن $y \to y_o$

$$\therefore f'(z) = \lim_{y \to y_o} \frac{x_o(x_o+iy) - x_o(x_o+iy_o)}{i(y - y_o)}$$

$$= \lim_{y \to y_o} \frac{x_o^2 + ix_o y - x_o^2 - ix_o y_o}{i(y - y_o)}$$

$$= \lim_{y \to y_o} \frac{ix_o(y - y_o)}{i(y - y_o)} = \lim_{y \to y_o} x_o = x_o \qquad (2)$$

من (1)، (2) نلاحظ أن النهاية ليست وحيدة لكل $z \neq 0$ وهذا معناه أن الدالة $f(z) = zR_e(z)$ ليست تفاضلية. أما في حالة $z_o = 0$ فإننا نجد أن الدالة تكون تفاضلية كما يلي :

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{zR_e(z) - 0}{z - 0}$$

$$= \lim_{z \to 0} R_e(z) = R_e(0) = 0$$

٣ــ إذا كان $f(z)=\frac{1}{1-z}$ أوجد

(أ) $f'(z)$ (ب) عين أن تكون $f(z)$ غير تحليلية

## الحل

(أ) باستخدام التعريف

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1-(z+h)}-\frac{1}{1-z}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1-z-1+z+h}{(1-z)(1-z-h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(1-z)(1-z-h)}$$

$$=\frac{1}{(1-z)^2}$$

النهاية لا تعتمد على الطريقة التي تؤول بها $h\to 0$ بشرط $z\neq 1$

(ب) تكون الدالة $f(z)$ تحليلية لجميع قيم $z$ المحدودة ما عدا $z = 1$ حيث تكون المشتقة غير موجودة وبالتالي لا تكون الدالة تحليلية.

النقطة $z=1$ تكون نقطة شاذة للدالة $f(z)$ وهي قطب بسيط.

**<u>قوانين التفاضل (الأشتقاق):</u>**

قوانين الاشتقاق للدوال المركبة مطابقة لقوانين الاشتقاق في حالة دوال المتغير الحقيقي فإذا كانت $f(z)$، $g(z)$ دالتين تحليليتين في $z$ فإن قواعد التفاضل يمكن سردها كما يلي :

(i) $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = f'(z) \pm g'(z)$

(ii) $\frac{d}{dz}\{c\, f(z)\} = c\, f'(z)$

(iii) $\frac{d}{dz} = \{f(z)\, g(z)\} = f(z).\, g'(z) + g(z).\, f'(z)$

(iv) $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\, f'(z) - f(z)\, g'(z)}{[g(z)]^2}$

(v) if $w = f(\xi)$ , $\xi = g(z)$ then $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi} . \frac{d\xi}{dz}$

وتسمى هذه النتيجة بقاعدة التسلسل لتفاضل دالة الدالة.

(vi) if $z = f(t)$ , $w = g(t)$ where (t بارامتر)

then $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \div \frac{dz}{dt}$

**مشتقات الدوال البسيطة :**

(i) $\frac{d}{dz}(c) = 0$ , $\frac{d}{dz} z^n = n\, z^{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ , $\frac{d}{dz} a^z = a^z \ln a$

(iii) $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$ , $\frac{d}{dz} \log_a z = \frac{1}{z \ln a}$

(iv) $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$ , $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$

(v) $\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$ , $\frac{d}{dz} \cot z = -\operatorname{cosec}^2 z$

(vi) $\frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z$ , $\frac{d}{dz} \operatorname{cosec} z = -\operatorname{cosec} z \cot z$

(vii) $\frac{d}{dz} \sinh x = \cosh z$ , $\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$

(viii) $\frac{d}{dz}\tanh z=\operatorname{sech}^2 z\ ,\ \frac{d}{dz}\coth z=-\operatorname{cosech}^2 z$

(ix) $\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z=-\operatorname{sech} z\tanh z\ ,\ \frac{d}{dz}\operatorname{cosech} z=-\operatorname{cosech} z\coth z$

**المشتقات العليا (المشتقات النونية):**

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة ما فإن مشتقتها تعطى بـ $f'(z)$ وإذا كانت $f'(z)$ تحليلية أيضاً في المنطقة فإنه يرمز لمشتقتها بالرمز $f''(z)$ بالمثل المشتقة النونية للدالة $f(z)$، إذا وجدت يرمز لها بالرمز $f^{(n)}(z)$ حيث يسمى n برتبة المشتقة.

والنظرية الآتية هي واحدة من النظريات المدهشة التي تتحقق لدوال المتغير المركب بالرغم من أنها لا تتحقق لدوال المتغير الحقيقي بالضرورة:

> **نظرية :** إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية في منطقة ما R فإن $f'(z), f''(z), \ldots$ تكون أيضاً تحليلية في R. أي أن كل المشتقات الأعلى توجد في R.

**قاعدة لوبيتال :-**

لتكن $f(z)$ و $g(z)$ تحليليتين في منطقة ما تحتوي النقطة $z_0$، نفرض أن $f(z_0)=g(z_0)=0$ ولكن $g'(z_0)\neq 0$ تنص قاعدة لوبيتال على أن

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

يمكن أن تعمم القاعدة إذا كان $f'(z_0)=g'(z_0)=0$

وفي أغلب الأحيان يمكن تعديل قاعدة لوبيتال تعديلاً مناسباً لتعيين قيم النهايات الممثلة بما يسمى الصور غير المعينة

$$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, 0.\infty, \infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}.$$

## النقاط الشاذة :

تسمى النقطة التي عندها f(z) غير تحليلية بنقطة شاذة للدالة f(z). توجد أنواع مختلفة من النقاط الشاذة.

**١– النقطة الشاذة المعزولة :** تسمى النقطة $z_o$ بأنها نقطة شاذة معزولة للدالة f(z) إذا أمن أن نجد $\delta > 0$ بحيث أن الدائرة $|z-z_o|=\delta$ لا تحتوي على نقاط شاذة غير $z_o$. إذا تعذر إيجاد $\delta$ فإن $z_o$ تسمى نقطة شاذة غير معزولة.

إذا لم تكن $z_o$ نقطة شاذة وأمكن إيجاد $\delta > 0$ بحيث أن $|z-z_o|=\delta$ لا تحتوي أي نقاط شاذة فإن $z_o$ تسمى نقطة عادية للدالة f(z).

> **مثال :** النقطة الشاذة $z=1$ نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-5)}$
> حيث أنه يمكننا أن نجد $\delta$ بحيث لا توجد أي نقطة شاذة أخرى غير $z=1$ داخل الدائرة $|z-1|=\delta$ (مثلا نختار $\delta=2$)، وأيضاً النقطة الشاذة $z=5$ نقطة شاذة معزولة للدالة f(z) حيث يمكننا أن نجد $\delta$. بحيث لا توجد أي نقطة شاذة أخرى غير $z=5$ داخل الدائرة $|z-5|=\delta$ (مثلا نختار $\delta=1$).

**٢– الأقطاب :** إذا أمكن أن نجد عدداً صحيحاً موجب n بحيث أن

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$$

فإن $z = z_0$ يسمى قطباً من رتبة n. إذا كان $n = 1$ فإنه يقال أن $z_0$ قطب بسيط.

مثال (١): $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$ لها قطب من رتبة 2 عند $z = 3$. لأن

$$\lim_{z \to 3} (z-3)^2 f(z) = \lim_{z \to 3} (z-3)^2 \cdot \frac{1}{(z-3)^2} = 1 \neq 0$$

مثال (٢): $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3 (z+2)}$ لها قطب من رتبة 3 عند $z = -1$ وقطب بسيط عند $z = -2$ (حقق ذلك).

ملحوظة: أقطاب الدالة f(z) هي المواضع الصفرية للدالة $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ وإذا كان $z = z_0$ موضع صفري للدالة g(z). يقال أنه موضع صفري من الرتبة n إذا كان.

$$g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = \dots g^{(n-1)}(z_0) = 0, \; g^{(n)}(z_0) \neq 0$$

وفي هذه الحالة $z_0$ يكون قطب من الرتبة n وعندما $n = 1$ يسمى قطب من الرتبة الأولى (قطب بسيط).

٣ـ النقاط الشاذة القابلة ترفع : يقال أن النقطة الشاذة $z_0$ للدالة f(z) قابلة للرفع إذا وجدت النهاية أي أن $\lim_{z \to z_0} f(z)$ تكون موجودة.

مثال: النقطة الشاذة $z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للرفع للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

وذلك لأن $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ .

٤ـ النقاط الشاذة الأساسية : النقطة الشاذة التي ليست قطباً أو قابلة للرفع تسمى نقطة شاذة أساسية.

مثال: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ، $z = 0$ نقطة شاذة أساسية لأنه يتعذر إيجاد أي عدد صحيح موجب n بحيث

$$\lim_{z \to 0} z^n f(z) = \lim_{z \to 0} z^n e^{\frac{1}{z}} = A \neq 0$$

## مسائل محلوله

١ـ أوجد $\frac{dw}{dz}$ للدوال الآتية :

(i) $w = \cos^2(2z + 3i)$

(ii) $w = (z - 3i)^{4z+2}$

(iii) $w = \sin(t - 3)$, $z = \cos(\ln t)$

### الحل

(i) $\frac{dw}{dz} = 2\{\cos(2z + 3i)\}\{-\sin(2 + 3i)\}\{2\}$

$= -4\cos(2z + 3i)\sin(2z + 3i)$

(ii) $w = e^{(4z+2)\ln(z-3i)}$

$$\frac{dw}{dz} = e^{(4z+2)\ln(z-3i)} \cdot \left\{\frac{4z+2}{z-3i} + 4\ln(z-3i)\right\}$$

$$= (z-3i)^{4z+2}\left\{\frac{4z+2}{z-3i} + 4\ln(z-3i)\right\}$$

$$= (z-3i)^{4z+1}(4z+2) + 4(z-3i)^{4z+2}\ln(z-3i)$$

(iii) $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dw}{dt} \div \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\cos(t-3)}{-\sin(\ln t).\left[\frac{1}{t}\right]} = \dfrac{-t\cos(t-3)}{\sin(\ln t)}$

٢ــ أوجد قيمة

(i) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^{10}+1}{z^6+1}$ (ii) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ (iii) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{\sin z^2}$

(iv) $\lim\limits_{z\to 0} (\cos z)^{\frac{1}{z^2}}$

الحل

(i) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^{10}+1}{z^6+1} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{10z^9}{6z^5} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{5}{3}z^4 = \dfrac{5}{3}$

(ii) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z^2} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{2z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\cos z}{2} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{\sin z^2} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{2z\cos z} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\cos z}{-z\sin z + \cos z} = \dfrac{1}{2}$

(iv) put $w = (\cos z)^{\frac{1}{z^2}} \Rightarrow \ln w = \dfrac{\ln(\cos z)}{z^2}$

$$\therefore \lim_{z\to 0} \ln w = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(\cos z)}{z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\frac{\sin z}{\cos z}}{2z} = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{z}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sec^2 z}{1} = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos^2 z} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \ln\left(\lim_{z\to 0} w\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{z\to 0} w = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \lim_{z\to 0}(\cos z)^{\frac{1}{z^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

٣- وضح النقاط الشاذة وعين نوعها في مستوى z المحدود لكل من الدوال التالية وعين ما إذا كانت معزولة أم لا؟ ثم حدد أين تكون كـل دالـة تحليلية.

(أ) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$ (ب) $f(z) = \dfrac{z^8+z^4+2}{(z-1)^3(3z+2)^2}$

(جـ) $f(z) = \dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

الحل

(أ) $$f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2} = \frac{z}{\{(z+2i)(z-2i)\}^2} = \frac{z}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

$$\because \lim_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{z}{(z+2i)^2} = \frac{1}{8i} \neq 0$$

فيكون $z = 2i$ قطباً من الرتبة الثانية. بالمثل $z = -2i$ يكون قطباً من الرتبة الثانية.

بما أنه يمكننا أن نجد $\delta$ بحيث لا توجد أي نقطة شاذة أخرى غير $z = 2i$

داخل الدائرة $\delta = |z-2i|$ (مثلاً نختار $\delta=1$)، فيلي ذلك أن $z=2i$ تكون نقطة شاذة معزولة. بالمثل $z=-2i$ تكون نقطة شاذة معزولة.

يلي ذلك أن $f(z)$ تحليلية في كل مكان في مستوى z ماعدا النقطتين $z=2i$، $z=-2i$

(ب) النقاط الشاذة في مستوى z المحدود تقع عند $z=1$ و $z=-\frac{2}{3}$ حيث أن $z=1$ هو قطب من الرتبة الثالثة و $z=-\frac{2}{3}$ قطب من الرتبة الثانية وهي تمثل نقاط شاذة معزولة كما أن $f(z)$ تحليلية في كل مكان في مستوى z المحدود ماعدا النقطتين $z=1$ و $z=-\frac{2}{3}$.

(جـ) بما أن $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1$

ينتج أن $z=0$ نقطة شاذة قابلة للرفع والدالة $f(z)$ تكون تحليلية في كل مكان في مستوى z المحدود ماعدا $z=0$. ويمكن إعادة تعريف الدالة $f(z)$ بحيث تكون تحليلية في كل مكان في مستوى z كالآتي :

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} & , z\neq 0 \\ 1 & , z=0 \end{cases}$$

**<u>معادلتا كوشي – ريمان التفاضلية :</u>**

نعتبر الدالة $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ المعرفة على المنطقة D ونفرض أن $z_0 \in D$.

إذا كانت $f(z)$ تفاضلية عند $z_0 = x_0 + i\,y_0$ فإن $f'(z_0)$ تكون موجود ويكون

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)+i\{v(x,y)-v(x_0,y_0)\}}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

إذا كانت النهاية موجودة فإنه لا تعتمد على الطريقة التي تؤول بها $z\to z_0$ ولذلك نعتبر المسارين الآتيين :

(i) مسار موازي لمحور x. أي يكون $y=y_0$ , $x\to x_0$ وبذلك تكون النهاية هي

$$f'(z_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)+i\{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)\}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}+i\lim_{x\to x_0}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

(ii) مسار موازي لمحور y. أي يكون $x=x_0$ , $y\to y_0$ وبذلك تكون النهاية هي

$$f'(z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)+i\{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)\}}{i(y-y_0)}$$

$$=\frac{1}{i}\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}+\lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$=\frac{1}{i}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}-i\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

وإذا كانت المشتقة $f'(z_o)$ موجودة فمن الضروري أن تتساوى هاتان النهايتان أي أن

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_o,y_o)}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_o,y_o)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_o,y_o)}-i\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_o,y_o)}$$

وعلى ذلك فمن الضروري أن يكون لدينا

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_o,y_o)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_o,y_o)} \quad \text{and} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_o,y_o)}=-\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_o,y_o)}}$$

وتعرف المعادلتان التفاضليتان بمعادلتي كوشي ـ ريمان التفاضليتين عند النقطة $z_o=(x_o,y_o)$. وهما تمثلان شرطين ضروريين كي تكون الدالة المركبة $f(z)$ تحليلية.

وعلى وجه العموم يمكن أن نكتب معادلتي كوشي ـ ريمان لأي نقطة $z\in D$ أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{or} \quad u_x=v_y \quad \text{and} \quad u_y=-v_x$$

ولتوضيح أن معادلتي كوشي ـ ريمان تمثلان شرطين ضروريين لكي تكون الدالة $f(z)$ تحليلية نعطي المثالين التاليين

## أمثلة

(١) نعتبر الدالة $f(z)=R_e(z)=x=u+iv$

$\Rightarrow u = x , v = 0$

$\Rightarrow u_x = 1 , v_x = 0$

$u_y = 0 , v_y = 0$

$\Rightarrow u_x \neq v_y \wedge u_y = -\sqrt{x}$

وهذا معناه أن الشرط غير محقق لأي نقطة z في المستوى المركب. ويمكننا إثبات أنها ليست تفاضلية في أي مكان باستخدام التعريف.

(٢) نعتبر الدالة $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u + i v$

$\Rightarrow u = x^2 + y^2 , v = 0$

$\Rightarrow u_x = 2x \quad , v_x = 0$

$u_y = 2y \quad , v_y = 0$

$\Rightarrow u_x \neq v_y \wedge u_y \neq -\sqrt{x}$

ولكن معادلتي كوشي – ريمان تتحقق فقط عند النقطة z=0 وذلك لأن الدالة تفاضلية فقط عند النقطة z=0.

<u>ملحوظة هامة :</u> رغم أن تحقق معادلتي كوشي – ريمان التفاضليتين ضرورياً كي تكون الدالة f(z) تحليلية ولكنه شرط غير كاف كما يتضح ذلك من المثال الآتي :

<u>مثال :</u> نعتبر الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z R_e(z) I_m(z)}{|z|^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

سوف نثبت أن هذه الدالة تحقق معادلتي كوشي ـ ريمان عند نقطة الأصل وليست تحليلية عند نقطة الأصل.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^2y+iy^2x}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

من التعريف نجد أن :

$$u(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\ v(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$u(0,0)=0\ ,\ v(0,0)=0\ ,\ u(x,0)=0$$

$$v(x,0)=0\ ,\ u(0,y)=0\ ,\ v(0,y)=0$$

أي أن الدالة تتلاشى على كل من المحورين وعليه يكون

$$u_x=\lim_{x\to0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$v_x=\lim_{x\to0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$u_y=\lim_{y\to0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=\lim_{y\to0}0=0$$

$$v_y=\lim_{y\to0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=\lim_{y\to0}0=0$$

$$\therefore u_x=v_y=0,\ u_y=-v_x=0$$

أي أن الدالة $f(z)$ تحقق معادلتي كوشي ـ ريمان التفاضليتين عند $z=0$ الرغم من أن الدالة ليست تحليلية عند $z=0$ ولإثبات ذلك

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{xyz}{|z|^2}}{z-0}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

لإيجاد قيمة هذه النهاية نعتبر المسار هو خط مستقيم ميله m أي يكون y = m x حيث أن

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x.\,m\,x}{x^2+m^2\,x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}=\Phi(m)$$

والنهاية غير موجودة لأنها تعتمد على المسار وبالتالي $f'(0)$ ليس لها وجود

∴ الدالة ليست تفاضلية عند z=0 أي ليست تحليلية عند z = 0. أو أن الشرط غير كاف.

∴ يظهر لدينا السؤال الآتي : متى تكون معادلتي كوشي ـــ ريمان شرط كافي لكي تكون الدالة $f(z) = u + i\,v$ تحليلية؟

للإجابة على هذا السؤال يمكننا أن نبرهن أنه إذا كانت المشتقات الأولى الجزئية للدالتين u، v بالنسبة إلى x, y متصلة في المنطقة D فحينئذ معادلات كوشي ـــ ريمان تزودنا بالشروط الكافية لكي تكون الدالة f(z) تحليلية.

**معادلتا كوشي ـــ ريمان في الصورة القطبية :**

الآن نحاول التعبير عن معادلتي كوشي ـــ ريمان في الإحداثيات القطبية $(r,\theta)$

لدينا $x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

وبذلك يصبح لدينا $u=u(r,\theta)\ ,\ v=v(r,\theta)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \qquad (2)$$

بالمثل

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta \qquad (4)$$

من معادلتي كوشي ــ ريمان $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$، وباستخدام (1)، (4) يكون لدينا

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta-\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta=0 \qquad (5)$$

ومن معادلتي كوشي ــ ريمان $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. وباستخدام (2)، (3) يكون لدينا

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sin\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta=0 \qquad (6)$$

بضرب المعادلة (5) في $\cos\theta$ والمعادلة (6) في $\sin\theta$ والجمع ينتج أن

$$\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=0 \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}}$$

بضرب المعادلة (5) في $\sin\theta$-، المعادلة (6) في $\cos\theta$ والجمع ينتج أن

$$\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0 \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}}$$

∴ معادلتي كوشي ريمان في الصورة القطبية هما

$$\boxed{u_r=\frac{1}{r}v_\theta \ , u_\theta=-r\,v_r}$$

## مسائل محلوله

١ـ أثبت أن الدوال الآتية ليست تحليلية

(i) $f(z)=I_m(z)$ (ii) $f(z)=e^{\bar{z}}$ (iii) $f(z)=|z|$

الحل :

يكفي أن نثبت أن هذه الدوال لا تحقق معادلتي كوشي ـ ريمان

(i) $f(z)=I_m(z)=y=u+i\,v$

$\Rightarrow \; u=y \ , \ v=0$

$\Rightarrow u_x=0 \ , \ v_x=0$

$u_y=0 \ , \ v_y=1$

$\Rightarrow u_x\neq v_y \ ; \ u_y=-v_x$

∴ الدالة ليست تحليلية في أي مكان في المستوى المركب.

(ii) $f(z)=e^{\bar{z}}=e^{x-iy}=e^{x}e^{-iy}=e^{x}(\cos y-i\sin y)$

$\Rightarrow u=e^{x}\cos y\ ,\quad v=-e^{x}\sin y$

$\Rightarrow u_x=e^{x}\cos y\ ,\ v_x=-e^{x}\sin y$

$u_y=-e^{x}\sin y\ ,\ v_y=-e^{x}\cos y$

$\Rightarrow u_x\neq v_y\ \wedge u_y\neq -v_x$

∴ الدالة ليست تحليلية عند أي نقطة في المستوى المركب.

(iii) $f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow u=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ v=0$

$\Rightarrow u_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ v_x=0$

$u_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ v_y=0$

$\Rightarrow u_x\neq v_y\ ,\ u_y\neq v_x$

∴ الدالة ليست تحليلية عند أي نقطة في المستوى المركب.

٢- أثبت أن الدالة $f(z)=z^2$ دالة تحليلية.

الحل

$f(z)=z^2=(x,y)(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$

$\Rightarrow u=x^2-y^2\ ,\ v=2xy$

$\Rightarrow u_x=2x\ ,\ v_x=2y$

$u_y=-2y\ ,\ v_y=2x$

$\Rightarrow u_x=v_y\wedge u_y=-v_x$

∴ الدالة تحقق معادلتا كوشي — ريمان التفاضليتين. ويمكن إثبات أن كـل المشتقات الجزئية $u_x, u_y, v_x, v_y$ دوال متصلة في أي نقطة محدودة.

نثبت على سبيل المثال $u_x = 2x$ دالة متصلة

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|u_x(x,y) - u_x(x_o,y_o)| < \varepsilon\ \forall\ |x - x_o| < \delta\ , |y - y_o| < \delta$$

or $\quad |2x - 2x_o| < \varepsilon\ \forall |x - x_o| < \delta\ , |y - y_o| < \delta$

but $\quad |2x - 2x_o| = 2|x - x_o| < 2\delta = \varepsilon$

باختيار $\frac{\varepsilon}{2} = \delta$ تكون الدالة متصلة.

بالمثل يمكن إثبات أن $u_y, v_x, v_y$ دوال متصلة.

٣— أثبت أن الدالة $f(z) = z^2$ تحقق معادلتي كوشي — ريمان التفـــاضليتين في الصورة القطبية بينما الدالة $f(z) = \overline{z}$ لا تحققهما.

الحل

أولاً:
$$f(z) = z^2 = r^2 \operatorname{cis} 2\theta = r^2 \cos\theta + i\, r^2 \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow u = r^2 \cos 2\theta\ ,\quad v = r^2 \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow u_r = 2r\cos 2\theta\ ,\quad v_r = 2r\sin 2\theta$$

$$u_\theta = -2r^2 \sin 2\theta\ ,\quad v_\theta = 2r^2 \cos 2\theta$$

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \qquad ,\quad u_\theta = -r\, v_r$$

∴ الدالة تحقق معادلتي كوشي — ريمان التفاضليتين في الصورة القطبية.

<u>ثانياً:</u>

$$f(z)=\overline{z}=r\,\text{cis}(-\theta)=r\cos\theta-i\,r\sin\theta$$

$$\Rightarrow u=r\cos\theta \quad , \quad v=-r\sin\theta$$

$$\Rightarrow u_r=\cos\theta \quad , \quad v_r=-\sin\theta$$

$$u_\theta=-r\sin\theta \quad , \quad v_\theta=-r\cos\theta$$

$$\Rightarrow u_r\neq\frac{1}{r}v_\theta \;\wedge\; u_\theta\neq -r\,v_r$$

∴ الدالة لا تحقق معادلتي كوشي – ريمان التفاضليتين في الصورة القطبية لأي قيمة من قيم $\theta$ . وهذا يؤكد أن الدالة $f(z)=\overline{z}$ ليست تحليلية في أي منطقة.

<u>الدالة التوافقية :</u>

الدالة الحقيقية $f(x, y)$ التي لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى والثانية وجميعها متصلة في المنطقة D والتي تحقق معادلة لابلاس في بعدين في الصورة

$$\nabla^2 f=0 \quad \text{or} \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

في خلال المنطقة D يقال لها دالة توافقية. والمؤثر $\nabla^2$ يسمى بمؤثر لابلاس. ومعادلة لابلاس لها أهمية كبيرة في كثير من أفرع الرياضيات التطبيقية.

<u>نظرية :</u> إذا كانت $f(z)=u+i\,v$ تحليلية في منطقة ما D في المستوى المركب، فإن $u, v$ تكونان توافقيتين في D إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لهما متصلة في D.

البرهان

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في $D$ فإن معادلات كوشي ـــ ريمان تتحقق

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

إذا فرض أن $u$، $v$ لهما مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الثانية، فيمكننا أن نفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة إلى $x$ والمعادلة (2) بالنسبة إلى $y$ لنحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} \qquad (4)$$

ولكن $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

$\therefore$ من (3)، (4) نحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 u=0$$

أي أن الدالة $u$ توافقية.

بالمثل، بتفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة إلى $y$ والمعادلة (2) بالنسبة إلى $x$ واستخدام أن $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ نحصل على

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 v=0$$

وتكون الدالة $v$ توافقية.

**مثال :** أثبت أن الدالة $f(z)=e^z$ توافقية.

## الحل

$$f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=u+iv$$

$$\therefore \Rightarrow u=e^x\cos y\ ,\ v=e^x\sin y$$

$$u_x=e^x\cos y$$

$$u_{xx}=e^x\cos y$$

$$u_y=-e^x\sin y$$

$$u_{yy}=-e^x\cos y$$

$$\therefore u_{xx}+u_{yy}=0$$

$\therefore$ الدالة $u(x, y)$ تحقق معادلة لابلاس في بعدين.

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن الدالة $v(x, y)$ تحقق معادلة لابلاس.

والمشتقات الجزئية $u_{xx}, u_{yy}$ دوال متصلة. وواضح أن الدالة $f(z)=e^z$ دالة تحليلية في كل المستوى المركب.

$\therefore$ الدالة $f(z)=e^z$ هي دالة توافقية في كل المستوى المركب.

## طريقة ميلن تومسون لتعيين الدالة التحليلية

**(i) تكوين الدالة التحليلية إذا ما علم شقيها الحقيقي والتخيلي :**

لدينا $f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x,y)$

بوضع $y=0$، $f(x)=u(x, 0)+iv(x,0)$

بإحلال z بدلاً من x،
$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0)$$
ويمكن استخدام هذه الطريقة مباشرة عندما يكون كل من u, v معلومتين.

مثال : $f(z)=e^{x}\cos y+i\,e^{x}\sin y$

بوضع $x=z$، $y=0$ نحصل على
$$f(z)=e^{z}$$

**(ii) تكوين الدالة التحليلية إذا ما علم شقها الحقيقي :**

تعتبر الدالة التحليلية $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

ونفرض أن شقها الحقيقي $u(x,y)$ معلوم

(من معادلتي كوشي – ريمان) $\therefore f'(z)=u_x+i\,v_x=u_x-i\,u_y$
$$=u_1(x,y)-i\,u_2(x,y) \qquad (1)$$
حيث $u_x=u_1(x,y),\ u_y=(x,y)$

$\therefore$ باستخدام طريقة ميلن – طومسون يمكننا كتابة (1) على الصورة
$$f(z)=u_1(z,0)-i\,u_2(z,0) \qquad (2)$$
بتكامل (2) بالنسبة إلى z نحصل على
$$f(z)=\int\left[u_1(z,0)-i\,u_2(z,0)\right]dz+C_1$$

**(iii) تكوين الدالة التحليلية إذا ما علم شقها التخيلي :**
$$f(z)=u_x+i\,v_x=v_y+i\,v_x$$
$$=v_1(x,y)+i\,v_2(x,y)$$
وباستخدام قاعدة ميلن تومسون نحصل على

$$f'(z) = v_1(z,0) + i\,v_2(z,0)$$

وبإجراء التكامل على الطرفين بالنسبة إلى z نحصـــل علـــى الدالـــة f(z) بالإضافة إلى ثابت اختياري أي أن

$$f(z) = \int [v_1(z,0) + i\,v_2(z,0)]\,dz + C_2$$

## مسائل محلوله

١ــ كون الدالة التحليلية التي شقها الحقيقي هو $u(x,y) = e^x \cos y$

### الحل

سبق أن أثبتنا أن هذه الدالة توافقية.

$$\therefore\ u_x = e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \sin y$$

$$f'(z) = u_x + i\,v_x = u_x - i\,u_y = u_1(x,y) - i\,u_2(x,y)$$

حيث $u_1(x,y) = e^x \cos y \ ,\ u_2(x,y) = -e^x \sin y$

وباستخدام طريقة ميلي تومسون نجد أن

$$u_1(z,0) = e^z \quad , u_2(z,0) = 0$$

$$\therefore \qquad f'(z) = e^z$$

$$\Rightarrow \qquad f(z) = \int e^z\,dz + C = e^z + C$$

٢ــ أثبت أن الدالة $v(x,y) = 2xy$ توافقية في x, y ومن ثم كـــون الدالـــة التحليلية f(z) والذي شقها التخيلي هذه الدالة والتـــي تحقـــق الشـــرط $f(0)=0$

الحل

$$v(x, y) = 2xy$$

$$v_x = 2y$$

$$v_{xx} = 0$$

$$v_y = 2x$$

$$v_{yy} = 0$$

$$\therefore\ v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$\therefore$ الدالة $v(x, y)$ توافقية.

$$f'(z) = u_x + i\,v_x = v_y + i\,v_x = 2x + i\,2y = v_2(x, y) + i\,v_2(x, y)$$

باستخدام طريقة ميلن طومسون وذلك بوضع $y=0,\ x = z$

$$f'(z) = 2z \Rightarrow f(z) = \int 2z + C = z^2 + C$$

ولكن $f(0) = 0$

$$\therefore\ f(0) = 0 = 0 + C \quad \therefore\ C = 0$$

$$\boxed{\therefore\ f(z) = z^2}$$

## مسائل متنوعة

١ـ عين ما إذا كانت الدالة $f(z)=|z|^2$ لها مشتقة في مكان ما في المستوى المركب.

٢ـ أثبت أن الدالة $f(z)=I_m(z)$ ليست تحليلية في كل المستوى المركب.

٣ـ أثبت أن الدالة $f(z)=z^2\,\overline{z}$ ليست تحليلية في أي مكان في المستوى المركب.

٤ـ أثبت أن الدالة $f(z)=|z|^4$ تكون قابلة للتفاضل وغير تحليلية عند $z=0$.

٥ـ اختبر تفاضلية الدالة

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^2yz}{x^2+y^2} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$$

٦ـ حقق أن معادلات كوشي ـ ريمان تتحقق للدوال الآتية. ثم استنتج في كل حالة أن الدالة تحليلية

(أ) $e^{z^2}$ (ب) $ze^{-z}$ (جـ) $\sin 2z$ (ء) $\sinh 4z$

٧ـ أثبت أن الدالة $x^2+iy^3$ ليست تحليلية في أي مكان. وفق بين هذا وبين حقيقة أن معادلات كوشي ـ ريمان تتحقق عند $x=0, y=0$.

٨ـ برهن أن الدالة $u=2x(1-y)$ توافقية. أوجد الدالة التحليلية $f(z)$ والتي شقها الحقيقي هذه الدالة.

٩ـ (أ) إذا كانت $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ أوجد $f'(z)$ من التعريف.

(ب) ما هي قيم $z$ المحدودة التي تكون عندها $f(z)$ دالة غير تحليلية.

١٠ـ إذا أعطيت الدالة $f(z)=z^4$

(أ) أوجد الدوال الحقيقية u، v بحيث $f(z)=u+iv$

(ب) بين أن معادلات كوشي ـ ريمان تتحقق عند جميع نقط المستوى z المحدود.

(جـ) أثبت أن u، v دوال توافقية.

(ء) أوجد $f'(z)$

١١ـ أثبت أن $f(z)=z|z|$ دالة غير تحليلية عند أي نقطة.

١٢ـ أثبت أن $f(z)=\frac{1}{z-2}$ دالة تحليلية في أي نقطة لا تحتوي $z=2$.

١٣ـ انشأ دالة تحليلية $f(z)$ جزؤها الحقيقي هو $e^{-x}(x\cos y+y\sin y)$ والتي تحقق $f(0)=1$.

١٤ـ أثبت أنه لا توجد دالة تحليلية جزؤها التخيلي هو $x^2-2y$.

١٥ـ حقق معادلتي كوشي ـ ريمان في الصورة القطبية للدالة $f(z)=z^4$

١٦ـ برهن أن كلاً من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لدالة تحليلية لمتغير مركب تحقق معادلة لابلاس في الصورة القطبية.

١٧ـ أثبت أن الدالة
$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\left(\overline{z}\right)^2}{z} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$$
غير قابلة للتفاضل عند $z=0$. رغم أن معادلتي كوشي ـ ريمان محققتان عند هذه النقطة.

١٨ـ كون الدالة التحليلية التي شقها الحقيقي هو $e^{x}(x\cos y-y\sin y)$.

١٩ــ أثبت أن الدالة

$$u(x, y) = x\cos x\cosh y + y\sinh y\sin x - 3\cos \cancel{x}\, e^{-x}$$

توافقية ثم كون الدالة التحليلية $f(z)$ والتي شقها الحقيقي هو هذه الدالــة والتي تحقق $f(0) = -3$ ثم حقق أن : $f(z) + f(-z) + 6\cosh z = 0$

٢٠ــ أثبت أن الدالة

$$v(x, y) = 3xy^2 - x^3 + 4\cos x\sinh y - e^{-2x}\sin 2y$$

توافقية ومن ثم كون الدالة التحليلية والتي شقها التخيلي هو هذه الدالــة والتي تحقق $f(0) = 2$.

٢١ــ حدد مواقع النقط الشاذة (إذا كانت موجودة) في الجزء المحدود فــي المستوى z لكل من الدوال الآتية واذكر نوعها

(١) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^3}$ (٢) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$

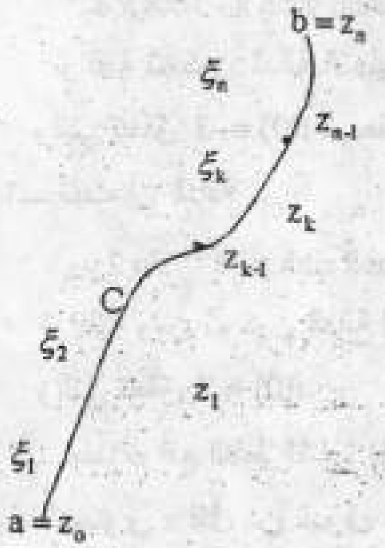
(٣) $f(z) = \dfrac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2 (z-i)(z-1+2i)}$ (٤) $f(z) = \dfrac{\sin mz}{z^2+2z+2}, m \neq 0$

(٥) $f(z) = e^{-1/(z-1)^2}$ (٦) $f(z) = e^{z}$

(٧) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$ (٨) $f(z) = \dfrac{\sin\left(z-\frac{\pi}{3}\right)}{3z-\pi}$

# الفصل الرابع

# تكامل الدوال المركبة




**التكاملات الخطية للدوال المركبة:**

نعتبر الدالة $f(z)$ متصلة عند كل نقاط المنحنى C والذي سنفرض أنه محدود الطول.

نقسم المنحنى C إلى n من الأجزاء بالنقاط $z_1, z_2, ..., z_n$ ولا توجد قيود على اختيار هذه النقاط حيث

$$a=z_o, b=z_n$$

نختار النقطة $\xi_k$ على كل قوس يصل $z_{k-1}$ إلى $z_k$ (حيث k تأخذ القيم من 1 إلى n). نكون المجموع

$$S_n = f(\xi_1)(z_1 - z_o) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + ... + f(\xi_n)(z_n - z_{n-1}) \qquad (1)$$

وبكتابة $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ فإن المجموع يصبح

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \qquad (2)$$

ونعتبر أن عدد الأقسام n يزداد بحيث يقترب أكبر طول من أطوال الأوتار $|\Delta z_k|$ من الصفر. وبالتالي يقترب المجموع $S_n$ من نهاية لا تعتمد على طريقة تقسيم المنحنى ونرمز لهذه النهاية بالرمز

$$\int_C f(z)\,dz \quad or \quad \int_a^b f(z)\,dz$$

أي يكون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k = \int_a^b f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz \qquad (3)$$

ويسمى (3) بالتكامل الخطي لدالة مركبة أو باختصار التكامل الخطي للدالـة $f(z)$ على المنحنى C أو التكامل المحدد للدالة $f(z)$ مـــن a إلــى b علــى المنحنى C. في هذه الحالة يقال أن $f(z)$ قابلة للتكامل علـــى المنحنـــى C. لاحظ أن $f(z)$ تحليلية عند كل نقاط المنطقة D وإذا كان C هو منحنـــى لا يقع في D فإن $f(z)$ بالتأكيد قابلة للتكامل على المنحنى C.

**<u>العلاقة بين التكاملات الخطية للدوال الحقيقية والمركبة:</u>**

إذا كان $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = u + i\,v$ فإن التكامل الخطـــي الدالة المركبة (3) يمكن التعبير عنه بدلالة التكاملات الخطية للدوال الحقيقية مثل

$$\boxed{\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)(dx+i\,dy)\\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C v\,dx + u\,dy\end{aligned}} \qquad (4)$$

والمعادلة (4) تؤخذ كتعريف للتكامل الخطي للدالة المركبة.

**<u>خواص التكاملات:</u>**

إذا كانت $f(z)$، $g(z)$ دالتين قابلتين للتكامل على C، فإن

(i) $\int_C \{f(z) + g(z)\}\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

$$\text{(ii)}\ \int_C A f(z)\,dz = A\int_C f(z)\,dz$$ حيث A أي ثابت

$$\text{(iii)}\ \int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$$

$$\text{(iv)}\ \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^m f(z)\,dz + \int_m^b f(z)\,dz$$ حيث $m, b, a$ نقاط على المنحنى $C$

وإذا كانت $C_2, C_1, C$ تمثل منحنيات من a إلى b، من a إلى m ومن m إلى b على الترتيب فإنه من الطبيعي أن نعتبر أن $C = C_1 + C_2$ وأن نكتب هـذه الخاصية على الصورة

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

## مسائل محلوله

| |
|---|
| ١ـ أثبت باستخدام تعريف التكامل أن $\int_a^b c\,dz = c(b-a)$ |

الحل

$$f(z) = c \Rightarrow f(\xi_k) = c$$

نكون $S_n$ حيث أن $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} c(z_k - z_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) \\
&= c(z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + z_3 - z_2 + \ldots + z_n - z_{n-1}) \\
&= c(z_n - z_0) = c(b-a)
\end{aligned}$$

$$\int_a^b c\,dz = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c(b-a)$$

ملحوظة: إذا كان المنحنى الذي يصل بين a، b منحنى مغلق فــإن b = a

وعليه فإن التكامل = صفراً.

أي أن

$$\int_a^b c\,dz = \oint_L c\,dz = 0$$

حيث L هو المنحنى الذي يصل بين النقطتين a, b

٢ـ إذا كانت $f(z) = z$ وكان C هو أي قوس يصل بين النقطتين $z = a,\ z = b$

عليه فأحسب $\int_a^b z\,dz$

الحل

أولاً: نأخذ $\xi_k = z_k$ حيث أن $f(\xi_k) = f(z_k) = z_k$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} z_k\,(z_k - z_{k-1}) \qquad (1)$$

ثانياً: نأخذ $\xi_k = z_{k-1}$ حيث أن $f(\xi_k) = f(z_{k-1}) = z_{k-1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\,(z_k - z_{k-1}) \qquad (2)$$

المجموعان (1)، (2) يؤولان إلى نفس النهاية. بجمع (1)، (2)

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(z_k^2 - z_k\,z_{k-1}\right) + \left(z_{k-1}\,z_k - z_{k-1}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(z_1^2-z_o^2+z_2^2-z_1^2+z_3^2-z_2^2+\ldots+z_n^2-z_{n-1}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(z_n^2-z_o^2\right)=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

$$\therefore\ \int_a^b z\,dz=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

وإذا كان المنحنى C الذي يصل بين النقطتين a, b مغلق فإن $a=b$ والتكامل = صفراً.

أي أن $$\int_a^b z\,dz=\oint_C z\,dz=0$$

٣ـ برهن أنه إذا كانت f(z) قابلة للتكامل على المنحنى C المحدود الطـــول L وإذا كان يوجد عدد موجب M بحيث أن $|f(z)|\le M$ على C فإن

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le ML$$

الحل

باستخدام تعريف التكامل للدوال المركبة نجد أن :

$$\int_C f(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k \qquad (1)$$

$$\text{but} \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le |f(\xi_k)||\Delta z_k|$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$$

$$\le ML \qquad (2)$$

حيث استخدمنا حقيقــة أن $|f(z)| \le M$ لكــل النقاط z على المنحنى C وأن $\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_n|$ تمثل مجموع أطوال الأوتار التي تصل النقاط $z_k, z_{k-1}$ حيــث $k=1, 2, \ldots, n$ وأن هذا المجموع لا يزيد عن طول المنحنى C.

وبأخذ النهاية لكل من الطرفين في المعادلة (2) وباستخدام (1) فإنه ينتج أن

$$\boxed{\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \pi L}$$

ومن الممكن أن نعمم ذلك بأن نثبت أن

$$\boxed{\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|}$$

٤ــ لحسب $\int_C \frac{dz}{z}$ حيث C هو الدائرة التي مركزها (0, 0) ونصف قطرها r

الحل

Put $z=re^{i\theta} \Rightarrow dz=re^{i\theta}\,i\,d\theta$

حيث $\theta$ تتغير من 0 إلى $2\pi$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}}=\int_0^{2\pi} i\,d\theta = i\theta\Big|_0^{2\pi}=i(2\pi-0)=2\pi i$$

هـ أثبت أن $\int_C z^n\,dz=0$ حيث n أي عدد صحيح موجب أو سالب يختلف عن 1-، C هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r.

الحل

Put $z=re^{i\theta} \Rightarrow z^n=r^n e^{in\theta}$ , $dz=ire^{i\theta}d\theta$

حيث $\theta$ تتغير من 0 إلى $2\pi$

$$\therefore \int_C z^n\,dz=\int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta}.ire^{i\theta}d\theta$$

$$= ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta$$

$$=\frac{ir^{n+1}}{i(n+1)}e^{i(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{2\pi i(n+1)}-1\right]$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}\left[\overset{1}{\cos 2\pi(n+1)}+i\,\overset{0}{\sin 2\pi(n+1)}-1\right]$$

$$=0 \ , \ n\neq -1$$

$$\therefore \int_C z^n \, dz = 0 \ , \ n \neq -1$$

٦ـ أوجد قيمة $\int_C \bar{z}\, dz$ من $z=0$ إلى $z=4+2i$ على المنحنى C المعطـ
بـ (أ) $z=t^2+it$
(ب) الخط من $z=0$ إلى $z=2i$ وثم من الخط $z=2i$ إلى $z=4+2i$

الحل

(أ) النقطتان $z=0$، $z=4+2i$ على المنحنـى C تنـاظران $t=0$ و $t=2$ علـ الترتيب. وعلى ذلك فإن التكامل الخطي يساوي

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_{t=0}^{2} \overline{t^2+it}\, d(t^2+it) = \int_0^2 (t^2-it)(2t+i)\, dt$$

$$= \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)\, dt = 10 - \frac{8i}{3}$$

(ب) الخط من $z=0$ إلى $z=2i$ هو الخط المستقيم مـن $(0,0)$ إلـى $(0,2)$ ومعادلته هي $x=0$، $dx=0$ وينتج من ذلك أن التكامل الخطي يساوي

$$\int_{C_1} \bar{z}\, dz = \int_{C_1} (x-iy)(dx+idy) = \int_0^2 (-iy)(idy)$$

$$= \int_0^2 y\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$

والخط من $z=2i$ إلى $z=4+2i$ هو الخط المستقيم من $(0,2)$ إلـى $(2$

والذي معادلته هي $y=2$، $dy=0$ وعلى ذلك التكامل الخطي يساوي

$$\int_{C_2} \bar{z}\, dz = \int_{C_2} (x-iy)(dx+i\,dy) = \int_0^4 (x-2i)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2ix \Big|_0^4 = 8-8i$$

إذن القيمة المطلوبة هي

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_{C_1} \bar{z}\, dz + \int_{C_2} \bar{z}\, dz = 2+8-8i = 10-8i$$

٧ـ إذا كانت $f(z)=R_e(z)$ أوجد تكامل هذه الدالة على المنحنى الواصل بين النقطتين $z_o=(0,0)$ إلى $z=2+2i$ عبر كل من

(i) المستقيم $y=x$

(ii) المستقيم الواصل بين $z_o$ إلى $z=2$ ثم من $z=2$ إلى $z=2+2i$

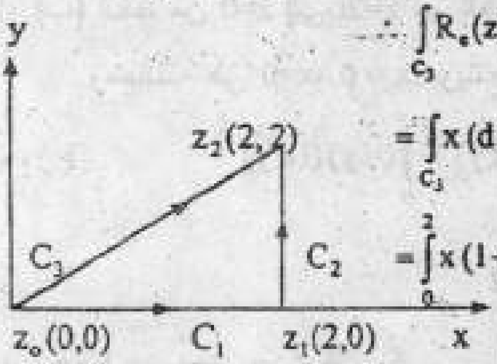
## الحل

$$\because\ y=x \Rightarrow z=x+iy=x+ix \Rightarrow dz=(1+i)\,dx$$

$$\therefore \int_{C_3} R_e(z)\, dz = \int_{C_3} x\, dz$$

$$= \int_{C_3} x(dx+i\,dy) = \int_0^2 x(dx+i\,dx)$$

$$= \int_0^2 x(1+i)\, dx = (1+i)\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2(1+i)$$



(ii) المسار هنا يتكون من جزئين الأول $C_1$ هو الخط المستقيم الذي يبدأ من نقطة الأصل ثم يتجه على المحور الحقيقي حتى النقطة $(2, 0)$ ومعادلته هي $y=0 \Leftarrow dy=0$ والمسار الثاني $C_2$ هو الخط العمودي عليه ويبدأ من النقطة $(2,0)$ حتى يصل إلى النقطة $(2,2)$ ومعادلته هي $x=2$ $\Leftarrow dx=0$.

$$\therefore \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_1} x\,dz = \int_{C_1} x(dx+i\,dy) = \int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2$$

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_2} x\,dz = \int_{C_2} x(dx+i\,dy) = \int_0^2 2i\,dy = \left.2i\right|_0^2 = 4i$$

$$\therefore \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 2+4i$$

**<u>المنحنيات :</u>**

إذا كانت $x(t), y(t)$ دالتين حقيقيتين للمتغير الحقيقي $t$ وفرض أنهما متصلتان في $t_1 \le t \le t_2$ فإن المعادلات البارامترية

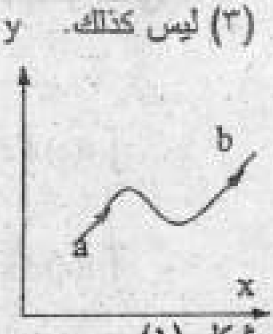
$$x = x(t)\ ,\ y = y(t) \quad , \quad t_1 \le t \le t_2 \tag{1}$$

تعرف في المستوى $z$ منحنى أو قوساً متصلاً $C$ يصل بين نقطتين ومن المناسب وصف نقط القوس $C$ بالمعادلة

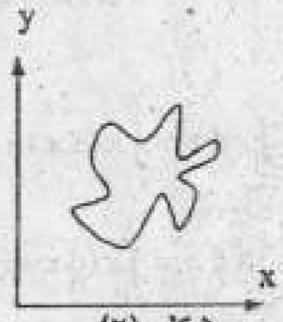
$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \quad , \quad t_1 \le t \le t_2 \tag{2}$$

حيث أن المنحنى أو القوس يصل النقطتين $a = z(t_1), b = z(t_2)$ (انظر شكل (١)).

إذا كانت $t_1 \neq t_2$ بينما $z(t_1) \neq z(t_2)$، أي أن $a = b$ فإن نقطتي بداية ونهاية المنحنى ينطبقان ويقال أن المنحنى مغلق. المنحنى المغلق هو المنحنى الذي لا يتقاطع مع نفسه أبداً ويسمى <u>بمنحنى بسيط مغلق</u> أو <u>منحنى جوردان</u> فمثلاً المنحنى في (شكل (٢)) يكون منحنياً بسيطاً مغلقاً بينما الذي في شكل (٣) ليس كذلك.




شكل (١)




شكل (٢)


شكل (٣)

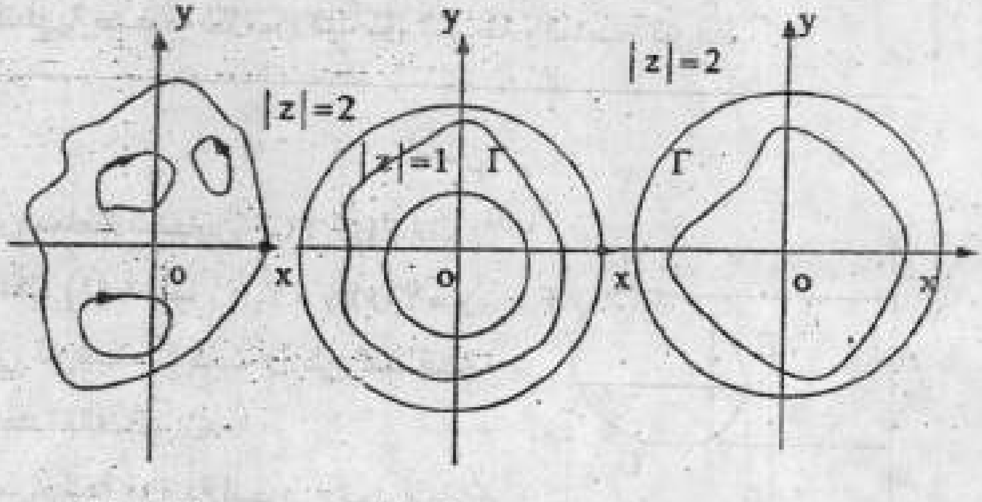
إذا كان للدالتين (1) وبالتالي $z(t)$ مشتقات متصلة في المتغير $t$ فإن المنحنى يسمي منحنى مغلق (كونتور). فمثلاً محيط مربع هو منحنى مغلق (كونتور). وعادة يسمي المنحنى المغلق البسيط بالكونتور المغلق البسيط. ومن أمثلة المنحنيات المغلقة البسيطة أيضاً الدائرة ـ القطع الناقص ـ المستطيل.

<u>المناطق البسيطة الترابط والمتعددة الترابط :</u>

تسمى منطقة ما D بأنها بسيطة الترابط إذا كان أي منحنى بسيط مقفل يقع في D يمكن أن يؤول إلى نقطة بدون أن يترك المنطقة D. وإذا كانت منطقة ما D غير بسيطة الترابط فإنه يقال إنها متعددة الترابط.

وعلى سبيل المثال، إفرض أن D هي المنطقة المعروفة بـ $|z|<2$ في شكل (١). إذا كان $\Gamma$ هو أي منحنى بسيط مقفل في D (أي كل نقاطه تقع في D)، فإننا نرى أنه يمكن أن يؤول إلى نقطة والتي تقع في D، وبالتالي لا يترك D، إذن المنطقة D بسيطة الترابط. وعلى عكس ذلك إذا كانت D هي المنطقة المعرفة بـ $1<|z|<2$ في شكل (٢)، فإنه يوجد منحنى بسيط مقفل $\Gamma$ يقع في D ومن المتعذر أن يؤول إلى نقطة بدون أن يترك D، وبالتالي المنطقة D متعددة الترابط.

ومن البديهي، المنطقة البسيطة الترابط هي المنطقة التي لا تحوي "فجوات" بداخلها بينما المنطقة المتعددة الترابط هي التي تحوي "فجوات" وبالتالي المناطق المتعددة الترابط في شكل (٢) و (٣) تحوي فجوة وثلاث فجوات بداخلها على الترتيب




شكل (٣) شكل (٢) شكل (١)

تنبيه

## الاتفاق على إشارة اتجاه عبور مسار مقفل :

يستخدم المصطلح الخاص $\oint_C f(z)\,dz$ للتعبير عن تكامل f(z) حول المنحنى C في الاتجاه الموجب. لاحظ أنه في حالة الدائرة شكل (١) السابق الاتجاه الموجب هو عكس اتجاه دوران عقارب الساعة. يسمى غالباً التكامل حول C بالتكامل حول منحنى مقفل "كونتور" C.

## نظرية جرين في المستوى :

نفرض P(x, y)، Q(x, y) دالتان متصلتان وأن مشتقاتها الجزئية متصلة في منطقة ما D وعلى حدها C. تنص نظرية جرين على

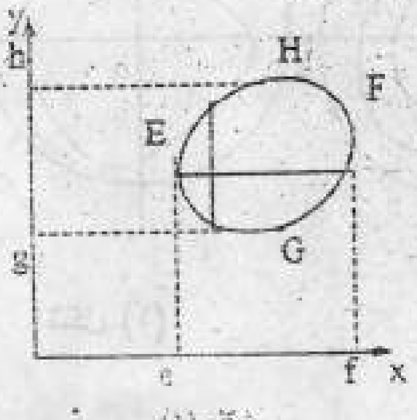
$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

والنظرية صحيحة لكل من المناطق البسيطة والمتعددة الترابط.

البرهان

لتكن معادلتا المنحنيين EHF, EGF انظر شكل (١) هما $y = Y_1(x), y = Y_2(x)$ على الترتيب. إذا كانت D هي المنطقة المحددة بالمنحنى C.

بأخذ شريحة موازية لمحور y نجد أن




شكل (١)

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x=e}^{f}\left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right]dx$$

$$= \int_{x=e}^{f} P(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\,dx = \int_e^f [P(x,Y_2) - P(x,Y_1)]\,dx$$

$$= -\int_e^f P(x,Y_1)\,dx - \int_f^e P(x,Y_2)\,dx = -\oint_C P\,dx$$

إذن

$$\oint_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \qquad (1)$$

بالمثل لتكن معادلتا المنحنيين GFH, GEH هما $x = X_1(y)$, $x = X_2(y)$ على الترتيب وبأخذ شريحة موازية لمحور x نجد أن

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=g}^{h}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right]dy$$

$$= \int_g^h [Q(X_2,y) - Q(X_1,y)]\,dy$$

$$= \int_h^g Q(X_1,y)\,dy + \int_g^h Q(X_2,y)\,dy = \oint_C Q\,dy$$

إذن

$$\oint_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \qquad (2)$$

بجمع (1) و(2) ينتج أن

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

**نظرية جرين للدوال المركبة :**

إذا كانت $B(z,\overline{z})$ ومشتقاتها الجزئية في منطقة ما D وعلى حدهـا C، حيث $z=x+iy$، $\overline{z}=x-iy$ فإنه يمكن كتابة نظرية جرين في الصورة المركبة وهي

$$\oint_C B(z,\overline{z})\,dz = 2i\iint_D \frac{\partial B}{\partial \overline{z}}\,dx\,dy$$

البرهان

ليكن $B(z,\overline{z}) = P(x,y) + iQ(x,y)$ ، فيكون لدينا باستخدام نظرية جرين

$$\begin{aligned}
\oint_C B(z,\overline{z})\,dz &= \oint_C (P+iQ)(dx+idy) \\
&= \oint_C Pdx - Qdy + i\oint_C Qdx + Pdy \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy \\
&= -\iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right] dx\,dy \\
&= 2i\iint_D \frac{\partial B}{\partial \overline{z}}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

**ملحوظة:** يمكن كتابة النتيجة أيضاً بدلالة grad B كالآتي :

$$\begin{aligned}
\oint_C B(z,\overline{z})\,dz &= i\iint_D \operatorname{grad} B\,dx\,dy \\
&= i\iint_D \nabla B\,dx\,dy
\end{aligned}$$

**نظرية كوشي :**

إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية ولها مشتقة متصلة عند جميـــع النقــاط داخل وعلى المنحنى البسيط المغلق $C$ فأن

$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

البرهان

بما أن $f(z)=u+iv$ تحليلية ومشتقاتها متصلة، فإن

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

ويلي من ذلك أن المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

متصلة داخل وعلى المنحنى $C$.

إذن يمكن تطبيق نظرية جرين، فيكون لدينا

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_C (u+iv)(dx+iv)=\oint_C u\,dx-v\,dy+i\oint_C v\,dx+u\,dy$$

$$=\iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

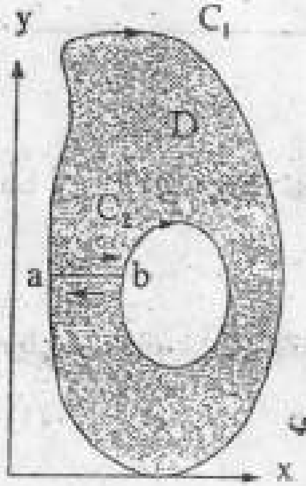
وذلك باستخدام معادلتي كوشي ـــ ريمان (1)، (2).

## نتائج على نظرية كوشي:

### نتيجة (١):

لتكن الدالة $f(z)$ تحليلية في منطقة ما $D$ محددة بمنحنيين بسيطين مقفلين $C_1, C_2$ وكذلك على $C_2, C_1$ (المنطقة مظللة في شكل (١)).

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$




شكل (١)

البرهان

ننشئ خطاً $a\,b$ والذي يسمى بالقاطع المستعرض.

فنحصل على المنطقة البسيطة الترابط.

إذا كان $C$ هو حد المنطقة البسيطة الترابط

بما أن $f(z)$ تحليلية في المنطقة $D$، فمن نظرية كوشي

$$\oint_{C} f(z)\,dz = 0$$

or $$+\int_{ab} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{ba} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

بما أن $$\int_{ab} f(z)\,dz = -\int_{ba} f(z)\,dz$$

إذن $$-\int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

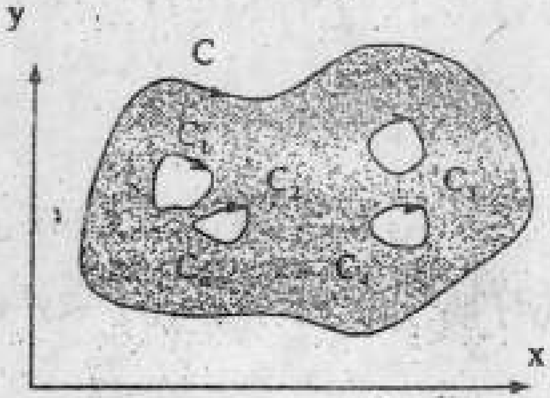
أو $$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

**نتيجة (٢) :**

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة ما $D$ محددة بالمنحنيات البسيطة الغير متداخلة $C, C_1, C_2, ..., C_n$ وكذلك على هذه المنحنيات (المنطقة المظللة في شكل (٢)) فإن

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + ... + \oint_{C_n} f(z)\,dz$$

وتعتبر هذه النتيجة تعميماً لنتيجة (٢).



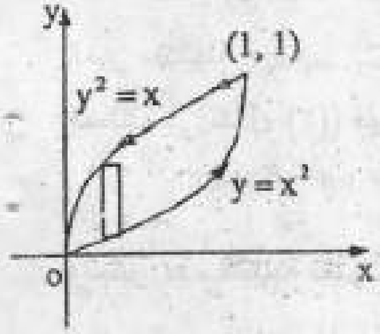

## مسائل محلولة

١- حقق نظرية جرين في المستوى للتكامل

$$\oint_C (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

حيث $C$ منحنى مقفل في المنطقة المحددة بالمنحنيين $y^2 = x \cdot y = x^2$

الحل.




شكل (١)

يتقاطع المنحنيان المستويان في النقطتين $(0, 0)$، $(1, 1)$ والاتجاه الموجب لعبور C مبين في شكل (١) على المنحنى $y=x^2$، التكامل الخطي يساوي

$$\int_{x=0}^{1}\{(2x)(x^2)-x^2\}dx+\{x^2+(x^2)^2\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(2x^3+x^2+2x^5)dx=\frac{7}{6}$$

على المنحنى $y^2=x$، التكامل الخطي يساوي

$$\int_{y=1}^{0}\{2(y^2)(y)-(y^2)^2\}d(y^2)+\{y^2+y^2\}dy=\int_{1}^{0}(4y^4-2y^5+2y^2)dy$$

$$=\frac{-17}{15}$$

∴ التكامل الخطي المطلوب يساوي $\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}$

وأيضاً

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy-x^2)\right\}dx\,dy$$

$$=\iint_D(1-2x)\,dx\,dy=\int_{x=0}^{1}(1-2x)\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{1}(y-2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-x^2+2x^3\right)dx=\frac{1}{30}$$

وبالتالي تتحقق نظرية جرين.

٢ـ أوجد قيمة $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ حيث C أي منحنى بسيط مقفل و $z=a$ تقع

(أ) خارج المنحنى C،

(ب) داخل المنحنى C.

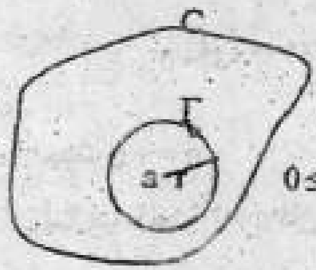
الحل

(أ) إذا كانت a خارج المنحنى C، فإن $f(z)=\frac{1}{z-a}$ تحليلية في كل مكان داخل المنحنى C وعليه. وينتج من نظرية كوشي أن

$$\oint_C \frac{dz}{z-a}=0$$

(ب) نفرض أن a داخل C ولتكن $\Gamma$ هي دائرة ما نصف قطرها r ومركزها عند $z=a$ بحيث تقع $\Gamma$ داخل C.

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z-a}=\oint_\Gamma \frac{dz}{z-a} \qquad (1)$$




والآن على الدائرة $|z-a|=r$ أو $z-a=re^{i\theta}$

أو $z=a+re^{i\theta}$ بما أن $dz=ire^{i\theta}$، $0\le\theta\le 2\pi$

فإن الطرف الأيمن للمعادلة (1) يصبح

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}d\theta=i\theta\Big|_0^{2\pi}=i(2\pi-0)=2\pi i$$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

٣- أوجد قيمة $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ حيث n عدد صحيح موجب، C منحنى بسيط مقفل.

الحل

واضح أن الدالة $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ ليست تحليلية عند $z = a$

إذا كانت a تقع خارج المنحنى المغلق فمن نظرية كوشي ينتج أن

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$$

إذا كانت النقطة a تقع داخل المنحنى C. نرسم دائرة $\Gamma$ مركزها النقطة a ونصف قطرها r تقع داخل C بالتالي

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{i\theta}\, d\theta}{r^n e^{in\theta}} = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)\, r^{n-1}} \left[e^{2\pi i(1-n)\theta} - 1\right] = 0$$

حيث $n \neq +1$

أما إذا كانت $n = 1$ فإن

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \qquad \text{((من مثال (٢))}$$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{if } n = 1 \\ 0 & \forall\, n;\, a \notin C \end{cases}$$

٤- احسب $\int_C \frac{2z-3}{z^2-3z}\,dz$ حيث C هي الدائرة

(i) $|z|=1$ (ii) $|z-3|=1$ (iii) $|z|=9$

الحل

$$\frac{2z-3}{z^2-3z} = \frac{2z-3}{z(z-3)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-3}$$

$$\int_C \frac{2z-3}{z^2-3z}\,dz = \int_C \frac{1}{z}\,dz + \int \frac{1}{z-3}\,dz$$

ونلاحظ أن الدالة $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z}$ غير تحليلية عند $z=0$، $z=3$

(i) إذا كانت C هي الدائرة $|z|=1$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة فإن $z=3$ تقع خارجها، $z=0$ تقع داخلها.

$$\int_C \frac{2z-3}{z^2-3z}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{2z-3}{z^2-3z}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z-3} = 2\pi i + 0 = 2\pi i$$

(ii) $|z-3|=1$ هذه دائرة مركزها النقطة $(3,0)$ ونصف قطرها الوحدة. النقطة $z=3$ تقع داخلها بينما النقطة $z=0$ تقع خارجها.

$$\therefore \int_C \frac{2z-3}{z^2-3z}\,dz = \int_{|z-3|=1} \frac{2z-3}{z^2-3z}\,dz = \int_{|z-3|=1} \frac{dz}{z-3} = 0 + 2\pi i = 2\pi i$$

(iii) $|z|=9$ هذه معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 9

∴ النقطة $z=0$، $z=3$ تقع داخل الدائرة $|z|=9$

$$\therefore \int_C \frac{2z-3}{z^2-3z}\,dz = \int_{|z|=9} \frac{dz}{z} + \int_{|z|=1} \frac{dz}{z-3} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

## صيغ كوشي التكاملية :

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل وعلى المنحنى البسيط المقفل $C$ و $a$ أي نقطة داخل $C$ فإن

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

البرهان

الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية داخل وعلى المنحنى $C$ ماعدا عند النقطة $z=a$ فيكون لدينا

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad (1)$$

حيث أن $\Gamma$ دائرة نصف قطرها $r$ ومركزها النقطة $a$، وبالتالي معادلة $\Gamma$ هي $|z-a|=r$ أو $z-a=re^{i\theta}$ أو $z=a+re^{i\theta}$، $dz=ire^{i\theta}\,d\theta$ لذلك فإن التكامل (1) يصبح

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(a+re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta \qquad (2)$$

وبأخذ النهاية لطرفي المعادلة (2) مع الأخذ في الاعتبار أن f(z) متصلــة، فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = 2\pi i f(a) \qquad (3)$$

وبالتالي

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (4)$$

## مشتقات الدوال التحليلية :

إذا كانت f(z) دالة تحليلية داخل وعلى المنحنى البسيط المقفــل، و a أي نقطة داخل C فإن مشتقة الدالة f(z) عند z= a تعطى بالآتي

$$f'(a) = \frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz \qquad (5)$$

وكذلك المشتقة النونية للدالة f(z) عند z = a تعطى بالآتي :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n=1,2,3,.. \qquad (6)$$

يمكن اعتبار النتيجة (4) حالة خاصة من النتيجة (6) عندما n = 0 وذلــك إذا عرفنا أن 0! = 1.

وتسمى النتائج (4)، (5)، (6) بصيغ كوشي التكاملية وهي نتائج مدهشة جـداً لأنها تثبت أنه إذا كانت دالة ما f(z) معرفة على منحنى بسيط مقفل C فإنــه يمكن إيجاد قيمة الدالة وكل مشتقاتها عند كل النقاط داخل C. وبالتـــالي إذا وجدت المشتقة الأولى لدالة ما لمتغير مركب أي إذا كانت الدالة تحليلية فـي

منطقة بسيطة الترابط D. فإن كل مشتقاتها من الرتب الأعلى توجد في D. وليس من الضروري أن يكون ذلك صحيحاً لدوال المتغير الحقيقي.

**متباينة كوشي :**

إذا كانت f(z) تحليلية داخل وعلى الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها عند $z=a$ فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M.(n!)}{r^n}, n=0,1,2,3,...$$

و n ثابت ما بحيث أن $|f(z)| \le M$,

البرهان

من صيغ كوشي التكاملية

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n=0,1,2,3,..$$

حيث المنحنى C هو الدائرة $|z-a|=r$ أو $z-a=re^{i\theta}$، وطول المنحنى C هو $2\pi r$، يكون لدينا

$$\left|f^{(n)}(a)\right|=\frac{n!}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}.\frac{M}{r^{n+1}}.2\pi r = \frac{M.n!}{r^n}$$

**نظرية جاوس للقيمة المتوسطة :**

إذا كانت f(z) تحليلية داخل وعلى الدائرة C التي مركزها a ونصف قطرها r، فإن f(a) هي متوسط قيم الدالة f(z) على C أي

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

البرهان

من صيغة تكامل كوشي

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (1)$$

إذا كان نصف قطر C هو r، فإن معادلة C هي $|z-a|=r$ أو $z=a+re^{i\theta}$

$dz=ire^{i\theta}d\theta$ وبالتالي تصبح المعادلة (1)

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a+re^{i\theta}\right)ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

## مسائل متنوعة

(١) أوجد قيمة $\oint_C \frac{e^z}{z-a}dz$ إذا كان C هو الدائرة $|z|=3$

الحل

ليكن $a=2$ ، $f(z)=e^z$ حيث $a\in C$

$$\oint_C \frac{e^z}{z-a}dz=2\pi i f(2)=2\pi i e^2$$

٢ـ أوجد قيمة $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$ حيث C هي الدائرة $|z|=2$

الحل

بما أن $f(z)=e^{iz}$ ، $a=0\in C$ فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(0) \qquad (1)$$

$$f''(z)=i^2 e^{iz}=-e^{iz}\Rightarrow f''(0)=-1 \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz=-\pi i$$

٣ـ لحسب $\oint_C \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz$ حيث C هو الدائرة $|z|=2$

الحل

بما أن $\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{z-1}-\frac{\frac{1}{2}}{z+1}$

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz=\frac{1}{2}\oint_C \frac{e^{2z}}{z-1} dz-\frac{1}{2}\oint_C \frac{e^{2z}}{z+1} dz$$

ومن صيغة كوشي التكاملية حيث $a=1$ و $a=-1$ على الترتيب فإن

$$\therefore \oint_C \frac{e^{2z}}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}.2\pi i f(1) - \frac{1}{2}.2\pi i f(-1)$$

$$= \pi i e^2 - \pi i e^{-2}$$

$$= \pi i\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$$

٤- احسب $\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+4)^2}$ حيث C هي الدائرة $|z-2i|=2$

الحل

الدائرة C مركزها النقطة $(0,2)$ ونصف قطرها 2

نكتب المقدار

$$\frac{z^2}{(z^2+4)^2} = \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2} = \frac{\left(\frac{z}{z+2i}\right)^2}{(z-2i)^2} = \frac{f(z)}{(z-2i)^2}$$

حيث $f(z) = \left(\frac{z}{z+2i}\right)^2$ هي دالة تحليلية داخل وعلى المنحنى C

$$\therefore \oint_C \frac{z^2}{(z^2+4)^2}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-2i)^2}\,dz = 2\pi i f'(2i)$$

$$f'(z) = 2\left(\frac{z}{z+2i}\right)\left[\frac{(z+2i)-z}{(z+2i)^2}\right] = \frac{4iz}{(z+2i)^3}$$

$$f'(2i) = \frac{4i.2i}{(2i+2i)^3} = \frac{8i^2}{64.i^3} = \frac{1}{8i}$$

$$\therefore \oint_C \frac{z^2}{(z^2+4)^2}\,dz = 2\pi i.\frac{1}{8i} = \frac{\pi}{4}$$

هـ— أثبت أن $\int_{0}^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta=\frac{\pi}{2}$

الحل

نستخدم نظرية جاوس للقيمة المتوسطة

$$\int_{0}^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta = 2\pi f(a)$$

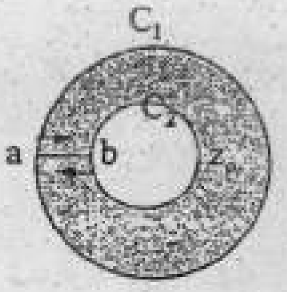
بما أن $a=\frac{\pi}{6}$ ، $f(z)=\sin^2 z$

$$\therefore \int_{0}^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta=2\pi f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\pi \sin^2\frac{\pi}{6}=2\pi \cdot \frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

٦— لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة ما $D$ محـــدودة بدائرتيـــن متحدتـــي المركز $C_2, C_1$ وكذلك على حدها. برهن أنه إذا كانت $z_0$ أي نقطة فـــي $D$ فإن

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

الحل




تنشئ القاطع المستعرض ab. فإن $f(z)$ تكون تحليلية في المنطقة لبسيطة الترابط الذي يحدها المنحنى C. وبالتالي نحصل من صيغة كوشي التكاملية على

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{ba}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

حيث التكاملات على ab، ba يلغي بعضها البعض.

## مسائل متنوعة

١— إذا كانت $f(z)=\bar{z}$ أوجد هذه الدالة على النصف العلوي للدائرة $|z|=1$.

٢— أوجد قيمة $\int_{(0,1)}^{(2,5)}(3x+y)\,dx+(2y-x)\,dy$ على

(أ) المنحنى $y=x^2+1$

(ب) الخط المستقيم الذي يصل (0, 1)، (2, 5)

(جـ) الخطين المستقيمين من (0,1) إلى (0,5) ثم من (0,5) إلى (2,5)

٣ـ أوجد قيمة $\oint_C (x+2y)\,dx+(y-2x)\,dy$ حـــول القطـــع النـــاقص C المعرف بالآتي :

$$x=4\cos\theta\ ,\ y=3\sin\theta\ ،\ 0\le\theta\le 2\pi$$

٤ـ أوجد قيمة $\oint_C |z|^2\,dz$ حول المربع الذي رؤوسه النقاط

$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$

٥ـ أوجد قيمة $\oint_C \bar{z}^2\,dz$ حول الدائرتين

(أ) $|z|=1$ (ب) $|z-1|=1$

٦ـ أوجد $\oint_C \dfrac{dz}{z-2}$ حول

(أ) الدائرة $|z-2|=4$ (ب) الدائرة $|z-1|=5$

(جـ) المربع الذي رؤوسه $2\pm 2i, -2\pm 2i$

**٧ـ لتكن $F(x, y)$، $G(x, y)$ ومشتقاتهما الجزئية من الرتبتين الأولى والثانيـة متصلة في منطقة بسيطة الترابط D محددة بمنحني بسيط مقفل C برهن أن**

$$\oint_C F\left(\frac{\partial G}{\partial y}dx-\frac{\partial G}{\partial x}dy\right)=$$
$$=-\iint_D\left[F\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right]dx\,dy$$

٨ـ حقق نظرية جرين في المستوى $\oint_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-x^3y)\,dy$

حيث C هو المربع الذي رؤوسه $(0,0)$، $(2,0)$، $(2,2)$، $(0,2)$.

٩ـ أوجد قيمة $\oint_C (5x+6y-3)\,dx+(3x-4y+2)\,dy$ حول المثلث في المستوى xy الذي رؤوسه $(0,0)$، $(4,0)$، $(4,3)$.

١٠ـ (أ) ليكن C هو أي منحنى بسيط مقفل يحد منطقة ما لها المساحة A برهن أن $A=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$

(ب) استخدم النتيجة في (أ) لإيجاد المساحة المحددة بالقطع الناقص $x=a\cos\theta\ ,y=b\sin\theta\ ,\ 0\le\theta\le2\pi$

١١ـ (أ) برهن أن $\oint_C (y^2\cos x-2e^y)\,dx+(2y\sin x-2xe^y)\,dy=0$

حول أي منحنى بسيط مقفل C.

(ب) أوجد قيمة التكامل في (أ) على القطع المكافئ $y=x^2$ من $(0,\ 0)$ إلى $(\pi,\pi^2)$

١٢ـ إذا كانت C منحنى بسيطاً مقفلاً يحد منطقة ما مساحتها A برهن أن

(أ) $A=\frac{1}{2i}\oint_C \overline{z}\,dz$

(ب) $A=\frac{1}{4i}\oint_C \overline{z}\,dz-z\,d\overline{z}$

١٣ـ أوجد قيمة $\oint_C \overline{z}\,dz$ حول

(أ) الدائرة $|z-2|=3$

(ب) المربع الذي رؤوسه عند $z=0, 2, 2i, 2+2i$

(جـ) القطع الناقص $|z-3|+|z+3|=10$

١٤ــ حقق نظرية كوشي للدوال

(أ) $3z^2+iz-4$ (ب) $5\sin 2z$ (جـ) $3\cosh(z+2)$

إذا كان C هو المربع الذي رؤوسه النقاط $1\pm i, -1\pm i$

١٥ــ إذا كان C هو الدائرة $|z-2|=5$

(أ) عين ما إذا كان $\oint_C \frac{dz}{z-3}=0$

(ب) هل تتناقض إجابتك في (أ) مع نظرية كوشي.

١٦ــ بإيجاد قيمة $\oint_C e^z\,dz$ حول الدائرة $|z|=1$، أثبت أن

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)\,d\theta=0$$

١٧ــ إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، أثبت أن

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta}\cos(\theta-\sin n\theta)=\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta}\sin(\theta-\cos n\theta)\,d\theta=0$$

١٨ــ أوجد قيمة

(أ) $\oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz$

(ب) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$

حيث C هي الدائرة $|z|=3$

١٩ــ أثبت أن $\oint_C \frac{z^4}{(z^2+1)^3}\,dz=\frac{3\pi}{8}$

حيث C هي الدائرة $x^2+y^2-2y=0$

٢٠ـ أثبت أن $\oint_c \frac{e^{2z}}{(z^2-1)^3}dz = \frac{13\pi}{8e^2}$

حيث C هي القطع الناقص $\left|z-\frac{1}{2}\right|+\left|z+\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2}$

٢١ـ أوجد قيمة $\oint_c \frac{\cos\pi z}{z^2-1}dz$ حول المستطيل الذي رؤوسه

(أ) $2\pm i, -2\pm i$ (ب) $-i, 2-i, 2+i, i$

٢٢ـ أثبت أن $\oint_c \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz = 2\pi i \sin t$ إذا كان $t>0$، C هي الدائـــرة

$|z|=3$

٢٣ـ أوجد قيمة (أ) $\oint_c \frac{\sin^6 z}{z-\frac{\pi}{6}}dz$ (ب) $\oint_c \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2}$

إذا كانت C هو الدائرة $|z|=1$

٢٤ـ أوجد قيمة $\oint_c \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}dz$ إذا كانت $t>0$، C هو الدائرة $|z|=3$

٢٥ـ أوجد قيمة $\oint_c \frac{z^2}{z^2+4}dz$ حيث C هو المربع الـــذي رؤوســـه عنـــد

$\pm 2, \pm 2+4i$

٢٦ـ أوجد قيمة $\oint_c \frac{\cos^2 tz}{z^3}dz$ حيث C هو الدائرة $|z|=1$، $t>0$.

٢٧ـ (أ) أثبت أن $\oint_c \frac{dz}{z+1}=2\pi i$ إذا كانت C هو الدائرة $|z|=2$

(ب) استخدم (أ) لتثبت أن

$$\oint_c \frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2}=2\pi \quad , \quad \oint_c \frac{(x+1)dx+ydy}{(x+1)^2+y^2}=0$$

٢٨ـ إذا كانت $f(z)$ تحليلية على منحنى بسيط مقفل C وداخله، برهن أن

(أ) $$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta$$

(ب) $$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta$$

٢٩ـ أثبت أن

(أ) $$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta=0$$ (ب) $$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,d\theta=2\pi$$

٣٠ـ إذا كان $t>0$، C أي منحنى بسيط مقفل يحيط بالنقطة $z=-1$ برهـــن أن

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z e^{zt}}{(z+1)^3}\,dz=\left(t-\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$$