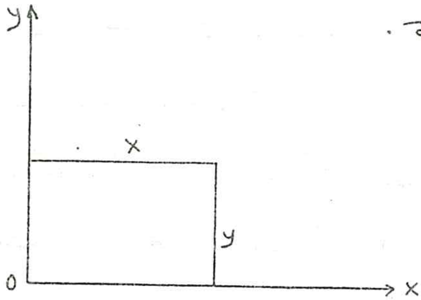
الباب الأول

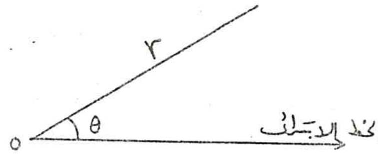
مقدمة Introduction

درسنا فيما سبق الميكانيكا وكنا نعتمد على قوانين الحركة لنيوتن فى حل مسائل الميكانيكا وعلى الأخص قانون نيوتن الثانى أو معادلة الحركة $\underline{F} = m\underline{a}$ وقد صيغ فى حالة الاحداثيات الكرتيزية . واذا استخدمنا احداثيات أخرى لتعيين موضع الجسم المتحرك كالاحداثيات القطبية مثلا فانه لا يمكن تطبيق قانون نيوتن الثانى باستبدال الاحداث x بالاحداث r ولكن يجب أن نكتب العجلة فى حالة الاحداثيات القطبية ، وهذا يعنى أن قانون نيوتن الثانى تتغير صورته بتغير الاحداثيات المعطاة التى تعين موضع الجسم . وقد توصل كل من لاجرانج وهاميلتون الى صورة جديدة لمعادلة الحركة يمكن استخدامها لأى نوع من الاحداثيات ، فالاحداثيات فى هذه المعادلات هى احداثيات معممة والاحداثيات المعروفة هى أنواع خاصة منها مثل الاحداثيات الكرتيزية والاحداثيات القطبية وغيرها . ولذلك تعتبر هذه المعالجة طرق عامة لكل مسائل الميكانيكا وهى طرق سهلة يمكن استخدامها فى حل الكثير من المسائل الميكانيكية الى جانب علاقتها بنظريات وتطبيقات بمجالات حديثة مثل ميكانيكا الكم ، الميكانيكا الاحصائية والالكترو ديناميكا .

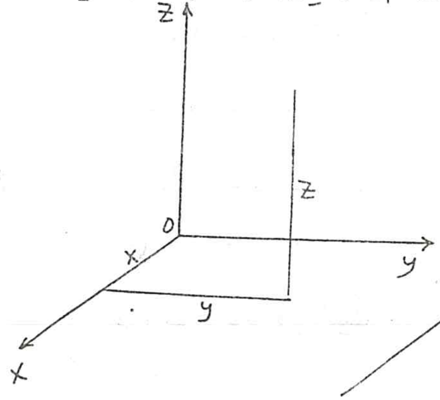
درجات الحرية (الطلاقة) والاحداثيات المعممة
Degrees of freedom and generalized coordinates.

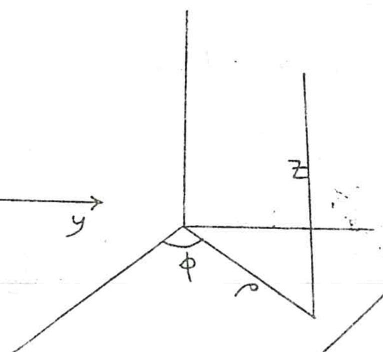
نعلم أنه عندما يتحرك جسم في مستوى فان موضعه عند أي لحظة يتحدد بمعلومية احداثيين مثل (x,y) في حالة الاحداثيات الكرتيزية ، (r,θ) في حالة الاحداثيات القطبية .

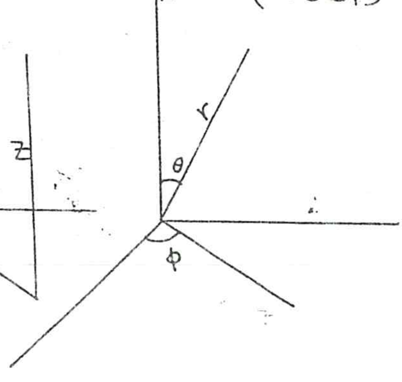




في هذه الحالة نقول أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) هو 2 .
عندما يتحرك الجسم في الفراغ فان موضعه يتعين بمعرفة ثلاثة احداثيات .
فمثلا في حالة الاحداثيات الكرتيزية يتعين موضع الجسم اذا علمنا (x, y, z)
وفي حالة الاحداثيات الاسطوانية يتحدد موضع الجسم بمعرفة ρ, ϕ, z
وكذلك في حالة الاحداثيات القطبية الكرية يمكن تحديد موضع الجسم
عند أي لحظة اذا علمنا r, θ, ϕ . في هذه الحالة يكون عدد درجات الحرية
(الطلاقة) هو 3.







أي أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) هو عدد الاحداثيات اللازمة لتحديد موضع الجسم. وإذا قيدنا حركة الجسم كأن يظل دائما على سطح كرة فانه يكفي لتحديد موضعه احداثيين فقط هما ϕ ، θ وذلك لأن r تساوي مقدار ثابت وهو نصف قطر الكرة وتصبح عدد درجات الحرية في هذه الحالة مساوية 2 .

وفي حالة مجموعة من الجسيمات فان عدد الاحداثيات اللازمة لتحديد موضع المجموعة يسمى عدد درجات الحرية (الطلاقة) لهذه المجموعة. نعتبر حركة جسيمين في الفراغ فانه يلزمنا لتحديد موضعهما ستة احداثيات اذا كانت حركتهما حرة. بينما يقل عدد الاحداثيات اذا كانت حركتهما مقيدة ، فمثلا اذا كانت حركة الجسيمين بحيث تظل المسافة بينهما ثابتة كأن يكونا جسيمين من جسم متماسك فانه في هذه الحالة يلزمنا خمسة احداثيات فقط لتحديد موضعهما ويكون عدد درجات الحرية (الطلاقة) مساويا 5 .

نفرض الآن مجموعة من الجسيمات عددها N تتحرك وعليها عدد من القيود وأن عدد الاحداثيات المستقلة اللازمة لتحديد حركة هذه المجموعة هو n ، أي أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) لهذه المجموعة هو n . نرمز لهذه الاحداثيات بالرموز $q_n , \ldots , q_2 , q_1$ وتسمى بالاحداثيات المعممة. وكما لاحظنا أن هذه الاحداثيات يمكن أن تكون مسافات أو زوايا أو كميات أخرى تتصل بالمسافات والزوايا.

السرعات المعممة Generalized velocities

اذا تغيرت الاحداثيات المعممة $q_n , \ldots , q_2 , q_1$ في الفترة الزمنية

الصغيرة Δt لتصبح $q_1+\Delta q_1 , q_2+\Delta q_2 , \ldots , q_n+\Delta q_n$

فان

$$\dot{q}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta t} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

تسمى $\dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \ldots , \dot{q}_n$ بالسرعات المعممة.

فمثلا في حالة حركة جسيم في الفراغ اذا أخذنا الاحداثيات الاسطوانية ρ , ϕ , z احداثيات معممة ، أي أن $q_1 = \rho$ ، $q_2 = \phi$ ، $q_3 = z$ فان السرعات المعممة تكون $\dot{\rho} , \dot{\phi} , \dot{z}$.
ويجب ملاحظة أنها تختلف عن مركبات سرعة الجسيم وهى $(\dot{\rho} , \rho\dot{\phi} , \dot{z})$.

القوى المعممة Generalized forces

اذا كان dW هو الشغل المبذول على مجموعة من الجسيمات بواسطة القوى $\underline{F}_j$ المؤثرة على الجسيم رقم j فان $dW = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dq_i$

حيث $\phi_i = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i}$

وذلك لأن $d\underline{r}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i} dq_i$ ويكون الشغل المبذول هو

$$dW = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot d\underline{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i} dq_i \right)$$

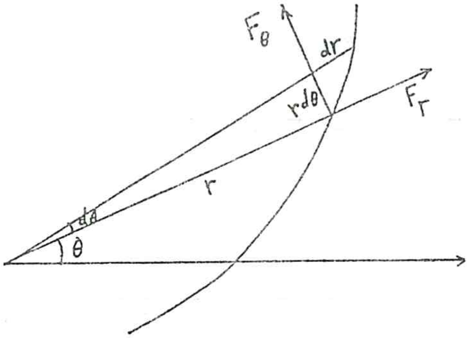
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i} \right) dq_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dq_i$$

حيث $\phi_i = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i}$

تسمى ϕ_i القوة المعممة المصاحبة للاحداثي المعمم q_i.

فمثلا عندما يتحرك جسيم فى مستوى واخذ r, θ التى تحدد موضع الجسيم عند أى لحظة احداثيات معممة وكانت F_θ , F_r هما مركبتى القوى الخارجية فى اتجاه تزايد θ , r على الترتيب فان



الشغل المبذول لازاحة صغيرة $dr, d\theta$ يعطى من

$$dW = F_r \, dr + F_\theta \, r d\theta$$

وتكون القوة المعممة فى هذه الحالة هى

$$\phi_1 = F_r \quad , \quad \phi_2 = r F_\theta$$

ونلاحظ أن تختلف عن القوى الخارجية، فالقوة المعممة ϕ_1 لها وحدات قوة بينما القوة المعممة ϕ_2 لها وحدات عزم (أى قوة $\times$ مسافة).

المجموعة الهولونومية والمجموعة الغير هولونومية Holonomic and non-holonomic systems

اذا تغيرت الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots, q_n$ الى $q_1 + dq_1 , q_2 + dq_2 , \ldots , q_n + dq_n$ بحيث لا تعتمد على بعضها البعض بمعنى أنه اذا تغيرت بعض هذه الاحداثيات دون أن تتغير الاحداثيات الأخرى فاننا نسمى المجموعة بمجموعة هولونومية، أى أن التغيرات $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ فى هذه الحالة تكون مستقلة. أما اذا كانت المتغيرات تعتمد على بعضها البعض ، أى أنه بتغير أى من الاحداثيات فان باقى الاحداثيات أو بعضها سوف يتغير بالتالى فاننا نسمى المجموعة بمجموعة غير هولونومية.

المجموعات الزمنية و الغير زمنية
Scleronomic and rheonomic systems

اذا كان متجه موضع الجسم رقم ν هو $\underline{r}_\nu = x_\nu \underline{i} + y_\nu \underline{j} + z_\nu \underline{k}$

بالنسبة لمجموعة احداثيات xyz فان $\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$

أو هي

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, ---, q_n, t) \quad ,$$
$$y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, ---, q_n, t) \quad ,$$
$$z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, ---, q_n, t)$$

وتسمى بمعادلات التحويل.

اذا كان الزمن t يدخل صراحة في معادلات التحويل تسمى المجموعة الميكانيكية بمجموعة زمنية rheonomic، أما اذا كان الزمن t لا يدخل صراحة في معادلات التحويل تسمى المجموعة الميكانيكية بمجموعة غير زمنية scleronomic.

المجموعات الحافظة والمجموعات الغير حافظة
Conservative and non-conservative systems

تسمى المجموعة حافظة عندما تكون جميع القوى المؤثرة عليها يمكن اشتقاقها من دالة الجهد (أو طاقة الجهد) واذا لم يحدث هذا تسمى مجموعة غير حافظة.

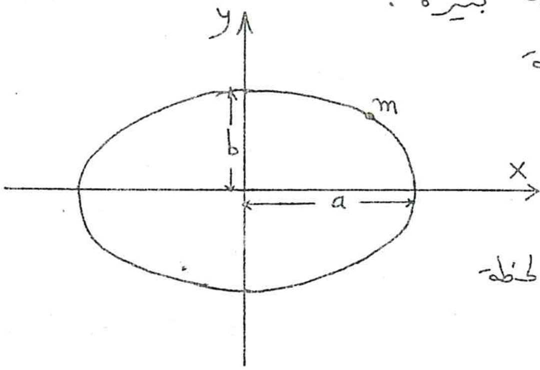
المجموعات تامة التقييد وغير تامة التقييد
Holonomic and non-holonomic constraints

عندما يتحرك جسم أو مجموعة من الجسيمات تكون هذه الحركة مقيدة في صورة معينة، فمثلا عندما يتحرك جسم متماسك فان المسافة بين أي جسيمين منه تظل دائما ثابتة. وقد تكون حركة جسم مقيدة على منحنى أو سطح.

اذا كانت $q_1, q_2, \dots, q_n$ هى الاحداثيات المعممة التى تصف مجموعة ميكانيكية ، t هو الزمن . يقال أن المجموعة تامة التقييد عندما يمكن التعبير عن جميع قيود المجموعة بمعادلات فى الصورة

$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$ أو صور مكافئة و إلا فان المجموعة يقال انها غير تامة التقييد .

<u>ملحوظة</u> . مهارة اختيار الاحداثيات المعممة لدراسة مسألة معينة يمكن أن تبسط دراستها لدرجة كبيرة .



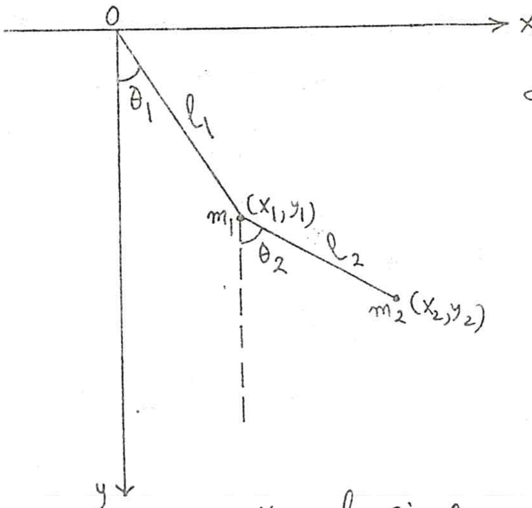
فمثلا فى حالة جسم مقيد الحركة على القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

احداثيا الجسم (x, y) عند أى لحظة تتعينان بدلالة θ من العلاقتين

$$x = a \cos\theta, \quad y = b \sin\theta$$

لذلك يمكن تحديد حركة الجسم تماما باستخدام الاحداثى المعمم θ.



أيضا كمثال آخر فى البندول المزدوج مقيد الحركة فى مستوى كما بالشكل .

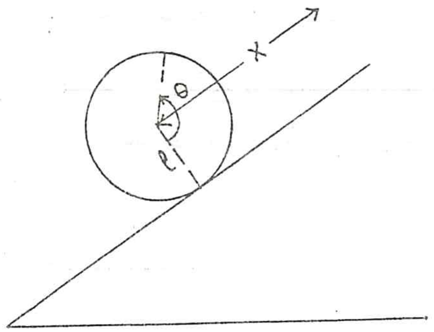
الاحداثيان θ_1 ، θ_2 يحددان موضعى الكتلتين m_1 ، m_2 ويمكن اعتبارهما الاحداثيين المعممين ، ونلاحظ أنه اذا كان (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هما موضعى الكتلتين عند أى لحظة فان

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1, \quad y_1 = l_1 \cos\theta_1,$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, \quad y_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$

أمثلة

مثال (١) عين الاحداثيات المعممة اللازمة للتحديد الكامل لحركة اسطوانة تتدحرج بدون انزلاق الى اسفل مستوى مائل خشن وبين ما اذا كانت هذه الحالة زمنية أو غير زمنية ، تامة التقييد أو غير تامة التقييد ، حافظة أو غير حافظة



الحل

موضع الاسطوانة على المستوى المائل يتحدد تماما بالمسافة x التي يقطعها مركز الكتلة والزاوية θ التي تدورها الاسطوانة حول محورها

وحيث أن الحركة تدحرجية بدون انزلاق فان x ، θ ترتبطان بالعلاقة $x = l\theta$ ، أي أنه يلزم احداثي واحد معمم لهذه الحركة إما x أو θ . وهذه الحالة غير زمنية وتامة التقييد وحافظة.

مثال (٥)

يتحرك جسيم في مستوى . باستخدام الاحداثيات القطبية (r,θ) كاحداثيات معممة اوجد القوى المعممة اذا أثرت على الجسيم القوة

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$$

الحل

توجد قوتان معممتان ϕ_r ، ϕ_θ حيث

$$\phi_r = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \quad , \quad \phi_\theta = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta}$$

حيث $\underline{r}$ متجه موضع الجسيم ويتعين من

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$$

$$= r\cos\theta\,\underline{i} + r\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\therefore \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j} \quad , \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\underline{i} + r\cos\theta\,\underline{j}$$

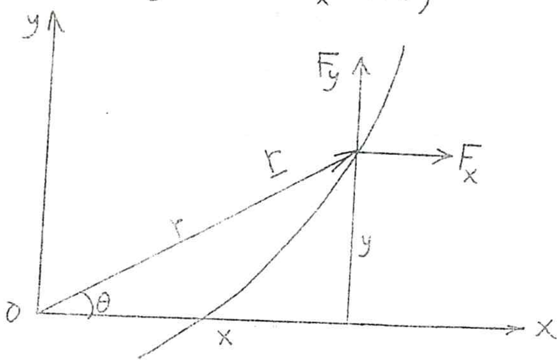
$$\therefore \quad \Phi_r = (F_x \underline{i} + F_y \underline{j}) \cdot (\cos\theta \, \underline{i} + \sin\theta \, \underline{j})$$

$$= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta \quad ,$$

$$\Phi_\theta = (F_x \underline{i} + F_y \underline{j}) \cdot (-r \sin\theta \, \underline{i} + r \cos\theta \, \underline{j})$$

$$= -r F_x \sin\theta + r F_y \cos\theta$$

$$= r (F_y \cos\theta - F_x \sin\theta)$$



تمارين

(١) عين الاحداثيات المعممة اللازمة للتحديد الكامل لحركة اسطوانة تتدحرج الى أسفل مستوى مائل اذا كان يوجد انزلاق.

(٢) اوجد عدد درجات الحرية (الطلاقة) لكل مجموعة من المجموعات الميكانيكية الآتية :

(أ) مجموعة تتكون من N جسيما تتحرك بحرية في الفراغ.

(ب) جسم جاسئ يمكنه الحركة بحرية في الفراغ.

(جـ) جسيم يتحرك على منحنى فراغي معين.

(د) جسيمان موصلان بواسطة قضيب جاسئ يتحرك بحرية في مستوى.

(هـ) جسم جاسئ يتحرك موازيا لمستوى مثبت.

(٢) اوجد القوى المعممة لكل مجموعة من المجموعات الميكانيكية الآتية :-

(أ) حلقة كتلتها m تتحرك على سلك على شكل قطع مكافئ معادلته
$y = ax^2 , z = 0$.

(ب) جسم كتلته m يتحرك الى أسفل مستوى مائل خشن يميل على الأفق بزاوية $\frac{\pi}{3}$ وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوي $\frac{2}{3}$.

(هـ) جسم كتلته m مربوط في طرف خيط مرن طوله الطبيعي l ومعامل مرونته Kl والطرف الآخر للخيط مثبت والخيط رأسي .

(٤) قسم كلاً من المجموعات الآتية على حسب ما اذا كانت : (i) زمنية أو غير زمنية ، (ii) تامة التقييد أو غير تامة التقييد ، (iii) محافظة أو غير محافظة .

(أ) جسم ينزلق الى أسفل من قمة كرة مثبتة .

(ب) اسطوانة تتدحرج بدون انزلاق الى أسفل مستوى مائل .

(هـ) جسم ينزلق على السطح الداخلي لجسم مكافئ دوراني قمته الى أسفل ومحوره رأسي معامل الاحتكاك μ .

(٥) اوجد الاحداثيات المعممة اللازمة لكل من المجموعات الثلاثة المذكورة في التمرين السابق (٤) .

الباب الثانى

معادلات لاجرانج Lagrange's equations

طاقة الحركة Kinetic energy

نفرض مجموعة ميكانيكية يتعين موضعها بالاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ فإن متجه موضع $\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ الجسم رقم i ، $i = 1, 2, \ldots\ldots, N$ الذى كتلته m_i فإن هذه الاحداثيات تكون دوال فى الاحداثيات المعممة والزمن t أى أن

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),\quad y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),\quad z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

طاقة حركة الجسم رقم i تتعين من

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) \qquad (2.1)$$

حيث أن

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \qquad (2.2a)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \qquad (2.2b)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial z_i}{\partial t} \qquad (2.2c)$$

بالتعويض من $(2.2a,b,c)$ فى (2.1) يمكن كتابة طاقة الحركة الكلية T فى الصورة

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{N} T_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + \ldots\ldots + A_{nn} \dot{q}_n^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \ldots\ldots \\ &\quad + 2B_1 \dot{q}_1 + 2B_2 \dot{q}_2 + \ldots\ldots + 2B_n \dot{q}_n + C \end{aligned} \qquad (2.3)$$

حيث

$$A_{rr} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_r}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)^2\right], \qquad (2.4)$$

$$A_{rs} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\frac{\partial y_i}{\partial q_r}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right], \qquad (2.5)$$

$$B_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_r}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right], \qquad (2.6)$$

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right] \qquad (2.7)$$

من العلاقة (2.3) يتضح لنا أن طاقة الحركة دالة من الدرجة الثانية في السرعات المعممة وفيها المعاملات دوال في الاحداثيات المعممة والزمن. اذا اختفى الزمن صراحة من العلاقات السابقة فان $B_r = C = 0$ وتصبح طاقة الحركة في الصورة

$$T = A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots + A_{nn}\dot{q}_n^2 \qquad (2.8)$$

أي أن طاقة الحركة $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ تكون دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$

ملحوظة. يقال أن الدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ متجانسة من الرتبة m اذا كان

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (2.9)$$

والدوال المتجانسة تحقق نظرية أويلر والتي تنص على ما يلي:

اذا كانت $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دالة متجانسة من الرتبة m فان

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f \qquad (2.10)$$

أي أن

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = m f$$

وحيث أن طاقة الحركة $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ في المعادلة (2.8) دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$

فانه حسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة يكون

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \qquad (2.11)$$

معادلات لاجرانج Lagrange's equations

للحصول على معادلات لاجرانج نثبت اولا أن :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right] - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.12)$$

لاثبات (2.12) نكتب قانون نيوتن أو معادلة الحركة للجسيم رقم ν الذى كتلته m_ν ويؤثر عليه محصلة القوى $\mathbf{F}_\nu$ وهى

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu$$

بضرب الطرفين ضربا قياسيا فى $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ نجد أن

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.13)$$

وحيث أن

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

أى أن

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.14)$$

بالتعويض من (2.14) فى (2.13) فان

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.15)$$

بأخذ المجموع لطرفى (2.15) بالنسبة الى ν على جميع الجسيمات فان

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right] - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

وهى المعادلة (2.12)

اذا كانت T هى طاقة الحركة الكلية ، $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2$ ،

فإنه يمكن إثبات أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.16)$$

حيث Φ_α هي القوة المعممة المناظرة للاحداثي المعمم q_α .

بحيث أن طاقة الحركة الكلية T تتعين من

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu \qquad (2.17)$$

بتفاضل (2.17) بالنسبة الى q_α ثم $\dot{q}_\alpha$ نجد أن

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \quad , \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (2.19)$$

ويمكن اثبات أن $\frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ ، وتسمى حذف النقط ،

وذلك لأنه

$$\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \quad \text{فإن}$$

$$\dot{\underline{r}}_\nu = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial t}$$

وبالتالي بتفاضل الطرفين جزئيا بالنسبة الى $\dot{q}_\alpha$ فإن

$$\frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.20)$$

بالتعويض من (2.20) في (2.19) نجد أن

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.21)$$

بالتعويض من المعادلتين (2.18) ، (2.21) في المعادلة (2.12) نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha$$

وهي الصورة المطلوبة (2.16)

نفرض أن المجموعة محافظة ، أي أن القوى يمكن اشتقاقها من الجهد V .

من السؤال السابق نرى أن $\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ، وذلك لأن $dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha dq_\alpha$

ومن جهة أخرى $dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$ وبالتالي فإن $\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\Phi_\alpha - \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) dq_\alpha = 0$

وحيث أن dq_α ، $\alpha = 1,2,\ldots,n$ مستقلة فإن جميع معاملات dq_α يجب أن تساوي صفر ، أي أن $\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ، أي أن

$$\Phi_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (2.22)$$

دالة لاجرانج L تعرف من العلاقة

$$L = T - V \qquad (2.23)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

وذلك لأن طاقة الجهد V دالة في الإحداثيات المعممة ومن المحتمل في الزمن t ولكنها ليست دالة في السرعات المعممة $\dot{q}_\alpha$ ، $\alpha = 1,2,\ldots,n$.

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \qquad (2.24)$$

بالتعويض من (2.22) ، (2.24) في (2.16) نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - V) = 0$$

وباستخدام (2.23) التي تعرف دالة لاجرانج L نحصل على

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 , \quad \alpha = 1,2,\ldots,n \qquad (2.25)$$

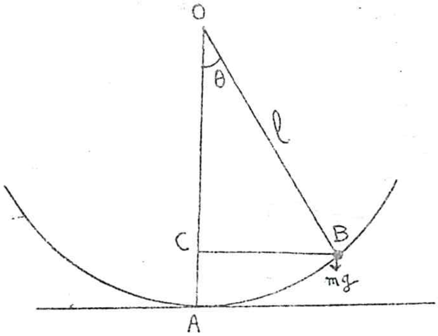
المعادلات (2.25) تسمى معادلات لاجرانج.

ملحوظة. نلاحظ أن معادلات لاجرانج (2.25) هي مجموعة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية وعددها n . ويمكن استخدامها لحل المسائل الميكانيكية كما سنرى في الأمثلة التالية

أمثلة

مثال (١) اوجد دالة لاجرانج لبندول بسيط ثم اوجد معادلة الحركة باستخدام معادلات لاجرانج.

الحل



يتحدد موضع الجسم بواسطة الزاوية θ التي يصنعها الخيط OB مع الرأسي المار بالطرف الثابت O نفرض أن طول الخيط يساوى ℓ وأن كتلة الجسم هي m .

طاقة الحركة تعطى من

$$T = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

نأخذ المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة A مستوى قياسى.

طاقة الجهد تعطى من

$$V = mg\ CA = mg(OA - OC)$$
$$= mg(\ell - \ell\cos\theta) = mg\ell(1-\cos\theta)$$

دالة لاجرانج تكون في الصورة

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$$

حيث أنه توجد درجة حرية واحدة في هذه الحالة (أى أن $n=1$) وإحداثى معمم واحد وهو θ ، فإنه توجد معادلة واحدة للاجرانج بالنسبة الى θ وهي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

حيث أن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot{\theta}\right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

بالتعويض في معادلة لاجرانج نحصل على

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin\theta = 0$$

أو هي

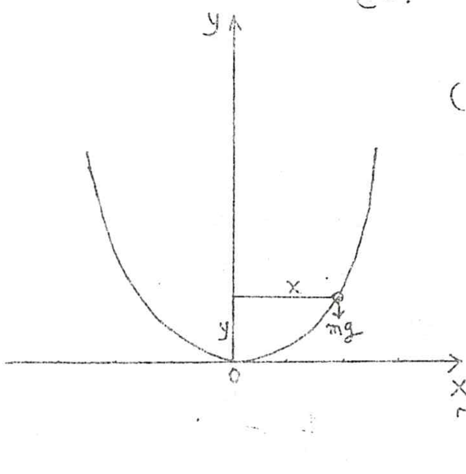
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

ملحوظة: إذا كانت θ صغيرة تماما $\sin\theta \cong \theta$ ونحصل على

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $\frac{2\pi}{\omega}$ أي يساوي $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

مثال (٢) أوجد دالة لاجرانج لحلقة كتلتها m تتحرك على سلك أملس على شكل قطع مكافئ معادلته $y = a x^2$ ثم أوجد معادلة حركة الحلقة باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

يتحدد موضع الحلقة بواسطة (x, y) ولكن x ، y مرتبطتان بالعلاقة

$$y = a x^2 \qquad (1)$$

طاقة حركة الخرزة تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad (2)$$

بتفاضل (1) بالنسبة للزمن t نجد أن

$$\dot{y} = 2 a x \dot{x} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نجد أن

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4 a^2 x^2 \dot{x}^2) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + 4 a^2 x^2)$$

طاقة الجهد أو الوضع للحلقة هي

$$V = m g y = m g a x^2$$

معتبرين المستوى الأفقي المار بنقطة الأصل O مستوى قياسي.

دالة لاجرانج تأخذ الصورة

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + 4a^2x^2) - m g a x^2$$

هذه المجموعة الميكانيكية لها درجة حرية واحدة ، واحداثي معمم واحد هو x ، وتكون معادلة لاجرانج بالنسبة الى x هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

حيث

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m (1+4a^2x^2)(2\dot{x}) = m \dot{x} (1+4a^2x^2) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (8a^2x) - 2mgax = 4ma^2x\dot{x}^2 - 2mgax \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 8ma^2x\dot{x}^2 \qquad (3)$$

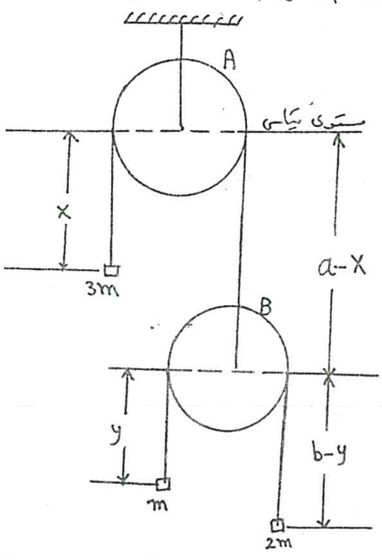
بالتعويض من (2) ، (3) في (1) نجد ان معادلة حركة الحلقة تكون في الصورة

$$m\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 8ma^2x\dot{x}^2 - 4ma^2x\dot{x}^2 + 2mgax = 0$$

أو هي

$$\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 4a^2x\dot{x}^2 + 2gax = 0$$

مثال (٢) الشكل يبين بكرة ثابتة A والأخرى متحركة B وهما خفيفتان ويمر عليهما الخيطان وطولهما a ، b . ادرس حركة الكتل المعلقة ثم اوجد عجلة كل كتلة مستخدما معادلات لاجرانج.



الحل

عدد الاحداثيات المعممة في هذه المجموعة الميكانيكية هو 2 وهما الاحداثيان المعممان x ، y .

بأخذ المستوى الأفقي المار بمركز البكرة الثابتة A مستوى قياسي . وتكون طاقة الجهد او الوضع سالبة لأن الكتل أسفل المستوى القياسي.

الكتلة $3m$ طاقة حركتها T_1 ، وطاقة الوضع V_1 يتعينان من

$$T_1 = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 \quad , \quad V_1 = -3mgx$$

الكتلتان m ، $2m$ طاقة الحركة والجهد لكل منهما تتعين من

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{y} - \dot{x})^2 \quad , \quad V_2 = -mg(a - x + y) ,$$

$$T_3 = m(-\dot{x} - \dot{y})^2 \quad , \quad V_3 = -2mg(a + b - x - y)$$

مع ملاحظة أن موضع الكتلتين m ، $2m$ من المستوى القياسي هما $a - x + y$ ، $a + b - x - y$ وبالتالي سرعتاهما يكونان على الترتيب $-\dot{x} + \dot{y}$ ، $-\dot{x} - \dot{y}$

طاقة الحركة وطاقة الجهد للمجموعة الميكانيكية هما

$$T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y} - \dot{x})^2 + m(\dot{x} + \dot{y})^2 ,$$

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i = -3mgx - mg(a - x + y) - 2mg(a + b - x - y)$$

أي هما

$$T = \frac{1}{2} m (6\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}) ,$$

$$V = -mg(3a + 2b - y)$$

ودالة لاجرانج تتعين من

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (6\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}) + mg(3a + 2b - y)$$

معادلتا لاجرانج بالنسبة للإحداثيين x ، y هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

نحسب التفاضلات الجزئية لدالة لاجرانج

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(6\dot{x} + \dot{y}) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(3\dot{y} + \dot{x}) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

بالتعويض نجد أن معادلات الحركة هي

$$m(6\ddot{x}+\ddot{y})=0 \quad , \quad m(3\ddot{y}+\ddot{x})+mg=0$$

أى أن

$$6\ddot{x}+\ddot{y}=0 \quad , \qquad (1)$$
$$3\ddot{y}+\ddot{x}=-g \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نجد أن
$$\ddot{x}=\frac{g}{17} \quad , \quad \ddot{y}=-\frac{6g}{17}$$

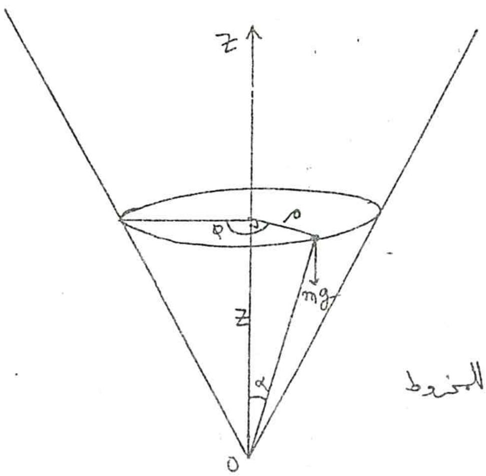
عجلة الكتلة 3m هى $\ddot{x}=\frac{g}{17}$

عجلة الكتلة m هى $\ddot{y}-\ddot{x}$ أى هى $-\frac{7g}{17}$

عجلة الكتلة 2m هى $-\ddot{x}-\ddot{y}$ أى هى $\frac{5g}{17}$

مثال (٤)

اوجد دالة لاجرانج ومعادلات الحركة عندما يتحرك جسم على السطح الداخلى لمخروط باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

موضع الجسم يتعين بواسطة الاحداثيات الاسطوانية ρ, ϕ, z وحيث أن الجسم يتحرك على السطح المخروطى فإن

$$z=\rho\cot\alpha \qquad (1)$$

حيث α هى الزاوية النصف رأسية للمخروط

سرعة الجسم تتعين من

$$\underline{v}=(\dot{\rho}, \rho\dot{\phi}, \dot{z})$$
$$\therefore v^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2 \qquad (2)$$

بتفاضل (1) بالنسبة الى الزمن نجد أن

$$\dot{z}=\dot{\rho}\cot\alpha \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) فى (2) نحصل على

$$v^2 = \dot{\rho}^2 (1 + \cot^2 \alpha) + \rho^2 \dot{\phi}^2$$
$$= \dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + \rho^2 \dot{\phi}^2$$

طاقة حركة الجسم تكون

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right)$$

بأخذ المستوى الأفقي المار برأس المخروط O كمستوى قياسي ، فان طاقة الجهد تكون

$$V = m g z = m g \rho \cot \alpha$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right) - m g \rho \cot \alpha$$

هذه الحركة لها درجتان حرية ، أي أن $n = 2$ ، والاحداثيات المعممة هما ρ ، ϕ

معادلتا لاجرانج بالنسبة الى ρ ، ϕ هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

وبايجاد المشتقات التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m \rho \dot{\phi}^2 - m g \cot \alpha \, ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \rho^2 \dot{\phi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض نجد أن معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ρ تعطى

$$m \ddot{\rho} \operatorname{cosec}^2 \alpha - m \rho \dot{\phi}^2 + m g \cot \alpha = 0$$

أو هي

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \qquad (4)$$

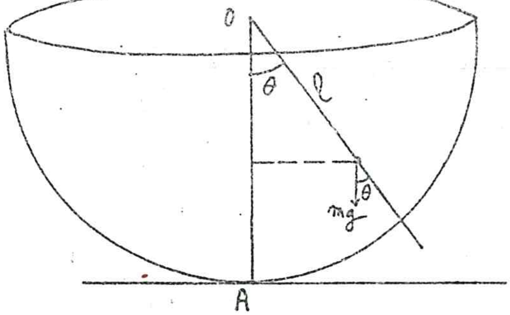
معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ϕ تعطى

$$m \rho^2 \dot{\phi} = \text{constant} \qquad (5)$$

المعادلتان (4) ، (5) يشكلان معادلتا حركة الجسم على السطح الداخلي للمخروط .

مثال (٥). قذف جسيم كتلته m في مستوى أفقي على السطح الداخلي لنصف قشرة كروية ملساء محورها رأسي ورأسها الى أسفل وكانت نقطة القذف تصنع زاوية β مع أسفل نقطة . اوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج واثبت أن السرعة الابتدائية للقذف بحيث يصعد الجسيم بالكاد الى حافة نصف الكرة هي $\sqrt{2gl\sec\beta}$ حيث l نصف قطر القشرة .

الحل



موضع الجسيم يتعين بالاحداثيات القطبية الكروية r, θ, ϕ ولكن r تظل ثابتة وتساوي نصف قطر القشرة l ، اي أن $r = l$ وبالتالي يتعين موضع الجسيم بدلالة θ, ϕ .

اذا أخذنا المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة A كمستوى قياس نجد أن طاقة حركة الجسيم وطاقة جهده يتعينان من العلاقتين

$$T = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right),$$

$$V = mg\left(l - l\cos\theta\right) = mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

معادلتا لاجرانج بالنسبة للاحداثيين θ ، ϕ هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 .$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - mgl\sin\theta ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض نجد أن معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي θ تعطي

$$m\ell^2\ddot{\theta} - m\ell^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 + mg\ell\sin\theta = 0$$

أو هي

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

ومعادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ϕ تعطي

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 0$$

أي أن

$$m\ell^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = \text{constant} \qquad (2)$$

أو

$$\ell\sin^2\theta\,\dot{\phi} = \text{const.} = c_1 \qquad (3)$$

المعادلتان (1)، (2) أو (1)، (3) هي معادلات الحركة لحركة الجسيم على السطح الداخلي للكرة.

مركبات سرعة الجسيم في اتجاهات r, θ, ϕ هي

$$(v_r, v_\theta, v_\phi) = (0, \ell\dot{\theta}, \ell\sin\theta\,\dot{\phi})$$

عند بداية الحركة تقذف الجسيم أفقيا بسرعة ولتكن v_0 من الموضع $\theta = \beta$، أي أنه عند $t = 0$ فإن $\theta = \beta$، $v_\theta = 0$،
$v_\phi = v_0$، أي أن $\dot{\theta} = 0$،

$$c_1 = \ell\sin\theta\,\dot{\phi}\,(\sin\theta) = v_0\sin\beta$$

$$\therefore\quad \ell\sin^2\theta\,\dot{\phi} = v_0\sin\beta.$$

أو

$$\dot{\phi} = \frac{v_0\sin\beta}{\ell\sin^2\theta} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (1) نحصل على

$$\ddot{\theta} - \frac{v_0^2\sin^2\beta\cos\theta}{\ell^2\sin^3\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (5)$$

بالضرب في $2\dot{\theta}$ والتكامل نجد أن

$$\dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2\sin^2\beta}{\ell^2\sin^2\theta} - 2\frac{g}{\ell}\cos\theta = c_2 \qquad (6)$$

حيث C_2 ثابت يمكن تعيينه من شروط الحركة الابتدائية وهي $\dot{\theta}=0$ ، $\theta=\beta$ ، ونجد أن

$$C_2 = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l}\cos\beta$$

وتأخذ المعادلة (6) الصورة

$$\dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2}{l^2}\left(\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} - 1\right) - \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\beta) = 0$$

لكي يصعد الجسيم إلى الحافة القصوى فإننا نضع $\theta=\frac{\pi}{2}$ ، $\dot{\theta}=0$ ونجد أن

$$\frac{v_0^2}{l^2}(\sin^2\beta - 1) + \frac{2g}{l}\cos\beta = 0$$

$$\therefore \frac{v_0^2}{l}\cos^2\beta - 2g\cos\beta = 0$$

ومنها

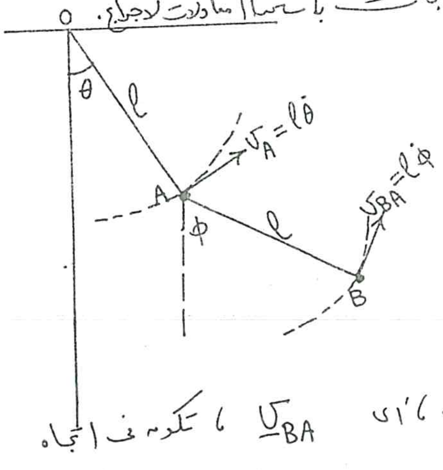
$$v_0^2 = 2gl\sec\beta$$

أو

$$v_0 = \sqrt{2gl\sec\beta}$$

∴ يجب أن يقذف الجسيم بسرعة تساوي $\sqrt{2gl\sec\beta}$ حتى يصل بالكاد إلى الحافة القصوى.

مثال (٦) يتكون بندول مزدوج من جسيمين كتلة كل منهما m معلق بواسطة خيط طوله l من نقطة ثابتة والثاني معلق من طرف خيط آخر طوله l ومربوط طرفه الآخر في الجسيم الأول ويتذبذبان في مستوى رأسي واحد خلال ذبذبات صغيرة أوجد طرق وتردد هذه الذبذبات باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

يتحدد موضع الجسيم بواسطة الإحداثيات θ ، ϕ .

سرعة الجسيم الأول A في اتجاه العمودي على الخيط OA ومقدارها

$$v_A = l\dot{\theta}$$

سرعة الجسيم الثاني بالنسبة إلى الأول ، أي v_{BA} ، تكون في اتجاه

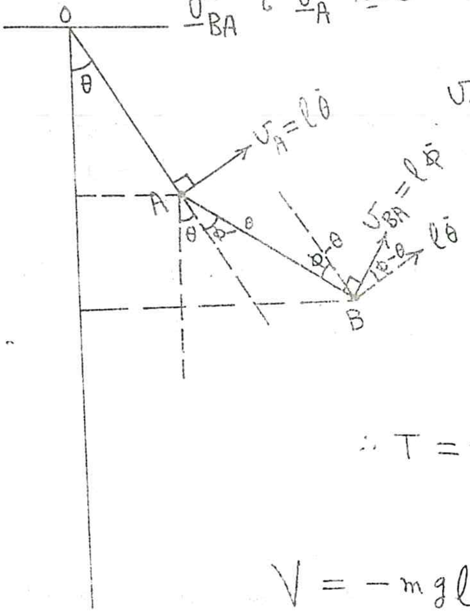
العمودي على الخيط AB ومقدارها $v_{BA} = l\dot{\phi}$

سرعة الجسم B تعطى من

$$\underline{v}_B = \underline{v}_{BA} + \underline{v}_A$$

أي أن سرعة الجسم B هي محصلة السرعتين $\underline{v}_A$ ، $\underline{v}_{BA}$

ومقدارها يعطى من



$$v_B^2 = l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)$$

طاقة الحركة الكلية تكون

$$T = \frac{1}{2}m v_A^2 + \frac{1}{2}m v_B^2$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right)$$

$$\therefore T = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)$$

طاقة الجهد المجموعة تعطى من

$$V = -mgl\cos\theta - mgl(\cos\theta + \cos\phi)$$

$$= -mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

وذلك بأخذ المستوى الأفقي المار بالنقطة الثابتة O كمستوى قياسي والإشارة السالبة في طاقة الجهد لأن الجسيمين أسفل المستوى القياسي.

ودالة لاجرانج تعطى من

$$L = T - V$$

$$= ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right) + mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

نوجد المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2(2\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos(\phi-\theta)) \quad ،$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\phi-\theta) - 2mgl\sin\theta \quad ،$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \left(\dot{\phi} + \dot{\theta} \cos(\phi - \theta) \right) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = - m l^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi - \theta) - m g l \sin \phi$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي θ هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[m l^2 \left(2\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos(\phi - \theta) \right) \right] - m l^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi - \theta) + 2 m g l \sin\theta = 0$$

$$2 l \ddot{\theta} + l \ddot{\phi} \cos(\phi - \theta) - l \dot{\phi} (\dot{\phi} - \dot{\theta}) \sin(\phi - \theta) - l \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi - \theta) + 2 g \sin\theta = 0 \quad (1)$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ϕ هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[m l^2 \left(\dot{\phi} + \dot{\theta} \cos(\phi - \theta) \right) \right] + m l^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi - \theta) + m g l \sin\phi = 0$$

$$\therefore l (\ddot{\phi} + \ddot{\theta} \cos(\phi - \theta) - \dot{\theta} (\dot{\phi} - \dot{\theta}) \sin(\phi - \theta) + l \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi - \theta) + g \sin\phi = 0 \quad (2)$$

معادلات حركة المجموعة الميكانيكية المعطاة تمثلها (1) ، (2)

الذبذبات الصغيرة تكون عندما θ ، ϕ صغيرة ، وفي هذه الحالة نأخذ $\sin\theta \simeq \theta$ ، $\sin(\phi - \theta) \simeq \phi - \theta$ ، $\cos(\phi - \theta) \simeq 1$ ، اهمال الحدود المشتملة على كميات صغيرة من الرتبة الثانية او اعلى. المعادلتان (1) ، (2) تصبحان في الصورة

$$2 l \ddot{\theta} + l \ddot{\phi} + 2 g \theta = 0 , \qquad (3)$$

$$l \ddot{\phi} + l \ddot{\theta} + g \phi = 0 \qquad (4)$$

بقسمة (3) ، (4) على l ووضع $K = \frac{g}{l}$ نحصل على

$$2 \ddot{\theta} + \ddot{\phi} + 2 K \theta = 0 , \qquad (5)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\phi} + K \phi = 0 \qquad (6)$$

نفرض أن $\theta = A \cos \omega t$ ، $\phi = B \cos \omega t$

$$\therefore \dot{\theta} = -A\omega \sin \omega t \;, \quad \ddot{\theta} = -A\omega^2 \cos \omega t \;,$$

$$\dot{\phi} = -B\omega \sin \omega t \;, \quad \ddot{\phi} = -B\omega^2 \cos \omega t$$

بالتعويض في المعادلتين (5) ، (6) نحصل على

$$-2A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + 2KA \cos \omega t = 0 \;,$$

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + KB \cos \omega t = 0$$

أو هي

$$2(K - \omega^2)A - \omega^2 B = 0 \;, \qquad (7)$$

$$-\omega^2 A + (K - \omega^2)B = 0 \qquad (8)$$

حيث أن θ ، ϕ لا يمكن أن تنعدما لذلك A ، B لا يمكن أن ينعدما ، ولكي يكون للمعادلتين (7) ، (8) حلول غير صفرية للمتغيرين A ، B يجب أن يتلاشى محدد المعاملات في المعادلتين (7) ، (8) أي أن

$$\begin{vmatrix} 2(K-\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & K-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore 2(K-\omega^2)^2 - \omega^4 = 0$$

$$\therefore \sqrt{2}(K-\omega^2) = \pm \omega^2$$

$$\sqrt{2}K = (\sqrt{2} \pm 1)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{2} \pm 1} \cdot \frac{\sqrt{2} \mp 1}{\sqrt{2} \mp 1}$$

$$\therefore \omega^2 = (2 \mp \sqrt{2})K = \frac{(2 \mp \sqrt{2})g}{\ell}$$

$$\therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{\ell}} \;, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{\ell}}$$

بالتعويض عن $\omega = \omega_1$ في المعادلة (7) نجد أن

$$2(K - 2K + \sqrt{2}K)A - (2-\sqrt{2})KB = 0$$

$$\therefore 2(\sqrt{2}-1)A - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)B = 0$$

$$\therefore \quad B = \sqrt{2}\, A$$

بالتعويض عن $w = w_2$ في المعادلة (7) نجد أن

$$2\left(K - 2K - \sqrt{2}K\right)A - \left(2 + \sqrt{2}\right)KB = 0$$

$$\therefore \quad -2\left(1 + \sqrt{2}\right)A - \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)B = 0$$

$$\therefore \quad B = -\sqrt{2}\, A$$

أي أن البندول يتذبذب بطريقتين :

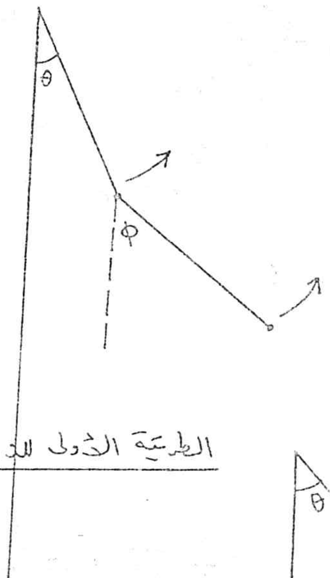
الطريقة الأولى : وفيها $B = \sqrt{2}A$ ، $w = w_1$ ، ويكون التردد مساويا

$\nu_1 = \dfrac{w_1}{2\pi}$ كما بالشكل

أي أن

$$\theta = A \cos w_1 t \,,$$

$$\phi = \sqrt{2}\, A \cos w_1 t$$



الطريقة الأولى للذبذبة

الطريقة الثانية :

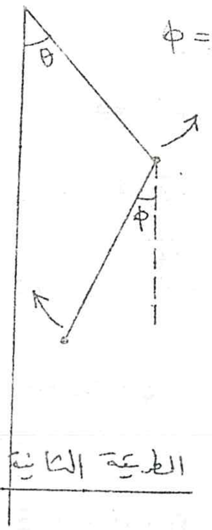
وفيها $B = -\sqrt{2}A$ ، $w = w_2$

ويكون التردد مساويا $\nu_2 = \dfrac{w_2}{2\pi}$

أي أن

$$\theta = A \cos w_2 t \,,$$

$$\phi = -\sqrt{2}\, A \cos w_2 t$$



الطريقة الثانية للذبذبة

مثال (٧) استنتج قانون بقاء الطاقة باستخدام معادلات لاجرانج.

الحل

عندما تكون المجموعة الميكانيكية لا تحتوي صراحة على الزمن وحافظة فان طاقة الحركة تكون دالة متجانسة في السرعات المعممة من الرتبة الثانية وحسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة فان

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T \qquad (1)$$

معادلات لاجرانج هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (2)$$

حيث ان طاقة الحركة $T = T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ ، طاقة الجهد $V = V(q_\alpha)$

فان

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad , \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (4)$$

بالتعويض من (3)، (4) في (2) نجد ان

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

بالضرب في $\dot{q}_\alpha$ فان

$$\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

يمكن كتابة المعادلة الاخيرة في الصورة

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

بأخذ المجموع على α فان

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (5)$$

حيث ان

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right) , \qquad (6)$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \qquad (7)$$

بالتعويض من (1) ، (6) ، (7) في (5) نحصل على

$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$$

أي أن

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

$$\therefore \; T + V = \text{constant}$$

تمارين

(1) اذا كانت طاقة الحركة وطاقة الجهد لمجموعة ميكانيكية هما

$$V = c + dy^2 \quad , \quad 2T = \frac{\dot{x}^2}{a+by^2} + \dot{y}^2$$

فاثبت أن المجموعة تتحرك حركة توافقية بسيطة ، حيث a ، b ، c ، d ثوابت واوجد الحل العام.

(2) تنزلق حلقة كتلتها m على سلك أملس على شكل منحنى السيكلويد الذى معادلتاه البارامتريتان هما $x = a(\theta - \sin\theta)$ ، $y = a(1 + \cos\theta)$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$. اوجد دالة لاجرانج واوجد معادلة الحركة ثم اثبت أن الحلقة تعمل ذبذبات زمنها الدورى يساوى $4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

(3) استخدم معادلات لاجرانج لايجاد معادلة الحركة لبندول مركب يتذبذب فى مستوى رأسى حول محور أفقى مثبت.

(٤) يتحرك جسم في مستوى تحت تأثير قوة جاذبة F نحو مركز الجذب o حيث $F = \frac{\lambda}{r^2}$ ، r بعد الجسم عن o
اوجد معادلات حركة الجسم باستخدام معادلات لاجرانج.

(٥) حل مثال (٢) اذا استبدلنا الكتلة $3m$ بالكتلة $5m$ وكذلك استبدلنا الكتلتين m ، $2m$ بالكتلتين $2m$ ، $3m$.

(٦) استخدم معادلات لاجرانج في ايجاد معادلات حركة جسيم كتلته m يتحرك على السطح الداخلي للمجسم الدوراني $x^2+y^2=9z$ تحت تأثير وزنه مع اعتبار السطح أملس.

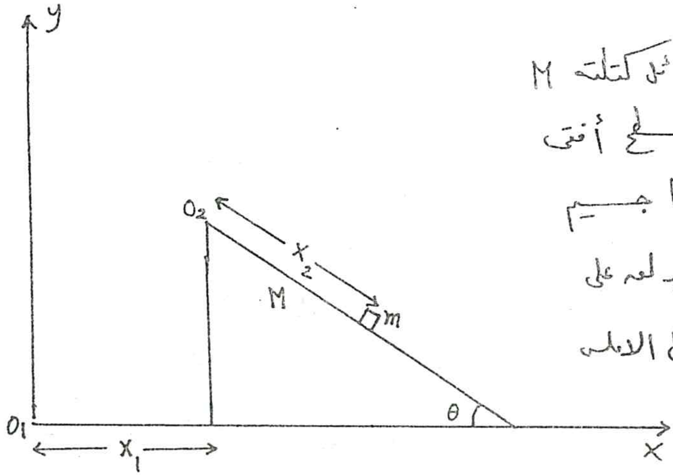
(٧) اسطوانة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها l تتدحرج بدون انزلاق على مستوى مائل بزاوية α على الأفقي ، اوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج ثم اثبت أن عجلة مركز الثقل تكون ثابتة واوجد قيمتها.

(٨) سلك AB مستقيم أملس مثبت عند النقطة A على محور رأسي OA بحيث يدور AB حول OA بسرعة زاوية ثابتة ω .
وضعت حلقة كتلتها m بحيث تكون مقيدة الحركة على السلك.
اوجد دالة لاجرانج ثم اوجد معادلات حركة الحلقة باستخدام معادلات لاجرانج ثم اوجد الحل العام.

(٩) يتحرك جسم كتلته m في مستوى تحت تأثير الجهد $V = -\frac{A}{r}$ حيث A ثابت . اوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج ، اوجد كذلك الثوابت المهمة.

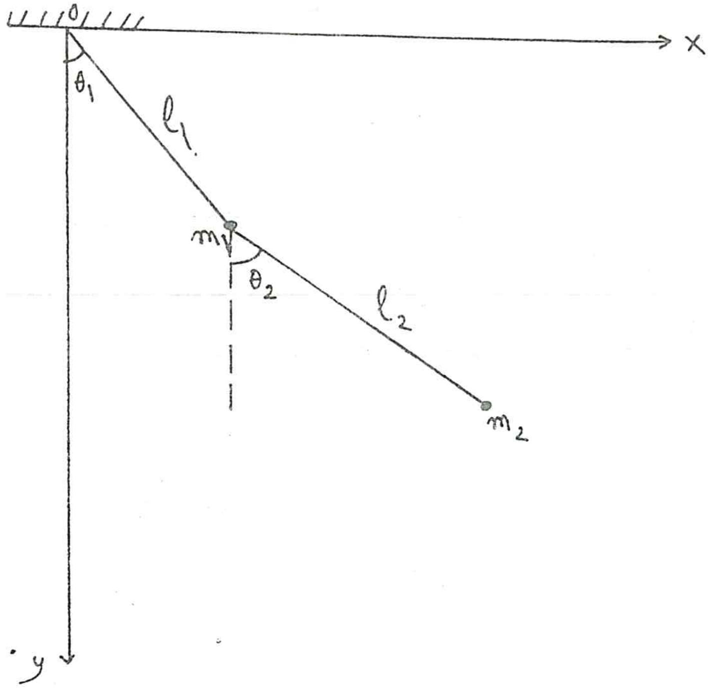
(١٠) كتلة M_2 معلقة من أحد طرفي خيط خفيف يمر على بكرة مثبتة ملساء وفي الطرف الآخر للخيط توجد بكرة ملساء كتلتها M_1 وغير قابلة للدوران ويمر فوق هذه البكرة خيط خفيف يحمل الكتلتين m_1 ، m_2 اوجد دالة لاجرانج للمجموعة ثم اوجد عجلة الكتلة M_2 مستخدما معادلات لاجرانج.

(١١) جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة محافظ اوجد دالة لاجرانج ومعادلات الحركة لهذا الجسيم في الاحداثيات الاسطوانية.

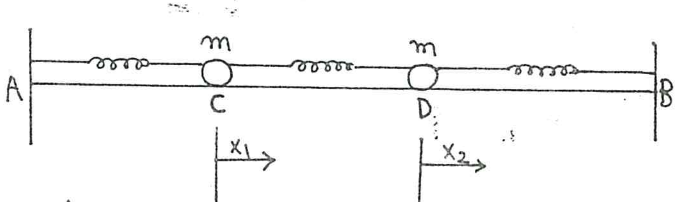


(١٢) مستوى مائل كتلته M ينزلق على سطح أفقي أملس بينما جسيم كتلته m ينزلق على سطح المائل الاملس كما بالشكل. أوجد معادلات حركة الجسيم والمستوى المائل باستخدام معادلات لاجرانج.

(١٣) اوجد معادلات الحركة لبندول ثنائي كما بالشكل حيث الجسيمين m_1 ، m_2 متصلين في موضعين مختلفين به خيط خفيف والمجموعة تتحرك حركة تذبذبية في مستوى رأسي حول نقطة ثابتة من الخيط.



(١٤) وصلت كتلتان متساويتان كل منهما m بثلاثة اسلاك زنبركية لها نفس ثابت الزنبرك K بحيث تنزلق كل كتلة بحرية على منضدة ملساء كما بالشكل . اوجد معادلتي حركة الكتلتين باستخدام معادلات لاجرانج على فرض أن x_1 ، x_2 هما ازاحتي الكتلتين عن موضعي اتزانهما C ، D .



(١٥) اوجد معادلة حركة قضيب كتلته m وطوله $2l$ يتذبذب في مستوى رأسي حول طرف منه مثبت مستخدما معادلات لاجرانج ثم اوجد الزمن الدوري في حالة الذبذبات الصغيرة .

الباب الثالث

معادلات هاملتون Hamilton's equations

كميات الحركة المعممة Generalized momenta

دالة لاجرانج L تكون دالة في الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \dots, q_n$ والسرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ والزمن t أى أن $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$

تعرف كمية الحركة المعممة p_i من العلاقة

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \; i = 1, 2, \dots, n \qquad (3.1)$$

معادلات لاجرانج هى

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \, , \; i = 1, 2, \dots, n \qquad (3.2)$$

من المعادلتين (3.1)، (3.2) نجد أن

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (3.3)$$

دالة هاملتون Hamiltonian function or Hamiltonian

تعرف دالة هاملتون H أو هاملتونيان من العلاقة

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \qquad (3.4)$$

يمكن حذف السرعات المعممة $\dot{q}_i$ من دالة هاملتون H وذلك باستخدام العلاقة (3.1) التى تربط بين كميات الحركة p_i

والسرعات المعممة $\dot{q}_i$ وبالتالى فان دالة هاميلتون تكون دالة فى الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ وكميات الحركة المعممة $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ والزمن t أى أن

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) \qquad (3.5)$$

<u>معادلات هاميلتون</u> Hamilton's equations

من (3.4) فان

$$dH = \sum_{i=1}^{n} p_i\, d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, dp_i - dL \qquad (3.6)$$

حيث dL تعطى من

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (3.7)$$

بالتعويض من (3.7) فى (3.6) واستخدام المعادلتين (3.1)، (3.3) نحصل على

$$dH = -\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (3.8)$$

من ناحية أخرى من (3.5) فان

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (3.9)$$

بمقارنة المعادلتين (3.8)، (3.9) نستنتج أن

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (3.10)$$

المعادلات (3.10) تسمى بمعادلات هاميلتون <u>للحركة</u>. وتستخدم معادلات هاميلتون فى حل مسائل فى الميكانيكا

كما تستخدم أيضا في ميكانيكا الكم والميكانيكا الاحصائية.

حالة خاصة.

اذا كانت دالة هاملتون لا تعتمد صراحة على الزمن t فان H تكون ثابتة وتساوى الطاقة الكلية للمجموعة أى أن

$$H = T + V = \text{constant}$$

البرهان. في هذه الحالة $H = H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$

ونجد أن

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

باستخدام معادلات هاملتون (3.10) نحصل على

$$\frac{dH}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \dot{p}_i = 0$$

$$\therefore \quad H = \text{constant}$$

دالة هاملتون هى

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$$

حيث أن كمية الحركة المعممة p_i تعطى من

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

حيث $L = T - V$ وطاقة الجهد لا تعتمد على السرعات المعممة

$$\therefore \; H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L$$

حيث أن طاقة الحركة دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة وحسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة فان

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

ونجد أن

$$H = 2T - (T - V) = T + V$$

أمثلة

مثال (١) نظام ميكانيكي له درجة حرية واحدة ودالة هاملتون له في الصورة $H = q^2(1 + \frac{1}{2}p^2)$

اكتب معادلات هاملتون لهذا النظام. وإذا كان $p = 0$ ، $q = 1$ ، $\dot{q} = 0$ عند $t = 0$ فأثبت أن

$$q = \operatorname{sech} \sqrt{2}\, t$$

الحل

معادلات هاملتون هي

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

حيث $i = 1$ فقط (توجد درجة حرية واحدة للنظام الميكانيكي في هذا المثال)

حيث أن دالة هاملتون H معطاه في الصورة

$$H = q^2(1 + \frac{1}{2}p^2)$$

∴ معادلات هاملتون تأخذ الصورة

$$\dot{q} = p q^2 , \qquad (1)$$

$$\dot{p} = -2q(1 + \frac{1}{2}p^2)$$

$$\therefore \dot{p} = -q(2 + p^2) \qquad (2)$$

بقسمة (1) على (2) نحصل على

$$\frac{\dot{q}}{\dot{p}} = \frac{dq}{dp} = -\frac{pq}{p^2+2}$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dq}{q} = -\frac{p\,dp}{p^2+2}$$

بالتكامل فان

$$\ln q = -\frac{1}{2}\ln(p^2+2) + c_1$$

حيث c_1 ثابت يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهى

$p=0$ ، $q=1$ عند $t=0$ ونجد أن

$$c_1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

$$\therefore \ln q = \ln(p^2+2)^{-\frac{1}{2}} + \ln\sqrt{2}$$

$$= \ln\sqrt{\frac{2}{p^2+2}}$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2}{p^2+2}}$$

بتربيع الطرفين فان

$$q^2 = \frac{2}{p^2+2}$$

$$\therefore q^2p^2 + 2q^2 = 2$$

$$\therefore p^2 = \frac{2(1-q^2)}{q^2}$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{2}}{q}\sqrt{1-q^2} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) فى (1) نجد أن

$$\dot{q} = \sqrt{2}\,q\sqrt{1-q^2}$$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \sqrt{2}\,q\sqrt{1-q^2}$$

بفصل المتغيرات نأخذ

$$\frac{dq}{q\sqrt{1-q^2}} = \sqrt{2}\, dt$$

بالتكامل نحصل على

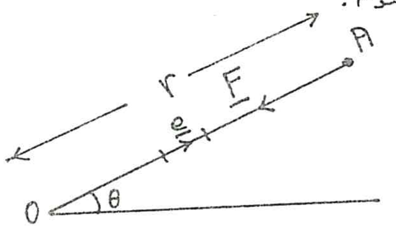
$$-\operatorname{sech}^{-1} q = \sqrt{2}\, t + c_2$$

حيث c_2 ثابت يتعين من الشروط الابتدائية المعطاه وهى $q = 1$ عند $t = 0$ ونجد أن $c_2 = 0$

$$\therefore \operatorname{sech}^{-1} q = -\sqrt{2}\, t$$

$$\therefore q = \operatorname{sech}(-\sqrt{2}\, t)$$
$$= \operatorname{sech}(\sqrt{2}\, t)$$

مثال (ج) اوجد دالة هاميلتون بدلالة الاحداثيات المعممة وكمية الحركة المعممة لجسيم كتلته m يتحرك فى مستوى تحت تأثير قوة جاذبة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن المركز الجاذب. ثم اوجد معادلات هاميلتون.



الحل

الاحداثيات المعممه هما r, θ اللذان يعينان موضع الجسيم A عند أى لحظة. القوة $\underline{F}$ المؤثرة على الجسيم فى الصورة

$$\underline{F} = -\frac{\lambda}{r^2}\, \underline{e}$$

حيث $\underline{e}$ متجه وحدة فى اتجاه $\underline{OA}$ ، O المركز الجاذب

طاقة حركة الجسيم هى

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد تتعين من

$$V = -\int \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad , \quad d\underline{r} = dr\,\underline{e}$$

$$\therefore V = -\int -\frac{\lambda}{r^2}\underline{e} \cdot dr\,\underline{e} = \lambda \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{\lambda}{r}$$

دالة لاجرانج L تكون في الصورة

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\lambda}{r}$$

حيث أن

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \qquad (1)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad (2)$$

دالة هاملتون H تتعين من

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L$$

$$\therefore H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\lambda}{r} \qquad (3)$$

من (1) ، (2) نجد أن $\dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2}$ ، $\dot{r} = \dfrac{p_r}{m}$

بالتعويض في (3) نجد أن

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2}\right) - \frac{\lambda}{r}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r}$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\lambda}{r^2} \quad , \qquad (4)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad , \qquad (5)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad , \qquad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \qquad (7)$$

نلاحظ أن المعادلتين الأخيرتين (6)، (7) هما نفس المعادلتين (1) ، (2) .

كذلك نلاحظ أن المعادلة (5) تعطى

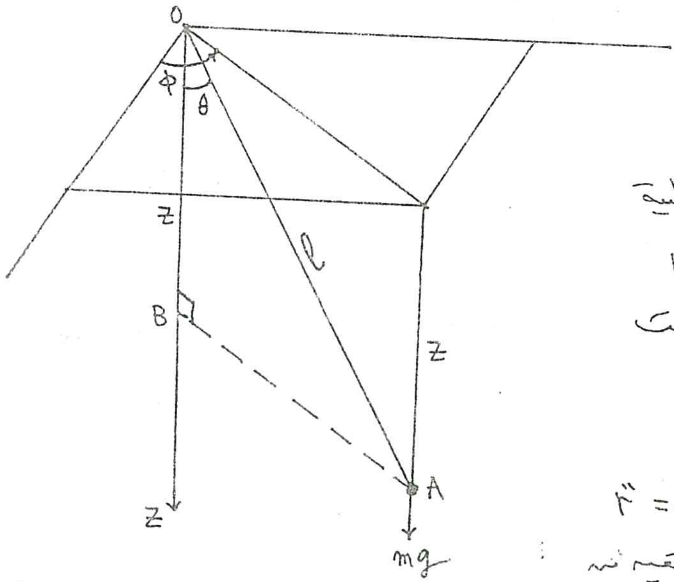
$$p_\theta = \text{constant}$$

أى أن

$$p_\theta = m r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

<u>مثال (٢)</u> اوجد معادلات هاملتن للبندول الكرى.

الحل



يتعين موضع الجسم A عند أى لحظة بواسطة الاحداثيات القطبية الكرية r, θ, ϕ حيث r يظل ثابت ويساوى l مثلا أى أن $r = l$ وبالتالى $\ddot{r} = 0$ ، $\dot{r} = 0$ سرعة الجسم تتعين من :

$$\underline{v} = (\dot{r} \, , r\dot{\theta} \, , r\dot{\phi}\sin\theta)$$
$$= (0 \, , l\dot{\theta} \, , l\dot{\phi}\sin\theta)$$

طاقة الحركة تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right)$$

طاقة الجهد أو طاقة الوضع تعطى بـ

$$V = -mgz$$

حيث
$$z = OB = l \cos\theta$$

مع اعتبار المستوى الأفقي المار بالنقطة الثابتة O مستوى قياسي.

دالة لاجرانج تكون

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) + mgl\cos\theta$$

يوجد احداثيان معممان هما θ ، ϕ وكميتي الحركة المعممتين المناظرتين هما P_θ ، P_ϕ ، حيث

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \qquad , \qquad (1)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \dot{\phi} \sin^2\theta \qquad (2)$$

دالة هاملتون تعطى بـ

$$H = P_\theta \dot{\theta} + P_\phi \dot{\phi} - L$$

$$= P_\theta \dot{\theta} + P_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) - mgl\cos\theta$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m l^2} \qquad , \qquad (3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{m l^2 \sin^2\theta} \qquad (4)$$

بالتعويض من (3) ، (4) في دالة هاملتون نحصل على

$$H = \frac{P_\theta^2}{2 m l^2} + \frac{P_\phi^2}{2 m l^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{m l^2 \sin^3\theta} - m g l \sin\theta \,, \qquad (5)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \,, \qquad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m l^2} \,, \qquad (7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m l^2 \sin^2\theta} \qquad (8)$$

نلاحظ أن المعادلتين (7) ، (8) هما نفس المعادلتين (3) ، (4)

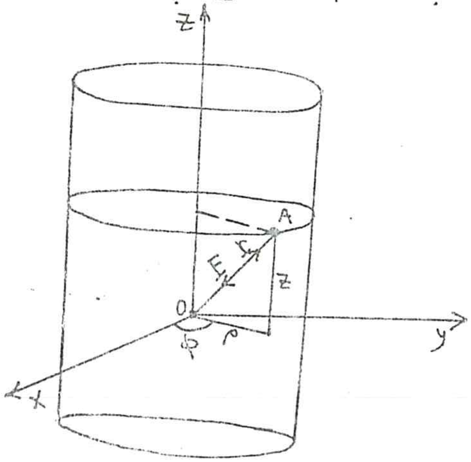
وبتكامل المعادلة (6) نجد أن

$$p_\phi = \text{constant}$$

وباستخدام المعادلة (2) فإن

$$p_\phi = m l^2 \dot{\phi} \sin^2\theta = \text{constant}$$

مثال (٤) يتحرك جسيم كتلته m على سطح اسطوانة دائرية نصف قطرها R تحت تأثير قوة جاذبة نحو نقطة الأصل O الواقعة على محور الاسطوانة ويتناسب مقدار القوة مع بعد الجسيم عن O . اوجد دالة هاملتون واثبت أن الحركة في اتجاه محور الاسطوانة تكون توافقية بسيطة.



الحل

القوة الجاذبة المؤثرة على الجسيم $\underline{F}$ تتعين من

$$\underline{F} = -K \underline{r}$$

حيث $\underline{r}$ متجه موضع الجسيم عند موضع ما A ،

$$\underline{r} = (x, y, z)$$

حيث $x^2+y^2=R^2$

طاقة الجهد V تعطى بـ

$$V = -\int \underline{F}\cdot d\underline{r} = k\int \underline{r}\cdot d\underline{r}$$

$$= k\int r\,dr = \frac{1}{2}kr^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right)$$

سرعة الجسم $\underline{v}$ عند الموضع A بالاحداثيات الاسطوانية تكون في الصورة

$$\underline{v} = \left(\dot{\rho},\ \rho\dot{\phi},\ \dot{z}\right)$$

$$\therefore v^2 = \dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2$$

في هذه الحالة نلاحظ أن

$$\rho = R = \text{constant}$$

$$\therefore \dot{\rho} = 0$$

$$\therefore v^2 = R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2$$

طاقة الحركة تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right)$$

دالة لاجرانج تكون

$$L = T-V$$

$$= \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right)-\frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right)$$

في هذه الحالة يوجد احداثيان مهملان هما ϕ, z وكميتا الحركة المعممة المناظرة هما P_z, P_ϕ حيث

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \qquad (1)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} \qquad (2)$$

دالة هاملتون تعطى من

$$H = P_\phi \dot{\phi} + P_z \dot{z} - L$$

$$= P_\phi \dot{\phi} + P_z \dot{z} - \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

بالتعويض من (1) ، (2) عن $\dot{z}$ ، $\dot{\phi}$ نحصل على

$$H = \frac{P_\phi^2}{2mR^2} + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{P}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad , \qquad (3)$$

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -Kz \quad , \qquad (4)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{mR^2} \quad , \qquad (5)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m} \qquad (6)$$

المعادلتان الأخيرتان (5) ، (6) هما نفس المعادلتين (1) ، (2)

بتفاضل المعادلة (1) أو (6) نجد أن

$$\dot{P}_z = m \ddot{z} \qquad (7)$$

من المعادلتين (4) ، (7) نحصل على

$$m \ddot{z} = -K.z$$

$$\therefore \ddot{z} + w^2 z = 0 \quad , \quad w^2 = \frac{K}{m}$$

وهي تمثل حركة توافقية بسيطة

أى أن حركة الجسم فى اتجاه محور الاسطوانة هى حركة توافقية بسيطة.

تمارين

(١) جسم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده $V(r, \theta)$ حركة مستوية حيث (r, θ) تعين موضع الجسم بالاحداثيات القطبية اوجد دالة هاميلتون ومعادلات هاميلتون.

(٢) يتحرك جسم كتلته m في مجال حافظ طاقة جهده $V(x, y, z)$ اوجد دالة هاميلتون واثبت ان معادلات هاميلتون تختزل الى معادلات نيوتن للحركة.

(٣) اوجد دالة هاميلتون لجسم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده $V(r, \theta, \phi)$ حيث يتعين موضع الجسم بالاحداثيات القطبية الكرية (r, θ, ϕ) ثم اوجد معادلات هاميلتون.

(٤) اذا علم ان طاقة الحركة والجهد لنظام ميكانيكي هما

$$T = mK(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) \quad ,$$

$$V = -2mg \cos q_1$$

اوجد دالة هاميلتون ومعادلات هاميلتون ثم اثبت ان

$$P_2 = \text{constant} \quad ،$$

$$\dot{q}_1^2 + \frac{c^2}{\sin^2 q_1} - \frac{2g}{K} \cos q_1 = \text{constant}$$

حيث K ، c ثابتين.

(٥) جسم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده $V(\rho, \phi, z)$ حيث ρ, ϕ, z هي الاحداثيات الاسطوانية لموضع الجسم

اوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون للجسم.

(٦) نظام ميكانيكي ذو درجتين حرية وكانت طاقة الحركة وطاقة الجهد هما

$$2T = \dot{x}^2 + x^2 \dot{y}^2 \quad , \quad 2V = K^2 x^2$$

اثبت ان

$$x^2 = a \sin(2Kt + b) + c$$

حيث a ، b ، c ، K ثوابت.

(٧) باستخدام معادلات هاملتون استنتج معادلات حركة جسم يتذبذب حركة توافقية بسيطة.

(٨) يتحرك جسم كتلته m تحت تأثير الجاذبية على الحلزون $z = K\phi$ ، $\rho = a$ حيث K ، a ثابتين ، (ρ, ϕ, z) احداثيات الجسم عند اى لحظة. اوجد معادلات هاملتون للحركة.

(٩) اذا كانت طاقتى الحركة والجهد لمجموعة ديناميكية هما

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad , \quad V = f(q_1 - q_2)$$

اذا كان $q = q_1 - q_2$ ، $b = q_1 + q_2$ فاوجد دالة هاملتون H وبين ان كمية الحركة P_b تظل ثابتة. اثبت كذلك ان

$$t - t_0 = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{H - P_b^2 - f(q)}}$$

حيث $q = q_0$ عندما $t = t_0$.

(١٠) جسم كتلته m يتحرك على السطح الداخلى لمخروط رأسى أملس زاوية النصف رأسية هى α اوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون.

الباب الرابع

دالة راوث Routh's function

في بعض المسائل الديناميكية نجد أن دالة لاجرانج L لا يظهر فيها صراحة بعض الاحداثيات المعممة وإنما توجد السرعات المعممة المناظرة لهذه الاحداثيات المعممة المختفية.

نفرض أن الاحداثيات المعممة اللازمة لتعيين موضع مجموعة ديناميكية هي $q_1, q_2, \ldots, q_n$ وأن الاحداثيات $q_1, q_2, \ldots, q_k$ تظهر صراحة في دالة لاجرانج L بينما لا تظهر الاحداثيات $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$ صراحة في L وعددها $n-k$ ولنسميها

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-k}$$

أي أن

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ldots, \dot{\theta}_{n-k}) \quad (4.1)$$

هنا يعني أن

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_\beta} = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n-k$$

ومن ثم نستنتج من معادلات لاجرانج المرافقة للاحداثيات المختلفة أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta}\right) = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n-k$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta} = C_\beta, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n-k \quad (4.2)$$

حيث C_β ثابت لا يعتمد على الزمن

تعرف دالة راوث بالصورة

$$R = \sum_{\beta=1}^{n-K} c_\beta \, \dot{\theta}_\beta - L \qquad (4.3)$$

نلاحظ من (4.1) و (4.2) أن

$$\dot{\theta}_\beta = \dot{\theta}_\beta(q_1, q_2, \cdots, q_K, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_K, c_1, c_2, \cdots, c_{n-K}) \qquad (4.4)$$

وهذا يعني أن

$$R = R(q_1, q_2, \cdots, q_K, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_K, c_1, c_2, \cdots, c_{n-K}) \qquad (4.5)$$

$$\therefore dR = \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial R}{\partial q_\beta} dq_\beta + \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \frac{\partial R}{\partial c_\beta} dc_\beta \qquad (4.6)$$

من (4.3) نجد أن

$$dR = \sum_{\beta=1}^{n-K} c_\beta \, d\dot{\theta}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \dot{\theta}_\beta \, dc_\beta - dL \qquad (4.7)$$

ومن (4.1) نجد أن

$$dL = \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial q_\beta} dq_\beta + \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta} d\dot{\theta}_\beta \qquad (4.8)$$

بالتعويض من (4.8) في (4.7) نحصل على بعد استخدام (4.2)

$$dR = -\sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial q_\beta} dq_\beta - \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \dot{\theta}_\beta \, dc_\beta \qquad (4.9)$$

بمقارنة المعادلتين (4.6) و (4.9) نحصل على

$$\frac{\partial R}{\partial q_\beta} = -\frac{\partial L}{\partial q_\beta}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}, \quad \beta = 1, 2, \cdots, K \qquad (4.10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_\beta} = \dot{\theta}_\beta, \quad \beta = 1, 2, \cdots, n-K \qquad (4.11)$$

بالتعويض من (4.10) في معادلات لاجرانج نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_\beta} = 0 \;, \quad \beta = 1, 2, \ldots, K \qquad (4.12)$$

المعادلات (4.12) عددها K (حيث $K < n$) وبحلها نوجد الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots, q_K$ بدلالة الزمن t

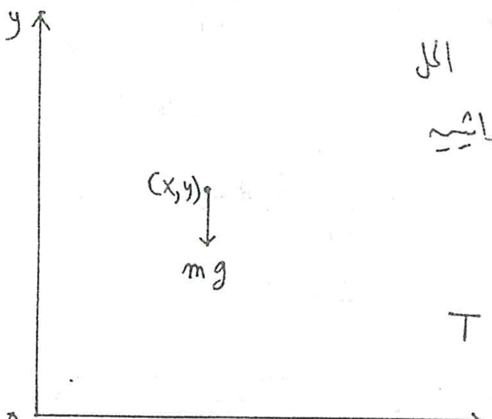
أما الاحداثيات الباقية $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-K}$ فنوجدها بتكامل المعادلة (4.11) ونجد أن

$$\theta_\beta = \int \frac{\partial R}{\partial c_\beta}\, dt \;, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n-K$$

ملاحظة. نلاحظ أن دالة راوث تحقق معادلات لاجرانج للاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots, q_K$ وتسمى معادلات راوث.

أمثلة

مثال (1) اوجد دالة راوث في حالة حركة جسيم تحت تأثير الجاذبية الأرضية واهمال مقاومة الهواء وكذلك اهمال دوران الأرض.



الحل

يتعين موضع الجسيم بالاحداثية (x, y)

طاقة حركة الجسيم هي

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

طاقة وضع الجسيم هي

$$V = mg\,y$$

دالة لاجرانج تعطى بالعلاقة

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y$$

نلاحظ أن دالة لاجرانج لا يظهر بها الاحداث x صراحة
في هذه الحالة وتكون دالة راوث
في الصورة

$$R = c_1 \dot{\theta}_1 - L$$

حيث $\theta_1 = x$ أي $\dot{\theta}_1 = \dot{x}$ ونضع $c_1 = c$
وتأخذ دالة راوث الصورة

$$R = c\dot{x} - L$$

$$= c\dot{x} - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m g y$$

حيث

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

ومنها $\dot{x} = \frac{c}{m}$ وعليه دالة راوث تأخذ الصورة

$$R = \frac{c^2}{2m} + m g y - \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

<u>مثال (٢)</u> يتحرك جسم كتلته m في مستوى في مجال طاقة جهده $V = \frac{-m}{r^2}$ حيث r بعد الجسم عن قطب الاحداثيات.
اذا كانت الشروط الابتدائية للحركة هي

$r = 1$ ، $\theta = 0$ ، $\dot{r} = \sqrt{2}$ ، $\dot{\theta} = 2$ عند $t = 0$

فاوجد دالة راوث ثم اوجد الاحداثيات المعممة بدلالة الزمن t .

الحل

طاقة حركة الجسم في الاحداثيات القطبية تعطى من

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{m}{r^2}$$

نلاحظ أن الاحداثي المهمل θ لا يظهر صراحة في L
وتكون دالة راوث هي

$$R = c_1 \dot{\theta}_1 - L$$

حيث $\theta_1 = \theta$ أي $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}$ ، ونضع $c_1 = c$ وتأخذ
دالة راوث الصورة

$$R = c\dot{\theta} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{m}{r^2}$$

حيث

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \qquad (1)$$

ومنها نجد أن

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m r^2}$$

بالتعويض في دالة راوث نجد أن

$$R = \frac{c^2}{2 m r^2} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{m}{r^2} \qquad (2)$$

لتعيين قيمة الثابت c نستخدم الشروط الابتدائية للحركة
وهي $r = 1$ ، $\dot{\theta} = 2$ عند $t = 0$ في المعادلة (1)
فنجد أن

$$c = m (1)^2 (2) = 2m$$

بالتعويض عن قيمة الثابت c في المعادلة (2) نجد أن دالة
راوث تأخذ الصورة

$$R = \frac{m}{r^2} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \qquad (3)$$

لإيجاد الإحداثي المهم r نستخدم معادلة راوث لهذا الإحداثي أي أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \qquad (4)$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial R}{\partial \dot r} = -m\dot r \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-2m}{r^3}$$

بالتعويض في (4) نحصل على

$$-m\ddot r + \frac{2m}{r^3} = 0$$

أي أن

$$\ddot r - \frac{2}{r^3} = 0$$

بالضرب في $2\dot r$ والتكامل نجد أن

$$\dot r^2 + \frac{2}{r^2} = \text{constant} = A$$

حيث الثابت A يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي

$r = 1$ ، $\dot r = \sqrt{2}$ عند $t = 0$ ونجد أن $A = 4$

$$\therefore \dot r^2 + \frac{2}{r^2} = 4$$

ومنها نجد أن

$$\dot r^2 = 4 - \frac{2}{r^2} = \frac{4}{r^2}\left(r^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{2}{r}\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}} = 2\,dt$$

بالتكامل من بداية الحركة $t=0$ الى لحظة عامة t نجد أن

$$\int_1^r \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}} = 2\int_0^t dt$$

$$\therefore \left[\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}\right]_1^r = 2\left[t\right]_0^t$$

$$\therefore \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} = 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بالتربيع نجد أن

$$r = \sqrt{4t^2 + 2\sqrt{2}\,t + 1}$$

وهذه تعطى الاحداث المعمم r بدلالة الزمن t

الاحداث الثانى θ يتعين من

$$\theta = \int \frac{\partial R}{\partial c}\, dt$$

حيث $\frac{\partial R}{\partial c}$ نحصل عليها من (2) ونجد أن

$$\theta = \int \frac{c}{mr^2}\, dt = 2\int \frac{dt}{r^2}$$

وذلك بعد التعويض عن $C = 2m$ ويكون

$$\theta = 2\int \frac{dt}{4t^2 + 2\sqrt{2}\,t + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}}$$

$$\theta = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(2\sqrt{2}\,t + 1\right) + B$$

حيث الثابت B يتعين من الشروط الابتدائية وهو $\theta = 0$ عند $t = 0$ ونجد أن $B = -\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

$$\therefore \theta = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(2\sqrt{2}\,t + 1\right) - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

وهذه تعطينا الاحداث المعمم θ بدلالة الزمن t

تمارين

(1) يتحرك جسم فى مجال طاقة حركته $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2\dot{y}^2)$ وطاقة جهده $V = \frac{1}{2}w^2x^2$ اوجد دالة راوث

ثم اثبت أن $x^2 = A \sin(2wt + B)$

حيث A ، B ، w ثوابت

(٢) يتحرك جسم كتلته m تحت تأثير قوة جاذبة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن المركز الجاذب . اوجد دالة راوث .

الباب الخامس

حساب التغاير Calculus of variations

معادلة اويلر Euler's equation

المسألة التي غالبا ما تظهر في الرياضيات هي مسألة إيجاد المنحنى $y = Y(x)$ الذي يصل بين النقطتين $x = x_1$ ، $x = x_2$ بحيث يكون التكامل

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \tag{5.1}$$

أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن ، ويسمى كذلك القيمة القصوى حيث $y' = \frac{dy}{dx}$. المنحنى نفسه يسمى منحنى النهاية العظمى أو النهاية الصغرى .

سنثبت الآن أن الشرط الضروري لكي يكون للتكامل (5.1) نهاية كبرى أو نهاية صغرى هو

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5.2}$$

المعادلة (5.2) تسمى معادلة اويلر أو لاجرانج .

الاثبات .

نفرض أن المنحنى الذي يجعل I نهاية كبرى أو نهاية صغرى يعطى بـ $y = Y(x)$ ، $x_1 \le x \le x_2$. عندئذ يكون $y = Y(x) + \epsilon\,\eta(x) = Y + \epsilon\,\eta$ حيث η اختيارية ، ϵ لا يعتمد على x هو المنحنى المجاور الذي يمر خلال $x = x_1$ ، $x = x_2$ اذا اخترنا η بحيث يكون

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{5.3}$$

قيمة I لهذا المنحنى المجاور هي

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y+\epsilon\eta, Y'+\epsilon\eta')\,dx$$

وهذه تكون قيمة قصوى عندما $\epsilon=0$. الشرط الضروري لكي تكون هذه القيمة كذلك هو

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$$

لكن

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0 \qquad (5.4)$$

باستخدام التكامل بالتجزئ والشرط (5.3) نجد أن

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\,dx = \left.\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \eta\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \qquad (5.5)$$

بالتعويض من (5.5) في (5.4) نحصل على

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx = 0$$

وحيث أن η اختيارية فإن

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

<u>ملحوظة</u>: يمكن تعميم النتيجة السابقة الى التكامل

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx$$

وتكون منحنيات النهاية العظمى أو النهاية الصغرى ، أى التى تجعل I نهاية عظمى أو صغرى تحقق معادلات أويلر أو لاجرانج

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.6)$$

مبدأ هاملتون Hamilton's principle

التشابه الواضح بين (5.2) أو (5.6) ومعادلات لاجرانج التى سبق دراستها لمجموعة ميكانيكية يساعد على دراسة مسألة تحديد منحنيات النهاية العظمى أو النهاية الصغرى للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt$$

أو باختصار للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

حيث $L = T - V$ هى دالة لاجرانج للمجموعة الميكانيكية.

وبمقارنة هذا التكامل بالتكامل السابق

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n', x)\, dx$$

فإننا نجد أن الشرط الضرورى لوجود منحنى نهاية عظمى أو نهاية صغرى هو

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

وهذه بالضبط هى معادلات لاجرانج . من هذه النتيجة تمكن هاملتون من صياغة المبدأ التغايرى العام المعروف بمبدأ هاملتون على النحو التالى :

يمكن للمجموعة الميكانيكية ما نقطة أن تتحرك من الزمن t_1 إلى الزمن t_2 بطريقة تجعل الكمية $\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$ لها نهاية قصوى . هذه الكمية تسمى

أحيانا تكامل الفعل. وغالبا ما يبسط بكتابته في الصورة

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0$$

حيث δ هو رمز التغاير.

أمثلة

مثال (١). اوجد المنحنى الذي يجعل التكامل

$$I = \int_0^{\pi} \left(y^2 + y'^2 - 2y \sin x \right) dx$$

قيمة قصوى بحيث $y(0) = 1$ ، $y(\pi) = 0$.

الحل

في هذه الحالة الدالة F في الصورة

$$F = y^2 + y'^2 - 2y \sin x$$

والمنحنى المطلوب يحقق معادلة اويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\sin x$$

بالتعويض في معادلة اويلر نحصل على

$$2y'' - 2y + 2\sin x = 0$$

أو

$$y'' - y = -\sin x .$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$$

الشرطان $y(0) = 1$ ، $y(\pi) = 0$ نحصل منهما على الثابتين c_1 ، c_2 ونجد أن

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 e^{\pi} + c_2 e^{-\pi} = 0$$

بحل المعادلتين الخطيتين في c_1, c_2 نجد أن $c_1 = \frac{e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$ ، $c_2 = \frac{-e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$

ونجد أن المنحنى المطلوب هو

$$y = \frac{e^{x-\pi} - e^{\pi - x}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} + \frac{1}{2}\sin x$$

$$y = \frac{\sinh(\pi - x)}{\sinh \pi} + \frac{1}{2}\sin x$$

مثال (٢) اوجد المنحنى الذى يصل بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) بحيث يكون له أقل طول.

الحل

طول المنحنى الذى يصل بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) يعطى من

$$I = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

المنحنى المطلوب يجعل I نهاية صغرى ، اى يحقق معادلة اويلر حيث الدالة F فى الصورة

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

بالتعويض فى معادلة اويلر نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right] = 0$$

$$\therefore \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{constant}$$

$$\therefore y' = \text{constant}$$

$$\therefore y = Ax + B$$

اى أن المنحنى هو خط مستقيم ويمكن تعيين الثابتين A ، B من الشرطين

$$y(x_1) = y_1 \quad , \quad y(x_2) = y_2$$

$$\therefore \quad y_1 = A x_1 + B \quad ,$$

$$y_2 = A x_2 + B$$

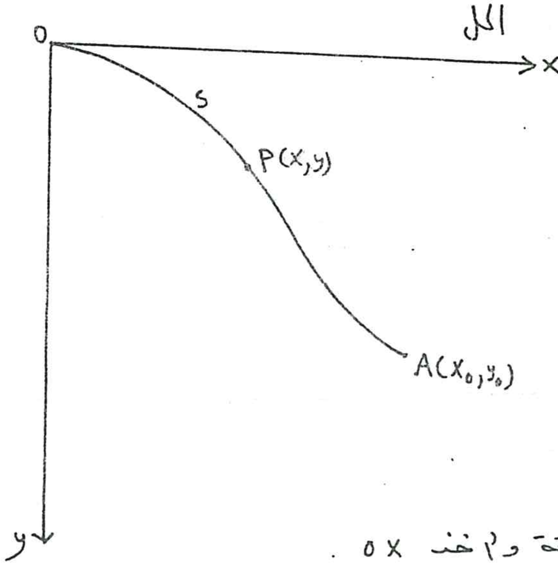
بحلهما نجد أن $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، $B = y_1 - \frac{(y_2 - y_1)x_1}{x_2 - x_1}$

∴ المنحنى المطلوب هو الخط المستقيم

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال (٢). جسم ينزلق من السكون عند نقطة ما على سلك أملس فى مستوى رأسى الى نقطة أخرى تحت تأثير الجاذبية، اوجد الزمن الذى يستغرقه الجسم فى ذلك ثم اوجد المنحنى الذى يأخذه السلك حتى يكون الزمن أقل ما يمكن.

الحل



نفرض أن نقطتى الابتداء والانتهاء هما نقطة الأصل O والنقطة $A(x_0, y_0)$ على الترتيب وأن $P(x,y)$ هو موضع الجسم عند اللحظة t.

من مبدأ ثبوت الطاقة وأخذ OX لقياس طاقة الجهد نأخذ:

$$\therefore T_p + V_p = T_0 + V_0$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - mgy = 0 + 0$$

الاشارة السالبة لطاقة الجهد لأن P أسفل OX

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

الزمن τ الذى يستغرقه الجسم من 0 الى A يتعين من

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y=y_0} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_0^{y_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

المنحنى الذى يأخذه الجسيم حتى يكون الزمن أقل ما يمكن يحقق معادلة اويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

حيث الدالة F هى

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy^3}}$$

بالتعويض فى معادلة اويلر نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y^3}} = 0$$

$$\therefore \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2\,y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{1}{2}\,\frac{y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y^3}} = 0$$

$$\therefore \frac{y''(1+y'^2)}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{y'^2\,y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{1}{2}\,\frac{y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} + \frac{1}{2}\,\frac{1+y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} = 0$$

الحدان الاول والثانى يختصران الى $\dfrac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}}$ ، والحدان الثالث والرابع يختصران الى $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}}$ ونحصل على

$$\frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} = 0$$

$$\therefore \frac{y\,y''}{\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} + \frac{1}{2}\frac{1+y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} = 0$$

$$\therefore 2yy'' + 1 + y'^2 = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وخالية من x ولحلها نضع $u = y'$ فإن $y'' = u\frac{du}{dy}$ وتصبح المعادلة التفاضلية في الصورة

$$2yu\frac{du}{dy} + 1 + u^2 = 0$$

أو هي

$$\frac{2u\,du}{1+u^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

بالتكامل نجد أن

$$\ln(1+u^2) + \ln y = \ln a$$

$$\therefore (1+u^2)y = a$$

$$\therefore u = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

بفصل المتغيرات فإن

$$dx = \sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy$$

بالتكامل نجد أن

$$x = \int\sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy + b$$

لحساب التكامل نضع $y = a\sin^2\phi$ فإن

$$x = 2a\int \sin^2\phi\,d\phi + b$$

$$\therefore x = a\int(1-\cos 2\phi)\,d\phi + b$$

$$x = \frac{a}{2}(2\phi - \sin 2\phi) + b$$

حيث أن المنحنى يمر بنقطة الأصل 0 ، وبوضع $y=0$ نجد أن $\phi = 0$
وبوضع $\phi = 0$ ، $x = 0$ نجد أن $b = 0$

$$\therefore\ x = \frac{a}{2}\left(2\phi - \sin 2\phi\right)$$

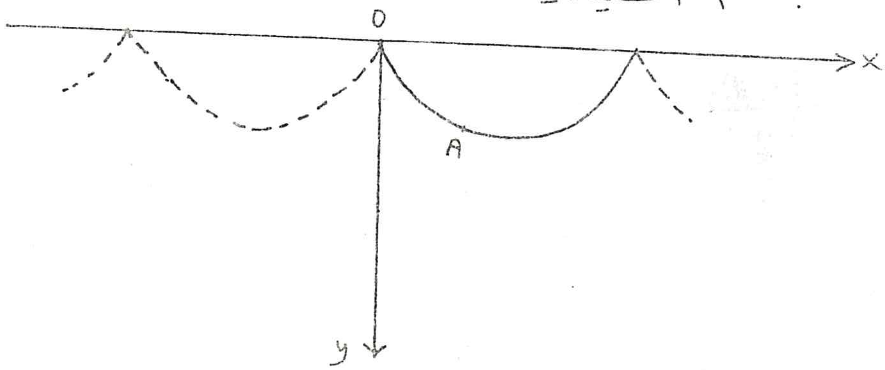
نضع $\theta = 2\phi$ ، $c = \frac{a}{2}$ فنجد أن

$$x = c\left(\theta - \sin\theta\right) \qquad (1)$$

$$\therefore\ y = \frac{a}{2}\left(1 - \cos 2\phi\right)$$

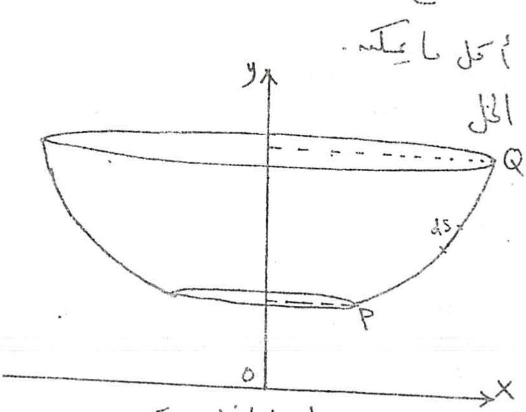
$$y = c\left(1 - \cos\theta\right) \qquad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) هما المعادلتان البارامتريتان للمنحنى الذي يأخذه السلك حتى يكون الزمن أقل ما يمكن . هذا المنحنى هو المعروف باسم السيكلويد



<u>مثال (٤).</u> يراد لمنحنى مثبت طرفاه عند P ، Q أن يدور حول المحور y دورة كاملة ليولد سطح دوراني . اوجد المنحنى الذي يجعل مساحة السطح أقل ما يمكن .

الحل



العنصر ds من المنحنى يولد سطح مساحته

$$2\pi\, x\, ds$$

أي مساحته

$$2\pi\, x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

مساحة السطح الدوراني الناشئ من دوران المنحنى يتعين من

$$I = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

المنحنى الذى يجعل I أقل ما يمكن يتعين من معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

حيث الدالة F تكون

$$F = x\sqrt{1+y'^2}$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{x y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

بالتعويض نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

بالتكامل نأ -

$$\frac{x\,y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{Constant} = c$$

$$\therefore\ x^2 . y'^2 = c^2(1+y'^2)$$

$$\therefore\ y'^2(x^2-c^2) = c^2$$

$$\therefore\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$y = c\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}} = c\,\cosh^{-1}\frac{x}{c} + b$$

$$\therefore\quad x = c\,\cosh\left(\frac{y-b}{c}\right)$$

معادلة أويلر - بواسون Euler - Poisson equation

عندما تكون الدالة F تعتمد على مشتقات من رتب أعلى أى فى حالة ايجاد المنحنى الذى يصل بين النقطتين $x = x_1$ ، $x = x_2$ بحيث يكون التكامل

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx \qquad (5.7)$$

أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن فإنه يمكن اثبات أن الشرط الضروري لكي يكون للتكامل (١) قيمة قصوى هو

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} - F_y = 0 \qquad (5,8)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة $2n$ وتسمى معادلة اويلر - بواسون.

الشروط الحدية تكتب في الصورة

$$\left.\begin{array}{l} y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y_1',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}, \\ y(x_2) = y_2,\ y'(x_2) = y_2',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_2) = y_2^{(n-1)} \end{array}\right\} \qquad (5,9)$$

<u>مثال</u>. اوجد منحنى الدالة الذى يجعل التكامل الآتى قيمة قصوى

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y''^2 + x^2)\, dx$$

الشروط الحدية هى

$$y(0) = 1,\quad y'(0) = 0,\quad y(\tfrac{\pi}{2}) = 0,\quad y'(\tfrac{\pi}{2}) = -1 .$$

الحل

فى هذه الحالة $n = 2$ ومعادلة اويلر - بواسون تكون

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - F_y = 0$$

حيث

$$F = y^2 - y''^2 + x^2$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$F_{y'} = 0,\quad F_{y''} = -2y'',\quad F_y = 2y$$

بالتعويض نجد أن

$$0 - \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') - 2y = 0 .$$

$$\therefore\ y^{(4)} - y = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

حيث الثوابت الاربعة c_1, c_2, c_3, c_4 تتعين من الشروط الحدية الاربعة $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{2})=0$ ، $y'(\frac{\pi}{2})=-1$

ونحصل على اربعة معادلات في الصورة

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad , \qquad (1)$$

$$c_1 - c_2 + c_4 = 0 \quad , \qquad (2)$$

$$c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 0 \quad , \qquad (3)$$

$$c_1 e^{\frac{\pi}{2}} - c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3 = -1 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (1) ، (4) وكذلك بطرح (3) من (2) نجد أن

$$\left(1 + e^{\frac{\pi}{2}}\right) c_1 + \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right) c_2 = 0 \, , \quad (5)$$

$$\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}}\right) c_1 - \left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}\right) c_2 = 0 \qquad (6)$$

بحل المعادلتين (5) ، (6) نجد أن $c_1 = c_2 = 0$

المعادلتان (1) ، (2) تعطيان $c_3 = 1$ ، $c_4 = 0$

∴ المنحنى المطلوب هو $y = \cos x$

تمارين

(1) اثبت أنه اذا كانت الدالة F في التكامل $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$ لا تعتمد على x ، أي أن $F = F(y, y')$ فان التكامل تكون له قيمة قصوى اذا كان $F - y' F_{y'} = c$ حيث c مقدار ثابت.

(٢) استخدم تمرين (1) لحل مثال (٢)

(٣) اعد حل مثال (٢) مستخدما تمرين (1) .

(٤) اوجد المنحنى الذي يجعل التكامل $I = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2y e^{2x}\right)$ نهاية قصوى حيث $y(0) = \frac{1}{3}$ ، $y(1) = \frac{1}{3} e^2$.

(٥) اوجد منحنى النهاية العظمى او الصغرى للتكامل

$$I = \int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2}\, dx$$

حيث $y(a) = A$ ، $y(b) = B$.

(٦) استخدم الاحداثيات الاسطوانية ρ، ϕ، z لايجاد البعد بين نقطتين على سطح اسطوانة دائرى ثم اوجد معادلة الخط الواصل بين هاتين النقطتين حتى يكون هذا الخط هو أقصر بعد بينهما .

(٧) يراد لمنحنى مثبت طرفاه عند P ، Q أن يدور حول المحور x دورة كاملة اثبت أن مساحة السطح الدورانى الناشئ I تساوى

$$2\pi \int_{x_P}^{x_Q} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

اثبت أن المنحنى الذى يجعل مساحة السطح الدورانى (I) أقل ما يمكن هو منحنى الكتينة .

(٨) اوجد المنحنى الذى يجعل التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\, dx$ نهاية قصوى حيث $y(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(٩) اوجد منحنى الدالة الذى يجعل التكامل الآتى نهاية قصوى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (16y^2 - y''^2 + x^2)\, dx$$

(١٠) إثبت أن القيمة القصوى للتكامل $I=\int_{x_1}^{x_2} (p^2 y'^2 + q^2 y^2)\, dx$ هى $p^2 y y' \Big]_{x_1}^{x_2}$

الباب السادس

التحويلات القانونية ومعادلة هاميلتون - جاكوبى

Canonical transformations and Hamilton-Jacobi equation

التحويلات القانونية Canonical transformations

سهولة حل العديد من المسائل في الميكانيكا تتوقف على اختيار الاحداثيات المعممة التي تستخدم. وتبعا لذلك فإنه يفضل اختيار التحويلات من مجموعة ما لاحداثيات الموضع وكمية الحركة الى مجموعة أخرى.

اذا كانت q_α ، p_α ترمزان لاحداثيات الموضع وكمية الحركة وكانت Q_α ، P_α هما الاحداثيات الجديدة للموضع وكمية الحركة فإن التحويل يكون

$$P_\alpha = P_\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t),$$
$$Q_\alpha = Q_\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

أو للاختصار يكون

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t),$$
$$Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

سنقتصر على التحويلات التي تسمى قانونية وهي التي توجد لها دالة $\mathcal{H}$ تسمى دالة هاميلتون في الاحداثيات الجديدة وتحقق العلاقتين

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \qquad (6.1)$$

في مثل هذه الحالة نسمى Q_α ، P_α الاحداثيات القانونية.

دالتا لاجرانج في الاحداثيات القديمة والجديدة هما $L(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $\mathcal{L}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ على الترتيب

ويرتبطان بدالتي هاملتون $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $\mathcal{H}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$
بواسطة المعادلتين

$$H=\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad , \quad \mathcal{H}=\sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{L} \qquad (6.2)$$

شرط التحويلات القانونية.

نظرية.

التحويل $Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ يكون قانونيا اذا كان $\sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha$ هو تفاضلا تاما.
ويمكن اثبات أن التحويل يكون قانونيا اذا وجدت دالة G تحقق العلاقة

$$\frac{dG}{dt} = L - \mathcal{L} .$$

تسمى G الدالة المولدة generating function

مثال (١). اثبت أن التحويل $P = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ، $Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$
يكون قانونيا.

الحل

نستخدم النظرية السابقة ، وفي هذه الحالة نثبت أن
$p\,dq - P\,dQ$ هو تفاضل تام.

حيث أن

$$p\,dq - P\,dQ = p\,dq - \frac{1}{2}(p^2+q^2)\frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\,\frac{p\,dq - q\,dp}{p^2}$$

$$= p\,dq - \frac{1}{2}(p\,dq - q\,dp)$$

$$= \frac{1}{2}(p\,dq + q\,dp) = d\left(\frac{1}{2}pq\right)$$

اذن $p\,dq - P\,dQ$ تفاضل تام وبالتالي فان هذا التحويل يكون قانونيا.

مثال (c). إذا كانت الدالة المولدة $F=F(q_\alpha, Q_\alpha, t)$ أي دالة في احداثيات الموضع القديمة والجديدة q_α ، Q_α على الترتيب وأيضا دالة في الزمن t فأثبت أن

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \ ، \ P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \ ، \ \mathcal{H} = \frac{\partial F}{\partial t} + H$$

حيث

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} \ ، \ \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

الحل

حيث أن

$$\frac{dF}{dt} = L - \mathcal{L} \quad , \qquad (1)$$

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad , \qquad (2)$$

$$\mathcal{H} = \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{L} \qquad (3)$$

بطرح (3) من (2) نجد أن

$$H - \mathcal{H} = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - (L - \mathcal{L}) \qquad (4)$$

بالتعويض من (1) في (4) فإن

$$\frac{dF}{dt} = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha + \mathcal{H} - H$$

أي أن

$$dF = \sum p_\alpha \, dq_\alpha - \sum P_\alpha \, dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H)\, dt \qquad (5)$$

إذا كانت $F = F(q_\alpha, Q_\alpha, t)$ فإن

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} dQ_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} dt \qquad (6)$$

بمقارنة المعادلتين (5) ، (6) ينتج أن

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \ , \ P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \ , \ \mathcal{H} - H = \frac{\partial F}{\partial t}$$

المعادلات $\dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}$ ، $\dot{Q}_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$ تنتج من حقيقة أن $\mathcal{H}$ هي دالة هاملتون في الاحداثيات P_α ، Q_α .

معادلة هاملتون - جاكوبى The Hamilton - Jacobi equation

اذا أمكننا ايجاد التحويل التناظرى الذى يؤدى إلى أن تكون $\mathcal{H} \equiv 0$ فإننا نرى أن $\dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} = 0$ ، $\dot{Q}_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} = 0$

أى أن P_α ، Q_α يكونان ثابتين . تسمى فى هذه الحالة P_α ، Q_α احداثيات مستمرة . وعلى ذلك فانه باستخدام التحويل نستطيع إيجاد p_α ، q_α وبالتالى نحدد حركة المجموعة .

الخطوات تتوقف على ايجاد الدالة المولدة الصحيحة . حيث أن $\mathcal{H} = \dfrac{\partial F}{\partial t} + H$ حيث F الدالة المولدة . وبوضع $\mathcal{H} \equiv 0$ فان هذه الدالة المولدة يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H(p_\alpha , q_\alpha , t) = 0$$

أو

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} , q_\alpha , t\right) = 0 \qquad (6.3)$$

وذلك لأن

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \qquad (6.4)$$

المعادلة (6.3) تسمى معادلة هاملتون - جاكوبى .

حل معادلة هاملتون - جاكوبى Solution of the Hamilton - Jacobi equation

نحن الآن بحاجة الى ايجاد حل مناسب لمعادلة هاملتون - جاكوبى . وحيث أن هذه المعادلة تحتوى على $n+1$ متغيرات مستقلة ،

أي $q_1, q_2, \dots, q_n, t$ فإن الحل الكامل سوف يشتمل على $n+1$ ثابتاً . بحذف الثابت الإضافي الاختياري والرمز إلى الثوابت المتبقية n بالرموز β_1 ، β_2 ، ..... ، β_n فإن هذا الحل يمكن كتابته في الصورة

$$F = F(q_1, q_2, \dots, q_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, t) \qquad (6.5)$$

عندما نحصل على هذا الحل (6.5) نستطيع عندئذ أن نحدد الإحداثيات المعممة لكمية الحركة بواسطة العلاقة (6.4) ، أي بواسطة $p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$.

وأيضا إذا عرفنا من الإحداثيات الجديدة لكمية الحركة P_α مع الثابت β_α فإن

$$Q_\alpha = \frac{\partial F}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta_\alpha} = \gamma_\alpha \qquad (6.6)$$

حيث γ_α ، $\alpha = 1, 2, \dots, n$ مقادير ثابتة.

باستخدام هذه العلاقات نستطيع عندئذ إيجاد q_α كدوال في β_α ، γ_α ، t وهذا يعطي حركة المجموعة.

حالة عدم اعتماد دالة هاميلتون على الزمن Case where Hamiltonian is independent of time.

للحصول على الحل الكامل لمعادلة هاميلتون - جاكوبي يكون من المفيد غالبا أن نفترض حلا على الصورة :

$$F = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n) + K(t) \qquad (6.7)$$

حيث كل دالة في الطرف الأيمن تعتمد فقط على متغير واحد. هذه الطريقة ، المسماة بطريقة فصل المتغيرات ، تكون مفيدة

بصفة خاصة عندما لا تعتمد دالة هاملتون صراحة على الزمن.

عندئذ (6.3) تصبح

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = 0 \qquad (6.8)$$

بالتعويض من (6.7) فى (6.8) نجد أن

$$\frac{dK}{dt} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = 0 \qquad (6.9)$$

حيث S فى (6.9) هو الجزء الذى لا يعتمد على الزمن أى أن

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n) \qquad (6.10)$$

$$\therefore \quad H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = -\frac{dK}{dt} \qquad (6.11)$$

الطرف الأيمن فى (6.11) دالة فى الزمن t فقط والطرف الأيسر دالة فى $q_1, q_2, \dots, q_n$ وبالتالى يوضع كل طرف يساوى ثابت E مثلاً $-\frac{dK}{dt} = E$ وبالتالى

$$K(t) = -Et \qquad (6.12)$$

أيضاً يكون

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E \qquad (6.13)$$

E مقدار ثابت يمثل الطاقة الكلية للمجموعة.

مثال

(أ) اكتب دالة هاملتون لمذبذب توافقى بسيط كتلته m.

(ب) اكتب معادلة هاملتون - جاكوبى المناظرة.

(جـ) استخدم طريقة هاملتون - جاكوبى لتحديد حركة المذبذب.

الحل

(أ) نعتبر q هو احداثى الموضع للمذبذب التوافقى البسيط

فتكون $\dot{q}$ هي سرعته .

طاقة الحركة T وطاقة الجهد V يتعينان من العلاقتين

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad , \quad V = \frac{1}{2} \kappa q^2$$

حيث κ ثابت الزنبرك .

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \kappa q^2$$

كمية الحركة p تكون

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

$$\therefore \dot{q} = \frac{p}{m} \qquad (1)$$

دالة هاملتون هي

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$= p\dot{q} - \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \kappa q^2\right) \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) ينتج

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa q^2 = H(p, q) \qquad (3)$$

(ب) معادلة هاملتون - جاكوبي هي

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q} , q\right)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2 = 0 \qquad (4)$$

(حـ) نفرض حلاً على الصورة

$$F = S(q) + K(t) \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) في (4) نجد أن

$$\frac{dK}{dt} + \frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2 = -\frac{dK}{dt}$$

الطرف الأيمن دالة في t فقط والطرف الأيسر دالة في q فقط،
فيصبح كل طرف يساوي ثابت β مثلاً

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 = \beta \quad ,$$

$$-\frac{dK}{dt} = \beta$$

ومنها نجد أن

$$K = -\beta t \quad , \qquad (6)$$

$$\frac{dS}{dq} = \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}$$

$$\therefore S = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}\, dq \qquad (7)$$

بالتعويض من (6) ، (7) في (5) نجد أن الدالة المولدة تأخذ الصورة

$$F = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}\, dq - \beta t$$

لنعتبر β هي احداثي كمية الحركة الجديدة P . عندئذ يكون لدينا بالنسبة لاحداثي الموضع الجديد

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}\, dq - \beta t\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2}} - t$$

وبما أن الاحداثي الجديد Q هو الثابت γ فإن

$$\therefore \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2}} - t = \gamma$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\beta}{k} - q^2}} = t + \gamma$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{2\beta}{k}}}\right) = t + \gamma$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\gamma)\right]$$

الثابتان β ، γ يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية

ملحوظة. الثابت β يناظر الثابت E ، أى يساوى الطاقة الكلية للمجموعة.

تمارين

(١) حل مثال (١) باستخدام التعريف ، أى أن التحويل
$P = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ، $Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$ يكون تماثيليا
اذا كان

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$$

(٢) اذا كانت $S = S(q_\alpha, P_\alpha, t)$ هى الدالة المولدة فاثبت أن

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad , \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \quad , \quad \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H$$

حيث

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} \quad , \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

(٣) اثبت أن التحويل الآتى يكون تماثيليا $Q = p$ ، $P = -q$

(٤) اثبت أن التحويل

$$p = \sqrt{2P\omega}\,\cos Q \,,$$
$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\,\sin Q$$

يكون قانونى . واذا كانت دالة هاميلتون للمتذبذب التوافقى تعطى فى الصورة

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2$$

حيث $\omega = \sqrt{mK}$. اكتب هذه الدالة بدلالة الاحداثيات الجديدة Q ، P وبين أن Q احداث دورى . اوجد معادلات هاميلتون واثبت أنها تمثل حركة المتذبذب التوافقى .

(٥) اذا كانت الدالة المولدة $F = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \cot Q$ حيث q ، Q الاحداث المعمم القديم والاحداث المعمم الجديد على الترتيب ، m ، ω ثابتين فاوجد التحويل المناظر واثبت أنه تحويل قانونى واوجد دالة هاميلتون فى الاحداثيات الجديدة للمتذبذب التوافقى .

(٦) باستخدام طريقة هاميلتون - جاكوبى حل مسألة كبلر لجسم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن المركز .

(٧) جسم كتلته m يتحرك فى مجال طاقة جهده فى الاحداثيات القطبية الكروية هى $V = -\frac{K \cos \theta}{r^2}$. اكتب معادلة هاميلتون - جاكوبى التى تصف حركته ثم وضح كيف يمكن تحديد حركة الجسم .

(٨) استخدم طريقة هاميلتون - جاكوبى فى حل مسألة جسم مقذوف بسرعة v_0 فى اتجاه يصنع زاوية α مع الافقى واوجد ارتفاع الجسم عن المستوى الافقى المار بنقطة القذف وكذلك معادلة المسار .

حلول بعض التمارين

الباب الأول : تمارين ص٩-١٠

حل (ج) / (هـ) يمكن وصف المنحنى بالمعادلات البارامترية

$x = x(s)$ ، $y = y(s)$ ، $z = z(s)$

حيث s هو البارامتر. أي أن موضع الجسم يتحدد بواسطة احداثي واحد. وبالتالي توجد درجة حرية واحدة.

(د) احداثيات الجسيمين هما (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) أي أن بعدد 4 احداثيات. ولكن المسافة بين هاتين النقطتين تكون ثابتة (وتساوي طول القضيب الجاسئ) أي أن

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2$$

حيث l طول القضيب.

∴ يمكن التعبير عن درجة طليقة بدلالة الثلاثة الأخرى.

∴ عدد درجات الحرية (الطليقة) يساوي 4 - 1 أي ثلاثة درجات.

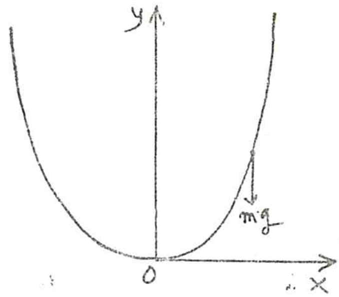
حل (٢) (أ) القوة المؤثرة هي الوزن

$$\underline{F} = -mg\,\underline{j}$$

وبالتالي $dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$

حيث $\underline{r}$ متجه موضع الكتلة ويعطى بـ

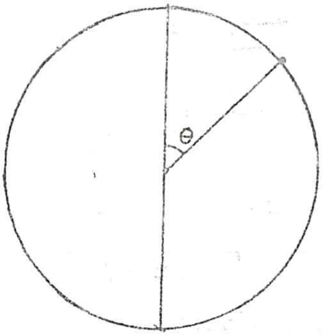
$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$$
$$= x\,\underline{i} + ax^2\,\underline{j}$$



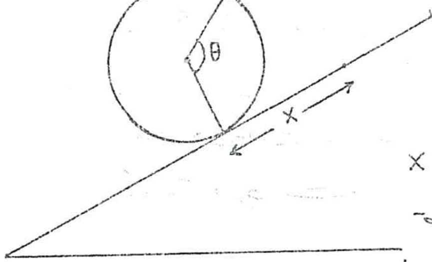
$$\therefore\ d\underline{r} = dx\,\underline{i} + 2ax\,dx\,\underline{j}\ ,\ dW = -2mgax\,dx$$

توجد قوة معممة في الاتجاه الراسي (أي اتجاه $\underline{j}$) ، Φ_y حيث $\Phi_y = -2mgax$

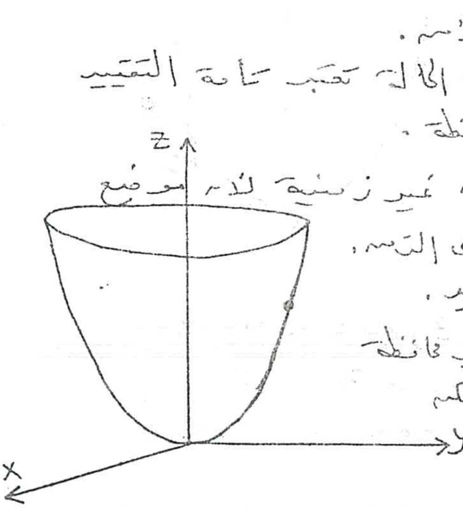
حل (٤)



(أ) متجه موضع الجسيم
يعتمد على θ ولا
يعتمد صراحة على الزمن t
لذلك فإن حركة الجسيم
تعتبر غير زمنية.
وحيث أن الجسيم سيترك
سطح الكرة عند نقطة ما فإن هذه الحركة تكون غير تامة
التقييد.
كذلك هذه الحركة تعتبر حافظة لأن قوة الجاذبية التي
تؤثر عليه اشتقاق من طاقة الجهد أو طاقة الوضع



(ب) المجموعة في هذه
الحالة غير زمنية
لأن موضع الاسطوانة
يعتمد فقط على المسافة x
التي يقطعها مركز الكتلة
والزاوية θ التي تدورها
الاسطوانة حول محورها
ولا يعتمد صراحة على الزمن.
حركة الاسطوانة في هذه الحالة تعتبر تامة التقييد
وكذلك تعتبر مجموعة حافظة.



(جـ) المجموعة في هذه الحالة غير زمنية لأن موضع
الجسم لا يعتمد صراحة على الزمن،
المجموعة تكون تامة التقييد.
وتكون هذه المجموعة غير حافظة
لأن قوة الاحتكاك لا يمكن
اشتقاقها من طاقة الجهد.

الباب الثاني : تمارين ص ٢٠ - ٢٢

حل (١) طاقة الحركة وطاقة الجهد للمجموعة الميكانيكية هما

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2(a+by^2)} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 \quad ,$$

$$V = c + dy^2$$

دالة لاجرانج تعطى بـ

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{a+by^2} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - (c+dy^2)$$

يوجد في هذه الحالة احداثيان عمامان هما x ، y

معادلات لاجرانج هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

حيث $q_1 = x$ ، $q_2 = y$

بالنسبة للاحداثي العمم x تكون معادلة لاجرانج هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\because \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{a+by^2} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

بالتعويض نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{a+by^2}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\dot{x}}{a+by^2} = \text{const.} = A \qquad (1)$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي y هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

حيث

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-b\dot{x}^2 y}{(a+by^2)^2} - 2dy$$

بالتعويض نجد أن

$$\ddot{y} + \frac{b y \dot{x}^2}{(a+by^2)^2} + 2d y = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة (1) فإن (2) تصبح

$$\ddot{y} + bA^2 y + 2d y = 0$$

أو

$$\ddot{y} = -(bA^2 + 2d) y$$

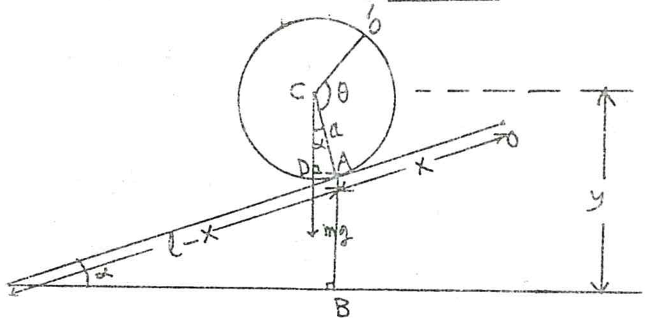
وهي معادلة حركة توافقية بسيطة $\ddot{y} = -w^2 y$

حيث $w = \sqrt{bA^2 + 2d}$ حلها العام

$$y = B \sin(wt + \epsilon)$$

حيث B، ϵ ثابتة يمكن تعيينها من الشروط الابتدائية للحركة.

حل (٧)



نفرض أن الاسطوانة عند بداية الحركة كانت تلامس المستوى المائل عند O. وبعد زمن t نفرض أنها دارت زاوية θ.

حيث أن الحركة تدحرجية بدون انزلاق فإن

$$OA = \overset{\frown}{AO'}$$

$$x = a\theta$$

أي أن (1)

حيث a نصف قطر الاسطوانة.

طاقة حركة الاسطوانة تتكون من جزئين هما طاقة حركة مركز الثقل C وتساوي $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ والطاقة الدورانية حول مركز الثقل C وتساوي $\frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$ حيث I_c هو عزم القصور الذاتي للاسطوانة حول محورها (مركز الثقل C يقع في منتصف المحور)

ويساوي $I_c = \frac{1}{2} m a^2$

اذاً طاقة الحركة T هي

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\theta}^2 \qquad (2)$$

من (1) نجد بالتفاضل بالنسبة للزمن $\dot{x} = a\dot{\theta}$

وتصبح (2) في الصورة

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

طاقة الجهد مع اعتبار المستوى الافقي هو مستوى القياس

تساوي

$$V = mgy$$

حيث

$$y = CD + AB$$

$$= a\cos\alpha + (l - x)\sin\alpha$$

$$\therefore V = mg\left(a\cos\alpha + (l - x)\sin\alpha\right)$$

دالة لاجرانج تعطى من

$$L = T - V$$

$$= \frac{3}{4} m \dot{x}^2 - mg\left[a\cos\alpha + (l - x)\sin\alpha\right]$$

يوجد في هذه الحالة احداثي واحد وهو x ومعادلة

لاجرانج للاحداثي x هي $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

حيث

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\sin\alpha$$

بالتعويض نجد أن

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} - mg\sin\alpha = 0$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$$

اذاً عجلة مركز الثقل تكون ثابتة وتساوي $\frac{2}{3} g\sin\alpha$.

حل (٩)

طاقة الحركة هي

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد المعطاه هي

$$V = -\frac{A}{r}$$

∴ دالة لاجرانج هي

$$L = T - V$$
$$\therefore L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{A}{r}$$

معادلات لاجرانج هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , i = 1, 2$$

حيث $q_1 = r$ ، $q_2 = \theta$

معادلة لاجرانج للاحداثي r هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

حيث

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{A}{r^2}$$

$$\therefore m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + \frac{A}{r^2} = 0 \qquad (1)$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي θ هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

حيث المشتقات الجزئية هي

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

∴ وبالتعويض نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\theta}\right) = 0$$

$$\therefore m r^2 \dot{\theta} = \text{constant} \qquad (2)$$

(1) ، (2) هما معادلتا الحركة.

نوجد القوى المعممة ϕ_r ، ϕ_θ حيث يمكن تعيينها من العلاقتين

$$\phi_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} ,$$

$$\phi_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

ملحوظة : يمكن إيجاد القوى المعممة كذلك من المعادلة

$$\phi_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} , \alpha = 1, 2$$

$$\therefore \phi_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{A}{r^2}$$

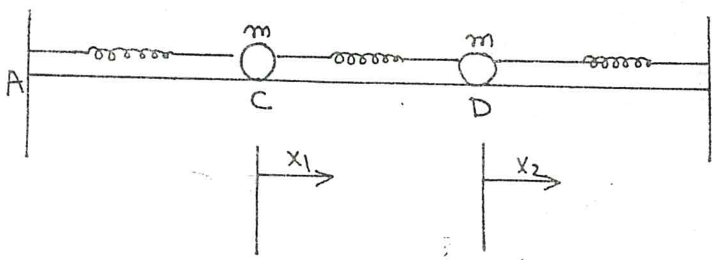
وذلك باستخدام المعادلة (١) ،

$$\phi_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\therefore \phi_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0$$

وذلك باستخدام المعادلة (٢) .

حل (١٤)



طاقة حركة المجموعة T تتعين من

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

طاقة جهد المجموعة V تتعين من

$$V = \frac{1}{2}k x_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k x_2^2$$

لأن الاستطالة في الاسلاك الزنبركية الثلاثة AC ، CD ، DB هي على الترتيب x_1 ، $x_2 - x_1$ ، x_2 .

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} \kappa x_1^2 - \frac{1}{2} \kappa (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} \kappa x_2^2$$

يوجد احداثيان معممان لهذه المجموعة الميكانيكية وهما x_1 ، x_2

ومعادلتي لاجرانج لهما في الصورة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

نوجد المشتقات الآتية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\kappa x_1 + \kappa (x_2 - x_1)$$

$$= \kappa (x_2 - 2x_1) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m \dot{x}_2 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\kappa (x_2 - x_1) - \kappa x_2$$

$$= \kappa (x_1 - 2x_2)$$

بالتعويض نجد أن

$$m \ddot{x}_1 - \kappa (x_2 - 2x_1) = 0 \quad ,$$

$$m \ddot{x}_2 - \kappa (x_1 - 2x_2) = 0$$

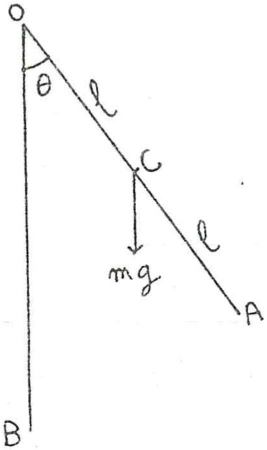
أو هما

$$m \ddot{x}_1 = \kappa (x_2 - 2x_1)$$

$$m \ddot{x}_2 = \kappa (x_1 - 2x_2)$$

وهما معادلتا حركة الكتلتين

حل (١٥)



نفرض أن القضيب OA وطرفه المثبت O ومركز ثقله C وأن القضيب في وضع عام يصنع زاوية θ مع الرأسي OB طاقة حركة القضيب تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

حيث I_0 عزم القصور الذاتي للقضيب حول محور الدوران (محور الدوران مستقيم أفقي أي عمودي على القضيب عند O) ويساوي $I_0 = \frac{4}{3} m l^2$

$$\therefore T = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

طاقة الوضع بالنسبة الى المستوى الأفقي المار بالنقطة O تعطى بـ

$$V = -mgl\cos\theta$$

وتأخذ دالة لاجرانج الصورة

$$L = T - V = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

معادلة لاجرانج تكون

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

حيث

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

وتأخذ معادلة لاجرانج الصورة

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

أو

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{4l}\sin\theta = 0$$

في حالة الذبذبات الصغيرة $\sin\theta \simeq \theta$ وتصبح معادلة الحركة في الصورة $\ddot{\theta} + \frac{3g}{4l}\theta = 0$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يساوي $4\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

الباب الثالث : تمارين ص ٤٦ - ٤٧

حل (٤) طاقة الحركة وطاقة الجهد هما

$$T = mK(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) ,$$

$$V = -2mg \cos q_1$$ V لا تعتمد على السرعات المعممة

$$L = T - V = mK(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) + 2mg\cos q_1$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2mK\dot{q}_1$$

$$\therefore \dot{q}_1 = \frac{p_1}{2mK} \qquad (1)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 2mK\dot{q}_2 \sin^2 q_1$$

$$\therefore \dot{q}_2 = \frac{p_2}{2mK\sin^2 q_1} \qquad (2)$$

حيث أن دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن فان دالة هاملتون لا تعتمد على الزمن أيضا وتساوي الطاقة الكلية أي أن

$$H = T + V$$

$$\therefore H = mK(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) - 2mg\cos q_1$$

بالتعويض من (1) ، (2) في دالة هاملتون نجد أن

$$H = mK\left[\frac{p_1^2}{4m^2K^2} + \frac{p_2^2 \sin^2 q_1}{4m^2K^2\sin^4 q_1}\right] - 2mg\cos q_1$$

$$= \frac{p_1^2}{4mK} + \frac{p_2^2}{4mK\sin^2 q_1} - 2mg\cos q_1$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{p_2^2 \cos q_1}{2mK\sin^3 q_1} - 2mg\sin q_1 , \qquad (3)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0$$

$$\therefore \; p_2 = \text{constant} = c_1 \; ,$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2mK} \; , \qquad (4)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{2mK \sin^2 q_1} \qquad (5)$$

نأخذ من (4) ، (5) ثم نضعها (1) ، (2)

بقسمة (3) على (1) ينتج

$$\frac{\dot{p}_1}{\dot{q}_1} = \frac{dp_1}{dq_1} = \frac{p_2^2 \cos q_1}{p_1 \sin^3 q_1} - \frac{4m^2 gK \sin q_1}{p_1}$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$p_1 \, dp_1 = \left(\frac{c_1^2 \cos q_1}{\sin^3 q_1} - 4m^2 gK \sin q_1 \right) dq_1$$

بالتكامل نحصل على

$$\frac{p_1^2}{2} = \frac{-c_1^2}{2 \sin^2 q_1} + 4m^2 gK \cos q_1 + \text{Const.}$$

$$\therefore \; p_1^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2 q_1} - 8m^2 gK \cos q_1 = \text{Const.} \qquad (6)$$

باستخدام المعادلة (1) أي أن $p_1 = 2mK\dot{q}_1$ في (6) ينتج

$$4m^2K^2 \dot{q}_1^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2 q_1} - 8m^2 gK \cos q_1 = \text{const.}$$

$$\therefore \; \dot{q}_1^2 + \frac{c_1^2}{4m^2K^2} \frac{1}{\sin^2 q_1} - \frac{2g}{K} \cos q_1 = \text{const.}$$

أو أن

$$\dot{q}_1^2 + \frac{c^2}{\sin^2 q_1} - \frac{2g}{K} \cos q_1 = \text{Const.}$$

حيث

$$c^2 = \frac{c_1^2}{4m^2K^2}$$

حل (٧) الجسيم الذي كتلته m ويتحرك حركة توافقية بسيطة تكون طاقة حركته وطاقة جهده هما

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 , \quad V = \frac{1}{2} \kappa x^2$$

حيث κ ثابت.

$$\therefore L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \kappa x^2$$

$$\because p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{p_x}{m} \qquad (1)$$

حيث أن دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن وطاقة الجهد دالة في الاحداثي المعمم x فقط فإن دالة هاملتون لا تعتمد على الزمن أيضا وتساوي الطاقة الكلية أي أن

$$H = T + V$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \kappa x^2$$

بالتعويض من (1) نجد أن دالة هاملتون في الصورة

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa x^2$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} ,$$ نفس المعادلة (1)

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\kappa x \qquad (2)$$

من (1) فإن $p_x = m\dot{x}$ وبالتعويض في (2)

$$\therefore m \ddot{x} = -\kappa x$$

أو $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ، $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$

وهي معادلة حركة الجسيم.

<u>حل (٩)</u>

طاقة الحركة هي

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)$$

طاقة الجهد هي

$$V = f(q_1 - q_2)$$

حيث أن

$$q = q_1 - q_2 \quad ، \quad b = q_1 + q_2$$

بالتفاضل بالنسبة للزمن نجد أن

$$\dot{q} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \quad و \quad \dot{b} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

بالتربيع والجمع نجد أن

$$\dot{q}^2 + \dot{b}^2 = \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\right) + \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\right)$$

$$= 2\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)$$

$$\therefore \quad \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 + \dot{b}^2\right)$$

طاقتا الحركة والجهد بدلالة الاحداثيات الجديدة q ، b والسرعات الجديدة $\dot{q}$ ، $\dot{b}$ تكون في الصورة

$$T = \frac{1}{4}\left(\dot{q}^2 + \dot{b}^2\right) \quad ,$$

$$V = f(q)$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{4}\left(\dot{q}^2 + \dot{b}^2\right) - f(q)$$

$\therefore$ كميتا الحركة الجديدتين p_q ، p_b تعطيان من العلاقتين

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}\dot{q} \quad ,$$

$$p_b = \frac{\partial L}{\partial \dot{b}} = \frac{1}{2}\dot{b}$$

اذاً

$$\dot{q} = 2\, p_q \quad , \quad \dot{b} = 2\, p_b$$

دالة هاملتون هي

$$H = p_q\, \dot{q} + p_b\, \dot{b} - L$$

$$= p_q\, \dot{q} + p_b\, \dot{b} - \frac{1}{4}(\dot{q}^2 + \dot{b}^2) + f(q)$$

$$= 2\, p_q^2 + 2\, p_b^2 - (p_q^2 + p_b^2) + f(q)$$

$$\therefore H = p_q^2 + p_b^2 + f(q) \qquad \ldots\ldots (1)$$

باستخدام معادلات هاملتون نجد

$$\dot{p}_b = -\frac{\partial H}{\partial b} = 0$$

وبالتكامل نجد أن

$$p_b = \text{constant}$$

أي أن كمية الحركة p_b تظل ثابتة.

ومن المعادلة (1) نجد أن

$$p_q^2 = H - p_b^2 - f(q)$$

$$\therefore p_q = \sqrt{H - p_b^2 - f(q)}$$

ومن معادلات هاملتون نجد

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_q} = 2\, p_q$$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = 2\sqrt{H - p_b^2 - f(q)}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\int_{t_0}^{t} dt = \frac{1}{2}\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{H - p_b^2 - f(q)}}$$

اذاً

$$t - t_0 = \frac{1}{2}\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{H - p_b^2 - f(q)}}$$

الباب الرابع: تمارين ٥٤ - ٥٥

حل (١) لطاقة الحركة وطاقة الجهد هما

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2\dot{y}^2) \quad , \quad V = \frac{1}{2}w^2 x^2$$

دالة لاجرانج تكون

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2\dot{y}^2) - \frac{1}{2}w^2 x^2 \qquad (1)$$

نلاحظ أن دالة لاجرانج لا يظهر فيها الاحداثي y صراحة

في هذه الحالة $n=2$ ، $K=1$ ، وتكون دالة راوث

في الصورة

$$R = c_1\dot{\theta}_1 - L$$

حيث $\theta_1 = y$ ، أي $\dot{\theta}_1 = \dot{y}$ ، ونضع $c_1 = c$ ونأخذ

دالة راوث الصورة

$$R = c\dot{y} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2\dot{y}^2) + \frac{1}{2}w^2x^2 \qquad (2)$$

حيث

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -x^2\dot{y}$$

$$\therefore \dot{y} = -\frac{c}{x^2} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على

$$R = -\frac{c^2}{x^2} - \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\frac{c^2}{x^4} + \frac{1}{2}w^2x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{c^2}{x^2} - \dot{x}^2 + w^2x^2\right)$$

لايجاد الاحداثي المهمل x نستخدم معادلة راوث أو لاجرانج

لهذا الاحداثي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = -\dot{x} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{c^2}{x^3} + w^2 x$$

بالتعويض في معادلة راوث نجد

$$-\ddot{x} - \frac{c^2}{x^3} - w^2 x = 0$$

أو

$$\ddot{x} + \frac{c^2}{x^3} + w^2 x = 0$$

نضع $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية وبفصل المتغيرات نجد

$$\dot{x}\, d\dot{x} + \left(\frac{c^2}{x^3} + w^2 x\right) dx = 0$$

بالتكامل نجد أن

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{c^2}{2x^2} + \frac{1}{2} w^2 x^2 = \text{Const.} =$$

بإهمال الثابت

$$\therefore x^2 \dot{x}^2 = c^2 + w^2 x^4 \qquad = 0$$

$$\therefore x\dot{x} = w\sqrt{A^2 - x^4}$$

حيث $A = \frac{c}{w}$

بفصل المتغيرات مرة أخرى نجد أن

$$\frac{x\, dx}{\sqrt{A^2 - x^4}} = w\, dt$$

بالتكامل نحصل على

$$\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{A}\right) = 2wt + B$$

حيث B ثابت

$$\therefore x^2 = A \sin(2wt + B)$$

الباب الخامس: تمارين ص ٦٧ – ٦٨

حل (١) اذا كانت الدالة F في التكامل $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$ لا تعتمد على x (أي

أن $F = F(y, y')$ فانه باستخدام معادلة اويلر

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - F_{y'y}\, y' - F_{y'y'}\, y'' = 0$$

بالضرب في y'

$$\therefore y' F_y - F_{y'y}\, y'^2 - F_{y'y'}\, y' y'' = 0 \qquad (1)$$

نثبت أن الطرف الأيسر يساوي $\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right)$

$$\because \frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y' F_{y'}\right)$$

$$= F_y\, y' + F_{y'}\, y'' - y'' F_{y'} - y' \frac{dF_{y'}}{dx}$$

$$= F_y\, y' - y'\left(F_{y'y}\, y' + F_{y'y'}\, y''\right)$$

$$= y' F_y - y'^2 F_{y'y} - y' y'' F_{y'y'}$$

$\therefore$ (١) تأخذ الصورة

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0$$

بالتكامل نحصل على

$$F - y' F_{y'} = c$$

حيث c مقدار ثابت.

حل (٥) المطلوب إيجاد المنحنى الذي يصل بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) بحيث يكون له أقل طول.

طول المنحنى يعطى بـ

$$I = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

الدالة F في هذه الحالة هي $F = \sqrt{1+y'^2}$

وهي لا تحتوي صراحة على x ولذلك يمكن استخدام تمرين (١) الآن

$$F - y' F_{y'} = c$$

$$\because F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\therefore 1+y'^2 = \frac{1}{c^2}$$

$$\therefore y' = \sqrt{\frac{1}{c^2} - 1} = c_1$$

$$\therefore y = c_1 x + c_2$$

وهي معادلة خط مستقيم. وحيث أنه يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) فتكون معادلته هي

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

وهي نتيجة متوقعة حيث أن الخط المستقيم هو أقصر مسافة بين نقطتين.

حل (٦) السرعة في الاحداثيات الاسطوانية ρ, ϕ, z تكون في الصورة

$$\underline{v} = (\dot{\rho}, \rho\dot{\phi}, \dot{z})$$

$$\therefore \ \upsilon^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

على السطح الاسطواني الدائري فان ρ تكون ثابتة وتساوي نصف قطر الاسطوانة أي أن

$$\rho = const = a$$

$$\therefore \ \dot{\rho} = 0$$

$$\therefore \ \upsilon^2 = a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

$$\therefore \ \upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}$$

أو

$$ds = \sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}\ dt$$

$$\therefore \ s = \int_{s_1}^{s_2}\sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}\ dt \qquad (1)$$

العلاقة (1) تعطي البعد بين نقطتين على سطح اسطواني دائري. لايجاد معادلة الخط الواصل بين هاتين النقطتين حتى يكون هو أقصر بعد بينهما أي اننا نريد أن تكون s أقل ما يمكن. لذلك نكتب معادلتي اويلر للمتغيرين ϕ و z وهما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \ , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

نوجد المشتقات الجزئية للدالة $F = \sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^2\dot{\phi}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} \ , \quad \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} \ , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

وتأخذ معادلتا اويلر الصورة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a^2\dot{\phi}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}}\right)=0\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}}\right)=0$$

بالتكامل نجد أن

$$\frac{a^2\dot{\phi}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}}=\text{Const.}=c_1,$$

$$\frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}}=\text{Const.}=c_2$$

بالقسمة ينتج

$$\frac{a^2\dot{\phi}}{\dot{z}}=\frac{c_1}{c_2}$$

أو

$$a^2\frac{d\phi}{dz}=\frac{c_1}{c_2}$$

$$\therefore\ \frac{dz}{d\phi}=\frac{c_2a^2}{c_1}=c$$

بالتكامل نجد أن

$$z=c\phi+d$$

وهى تمثل حلزون .

حل آخر

$$\because\ S=\int_{S_1}^{S_2}\sqrt{a^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}\ dt$$

ويمكن كتابتها فى الصورة

$$S=\int\sqrt{a^2\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2+1}\ dz=\int\sqrt{1+a^2\phi'^2}\ dz$$

حيث $\phi'=\frac{d\phi}{dz}$

في هذه الحالة الدالة $F=\sqrt{1+a^2\phi'^2}$

ومعادلة اويلر تأخذ الصورة

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi'}\right)-\frac{\partial F}{\partial \phi}=0$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial \phi'}=\frac{a^2\phi'}{\sqrt{1+a^2\phi'^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \phi}=0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{a^2\phi'}{\sqrt{1+a^2\phi'^2}}\right)=0$$

$$\therefore \quad \frac{a^2\phi'}{\sqrt{1+a^2\phi'^2}}=\text{const.}=b$$

بتربيع الطرفين

$$\therefore \quad \frac{a^4\phi'^2}{1+a^2\phi'^2}=b^2$$

$$\therefore \quad a^4\phi'^2=b^2+b^2a^2\phi'^2$$

$$\therefore \quad \phi'^2=\frac{b^2}{a^2(a^2-b^2)}$$

$$\therefore \quad \phi'=\frac{b}{a\sqrt{a^2-b^2}}=\text{const.}$$

$$\therefore \quad \frac{d\phi}{dz}=\text{const.}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{d\phi}=\text{const.}=c$$

$$\therefore \quad z=c\phi+d$$

وهي معادلة حلزون

حل (٨) في هذه الحالة

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\, dx$$

الدالة F في هذه الحالة هي

$$F = y'^2 - y^2$$

معادلة اويلر هي

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

التفاضلات الجزئية تعطي

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y$$

بالتعويض في معادلة اويلر نحصل على

$$2y'' + 2y = 0$$

أو أن

$$y'' + y = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها العام هو

$$y = A\cos x + B\sin x$$

باستخدام الشرطين $y(0) = 0$ ، $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

نجد أن

$$A = 0 \quad , \quad B = 1$$

وتكون المنحنى الذي يجعل التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\,dx$ قيمة قصوى هو

$$y = \sin x$$

حل آخر. حيث أن الدالة $F = y'^2 - y^2$ لا تحتوي صراحة على x فإنه يمكن استخدام تمرين (١) السابق

أي أن

$$F - y' F_{y'} = c$$

حيث

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

بالتعويض نجد أن

$$y'^2 - y^2 - 2y'^2 = c$$

أو أن

$$-y^2 - y'^2 = c$$

باستخدام الشرطين لانستطيع إيجاد الثابت c وحيث أن كل من الدالتين y ، y' حقيقية فإن الثابت c يجب أن يكون سالبا

نضع $c = -a^2$

$$\therefore \; y^2 + y'^2 = a^2$$

$$\therefore \; y' = \sqrt{a^2 - y^2} = \frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل فإن

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \int dx$$

$$\therefore \; \sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) = x + b$$

حيث b ثابت

$$\therefore \; y = a \sin(x + b)$$

يمكننا الآن استخدام الشرطين $y(0) = 0$ ، $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ لتعيين الثابتين a ، b

الشرط الأول $y(0)=0$ يعطي

$$0 = a \sin b$$

حيث أن $a \neq 0$ (لأنه إذا كانت $a=0$ نحصل على الحل الصفري $y \equiv 0$.)

$$\therefore \sin b = 0$$

$$\therefore b = 0$$

الشرط الثاني $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ يعطي

$$1 = a \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore a = 1$$

∴ الدالة التي تجعل التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\, dx$ نهاية صغرى هي

$$y = \sin x$$

وهو نفس الناتج الذي حصلنا عليه بواسطة الحل السابق .

حل (١٠) حيث أن

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (p^2 y'^2 + q^2 y^2)\, dx$$

في هذه الحالة الدالة F تأخذ الصورة

$$F = p^2 y'^2 + q^2 y^2$$

المنحنى الذي يجعل التكامل I قيمة قصوى يحقق معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

نحسب المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2p^2 y' \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2q^2 y$$

بالتعويض في معادلة اويلر نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(2p^2 y'\right) - 2q^2 y = 0$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left(p^2 y'\right) = q^2 y$$

بضرب الطرفين في y نحصل على

$$y\,\frac{d}{dx}\left(p^2 y'\right) = q^2 y^2$$

النهاية الصغرى للتكامل تساوي

$$\int_{x_1}^{x_2} p^2 y'^2\,dx + \int_{x_1}^{x_2} y\,\frac{d}{dx}\left(p^2 y'\right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} p^2 y'^2\,dx + y p^2 y'\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} p^2 y'^2\,dx$$

$$= y p^2 y'\Big]_{x_1}^{x_2}$$

$$= p^2 y y'\Big]_{x_1}^{x_2}$$

وذلك باستخدام التكامل بالتجزئ

∴ النهاية الصغرى للتكامل $I = \int_{x_1}^{x_2} \left(p^2 y'^2 + q^2 y^2\right) dx$

هي

$$p^2 y y'\Big]_{x_1}^{x_2}$$

الباب السادس : تمارين ص ٧٧ - ٧٨

حل (٤) لكي يكون التحويل

$$p = \sqrt{2P\omega}\ \cos Q \ , \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\ \sin Q$$

قانوني نثبت أن $p\,dq - P\,dQ$ تفاضل تام

$$\because\ p\,dq - P\,dQ = \sqrt{2P\omega}\ \cos Q \left[\frac{\sin Q}{\sqrt{2P\omega}}\, dP + \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cos Q\, dQ \right] - P\,dQ$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2Q\, dP + (2\cos^2 Q - 1) P\, dQ$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2Q\, dP + P \cos 2Q\, dQ$$

$$= d\left(\frac{1}{2} P \sin 2Q \right)$$

$\therefore$ التحويل قانوني .

دالة هاملتون معطاه في الصورة

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2$$

وتصبح دالة هاملتون بدلالة الاحداثيات الجديدة P, Q في الصورة

$$H = \frac{2P\omega \cos^2 Q}{2m} + \frac{1}{2} K \left(\frac{2P}{\omega}\right) \sin^2 Q$$

$$= \frac{KP}{\omega} \cos^2 Q + \frac{KP}{\omega} \sin^2 Q = \frac{K}{\omega} P$$

حيث دالة هاملتون لا تحتوي Q فإن Q احداثي دوري

معادلات هاملتون هي

$$\therefore\ \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

$$\therefore\ P = \text{constant} = C$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{k}{w} = \Omega$$

حيث Ω ثابت

بالتكامل:

$$Q = \Omega t + \epsilon$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2P}{w}} \sin Q$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2C}{w}} \sin(\Omega t + \epsilon)$$

$$= A \sin(\Omega t + \epsilon)$$

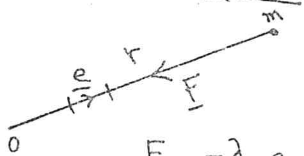
حيث $A = \sqrt{\frac{2C}{w}}$

وهى تمثل حركة أو حل المتذبذب التوافقى

حل (٦) طاقة الحركة وطاقة الجهد يعطيان بـ

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) ,$$

$$V = -\int \underline{F} . d\underline{r} = \int \frac{\lambda}{r^2} dr = \frac{-\lambda}{r}$$



$$\underline{F} = \frac{-\lambda}{r^2} \underline{e}$$

حيث أن $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\lambda}{r} ,$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

حيث أن دالة لاجرانج لا تعتمد صراحة على الزمن وبالتالى دالة هاملتون ودالة الجهد تعتمد على r فقط فإن دالة هاملتون تساوى الطاقة الكلية أى أن:

$$H = T + V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\lambda}{r}$$

بالتعويض عن $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$ ، $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$ فإن دالة هاملتون تكون

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r} = H(p_r, p_\theta, r, \theta)$$

معادلة هاملتون - جاكوبى هى

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, r, \theta\right) = 0$$

اذاً هى

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{\lambda}{r} = 0$$

نفرض حلا فى الصورة

$$F = S_1(r) + S_2(\theta) + K(t)$$

بالتعويض نحصل على

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right] - \frac{\lambda}{r} = -\frac{dK}{dt}$$

الطرف الأيمن دالة فى الزمن t فقط ، الطرف الأيسر دالة فى r, θ فقط

∴ نساوى كل طرف بثابت وليكن β_1

$$\therefore -\frac{dK}{dt} = \beta_1$$

$$\therefore K = -\beta_1 t$$

و

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 = r^2\left[2m\beta_1 + \frac{2m\lambda}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right]$$

الطرف الأيمن دالة فى r فقط والطرف الأيسر دالة فى θ فقط

∴ نساوى كل طرف بثابت وليكن β_2^2

$$\therefore \frac{dS_2}{d\theta} = \beta_2$$

$$\therefore S_2 = \beta_2 \theta$$

و

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2m\beta_1 + \frac{2m\lambda}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}$$

$$\therefore S_1 = \int \sqrt{2m\beta_1 + \frac{2m\lambda}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}\, dr$$

∴ الدالة المولدة تأخذ الصورة

$$F=\int\sqrt{2m\beta_1+\frac{2m\lambda}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr+\beta_2\theta-\beta_1 t$$

بمساواة كل من الثابتين β_1 ، β_2 بكميتي الحركة الجديدتين P_r ، P_θ نحصل على

$$Q_r=\frac{\partial F}{\partial\beta_1}=\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m\beta_1+\frac{2m\lambda}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}}-t=\gamma_1 ,$$

حيث γ_1 ثابت

$$Q_\theta=\frac{\partial F}{\partial\beta_2}=-\int\frac{\beta_2\,dr}{r^2\sqrt{2m\beta_1+\frac{2m\lambda}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}}+\theta=\gamma_2$$

حيث γ_2 ثابت . بوضع $u=\frac{1}{r}$ في التكامل الثاني نجد أن

$$\therefore\int\frac{\beta_2\,du}{\sqrt{2m\beta_1+2m\lambda u-\beta_2^2u^2}}+\theta=\gamma_2$$

$$\therefore\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2m\beta_1}{\beta_2^2}+\frac{m^2\lambda^2}{\beta_2^4}-\left(u-\frac{m\lambda}{\beta_2^2}\right)^2}}=\gamma_2-\theta$$

$$\therefore\sin^{-1}\left[\frac{u-\frac{m\lambda}{\beta_2^2}}{\frac{m\lambda}{\beta_2^2}\sqrt{1+\frac{2\beta_1\beta_2^2}{m\lambda^2}}}\right]=\gamma_2-\theta$$

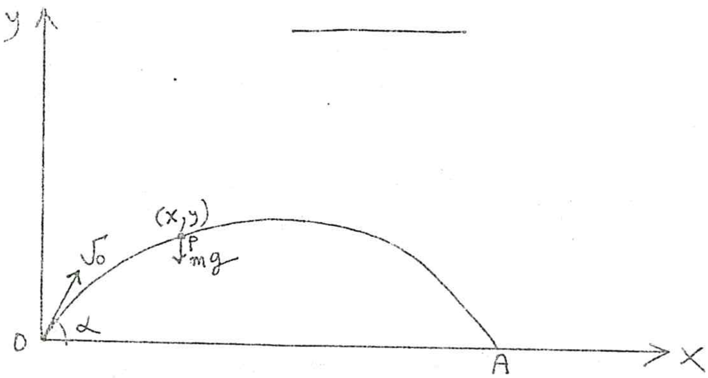
$$u-\frac{m\lambda}{\beta_2^2}=\frac{m\lambda}{\beta_2^2}\sqrt{1+\frac{2\beta_1\beta_2^2}{m\lambda^2}}\,\sin(\gamma_2-\theta)$$

$$\therefore\frac{\beta_2^2}{m\lambda r}-1=\sqrt{1+\frac{2\beta_1\beta_2^2}{m\lambda^2}}\,\sin(\gamma_2-\theta)$$

$$\therefore r = \frac{\dfrac{\beta_2^2}{m\lambda}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2\beta_1\beta_2^2}{m\lambda^2}}\ \sin(\gamma_2 - \theta)}$$

$$= \frac{\dfrac{\beta_2^2}{m\lambda}}{1 - \sqrt{1 + \dfrac{2\beta_1\beta_2^2}{m\lambda^2}}\ \cos\left(\gamma_2 + \dfrac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

وهي معادلة قطع مخروطي



حل (٨)

نفرض أن الجسم قذف من نقطة O وأن A نقطة تقاطع المسار مع المستوى الأفقي المار بنقطة O . نأخذ OA محور X والعمودي عليه في مستوى الحركة المحور OY . نفرض أن الجسم بعد زمن t من بدء الحركة عند الموضع P التي احداثياتها (x,y) .

طاقة حركة الجسم تعطى من

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

طاقة الجهد تعطى من

$$V = mgy$$

دالة لاجرانج تكون

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

كميتا الحركة p_x ، p_y المناظرتين للاحداثيين x ، y على الترتيب تعطيان من العلاقتين

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\,, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

حيث أن دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن وطاقة الجهد دالة في الاحداثي y فقط فإن دالة هاملتون لا تعتمد على الزمن أيضا وتساوي الطاقة الكلية أي أن

$$H = T + V$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

بالتعويض عن السرعات بدلالة كميات الحركة أي أن ($\dot{x} = \frac{p_x}{m}$ ، $\dot{y} = \frac{p_y}{m}$) نجد أن دالة هاملتون تأخذ الصورة

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy = H(p_x, p_y, y)$$

معادلة هاملتون - جاكوبي هي

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, y\right) = 0$$

أي تأخذ الصورة

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right] + mgy = 0$$

نضع الدالة المولدة F في الصورة

$$F = K(t) + S_1(x) + S_2(y)$$

بالتعويض في معادلة هاملتون - جاكوبي نحصل على

$$\frac{dK}{dt} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^2\right] + mgy = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^2\right] + mgy = -\frac{dK}{dt}$$

الطرف الأيمن دالة في t فقط والطرف الأيسر دالة في x ، y

∴ نفرض كل طرف يساوي ثابت β_1

$$\therefore \quad -\frac{dK}{dt} = \beta_1$$

ومنها $\quad K = -\beta_1 t$

$$\therefore \quad \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^2\right] + mgy = \beta_1$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 = 2m(\beta_1 - mgy) - \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^2$$

الطرف الايمن دالة في y فقط والطرف الأيسر دالة في x فقط

∴ نفرض كل طرف يساوي ثابت ، وليكن β_2^2

$$\therefore \quad \frac{dS_1}{dx} = \beta_2$$

ومنها $\quad S_1 = \beta_2 x$

$$\therefore \quad \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^2 = 2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2$$

$$\therefore \quad \frac{dS_2}{dy} = \sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2}$$

$$\therefore \quad S_2 = \int\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2}\; dy$$

∴ الدالة المولدة F تأخذ الصورة

$$F = \int\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2}\; dy + \beta_2 x - \beta_1 t$$

$$\therefore \quad Q_x = \frac{\partial F}{\partial \beta_2} = -\beta_2 \int \frac{dy}{\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2}} + x = \gamma_2 ,$$

$$Q_y = \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = m \int \frac{dy}{\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2}} - t = \gamma_1$$

وذلك بمساواة كل من الثابتين β_1 ، β_2 بكميتي الحركة الجديدتين P_y ، P_x وكذلك مساواة كل من الاحداثيين الجديدين Q_x ، Q_y بالثابتين γ_2 ، γ_1 على الترتيب .

يمكن حساب التكامل الموجود في الصورة السابقة بوضع

$$\chi = 2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2 \quad \text{فإن} \quad d\chi = -2m^2 g\, dy$$

أي أن $\quad dy = -\frac{d\chi}{2m^2 g} \quad$ ونجد أن

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2}} = \int \frac{-d\chi}{2m^2 g\sqrt{\chi}}$$

$$= -\frac{1}{2m^2 g}\int \chi^{-\frac{1}{2}}\, d\chi = -\frac{1}{m^2 g}\sqrt{\chi}$$

$$= -\frac{1}{m^2 g}\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2}$$

وتصبح العلاقتين السابقتين في الصورة

$$\frac{\beta_2}{m^2 g}\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2} + x = \gamma_2 \quad \text{،}$$

$$-\frac{1}{mg}\sqrt{2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2} - t = \gamma_1$$

الثوابت الأربعة β_1 ، β_2 ، γ_1 ، γ_2 تتعين من الشروط الابتدائية للحركة. حيث أن الجسم تقذف من نقطة الأصل O بسرعة v_0 في اتجاه يصنع زاوية α مع المحور OX أي أنه عند $t=0$ يكون $x = y = 0$ ، $\dot{x} = v_0\cos\alpha$ ، $\dot{y} = v_0\sin\alpha$.

وبكتابة المعادلتين أولاً في الصورة

$$\beta_2^2\left[2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2\right] = m^4 g^2 (\gamma_2 - x)^2 \quad \text{،}$$

$$2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2 = m^2 g^2 (t + \gamma_1)^2$$

باستخدام الشروط الابتدائية $x = 0$ ، $y = 0$ عند $t=0$

نجد أن

$$\beta_2^2\left[2m\beta_1 - \beta_2^2\right] = m^4 g^2 \gamma_2^2 \qquad (1)$$

و

$$2m\beta_1 - \beta_2^2 = m^2 g^2 \gamma_1^2 \qquad (2)$$

بمفاضلة الصورتين السابقتين للحصول على مركبتي السرعة $\dot{x}$ ، $\dot{y}$

ونجد أن

$$\beta_2^2\left[-2m^2 g\dot{y}\right] = -2m^4 g^2(\gamma_2 - x)\dot{x} \quad ,\text{و}$$

$$-2m^2 g\dot{y} = 2m^2 g^2(t+\gamma_1)$$

أي أن

$$\beta_2^2\,\dot{y} = m^2 g(\gamma_2 - x)\dot{x} \quad ,$$

$$\dot{y} = -g(t+\gamma_1)$$

عند $t=0$ ، $x=0$ ، $\dot{x} = v_0\cos\alpha$ ، $\dot{y} = v_0\sin\alpha$ ونحصل على

$$\beta_2^2 v_0\sin\alpha = m^2 g\gamma_2 v_0\cos\alpha \quad ,\text{و} \qquad (3)$$

$$v_0\sin\alpha = -g\gamma_1 \qquad (4)$$

من (4) نحصل على قيمة الثابت γ_1 حيث $\gamma_1 = -\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$

المعادلة (3) تربط β_2 ، γ_2 في الصورة

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2^2\tan\alpha}{m^2 g} \qquad (3)'$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$\beta_2^2\left[2m\beta_1 - \beta_2^2\right] = m^4 g^2\,\frac{\beta_2^4\tan^2\alpha}{m^4 g^2}$$

$$2m\beta_1 - \beta_2^2 = \beta_2^2\tan^2\alpha \qquad (5)$$

بالتعويض عن قيمة γ_1 في المعادلة (2) نجد أن

$$2m\beta_1 - \beta_2^2 = m^2 g^2\cdot\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g^2}$$

$$\therefore\ 2m\beta_1 - \beta_2^2 = m^2 v_0^2\sin^2\alpha \qquad (6)$$

من (5) ، (6) نجد أن

$$\beta_2 = \frac{m v_0\sin\alpha}{\tan\alpha} = m v_0\cos\alpha$$

ومن (6) نجد أن

$$\therefore\ 2m\beta_1 = m^2 v_0^2\cos^2\alpha + m^2 v_0^2\sin^2\alpha = m^2 v_0^2$$

$$\therefore\ \beta_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

بالتعويض عن β_2 في $(3)'$ نحصل على قيمة الثابت γ_2

$$\therefore \gamma_2 = \frac{m^2 v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{m^2 g} = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

لإيجاد ارتفاع الجسم عن المستوى الأفقي المار بنقطة القذف O وهو y نستخدم العلاقة السابقة

$$2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2 = m^2 g^2 (t + \gamma_1)^2$$

بالتعويض عن قيم الثوابت β_1 ، β_2 ، γ_1 نجد أن

$$2m\left[\frac{1}{2} m v_0^2 - mgy\right] - m^2 v_0^2 \cos^2\alpha = m^2 g^2 \left[t - \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right]^2$$

$$\therefore v_0^2 \sin^2\alpha - 2gy = g^2 t^2 + v_0^2 \sin^2\alpha - 2 g t v_0 \sin\alpha$$

$$\therefore y = (v_0 \sin\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها عند دراستنا لحركة المقذوفات فيما سبق.

لإيجاد معادلة المسار نستخدم العلاقة السابقة

$$\beta_2^2 \left[2m(\beta_1 - mgy) - \beta_2^2\right] = m^4 g^2 (\gamma_2 - x)^2$$

بالتعويض عن قيم الثوابت β_1 ، β_2 ، γ_2 نجد أن

$$m^2 v_0^2 \cos^2\alpha \left[2m\left(\frac{1}{2} m v_0^2 - mgy\right) - m^2 v_0^2 \cos^2\alpha\right] = m^4 g^2 \left[\frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} - x\right]^2$$

$$\therefore v_0^2 \cos^2\alpha \left[v_0^2 - 2gy - v_0^2 \cos^2\alpha\right] = v_0^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha + g^2 x^2 - 2 g v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\, x$$

$$\therefore -2gy v_0^2 \cos^2\alpha = g^2 x^2 - 2 g v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\, x$$

$$\therefore y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

وهي نفس معادلة المسار التي سبق الحصول عليها عند دراستنا لحركة المقذوفات فيما سبق.