حساب التفاضل والتكامل

II

المحتويات

الفصل الأول
التكامل غير المحدد

مقدمة :

درسنا من قبل اشتقاق دالة ما فى فترة معطاة (نطاق تعريف الدالة) ، وسندرس فى هذا الفصل العملية العكسية لعملية الاشتقاق. بمعنى أنه يعطى لنا دالة ما $f(x)$ على فترة مفتوحة (a,b) ويطلب منا إيجاد دالة أخرى $F(x)$ على نفس الفترة بحيث يكون $F'(x)=f(x)$.

سوف نرمز لتلك الدالة المطلوب إيجادها بالرمز : $\int f(x)d(x)$ ونقرأ "التكامل غير المحدد" للدالة $f(x)$. وهذه التسمية جاءت نتيجة للارتباط الوثيق بين ما نسميه "الدالة المقابلة" و "التكامل المحدد" الذى سوف نتناوله بالدراسة فى فصل لاحق.

ولقد اكتشف التكامل المحدد فى أواخر القرن الثامن عشر بواسطة مجموعة من العلماء أمثال ريمان - ليمنتر - داربو وغيرهم ، وذلك فى محاولة لإيجاد مساحات الأشكال الهندسية المختلفة وأطوال المنحنيات وحجوم الأجسام المختلفة وغير ذلك من المشاكل الرياضية. أما مفهوم التكامل غير المحدد فإنه قدم واكتشف وطور كوسيلة لحساب التكامل المحدد.

(1-1) الدالة المقابلة :

لتكن $f(x)$ دالة معرفة فى فترة مفتوحة (a, b) من خط الأعداد ومطلوب منا البحث عند دالة أخرى $F(x)$ تحقق العلاقة :

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \qquad (1-1)$$

"تسمى الدالة $F(x)$ إن وجدت "دالة مقابلة" للدالة $f(x)$."

فمثلا : الدالة $F(x)=x^5$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=5x^4$ لأن $F'(x)=f(x)$.

والدالة $F(x)=\sin x$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=\cos x$.

(1-2) بعض خواص الدالة المقابلة :

خاصية 1 : إذا كانت $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ وكان أ ثابت فإن $\psi(x)=F(x)+c$ تكون أيضاً دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

البرهان : الدالة $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ، لذا فإن $F'(x)=f(x)$ وحيث أن $\psi(x)=F(x)+c$ فإن

$\psi'(x)=F'(x)=f(x)$ إى أن $\psi(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

مثال : رأينا أن $F(x)=x^5$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=5x^4$ لأن $F'(x)=f(x)$ الدالة $\psi(x)=x^5+12$ هى أيضا دالة مقابلة للدالة $f(x)$ كذلك الدوال $x^5-7,\ x^5+\sqrt{2},\ x^5+d$ أى أنه يوجد عدد لا نهائى من الدوال المقابلة معطاة $f(x)$.

خاصية 2 : إذا كانت كل من $F(x),\psi(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ فى فترة ما فإن

$$\psi 9x) - F(x) = const.$$

البرهان : من المعطيات نجد أن

$$F'(x) = \psi'(x) = f(x).$$

ضع $\phi(x) = \psi(x) - F(x)$ يكون $\phi'(x) = \psi'(x) - F'(x) = 0$ مما يعنى أن $\phi(x) = const.$.
من خاصية (1) ، (2) يتضح وجود عائلة من الدوال المقابلة لدالة ما $f(x)$. ونعبر عن هذه العائلة بالصورة : $F(x) + const$ حيث تختلف قيمة الثابت من دالة مقابلة إلى أخرى ، وهذا يعنى أنه لا يعتمد على المتغير x وتتحدد قيمته إذا أعطى شرط إضافى تحققه الدالة المقابلة.

مثال : $F(x) = \sin x + c$

هى عائلة الدوال المقابلة للدالة $\cos x$. ولكن الدالة $\cos x$ التى تحقق الشرط $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

والدالة $\chi(x) = \sin x + 1$ هى الدالة المقابلة للدالة $\cos x$ التى تحقق الشرط $\chi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ وهكذا ....

تعريف :

"التكامل غير محدد الدالة $f(x)$ هو الصورة العامة لأى دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ويرمز له بالرمز $\int f(x) d(x)$. ويقرأ متكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x."

وإذا كانت $\phi(x)$ أى دالة مقابلة للدالة $f(x)$ فإن :

(2-1) $\int f(x) d(x) = \phi(x) + c$ وحيث أن $\phi'(x) = f(x)$ فإن

(3-1) $\int \phi'(x) d(x) = \phi(x) + c$

أمثلة توضيحية :

(1) ليكن $\phi(x) = x^2$ فإن $\phi'(x) = 2x$ لذا فإن $\int 2x dx = x^2 + c$

(2) ليكن $F(x) = \sin x$ فإن $F'(x) = \cos x$ لذا فإن $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(3) إذا كان $\psi(x) = \tan x$ فإن $\psi'(x) = \sec^2 x$ وعليه فإن $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

(4) نعلم أن الدالة $g(x) = e^x$ تحقق العلاقة $g'(x) = e^x$ وبذلك يكون $\int e^x dx = e^x + c$

(5) ليكن $h(x) = e^{x^2}$ فإن $h'(x) = e^{x^2} .2x$ لذا فإن $\int e^{x^2} .2x \, dx = e^{x^2} + c$

من تعريف التكامل غير المحدد يمكن مباشرة برهان قوانين التكامل ، وهى مدونة فى الجدول التالى حتى يسهل الرجوع إليها عند لضرورة. يبقى هنا أن نعطى تفسيراً هندسياً لثابت التكامل c ، لذلك نعتبر المثال التالى :

نرسم مجموعة الدوال المعرفة بالمعادلة $y = x^2 + c$ فنجدها عبارة عن المنحنى $y = x^2$ منزلقا بالمقدار c إلى أعلى أو إلى أسفل حسب إشارة c كما بالرسم.

إذا رسمنا مستقيماً يوازى المحور oy ليقطع هذه المنحنيات؟ ثم رسمنا من نقاط التقاطع مماسات للمنحنيات فإن المماسات تكون متوازية وميل كل منها $\frac{dy}{dx}=2x$ من ذلك نستنتج أن $y=\int 2x\,dx$ تدل على أحد المنحنيات $y=x^2+c$.

f(x)	$\int f(x)\,dx$
$x^n, n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\sec^2 x$	$\tan x+c$
$\text{sosec}^2 x$	$-\text{cotan}\, x+c$
$\sec x.\tan x$	$\sec x+c$
$\text{cosec}\, x.\tan x$	$-\text{cosec}\, x+c$
e^x	e^x+c
$\sinh x$	$\cosh x+c$
$\cosh x$	$\sinh x+c$
$\text{sech}^2 x$	$\tanh x+c$
$\text{socech}^2 x$	$-\text{cotan}\, x+c$

(3-1) خواص التكامل غير المحدد :

نظرية (1-1) : ليكن $\psi'(x)=g(x), \phi'(x)=f(x)$ وليكن c ثابت فإن :

(1) $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(2) $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx.$

البرهان :

(1) اعتبر الدالة $\psi(x)+\phi(x)$ فيكون :

$$[\psi(x)+\phi(x)]'=\psi'(x)+\phi'(x)=g(x)+f(x)$$

وبالتالى فإن $\psi(x)+\phi(x)$ هى دالة مقابلة للدالة $g(x)+f(x)$ أى أن :

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\phi(x)+\psi(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

(2) اعتبر الدالة $c.\phi(x)$ فإن :

$$[c.\phi(x)]'=c.\phi'(x)=c.f(x)$$

ولذلك فإن $c.\phi(x)$ هى الدالة المقابلة للدالة $c.f(x)$ وبالتالى فإن

$$\int c.f(x)dx = c.\phi(x) + d = c.\int f(x)dx$$

ملاحظات :

(1) النظرية السابقة تمدنا بأحدى القواعد الأساسية لإجراء عملية التكامل ويمكن صياغتها كما يلى :

"تكامل مجموع دالتين = مجموع تكاملى الدالتين ،
تكامل ثابت مضروباً فى دالة = الثابت مضروباً فى تكامل الدالة"

(2) يمكننا صياغة النظرية السابقة بصورة عامة كما يلى :

لتكن $f(x), g(x)$ معرضتين كما سبق وليكن c_1, c_2 ثابتتين فإن :

$$\int [c_1.f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int f(x)dx + c_2.\int g9x)dx$$

(3) القاعدة السابقة تعطينا خاصية هامة هى "الخاصية الخطية" للدوال التى يوجد تكامل لها.

(4-1) الصورة القياسية :

$$(1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$(2) \int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

الصورة القياسية (01) صحيحة لجميع قيم n الموجبة والسالبة والكسرية ماعدا $n = -1$ حيث نستخدم فى الحالة $n = -1$ الصورة (2).

أمثلة مباشرة :

1- $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$ $\quad n = 5$

2- $\int dx = \frac{x^2}{2} + c$ $\quad n = 1$

3- $\int sx = x + c$ $\quad n = 0$

4- $\int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + c$ $\quad n = \sqrt{2}$

5- $\int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + c$ $\quad n=-3$

$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c$ $\quad n = +\frac{2}{3}$

أمثلة مباشرة (بها أكثر من دالة) :

هنا سوف نطبق الخاصية الخطية للتكامل والتى سبق صياغتها فى نظرية (1-1).

مثال : أوجد قيمة التكامل $\int [3x^2 + 5x - 1]dx$

الحل : سوف نرمز للتكامل المعطى بالرمز I وذلك للاختصار.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(3x^2+5x-1\right)dx \\
&= 3\int x^2dx + 5\int xdx - \int dx \\
&= x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c.
\end{aligned}
$$

يلاحظ فى هذا المثال أن الدالة المكاملة من البساطة بحيث لا تحتاج للاعتماد على قاعدة أو طريقة معينة لتحويلها إلى أحدى الصور القياسية. وفيما يلى نعطى بعض الطرق والأساليب التى تفيد فى حالات الدوال الأكثر تعقيداً والتى سوف نراها من خلال أمثلة.

(5-1) طرق التكامل :

من المشاكل التى تقابلنا عادة لإيجاد تكاملات الدوال مشكلة تحويل الدالة المراد تكاملها إلى احدى الصور القياسية. لذلك سنقوم بدراسة عدة طرق لإيجاد التكامل مثل :

1- طرق أولية.

2- طريقة التعويض.

3- طريقة التكامل بالتجزئ

4- طريقة الاختزال.

1- الطرق الأولية للتكامل :

نقصد بالطرق الأولية استخدام العمليات الأولية مثل الضرب والقسمة وفك الأقواس وخلافه. وسنوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال : أوجد

$$I = \int \frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2}dx$$

الحل : واضح أن

$$\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2} = \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2} = x-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$

ولذلك يكون

$$
\begin{aligned}
I &= \int x\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{dx}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x + \log|x| + \frac{1}{x} + c
\end{aligned}
$$

حيث c ثابت إختيارى.

مثال : احسب قيمة التكامل

$$I = \int \sqrt{x}\,(x+1)dx$$

الحل

$$I=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$
$$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$$

تمرينات (1-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int (x^2-1)dx$ 2- $\int (x-1)^2 dx$

3- $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ 4- $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

5- $\int \frac{(2x+1)^2}{x}dx$ 6- $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^2}dx$

7- $\int x(x-1)^2 dx$ 8- $\int \frac{4x^2+7}{\sqrt{x}}dx$

9- $\int \left[\sqrt{7x}+\frac{3}{\sqrt{5x}}\right]dx$ 10- $\int (x+\frac{1}{x})^2 dx$

11- $\int \frac{x(x-1)+5}{x}dx$ 12- $\int \frac{1}{x}(x+1)^3 dx$

13- $\int (2x+1)^2(x-6)^2 dx.$

2- طريقة التعويض :

كما أشرنا فى البند السابق إلى أن صعوبة إيجاد التكامل هى فى وضع الدالة المكاملة فى صورة جدولية ، وطريقة التعويض هى أحدى الطرق الهامة التى يمكن بها وضع الدالة المكاملة بصورة يصلح معها استخدام الصور القياسية. ولتوضيح الفكرة :

ليكن $F'(x)=f(x)$ فإن $\int f(x)dx=F(x)+c$ وإذا كانت كل من $f,\ \ F$ دالة فى المتغير y وكان

$$\frac{d}{dy}[F(y)]=F'(y)=f(y) \quad \text{فإن} \quad \int f(y)dy=F(y)+c$$

وإذا فرضنا أن y دالة فى المتغير x وليكن $y=\phi(x)$ فإن $\frac{dy}{dx}=\phi'(x)$ وهى تكافىء $dy=\phi'(x)dx$

بالتعويض عن y بدلالة x ينتج أن

$$\int f[\phi(x)]\,\phi'(x)\,dx=F[\phi(x)]+c$$

وسوف نطبق هذا القانون فى حالاته الخاصة :

حالات خاصة :

1- الصور القياسية :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

بوضع $x = \phi(y), \quad dx = \phi'(y)dy$ نحصل على $\int [\phi(y)]^n\, \phi'(y)\,dy = \frac{[\phi(y)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

2- الصورة القياسية :

$$\int \frac{dy}{y} = \log|y| + c$$

بوضع $y = \phi(x), \quad dy = \phi'(x)dx$ نحصل $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \log|\phi(x)| + c$

أمثلة :

1- أوجد $\int (x^2+3)^5\, x\,dx$

الحل **:** يمكن إتباع الطرق الأولية مثل فك $(x^2+3)^5$ باستخدام نظرية ذات الحدين وضرب الناتج فى x ثم التكامل حدا حدا.

ويمكننا استخدام التعويض كما يلى :

ضع $\phi(x) = x^2+3$ يتضح أن $\phi'(x) = 2x$

نكتب التكامل على الصورة $I = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^5\,(2x)\,dx$

واستخدم القاعدة

$$\int [\phi(x)]^n\,.\phi'(x)\,dx = \frac{[\phi(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث $\phi(x) = x^2+3, \quad n = 5$ ينتج أن $I = \frac{1}{2}.\frac{[x^2+3]^6}{6} + c$

$$= \frac{1}{12}[x^2+3]^6 + c$$

صورى أخرى للحل : ضع

$$y = x^2+3$$
$$dy = 2x\,dx$$
$$\therefore I = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^5\,(2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int y^5\,dy = \frac{1}{12}y^6 + c$$
$$= \frac{1}{12}(x^2+3) + c$$

2- أوجد $\int \sin^3 x.\cos x\,dx$

الحل :

ضع $y = \sin x$ نجد أن

$$dy = \cos x\,dx$$
$$\therefore I = \int y^3\,dy = \frac{y^4}{4} + c = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$$

3- أوجد $\int \frac{1}{x}\log x\,dx,\ x>0$

الحل :

نفرض أن $y=\log x$ نحصل على

$$dy=\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore I=\int \log x.\frac{1}{x}dx=\int y\,dy=\frac{y^2}{2}+c.$$

$$=\frac{1}{2}[\log x]^2+c.$$

4- أوجد $\int \frac{e^x}{\sqrt{ye^x+1}}sx$

الحل :

بوضع $y=e^x+1$ نحصل على

$$dy=e^x+1$$

$$\therefore I=\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$$

$$=\int y^{-\frac{1}{2}}dy=2y^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=2\sqrt{e^x+1}\quad +c$$

5- أوجد $\int \frac{3x\,dx}{x^2-1};\quad |x|\neq 1$

الحل :

بفرض أن $y=x^2-1$ ينتج أن $dy=2x\,dx$

نقوم بتعديل البسط فى الدالة المكاملة :

$$I=\frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{dy}{y}=\frac{3}{2}\log|y|+c$$

$$=\frac{3}{2}\log\left|x^2-1\right|+c.$$

ملاحظة : الصورة القياسية

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx=\log|\phi(x)|+c$$

يمكن صياغتها كما يلى :

"إذا كانت الدالة المراد تكامله على صورة كسر ، بحيث أن البسط تفاضل المقام فإن التكامل هو لوغاريتم المقام".

6- أوجد $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x+1}dx$

الحل : نلاحظ أن البسط تفاضل المقام فإذا كان $\phi(x) = \tan x + 1$ فإن $\phi'(x) = \sec^2 x$ وبالتالى يكون

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x + 1} dx = \log\left|1 + \tan x\right| + c.$$

تمرينات (2-1)

1- $\int \left(x^2 + 5\right)^3 x\, dx$

2- $\int \sqrt{x^3 + 5}\, x^2\, dx$

3- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$

4- $\int \sqrt[3]{5 - 4x}\, dx$

5- $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx$

6- $\int \frac{dx}{\sqrt{5x + 7}}$

7- $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$

8- $\int \sin^5 x \cos x\, dx$

9- $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

10- $\int \sin 2x \cos 2\, dx$

11- $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

12- $\int \frac{dx}{x\left(\log x\right)^2}$

13- $\int \frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^3} dx$

14- $\int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$

15- $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2 + 1} dx$

16- $\int \frac{x + 5}{x + 1} dx$

17- $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

18- $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2X + 3} dx$

19- $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 2}$

20- $\int \frac{dx}{x\left(\log x + 2\right)}$

(6-1) تكاملات الدوال المثلثية :

الصور القياسية لهذه التكاملات :

1- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

2- $\int \cos\, x\, dx = \sin x + c$

3- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

4- $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\text{cotan}\, x + c$

5- $\int \sec x \tan x\, dx = \tan x + c$

6- $\int \text{cosec}\, x\ \text{cotan}\, x\ dx = -\text{cosec}\, x + c$

وهذه الصور يمكن كتابتها على صورة عامة باستخدام المتغير y بدلا من x. فمثلا

$$\int \sin y\ dy = -\cos y + c$$

وإذا كانت y دالة فى المتغير x أى أن $y = \phi(x)$ فإن $dy = \phi'(x)dx$

وبالتعويض ينتج أن

$$\int \sin[\phi(x)].\phi'(x)\, dx = -\cos[\phi(x)] + c$$

وبالمثل لبقية الصور القياسية :

حالة خاصة :

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

حيث a, b مقادير ثابتة.

وهذا صحيح لأنه بفرض أن $y = ax + b$ فإن

$$dy = a.dx$$

$$\therefore I = \frac{1}{a}\int \sin y\ dy = -\frac{1}{a}\cos y + c$$

$$= -\frac{1}{a}\cos[ax+b] + c$$

أمثلة

1- أوجد

1- $\int \sin 3x\, dx$ 2- $\int \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right)dx$

الحل :

1- $\int \sin\ 3x\ dx = -\frac{1}{3}\cos\ 3x + c.$

2- $\int \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right)dx = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + 4\right) + c$

2- أوجد

1- $\int \tan x\ dx$ 2- $\int \text{cotan}\, x\ dx$

الحل :

1- $\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

والدالة المكاملة فيها البسط تفاضل المقام

$$\therefore I = -\log|\cos x| + c$$
$$= \log\left|[\cos x]^{-1}\right| + c$$
$$= \log|\sec x| + c$$

وبالمثل

2- $\int \cot an\, x \; dx = \log|\sin x| + c$

3- أوجد

1- $\int x \sin x^2 \; dx$ 2- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} \; dx$

الحل :

1- $$\int x \sin x^2 \; dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2 . (2x) \; dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

2- $$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} \; dx = 2\int \cos\sqrt{x} . \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$
$$= 2\sin\sqrt{x} + c$$

4- أوجد

1- $\int (1 + \tan x)^2 dx$ 2- $\int (\sec x - \tan x)^2 \; dx$

الحل :

1- $I = \int \left(1 + 2\tan x + \tan^2 x\right) dx$

ولكن

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\therefore I = \int \sec^2 x \; dx + 2\int \tan x \; dx$$
$$= \tan x + 2\log|\sec x| + c$$

2- $I = \int \left[\sec^2 x + \tan^2 x - 2\sec . \tan x\right] dx$

بوضع

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

نجد أن

$$I = \int \left[2\sec^2 x - 2\sec x . \tan x - 1\right] dx$$
$$= 2\tan x - 2\sec x - x + c$$

(7-1) تكاملات على الصورة :

$$\int \sin^n x \; dx, \quad \int \cos^n x \; dx, \quad \int \sin^m x \cos^n x \; dx$$

حيث أن n أو m أو كلاهما فردى

إذا كانت n فردية فإن (n-1) زوجية لذا نستخدم المتطابقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ لتحويل دالة الجيب إلى جيب التمام أو العكس.

أمثلة

1- أوجد $\int \sin^5 x\ dx$

الحل :

$$I = \int \sin^4 x . \sin x\ dx$$
$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x\ dx$$
$$= \int \left[1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right] \sin x\ dx$$

ولكن

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$
$$\therefore I = -\int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\left(-\sin x\right) dx$$
$$= -\int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) d(\cos x)$$

بوضع $y = \cos x$ نجد أن

$$I = -\int \left(1 - 2y^2 + y^4\right) dy$$
$$= -\left(y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right) + c$$
$$= -\left(\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right) + c$$

2- أوجد $\int \sin^4 x\ \cos^3 x\ dx$

الحل : نكتب التكامل على الصورة

$$I = \int \left(y^4 - y^6\right) dy$$
$$I = \int \sin^4 x\ \cos^2 x . \cos x\ dx$$
$$= \int \sin^4 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x\ dx$$
$$= \int \left(\sin^4 x - \sin^6 x\right) d \sin x$$

بوضع $y = \sin x$ نحصل على

$$I = \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7 + c$$
$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\sin^2 x\right) \sin^5 x + c.$$

(8-1) تكاملات على الصور :

$\int \sin^n x\, dx, \quad \int \cos^m x\, dx, \quad \int \sin^n x \cos^m x\, dx$

حيث كلا من m, n زوجية.

فى هذه الحالة نستخدم قواعد التحويل لضعف الزاوية

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

أمثلة

1-

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c \\ &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c.\end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}(x + \sin x\, \cos x) + c.\end{aligned}$$

النتائج السابقة يمكن أن تحفظ كقواعد للتكاملين

$\int \sin^2 x\, dx, \quad \int \cos^2 x\, dx.$

3- أوجد $\int \sin^2 x\, \cos^2 x\, dx$

الحل : نعلم أن

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\therefore \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)$$

ولكن

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)$$

$$\therefore \sin^2 x\cos^2 = \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(1+\cos 4x\right)$$

$$= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

$$\therefore \int \sin^2 x\ \cos^2 x\ dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

تمرينات (3-1)

1- $\int \sin^4 4x\ dx$

2- $\cos\left(2x+1\right)dx$

3- $\int x\sin x^2\ dx$

4- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\ dx$

5- $\int \sec^2 2x\ dx$

6- $\int \tan 2x\ dx$

7- $\int x\sec^2 x^2\ dx$

8- $\int \sec^3 x\ \tan x\ dx$

9- $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$

10- $\int \text{cotan}\, 3x\ dx$

11- $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x+1}}dx$

12- $\int \sin^2 x\cos^3 x\ dx$

13- $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

14- $\int \tan^2 x\sec^2 x\ dx$

15- $\int \cos^3 x\ dx$

16- $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$

17- $\int \tan^3 x\ \sec x\ dx$

18- $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$

19- $\int x\sin^3 x^2\ dx$

20- $\int \frac{\sin^4}{\sqrt{\tan x}}dx$

21- $\int \cos^4 x\ dx$

22- $\int \sin^4 x\ dx$

23- $\int \sin^2 2x\cos^2 2x\ dx$

24- $\int \sin^3 x\ \cos^2\ dx$

25- $\int \sin^6 x\ dx$

26- $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$

(9-1) تكاملات تحتوى دوال أسية وزائدية:

نعلم أن $\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = ae^{ax}$ فإن

1- $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

وحيث أن $\frac{d}{dx}\left(e^{\phi(x)}\right) = e^{\phi(x)}.\phi'(x)$ فإن

2- $\int e^{\phi(x)}\phi'(x)\,dx = e^{\phi(x)} + c$

كذلك نعلم أنه لأى ثابت a يكون $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x.\log a$ فإن

3- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x + c$

أمثلة :

من المعلوم أن $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ لذا يكون

4- $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$

5- $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

6- $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh^2 x + c$

7- $\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = \operatorname{cotanh} x + c$

أمثلة

1- أوجد $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$

الحل : نفرض أن $\phi(x) = \cos 2x$ نجد أن

$$\phi'(x) = -2\sin^2 x$$

$$\therefore I = \int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{\cos 2x}(-2\sin 2x)\,dx)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\cos 2x} + c$$

2- أوجد $\int \frac{e^{2x}+4}{e^x}$

الحل :

$$I = \int e^x\,dx + 4\int e^{-x}\,dx$$

$$= e^x - 4e^{-x} + c$$

$$= \frac{e^{2x}-4}{e^x} + c$$

3- أوجد $\int e^x \cosh x\,dx$

الحل :

$$I = \int e^x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(e^{2x} + 1\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2} + x\right] + c$$

تمارين (4-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int e^{4x}\, dx$

2- $\int a^{4x}\, dx$ (a ثابت)

3- $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4- $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

5- $\int e^x \sinh x\, dx$

6- $\int \cos h^2 x\, dx$

7- $\int e^{2x} \operatorname{sech}^2 x\, dx$

8- $\int \operatorname{sech}^2 2x\, dx$

9- $\int x \cosh x^2\, dx$

10- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \tanh \sqrt{x}\, dx$

11- $\int e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$

12- $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

(10-1) تكاملات تعطى دوالا مثلثية عكسية :

سبق بنا تقديم ما يسمى بالدوال المثلثية العكسية وهى

$\sin^{-1} x, \quad \cos^{-1} x, \quad \tan^{-1} x, \ \ldots$

حيث $y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin^{-1} y$ بحيث أن $-1 \le x \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ وبالمثل أمكننا تعريف بقية تلك المجموعة من الدوال. ونعلم أيضا أن :

(i) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad :\left(|x| < 1\right)$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \left(|x| < 1\right)$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\cot an^{-1} x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$

من قوانين الاشتقاق السابقة نحصل على قواعد التكاملات الآتية :

1- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c = -\cos^{-1}\frac{x}{a} + c \quad \left(|x| < 1\right)$

2- $\frac{dx}{a^a + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a}\cot an^{-1}\frac{x}{a} + c$

ويمكننا كالمعتاد الحصول على صور عامة لهذه الصور السابقة إذا استبدلنا x بمتغير آخر وليكن $y=\phi(x)$.

أمثلة

1- أحسب قيمة التكاملات

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ b) $\int \frac{dx}{1+25x^2}$

الحل :

a) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

استخدم التعويض

$$y=2x$$
$$dy=2dx$$
$$\therefore I=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}y+c$$
$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}2x+c$$

b) $I=\int \frac{dx}{1+25x^2}$

نضع $y=5x$ نحصل على $dy=5dx$

$$\therefore I=\frac{1}{5}\int \frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{5}\tan^{-1}5x+c$$

2- أوجد قيمة

1- $\int \frac{dx}{16+9x^2}$ 2- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

الحل :

$$I=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{16}{9}+x^2}=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+x^2}$$
$$=\frac{1}{9}-\frac{3}{4}\tan^{-1}\frac{3x}{4}+c$$
$$=\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{3x}{4}+c$$

2- $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2}+c$

3- أوجد

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}dx$$

ضع $y = e^x$ نجد أن

$$dy = e^x d^x$$

$$\therefore I = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$= \sin^{-1} y + c$$
$$= \sin^{-1} e^x + c$$

(11-1) تكاملات تؤدى إلى دوال زائدية عكسية :

نعلم أن

1- $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2- $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad x > 1$

3- $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}; \quad |x| < 1$

4- $\frac{d}{dx}\text{cotanh}^{-1} x = \frac{1}{x^2-1}; \quad |x| > 1$

من ذلك يمكننا اشتقاق صور تكاملات تؤدى إلى دوال زائدية عكسية :

1- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$

2- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$

3- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + c$

4- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} + c$

الصورتان (4)، (3) سوف تدرسان بطريقة آخرى فيما بعد ، كما وأن جميع الصور لهالا تكاملات بصورة لوغاريتمية وكذلك سندرس هذه التكاملات باستخدام طرق التعويض فى الفصل القادم.

مثال (1) : أوجد $\int \frac{dx}{9x^2-4}$

الحل :

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{3}{2}\right)\coth^{-1}\frac{3x}{2} + c$$
$$= -\frac{1}{6}\coth^{-1}\frac{3x}{2} + c; \qquad \left|\frac{3x}{2}\right| > 1$$

مثال (2) : أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}}$

الحل :

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sinh^{-1}\frac{2x}{5}+c$$

تمارين (5-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

2- $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

3- $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

4- $\int \frac{dx}{16+x^2}$

5- $\int \frac{dx}{1+16x^2}$

6- $\frac{dx}{9+16x^2}$

7- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$

8- $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

9- $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-4}}$

10- $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

11- $\int \frac{e^x dx}{1-e^{2x}}$

12- $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

13- $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}$

14- $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{9+\tan^2 x}$

15- $\int \frac{dx}{2x^2+6}$

16- $\int \frac{dx}{4-x^2}$

17- $\int \frac{1+x^2}{1-x^2}dx$

18- $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

الفصل الثانى
طرق التكامل

أوضحنا فى الفصل الأول أن صعوبة إيجاد التكامل غير المحدد لدالة ما تتمثل فى كيفية وضع الدالة المكاملة فى صورة دوال للتكامل ومن الصور القياسية يمكن إيجاد قيمة التكامل ، ولقد استخدمنا فى الفصل الأول طرق أولية كذلك طريقة التعويض وسوف نستكمل فى هذا الفصل طريقة التعويض وندرس طرق أخرى للتكامل منها طريقة الكسور الجزئية والتكامل بالتجزئ والاختزال.

1-2 طريقة التعويض.

استخدمنا هذه الطريقة فى الفصل الأول عندما تكون الدالة المكاملة على الصورة $f[\phi(x)].\phi'(x)$ وسوف نستخدم التعويض أيضا عندما تكون الدالة المكاملة على صورة الدالة $f(x)$ غير جدولية (الدالة المقابلة غير معروفة) وبالتعويض عن المتغير x بدلالة متغير آخر مثل y ليكن $x=\psi(y)$ نحصل على دالة مكاملة أخرى حيث :

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi y)\psi'(y)\,dy$$

سنوضح نماذج لهذه التعويضات فى الأمثلة التالية :

1- تعويضات جبرية.

مثال (1) : أوجد $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x+1}}$

الحل :

سنحاول التخلص من الجذر التربيعى بوضع $y^2 = x+1$ أى أن

$$x = y^2 - 1$$
$$\therefore dx = 2y\,dy$$
$$I = \int \frac{2y\,dy}{(y^2+1)y} = 2\int \frac{dy}{1+y^2}$$
$$= 2\tan^{-1} y + c$$

مثال (1) أوجد $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$

الحل :

ضع $x^2 - 4 = y^2$

$$\therefore x^2 = y^2 + 4 \Rightarrow 2x\,dx = 2y\,dy$$

$$I = \int \frac{x^2 . x dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{\left(y^2 + 4\right) y\,dy}{y}$$

$$= \int \left(y^2 + 4\right) dy = \frac{1}{3} y^3 + 4y + c$$

$$= \frac{1}{3} y\left(y^2 + 12\right) + c = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 4}\left(x^2 + 8\right) + c$$

مثال (3) : أوجد $\int \frac{x^m}{(ax+b)^n} dx$ حيث m عدد صحيح موجب

الحل : بوضع $y = ax + b$

$$\therefore x = \frac{1}{a}(y - b), \quad dx = \frac{1}{a} dy$$

ومن ذلك يكون

$$\int \frac{x^m}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int \frac{(y-b)^m}{y^n} dy$$

ثم تجرى الطرق الأولية لإيجاد التكامل الأخير

مثال (4) : أحسب قيم كلا من

$$\int \frac{x^3}{(3x+2)^4} dx, \qquad \int \frac{x^2}{(5-2x)^{3/2}} dx$$

الحل : أولا : بفرض $3x = y - 2$

نجد أن

$$\int \frac{x^3}{(3x+2)^4} dx = \frac{1}{(3)^4} \int \frac{(y-2)^3}{y^4} dy$$

$$= \frac{1}{81} \int \frac{y^3 - 6y^2 + 12y - 8}{y^4}\, dy$$

$$= \frac{1}{81} \int \left\{ \frac{1}{y} - \frac{6}{y^2} + \frac{12}{y^3} + \frac{8}{y^4} \right\} dy$$

$$= \frac{1}{81} \left\{ \ln y + \frac{6}{y} - \frac{6}{y^2} + \frac{8}{3y^3} \right\} + c$$

$$= \frac{1}{81} \left\{ \ln(3x+2) + \frac{6}{3x+2} - \frac{6}{(3x+2)^2} + \frac{8}{3(3x+2)^3} \right\} + c$$

لإيجاد قيمة التكامل الثانى نفرض أن $2x = 5 - y$ فنجد أن

$$\int \frac{x^2\,dx}{(5-2x)^{3/2}} = -\frac{1}{8}\int \frac{5-y}{y^{3/2}}\,dy$$

$$= -\frac{1}{8}\int \left\{\frac{25-10y+y^2}{y^{3/2}}\right\} dy$$

$$= -\frac{1}{8}\left\{-50y^{-1/2} - 20y^{1/2} + \frac{2}{3}y^{3/2}\right\} + c$$

$$= \frac{-1}{8}\left\{\frac{50}{\sqrt{5-2x}} - 20\sqrt{5-2x} + \frac{2}{3}\sqrt{(5-2x)^3}\right\} + c$$

مثال (5) : أوجد $\int \frac{dx}{x^m (ax+b)^n}$ حيث $m+n$ عدد صحيح موجب أكبر من الواحد

الحل : نفرض أن $y = \frac{ax+b}{x}$ ومنها

$$x = \frac{b}{y-a}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{a-y}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^m (ax+b)^n} = \frac{-1}{b^{m+n-1}} \int \frac{(y-a)^{m+n-2}}{y^n}\,dy$$

ثم نجرى الطرق الأولية لحساب قيمة التكامل الأخير كما سنرى فى الأمثلة الآتية :

مثال (6) : أحسب قيمة $I = \int \frac{dx}{x^3 (1+x)^4}$

الحل : نفرض أن $\frac{1+x}{x} = y$ منها $x+1 = xy$ أى

$x = \frac{1}{y-1}, \qquad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y-1}$ لذلك فإن

$$I = \int \frac{dx}{x^3 (1+x)^4} = -\int \frac{(y-1)^6}{y^4}\,dy \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\int \frac{y^6 - 6y^5 + 15y^{14} - 20y^3 + 15y^2 - 6y + 1}{y^4}\,dy$$

$$= -\int \left\{y^2 - by + 15 - \frac{20}{y} + \frac{5}{y^2} - \frac{6}{y^3} + \frac{1}{y^4}\right\} dy$$

$$= -\frac{(1+x)^3}{3x^3} + 3\frac{(1+x)^2}{x^2} - 15\left(\frac{1+x}{x}\right) + 20\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{15x}{1+x} - \frac{3x^2}{(1+x)^2}$$

$$+ \frac{x^3}{3(1+x)^3} + c$$

مثال (7) : أحسب قيمة كلا من $I = \int \frac{dx}{x^{3/2}(5+3x)^{5/2}}, \qquad II = \int \frac{x^{3/4}\,dx}{(2+x)^{15/4}}$

الحل : واضح أن $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 > 1$ لذا نفرض أن $\frac{5+3x}{x} = y$ ومنها

$$x=\frac{5}{y-3},\qquad dy=-\frac{5}{x^2}dx$$

$$\therefore I=-\frac{1}{125}\int\frac{(y-3)^2}{y^{5/2}}dy$$

$$=\frac{-1}{125}\left\{2\sqrt{y}+\frac{12}{\sqrt{y}}-\frac{6}{y\sqrt{y}}\right\}+c$$

$$=\frac{-1}{125}\left\{2\sqrt{\frac{5+3x}{x}}+12\sqrt{\frac{x}{5+3x}}-6\sqrt{\left(\frac{x}{5+3x}\right)^3}\right\}+c$$

$$II=\int\frac{dx}{x^{-314}(2+x)^{15/4}}$$

واضح كذلك أن $\frac{15}{4}-\frac{3}{4}=3>1$ لذا نفرض أن $\frac{2+x}{x}=y$ ومنها نجد أن

$$x=\frac{2}{y-1},\qquad \frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y-1}$$

$$\therefore II=-\frac{1}{4}\int\frac{(y-1)}{y^{15/4}}dy$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{4}{7}y^{-7/4}+\frac{4}{11}y^{-11/4}\right\}+c$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{7/4}-\frac{1}{11}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{11/4}+c$$

مثال (8) : وضح كيف توجد قيمة التكامل $\int\frac{dx}{x(ax^n+b)}$

ثم احسب قيمة التكامل $\int\frac{dx}{x(x^3+2)}$

الحل : نضع $x^n=\frac{1}{y}$ ومنها $n\ln x=-\ln y$ وبذلك نجد أن

$$\frac{n}{x}dx=-\frac{1}{y}dy$$

$$\therefore\int\frac{dx}{x(a^n+b)}=-\frac{1}{n}\int\left(\frac{y}{a+by}\right)\frac{dy}{y}$$

$$=\frac{1}{nb}\ln(a+by)+c$$

$$=-\frac{1}{nb}\ln\left[\frac{ax^n+b}{x^n}\right]+c$$

$$II=\int\frac{dx}{x(x^3+2)}=\frac{1}{6}\ln\left[\frac{x^3+2}{x^3}\right]+c$$

$$=\ln\left[\frac{x^3}{x^3+2}\right]^{1/6}+c$$

تمارين (1-2)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x+2}}$

2- $\int \frac{3x-2}{\sqrt{2x-3}} dx$

3- $\int x\sqrt{x+1}\, dx$

4- $\int \frac{2x+1}{\sqrt[7]{(x+2)^2}} dx$

5- $\int \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x-2}} dx$

6- $\int (x+2)\sqrt{x-1}\, dx$

7- $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} dx$

8- $\int \frac{x^3-x}{\sqrt{9-x^2}} dx$

9- $\int \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx$

10- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

11- $\int x\left(3-4x^2\right)^3 dx$

12- $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

13- $\int \frac{x^7}{(3x+4)^2} dx$

14- $\int \frac{x^2}{(2x-1)^5} dx$

15- $\int \frac{dx}{x^3(2-5x)^2}$

16- $\int \frac{x\, dx}{(3x-8)^3}$

17- $\int \frac{dx}{x\left(2\sqrt{x}+5\right)}$

18- $\int \frac{dx}{x\left(x^3+5\right)}$

19- $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$

20- $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

2- تعويضات مثلثية وزائدية.

1- إذا أحتوى التكامل على الجذر $\sqrt{a^2-x^2}$ استخدم التعويض $x = a\sin\theta$ ويمكننا أيضا استخدام التعويض $x = \cos\theta$

2- إذا أحتوى التكامل على الجذر : $\sqrt{x^2-a^2}$ استخدام التعويض $x = a\sec x$ أو التعويض $x = \cosh\theta$

3- إذا احتوى التكامل على الجذر $\sqrt{a^2+x^2}$ نستخدم التعويض

$x = a\tan\theta$ or $x = a\sinh\theta$

أمثلة

1- أوجد $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx$

الحل :

ضع $x = a\sin\theta$ نجد أن $dx = a\cos\theta\, d\theta$, $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ وبالتالى يكون

$$I=\int \frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}{a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}\cos\theta\ d\theta=\int \frac{\cos\theta^2}{\sin^2\theta}d\theta$$
$$=\int \text{cotan}^2\,\theta\ d\theta=\int\left(\text{cosec}^2\theta-1\right)d\theta$$
$$=-\text{caton}\,\theta-\theta+c$$
$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

2- أوجد $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

الحل :

ضع $x=3\sec\theta$ نجد أن $dx=3\sec\theta\ \tan\ \theta\ d\theta$

$$\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9\sec^2\theta-9}=3\sqrt{\sec^2\theta-1}=3\tan\theta$$
$$\therefore I=\int\frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}3\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$$
$$=3\int\tan^2\theta\, d\theta=3\int\left(\sec^2\theta-1\right)d\theta$$
$$=3\tan\theta-3\theta+c$$
$$=3\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}-3\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$$
$$=\sqrt{x^2-9}-3\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$$

4- تعويضات مثلثية لتكاملات تحتوى على الدوال المثلثية : $\sin x,\cos x,\sinh x,\cosh x$

أولا : إذا أحتوى التكامل على الدوال $\sin x,\ \cos x$ نستخدم التعويض $y=\tan\frac{x}{2}$ فنجد منها أن

$$dy=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+y^2\right)dx$$

أى أن $dx=\frac{2dy}{1+y^2}$

كذلك $\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$

لأنه

أن

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$= 2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$
$$= 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

بالمثل يمكن إثبات إن $\cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$

مثال (4) : أوجد $I = \displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

الحل : باستخدام التعويضات السابقة نجد أن

$$I = \int\left(\frac{1+y^2}{9+y^2}\right)\left(\frac{2dy}{1+y^2}\right) = \int\left(\frac{1+y^2}{9+y^2}\right)\frac{2dy}{1+y^2}$$
$$= 2\int\frac{dy}{9+y^2} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3}+c$$
$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+c$$

مثال (5) : أحسب قيمة $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

الحل : من التعويضات السابقة نجد أن

$$I = \frac{dy}{1+y}\ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)+c$$
$$I = \int\frac{dy}{1+y} = 1n(1+y)+c = 1n\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)+c$$

ثالثا : إذا أحتوى التكامل على مربعات الدوال المثلثية $\sin x, \cos x$

فى هذه الحالة نستخدم التعويض $y = \tan x$ فنجد أن

$$dy = \sec^2 x\ dx$$
$$= \left(1+\tan^2 x\right)dx$$
$$= \left(1+y^2\right)dx$$

ومنها $dx = \dfrac{dy}{1+y^2}$

كذلك يمكن حساب

$$\sin^2 x = \tan^2 x\cos^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

مثال (5) : أوجد قيمة $I=\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

الحل : باستخدام التعويضات السابقة

$$I=\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin^4+\cos^4 x}dx \;=2\int \frac{\left(1+y^2\right)^2}{1+y^4}.\frac{y\,dy}{\left(1+y^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&=2\int \frac{y\,dy}{1+y^4}=\int \frac{dy^2}{1+\left(y^2\right)^2}\\
&=\tan^{-1} y^2+c\\
&=\tan^{-1}\tan^2 x+c.
\end{aligned}$$

ثالثا : إذا أحتوى التكامل على الدوال الزائدية :

إذا أحتوى التكامل على الدوال الزائدية $\sinh x, \cosh x$ فإنه من المناسب استخدام التعويض $y=\tanh x\frac{x}{2}$ حيث نجد أن

$$\begin{aligned}
dy&=\frac{1}{2}\sec h^2\, dx\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\tanh^2\frac{x}{2}\right)dx\\
&=\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)dx\\
\therefore dx&=\frac{2dy}{1-y^2}
\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}
\sinh x&=2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}\\
&=2\frac{\sinh\frac{x}{2}\cosh^2\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}\\
&=2\tanh\frac{x}{2}.\frac{1}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}=\frac{2y}{1-y^2}
\end{aligned}$$

أيضا نجد أن

$$\begin{aligned}\cosh x &= \cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}\\ &= \cosh^2\frac{x}{2}\left(1+\tanh^2\frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sec h}^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1+y^2}{1-y^2}\end{aligned}$$

مثال (6) : أوجد $I=\int\frac{dx}{1+\cosh x}$

الحل : باستخدام التعويضات السابقة نجد أن

$$I=\int\frac{1-y^2}{2}\cdot\frac{2dy}{1-y^2}=\int dy=y+c=\tanh\frac{x}{2}+c$$

أما إذا أحتوى التكامل على مربعات الدوال الزائدية $\sinh,\cosh x$ فإننا نستخدم التعويض $y=\tanh x$ فيؤدى إلى

$$\begin{aligned}dy &= \operatorname{sech}^2 x\,dx\\ &= \left(1-y^2\right)dx\\ \therefore dx &= \frac{dy}{1-y}\end{aligned}$$

كذلك $\sinh^2 x=\frac{y^2}{1-y^2},\ \cosh^2 x=\frac{1}{1-y^2}$

مثال (6) : أحسب القيمة $I=\int=\frac{dx}{\sinh^2 x-\tanh^2 x}$

الحل : باستخدام التعويض السابق نجد أن

$$\begin{aligned}I &= \int\left(\frac{1}{\frac{y^2}{1-y^2}-y^2}\right)\cdot\left(\frac{dy}{1-y^2}\right)\\ &= \int\frac{dy}{y^4}=\int y^4dy=-\frac{1}{3}y^{-3}+c=-\frac{1}{\tanh^3 x}+c.\end{aligned}$$

تمارين (2-2)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ 2- $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3- $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ 4- $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{16-x^2}}$

5- $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

6- $\int \frac{2dx}{x\sqrt{x^2-25}}$

7- $\int \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^{2/3}}$

8- $\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$

9- $\int \frac{x^2 dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$

10- $\int \frac{x^3 dx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$

11- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

12- $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$

13- $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$

14- $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

15- $\int x\left(3-4x^2\right)^3 dx$

16- $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

17- $\int a^x e^x\,dx$

18- $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

19- $\int \frac{x^2(x+1)}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}dx$

20- $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

21- $\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

22- $\int \frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x}dx$

23- $\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$

24- $\int \frac{1}{5+13\cosh x}dx$

25- $\int \frac{1}{12+5\sinh x}dx$

26- $\int \frac{1}{5\sin x-3\cos x}dx$

(2-2) تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

حيث a, b, c ثوابت

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \\ &= a(x+d)^2+e \end{aligned}$$

حيث أن $d=\frac{b}{2a},\ e=c-\frac{b^2}{4a}$

وبذلك يحول التكامل إلى أحدى الصور التالية :

1- $\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\sin^{-1}\frac{y}{a}+c.$

2- $\int \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \sinh^{-1}\frac{y}{a} + c.$

3- $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{y}{a} + c.$

مثال (1) أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$

الحل :

$$2x^2+2x+1 = 2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$$
$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$

وهى بالصورة (2) السابقة $y = x+\frac{1}{2},\ \ a=\frac{1}{2}$

$dy = dx$

$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{x+1/2}{1/2}\right)+c$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}(2x+1)+c.$$

مثال (2) : أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

الحل : المقدار

$$2+3x-2x^2 = -2\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)$$
$$= -2\left[\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{25}{16}\right]$$
$$= 2\left[\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]$$
$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}$$

وهى الصورة (1) حيث $y = x-\frac{3}{4},\ \ a=\frac{5}{4}$

$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x-3/4}{5/4}+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-3}{5}\right)+c.$$

(3-2) تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{lx+m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

يحور البسط إلى مقدار يحتوى على تفاضل ما تحت الجذر وثابت. وحيث أن

$$\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b$$

نكتب البسط على الصورة

$$\ell x+m=\frac{\ell}{2a}(2a+b)+\left(m-\frac{\ell b}{2a}\right)$$

ونعلم أن

$$\int \frac{\phi'(x)}{\sqrt{\phi(x)}}\,dx=2\sqrt{\phi(x)}+c$$

مثال (1) أوجد $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$

الحل :

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^2-4x+5\right)=2x-4$$

نكتب البسط على الصورة

$$\begin{aligned} 3x-5&=\frac{3}{2}(2x-4)+5+6\\ &=\frac{3}{2}(2x-4)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I&=\frac{3}{2}\int\left(\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}\right)\\ &=\frac{3}{2}2\sqrt{x^2-4x+5}+I_1+c \end{aligned}$$

والتكامل I_1 هو من النوع السابق (2-2) حيث

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}}=\sinh^{-1}(x-2)+c$$

ومنها

$$I=3\sqrt{x^2-4x+5}+\sinh^{-1}(x-2)+c$$

مثال (2) أوجد $\int\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\,dx$

الحل : بضرب كل من البسط والمقام فى الجذر التربيعى $2x-1$ نجد أن

$$I=\int\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx$$

واضح أن تفاضل ما تحت الجذر هو $8x$

$\therefore$ لابد من وضع البسط على الصورة

$$2x-1=\frac{1}{4}(8x)-1$$

$$\therefore I=\frac{1}{4}\int\frac{8x}{\sqrt{4x^2-1}}dx-\int\frac{dx}{4x^2-1}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{8x}{\sqrt{4x^2-1}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}2x+c.$$

مثال (3) : أوجد قيم التكاملات الآتية :

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx,\quad \int\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx,\ \int\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}dx$$

الحل :

فى كل من هذه التكاملات يمكن تبسيط الدالة المكاملة بتحويلها إلى مقدار كسرى بسط دالة من الدرجة الأولى ومقام جذر تربيعى لدالة من الدرجة الثانية (يحل كما سبق شرحه فى الحالات السابقة) ، يتم ذلك بضرب البسط والمقام والجذر التربيعى الموجود فى البسط فمثلا نعتبر

$$I=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}.\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\sqrt{x^2-1}-\cosh^{-1}x+c$$

يترك للقارئ حساب قيم التكاميلين الأخيرين.

مثال (4) : أحسب قيمة التكامل $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^3-3}}$

الحل : بوضع $x^3={}^{1}\!/_{y^2}$ نجد أن

$$3\ln x=-2\ln y,\ \frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}\frac{dy}{y}$$

ومنها

$$I=-\frac{2}{3}\int\frac{dy}{\sqrt{4-3y^2}}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{4}{3}-y^2}}$$

$$=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\sinh^{-1}\frac{\sqrt{3}y}{2}+c$$

$$=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\sinh^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2x\sqrt{x}}+c.$$

الصورة عامة فإنه لإيجاد قيمة تكامل على الصورة

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^n+b}}$$

فإنه يكون من المناسب استخدام التعويض $x^n={}^{1}\!/_{y^2}$ ومنها نجد أن

$$I=-\frac{2}{n}\int\frac{dy}{\sqrt{a+by^2}}$$

بذلك يؤول التكامل I إلى إحدى الصور القياسية :

i- $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$
$$=-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

ii- $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

iii- $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

حيث a مقدار ثابت.

مثال (5) : أوجد $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

الحل : نفرض أن $x^2=y^{-2}$ ومنها نجد أن $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}$

$$\therefore I=-\int\frac{dy}{\sqrt{4-9y^2}}=\frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{3y}{2}+c\ =\frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{3}{2x}+c.$$

مثال (6) : أوجد

$$\int\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{3x+1}},\ \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}},\ \int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

يمكن إزالة الجذر التربيعي فى هذه التكاملات أو تحويل التكامل إلى إحدى الصور القياسية السابق دراستها ، وذلك طبقاً للقاعدة التالية :

إذا كان $I=\int\frac{dx}{f(x)\sqrt{g(x)}}$

حيث $f(x),g(x)$ دوال جبرية (كثيرات الجذور) فى المتغير x فإنه من المناسب استخدام أحد التعويضات الآتية :

درجة f(x)	درجة g(x)	التعويض المناسب
لايهم	الدرجة الأولى	$g(x)=y^2$
الدرجة الثانية	الدرجة الثانية	$\frac{g(x)}{f(x)}=y$
الدرجة الأولى وإن حررت	الدرجة الثانية	$f(x)=1/y$

حل مثال (6) :

بتطبيق القاعدة السابقة يمكن استنتاج أن

$$I=\int\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{3x+1}}=-2\coth^{-1}4\sqrt{3x+1}+c$$

($g(x)=3x+1$ من الدرجة الأولى)

$$II=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)+c$$

هنا $g(x)=x^2+4x+2$ من الدرجة الثانية ، بينما $f(x)=x+1$ من الدرجة الأولى.
كذلك نجد أن

$$III=\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{1+x^2}\right)+c$$

وذلك أنه بفرض $\frac{1-x^2}{1+x}=y$ فإنه

$$x^2=\frac{1-y}{1+y},\qquad 1+x^2=\frac{2}{1+y}$$

$$1-x^2=\frac{2y}{1+y},\qquad =-\frac{dy}{2\sqrt{1-y^2}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$III=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\frac{2y}{1+y}}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y-y^2}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{1+x^2}\right)+c.$$

تمارين (3-2)

أحسب التكاملات الآتية :

1- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

2- $\int\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

3- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

4- $\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

5- $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

6- $\int\frac{(2x-5dx)}{\sqrt{4x-x^2}}$

7- $\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{2x+x^2}}$

8- $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx$

9- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

10- $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$

11- $\int\frac{dx}{\sqrt{27+12x-4x^2}}$

12- $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

13- $\int\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}dx$

14- $\int\sqrt{\frac{5x+4}{2x-6}}dx$

15- $\int \sqrt{\frac{2+x}{x}}dx$

16- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

17- $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$

18- $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

19- $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-2x^3}}$

20- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+3}}$

21- $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x+1}}$

22- $\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2-4}}$

(4-2) تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

تحول إلى أحدى الصور التالية

1- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

2- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

3- $\int \frac{dx}{a^2-x} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

البرهان : (1) يتضح من الصورة

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

(2) واضح أن

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dy}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|x-a| - \log|x+a|\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

(3) البرهان يترك للقارئ.

مثال : أحسب $\int \frac{dx}{2x^2-5x+3}$

الحل :

$$\because 2x^2-5x+3=2\left(x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=2\left[\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{25}{16}\right)\right]=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

وهى بالصورة (2) باعتبار أن $y=x-\frac{5}{4}$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)}\log\left|\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\left(x-\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}}\right|+c=\log\left|\frac{x-\frac{6}{4}}{x-1}\right|+c=\log\left|\frac{2x-3}{x-1}\right|+c$$

(5-2) تكاملات على الصورة $\int\frac{\ell x+m}{ax^2+bx+c}dx$

يحول البسط إلى جزئية احدهما (تفاضل المقام) أى يكتب

$$\ell x+m=\frac{\ell}{2a}\left(2ax+b\right)+(m-\frac{\ell b}{2a})$$

$$\therefore I=\frac{\ell}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(m.\frac{\ell b}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{l}{2a}\log\left|ax^2+bx+c\right|+\left(m-\frac{\ell b}{2a}\right).I_1,$$

حيث التكامل

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

هو من النوع الذى درس فى البند السابق (2-4) .

مثال : أوجد $\int\frac{2x+1}{5x^2-4x+3}dx$

الحل : تفاضل المقام هو $10x-4$

$\therefore$ لابد أن نكتب البسط على الصورة

$$2x+1=\frac{1}{5}(10x-4)+\left(1+\frac{4}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}(10x-4)+\frac{9}{5}$$

$$\therefore I=\frac{1}{5}\int\frac{10x-4}{5x^2 4x+3}dx+\frac{9}{5}\int\frac{dx}{5x^2-4x+3} \qquad (1)$$

$$=\frac{1}{5}\log\left|5x^2-4x+3\right|+\frac{9}{5}I_1,$$

حيث

$$I_1=\int\frac{dx}{5x^2-4x+3}$$

بالنسبة للتكامل الثانى نكمل المربع :

$$5x^2-4x+3=5\left(x^2-\frac{4}{5}x+\frac{3}{6}\right)$$

$$=5\left[\left(x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{25}\right)\right]$$

$$=5\left[\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{11}{25}\right] \qquad (2)$$

$$\therefore I_1=\int\frac{dx}{5x^2-4x+3}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{11}{25}}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{\sqrt{11}}\right)\tan^{-1}\frac{x-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{11}}{5}}+c=\frac{1}{\sqrt{11}}+\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{11}}{5}}\right)+c$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$I=\frac{1}{5}\log\left|5x^2-4x+3\right|+\frac{9}{5\sqrt{11}}\tan^{-1}\frac{5x-2}{\frac{\sqrt{11}}{5}}+c$$

تمارين (2-4)

أوجد قيم التكاملات الآتية :

1- $\int\frac{dx}{x^2+4x+2}$

2- $\int\frac{dx}{2x^2-4x+3}$

3- $\int\frac{dx}{3+x-x^2}$

4- $\int\frac{x+1}{x\;\;-x-1}dx$

5- $\int\frac{dx}{3-2x^2}$

6- $\int\frac{dx}{x(x+1)}$

7- $\int\frac{dx}{x^2+x-1}$

8- $\int\frac{x-1}{x^2+1}dx$

9- $\int\frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

10- $\int\frac{3x}{5x^2+1}dx$

11- $\int\frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$

12- $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+4\cos x+1}$

(6-2) تكاملات الدوال النسبية :

وهى دوال على الصورة $\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$ حيث أن كل من $\phi(x),\psi(x)$ كثيرة حدود فى المتغير x.

طريقة التكامل : إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام يمكننا عندئذ إجراء عملية القسمة المطولة فنحصل على خارج قسمة f(x) + باقى g(x) درجته أقل من درجة المقام $\psi(x)$ فنكتب

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=f(x)+\frac{g(x)}{\psi(x)}$$

ثم يحول الكسر $\frac{g(x)}{\psi(x)}$ إلى كسور جزئية بسيطة

أولا : إذا أمكن تحليل المقام إلى عوامل من الدرجة الأولى ومختلفة.

فيمكننا كتابة المقام على الصورة

$$\frac{9(x)}{\psi(x)}=\frac{c_1}{x-a_1}+\frac{c_2}{x-a_2}+\dots+\frac{c_n}{x-a_n}$$

فمثلاً :

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x}=\frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1}$$
$$=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x-1}+\frac{c_3}{x+1}$$

بالتالى فإن $x^2+2x+3\equiv c_1(x-1)(x+1)+c_2x(x+1)+c_3x(x-1)$

بوضع $x=0,\ x=1,\ x=-1$ على التوالى نجد أن $c_1=-3,\ c_2=3,\ c_3=1$

$$\therefore \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x}$$
$$\therefore \int\frac{x^2+2x+3}{x^3-x}dx=\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-1}-3\int\frac{dx}{x}$$
$$=\log|x+1|+3\log|x-1|-3\log|x|+c$$
$$=\log\left|\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^3}\right|+c$$

ثانيا : إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الأولى وبعضها مكرر

نكتب

$$\frac{g(x)}{\psi(x)}=\frac{c_1}{x-a_1}+\frac{c_2}{(x-a_1)^2}+\dots+\frac{c_n}{(x-a_1)^n}+\frac{b_1}{(x-a_2)}+\dots+\frac{b_n}{(x-a_n)}$$

بفرض أن العامل $x-a_1$ مكرر n مرة وأن المقام $\psi(x)$ يمكن تحليله إلى العوامل $(x-a_1),\dots,(x-a_n)$ ذات الدرجة الأولى.

مثال : أوجد $\int\frac{x+5}{x^3-3x+2}dx$

الحل :

$$\because x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

$$\therefore \frac{x+5}{x^2-3x+2}=\frac{c_1}{x-1}+\frac{c_2}{(x-1)^2}+\frac{b}{x+2}$$

$$\therefore x+5=c_1(x-1)(x+2)+c_2(x+2)+b(x-1)^2$$

نضع $x=0,\ x=1,\ x=-2$ نجد أن $c_1=-1/3,\ c_2=2,\ b=1/3$

$$\therefore \int \frac{x+5}{x^2-3x+2}dx=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{2}{x-1}+\log|x+2|+c$$

$$=-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{3}\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+c$$

ثالثا : إذا تضمن المقام عاملا من الدرجة الثانية يتعذر تحليله.

فى هذه الحالة يكون بسط مثل هذا العامل مقدارا من الدرجة الأولى كما يتضح من المثال الآتى.

مثال : أوجد $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx$

الحل :

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{c_1}{x-1}+\frac{c_2x+c_3}{x^2+1}$$

$$\therefore 3x^2+x-2=c_1(x^2+1)(c_2x+c_3)$$

ضع $c_1,\ c_2=2,\ c_3=3$

وعلى ذلك

$$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{2x+3}{x^2+1}dx$$

$$=\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{2x}{x^2+1}dx+3\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\log|x-1|+\log|x^2+1|+3\tan^{-1}x+c$$

$$=\log|(x-1)(x^2+1)|+3\tan^{-1}x+c$$

رابعا : إذا كان أحد العوامل من الدرجة الثانية ومكرراً

فى هذه الحالة يعالج الكسر كما فى الحالة التى تكرر فيها العوامل الخطية. فمثلا

$$\frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2x+c_3}{x^2+2x+2}+\frac{c_4+c_5}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$\therefore 2x^3+3x^2+x-1=c_1(x^2+2x+2)^2+(c_2x+c_3)(x+1)(x^2+2x+2)+(c_4x+c_5)(x+1)$$

ثم بالتعويض بالقيم $x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=2\ x=-2$ على التوالى نحصل على

$c_1 = -1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 3,\ c_4 = -3$

تمارين (2-5)

أوجد التكاملات الآتية

1- $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

2- $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$

3- $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$

4- $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

5- $\int \frac{dx}{x^4+1}$

6- $\int \frac{dx}{x^3+1}$

7- $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

8- $\int \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$

9- $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-27}dx$

10- $\int \frac{x-3}{\left(x+1(x-2)\right)}dx$

11- $\int \frac{x^3+2x^2-4}{x^2-4x+3}dx$

12- $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

13- $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

14- $\int \frac{x^3+2}{x^2+4}dx$

15- $\int \frac{x^4+1}{x^3-x}dx$

(2-7) التكامل بالتجزئ.

من المعلوم من قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين قابلتين للتفاضل أنه :

$$\frac{d}{dx}(\phi.\psi) = \phi.\frac{d\psi}{dx} + \psi.\frac{d\phi}{dx}$$

أى أن $d(\phi.\psi) = \phi.d\psi + \psi.d\phi$ ومنها نجد أن $\phi.d\psi = d(\phi.\psi) - \psi.d\phi$

بالتكامل مع العلم بأن $\int d(\phi.\psi) = \phi.\psi + c$ نجد أن $\int \phi d\psi = \phi\psi - \int \psi d\phi$

معنى ذلك أننا استبدلنا التكامل $\int \phi d\psi$ بتكامل آخر هو $\int \psi d\phi$. ونكون الطريقة مفيدة إذا كان التكامل الثانى أبسط فى إجرائه من التكامل الأول.

مثال (1) : أوجد $\int xe^x dx$

الحل : ضع $\phi = x$ ، $d\psi = e^x dx,$ يكون (بالتكامل) $d\phi = dx,\ \psi = e^x$

$$\therefore \int \phi d\psi = \phi\psi - \int \psi d\phi$$

$$\therefore \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

لاحظ أن $I = \int x e^x dx = \int x\, d e^x$ وهى على صورة $\int \phi d\psi$ وبالتالى فإن

$$I = \int x\, d e^x = x e^x - \int e^x dx$$

مثال (2) : أوجد $\int \log x\, dx$

الحل : نختار

$$\phi = \log x, \qquad d\psi = dx$$

$$\therefore d\phi = \frac{1}{x} dx, \qquad \psi = x$$

$$\therefore \int \log x\, dx = x \log x - \int x.\frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - x + c$$

مثال (3) أوجد $\int e^x \sin x\, dx$

الحل : نختار

$$\phi = e^x, \quad d\psi = \sin x\ dx$$

$$\therefore d\phi = e^x\, dx, \qquad \psi = -\cos x$$

$$\therefore \int e^x \sin x\ dx = -e^x \cos x + \int \cos x . e^x dx \qquad (1)$$

وبالتكامل الثانى يبدو أنه يماثل التكامل الأصلى وليس أفضل منه فى التبسيط. نحاول مرة أخرى باختيار :

$$\phi = e^x \quad d\psi = \cos x\, dx$$

$$\therefore d\phi = e^x\ dx, \qquad \psi = \sin x$$

$$\therefore \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \qquad (2)$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$\therefore 2\int e^x . \sin x\, dx = e^x \left[\sin x - \cos x\right] + c$$

$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x \left[\sin x - \cos x\right] + c$$

تمارين (6-2)

أوجد قيم التكاملات الآتية

1- $\int x \log x\, dx$

2- $\int x \sin x\ dx$

3- $\int x^2 \sin x\, dx$

4- $\int x^2 \log x\ dx$

5- $\int (\log x)^2\, dx$

6- $\int e^x \sin 2x\ dx$

7- $\int e^{3x} \sin 2x\ dx$

(8-2) التكامل بلاختزال المتتالى

سوف نستعرض بعض الصور القياسية للاختزال

صورة (1) : إذا كان $In = \int x^n e^{ax}\, dx$ فإن

$$\therefore I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1} \qquad (1)$$

واضح أن

$$I_1=\int x\,e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}x\,e^{ax}-I_0+c$$

$$I_0=\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c$$

وتكرار استخدام القانون يؤدى فى النهاية إلى ظهور I_0.

البرهان : نستخدم التكامل بالتجزئ بوضع

$$\phi=x^n,\quad d\psi=e^{ax}\,dx$$

$$\therefore d\phi=n\,x^{n-1}\,dx,\ \psi=\frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\therefore \int x^n\,e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}x^n\,e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

$$=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}$$

مثال (1) : أوجد $\int x^3\,e^{2x}\,dx$

الحل : واضح أن $n=3,\ a=2$ لذا يكون

$$I_3=\int x^3\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}x^3\,e^{2x}-\frac{3}{2}\int x^2\,e^{2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^3\,e^{2x}-\frac{3}{2}I_2 \qquad (1)$$

حيث

$$I_2=\int x^2\,e^{2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{2}{2}I_1$$

$$I_1=\int x\,e^{2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{2}I_0$$

$$I_0=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

بالتعويض المتتالى نجد أن

$$I_1=\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

$$I_2=\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{1}{2}x\,e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

$$I_3=\frac{1}{2}x^3\,e^{2x}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}\right)+c$$

$$=e^{2x}\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right]+c$$

$$=\frac{1}{8}e^{2x}\left[4x^3-6x^2+6x-3\right]+c$$

صورة (2) : إذا كان

$$I_n = \int x^n \cos(ax)\,dx,$$
$$J_n = \int x^n \sin(ax)\,dx$$

فإن

$$I_n = \frac{1}{a}x^n \sin(ax) - \frac{n}{a}J_{n-1} \qquad (2)$$
$$J_n = -\frac{1}{a}x^n \cos(ax) + \frac{n}{a}I_{n-1} \qquad (3)$$

والاختزال المتتالى يصل بنا فى النهاية إلى إحدى الصورتين :

$I_0 = \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$ أو $J_0 = \int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$

البرهان : يترك للقارئ (باستخدام التكامل بالتجزئ)

مثال : أوجد $\int x^2 \cos 3x\ dx$

الحل :

$$\therefore I_2 = \int x^2 \cos 3x\ dx \qquad (a=3)$$
$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}I_1,$$
$$I_1 = \int x \sin 3x\ dx$$
$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x - \frac{1}{3}I_0,$$
$$I_0 = \int \cos 3x\ dx$$
$$= \frac{1}{3}\sin 3x + c.$$

بالتعويض نجد أن

$$I_1 = -\frac{1}{3}x\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x$$
$$\therefore I_2 = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\right) + c$$
$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{5}x\cos 3x + \frac{2}{27}\sin 3x + c$$

صورة (3) : إذا كان $I_n = \int \cos^n x\,dx$ فإن $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

صورة (4) : إذا كان $I_n = \int \sin^n x\,dx$ فإن $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

البرهان : نستخدم أيضا التكامل بالتجزئ

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d(\sin x)$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n+1)\left[I_{n-2} - I_n\right].$$
$$\therefore nI_n = \cos^{n-1} \sin x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\therefore I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

وتكرار هذه الخطوات يصل بنا إلى إحدى الصورتين :

$$I_0 = \int dx = x + c$$

إذا كانت n زوجية

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

إذا كانت n فردية

برهان الصورة (4) بالمثل حيث

$$I_0 = x + c, \qquad I_1 = \cos x + c.$$

مثال (1) : أوجد $\int \cos^5 x\,dx$

باستخدام قاعدة الاختزال (3) نجد أن

$$I_5 = \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int \cos^4 d(\sin x)$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3,$$
$$I_3 = \int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\,dx(\sin x)$$
$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} I,$$
$$I_1 = \sin x + c$$
$$\therefore I_5 = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + c.$$

مثال (2) :أوجد $\int \sin^4 \theta\,d\theta$

الحل :

$$\because I_4 = \int \sin^4 \theta \, d\theta = -\int \sin^3 x d(\cos x)$$

$$\therefore I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 \theta \cos\theta + \frac{3}{4} I_2,$$

$$I_2 = \int \sin^2 \theta d\theta = -\int \sin x \, d(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2} I_0,$$

$$I_0 = \theta + c$$

$$\therefore I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta - \frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\theta + c$$

ملحوظة : سبق لنا دراسة مثل هذه التكاملات وكيفية التكامل معها بدون اختزال

تمارين (7-2)

أوجد مستخدماً الاختزال قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \cos^3 x \, dx$

2- $\int \tan^2 x \, dx$

3- $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

4- $\int \sec^4 x \, dx$

5- $\int \cos^4 x \, dx$

6- $\int \cos^3 2x \, dx$

7- $\int x^3 e^x \, dx$

8- $\int x^3 \sin x \, dx$

9- $\int x^2 \cos 2x \, dx$

أمثلة عامة

1- أوجد قيمة $\int \left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

الحل :

$$\int\left(6x^4-10x^2+7+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int 6x^4dx-10\int x^2dx+7\int dx+\frac{1}{2}\int x^{-1/2}dx$$
$$=\frac{6}{5}x^5-\frac{10}{3}x^3+7x+x^{1/2}+c$$

2- أوجد قيمة $\int 6x\left(5-x\right)dx$

الحل :

$$\int 6x\left(5-x\right)dx=6\int\left(5x-x^2\right)dx$$
$$=30\int x\,dx-6\int x^2\,dx$$
$$=15x^2-2x^3+c.$$

3- أوجد قيمة $\int\left[\left(4t-3\right)/t^3\right]dt$

الحل :

$$\int\frac{4t-3}{t}dt=4\int\frac{1}{t^2}dt-3\int\frac{1}{t^3}dt$$
$$=4t^{-1}+\frac{3}{2}t^{-2}+c$$
$$=\frac{-4}{t}+\frac{3}{2t^2}+c=\frac{8t+3}{2t^2}+c$$

4- أوجد قيمة $\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx$

الحل : نفرض أن $x^2+1=t$ نجد أن $2x\,dx$ كذلك

$$\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+c$$

بالتعويض العكسى بوضع $t=x^2+1$ نجد أن

$$\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx=\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+c$$

5- أوجد قيمة $\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx}$

الحل : بوضع $z=5-x^3$ نجد أن $dz=-3x^2\,dx$ وأن

$$\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx}=-\frac{4}{3}\int z^{1/2}\,dz$$
$$=-\frac{4}{3}.\frac{2}{3}z^{3/2}+c$$
$$=-\frac{8}{9}\left(5-x^3\right)^{3/2}+c$$

6- أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int\left(3x^2-8x\right)dx$

2- $\int\frac{5}{13}du$

3- $\int\left(x+5\right)^n dx$

4- $\int\left(at+b\right)^5 dt$

الحل :

(1) $$\int \left(3x^2-8x\right)dx = 3\int x^2 dx - 8\int x\,dx = x^3-4x^2+c$$

(2) $$\int \frac{5}{\sqrt{3}}du = \frac{5}{\sqrt{3}}\int du = \frac{5u}{13}+c$$

(3) بوضع $x+5=t$ نجد أن $dx=dt$ كذلك

$$\int (x+5)^n dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+c = \frac{(x+5)^{n+1}}{n+1}+c$$

(4) نفرض أن $at+b=z$ فيكون $adt=dz$

$$\therefore \int (at+b)^5 dt = \frac{1}{a}\int z^5 dz = \frac{z^6}{6a}+c$$

$$= \frac{(at+b)^6}{6a}+c$$

(7) أوجد قيم التكاملات التالية

1- $\int \pi r^2 dr$

2- $\int \left(t^2+t+5\right)/7\,dt$

3- $\int 4x^2(x+1)dx$

4- $\int \left(y^2+5\right)^3 y\,dy$

5- $\int \left[x\left(x^3+1\right)-1/x^4\right]dx$

6- $\int \frac{4}{\sqrt[3]{\ }}dt$

الحل :

1- $\int \pi r^2\,dr = \pi\int dr = \frac{\pi}{2}r^3+c$

2- $\int \left(t^2+t+5\right)/7\,dt$

$$= \frac{1}{7}\int t^2 dt + \frac{1}{7}\int t dt + \frac{5}{7}\int dt$$

$$= \frac{1}{21}t^3 + \frac{t^2}{14} + \frac{5}{7}t + c$$

3- $\int 4x^2(x+1)dx = 4\int\left(x^3+x^2\right)dx$

$$= 4\int x^3 dx + 4\int x^2 dx$$

$$= x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$$

4- بفرض أن $y^2+5=z$ يكون $2y\,dy=dz$

$$\therefore \int \left(y^2+5\right)^3 y\,dy = \frac{1}{2}\int \left(y^2-5\right)^3 2y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int z^3 dz = \frac{1}{8}z^2+c$$

$$= \frac{1}{8}\left(y^2+5\right)^4+c$$

$$\int \left(x\left(x^3-1\right)-1.x^4\right)dx$$

$$5-\ \int\left[x\left(x^{3}\right)-1/x^{4}\right]dx$$

$$=\int\left(x^{4}+x-1/x^{4}\right)dy=\int x^{4}dx-\int xdx-\int\frac{dx}{x^{4}}$$

$$=\frac{1}{5}x^{5}+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3x^{3}}+c$$

$$6-\ \int\frac{4}{\sqrt[3]{t}}dt=\int\frac{4}{t^{1/3}}dt=4\int t^{-1/3}dt$$

$$=4\frac{t^{2/3}}{2/3}+c=6t^{2/3}+c$$

8- كامل كلا مما يأتى :

$$\text{i-}\ \frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx$$

$$\text{ii-}\ \int\frac{5z^{2}-12z-10}{z^{4}}dz$$

$$\text{iii-}\ \int\sqrt{y}\,(3y+1)^{2}\,dy$$

$$\text{iv-}\ \int(3-4x)^{17}\,dx$$

$$\text{v-}\ \int(3x+5)^{-3}\,dx$$

$$\text{vi-}\ \int(8x-6)\left(4x^{2}-6x\right)^{3}dx$$

$$\text{vii-}\ \int\left[x+\frac{1}{(4x+3)^{2}}\right]dx$$

$$\text{viii-}\ \int x\sqrt{2x^{2}-1}\,dx$$

الحل :

$$\text{i-}\ \frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx=\frac{1}{2}\int(4-9x)^{1/2}(-9)\left(\frac{1}{-9}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{18}\int(4-9x)^{1/2}(-9)dx$$

$$=-\frac{1}{18}\int(4-9x)^{1/2}\,d(-9x)$$

$$=-\frac{1}{18}\frac{(4-9x)^{3/2}}{3/2}+c$$

$$=-\frac{1}{27}(4-5x)^{3/2}+c$$

$$\text{ii-}\ \int\frac{5z^{2}-12z-10}{z^{4}}dz=5\int z^{-2}dz-12\int z^{-3}dz-10\int z^{-4}dz$$

$$=-5z^{-1}-\frac{12}{-2}z^{-2}-\frac{10}{-3}z^{-3}+c$$

$$=-\frac{5}{z}+\frac{1}{6z^{2}}+\frac{10}{3z^{3}}+c$$

$$\text{iii-}\ \int\sqrt{y}\,(3y+1)^{2}\,dy=\int\sqrt{y}\left(9y^{2}+6y+1\right)dy$$

$$=9\int y^{5/2}dy+6\int y^{3/2}dy+\int y^{1/2}\,dy$$

$$=\frac{18}{7}y^{7/2}+\frac{12}{5}y^{5/2}+\frac{2}{3}y^{3/2}+c$$

$$=\sqrt{y}\left(\frac{18}{7}y^{3}+\frac{12}{5}y^{2}+\frac{2}{3}y\right)+c$$

iv- $\int (3-4x)^{17}\,dx = \int (3-4x)^{17}(-4)\left(\frac{1}{-4}\right)dx$

$$= -\frac{1}{4}\int (3-4x)^{17}\,d(-4x)$$

$$= -\frac{1}{4(18)}(3-4x)^{18} + c$$

$$= \frac{-1}{72}(3-4x)^{18} + c$$

v- $\int (3x+5)^{-3}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int 3(3x+5)^{-3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int (3x+5)^{-3}\,d(3x)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{-2}}{-2} + c$$

$$= -\frac{(3x+5)^{-2}}{6} + c$$

vi- $\int (8x-6)\left(4x^2-6x\right)^3 dx$

بوضع $z = 4x^2 - 6x$ نجد أن

$$= \int z^3 dz$$

$$= \frac{1}{4}z^4 + c$$

$$= \frac{1}{4}((4x-6x)^4 + c$$

vii- $\int \left[x + \frac{1}{(4x+3)^2}\right]dx = \int x\,dx + \int (4x+3)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\int (4x+3)^{-2}\,d(4x+3)$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}(4x+3)^{-1} + c$$

viii- $\int x\sqrt{2x^2}-1dx = \int \left(2x^2-1\right)^{1/2} x\,dx$

بوضع $2x^2 - 1 = t$ نجد أن

$$= \frac{1}{4}\int t^{1/2} dt$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{t^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x^2-1\right)^{3/2} + c$$

9- أوجد قيم التكاملات الآتية :

1- $\int ex\,dx$

2- $\int e^{ax}\,dx$

3- $\int 2e^{3x+2}dx$

4- $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$

5- $\int\left(\frac{e^z-2}{e^z}\right)dz$

6- $\int e^{x^2}x\,dx$

الحل :

1- $\int e\,x\,dx = e\int x\,dx = \frac{e}{2}x^2 + c$

حيث e عدد طبيعى وهو مقدار ثابت $e \approx 2.718$

2- $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int e^t dt = \frac{e^{ax}}{a} + c$

3- $\int 2e^{3x+2}dx = 2\int e^{3x}.e^2 dx$

$$= 2e^2\int e^{3x}dx = \frac{2e^2}{3}e^{3x} + c$$

$$= \frac{3}{2}e^{3x+2} + c$$

4- $\int\left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \int\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\,2x + \frac{e^{-2x}}{-2} + c$$

5- $\int\frac{e^z-2}{e^z}dz = \int\left(1-2e^{-z}\right)dz$

$$= z + \frac{2}{e^z} + c$$

$$= \frac{ze^z+2}{e^z} + c$$

6- $\int e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{e^z}{2} + c$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

10- عين كلا من التكاملات الآتية :

$1-\int\frac{2x}{x^2+3}dx$

ii- $\int\frac{4}{3t-11}dt$

iii- $\int\frac{4x}{x^2+3}dx$

iv- $\int\frac{u+1}{u^2+2u+11} + du$

v- $\int\frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}d\theta;\ b\neq 0$

الحل :

بوضع $t = x^2$

i- $\int\frac{2x}{x^2+3}dx = \int\frac{dt}{t+3} = \ln(t+3) + c$

$$= \ln(x^2+3) + c$$

ii- $\int\frac{4dt}{3t-11} = \frac{4}{3}\int\frac{dz}{z} = \frac{4}{3}\ln z + c$

$$= \frac{4}{3}\ln(3t-11)+c$$

بفرض أن $3t-11=z$

iii- $\int \frac{4x}{x^2+3}dx = 2\int \frac{2x}{x^2+3}dx$

بوضع $t=x^2+3$ نجد أن

$$= 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln t + c$$

$$= 2\ln\left(x^2+3\right)+c$$

$$= \ln\left(x^2+3\right)^2 + c$$

iv- $\int \frac{u+1}{u^2+2u+11}du = \frac{1}{2}\int \frac{2y+2}{u^2+2u+11}du$

بوضع $z=u^2+2u+11$ نحصل على

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left\{u^2+2u+11\right\}+c$$

$$= \ln\left\{u^2+2u+11\right\}^{1/2}+c$$

iv- $\int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}de = \frac{1}{b}\int \frac{b\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}de$

بوضع $z=a+b\tan\theta$ نجد أن $dz=b\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}d\theta = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\ln z + c$$

$$= \frac{1}{b}\ln\left\{a+b\tan\theta+c\right\}$$

11- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sin 2x\, dx$

ii- $\int 3\cos 3\theta\, d\theta$

iii- $\int \sec^2(-2y)\,dy$

iv- $\int \sin^3 t dt$

v- $\int \sqrt{\cos x}\sin x\, dx$

vi- $\int x\sin x^2 dx$

الحل :

i- $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x2x + c$

ii- $\int 3\cos 3\theta\, d\theta = \sin 3\theta + c$

iii- $\int \sec^2(-2y)\,dy = -\frac{1}{2}\int(-2)\sec^2(-2y)\,dy = -\frac{1}{2}\tan(-2y)+c$

iv- $\int \sin^3 t\, dt = \int \sin^2 t \sin t\, dt$

$$= \int \left(1 - \cos^2 t\right) \sin t \; dt$$

$$= \int \left(\sin t - \cos^2 t \sin t\right) dt$$

$$= -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + c$$

v- $\int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx = \int \cos^{1/2} x \sin x \, dx$

$$= -\frac{2}{3} \cos^{3/2} x + c$$

vi- $\int x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin x^2 \, dx$

بوضع $x^2 = \theta$ نجد أن

$$= \frac{1}{2} \int \sin\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

12- أوجد قيم التكاملات التالية :

i- $\int \frac{6 \, du}{9 + u^2}$

ii- $\int \frac{dy}{1 + 9y^2}$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} dx$

iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 9}}$

الحل :

i- $\int \frac{6 \, du}{9 + u^2} = 6 \int \frac{du}{3^3 + u^2}$

$$= 6\left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{u}{3}\right) + c$$

$$= 2 \tan^{-1} \frac{u}{3} + c$$

ii- $\int \frac{dy}{1 + 9y^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dy}{\frac{1}{9} + y^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dy}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2}$

$$= \frac{1}{9}\left(3 \tan^{-1} 3y\right) + c$$

$$= \frac{1}{3} \tan^{-1} 3y + c$$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} dx = \int \left(\frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} dx\right)$

بوضع $3 - \sin^2 x = y$ نجد أن

$$= -\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -2\sqrt{y} + c$$

$$= -2\sqrt{3-\sin^2 x} + c$$

iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x}} = \sin^{-1}\frac{x}{2\sqrt{2}} + c$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3} + c$

وذلك بفرض أن $\sec\theta = \frac{x}{3}$ حيث هذا يؤدى إلى $dx = 3\sec\theta\tan d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta}{9\sec\theta\tan\theta}d\theta = \frac{1}{3}\theta + c$$

$$= \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3} + c$$

13- أثبت أن

1- $\int \frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{3\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{7}}{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}\right| + c$

2- $\int \frac{dx}{3x^3-8x+7} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right) + c$

الحل :

1- $\because \frac{1}{5x^2-7} = \frac{1}{5}.\frac{1}{x^2-7/5} = \frac{1}{5}.\frac{1}{\left(x+\sqrt{7/5}\right)\left(x-\sqrt{7/5}\right)}$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{7/5}} - \frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{35}} - \frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)$$

$$\therefore \int\left(\frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{2\sqrt{35}}\left\{\int\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}} - \int\left(\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}}\right)\right\}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{25}}\left\{\ln\left|x-\sqrt{7/5}\right| - \ln\left|x+\sqrt{7/5}\right|\right\} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7/5}}{x+\sqrt{7/5}}\right| + c$$

2- $\because 3x^2-8x+7 = 3\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}\right)$

$$= 3\left[\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)+\frac{7}{3}-\frac{16}{9}\right]$$

$$= 3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}\right]$$

$$\therefore \int \frac{dx}{3x\ \ -8x+7} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}$$

بوضع $x-\frac{4}{3}=u$ نجد أن

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{3u}{\sqrt{5}}+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right)+c$$

14- أوجد قيمة كلا من التكاملات الآتية :

i- $\int x^2 e^x\,dx$ ii- $\int x\cos x\,dx$

iii- $\int \tan^{-1}x\,dx$ iv- $e^x \sin x\,dx$

الحل : نفرض أن

i-

$$dv = e^x\,dx, \qquad u = x^2$$
$$\therefore u = x^2, \qquad v = e^x$$

بالتكامل بالجزئ

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x\,e^x\,dx$$

$$\because \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$
$$= x\,e^x - e^x + c$$

$$\therefore \int x^2 e\ \ dx = x^2 e^x - 2x\,e^x + 2e^x + c$$
$$= \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + c$$

ii-

بوضع

$$dv = \cos x\,dx, \qquad u = x$$
$$\therefore v = \sin x, \qquad u = x$$

بالتكامل بالتجزئ

$$\therefore \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + c.$$

iii- $\int \tan^{-1}x\,dx$

بوضع $u = \tan^{-1}x, \qquad dv = dx$

$$\therefore du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = x$$

$$\therefore \int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$
$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$$

iv- $\int e^{x} \sin x \, dx$

بوضع $\quad dv = e^{x} dx \qquad u = \sin x.$

$\therefore du = \cos x \, dx, \quad v = e^{x}$

$\therefore \int e^{x} \sin x \, dx = e^{x} \sin x - \int e^{x} \cos x \, dx$

مرة أخرى بفرض أن

$u_1 = \cos x \qquad dv_1 = e^{x} dx$

$\therefore du_1 = -\sin x \, dx, \qquad v_1 = e^{x}$

$\therefore \int e^{x} \cos x \, dx = e^{x} \cos x + \int e^{x} \sin x \, dx$

$\therefore \int e^{x} \sin x \, dx = e^{x} (\sin x - \cos x) - e^{x} \sin x \, dx + c$

$\therefore \int e^{x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{x} (\sin x - \cos x) + c$

15- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sec^{4} 2x \tan 2x \, dx$

ii- $\int \tan^{3} x \, dx$

iii- $\int (\sec x \, dx)$

iv- $\int \cos 2x \cos 5x \, dx$

v- $\int \left(\sin^{-1} x\right)^{3} dx$

الحل :

i- $\int \sec^{4} 2x \tan 2x \, dx = \int \sec^{3} 2x \left(\sec 2x \tan 2x) dx\right)$

بوضع $\sec 2x = z$ نجد أن

$$= \frac{1}{2} \int z^{3} dz$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{4} z^{4} + c$$

$$= \frac{1}{8} \sec^{4} 2x + c$$

ii- $\int \tan^{3} x \, dx = \int \tan^{2} x \tan x \, dx$

$$= \int \left(\sec^{2} x - 1\right) \tan x \, dx$$

$$= \int \sec^{2} x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{2} x + \ell n \cos x + c$$

iii- $\int \sec x \, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec + \tan x} dx$

$$= \int \frac{\sec^{2} x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

ولأن البسط تفاضل المقام فإن $= \ln(\sec x + \tan x) + c$

iv-

تذكر أن

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2-1$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

والآن من العلاقة الأولى عندما $\alpha=2,\beta=5$ نجد أن

$$\int\cos 2x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos 7x+\cos 3x\right]dx=\frac{1}{2}\int\cos 7x\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 3x\,dx$$
$$=\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{6}\sin 3x+c$$

v- $\int\left(\sin^{-1}x\right)^3dx$

نفرض أن $\sin^{-1}x=z$

$$\therefore x=\sin z,\qquad dx=\cos z\,dz$$
$$\therefore\int\left(\sin^{-1}\right)^3dx=\int z^3\cos z\,dz$$

بالتكامل بالتجزئ وذلك بفرض أن

بفرض أن

$$u=z^3,\quad dv=\cos z\,dz$$
$$\therefore du=3z^2dz,\qquad v=\sin z$$

نجد أن

$$\int\left(\sin^{-1}\right)dx=\int z^3\cos z\,dz$$
$$=z^3\sin z-3\int z^2\sin z\,dz\qquad(*)$$

بفرض أن

$$u_1=z^2,dv_1=\sin z\,dz$$
$$\therefore du_1=2z\,dz,\qquad v_1=\cos z=-\cos z$$
$$\therefore\int z^2\sin z\,dz=z^2\cos z+2\int z\cos z\,dz\qquad(**)$$

مرة أخى نفرض أن $u_2=z,dv_2=\cos z\,dz$

$$\therefore du_2=dz,\qquad \upsilon_2=\sin z$$
$$\therefore\int z\cos z\,dz=z\sin z-\int\sin z\,dz$$
$$=z\sin z+\cos z+c$$

بالتعويض فى (**) ثم فى (*) نحصل على

$$\int\left(\sin^{-1}\right)dx = z^3\sin z + 3z^2\cos z - 6z\sin z + 6\cos z + c$$

$$= x\left(\sin^{-1}x\right)^3 + 3(1-x)^{1/2}\left(\sin^{-1}x\right)^2 - 6x\sin^{-1}x + 6(1-x)^{1/2} + c$$

16- أثبت أن

$$\text{i}-\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + c;\ \ a>0$$

$$\text{ii-}\ \int\sqrt{2+3x^2\,dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\left(2+3x^2\right)^{1/2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2}x\left(2+3x^2\right)^{1/2} + c$$

$$\text{iii-}\ \int\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = .\ln\left|\frac{t}{a}+\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{a}\right| + c$$

$$\text{iv-}\ \int\frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{3}\sin^{-1}(x-1) + c$$

$$\text{v-}\ \int\frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy = 3\sin^{-1}e^y + c$$

الحل :

i-

بوضع $x = a\sin\theta$ حيث $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta, \qquad dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \int\frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}a\cos\theta\, d\theta$$

$$\int\cot^2\theta\, d\theta = \int\left[\operatorname{cosec}^2\theta - 1\right]d\theta$$

$$= -\cot\theta - \theta + c.$$

$$\because \sin\theta = x/a \qquad \therefore \cos\theta = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\therefore \int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\text{ii-}\ \int\sqrt{2+3x^2\,dx}$$

بوضع $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\tan\theta$ فإن $dx = \sqrt{\frac{2}{3}\text{sex}^2}\theta\, d\theta$

$$\therefore \int\sqrt{2+3x^2\,dx} = \sqrt{3}\int\left(\frac{2}{3}+x^2\right)dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int\sec^3\theta\, d\theta$$

بالتكامل بالتجزئ بوضع

$$u=\sec\theta, \qquad dv=\sec^2\theta\, d\theta$$
$$\therefore du=\sec\theta\tan\theta\, d\theta, \qquad v=\tan\theta$$
$$\therefore \int \sec^3\theta\, d\theta=\sec\theta\tan\theta-\int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$
$$=\sec\theta\tan\theta-\int\left(\sec^2\theta-1\right)\sec\theta\, d\theta$$
$$\therefore \int \sec^3\theta\, d\theta=\sec\theta\tan\theta+\int\sec\theta\, d\theta$$
$$=\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c$$
$$\therefore \int\sqrt{2+x3^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right]+c$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\left(2+3x^2\right)^{1/2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2}x\left(2+3x^2\right)^{1/2}+c$$

iii- $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}$

نفرض أن $t=a\sec\theta$

$$\therefore dt=a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$
$$\therefore \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}}=\int\frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a\tan\theta}=\int\sec\theta\, d\theta$$
$$=\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c$$
$$=\ln\left|\frac{t}{a}+\frac{\sqrt{t^2-a}}{a}\right|+c$$

iv- $\int\frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx$

$$\because 6x-3x^2=-3\left(x^2-2x\right)=-3\left[\left(x-1\right)^2-1\right]=3\left[1-\left(x-1\right)^3\right]$$

بوضع $u=x-1$ نحج أن $dx=du$

$$\therefore \int\frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx=\int\frac{2\left(u+1\right)+1}{\sqrt{3\left(1-u^2\right)}}du$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}du+\sqrt{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-u^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}u+c$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}\left(x-1\right)+c$$

v- $\int\frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy$

بوضع $u=e^y$ نجد أن $du=e^y dy$

$$\therefore \int \frac{3e^{y}}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy = 3\int \frac{du}{\sqrt{2-u^{2}}} = 3\sin^{-1}u + c$$
$$= 3\sin^{-1}e^{y} + c$$

17- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x} dx$

ii- $\int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx$

الحل :

(1) يلاحظ أن الدالة المكاملة هى كسر حقيقى لأن درجة البسط أقل من درجة المقام ،لذلك يجب تحليل هذه الكسر إلى عدد عوامل المقام الأولية. لذا نبدأ بتحليل المقام حيث :

$$x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x \;=\; x(x-2)\left(x^2 - 1\right)$$

بذلك يكون

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x} = \frac{4}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{cx + D}{x^2 + 1}$$

لإيجاد قيم الثوابت A, B, C, D نجمع الكسور فى الطرف الأيمن نلاحظ أنه يجب لتساوى الطرفين أن يكون

$$6x^3 - 11x^2 + 5x + 4 = A(x-2)\left(x^2+1\right) + BX\left(x^2+1\right) + (CX + D)X(x-2)$$

بمقارنة معاملات قوى X فى الطرفين نجد أن $A = 2,\ B = 1,\ C = 3,\ D = -1$

$$\therefore \int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x} dx = 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{3x-1}{x^2+1} dx$$
$$= 2\ln x + \ln(x-2) + 3\int \frac{x}{x+1} dx - \int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \ln\left(x^2(x-2)\right) + \ln\left(x^2+1\right) + \tan x + c$$
$$= \ln\left(x^2(x-2)\left(x^2+1\right)^{3/2}\right) + \tan^{-1}x + c$$

(2) واضح أن درجة البسط للدالة المكاملة أكبر من درجة المقام لذلك فهى تمثل كسر غير حقيقى وبأجراء القسمة المطولة نجد أن

$$\frac{x^4 + 48x^3 + 37x^2 20x + 3}{9x \;\; + 12x^2 - 11x + 2} = x + 4 + \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2}$$

حيث الكسر الذى فى الطرف الأيمن هو كسر حقيقى

$$\therefore \int \frac{x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx = \frac{x^2}{2} 4x + \int \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx$$

ولإيجاد التكامل الأخير نحلل الكسر $\frac{22x-5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2}$ حيث

$$9x^3 + 12x^2 11x + 2 = (x-2)(3x-1)^2$$
$$\therefore \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-1} + \frac{C}{(3x-1)^2}$$

ومنها يمكن إيجاد أن $A=-1,\ B=3,\ C=1$

$$\therefore \int \frac{22x-5}{9x^3+12x^2 11x+2}dx = -\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{3x-1}+\int\frac{dx}{(3x-1)^2}$$

$$=-\ln(x+1)+\ln(3x-1)-\frac{1}{3(3x-1)}+c$$

$$=\ln\frac{3x-1}{x+1}-\frac{1}{3(3x-1}+c$$

تمارين عامة

أوجد قيم التكاملات الآتية:

1- $\int 3\left(x+\frac{5}{2}x^3\right)dx$

2- $\int x\left(2x-3\right)dx$

3- $\int\left(3x^2-8x\right)dx$

4- $\int\left(x\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3\right)dx$

5- $\int 3x\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

6- $\int\left[t^3\left(4-2t\right)+\frac{6}{t}\right]dt$

7- $\int c\theta\left(a+\theta^2\right)d\theta$

8- $\int 9\left(z+4+\frac{1}{z^2}\right)dz$

9- $\int\left(3x^{-2}+\frac{11}{2}x^{-5}\right)dx$

10- $\int\sqrt{7z}\,dz$

11- $\int\left(\sqrt{\omega}-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)d\omega$

12- $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

13- $\int\frac{u-1}{u^3}du$

14- $\int 3x^2\left(x^3-10\right)dx$

15- $\int u^2\left(u^3+3\right)^{10}du$

16- $\int 3x\left(x^2+6\right)^3 dx$

17- $\int\left(x^2+6\right)^3 dx$

18- $\int\frac{dt}{\left(t-1\right)^2}$

19- $\int\left(6z^2+5\right)\left(2z^3+5z+9\right)^4 dz$

20- $-\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

21- $\int\left(x+\sqrt{1-x}\right)dx$

22- $\int e^{ax+b}dx$

23- $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

24- $\int e^{-t/z}dt$

25- $\int\frac{3dx}{e^{4x+1}}$

26- $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

27- $\int\frac{3x^2 2x}{x^3-x^2}dx$

28- $\int\frac{8x+10}{2x^2 5x}dx$

29- $\int x4^{x^2+6}dx$

30- $\int\frac{1-\sin\alpha}{\alpha+\cos\alpha}d\alpha$

31- $\int 5^{3t}dt$

32- $\int\frac{1}{3^{2u}}du$

33- $\int\sin\left(ax+b\right)dx;\ a\neq 0$

34- $\int\sin 2x\,dx$

35- $\int\left(2\sin\frac{4}{3}x+4\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$

36- $\int\sec\frac{4}{2}\tan\frac{4}{2}du$

37- $\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

38- $\int\tan ax\sec^2 ax\,dx$

39- $\int(1-\cos z\,2)^4\sin 2t\,dt$

40- $\int(1+\sin y)^2\cos y\,dy$

41- $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

42- $\int\frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

43- $\int\frac{x^2+a}{x^3}dx$

44- $\int\frac{3x-4}{x-4}dx$

45- $\int\frac{dx}{x^2-2x+8}$

46- $\int\sin^{-1}3y\,dy$

47- $\int x\,a^{x^2}\,dx$

48- $\int x\,a^x\,dx$

49- $\int\left(3x+x^2\right)\cos x\,dx$

50- $\int\sin^7\frac{x}{2}dx$

51- $\int\sqrt{4x^2-9}\,dx$

52- $\int x\sqrt{4x^2-25}\,dx$

53- $\int\frac{dz}{\sqrt{3-7z^2}}$

54- $\int\frac{dx}{x(x+4)}$

55- $\int\frac{1+x^3}{x^2-4x+3}dx$

56- $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$

57- $\int\frac{y^5+3y^4+2y^3-y^2+4}{y^3+3y^2+2y}dy$

58- $\int\frac{dx}{2x^2+9}$

59- $\int\frac{dx}{x^2+6x+9}$

60- $\int x\sec^{-1}x\,dx$

61- $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$

62- $\int\frac{b\,dt}{\cos^2 at};\ a\neq 0$

63- $\int\sin 7x\sin 3x\,dx$

64- $-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{10-x^2}}$

65- $\int\tan^{-1}\sqrt{u}\,du$

(7-2) التكامل بالتجزئ Integration by Parts.

من المعلوم من قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين قابلتين للتفاضل أنه :

$$\frac{d}{dx}(\phi.\psi)=\phi.\frac{d\psi}{dx}+\psi.\frac{d\phi}{dx}$$

أى أن $d(\phi.\psi)=\phi.d\psi+\psi.d\phi$ ومنها نجد أن $\phi.d\psi=d(\phi.\psi)-\psi.d\phi$

بالتكامل مع العلم بأن $\int d(\phi.\psi)=\phi.\psi+c$ نجد أن $\int\phi d\psi=\phi\psi-\int\psi d\phi$

معنى ذلك أننا استبدلنا التكامل $\int\phi d\psi$ بتكامل آخر هو $\int\psi d\phi$. وتكون الطريقة مفيدة إذا كان التكامل الثانى أبسط فى إجرائه من التكامل الأول.

مثال (1) : أوجد $\int xe^x dx$

الحل

ضع $d\psi=e^x dx,\ \phi=x$ يكون (بالتكامل) $d\phi=dx,\ \psi=e^x$

$$\therefore\int\phi d\psi=\phi\psi-\int\psi d\phi$$

$$\therefore\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c$$

لاحظ أن $I=\int x\,e^x dx=\int x\,d\,e^x$ وهى على صورة $\int\phi d\psi$ وبالتالى فإن

$$I=\int x\,d\,e^x=x\,e^x-\int e^x\,dx$$

مثال (2) : أوجد $\int\log\ x\,dx$

الحل

نختار

$$\phi=\log x,\quad d\psi=dx$$

$$\therefore d\phi=\frac{1}{x}dx,\qquad \psi=x$$

$$\therefore\int\log x\,dx=x\log x-\int x.\frac{1}{x}dx$$

$$=x\log x-x+c$$

مثال (3) أوجد $\int e^x\sin x\,dx$

الحل

نختار

$\phi = e^x, \qquad d\psi = \sin x \, dx$

$\therefore d\phi = e^x \, dx, \qquad \psi = -\cos x$

$\therefore \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int \cos x . e^x dx \quad (1)$

وبالتكامل الثانى يبدو أنه يماثل التكامل الأصلى وليس أفضل منه فى التبسيط. نحاول مرة أخرى باختيار :

$\phi = e^x \qquad d\psi = \cos x \, dx$

$\therefore d\phi = e^x \, dx, \qquad \psi = \sin x$

$\therefore \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \qquad (2)$

بالتعويض فى (1) نحصل على

تمارين (6-2)

أوجد قيم التكاملات الآتية

(1) $\int x \log x \, dx$ (2) $\int x \sin x \, dx$

(3) $\int x^2 \sin x \, dx$ (4) $\int x^2 \log x \, dx$

(5) $\int (\log x)^2 \, dx$ (6) $\int e^x \sin 2x \, dx$

(7) $\int e^{3x} \sin 2x \, dx$

(8-2) التكامل بلاختزال المتتالى

سوف نستعرض بعض الصور القياسية للاختزال

صورة (1) : إذا كان $I_n = \int x^n e^{ax} \, dx$ **فإن**

$$\therefore I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1} \qquad (1)$$

واضح أن

$$I_1 = \int x e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x e^{ax} - I_0 + c$$

$$I_0 = \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

وتكرار استخدام القانون يؤدى فى النهاية إلى ظهور I_0.

البرهان : نستخدم التكامل بالتجزئ بوضع

$$\phi = x^n, \qquad d\psi = e^{ax}\,dx$$

$$\therefore d\phi = n\,x^{n-1}\,dx, \quad \psi = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\therefore \int x^n\,e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n\,e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1}$$

مثال (1) : أوجد $\int x^3\,e^{2x}\,dx$

الحل

واضح أن $n = 3,\ a = 2$ **لذا يكون**

$$I_3 = \int x^3\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3\,e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2\,e^{2x}\,dx$$

حيث

$$= \frac{1}{2}x^3\,e^{2x} - \frac{3}{2}I_2$$

$$I_2 = \int x^2\,e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,e^{2x} - \frac{2}{2}I_1$$

$$I_1 = \int x\,e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\,e^{2x} - \frac{1}{2}I_0$$

$$I_0 = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

بالتعويض المتتالى نجد أن

$$I_1 = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$I_2 = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$I_3 = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x}\right) + c$$

$$= e^{2x}\left[\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}\right] + c$$

$$= \frac{1}{8} e^{2x}\left[4x^3 - 6x^2 + 6x - 3\right] + c$$

صورة (2) : إذا كان

$$I_n = \int x^n \cos(ax)\, dx,$$

$$J_n = \int x^n \sin(ax)\, dx$$

فإن

$$I_n = \frac{1}{a} x^n \sin(ax) - \frac{n}{a} J_{n-1} \qquad (2)$$

$$J_n = -\frac{1}{a} x^n \cos(ax) + \frac{n}{a} I_{n-1} \qquad (3)$$

والاختزال المتتالى يصل بنا فى النهاية إلى إحدى الصورتين :

$$I_0 = \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$$

أو

$$J_0 = \int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$$

البرهان : يترك للقارئ (باستخدام التكامل بالتجزئ)

مثال(2) : أوجد $\int x^2 \cos 3x\, dx$

الحل

$$\therefore I_2 = \int x^2 \cos 3x \; dx \qquad\qquad (a = 3)$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} I_1,$$

$$I_1 = \int x \; \sin 3x \; dx$$

$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{3} I_0,$$

$$I_0 = \int \cos 3x \; dx$$

$$= \frac{1}{3} \sin 3x + c.$$

بالتعويض نجد أن

$$I_1 = -\frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x$$

$$\therefore I_2 = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x \right) + c$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{5} x \cos 3x + \frac{2}{27} \sin 3x + c$$

صورة (3) : إذا كان $I_n = \int \cos^n x \, dx$ **فإن**

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

صورة (4) : إذا كان $I_n = \int \sin^n x \, dx$ **فإن**

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

البرهان : نستخدم أيضا التكامل بالتجزئ

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d(\sin x)$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n+1)\left[I_{n-2} - I_n\right].$$
$$\therefore nI_n = \cos^{n-1} \sin x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\therefore I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

وتكرار هذه الخطوات يصل بنا إلى إحدى الصورتين :

$$I_0 = \int dx = x + c$$

إذا كانت n زوجية

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

إذا كانت n فردية

برهان الصورة (4) بالمثل حيث

$$I_0 = x + c, \quad I_1 = \cos x + c.$$

مثال (3) : أوجد $\int \cos^5 x\,dx$

باستخدام قاعدة الاختزال (3) نجد أن

$$I_5 = \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int \cos^4 d(\sin x)$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3,$$
$$I_3 = \int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\,dx(\sin x)$$
$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} I,$$
$$I_1 = \sin x + c$$
$$\therefore I_5 = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + c.$$

مثال (4) :أوجد $\int \sin^4 \theta\,d\theta$

الحل

$$\because I_4=\int \sin^4\theta\, d\theta=-\int \sin^3 x d(\cos x)$$

$$\therefore I_4=-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta+\frac{3}{4}I_2,$$

$$I_2=\int \sin^2\theta d\theta=-\int \sin x\, d(\cos x)$$

$$=-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}I_0,$$

$$I_0=\theta+c$$

$$\therefore I_4=-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta-\frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta+\frac{3}{8}\theta+c$$

ملحوظة : سبق لنا دراسة مثل هذه التكاملات وكيفية التكامل معها بدون اختزال

تمارين (7-2)

أوجد مستخدماً الاختزال قيمة التكاملات الآتية :

(1) $\int \cos^3 x\, dx$

(2) $\int \tan^2 x\, dx$

(3) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

(4) $\int \sec^4 x\, dx$

(5) $\int \cos^4 x\, dx$

(6) $\int \cos^3 2x\, dx$

(7) $\int x^3 e^x\, dx$

(8) $\int x^3 \sin x\, dx$

(9) $\int x^2 \cos 2x\, dx$

أمثلة عامة

1- أوجد قيمة $\int\left(6x^4-10x^2+7+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

الحل

$$\int\left(6x^4-10x^2+7+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int 6x^4dx-10\int x^2dx+7\int dx+\frac{1}{2}\int x^{-1/2}dx$$
$$=\frac{6}{5}x^5-\frac{10}{3}x^3+7x+x^{1/2}+c$$

2- أوجد قيمة $\int 6x(5-x)dx$

الحل

$$\int 6x(5-x)dx=6\int\left(5x-x^2\right)dx$$
$$=30\int x\,dx-6\int x^2\,dx$$
$$=15x^2-2x^3+c.$$

3- أوجد قيمة $\int\left[(4t-3)/t^3\right]dt$

الحل

$$\int\frac{4t-3}{t}dt=4\int\frac{1}{t^2}dt-3\int\frac{1}{t^3}dt$$
$$=4t^{-1}+\frac{3}{2}t^{-2}+c$$
$$=\frac{-4}{t}+\frac{3}{2t^2}+c=\frac{8t+3}{2t^2}+c$$

4- أوجد قيمة $\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx$

الحل

نفرض أن $x^2+1=t$ **نجد أن** $2x\,dx$ **كذلك**

$$\int (x^2+1)^3\, 2x\, dx = \int t^3\, dt = \frac{1}{4}t^4 + c$$

بالتعويض العكسى بوضع $t = x^2+1$ نجد أن

$$\int (x^2+1)^3\, 2x\, dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

5- أوجد قيمة $\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx}$

الحل

بوضع $z = 5-x^3$ **نجد أن** $dz = -3x^2\,dx$ **وأن**

$$\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx} = -\frac{4}{3}\int z^{1/2}\,dz$$
$$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2} + c$$
$$= -\frac{8}{9}(5-x^3)^{3/2} + c$$

6- أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int (3x^2-8x)\,dx$ **2-** $\int \frac{5}{13}\,du$

3- $\int (x+5)^n\,dx$ **4-** $\int (at+b)^5\,dt$

الحل

(1)
$$\int (3x^2-8x)\,dx = 3\int x^2 dx - 8\int x\,dx = x^3 - 4x^2 + c$$

(2)
$$\int \frac{5}{\sqrt{3}}\,du = \frac{5}{\sqrt{3}}\int du = \frac{5u}{13} + c$$

(3) بوضع $x+5=t$ **نجد أن** $dx = dt$ **كذلك**

$$\int (x+5)^n\,dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(x+5)^{n+1}}{n+1} + c$$

(4) نفرض أن $at+b=z$ **فيكون** $adt = dz$

$$\therefore \int (at+b)^5\,dt = \frac{1}{a}\int z^5 dz = \frac{z^6}{6a} + c$$
$$= \frac{(at+b)^6}{6a} + c$$

(7) أوجد قيم التكاملات التالية

1- $\int \pi r^2 dr$ **2-** $\int (t^2+t+5)/7\,dt$

3- $\int 4x^2(x+1)\,dx$ **4-** $\int (y^2+5)^3\, y\,dy$

5- $\int \left[x(x^3+1) - 1/x^4\right] dx$ **6-** $\int \frac{4}{\sqrt[3]{}}\,dt$

الحل

1- $\int \pi r^2\, dr = \pi\int dr = \frac{\pi}{2}r^3 + c$

2- $\int \left(t^2+t+5\right)/7\,dt$

$$=\frac{1}{7}\int t^2dt+\frac{1}{7}\int tdt+\frac{5}{7}\int dt$$

$$=\frac{1}{21}t^3+\frac{t^2}{14}+\frac{5}{7}t+c$$

3- $\int 4x^2\left(x+1\right)dx=4\int\left(x^3+x^2\right)dx$

$$=4\int x^3dx+4\int x^2dx$$

$$=x^4+\frac{4}{3}x^3+c$$

4- $2y\,dy=dz$ **يكون** $y^2+5=z$ **بفرض أن**

$$\therefore\int\left(y^2+5\right)^3 y\,dy=\frac{1}{2}\int\left(y^2-5\right)^3 2y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int z^3dz=\frac{1}{8}z^2+c$$

$$=\frac{1}{8}\left(y^2+5\right)^4+c$$

$$\int\left(x\left(x^3-1\right)-1.x^4\right)dx$$

5- $\int\left[x\left(x^3\right)-1/x^4\right]dx$

$$=\int\left(x^4+x-1/x^4\right)dy=\int x^4dx-\int xdx-\int\frac{dx}{x^4}$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3x^3}+c$$

6- $\int\frac{4}{\sqrt[3]{t}}dt=\int\frac{4}{t^{1/3}}dt=4\int t^{-1/3}dt$

$$=4\frac{t^{2/3}}{2/3}+c=6t^{2/3}+c$$

8- كامل كلا مما يأتى :

i- $\frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx$

ii- $\int\frac{5z^2-12z-10}{z^4}dz$

iii- $\int\sqrt{y}\left(3y+1\right)^2dy$

iv- $\int\left(3-4x\right)^{17}dx$

v- $\int\left(3x+5\right)^{-3}dx$

vi- $\int\left(8x-6\right)\left(4x^2-6x\right)^3dx$

vii- $\int\left[x+\frac{1}{(4x+3)^2}\right]dx$

viii- $\int x\sqrt{2x^2-1}\,dx$

الحل

i- $\frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(4-9x\right)^{1/2}\left(-9\right)\left(\frac{1}{-9}\right)dx$

$$= -\frac{1}{18}\int (4-9x)^{1/2}\,(-9)dx$$

$$= -\frac{1}{18}\int (4-9x)^{1/2}\,d(-9x)$$

$$= -\frac{1}{18}\frac{(4-9x)^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= -\frac{1}{27}(4-5x)^{3/2} + c$$

ii- $\int \frac{5z^2-12z-10}{z^4}dz = 5\int z^{-2}dz - 12\int z^{-3}dz - 10\int z^{-4}dz$

$$= -5z^{-1} - \frac{12}{-2}z^{-2} - \frac{10}{-3}z^{-3} + c$$

$$= -\frac{5}{z} + \frac{1}{6z^2} + \frac{10}{3z^3} + c$$

iii- $\int \sqrt{y}\,(3y+1)^2\,dy = \int \sqrt{y}\left(9y^2+6y+1\right)dy$

$$= 9\int y^{5/2}dy + 6\int y^{3/2}dy + \int y^{1/2}\,dy$$

$$= \frac{18}{7}y^{7/2} + \frac{12}{5}y^{5/2} + \frac{2}{3}y^{3/2} + c$$

$$= \sqrt{y}\left(\frac{18}{7}y^3 + \frac{12}{5}y^2 + \frac{2}{3}y\right) + c$$

iv- $\int (3-4x)^{17}\,dx = \int (3-4x)^{17}\,(-4)\left(\frac{1}{-4}\right)dx$

$$= -\frac{1}{4}\int (3-4x)^{17}\,d(-4x)$$

$$= -\frac{1}{4(18)}(3-4x)^{18} + c$$

$$= \frac{-1}{72}(3-4x)^{18} + c$$

v- $\int (3x+5)^{-3}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int 3(3x+5)^{-3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int (3x+5)^{-3}\,d(3x)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{-2}}{-2} + c$$

$$= -\frac{(3x+5)^{-2}}{6} + c$$

vi- $\int (8x-6)\left(4x^2-6x\right)^3\,dx$

بوضع $z = 4x^2 - 6x$ **نجد أن**

$$= \int z^3 dz$$
$$= \frac{1}{4} z^4 + c$$
$$= \frac{1}{4}\left((4x - 6x\right)^4 + c$$

vii- $\int \left[x + \frac{1}{(4x+3)^2} \right] dx = \int x\,dx + \int (4x+3)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\int (4x+3)^{-2}\,d(4x+3)$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}(4x+3)^{-1} + c$$

viii- $\int x\sqrt{2x^2} - 1dx = \int \left(2x^2 - 1\right)^{1/2} x\,dx$

بوضع $2x^2 - 1 = t$ **نجد أن**

$$= \frac{1}{4}\int t^{1/2} dt$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + c$$
$$= \frac{1}{6}\left(2x^2 - 1\right)^{3/2} + c$$

9- أوجد قيم التكاملات الآتية :

1- $\int ex\,dx$

2- $\int e^{ax}\,dx$

3- $\int 2e^{3x+2} dx$

4- $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$

5- $\int \left(\frac{e^z - 2}{e^z} \right) dz$

6- $\int e^{x^2} x\,dx$

الحل

1- $\int e\,x\,dx = e\int x\,dx = \frac{e}{2}x^2 + c$

حيث e عدد طبيعى وهو مقدار ثابت $e \approx 2.718$

2- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}\int e^t dt = \frac{e^{ax}}{a} + c$

3- $\int 2e^{3x+2} dx = 2\int e^{3x}.e^2 dx$

$$= 2e^2 \int e^{3x} dx = \frac{2e^2}{3} e^{3x} + c$$
$$= \frac{3}{2} e^{3x+2} + c$$

4- $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \int \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2} e^{2x}\, 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} + c$$

5- $\int \frac{e^z - 2}{e^z} dz = \int \left(1 - 2e^{-z}\right) dz$

$$= z + \frac{2}{e^z} + c$$

$$= \frac{ze^z + 2}{e^z} + c$$

6- $\int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{e^z}{2} + c$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

10- عين كلا من التكاملات الآتية :

$1 - \int \frac{2x}{x^2+3} dx$

ii- $\int \frac{4}{3t-11} dt$

iii- $\int \frac{4x}{x^2+3} dx$

iv- $\int \frac{u+1}{u^2+2u+11} + du$

v- $\int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta} d\theta;\ b \neq 0$

الحل

بوضع $t = x^2$

i- $\int \frac{2x}{x^2+3} dx = \int \frac{dt}{t+3} = \ln(t+3) + c$

$$= \ln(x^2+3) + c$$

بفرض أن $3t - 11 = z$

ii- $\int \frac{4dt}{3t-11} = \frac{4}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{4}{3}\ln z + c$

$$= \frac{4}{3}\ln(3t-11) + c$$

بوضع $t = x^2 + 3$ **نجد أن**

iii- $\int \frac{4x}{x^2+3} dx = 2\int \frac{2x}{x^2+3} dx$

$$= 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln t + c$$

$$= 2\ln\left(x^2+3\right) + c$$

$$= \ln\left(x^2+3\right)^2 + c$$

بوضع $z = u^2 + 2u + 11$ **نحصل على**

iv- $\int \frac{u+1}{u^2+2u+11} du = \frac{1}{2}\int \frac{2y+2}{u^2+2u+11} du$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left\{u^2+2u+11\right\} + c$$

$$= \ln\left\{u^2+2u+11\right\}^{1/2} + c$$

iv- $\int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}\,de = \frac{1}{b}\int \frac{b\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}\,de$

بوضع $z = a + b\tan\theta$ **نجد أن** $dz = b\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\ln z + c$$
$$= \frac{1}{b}\ln\{a + b\tan\theta + c\}$$

11- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sin 2x\,dx$

ii- $\int 3\cos 3\theta\,d\theta$

iii- $\int \sec^2(-2y)\,dy$

iv- $\int \sin^3 t\,dt$

v- $\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx$

vi- $\int x\sin x^2 dx$

الحل

i- $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x 2x + c$

ii- $\int 3\cos 3\theta\,d\theta = \sin 3\theta + c$

iii- $\int \sec^2(-2y)\,dy = -\frac{1}{2}\int(-2)\sec^2(-2y)\,dy = -\frac{1}{2}\tan(-2y) + c$

iv- $\int \sin^3 t\,dt = \int \sin^2 t\sin t\,dt$

$$= \int\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\ dt$$
$$= \int\left(\sin t - \cos^2 t\sin t\right)dt$$
$$= -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + c$$

v- $\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx = \int \cos^{1/2} x\sin x\,dx$

$$= -\frac{2}{3}\cos^{3/2} x + c$$

vi- $\int x\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sin x^2\,dx$

بوضع $x^2 = \theta$ **نجد أن**

$$= \frac{1}{2}\int \sin\theta\,d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

12- أوجد قيم التكاملات التالية :

i- $\int \frac{6\,du}{9+u^2}$

ii- $\int \frac{dy}{1+9y^2}$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}\,dx$

iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

الحل

i- $\int \frac{6\,du}{9+u^2} = 6\int \frac{du}{3^3+u^2}$

$$= 6\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3}\right)+c$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{u}{3}+c$$

ii- $\int \frac{dy}{1+9y^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dy}{\frac{1}{9}+y^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dy}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+y^2}$

$$= \frac{1}{9}\left(3\tan^{-1}3y\right)+c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}3y+c$$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx = \int\left(\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx\right)$

بوضع $3-\sin^2 x = y$ **نجد أن**

$$= -\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -2\sqrt{y}+c$$

$$= -2\sqrt{3-\sin^2 x}+c$$

iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x}} = \sin^{-1}\frac{x}{2\sqrt{2}}+c$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$

وذلك بفرض أن $\sec\theta = \frac{x}{3}$ **حيث هذا يؤدى إلى** $dx = 3\sec\theta\tan d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta}{9\sec\theta\tan\theta}d\theta = \frac{1}{3}\theta+c$$

$$= \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$$

13- أثبت أن

1- $\int \frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{3\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{7}}{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}\right|+c$

2- $\int \frac{dx}{3x^3-8x+7} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right)+c$

الحل

1- $\because \frac{1}{5x^2-7} = \frac{1}{5}.\frac{1}{x^2-7/5} = \frac{1}{5}.\frac{1}{\left(x+\sqrt{7/5}\right)\left(x-\sqrt{7/5}\right)}$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{7/5}}-\frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{35}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{35}}-\frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)$$

$$\therefore \int\left(\frac{dx}{5x^2-7}=\frac{1}{2\sqrt{35}}\left\{\int\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}}-\int\left(\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}}\right)\right\}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{25}}\left\{\ln\left|x-\sqrt{7/5}\right|-\ln\left|x+\sqrt{7/5}\right|\right\}+c$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7/5}}{x+\sqrt{7/5}}\right|+c$$

2- $\because 3x^2-8x+7=3\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}\right)$

$$=3\left[\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)+\frac{7}{3}-\frac{16}{9}\right]$$

$$=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}\right]$$

$$\therefore \int\frac{dx}{3x\ \ -8x+7}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}$$

بوضع $x-\frac{4}{3}=u$ **نجد أن**

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{3u}{\sqrt{5}}+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right)+c$$

14- أوجد قيمة كلا من التكاملات الآتية :

i- $\int x^2 e^x\,dx$ **ii-** $\int x\cos x\,dx$

iii- $\int \tan^{-1}x\,dx$ **iv-** $e^x \sin x\,dx$

الحل

i- **نفرض أن**

$dv=e^x\,dx,\qquad u=x^2$

$\therefore u=x^2,\qquad v=e^x$

بالتكامل بالجزئ

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$\because \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$\therefore \int x^2 e \ \ dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$= \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + c$$

ii-

بوضع $dv = \cos x \, dx, \qquad u = x$

$\therefore v = \sin x, \qquad u = x$

بالتكامل بالتجزئ

$$\therefore \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c.$$

iii- $\int \tan^{-1} x \, dx$

بوضع $u = \tan^{-1} x, \qquad dv = dx$

$$\therefore du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = x$$

$$\therefore \int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2}$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + c$$

iv- $\int e^x \sin x \, dx$

بوضع $u = \sin x. \qquad dv = e^x dx$

$$\therefore du = \cos x \, dx, \quad v = e^x$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

مرة أخرى بفرض أن

$$u_1 = \cos x \qquad dv_1 = e^x dx$$

$$\therefore du_1 = -\sin x \, dx, \qquad v_1 = e^x$$

$$\therefore \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) - e^x \sin x \, dx + c$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

15- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sec^4 2x \tan 2x \, dx$

ii- $\int \tan^3 x \, dx$

iii- $\int (\sec x \, dx)$

iv- $\int \cos 2x \cos 5x \, dx$

v- $\int \left(\sin^{-1} x\right)^3 dx$

الحل

i- $\int \sec^4 2x \tan 2x \, dx = \int \sec^3 2x \left(\sec 2x \tan 2x)dx\right)$

بوضع $\sec 2x = z$ **نجد أن**

$$= \frac{1}{2}\int z^3 \, dz$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}z^4 + c$$
$$= \frac{1}{8}\sec^4 2x + c$$

ii- $\int \tan^3 x \, dx = \int \tan^2 x \tan x \, dx$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\tan x \, dx$$
$$= \int \sec^2 x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ell n \cos x + c$$

iii- $\int \sec x \, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec + \tan x} dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

ولأن البسط تفاضل المقام فإن $= \ln(\sec x + \tan x) + c$

iv-

تذكر أن

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right) + \cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right) + \sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right) - \sin\left(\alpha+\beta\right)\right]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right) - \cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 - 1$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

والآن من العلاقة الأولى عندما $\alpha = 2, \beta = 5$ **نجد أن**

$$\int \cos 2x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos 7x + \cos 3x\right]dx = \frac{1}{2}\int \cos 7x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x \, dx$$
$$= \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{6}\sin 3x + c$$

v- $\int \left(\sin^{-1} x\right)^3 dx$

نفرض أن $\sin^{-1} x = z$

$$\therefore x=\sin z, \qquad dx=\cos z\,dz$$
$$\therefore \int\left(\sin^{-1}\right)^{3}dx=\int z^{3}\cos z\,dz$$

بالتكامل بالتجزئ وذلك بفرض أن

بفرض أن

$$u=z^{3}, \quad dv=\cos z\,dz$$
$$\therefore du=3z^{2}dz, \qquad v=\sin z$$

نجد أن

$$\int\left(\sin^{-1}\right)dx=\int z^{3}\cos z\,dz$$
$$=z^{3}\sin z-3\int z^{2}\sin z\,dz \qquad (*)$$

بفرض أن

$$u_1=z^{2}, dv_1=\sin z\,dz$$
$$\therefore du_1=2z\,dz, \qquad v_1=\cos z=-\cos z$$
$$\therefore \int z^{2}\sin z\,dz=z^{2}\cos z+2\int z\cos z\,dz \qquad (**)$$

مرة أخى نفرض أن $u_2=z, dv_2=\cos z\,dz$

$$\therefore du_2=dz, \qquad \upsilon_2=\sin z$$
$$\therefore \int z\cos z\,dz=z\sin z-\int \sin z\,dz$$
$$=z\sin z+\cos z+c$$

بالتعويض فى (**) ثم فى (*) نحصل على

$$\int\left(\sin^{-1}\right)dx=z^{3}\sin z+3z^{2}\cos z-6z\sin z+6\cos z+c$$
$$=x\left(\sin^{-1}x\right)^{3}+3(1-x)^{1/2}\left(\sin^{-1}x\right)^{2}-6x\sin^{-1}x+6(1-x)^{1/2}+c$$

16- أثبت أن

$$\text{i}-\int\frac{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}{x^{2}}dx=-\frac{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c;\ \ a>0$$

ii- $$\int\sqrt{2+3x^{2}\,dx}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\left(2+3x^{2}\right)^{1/2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2}x\left(2+3x^{2}\right)^{1/2}+c$$

iii- $$\int\frac{dt}{\sqrt{t^{2}-a^{2}}}=.\ln\left|\frac{t}{a}+\frac{\sqrt{t^{2}-a^{2}}}{a}\right|+c$$

iv- $$\int\frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^{2}}}dx=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^{2}}+\sqrt{3}\sin^{-1}(x-1)+c$$

v- $$\int\frac{3e^{y}}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy=3\sin^{-1}e^{y}+c$$

الحل

i-

بوضع $x=a\sin\theta$ حيث $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta, \qquad dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}\, a\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \cot^2\theta\, d\theta = \int \left[\operatorname{cosec}^2\theta - 1\right] d\theta$$

$$= -\cot\theta - \theta + c.$$

$$\because \sin\theta = x/a \qquad \therefore \cos\theta = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

ii- $\int \sqrt{2+3x^2\, dx}$

بوضع $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\tan\theta$ فإن $dx = \sqrt{\frac{2}{3}\text{sex}^2}\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \sqrt{2+3x^2\, dx} = \sqrt{3}\int \left(\frac{2}{3} + x^2\right) dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \sec^3\theta\, d\theta$$

بالتكامل بالتجزئ بوضع

$$u = \sec\theta, \qquad dv = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta, \qquad v = \tan\theta$$

$$\therefore \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

$$\therefore \int \sqrt{2+x3^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\right] + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\left(2+3x^2\right)^{1/2} + \sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2}x\left(2+3x^2\right)^{1/2} + c$$

iii- $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}$

نفرض أن $t = a\sec\theta$

$$\therefore dt = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a\tan\theta} = \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{t}{a} + \frac{\sqrt{t^2-a}}{a}\right| + c$$

iv- $\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx$

$$\because 6x-3x^2=-3\left(x^2-2x\right)=-3\left[\left(x-1\right)^2-1\right]=3\left[1-\left(x-1\right)^3\right]$$

بوضع $u=x-1$ نحج أن $dx=du$

$$\therefore \int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx=\int \frac{2\left(u+1\right)+1}{\sqrt{3\left(1-u^2\right)}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}du+\sqrt{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-u^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}u+c$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}\left(x-1\right)+c$$

v- $\int \frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy$

بوضع $u=e^y$ نجد أن $du=e^y dy$

$$\therefore \int \frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy=3\int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}}=3\sin^{-1}u+c$$

$$=3\sin^{-1}e^y+c$$

17- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}dx$

ii- $\int \frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx$

الحل

(1) يلاحظ أن الدالة المكاملة هى كسر حقيقى لأن درجة البسط أقل من درجة المقام ،لذلك يجب تحليل هذه الكسر إلى عدد عوامل المقام الأولية. لذا نبدأ بتحليل المقام حيث :

$$x^4-3x^3+x^2-2x \;=\; x(x-2)\left(x^2-1\right)$$

بذلك يكون

$$\frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}=\frac{4}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{cx+D}{x^2+1}$$

لإيجاد قيم الثوابت A, B, C, D نجمع الكسور فى الطرف الأيمن نلاحظ أنه يجب لتساوى الطرفين أن يكون

$$6x^3-11x^2+5x+4=A(x-2)\left(x^2+1\right)+BX\left(x^2+1\right)+(CX+D)X(x-2)$$

بمقارنة معاملات قوى X فى الطرفين نجد أن $A=2,\ B=1,\ C=3,\ D=-1$

$$\therefore \int \frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}dx = 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{3x-1}{x^2+1}dx$$
$$= 2\ln x + \ln(x-2) + 3\int \frac{x}{x+1}dx - \int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \ln\left(x^2(x-2)\right) + \ln\left(x^2+1\right) + \tan x + c$$
$$= \ln\left(x^2(x-2)\left(x^2+1\right)^{3/2}\right) + \tan^{-1} x + c$$

(2) واضح أن درجة البسط للدالة المكاملة أكبر من درجة المقام لذلك فهى تمثل كسر غير حقيقى وبأجراء القسمة المطولة نجد أن

$$\frac{x^4+48x^3+37x^2 20x+3}{9x \quad +12x^2-11x+2} = x+4+\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}$$

حيث الكسر الذى فى الطرف الأيمن هو كسر حقيقى

$$\therefore \int \frac{x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx = \frac{x^2}{2}4x + \int \frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}dx$$

ولإيجاد التكامل الأخير نحلل الكسر $\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}$ **حيث**

$$9x^3+12x^2 11x+2 = (x-2)(3x-1)^2$$
$$\therefore \frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-1} + \frac{C}{(3x-1)^2}$$

ومنها يمكن إيجاد أن $A=-1,\ B=3,\ C=1$

$$\therefore \int \frac{22x-5}{9x^3+12x^2 11x+2}dx = -\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{3x-1} + \int \frac{dx}{(3x-1)^2}$$
$$= -\ln(x+1) + \ln(3x-1) - \frac{1}{3(3x-1)} + c$$
$$= \ln\frac{3x-1}{x+1} - \frac{1}{3(3x-1} + c$$

تمارين عامة

أوجد قيم التكاملات الآتية:

1- $\int 3\left(x+\frac{5}{2}x^3\right)dx$

2- $\int x(2x-3)dx$

3- $\int \left(3x^2-8x\right)dx$

4- $\int \left(x\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3\right)dx$

5- $\int 3x\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

6- $\int \left[t^3(4-2t)+\frac{6}{t}\right]dt$

7- $\int c\theta\left(a+\theta^2\right)d\theta$

8- $\int 9\left(z+4+\frac{1}{z^2}\right)dz$

9- $\int \left(3x^{-2}+\frac{11}{2}x^{-5}\right)dx$

10- $\int \sqrt{7z}\,dz$

11- $\int \left(\sqrt{\omega}-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)d\omega$

12- $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

13- $\int \frac{u-1}{u^3}du$

14- $\int 3x^2\left(x^3-10\right)dx$

15- $\int u^2\left(u^3+3\right)^{10} du$

16- $\int 3x\left(x^2+6\right)^3 dx$

17- $\int \left(x^2+6\right)^3 dx$

18- $\int \frac{dt}{\left(t-1\right)^2}$

19- $\int \left(6z^2+5\right)\left(2z^3+5z+9\right)^4 dz$

20- $-\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

21- $\int \left(x+\sqrt{1-x}\right)dx$

22- $\int e^{ax+b} dx$

23- $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

24- $\int e^{-t/z} dt$

25- $\int \frac{3dx}{e^{4x+1}}$

26- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

27- $\int \frac{3x^2 2x}{x^3-x^2} dx$

28- $\int \frac{8x+10}{2x^2 5x} dx$

29- $\int x4^{x^2+6} dx$

30- $\int \frac{1-\sin\alpha}{\alpha+\cos\alpha} d\alpha$

31- $\int 5^{3t} dt$

32- $\int \frac{1}{3^{2u}} du$

33- $\int \sin\left(ax+b\right)dx;\ a\neq 0$

34- $\int \sin 2x\, dx$

35- $\int \left(2\sin\frac{4}{3}x+4\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$

36- $\int \sec\frac{4}{2}\tan\frac{4}{2}du$

37- $\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

38- $\int \tan ax \sec^2 ax\, dx$

39- $\int \left(1-\cos z\, 2\right)^4 \sin 2t\, dt$

40- $\int \left(1+\sin y\right)^2 \cos y\, dy$

41- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

42- $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

43- $\int \frac{x^2+a}{x^3} dx$

44- $\int \frac{3x-4}{x-4} dx$

45- $\int \frac{dx}{x^2-2x+8}$

46- $\int \sin^{-1} 3y\, dy$

47- $\int x\, a^{x^2} dx$

48- $\int x\, a^x dx$

49- $\int \left(3x+x^2\right)\cos x\, dx$

50- $\int \sin^7\frac{x}{2} dx$

51- $\int \sqrt{4x^2-9}\, dx$

52- $\int x\sqrt{4x^2-25}\, dx$

53- $\int \frac{dz}{\sqrt{3-7z^2}}$

54- $\int \frac{dx}{x\left(x+4\right)}$

55- $\int \frac{1+x^3}{x^2-4x+3} dx$

56- $\int \frac{dx}{x\left(x+1\right)^2}$

57- $\int \frac{y^5+3y^4+2y^3-y^2+4}{y^3+3y^2+2y} dy$

58- $\int \frac{dx}{2x^2+9}$

59- $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$

60- $\int x\sec^{-1} x\,dx$

61- $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

62- $\int \frac{b\,dt}{\cos^2 at};\ a \neq 0$

63- $\int \sin 7x \sin 3x\,dx$

64- $-\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10-x^2}}$

65- $\int \tan^{-1}\sqrt{u}\,du$

الفصل الرابع
تطبيقات التكامل

تطبيقات التكامل الغير محدد.

أولا : تطبيقات هندسية.

الأمثلة التالية تبين كيفية استخدام التكامل الغير محدد فى حل بعض المشكلات الهندسية.

مثال (1) : اوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة $(2,\ 3)$ والذى ميله عند أى نقطة عليه يكون مساويا للأحداثى السينى لتلك النقطة.

الحل : نفرض أن معادلة المنحنى هى $y = f(x)$

نعلم من دراسة المشتقة التفاضلية الأولى لدالة فى متغير واحد أنها تمثل هندسيا ميل لمنحنى الدالة عند النقطة المحسوب عندها التفاضل أى أن

ميل المماس للمنحنى الذى معادلته $y = f(x)$ عند النقطة $(x,\ y)$ هو y'. من معطيات المسألة يكون

$$y' = x \qquad (1)$$

المعادلة (1) تعنى أن الدالة المطلوبة y هى الدالة مقابلة للدالة $g(x) = x$ بتطبيق قواعد التكامل غير المحدد نجد أن

$$y = \int x\,dx$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad (2)$$

المعادلة (2) تعطى عائلة المنحنيات. يختلف كل منحنى فيها عن الآخر بالمقدار c. ولتحديد المنحنى المطلوب الذى يمر بالنقطة $(2, 3)$ نضع فى المعادلة $y = 3, x = 2$ لإيجاد قيمة c حيث

$$c = y - \frac{1}{2}x^2 = 3 - \frac{1}{2} \qquad (4)$$

وعلى ذلك فإن معادلة المنحنى المطلوب هى : $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

مثال (2) : أوجد معادلة المنحنى الذى إحداثى أى نقطة (x, y) عليه يحققان العلاقة

$$y'' = 6x - 2$$

ويمر بالنقطة $(0, 3)$ ويكون ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة مساوياً الواحد الصحيح.

الحل : لإيجاد معادلة المنحنى المطلوب $y = f(x)$ من العلاقة المعطاة نحتاج لإجراء التكامل غير المحدد مرتين متتاليتين فى المرة الأولى نحصل على y' حيث

$$y' = 3x^2 - 2x + c_1 \qquad (1)$$

وفى المرة الثانية نحصل على y على الصورة

$$y = x^3 - x^2 + c_1x + c_2 \qquad (2)$$

وقيم الثوابت الاختيارية c_1, c_2 تتحدد من باقى المعطيات بالمسألة نتعلم أن ميل المماس عند نقطة $(0,\ 3)$ للمنحنى يساوى الواحد أى أن $y' = 1 \text{ at } x = 0$ بالتعويض فى المعادلة (1) عند $y' = 1,\ x = 0$ نجد أن

$$c_1 = 1$$
$$\therefore y' = 3x^2 - 2x + 1$$
$$y = x^3 - x^2 + x + c_2$$

ولأن المنحنى يمر بالنقطة (0, 3) فإن

$$-3 = a^3 - o^2 + c_2$$
$$\therefore c_2 = -3$$

ومنها $y = x^3 - x^2 + x - 3$ هى معادلة المنحنى المطلوب.

ثانيا : تطبيقات فى الميكانيكا

إذا كانت سرعة جسم متحرك تعنى معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن أى أن العلاقة بين المسافة f التى يقطعها جسم متحرك من نقطة ثابتة وبسرعة v عند لحظة معينة بعد مرور زمن قدره t من نقطة البدء هى $v = \frac{df}{dt}$

وتعرف العملة بأنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن أى أن $w = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2f}{dt^2}$

ويستخدم التكامل غير المحدد فى الميكانيكا لحساب سرعة جسم متحرك كذلك المسافة التى قطعها الجسم بعد مرور فترة زمنية t من لحظة بدء الحركة وذلك إذا علمنا عجلة حركة الجسم.
حيث $\upsilon = \int w\, dt$ تعطى السرعة التى يتحرك لها الجسم إذا كانت عجلته معروفة. أما $f = \int \upsilon\, dt$ فتعطى المسافة التى يقطعها الجسم يتحرك بسرعة υ بعد مرور زمن قدرة t من بدء الحركة.

مثال (1) : قذفت كرة راسياً إلى أعلى بسرعة 128 14 sec من حافة برج ارتفاعه 160 ft فوق سطح الأرض. أوجد معادلات الحركة للكرة علماً بأن عجلة الجاذبية الأرضية هى 32 $^{\cdot}$ft/ sec^2

الحل : نعتبر اتجاه الحركة لأعلى هو الاتجاه الموجب للحركة فتكون عجلة الحركة (وهى عجلة الجاذبية) هى - 32 قدم / ث^2 (-32 ft/sec^2) أى أن

$$w = -32\,ft/sec^2 \qquad (1)$$

لإيجاد السرعة هند أى لحظة $\upsilon = \int w\, dt = -32t + c_1$ حيث c_1 ثابت التكامل.

عند بدء الحركة يكون $t = 0, \upsilon = 128\,ft/sec.$

$$\therefore c_1 = 128$$

وعلى ذلك فإن

$$\upsilon = -32t + 128 \qquad (2)$$

لإيجاد المسافة فإن

$$f = \int \upsilon\, dt = -\int (32t - 128)\, dt$$
$$= -32\int t\, dt + 128\int dt$$
$$= -16t^2 + 128t + c_2$$

ولكن عند بدء الحركة كانت الكرة على ارتفاع 160 قدم أى أنه عندما $t = 0$ فإن $f = 160$ ft أى أن

$$c_2 = 160$$
$$\therefore f = -16t^2 + 128t + 160 \qquad (3)$$

العلاقات الثلاثة (1), (2), (3) هى القوانين (معادلات الحركة) المطلوبة لإيجاد w, υ, f عند أى لحظة.

مثال (2) : سقطت كرة فى بئر ليس به ماء فوصلت إلى ارتفاع بعد مضى 12 ثانية. أوجد عمق البئر.

الحل : اتجاه الحركة هنا إلى أسفل فيكون $w = 32\,ft/sec^2$

$$\therefore v = \int 32\,dt = 32t + c_1$$

الكرة تركت لتسقط ولم تقذف أى أنها بدأت الحركة بسرعة صفر عندما كانت $t = 0$ ومنها يكون $c_1 = 0$

$$\therefore v = 32t$$

$$\because f = \int \upsilon\,dt$$

$$\therefore f = 16t^2 + c_2$$

وباعتبار أن نقطة السقوط هى نقطة بدء قياس المسافة فإن $f = 0,\ t = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\therefore f = 16t^2$$

وعندما $t = 12$ وهى لحظة وصول الكرة إلى قاع البئر فإن $f = 16 \times 144 = 2304$ ft أى أن عمق البئر 2304 قدم.

تمارين

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

1- $f'(x) = -4x, \quad f(2) = 3$

2- $f'(x) = 1 - +3x, \quad f(0) = -1$

3- $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f(3) = 0$

4- $f'(t) = 9^2 - 1, \quad f(-1) = 0$

5- $f'(t) = \dfrac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}, \quad f(1) = 2$

6- $f' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}, \quad f(4) = \dfrac{7}{4}$

(7) أوجد معادلة المنحنى الذى ميله عند أى نقطة (x, y) عليه هو x^2 ويمر بالنقطة (-2,0).

(8) أوجد معادلة منحنى على الصورة $y = f(x)$ علما بأن $f''(x) = 6$ عند أى نقطة (x, y) عليه ، ويمر بالنقطة (1, 4) بميل 5 عند تلك النقطة.

(9) سقط حجر من بناء ارتفاعه 484 قدم عند سطح الأرض فبعد كم ثانية يصل هذا الحجر لسطح الأرض ؟ وما هى سرعة الحجر لحظة اصطدامه بالأرض.

10- أطلق سهم رأسياً لأعلى من على سطح الأرض بسرعة 96 قدم/ثانية أوجد أقصى ارتفاع له؟ ومتى يصل السهم إلى سطح الأرض. وما هى سرعته عند لحظة وصوله للأرض؟

11- أطلق مقذوف من بندقية بسرعة 800قدم/ثانية راسياً لأعلى ما هو أقصى ارتفاع يصل إليه؟

تطبيقات التكامل المحدد.

طول قوس منحنى فى مستو Arc Length of a Plane Curve

سنبحث فى هذا الفصل كيفية إيجاد طول قوس منحنى دالـة مـا باستخدام التكامل المحدد. ويجدر بنا قبل الخوض فى ذلك أن نعطى التعريف الآتى :

تعريف (1) :

يقال لـ f أنها دالة ملساء (Smooth Function) (أو منحناها $y = f(x)$ أنه أملس) فـى فتـرة مـا إذا كانت مشتقتها f' متصلة فى تلك الفترة.

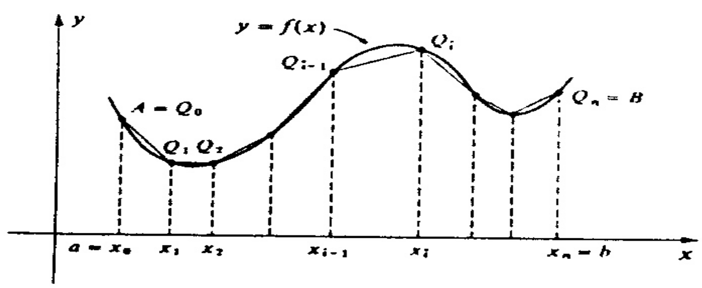
وهذا التعريف يعنى بأن أى تغيير بسيط يحدث فى x سوف ينتج عنه تغيير بسيط فى الميل $f'(x)$. وعليه فإن منحنى f لا يكون له أركان (Corners) أو رؤوس مدببة (Cusps).

طول القوس فى الإحداثيات الكرتيزية.

طول القوس S لمنحنى معطى بالمعادلة $y = f(x)$ والواقع بين النقطتين اللتين لهما $x = a$, $x = b$ يكون $S\int_a^b \sqrt{1+y^2}\,dx$

الآن إذا كانت f دالـة ملسـاء فـى الفتـرة المغلقـة $[a, b]$ فـإن خطـوات استنباط صـيغة طـول قـوس المنحنى $y = f(x)$ من $A(a, f(a))$ إلى $B(b, f(b))$ (أنظر البشكل (1)) تكون كما يلى :

- نفرض أن P هو أى تجزئى يقسم الفترة $[a, b]$ إلى عدد n من الفترات الجزئية التـى أطوالهـا : $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ وذلك عن طريق إدارج نقاط التقسيم : $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ بين $a = x_0$, $b = x_n$



شكل(1)

- نقيم من كل نقطة $x_i \left(i = 1, 2, 3, ..., n\right)$ خطا رأسيا بحيث يقابل المنحنـى $y = f(x)$ فـى النقطـة Q_i التى إحداثييها $(x_i, f(x_i))$ علما بأن الخط الرأسى المقام من x_0 يقابل المنحنى $y = f(x)$ فـى النقطة Q_0 التى إحداثييها $\left(x_0, f(x_0)\right)$.
- عند إيصال كل Q_{i-1} بـ Q_i بقطعة خط مستقيم فإن طول كل منها يكون معطى بواسطة قـانون المسافة كما يلى :

$$L_i = d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2}$$

هذا وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة فإننا نحصل على :

$$f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right) = f'\left(w_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = f'\left(w_i\right)\Delta x_i$$

حيث w_i عدد ما وقع فى الفترة المفتوحة (x_{i-1}, x_i). وبالتالى يمكن إعادة كتابة L_i كما يلى :

$$L_i = d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(w_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1+[f'(w_i)]^2}\,\Delta x_i$$

- نكون صيغة مبسطة لمجموع أطوال كل القطع المستقيمة المنشأة وذلك كما يلى :

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(w_i)]^2}\,\Delta x_i$$

حيث يسمى هذا المجموع بمجموع ريمان علما بأنه يمثل القيمة التقريبية لطول قوس المنحنى $y = f(x)$ من النقطة A إلى النقطة B.

- بأخذ النهاية لمجموع ريمان عندما $\|P\| \to 0$ فإننا نحصل على L التى تمثل طول قوس المنحنى $y = f(x)$ من $A(a, f(a))$ إلى $B(b, f(b))$. وهذا يعنى أن :

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i-1}^{n} \sqrt{1+[f'(w_i)]^2}\,\Delta x_i$$

- وباستخدام تعريف التكامل المحدود فإننا ندرك أن :

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i-1}^{n} \sqrt{1+[f'(w_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

وذلك لكون $\sqrt{1+[f']^2}$ دالة متصلة فى الفترة $[a, b]$ وكون وجود نهاية مجموع ريمان عندما $\|P\| \to 0$

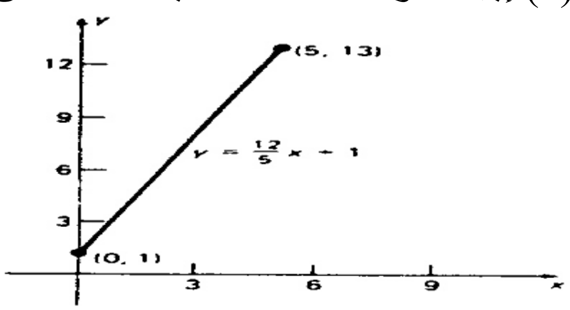
تعريف (2) :

إذا كانت f دالة ملساء فى الفترة المغلقة $[a, b]$ فعندئذ يكون طول قوس المنحنى $y = f(x)$ من $A(a, f(a))$ إلى $B\ (b, f(bb)$ معطى كما يلى :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\,dx \qquad (*)$$

ملاحظة (1) : كلمة قوس تعنى قطعة منحنى.

مثال (1) : استخدم الصيغة (*) إيجاد طول القطعة المستقيمة الممتدة من $A(0, 1)$ إلى $B(5, 13)$.



شكل(2)

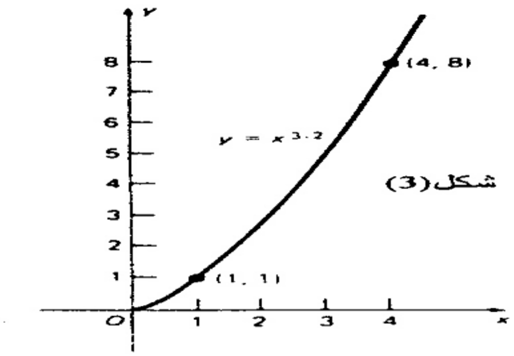
الحل : يجدر بنا فى البداية أن نوجد معادلة القطعة المستقيمة المبينة فى الشكل (2) وذلك بمعلومية النقطتين A(0, 1) ، B(5, 13) وعليه تكون $y=\frac{12}{5}x+1$ هى المعادلة المطلوبة. ومن ثم نجد أن $dy/dx=-\frac{12}{5}$ وباستخدام الصيغة (*) فإننا نحصل على :

$$L=\int_0^5 1+\sqrt{1+\left(\frac{12}{5}\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{\frac{5^2+12^2}{5^2}}dx$$

$$=\frac{13}{5}\int_0^5 1dx=\frac{13}{5}[x]_0^5=13$$

علماً بأن هذه النتيجة تتفق تماما مع الإجابة الناتجة من استخدام قانون المسافة.

مثال (2) : أوجد طول قوس المنحنى $y=x^{3/2}$ من النقطة (1,1) إلى النقطة (4,8) كما هو مبين فى الشكل (3).



الحل : بما أن $dy/dx=\frac{3}{2}x^{1/2}$ فإن

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{1+\frac{9}{4}s\,dx}$$

بوضع $u=1+\frac{9}{4}x$ بحيث $du=-\frac{9}{4}dx$ فإن :

$$\int\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{9}{4}\int\sqrt{u}\,du=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}u^{3/2}+C=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}+C$$

وبالتالى نجد أن :

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\frac{8}{4}x}\,dx=\left[\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right)\right]_1^4=\frac{8}{27}\left(10^{3/2}-\frac{13^{3/2}}{8}\right)\approx 7.63$$

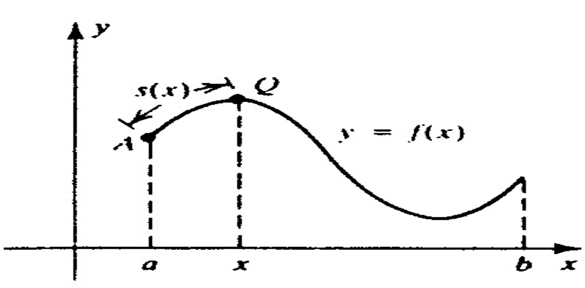
تعريف (3) :

إذا كانت g دالة معطاة فى الصورة x = g(y) بحيث تكون ملساء فى الفترة المغلقة [c, d] فعندئذ يكون طول قوس منحنى g من (g (c) , c) إلى (g(d), d) معطى كما يلى :

$$L=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy=\int_c^d\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}\,dy \qquad (**)$$

دالة طول قوس (The Arc Length Function) :

إذا كانت f ملساء فى الفترة [a, b] فعندئذ تكون f ملساء فى [a, x] لكل عدد x فى [a, b]. وعليه (انظر الشكل (4)) يكون طول قوس



شكل(4)

المنحنى من النقطة $A(a, f(a))$ إلى النقطة $Q(x, f(x))$ معطى كالآتى :

$$L = \int_a^x \sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\,dt$$

عندئذ استبدال L فى هذه الصيغة بالرمز $s(x)$ فإن باستطاعتنا اعتبار s أنها دالة نطاقها الفترة $[a, b]$ وذلك لارتباط كل x فى $[a, b]$ بعدد وحيد قيمته $s(x)$. وهكذا فإننا نسمى بدالة طول القوس.

تعريف (4) :

إذا كانت f مساء فى الفترة $[a, b]$ فعندئذ تعرف s التى تمثل دالة طول قوس لمنحنى f فى الفترة $[a, b]$ كما يلى :

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\,dt$$

حيث $a \le x \le b$

الآن ، إذا اشتققنا طرفى الصيغة $s(x) = \int_a^x \sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\,dt$ بالنسبة لـ x فإننا نحصل على:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

وبالتالى يمكن كتابة ds الذى يمثل تفاضل طول قوس كما يلى :

$$ds = \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

وبتربيع الطرفين فإننا نحصل على :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

هذه بالطبع صيغة بسيطة يمكن تذكرها بسهولة.

مثال (4) : استخدم التفاضلات لتقريب طول قوس منحنى $y = x^3 + 2x$ من النقطة $A(1,3)$ إلى النقطة $B(1.3,4.797)$.

الحل :

بما أن $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$ فإن :

$$ds = \sqrt{1+\left(3x^2+2\right)^2}\,dx$$

وبوضع $dx = 0.3, x = 1$ فإننا نحصل على :

$$ds = \sqrt{1+5^2}\,(0.3) = \sqrt{26}\,(0.3) \approx 1.53$$

الذى يمثل التقريب الممكن لطول قوس المنحنى المعطى.

ملاحظة (2) : إذا أعطينا منحناً ما بمعلومية المعادلتين البارامترايتين :

$$x = f(t), \qquad y = g(t); \qquad a \le t \le b$$

فعندئذ تكون صيغة طول قوس المنحنى من $t = a$ إلى $t = b$ معطاة كما يلى :

$$L=\int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

شريطة أن تكون المشتقتين f',g' موجودتين ومستمرتين فى الفترة المغلقة $[a, b]$ وأن لا تكون قيمة $g'(t),f'(t)$ فى آن واحد صفراً ضمن الفترة (a, b).

مثال (5) : أوجد محيط الدائرة $x^2+y^2=a^2$.

الحل :

بكتابة معادلة الدائرة فى الصورة البارامترية فإننا نجد أن :

$$x=a\cos t,\qquad y=a\sin t;\qquad 0\le t\le 2\pi$$

ومن ثم :

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t$$

وبالتالى ينتج أن :

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}a\,dt=\left[at\right]_0^{2\pi}=2\pi a$$

مثال (1) : أوجد طول قوسى منحنى الأسترويد $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (أنظر الشكل)

الحل : بتفاضل معادلة منحنى الاسترويد نحصل على $y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$ من هندسة الشكل وتماثله يكفى إيجاد طول ربع القوس ثم نضرب الناتج فى 4 أى أن

$$\frac{S}{4}=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=\frac{3}{2}a$$

2- طول القوس لمنحنى ممثل بارامتريا.

إذا كان المنحنى معطى فى صورة بارامترية $x=\phi(t),\ y=\psi(t)$ فإن طول القوس للمنحنى يكون $S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ حيث t_1,t_2 هما قيم البارامتر t والتى تقابل طرفى القوس .

مثال (2) : أوجد طول قوص واحد لمنحنى السيكلويد $x=a(t-\sin t)\quad y=a(1-\cos t)$

الحل : $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\ \frac{dy}{dt}=a\sin t$ لذلك

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a$$

والنهايتين $t_2=2\pi,\ t=0$ تتقابلان طرفى قوس السيكلويد.

إذا كانـت معادلــة المنحنــى معطــاة فــى الصــورة القطبيــة $r = f(\theta)$ فـ‘ن طـول القـوس يكـون $S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$ حيث α, β هما قيمتى الزاويتين القطبيتين عند نقطتى طرفى القوس.

مثال (3) : أوجد طول قوس كل منحنى $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$

ملحوظة : المنحنى هو المحل الهندسى نقطة يتعير موضعها عندما تتغير θ من 0 إلى 3π.

الحل : $r' = a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$ لذلك يكون طول القوس المنحنى هو

$$S = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2\sin\frac{\theta}{3} + a^2\sin^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} d\theta}$$

$$= a\int_{0}^{2\pi} \sin^2\frac{\theta}{2} d\theta = \frac{3\pi a}{2}$$

تمارين

س1 : أوجد طول قوس المنحنى المعطى لكل فقرة مما يأتى :

1- $y = 2x^{3/2}, 1/3 \le x \le 7$

2- $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, 1 \le x \le 2$

3- $y = \left(x^4 + 3\right)/6x, 1 \le x \le 4$

4- $y = \ln\left(\cos x\right), 0 \le x \le \pi/4$

5- $y = e^x,\ 0 \le x \le 1$

6- $y^2 = 4x,\ 0 \le y \le 2$

س 2 : أكتب الصيغة التكاملية (دون حساب القيمة) لطول قوس كل منحن مما يلى :

1- $y = x^3,\ 0 \le x \le 1$

2- $y = e^x\cos x,\ 0 \le x \le \pi/2$

3- $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$

س 3 : أوجد دالة طول قوس المنحنى $y = 2x^{3/2}$ المبتدئ من النقطة $P_0(1,2)$.

س 4 : أوجد طول قوس المنحنى المعطى بالمعادلتين البارامتريتين لكل فقرة مما يأتى :

1- $x = t^3,\ \ y = t^2;\ \ 0 \le t \le 4$

2- $x = 3t^2 + 2,\ y = 2t^3 - 1;\ 1 \le t \le 3$

3- $x = 3\sin t,\ y = 3\cos t - 3;\ 0 \le t \le 2\pi$

1- أحسب طول قوس المنحنى $y = 2\sqrt{x}$ من $x = 0$ إلى $x = 1$.

2- أوجد طول قوس المنحنى $y = e^x$ الذى يقع بين النقطتين $(1,e),(0,1)$.

3- أوجد طول القوس للمنحنى

$$x = a(\cos t + t\sin t)$$
$$y = a(\sin t - t\cos t)$$

من $t = 0$ إلى $t = T$.

4- أوجد طول قوس المنحنى $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ من $r = 1$ إلى $r = 3$.

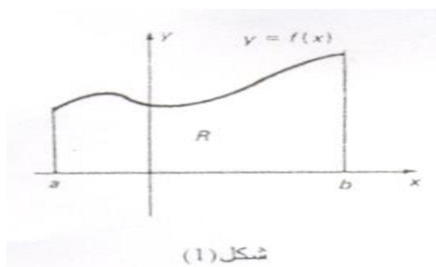
المساحة لمنطقة مستوية The Area of a Plane Region

سنتعرض للحالات الآتية :

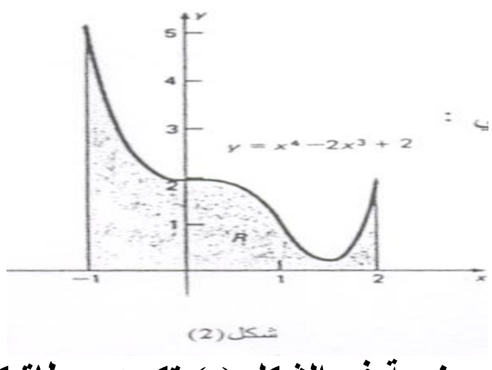
- **المساحة لمنطقة واقعة فوق المحور السينى.**
- **المساحة لمنطقة واقعة تحت المحور السينى .**
- **المساحة لمنطقة واقعة بين منحنيين.**

أولا : المساحة لمنطقة واقعة فوق المحور السينى.

إذا كانت f دالة متصلة وغير سالبة فى الفترة $[a, b]$ فعندئذ تكون مساحة المنطقة R (أنظر الشكل (1) المحدودة كم أسفل بمحور السينات ومن أعلى بالمنحنى $y = f(x)$ ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b$, $x = a$ معطاة (راجع الفصل (4 و 5)) بواسطة التكامل المحدود الذى صيغته : $A(R) = \int_a^b f(x)dx$ حيث تمثل A(R) مساحة المنطقة R.



مثال (1) : أوجد مساحة المنطقة R المحددة بالمنحنى $y = x^4 - 2x^3 + 2$ والمحور السينى والمستقيمين $x = 1, x = -1$.



الحل : مساحة المنطقة R الموضحة فى الشكل (2) تكون معطاة كالآتى :

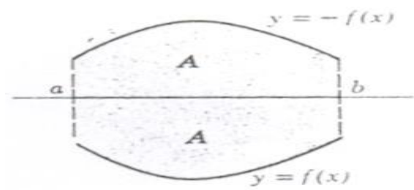
$$A(R) = \int_{-1}^{2}\left(x^4 - 2x^3 + 2\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10}$$

ثانيا : المساحة لمنطقة واقعة تحت المحور السينى.

إذا وقـع منحنـى $y = f(x)$ أسـفل محـور السينات فعندئـذ تكـون قيمـة التكامـل $\int_a^b f(x)dx$ سالبة. وعليه لا تمثل قيمة هذا التكامل المحدود أى مساحة وإنما تمثل فقط سالب مساحة المنقطة المحدودة من أعلى بمحور السينات ومن أسفل بمنحنى $y = f(x)$ ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b, x = a$.

ملاحظة (1) : إذا كانت f دالة متصلة وكانت $f(x) \le 0$ لكل x فى [a, b] فعندئذ يكون $-f$ لكل x فى [a, b] (أنظر الشكل (3)). وعليه تعرف مساحة المنطقة A المحددة من أسفل بالمنحنى $y = f(x)$ ومن أعلى بالمحور السينى ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b, x = a$ على أنها نفس مساحة المنطقة المحددة من أعلى بالمنحنى $y = - f(x)$ ومن أسفل بالمحور السينى ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b, x = a$.

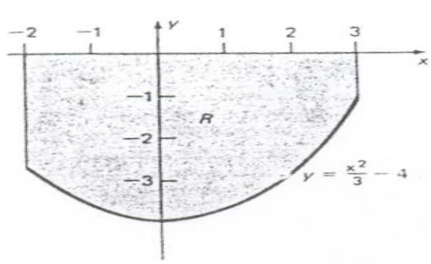


شكل (3)

مثال (2) : أوجد مساحة المنطقة R المحددة بالمنحنى $y = \frac{x^2}{3} - 4$ والمحور السينى والمستقيمين $x = 3, x = -2$

الحل

حيث أن المنطقة R الموضحة فى الشكل (4) تكون واقعة تحت المنحنى السينى فإن مساحتها A(R) تكون معطاة استنادا إلى الملاحظة (1) كما يلى :



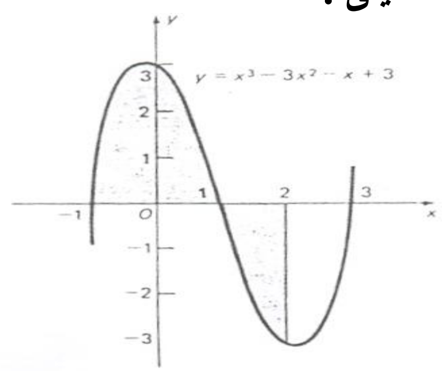
شكل (4)

$$A(R) = \int_{-2}^{3} -\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx = \left[\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \frac{145}{9}$$

مثـال (3) : أوجـد مسـاحة المنقطـة R المحـددة بـالمنحنى $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ والقطعـة المستقيمة من المحور السينى بين $x = 2, x = -1$ والمستقيم $x = 2$.

الحل

يمثل التظليل فى الشكل (5) المنطقة R مع ملاحظـة أن جزءاً منـها يكون واقعا فوق المحور السينى وجزءاً منها يكون واقعا تحت المحور السينى. وعليه فإن عملية حساب مساحة المنطقة R تكمن فى إيجاد مساحة كلا من هذين الجزئين ثم جمعهما. ولعلم هذا فإننا نلاحظ أن المنحنى المعطى يقطع المحور السينى عند 1- ,1 ,3 . وبالتالى فإن مساحة المنطقة R التى نرمز لها بـ A(R) تكون معطاة كما يلى :



شكل(5)

$$A(R) = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx + \int_{1}^{2} -\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2} = 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4}$$

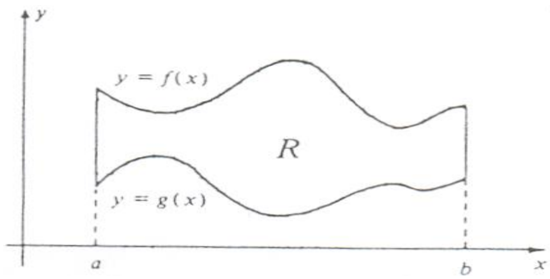
ملاحظة (2) : من الممكن إيجاد A(R) فى مثال (3) كما يلى :

$$A(R) = \int_{-1}^{2}\left|x^3 - 3x^2 - x + 3\right|dx$$

حيث يتطلب الأمر هنا إزالة إشارة القيمة المطلقة. وبالطبع فإن هذا يستدعى إيجاد الفترة التى يكون عندها المنحنى $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ سالباً والفترة التى يكون عندها غير سالب. وعليه فإن التكامل أعلاه سينقسم تبعاً لذلك إلى جزئين كما هو الحال فى حب مثال (3).

ثالثا : المساحة لمنطقة واقعة بين منحنيين.

إذا كانت g, f دالتين متصلتين فى الفترة المغلقة [a, b] وكانت $f(x) \geq g(x)$ لكل x فى [a, b] (انظر الشكل (6)).



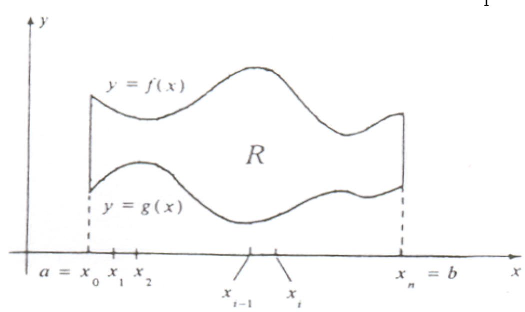
شكل (6)

فعندئذ تكون المساحة A للمنطقة R المحددة من أعلى بالمنحنى y = f(x) ، ومن أسفل بالمنحنى y = g(x) ومن اليسار بالمستقيم x = a ومن اليمين بالمستقيم x = b معطاة كما يلى :

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \qquad (*)$$

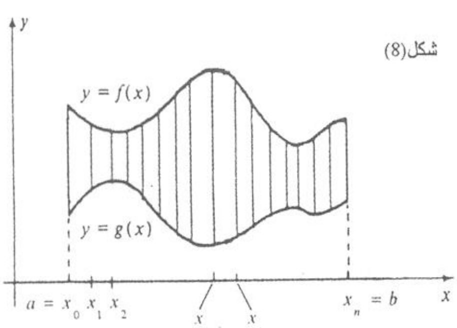
وكطريقة لإثبات الصيغة (*) فإننا سنتبع الخطوات الآتية :

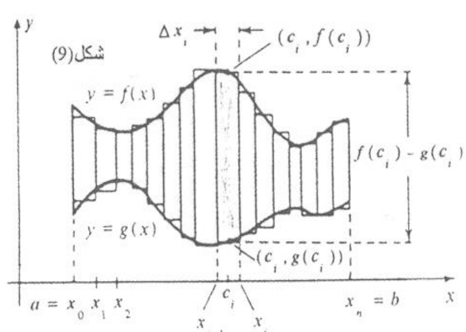
- **نفرض أن P تجزئياً ما يقسم الفترة [a, b] إلى عدد n من الفترات الجزئية** $[x_{i-1}, x_i]$ **وذلك باستخدام نقاط التقسيم** $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ **حيث** $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ ، $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ **كما هو موضح فى الشكل (7) علما بأن طول الفترة الجزئية** $[x_{i-1}, x_i]$ **يكون مساوياً لـ** $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



شكل (7)

- **نقيم من كل نقطة تقسيم** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ **خطاً رأسياً بحيث تقسم المنطقة R إلى عدد n من الشرائح (Strips) الرأسية الصغيرة. (أنظر الشكل (8)).**





- نكون (أنظر الشكل (9)) لكل شريحة واقعة على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ مستطيلاً بعرض قدره $\Delta x_1 = x_i - x_{i-1}$ وارتفاع قدره $f(c_i) - g(c_i)$ حيث c_i أى عدد يقع فى الفترة $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, ..., n$.
- نوجد مساحة كل مستطيل ثم نكون صيغة مبسطة لمجموع مساحات هذه المستطيلات وذلك كما يلى : $\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)].\Delta x_i$ حيث يسمى هذا المجموع بمجموع ريمان علما بأنه يمثل القيمة التقريبية لمساحة المنطقة **R**.
- نأخذ النهاية لمجموع ريمان عندما $\|P\| \to 0$ وذلك للحصول على **A** التى تمثل المساحة المضبوطة للمنطقة **R** . وهذا يعنى أن : $A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i-1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)].\Delta x_i$.
- نستخدم تعريف التكامل المحدد حيث ندرك أن :

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i-1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)].\Delta x_i = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

وذلك لكون **g – f** دالة متصلة فى الفترة **[a, b]** وكون نهاية مجموع ريمان عندما $\|P\| \to 0$ موجودة.

ملاحظة (3) : تستخدم الصيغة (*) فى حالة كون جميع الشرائح الرأسية المنشأة فى المنطقة **R** محصورة بين منحنى **y = f(x)** من أعلى ومنحنى **y = g(x)** من أسفل.

ملاحظة (4) : يمكن اعتبار المساحة **A** للمنطقة **R** بأنها عبارة عن المساحة تحت منحنى **y = f(x)** فى الفترة **[a, b]** مطروحاً منها المساحة تحت المنحنى **y = g(x)** فى الفترة **[a, b]**. وإثبات صحة هذه الملاحظة فإننا سنستعرض الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى : عندما تكون **g** غير سالبة لكل **x** فى الفترة **[a, b]** فإنه يكون من السهل (انظر الشكل (10)) إدراك أن :

مساحة المنطقة **R** [مساحة المنطقة تحت منحنى **f**] – [مساحة المنطقة تحت منحنى **g**]

وهذا يعنى أن :

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

الحالة الثانية : عندما يكون لـ **g** قيماً سالبة فى الفترة **[a, b]**.

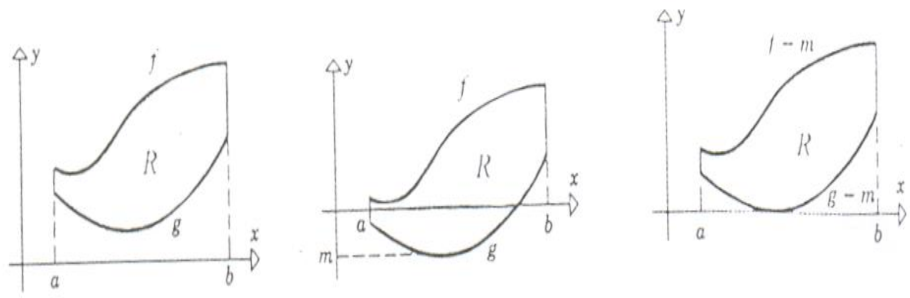
ففى هذه الحالة (انظر الشكل (11), (12)) نقوم بسحب الشكل البيانى لـ **g, f** إلى أعلى إلى أن يصبح كلاهما فوق المحور السينى. ولعمل هذا فإننا نفرض أن **m** هى القيمة الصغرى لـ **g(x)** فى الفترة $[a,b]$. وعليه تكون $g(x) \geq m$ ومنها أن $g(x) - m \geq 0$. وبالتالى تكون الدالتان $g - m$ ، $f - m$ غير سالبتين فى الفترة $[a,b]$. وبقبولنا بأن مساحة المنطقة بعد عملية

السحب لم يطرأ عليها أى تغيير فإن مساحة المنطقة R بين g, f هى نفس المساحة بين $f-m$, $g-m$ وبالتالى ينتج أن :

مساحة المنقطة R =[مساحة المنطقة تحت منحنى $f-m$] – [مساحة المنطقة تحت منحنى $g-m$] وهذا يعنى أن :

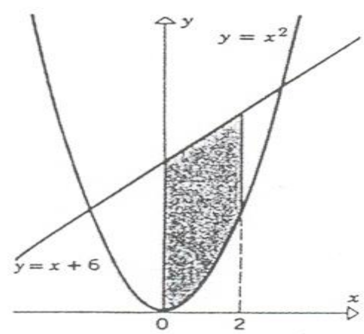
$$A=\int_a^b [f(x)-m]dx-\int_a^b [g(x)-m]dx=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها مسبقاً.



شكل(10) شكل(11) شكل(12)

مثال (4): أوجد مساحة المنطقة المحدودة من أعلى بالمنحنى y = x + 6 ومن أسفل بالمنحنى $y=x^2$ ومن الجانبين بالمستقيمين x = 2, x = 0.



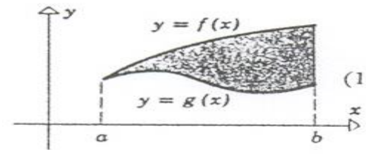
شكل(13)

الحل

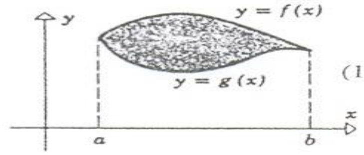
بالرجوع إلى الشكل (13) واستخدام الصيغة (*) مع العلم بأن $y=x^2=g(x),\ \ y=x+6=f(x)$ **فإن :**

$$A=\int_0^2 \left[(x+6)-x^2\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{34}{3}$$

ملاحظة (5) : عندما يقطع المنحنى العلوى y = f(x) المنحنى السفلى y = g(x) عند الجانب الأيسر المحدود بـ x = a أو الجانب الأيمن المحدود بـ x = b أو كليهما ، فعندئذ يكون جانب المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها عبارة عن نقطة بدلا من كونه مستقيم رأسية (أنظر الشكلين (14), (15)).

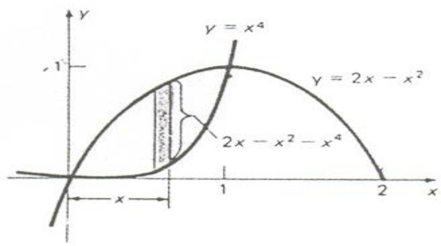


شكل(14)



شكل(15)

مثال (5) : أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين المنحنيين $y = x^4$, $y = 2x - x^2$ **.**



شكل(16)

الحل

حيث أن جانبى المنطقة المعبر عنهما بنقطتين (أنظر الشكل (16) لم يحددان كمعطيات فى المسألة فإنه يترتب علينا أولا إيجاد نقطتى المنحنيين $y = 2x - x^2, \ y = x^4$ **وذلك عن طريق حل معادلتيهما آنيا وعليه نجد أن :**

$$x^4 = 2x - x^2$$

أو

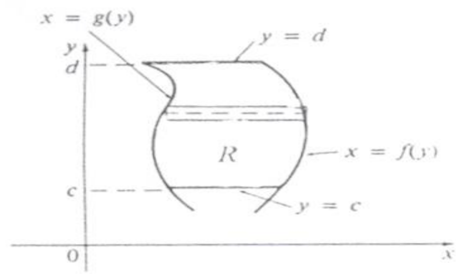
$$x^4 + x^2 - 2x = 0$$

أو

$$x(x-1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0$$

ومنها نأخذ الحلين الحقيقيين $x = 1, \ x = 0$ **فقط ونترك حلا المعادلة التربيعية** $x^2 + x + 2 = 0$ **وذلك لكونهما مركبين. وبالتالى فإن نقطتى التقاطع هما (0,0), (1,1) . الآن ، بما أن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها تكون محدودة من أعلى بالمنحنى** $y = 2x - x^2$ **ومن أسفل بالمنحنى** $y = x^4$ **فإنه يترتب علينا عند تطبيق الصيغة (*) لإيجاد A التى تمثل مساحة هذه المنطقة أن نضع** $f(x) = 2x - x^2, \ g(x) = x^4, \ a = 0, \ b = 1$ **. ومن ثم يكون :**

$$A = \int_0^1 \left[2x - x^2 - x^4\right] dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$



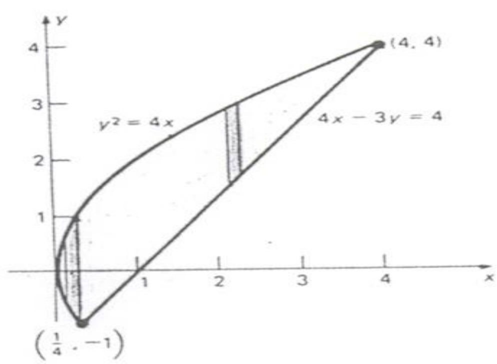
شكل (17)

ملاحظة (6) : فى بعض الأحيان (انظر الشكل (17)). يستدعى الأمر كطريقة إيجاد مساحة المنطقة R المحدودة من أعلى بالمستقيم y = d ومن أسفل بالمستقيم y = c ومن الجانب الأيسر بمنحنى g الذى معادلته x = g(y) أن ننشأ شرائح أفقية. وعليه تكون مساحة R التى نرمز لها بـ A معطاة كما يأتى :

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy \qquad (**)$$

علما بأن g, f دالتين متصلتين فى الفترة [c, d] وأن $f(y) \ge g(y)$ لكل y فى الفترة [c, d] هذا مع ملاحظة أن كل شريحة أفقية يجب أن تكون واقعة بين منحنى x = g(y) من اليسار و منحنى x = f(y) من اليمين.

مثال (6) : أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين القطع المكافئ الذى معادلته $y^2 = 4x$ والخط المستقيم الذى معادلته 4x – 3y = 4.



شكل (18)

الحل

نوجد فى البداية نقاط تقاطع القطع المكافئ مع الخط المستقيم وذلك عن طريق حل معادلتيهما آنياً. وعليه نجد عند كتابة معادلة الخط المستقيم 4x – 3y = 4 فى الصورة المكافئة 4x = 3y + 4 وحلها آنياً مع معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4x$ أن :

$$y^2 = 3y + 4$$

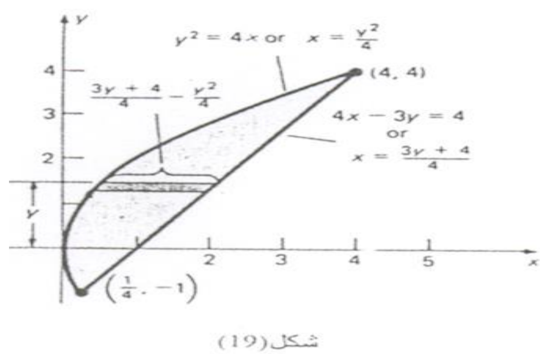
$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$(y - 4)(y + 1) = 0$$

ومنها نحصل على y = 4, y = -1 . وبالتالى توجد نقطتا تقاطع هما $\left(\frac{1}{4},-1\right),(4,4)$. الآن ، إذا قسمنا المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها إلى شرائح رأسية فعندئذ سنوجه مشكلة عند الطرف السفلى الأيسر من هذه المنطقة (أنظر الشكل (18)) حيث ستكون الشرائح الرأسية المنشأة هناك محدودة من أعلى بالقطع المكافئ ومحددة من أسفل بالقطع المكافئ أيضا ، وذلك بخلاف الشرائح المنشأة فى باقى المنطقة حيث تكون كل شريحة منهم محدودة من أعلى بالقطع المكافئ ومحدودة من أسفل بالخط المستقيم. وعليه توجد طريقتين لحل هذا المثال :

1- **طريقة الشرائح الرأسية** : وهنا يتطلب الأمر تقسيم المنطقة المراد إيجاد مساحتها إلى جزئين وذلك باستخدام المستقيم $x=\frac{1}{4}$. وعليه توجد مساحة المنطقة الموجودة على يسار المستقيم $x=\frac{1}{4}$ ومساحة المنطقة الموجودة على يمين المستقيم $x=\frac{1}{4}$ ، ثم نجمع ناتجيهما للحصول على المساحة الكلية للمنطقة. هذا مع ملاحظة أن الشرائح الرأسية المنشأة فى المنطقة الموجودة على يسار المستقيم $x=\frac{1}{4}$ تكون محصورة من أعلى بالمنحنى الذى معادلته $y=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$ ومن أسفل بالمنحنى الذى معادلته $y=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$. وأن الشرائح الرأسية المنشأة فى المنطقة الموجودة على يمين المستقيم $x=\frac{1}{4}$ تكون محصورة من أعلى بالمنحنى الذى معادلته $y=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$ ومن أسفل بالمنحنى الذى معادلته 4x – 3y = 4.

2- **طريقة الشرائح الأفقية** : وهنا نلاحظ (أنظر الشكل (19)) أن كل شريحة منشأة تنطلق من القطع المكافئ إلى الخط المستقيم. وعليه يتطلب الأمر هنا تطبيق الصيغة (**) . وإجراء ذلك فإنه يترتب علينا أولا تعيين g(y), f(y).



شكل(19)

الآن ، بحل كلا من معادلة القطع المكافئ ومعادلة المستقيم بالنسبة لـ x فإننا نجد أن :

$$y^2=4x \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{y^2}{4}$$

$$4x-3y=4 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{3y+4}{4}$$

وحيث أن $\frac{3y+4}{4} \ge \frac{y^2}{4}$ **لكل** $y \in [-1,4]$ **فإننا نضع :**

$$f(y) = \frac{3y+4}{4}, \qquad g(y) = \frac{y^2}{4}$$

وعليه ينتج عن تطبيق الصيغة (**) ما يلى :

$$A = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]dy = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y+4-y^2}{4}\right]dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{4}\left(3y+4-y^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(24+15-\frac{64}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}4 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{125}{24} \approx 5.21$$

حيث تمثل A مساحة المنطقة المحددة من اليمين بالخط المستقيم ومن اليسار بالقطع المكافئ ومن أعلى بـ $y = d = 4$ ومن أسفل بـ $y = c = -1$.

تمارين 1-9:

س 1 : أرسم المنطقة المحددة بالمنحنيات المعطاة أمام كل فقرة مما يأتى ثم أوجد مساحة المنطقة :

1- $y = 4 - \frac{x^2}{3},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

2- $y = x^4 + 3,\ y = x,\ x = -1,\ x = 1$

3- $y = x^3,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 2$

4- $y = x^2 - 4x,\ y = 2x$

5- $y = 2\sqrt{x},\ y = 2x - 4,\ x = 0$

6- $x^2 + 2x + y = 0,\ x + y + 2 = 0$

7- $y = x,\ y = x^2$

8- $y = x^2 - 4x,\ y = -x^2$

9- $y = \sqrt{x},\ y = x/2$

10- $x = 4 - y^2,\ x + y - 2 = 0$

11- $y = x^2 + 1,\ y = 3 - x^2,\ x = -2,\ x = 2$

12- $y = \cos x,\ y = \sin 2x,\ x = 0,\ x = \pi/2$

13- $x = y^4,\ x = 2 - y^4$

س 2 : أحسب قيمة كل من :

1- $\int_0^2 \left|x^2 - x^2\right| dx$ **2-** $\int_0^{\pi} \left|\sin x - \frac{2}{\pi}x\right| dx$

مع توضيح المنطقة بالرسم علماً بأن كلا منهما يمثل مساحة منطقة مستوية.

مثال (1) : أحسب المساحة المحصورة بين القطع المكافئ المكانى $y=\frac{x^2}{2}$ والخطيين المستقيمين $x=3, x=1$ ومحور x

الحل :

$$S=\int_1^3 \frac{x^2}{2}dx=\frac{\left[x^3\right]_3^1}{6}=\frac{27}{6}-\frac{1}{6}=4\frac{1}{2}$$

مثال (2) : أحسب قيمة المساحة المحصورة بالمنحنى $x=2-y-y^2$ ومحور y

الحل : أولا يجب أن نحدد نقط تقاطع المنحنى مع محور y. ولنقط التقاطع هذه يكون الأحداثى الأول مساوياً للصفر أى أن $x = 0$

$$\therefore y^2+y-2=0 \qquad (*)$$

ومنها $y = 1, y = -2$ حلان للمعادلة (*) أى أن تقاطع المنحنى المعطى مع محور y هى $(0,1),(0,-2)$ وعلى ذلك فإن المساحة المطلوبة S هى

$$\therefore S=\int_{-2}^{1} x\,dy=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy$$

$$=\left[2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{1}=4\frac{1}{2}.$$

فى الحالة العامة يمكن إيجاد المساحة S المحصورة بين منحنيين راسيين $y=f_1(x), y=f_2(x)$ والخطين الرأسيين $x=b, x=a$ حيث $f_1)x)\le f_2(x)$ عندما $a\le x\le b$ كما بالشكل القادم. حيث

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)--f_1(x)\right]dx \qquad (2)$$

مثال (3) : أحسب قيمة المساحة M المحصورة بين المنحنيين

$$y=2-x^2, \qquad y^3=x^2 \qquad (3)$$

الحل : بحل المعادلتين (3) معاً نجد أن حدود التكامل هى $x_1=-1,\ x_2=1$ وبمقتضى الصيغة (2) نجد أن المساحة المطلوبة هى

$$M=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^{2/3}\right)dx$$

$$=\left[2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^{5/3}\right]_{-1}^{1}=2\frac{2}{15}$$

وإذا كانت معادلة المنحنى معطاة فى الصورة البارامترية $x=\phi(t), y=\psi(t)$ فإن المساحة المحصورة بين المنحنى والخطين الرأسيين $x=a,\ x=b$ وجزء محور x يعبر عنها بالتكامل :

$$S=\int_{t}^{t_2}\psi(t)\phi'(t)\,dt \qquad (4)$$

حيث $t_{1,}t_2$ تعينان من المعادلات $a=\phi(t_1),\ b=\phi(t_2)$ علماً بأن $\phi(t)\ge 0$ على الفترة $[t_1,t_2]$

مثال (4) : أوجد مساحة القطع الناقص المعطى بالمعادلات البارامترية.

الحل : نظراً للتماثل الهندسى للشكل (أنظر الشكل المقابل) يكفى أن نسب مساحة الربع ثم نضرب النتيجة فى 4. فى الربع الأول (المظلل) نجد أن $0\le x\le a$ وبالتالى فإن حدود التكامل فى الصيغة (4) تتعين من المعادلات $0=a\cos t,\ a=a\cos t_2$ أى أن $t_1=\frac{\pi}{2},\ t_2=0$

وعلى ذلك فإن مساحة الربع هى

$$\frac{S}{4}=\int_{\pi/2}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt=ab\int_{a}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi ab}{4}$$

وعندئذ

$$S=\pi ab$$

2- المساحة فى الإحداثيات القطبية.

إذا عرف المنحنى بالإحداثيات القطبية r,θ بالمعادلة $r=f(\theta)$ عندئذ مساحة القطاع AoB والمحدودة بقوس المنحنى $\overset{\frown}{AB}$ والمتجهين oA, oB واللذين يصنعان زوايا $\theta_1=\alpha,\ \theta_2=\beta$ مع المحور ox يعبر عنها بالصورة التكاملية

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2\,d\theta \qquad (5)$$

مثال (5) : أوجد المساحة داخل المنحنى $r^2=a^2\cos 2\theta$

الحل : بمقتضى تماثل المنحنى (انظر الشكل) نعين أولا ربع المساحة

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}a^2\cos 2\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{4}$$

$$\therefore S=a^2$$

تمارين (2-4)

1- أوجد المساحة المحصورة بالقطع المكافئ $y=4x-x^2$ ومحور x.

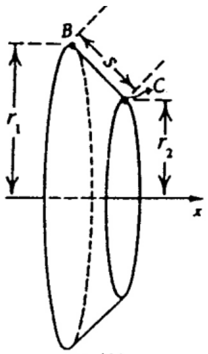
2- أحسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=\ln x$ ومحور x والخط المستقيم x = e.

3- أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $y=2x-x^2$ والخط المستقيم y = -x.

4- أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$ وانصاف المستقيمات $\theta=\frac{\pi}{2},\theta\frac{\pi}{4}$

مساحة السطح الدائرى Area of a surface of Revolution

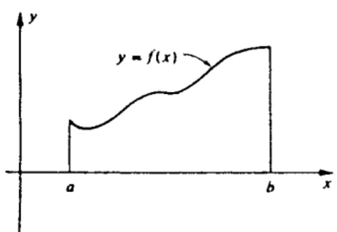
ينتج السطح الدورانى من دوران منحنى متصل حول مستقيم واقع فى مستواه ، حيث يسمى هذا المستقيم بمحور الدوران فمثلا إذا كان شكل دالة ما f عبارة عن قطعة مستقيمة ممتدة من B إلى C (انظر الشكر (1)) يمثل السطح الناتج من دوران هذه القطعة حول محور السينات مخروطا ناقصا نصف قطر قاعدتيه r_2, r_1 وارتفاعه الجانبى هو s . وعليه فإن مساحة سطح هذا المخروط الناقص تكون كما هو معروف معطاة كالآتى :



شكل(1)

$$\pi\left(r_1+r_2\right).s=2\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right).s$$

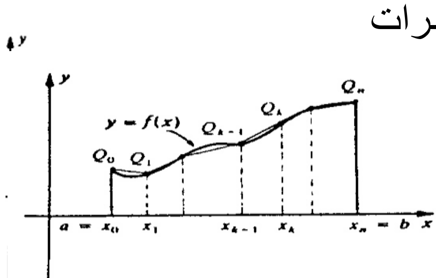
عملا بأننا سنستخدم هذه الصيغة لاحقا.



شكل(2)

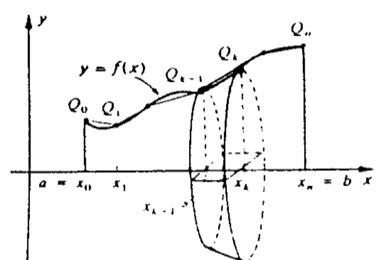
الآن إذا كانت f دالة ملساء وغير سالبة فى الفترة المغلقة $[a,\ b]$ (أنظر الشكل (2)) فإن خطوات استنباط صيغة لـ A التى تمثل مساحة السطح الدورانى (أنظر الشكل (3)) الناتج من دوران منحنى $y = f(x)$ بين $x = b, x = a$ المحور السينى بكون كما يلى :

- نفرض أن P تجزئيا ما يقسم الفترة $[a, b]$ إلى عدد n من الفترات الجزئية التى أطوالها : $\Delta x_1, \Delta x_2, ...\Delta x_n$ وذلك عن طريق إدارج النقاط $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ بين $. b = x_n, a = x_0$



شكل(4)

- نقيم (انظر الشكل (4)) من كل نقطة $x_n\left(k=1,2,3,.......,n\right)$ خطا رأسيا بحيث يقابل المنحنى $y = f(x)$ فى النقطة Q_k التى احداثييها $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$
- عند إيصال كل Q_{k-1} بـ Q_k بقطعة خط مستقيم فإن طول كل منها يكون معطى كالآتى : $d\left(Q_{k-1}, Q_k\right)=\sqrt{1+\left[f'\left(w_k\right)\right]^2}\Delta x_k$ حيث w_k عدد ما واقع فى الفترة المفتوحة $\left(x_{k-1}, x_k\right)$.
- عدد دوران كل قطعة خط مستقيم $Q_{k-1}\,Q_k$ حول المحور السينى (أنظر الشكل (5)) فإنه ينتج سطحاً دورانيا على هيئة مخروط ناقص نصف قطر قاعدتيه هما $f(x_k), f(x_{k-1})$ وارتفاعه الجانبى هو $d\left(Q_{k-1}, Q_k\right)$ علما بأن مساحة سطح هذا المخروط الناقص تكون معطاة كما يلى :



شكل(5)

$$2\pi\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}d(Q_{k-1,}Q_K)=2\pi\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}.\sqrt{1+\left[f'(w_k)\right]^2}\Delta x_k$$

عليه فإن المجموع : $\sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} . \sqrt{1+[f'(w_x)]^2} \Delta x_k$

الذى يمثل المساحة الكلية للسطح الدورانى – الناتج من دوران الخط المنكسر الواصل من Q_0 إلى Q_n حول المحور السينى – يمكن اعتباره كتقريب للمساحة A المطلوب إيجادها.

- عند اقتراب معيار التجزئى $\|P\|$ من الصفر فإن الخط المنكسر الواصل من Q_n إلى Q_0 سوف يقترب من المنحنى y = f(x) بصورة يصعب التفريق بينهما. وعليه فإن مساحة السطح الدورانى الناتج من دوران الخط المنكسر حول المحور السينى سوف تؤول فى نهاية المطاف إلى مساحة السطح المضبوطة A. وهذا يعنى أن :

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} . \sqrt{1+[f'(w_k)]^2} \Delta x_k$$

أو

$$A = 2\pi \frac{f(x)+f(x)}{2} \sqrt{1+[f'(x)]^2 dx} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

علما بأن برهان هذه الصيغة يحتاج إلى من مراجع رياضية متقدمة وبالتالى فقد تم إلغاؤه.

تعريف (1) :

إذا كانت f دالة ملساء وكان $f(x) \geq 0$ لكل x فى الفترة [a, b] فعندئذ تكون المساحة A للسطح الناتج من دوران المنحنى y = f(x) بين x = b, x = a حول المحور السينى معطاة كما يلى :

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

ملاحظة (1) : إذا كانت f فى التعريف سالبة لبعض x فى الفترة [a, b] فعندئذ تعدل صيغة A كما يلى :

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

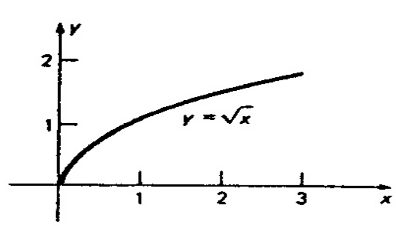
تعريف (2) :

إذا كانت g دالة ملساء وكان $g(y) \geq 0$ لكل y فى الفترة [c, d] فعندئذ تكون المساحة A للسطح الناتج من دوران المنحنى x = g(y) بين y = d, y = c حول المحور الصادى معطاة كما يلى :

$$A = 2\Delta \int_c^d g(y) \sqrt{1+[g'(y)]^2} dy$$

مثال (1) : أوجد مساحة السطح الدورانى الناتج من دوران المنحنى $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3$ حول المحور السينى

الحل :



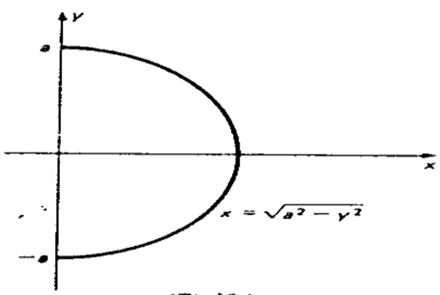
شكل(6)

يوضـح الشـكل (6) المنحنـى $y = f(x) = \sqrt{x}$ علمـا بـأن $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$. وبالتـالى تكـون مساحة السطح الدورانى معطاة كما يلى :

$$A = 2\pi\int_0^3 \sqrt{x}\sqrt{1+\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]^2}dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx$$
$$= 2\pi\int_0^3 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \pi\int_0^3 \sqrt{4x+1}dx = \left[\pi.\frac{1}{4}.\frac{2}{3}\left(4x+1\right)^{3/2}\right]_0^3$$
$$= \frac{\pi}{6}\left(13^{3/2} - 1^{3/2}\right) \approx 24.02$$

مثال (2) : أوجد مساحة السطح الدورانى الناتج من دوران المنحنى $x = \sqrt{a^2 - y^2},\ -a \le y \le a$ حول المحور الصادى.

الحل :

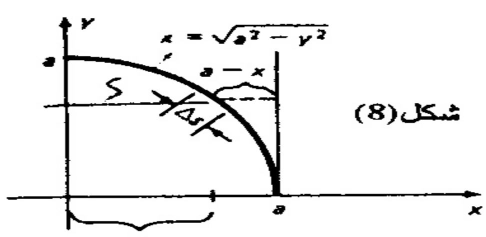


شكل(7)

يوضـح الشـكل (7) المنحنـى $x = g(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$ علمـا بـأن $g'(y) = -y\sqrt{a^2 - y^2}$. وبالتـالى تكـون مسـاحة السطح الدورانى معطاة كالآتى :

$$A = 2\pi\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\sqrt{1+\left[y/\sqrt{a^2 - y^2}\right]}dy$$
$$= 2\Delta\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2 - y^2}}\,dy = 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2}dy = \left[2\pi\, ay\right]_{-a}^{a} = 4\pi a^2$$

مثـــال (3) : أوجـــد الصـــيغة التكامليـــة لمســـاحة الســـطح النـــاتج مـــن دوران المنحنـــى $x = \sqrt{a^2 - y^2},\quad 0 \le y \le a$ حول الخط $x = a$ (أنظر الشكل (8)).



شكل(8)

الحل :

لا يمكن هنا تطبيق أى من الصيغ السالفة الذكر بصورة مباشرة ، علما بأن حل هذا المثال يعتمد على إتباع الخطوات الأساسية المشروحة مسبقا. وعليه يتكون عند دوران كل جزء صغير من المنحنى $x=\sqrt{a^2-y^2}$ حول الخط $x = a$ سطح دورانى على هيئة مخروط ناقص مساحة سطحه بصورة تقريبية هى $\left[2\pi(a-x).\Delta s\right]$ حيث تمثل Δs طول الجزء الصغير من المنحنى. وهكذا فإننا نستنتج بأن الصيغة التكاملية لمساحة السطح تكون معطاة كما يلى :

$$A=2\pi\int_0^a\left(a-\sqrt{a^2-y^2}\right)\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\,dy$$

ملاحظة (2) : إذا أعطينا منحنا ما بمعلومية المعادلتين البارامتريتين :

$$x=f(t),\qquad y=g(t);\qquad a\le t\le b$$

فعندئذ :

1- تعطى مساحة السطح الناتج من دوران هذا المنحنى حول المحور السينى كما يلى :

$$A=2\pi\int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

2- تعطى مساحة السطح الناتج من دوران هذا المنحنى حول المحور الصادى كما يلى :

$$A=2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

مثال (4) : أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران قوس واحد من المنحنى الدويرى (Cycloid) الذى معادلتاه البارامتريتان هما :

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t);\qquad 0\le t\le 2\pi$$

حول المحور السينى.

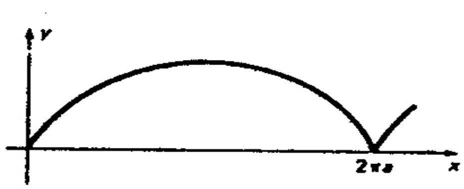
الحل :

يوضح الشكل (9) قوس واحد من المنحنى الدويرى.

وعليه بما أن :

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=a(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=g'(t)=a\sin t$$

فإن مساحة السطح الدورانى تكون معطاة كما يلى :



شكل(9)

$$A = 2\pi\int_0^{2\pi} y\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$
$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt$$
$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt$$
$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{3/2}\,dt$$

وإيجاد ناتج $\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt$ فإننا نستخدم صيغة نصف الزاوية :

$$1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$$

وبالتالى ينتج أن :

$$A = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left[2\sin^2(t/2)\right]^{3/2}dt$$
$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3(t/2)\,dt$$
$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left[1-\cos^2(t/2)\right]\sin(t/2)\,dt$$

بوضع $u = \cos(t/2)$ بحيث $du = -\frac{1}{2}\sin(t/2)dt$ مع العلم بأن $u = 1$ عندما $t = 0$, $u = -1$ عندما $t = 2\pi$ فإن :

$$A = 16\pi a^2\int_1^{-1}(1-u^2)\,du = -16\pi a^2\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_1^{-1} = \frac{64\pi a^2}{3}$$

مجموعة تمارين 5-9 :

س 1 : أوجد لكل فقرة مما يأتى مساحة الناتج من دوران المنحنى المعطى حول المحور المبين:

1- $y = 6x,\ 0 \le x \le 1,$ (حول المحور السينى)

2- $y = \sqrt{x},\ 4 \le x \le 9,$ (حول المحور السينى)

3- $y = x^3,\ 0 \le x \le 2,$ (حول المحور السينى)

4- $x = 8y+1,\ 0 \le y \le 2,$ (حول المحور السينى)

5- $x = y^3,\ 0 \le y \le 1,$ (حول المحور السينى)

6- $x = \frac{1}{3}(y^2+2)^{3/2},\ 1 \le y \le 2,$ (حول المحور السينى)

7- $x = t,\ \ y = t^3,\ 0 \le t \le 1,$ (حول المحور السينى)

8- $y = \sqrt[3]{x},\ 1 \le y \le 2,$ (حول المحور الصادى)

9- $x=\sqrt{2y-y^2},\ 0\le y\le 1,$ (حول المحور الصادى)

10- $4x+3y=19,\ 1\le x\le 4,$ (حول المحور الصادى)

س 2 : أكتب لكل فقرة مما يأتى الصيغة التكاملية (دون حساب القيمة) لمساحة السطح الناتج من دوران المنحنى المعطى حول المحور المبين.

1- $+y=\sin x,\ 0\le x\le \pi,\ (y=-1$ حول)

2- $y=x^2+2x,\ 1\le x\le 3,\ (y=-2$ حول)

3- $y=\sqrt{x^2+x},\ 2\le x\le 4,\ (x=2$ حول)

4- $x=t^2,\ y=\sin t,\ 0\le t\le \pi,\ (y=-1$ حول)

حساب حجوم المجسمات.

1- حجم الجسم الدورانى.

حجم الجسم الذى يتكون من دوران المساحة المحدودة بالمنحنى $y = f(x)$ ومحور x والخطين الرأسيين $x = b, x = a$ حول محور x أو حول محور y.

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx \qquad (1)$$

أو

$$V_y=2\pi\int_a^b xy\,dx \qquad (2)$$

مثال (2) : أحسب حجم الجسم المكون من دوران الشكل بفرع واحد من المنحنى $y=\sin x$ والجزء $0\le x\le\pi$ من محور x

(أ) حول محور x (ب) حول محور y

الحل : (أ) $V_x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{2}$

(ب) $V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$

$$=2\pi\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\pi}=2\pi^2$$

وحجم الجسم الناتج من الدوران حول محور y للشكل المحدود بالمنحنى $x = g(y)$ ومحور y والخطين المتوازيين $y = d, y = c$ يعين بالصيغة $V_y=\pi\int_c^d x^2dy$

فى الحالة العامة تتعين حجوم الأجسام الناتجة من الدوران حول محورى $x,\ y$ لشكل بالمنحنيين $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$ (حيث $f_1(x)\le f_2(x)$) والخطوط المستقيمة $x = a,\ x = b$ من الصيغ الآتية على الترتيب

$$V_x = \pi\int_a^b \left[y_2^2 - y_1^2\right]dx$$
$$= \pi\int_a^b \left[\left(f_2(x)\right)^2 - \left(f_1(x)\right)^2\right]dx$$

و

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$

مثال (2) : أوجد الحجم الناتج من الدوران حول محور x للدائرة $(b \geq a)$. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$

الحل :لأن معادلة الدائرة تعطى دالة غير وحيدة القيمة فإننا نعتبر

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

عندئذ

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}\left\{\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right\}dx$$
$$= 4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\pi^2 a^2 b$$

والتكامل الأخير يمكن إيجاده باستعمال التعويض $x = a\sin t$

تمارين (4-4)

1- أوجد حجم الجسم الناتج من الجدوران حول محور x للشكل المحدود بالمنحنى $y = \sin^2 x$ فى الفترة بين $x = \pi, x = 0$

2- أوجد الحجوم الناتجة عند دوران المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 0, x = 0, y = e^x$ حول (أ) محور x (ب) محور y

2- مساحة السطح الناتج من الدوران

مساحة السطح الناتج من دوران جزء المنحنى $y = f(x)$ بين النقطتين $x = b, x = a$ حول محور x يعبر عنها بالتكامل

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

مثال (1) : أوجد مساحة السطح الناتج من الدوران حول محور x لفرع من المنحنى $gy^2 = x(3-x)^2$

الحل :للجزء العلوى من المنحنى عندما $0 \le x \le 3$ يكون

$$y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$$

$$\therefore s=2\pi\int_{0}^{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=3\pi$$

مثال (2) : أوجد مساحة السطح الناتج من دوران قوس واحد من منحنى السكلويد $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ حول محور التماثل.

الحل : السطح المطلوب يتكون من دوران القوس oA حول الخط المستقيم الذى معادلته $x=\pi a$ يأخذ y كمتغير مستقل وملاحظة أن محور الدوران $x=\pi a$ يبعد مسافة قدرها πa عند محور y نجد أن

$$S=2\pi\int_{a}^{2a}\left(\pi a-x\right)\frac{ds}{dy}\,dy$$

$$=2\pi\int_{0}^{2a}(\pi a-x)\sqrt{1+x'2}\,dy$$

$$=2\pi\int_{0}^{\pi}\left(\pi a-at+a\sin t\right)\sqrt{x^{0^2}+y^{0^2}}\,dt$$

$$=2\pi\int_{a}^{\pi}\left(\pi a-at+a\sin t\right)2a\sin t\frac{t}{2}\,dt$$

$$=4\pi a^2\int_{a}^{\pi}\left[\pi\sin\frac{t}{2}-t\sin\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right]dt$$

$$=4a^2\left[-2\pi\cos\frac{t}{2}+2t\cos\frac{t}{2}\right]$$

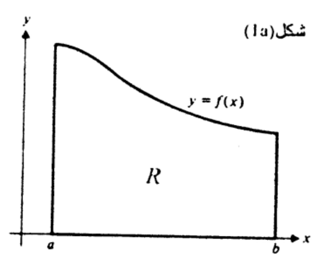
حجم الجسم الدورانى Volume of The Solid of Revolution

يتولد الجسم الدورانى من دوران منطقة ما R فى مستوى حول مستقيم ما واقع فى نفس ذلك المستوى ، حيث يسمى هذا المستقيم بمحور الدوران (Axis of Revolution). ومحور الدوران قد يكون مماساً للمنطقة المستوية R أو يحدها أو يكون بعيداً عنها ، علما بأنه فى كثير من الأحيان يكون محور الدوران هو محور الصادات.

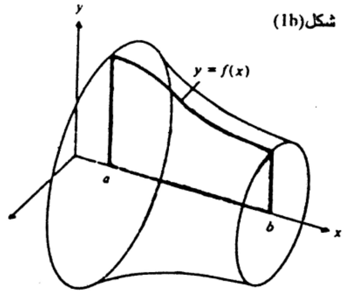
ويمكن إيجاد حجم الجسم الدورانى بإحدى الطرق الآتية :

1- طريقة القرص الدائرى (The Circular Disk Method)
2- طريقة الحلقة الدائرية (The Circular Washer Method)
3- طريقة القشرة الإسطوانية (The Cylindrical Shell Method)

شكل(1a)



شكل(1b)

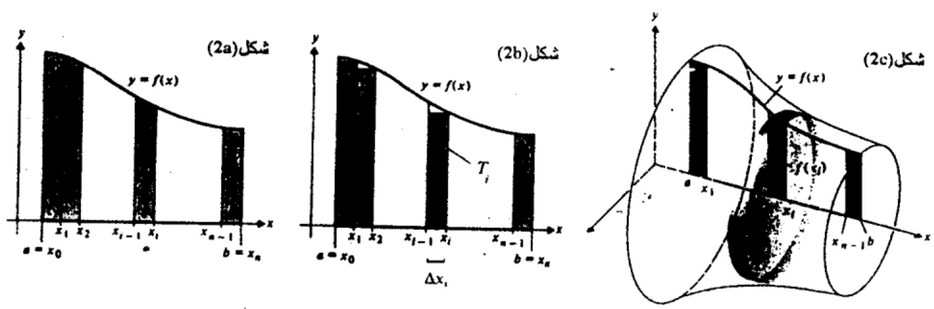


وفيما يلى سنقوم بشرح كل طريقة من هذه الطرق.

أولا : طريقة القرص الدائرى.

لتكن f دالـة متصـلة فـى الفتـرة المغلقة $[a, b]$ بحيـث $f(x) \ge 0$ لكـل x فـى $[a, b]$ ، ولـتكن R المنطقة المستوية (أنظـر الشـكل (1a)) المحـددة من أعلـى بمنحنـى f ومـن أسـفل بمحـور السـينات ومـن الجـانبين بالمستقيمين $x = a$, $x = b$. الآن ، لاستنباط صيغة الحجم V للجسم الـدوراى S النـاتج من دوران المنطقـة المسـتوية R حـول محـور السـينات (انظـر الشـكل (1b)) فإننـا نتبـع مـا يلـى :

- نفرض أن P تجزئياً ما يقسم الفترة $[a, b]$ إلى عدد n من الفترات الجزئيـة $[x_{i-1}, x_i]$ وذلك باسـتخدام نقاط التقسيم $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ حيث $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ ، $i = 1, 2, 3, ..., n$
- نقيم من كل نقطة تقسيم $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ خطـاً رأسياً بحيث تقسم المنطقـة R إلـى عـدد n مـن الشـرائح (Strips) الراسـية الصـغيرة ، ثـم نكـون لكـل شـريحة واقعـة علـى الفتـرة الجزئيـة $[x_{i-1}, x_i]$ مستطيلاً T_i بعرض قدره $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ وارتفـاع قـدره $f(c_i)$ أنظـر الشـكلين (2b), (2a) حيث c_i أى عدد يقع فى الفترة $[x_{i-1}, x_i]$.



- عنـد دوران كـل مسـتطيل T حـول المحـور السـينى فإنـه يتكـون قـرص دائـرى (Circular Disk) (أنظـر الشـكل (2c)) علـى شـكل أسـطوانة دائريـة قائمـة نصـف قطرهـا يسـاوى $f(c_i)$ وارتفاعها يساوى Δx_i وعليه يكون حجمها V_i معطى كما يلى :

$$V_i = \pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

- نكون صيغة مبسطة لمجموع حجوم هذه الأقراص الدائرية وذلك كما يلى :

$$\sum_{i-1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

حيث يسمى هذا المجموع بمجموع ريمان علماً بأنه يمثل القيمة التقريبيـة لحجم الجسم الـدورانى S.

- بأخذ النهاية لمجموع ريمـان عنـدما $\|P\| \to 0$ فإننـا نحصـل علـى V التـى تمثـل حجـم الجسـم S. وهذا يعنى أن :

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

- باستخدام تعريف التكامل المحدود فإننا ندرك أن :

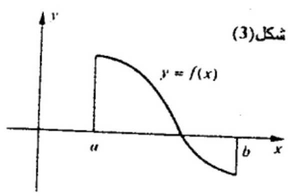
$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i-1}^{n} \pi \left[f(c_i) \right]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

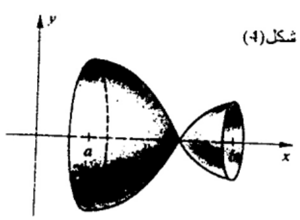
وذلك لكون $\left[f(x) \right]^2$ دالة متصلة فى الفترة $[a, b]$ ووجود نهاية مجموع ريمان عندما $\|P\| \to 0$

تعريف (1):

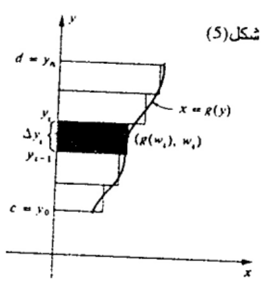
بفرض أن f دالة متصلة فى الفترة المغلقة $[a, b]$ وبفرض أن R هى المنطقة المستوية المحددة بمنحنى $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين الرأسين $x = b, x = a$ فإن الحجم V للجسم الدورانى S الناشئ من دوران المنطقة R حول محور السينات يكون معطى كالآتى :

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx \qquad (1)$$

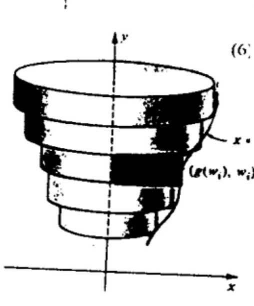

شكل(3)

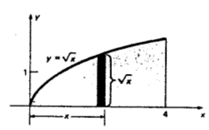

شكل(4)

ملاحظة (1) : إن طلب كون $f(x) \geq 0$ قد حذف عمداً من التعريف (91. ولتفسير ذلك نقول : إذا كانت f سالبة لبعض قيم x كما هو مبين فى الشكل (3) وإذا كانت المنطقة المحدودة بمنحنى f ومحور السينات والمستقيمين الرأسيين $x = b, x = a$ قد دارت حول المحور السينى فعندئذ ينشأ جسم كما هو مبين فى الشكل (4) ز الآن ، إن هذا الجسم يكون هو نفس ذلك الجسم المتكون من دوران المنطقة الموجودة تحت منحنى $y = |f(x)|$ من a إلى b حول محور السينات. وعليه بما أن $|f(x)|^2 = \left[f(x) \right]^2$ فإن صيغة V فى التعريف (1) سوف تعطينا بالطبع حجم هذا الجسم.


شكل(5)

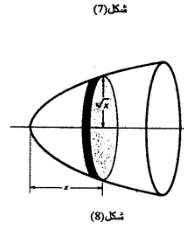
ملاحظة (2) : إذا كانت g دالة متصلة وغير سالبة فى الفترة $[c, d]$ وبفرض أن R ومحور المنطقة المستوية المحددة بمنحنى $x = g(y)$ ومحور الصادات والمستقيمين $y = c$ ، $y = d$ (انظر الشكل (5) فإن الحجم V للجسم الدورانى S الناشئ من دوران المنطقة R حول محور الصادات (انظر الشكل (6)) يكون :


(6)


شكل(7)

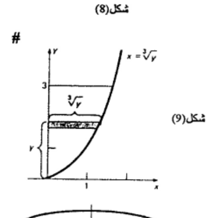
$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[g(w_i) \right]^2 \Delta y_i = \int_c^d \pi \left[g(y) \right]^2 dy$$

(11)

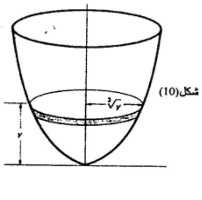

شكل(8)

وذلك عند تجزئية الفترة $[c, \;\; d]$ وإنشاء مستطيلات أفقية بعرض قدره Δy_i وارتفاع قدره $g(w_i)$.

مثال (1) :


شكل(9)

إذا كانت R منطقة مستوية محدودة بالمنحنى $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات والخط $x = 4$ فأوجد حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران


شكل(10)

المنطقة R حول محور السينات.

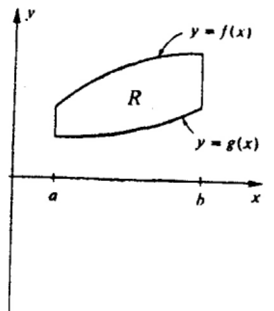
الحل :

يوضح الشكل (9) المنطقة المستوية R ويوضح الشكل (10) الجسم الدورانى الناتج. الآن ، حيث أن $y = x^3$ تكافئ $x = \sqrt[3]{y}$ فإن حجم هذا الجسم يكون معطى بواسطة الصيغة (II) كما يلى :

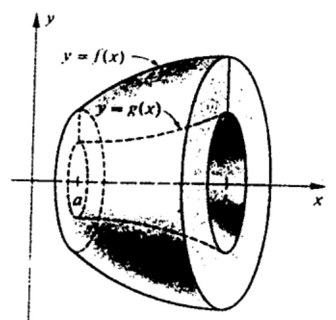
$$V = \int_0^3 \pi \left[\sqrt[3]{y}\right]^2 dy = \pi \int_0^3 y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^3 = \pi \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11.76$$

ثانيا : طريقة الحلقة الدائرية.

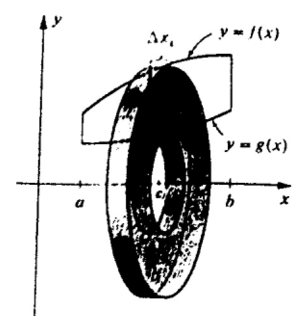
لتكن g, f دالتين غير سالبتين ومتصلتين فى الفترة $[a, b]$ بحيث تكون $g(x) \le f(x)$ لكل x فى $[a, b]$. ولتكن R المنطقة المستوية المحددة من أعلى بمنحنى f ومن أسفل يمنحنى g ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b, x = a$ (أنظر الشكل (11)).



شكل(11)



شكل(12a)



شكل(12b)

الآن ، لاستنباط صيغة الحجم V للجسم الدورانى S الناتج من دوران المنطقة المستوية R حول محور السينات (أنظر الشكل (12a)) فإننا سنتبع نفس طريقة استنباط صيغة الحجم (I) مع ملاحظة أنه (أنظر الشكل (12b)) ينشأ عن دوران المستطيل T_i المنشأ لكل شريحة مقامة على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ حلقة دائرية شكلها يكون عبارة عن قرص دائرى فى وسطه ثقب على هيئة قرص دائرى آخر وحجمها يساوى [(حجم القرص الخارجى) – (حجم القرص الداخلى)] حيث يمثل القرص الخارجى القرص الدائرى المحتوى على الثقب ويمثل القرص الداخلى الثقب.

وبما أن نصف قطر القرص الداخلى يساوى $g(c_i)$ وارتفاعه يساوى $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ حيث c_i أى عدد ينتمى $[x_{i-1}, x_i]$ فإن حجم القرص الداخلى يكون معطى كالآتى :

$$V_i^{**} = \pi \left[g(c_i)\right]^2 \Delta x_i$$

وكذلك ، بما أن نصف قطر القرص الخارجى يساوى $f(c_i)$ وارتفاعه يساوى Δx_i فإن حجم القرص الخارجى يكون معطى كالآتى :

$$V_i^{**} = \pi \left[f(c_i)\right]^2 \Delta x_i$$

وعليه يكون V_i الذى يمثل حجم الحلقة التى تنتج من دوران المستطيل T_i حول المحور السينى معطى كما يلى :

$$V_i = V_i^{**} - V_i^{*} = \pi\left(\left[f(c_i)\right]^2 - \left[g(c_i)\right]^2\right)\Delta x_i$$

وبتكوين صيغة رياضية لمجموع حجوم هذه الحلقات وأخذ النهاية لهذا المجموع (الذى يمثل القيمة التقريبية لحجم الدورانى S) عندما يؤول معيار التجزئى $\|P\|$ إلى الصفر فإننا نجد استنادا إلى تعريف التكامل المحدد أن :

$$V = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i-1}^{n}\pi\left(\left[f(c_i)\right]^2 - \left[g(c_i)\right]^2\right)\Delta x_i = \int_a^b \pi\left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right)dx$$

حيث تمثل V صيغة الجسم الدورانى S.

وبعبارة أخرى يمكن القول بأن حجم الدورانى S يكون عبارة عن حاصل طرح حجم الجسم الدورانى الناتج عن دوران R_1 حول المحور السينى من حجم الجسم الدورانى الناتج عن دوران R_2 حول المحور السينى. حيث تمثل R_1 المنطقة المكتوية المحدودة من أعلى بمنحنى الدالة g ومن أسفل بالمحور السينى ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b,\ x = a$ وكذا تمثل R_2 المنطقة المستوية المحدودة من أعلى يمنحنى الدالة f ومن أسفل بالمحور السينى ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b, x = a$.

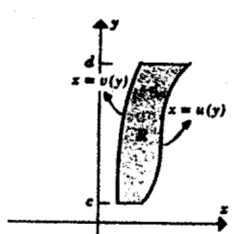
تعريف (2) :

بفرض أن g, f دالتين متصلتين وغير سالبتين فى الفترة [a, b] بحيث تكون $g(x) \le f(x)$ لكل x فى [a, b]. وبفرض أن R هى المنطقة المستوية المحدودة من أعلى بمنحنى $y = f(x)$ ومن أسفل يمنحنى $y = g(x)$ ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b, x = a$ فإن الحجم V للجسم الدورانى S الناشئ من دوران المنطقة R حول محور السينات يكون معطى كالآتى :

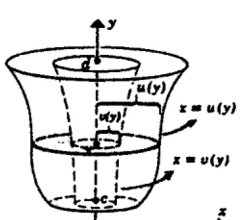
$$V = \int_a^b \pi\left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right)dx \qquad \text{(III)}$$

ملاحظة (3) : نستخدم طريقة الحلقة الدائرية عندما لا يكون محور الدوران جزءا من حدود المنطقة المستوية R.

ملاحظة (4) : بفرض أن v, u دالتين متصلتين وغير سالبتين فى الفترة [c, d] (أنظر الشكل (13)) بحيث تكون $v(y) \le u(y)$ لكل y فى [c, d]. وبفرض أن R هى المنطقة المستوية المحدودة من أعلى بالمستقيم $y = d$ ومن أسفل بالمستقيم $y = c$ ومن الجانب الأيمن بالمنحنى $x = u(y)$ ومن الجانب الأيسر بالمنحنى $x = v(y)$ فإن الحجم V للجسم الدورانى S الناشئ من دوران المنطقة R حول محور الصادرات (أنظر الشكل (14)) يكون معطى كالآتى :



شكل(13)



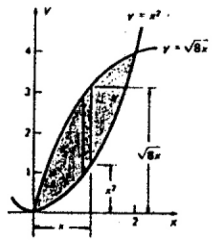
شكل(14)

$$V = \int_c^d \pi\left(\left[u(y)\right]^2 - \left[v(y)\right]^2\right)dy \qquad \text{(IV)}$$

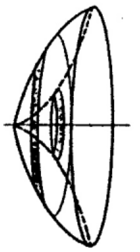
مثـال (3) : إذا كانـت R منطقـة مسـتوية محصـورة بـين $y^2 = 8x,\ y = x^2$ **فأوجـد حجـم الجسـم** الدورانى الناتج من دوران المنطقة R حول محور السينات.

الحل :

يوضح الشكل (15) المنطقة المستوية R ويوضح الشكل (16) الجسم الدورانى الناتج .



شكل(15)



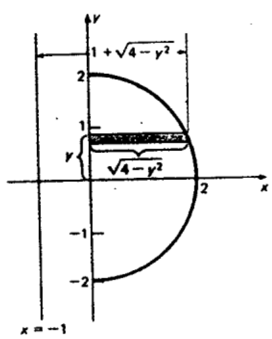
شكل(16)

الآن ، حيث أن نقطتى $y = x^2$ مع $y = \sqrt{8x}$ هما $(0,0), (2, 4)$ فإن حجم الجسم الدورانى يكون معطى باستخدام الصيغة (III) كما يلى :

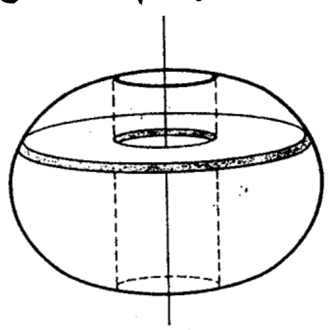
$$V = \int_0^2 \pi\left[\left(\sqrt{8x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx = \pi\int_0^2\left[8x - x^4\right]dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{48\pi}{5}$$

مثال (4) : إذا كانت R منطقة مستوية تمثل نصف دائرة محدودة بمنحنى $x = \sqrt{4 - y^2}$ ومحور الصادات فأوجد صيغة التكامل التى تمثل حجم الجسم الورانى الناتج عن دوران المنطقة R حول الخط $x = -1$.

الحل : يوضح الشكل (17) المنطقة المستوية R ويوضح الشكل (18) الجسم الدورانى الناتج مع ملاحظة أن المنحنى $x = \sqrt{4 - y^2}$ يقطع المحور الصادى عند النقطتين $(0, 2), (0, -2)$.



شكل(17)



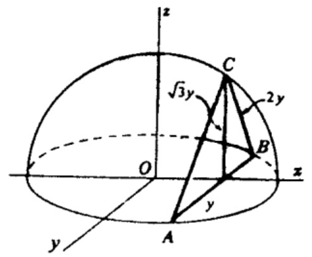
شكل(18)

الآن ، حيث أن المستطيل المقرب للشريحة الأفقية (أنظر الشكلين (17) ,(18)) ينتج عن دورانه حول الخط $x = -1$ حلقة تكون عبارة عن قرص دائرى فى وسطه ثقب على شكل قرص دائرى آخر فإن نصف قطر القرص الدائرى المتضمن الثقب يكون مساوياً لـ $1 + \sqrt{4 - y^2}$ وإن نصف قطر الثقب الذى يأخذ شكل القرص الدائرى يكون مساوياً لـ 1 وعليه فإن حجم الحلقة يكون عبارة عن حجم القرص المتضمن الثقب ناقصا حجم القرص الدائرى الذى يمثل الثقب. وبالتالى فإن حجم الشكل الدورانى يكون معطى بواسطة الصيغة (IV) كما يلى :

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left[\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)^2-1^2\right]dy$$
$$=2\pi\int_{0}^{2}\left[2\sqrt{4-y^2}+4-y^2\right]dy$$

مثال (3) : لجسم قاعدة دائرية محدودة بواسطة الشكل البيانى لـ $x^2+y^2=9$. أوجد حجم هذا الجسم إذا كان شكل كل مقطع من مقاطعه العامودية على المحور السينى هو مثلث متساوى الأضلاع بحيث يقع ضلع واحد منه على القاعدة الدائرية.

الحل : يوضح الشكل (7) قاعدة الجسم الدائرية والمقطع العامودى ABC الذى يمثل مثلثا متساويا الأضلاع بطور ضلع قدره $2y$ وارتفاع قدره $\sqrt{3}y$.



شكل(7)

وعليه فإن $A(x)$ التى تمثل مساحة هذا المثلث تكون معطاة كما يلى :

$$A(x)=\frac{1}{2}(2y)\left(\sqrt{3}y\right)=\sqrt{3}y^2=\sqrt{3}\left(9-x^2\right)$$

وبالتالى نجد أن الحجم V لهذا الجسم هو :

$$V=\sqrt{3}\int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)dx=\sqrt{3}\left[9x-\frac{x^1}{3}\right]_{-3}^{3}=36\sqrt{3}$$

مجموعة تمارين 3-9.

س 1 : قاعدة جسم على شكل قطع ناقص طول محوره الأكبر 5 وطول محوره الأصغر 4. أوجد حجم هذا الجسم إذا كان كل مقطع عامودى له المحور الأكبر هو مثلث متساوى الساقين ذا ارتفاع قدره 3.

س 2 : جسم قاعدته دائرية الشكل نصف قطرها 5 وحدات. أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع من مقاطعه العامودية على المحور السينى هو (a) نصف دائرة (b) مربع.

س 3 : أوجد حجم الهرم الأيمن (right pyramid) الذى ارتفاعه هو h وطول ضلع قاعدته المربعة هو a.

س 4 : تقع قاعدة جسم ما بين القطع المكافئ $y^2=12x$ والمستقيم $x=3$. أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع من مقاطعه العامودية على محور القطع هو مربع.

س 5 : تقع قاعدة جسم فى الربع الأول بين المستقيم $y = 4 - \frac{4}{5}x$ والمحورين الإحداثيين. أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع من مقاطعه العامودية على المحور السينى هو نصف دائرة.

مسائل محلولة

1- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y = \frac{1}{4}\left(8 + 2x + x^2\right)$ والمحور السينى . $L(x) = y = \frac{1}{4}\left(8 + 2x + x^2\right)$

الحل : المساحة المطلوبة هى المساحة المظللة فى الشكل المقابل وهذه المساحة A تعطى بالعلامة

$$A = \int_a^b L(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{4}\left(8 + 2x + x^2\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[8x + x^2\,\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{4} = 9$$

2- أوجد المساحة المحدودة بالمنحنى $y = -x(x-3)^2$ والمحور السينى والخط المستقيم $x = 2$

الحل :

$$A = \int_0^2 x(x-3)^2 dx = \int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^2 = 6$$

يلاحظ أننا أخذنا الإشارة الموجبة لـ y عند حساب المساحة .

3- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنين $y = x^2 - 2,\ y = 6 - x^2$

الحل : أولا نوجد نقط تقاطع المنحنى $y = x^2 - 2,\ y = 6 - x^2$ وهى (2 ,2-) ,(2 ,2) وبالتالى تكون المساحة المطلوبة هى

$$A = \int_{-2}^{2}\left\{\left(6 - x^2\right) - \left(x^2 - 2\right)\right\}dx$$

لأن $6 - x^2 \geq x^2 - 2$ لكل قيم x فى الفترة $[-2, 2]$

$$\therefore A = \int_{-2}^{2}\left(8 - 2x^2\right)dx = \frac{64}{3}$$

4- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالشكل البيانى للدالة $f(x) = x^2 - x^2 - 8x + 8$ والمستقيمات $y = 0, x = 0, x = 2$

الحل : المساحة المطلوبة مكونة من جزئين $\therefore A = A_1 + A_2$ حيث

$$A_1 = \int_0^1 \left(x^3 - x^2 - 8x + 8\right) dx = \frac{47}{12}$$

$$A_2 = \int_1^2 -f(x) dx = -\int_1^2 \left(x^3 - x^2 - 8x + 8\right) dx = \frac{31}{12}$$

$$\therefore A = \frac{47}{12} + \frac{31}{12} = \frac{78}{12} = \frac{13}{2}$$

5- أوجد مساحة المنطقة بين المحور الصادى والقطع المكافئ $y^2 - 6y + 2x + 5 = 0$

الحل :

$$\because y^2 - 6y + 2x + 5 = 0$$

$$\therefore y = \frac{6 I \sqrt{36 - 4(2x+5)}}{2} = 3 I \sqrt{4 - 2x}$$

المساحة المطلوبة تتكون من جزئيين A_1 وهى المساحة المحدودة بالمنحنى $y = 3 + \sqrt{4-2x}$ والمحور الصادى والمستقيم $y = 3$ (أعلاه) . A_2 وهى المساحة المحدودة بالمنحنى $y_2 = 3 - \sqrt{4-2x}$ والمحور الصادى والمستقيم $y = 3$ (أسفله.

$$\therefore A = \int_a^b \left(y_1 - y_2\right) dx$$

حيث أن x تتغير من 0 إلى 2 فإن

$$A = 2\int_0^2 \sqrt{4-2x}\, dx = -\frac{2}{3}\left(4-2x\right)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

طريقة أخرى

$$\because y^2 - 6y + 2x + 5 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}\left(y^2 - 6y + 5\right)$$

حيث أن $1 \le y \le 5$ فإن

$$A = -\frac{1}{2}\int_1^5 \left(y^2 - 6y + 5\right) dy = \frac{16}{3}$$

6- أوجد حجم الكرة التى نصف قطرها r.

الحل : الكرة يمكن اعتبارها جسماً دورانياً ينشأ بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ حول المحور السينى ox كما فى الشكل المقابل. وبذلك يكون حجم الكرة مساوياً

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - x^2\right) dx = \frac{4}{3}\pi r^3$$

7- أوجد حجم الجسم الدورانى الناشئ عن دوران المنطقة فى الربع الأول المحدودة بالمعنى $y = x^3$ والمحور الصادى oy والخط المستقيم $y = 4$ حول المحور الصادى.

الحل : المنطقة المحددة فى المسألة هى المنطقة المظللة فى الشكل المقابل وبدورانها تكون مساحة دائرة دوران النقطة $(x,\ \ y)$ منها $A=\pi x^2=\pi y^{2/3}$ وحيث أن $0\le y\le 4$ فإن الحجم المطلوب V هو

$$V=\int_0^4 A dy=\pi\int_0^4 y^{2/3}=\frac{3}{5}\pi .4^{5/3}=6.05\pi$$

8- أوجد حجم الجسم الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=\frac{4}{x}$ والخط المستقيم $y=5-x$ حول المحور السينى ox.

الحل : المنطقة المحصورة بين المنحنى xy = 4 والمستقيم y = 5 - x هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل. ولذلك

$$\therefore A=\pi\left[(5-x)^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2\right]=\pi\left[25-10x+x^2\frac{16}{x^2}\right]$$

تمثل مساحة الدائرة الناتجة بدوران نقطة (x, y) من هذه المنطقة. ومن تقاطع المستقيم $y=5-x$ والمنحنى $y=\frac{4}{x}$ نجد أن $1\le x\le 4$ وعلى ذلك فإن الحجم المطلوب هو

$$\therefore V=\int_1^4 \pi\left[25-10x+x^2\frac{16}{x^2}\right]dx$$

$$=\pi\left[25x+5x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{16}{x}\right]_1^4=9\pi$$

9- أوجد حجم جسم على شكل بوق ناشئ عند دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x=\frac{1}{2}\sqrt{y},\ y=0,\ x=1$ حول الخط المستقيم x = 1.

الحل : المساحة بين المنحنى $y=4x^2$ والمستقيم x = 1 (كما هى مظللة بالشكل المقابل) تدور حول x = 1 لتكون $A=\pi(1-x)^2$ هى مساحة الدائرة الناتجة عن دوران نقطة (x, y) فى هذه المنطقة. $\therefore A=\pi\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$ ومن تقاطع المستقيم x = 1 والقطع المكافئ $x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$ نجد أن $0\le y\le 4$ ولذلك يكون حجم الجسم الدورانى الناشئ هو

$$V=\int_0^4 A\,dy=\int_0^4 \pi\left(1-\sqrt{y}+\frac{1}{4}y^2\right)dy=\frac{2}{3}\pi$$

10- أعطيت إحداثيات النقطة $P(x,y)$ للدويرى التحتى ذى القرنات الأربعة $x=a\cos^3\theta,\quad y=a\sin^3\theta$ أوجد طول المنحنى الكلى.

الحل : عندما تتغير θ من G إلى $\pi/2$ (نرسم النقطة أ جزء المنحنى الرابع فى الربع الأول. كذلك نستنتج أن

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^{2/3}$$

يقع جزء المنحنى فى الربع الأول بين قرنين ويساوى طوله ربع الطول الكلى L لذلك.

$$L = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

ونحصل من معادلة المنحنى على

$$dy = 3a\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta,\ dx = 3a\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

وينتج من ذلك أن

$$L = 4\int_{0}^{\pi/2} 3a\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 6a$$

11- دورت المنطقة التى داخل الدائرة $x^2+y^2=a^2$ حول المحور x لتكن كرة مجسمة. أوجد حجمها.

الحل : إذا تصورنا أن الكرة قد قطعت إلى شرائح رقيقة بمستويات عمودية على المحور ox فإن

$$\Delta V = \pi y^2\Delta x = \pi\left(a^2-x^2\right)\Delta x$$

تعطى حجم الشريحة وبذلك يكون حجم الكرة V هو :

$$V = \int_{-a}^{a}\pi\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

تمارين

1- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=4-x^2$ والخط المستقيم $y+3=0$.

2- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=a^2+x^2,\ y=x^2$ وذلك فى الفترة $x=\pi,\ x=0$.

3- أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران $y=\sin x$ بين $x=\pi, x=0$ حول المحور ox.

4- أوجد حجم المخروط الدائرى القائم الذى ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a.

5- حفر ثقب بقطر a فى الكرة الناتجة عن دوران الدائرة $x^2+y^2=a^2$ حول المحور ox. أوجد حجم كلا من (أ) الثقب الناتج. (ب) باقى الكرة.

6- أوجد أطوال المنحنيات

i- $y=4a^2x^2;\qquad x\in[0,a];a>0.$

ii- $r=a\sec^2\dfrac{\theta}{2};\qquad 0\le\theta\le\pi/2.$

iii- $y=2x-x^2,\qquad y=0,\ y=1$

iv- $x=y^2-y^3,\qquad x=0$

v- $y=4\cos 2x;\qquad 0\le x\le\pi$

7- أوجد مساحة السطح الدورانى الناتج عن دوران القطع الناقص $y=b\cos t, x=a\sin t$ إذا كان الدوران حول أ- المحور الأصغر ب- المحور الأكبر