رياضيات تطبيقية ٢

ا.د مهدى

الفرقة الاولي

قسم الرياضيات

كلية التربية

الاحتكاك

في كثيرٍ من الأحيان نعتبر سطح التلامس بين الاجسام المعنية بالدراسة أملساً تماماً وبناءً عليه تكون قوة الفعل ورد الفعل المتبادلة بين أي جسمين عمودية على المماس المشترك للجسمين عند نقطة التلامس. وهذا حقيقةً مخالف للطبيعة حيث أن أي سطح في الحياة العملية به درجة من الخشونة ولذلك فإنه يجب أن نأخذ في الاعتبار وجود مركبة مماسة علاوة على قوة رد الفعل هذه المركبة المماسة تسمى قوة الإحتكاك.

ومما هو معروف أن قوى الإحتكاك تلعب دوراً هاماً في حياتنا اليومية فبدون قوة الإحتكاك لما استطاع الانسان أن يحفظ توازنه (تمنعه من الإنزلاق) أثناء السير ولولاها ما تحركت عجلات العربات إلى الأمام ولظلت تدور حول نفسها وفي موضعها. ولدراسة باب الإحتكاك يلزم معرفة بعض التعاريف.

قوة رد الفعل

هو قوة تنشأ من تلامس سطحين وإذا كان السطح أملساً فإن قوة رد الفعل تكون في اتجاه عمودي على السطح عند نقطة التلامس أما إذا كان سطح التلامس خشناً فلا تكون قوة رد الفعل عمودية في هذه الحالة وإنما مائلة (تسمى بقوة رد الفعل المحصل R) والتي يمكن تحليلها في اتجاه عمودي على السطح (تسمى رد الفعل العمودي N) وأخرى في اتجاه سطح التماس (تسمى بقوة الإحتكاك F)

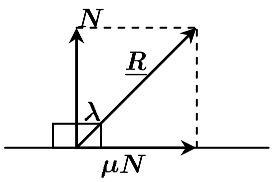
قوة الإحتكاك

تعرف بأنها تلك القوة الخفية التي تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن. هذا وتعمل قوة الإحتكاك على الدوام في إتجاه يعاكس حركة الجسم وتكون بالقدر الكافي لوقف حركة الجسم حيث أن قوة الإحتكاك تزداد تدريجياً حتى يصل مقدار قوة الإحتكاك إلى حدٍ لا تتعداه $0 \leq F \leq F_{\max}$ وعندئذٍ يصبح الجسم على وشك الحركة أو حالة الإتزان النهائي ويسمى الإحتكاك في هذه الحالة بالإحتكاك النهائي.

معامل الإحتكاك الاستاتيكي

تعرف النسبة بين مقداري قوة الإحتكاك النهائي ورد الفعل العمودي بمعامل الاحتكاك ويرمز له μ وهذه النسبة تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما.

زاوية الإحتكاك

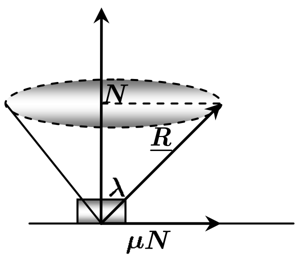


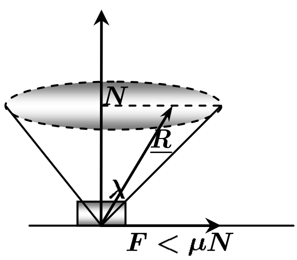
حينما يكون الجسم على وشك الحركة أي أن قوة الإحتكاك تكــون نهائية $F_{\max}$ فإن محصلة رد الفعل عليه R تُحلل إلى مركبة رد الفعل العمودي N وقوة الإحتكاك $F_{\max} = \mu N$ ، كذلك فإن الزاوية λ والتي يصنعها رد الفعل المحصل R مع رد الفعل العمودي N تسمى بزاوية الإحتكاك حيث

$$\tan\lambda = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

أي أن معامل الاحتكاك يساوي ظل زاوية الاحتكاك.

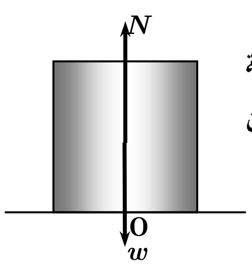
مخروط الإحتكاك





هو مخروط دائري قائم ، يُعرف مخروط الاحتكاك على أنه المخروط الذي رأسه نقطة التماس المشتركة بين الجسمين الخشنين المتلامسين ، وينطبق محورة على قوة رد الفعل العمودية وعندما يكون الجسم في حالة الاتزان الحرج (قوة الاحتكاك بلغت قيمتها النهائية) فــإن رد الفعل المحصل ينطبق على أحد رواسم مخروط الإحتكاك (سطح المخروط) وإذا لم يصل الإحتكاك إلى النهاية العظمى فإن رد الفعل المحصل يقع داخل المخروط ، و نصف زاوية رأســه هــي زاويــة الإحتكاك λ.

الإتزان على مستوى أفقي خشن



إذا وضع جسم على سطح أفقي خشن بدون التأثير عليه بأي قوة خارجيــة فإن الجسم يتزن تحت تأثير وزنه w ورد الفعل العمودي N وتكون هاتان القوتان على خط عمل واحد ويمران بالنقطة O كما بالشكل.

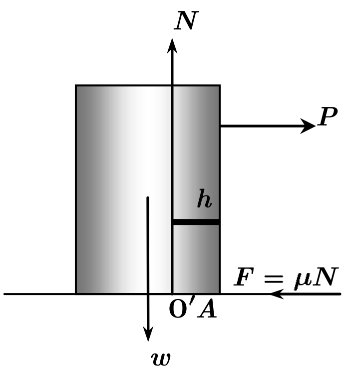
ولندرس الآن الحالة عندما نحاول تحريك الجسم وذلك عن طريق التأثير عليه بقوة أفقيـــة P مثلاً . بمجرد التأثير عليه يحدث شيئان في ذات الوقت

■ تتولد قوة الاحتكاك F بحيث تحاول أن تمنع الجسم من الانزلاق وتكون قيمتها $F = P$.

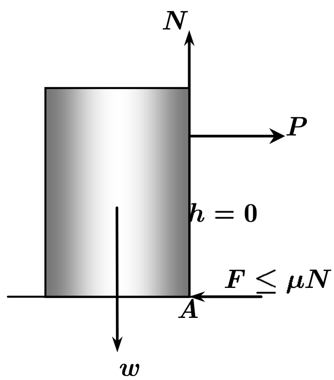
■ يتحرك رد الفعل العمودي N من النقطة O إلى نقطة جديدة O' وذلك لمنع الجسم من الانقلاب أو الدوران.

والآن بمحاولة تحريك الجسم وذلك عن طريق زيادة قيمة القوة P ، نجد أن F تزداد بزيادة القوة P بينما h(هي المسافة بيننقطة تأثير رد الفعل ونهاية الجسم $O'A$) تقل ومع زيـــادة هذه القوة يمكن حدوث أحد الاحتمالات الاتية.

- تصل قيمة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى $F = \mu N$ قبل أن يصل رد الفعل N إلى طرف الجسم عند النقطة A $(h > 0)$ وعندئذ يبدأ الجســـم في الانـــزلاق قبـــل الانقلاب.
- يصل خط عمل رد الفعل N إلى النقطة A $(h = 0)$ قبل أن تصل قوة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى ($F < \mu N$) وعندئذ يبدأ الجسم في الانقلاب حول النقطة A قبل الانزلاق.
- تصل قيمة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى $F = \mu N$ في نفس اللحظة التي يصل فيها خط عمل N إلى النقطة A وعندئذ يبدأ الجسم في الانزلاق والانقلاب معاً.



الحالة ١



الحالة ٢

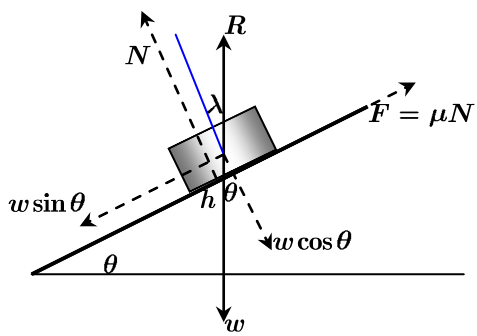
الإتزان على مستوى مائل خشن

نعتبر إتزان جسم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية ما فإن هذا الجسم يكون متزناً تحت تأثير وزنه w رأسياً لأسفل ويؤثر عند مركز ثقله ، قوة رد الفعل المحصل R والذي يجب أن يكون رأسياً لأعلى لحفظ الإتزان أي أن $R = w$.

وبفرض زيادة الزاوية التي يميل بها المستوى على الأفقي حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أسفل وبفرض أن الزاوية في هذه الحالة كانت θ وبكتابة معادلات الاتزان في اتجاه المستوى المائل والعمودي عليه يكون

$$w\sin\theta = \mu N, \qquad w\cos\theta = N, \qquad \Rightarrow \tan\theta = \mu = \tan\lambda \qquad \therefore \theta = \lambda$$

أي أن الاحتكاك لجسم موضوع على مستوى مائل خشن يكون نهائياً عندما تكون زاوية ميل المستوى θ مساوية لزاوية الاحتكاك λ .

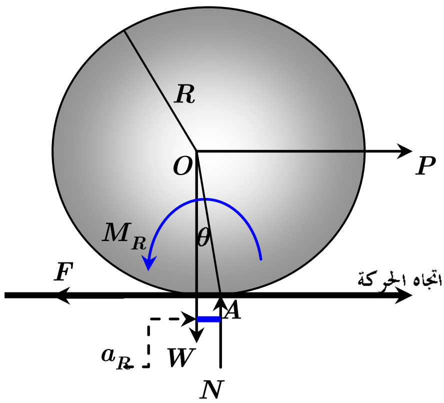


والسؤال الآن ماذا يحدث في حالة عدم تساوي زاوية الاحتكاك λ مع زاوية ميل المستوى θ، يكون لدينا الثلاث حالات التالية عندما $F = \mu N$ ، $h > 0$

- إذا كانت $\theta = \lambda$ فإن الجسم يظل متزناً ويكون على وشك الحركة
- إذا كانت $\theta < \lambda$ فإن الجسم يظل متزناً دون أن يكون على وشك الحركة.
- إذا كانت $\theta > \lambda$ فإن الجسم يتزلق إلى أسفل المستوى.

وهذا يحدث الانزلاق طالما أن قوة رد الفعل العمودية لم تؤثر في نقطة عند نهاية الجسم.

مقاومة التدحرج



تنتج مقاومة التدحرج من الانبعـــاج الناشـــئ في السطح الذي تتدحرج عليه الكرة أو الاسطوانة. فإذا سحب جسم اسطواني أو كروي على أرض خشنة فإنه لا يتزلق بل يتدحرج بمعنى أن يتقـــدم ويدور في نفس الوقت وفي حالة التدحرج المثـــالي تلمس نقط المحيط الدائري الارض على التتـــابع دون إنزلاق وتتساوى المسافة المقطوعة إلى الأمام وطول القوس المقطوع على محيط الدائرة و هذه الحالة المثالية تحدث عندما يكون الجسم المتدحرج أو السطح الذي يتدحرج عليه تام الصلابة بحيث يحدث التلامس بينهما في نقطة واحدة أو راسم واحد وتكون P أقـــل قـــوة كافيـــة لإحداث التدحرج. ولكن الواقع أن هناك نقصاً في صلابة الجسم المتدحرج والسطح مما ينتج عنه قدر من التفرطح بحيث يكون التماس في مساحة محدودة ، ويؤثر رد الفعل العمودي N عند نقطة A تسبق مسقط المركز O على السطح مسافة صغيرة a_R كما بالشكل وهـــذه المسافة تسمى ذراع مقاومة التدحرج ويتوقف مقدارها على مقدار صلابة الجسم المتـــدحرج والسطح وهو لا يتعدى كسر من المليمتر في حالة تدحرج عجلات القطار على القضبان.

ويحدث التدحرج بإنقلاب الجسم حول النقطة A والتي تثبت لحظياً ليدور الجسم حولها ولهذا فالإحتكاك لا يبلغ قيمته النهائية μN طالما أن الإنزلاق لم يحدث.

يمكن نقل رد الفعل العمودي N موازياً لنفسه إلى مركز الجسم وذلك بعد إضـــافة ازدواج M_R يسمى بعزم التدحرج ويتعين من العلاقة $M_R = Na_R$. وعلى ذلك فإن ردود فعـــل السطح الخشن على الجسم المتدحرج تتكون من رد الفعل العمودي N، قوة الإحتكاك F وعزم مقاومة التدحرج M_R وهو عزم مضاد لاتجاه دوران العجلة.

كذلك بكتابة معادلات الاتزان للشكل السابق فإن

$$F = P, \qquad N = W$$

و بأخذ العزوم حول A فإن

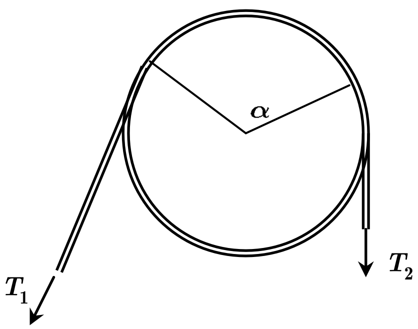
$$PR\cos\theta = Wa_R \qquad \Rightarrow P = \frac{Wa_R}{R\cos\theta} = \frac{Wa_R}{R}$$

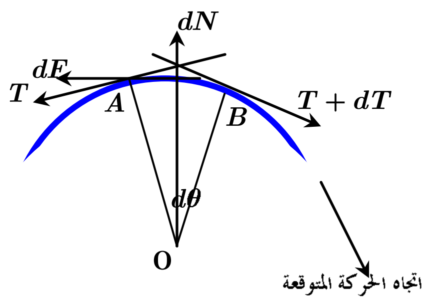
حيث θ صغيرة فإن $\cos\theta \simeq 1$ وقيمة القوة P هي أقل قوة تكفي لحدوث التدحرج.

إحتكاك الحبال و السيور

إذا تصورنا حبلاً أو سيراً يلتف حول محيط اسطوانة خشنة ثابتة بحيث يحصر زاوية α عند المركز وكان الشد في أحد طرفيه T_1 وفي الطرف الثاني T_2 ومعامل الاحتكاك بين الحبل والاسطوانة μ. إذا زادت قوة الشد T_2 عن T_1 بحيث أصبح الحبل على وشك الانزلاق على سطح الاسطوانة في اتجاه T_2 فإن العلاقة بين T_1, T_2 تتعين من $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$.

ترجع أهمية السيور والحبال إلى استخدامها في نقل الحركة وفرملة الاجزاء الدوارة ومن ثم فتتولد قوى إحتكاكية من السير والجسم الذي يلتف حوله وذلك لخشونة سطحيهما. ولاثبات العلاقة السابقة نعتبر جزء صغير من الحبل يحصر زاوية $d\theta$ ومن الشكل فإن





هذا الجزء من الحبل متزن تحت تأثير الشدين $T + dT, T$ في اتجاهي المماس كما بالشكل و مركبتي رد الفعل المحصل وهما رد الفعل العمودي dN في اتجاه العمودي على المماس عند منتصف AB وقوة الإحتكاك dF حيث $dF = \mu dN$ وتعمل في اتجاه المماس عند منتصف AB (وذلك على اعتبار أن الحبل على وشك الإنزلاق على السطح الأسطواني).

و بكتابة معادلات الإتزان في اتجاهي المماس والعمودي عند منتصف AB فإن

$$(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - dF = 0 \qquad \text{where} \quad dF = \mu dN$$

$$dN - (2T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} = 0$$

وباعتبار أن الزاوية $d\theta$ صغيرة فيمكن استخدام التقريبات التالية $\cos\frac{d\theta}{2} \simeq 1,$ ، $\sin\frac{d\theta}{2} \simeq \frac{d\theta}{2}$ وبأهمال الكميات الصغيرة $dTd\theta$ من المعادلات السابقة نحصل على

$$dT = \mu dN, \qquad dN = Td\theta \qquad \Rightarrow \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

وبتكامل العلاقة الأخيرة من A إلى B

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\alpha} d\theta \qquad \Rightarrow \ln\left\{\frac{T_2}{T_1}\right\} = \mu\alpha \qquad \therefore T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$$

ومما تجدر الإشارة إليه أنه إذا كان السطح الاسطواني أملساً (أي أن $\mu = 0$) فإن $T_1 = T_2$ أي أن الشد لا يتغير عند أي موضع من الحبل.

قاعدة هامة :

إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الحركة فإن قياس زاوية الإحتكاك يساوي قياس زاوية ميل المستوى مع الأفقي.

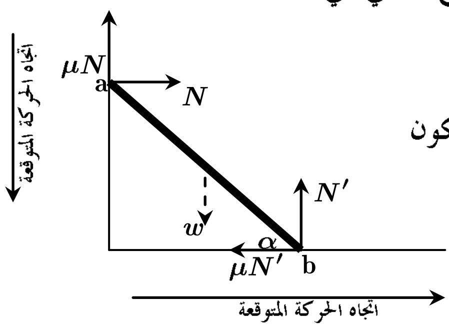
وأخيراً تنحصر المسائل التي تدرس اتزان الاجسام المعرضة لقوى الاحتكاك بالاضافة إلى القوى الأخرى المؤثرة على الاجسام إلى نوعين

- مسائل يكون المطلوب فيها هو تحديد القوى التي تجعل الجسم محل الدراسة على وشك الحركة. في هذه الحالة نضع قوة الاحتكاك مساوية لقوة الاحتكاك النهائي $F = F_{\max}$ كما يمكن في هذه الحالة تطبيق معادلات الاتزان.

- مسائل لا تكون الحركة فيها وشيكة أي $F < F_{\max}$ وتكون فيها القوى المؤثرة على الجسم معلومة والمطلوب هو تحديد قوى الاحتكاك عند الاسطح المتلامسة أي أنه مطلوب تعيين نوعية اتزان الجسم هل هو حرج أم لا ، وفي مسائل أخرى من هذا النوع يكون المطلوب هو تعيين وضع الاتزان الحرج الذي يتخذه الجسم.

﴿ مثـــ ١ ـــال ﴾

سلم طوله L ووزنه w . سند على حائط رأسي وعلى أرض أفقية (معامل الاحتكاك بـــين السلم والحائط هو نفسه معامل الاحتكاك بين السلم والارض) أوجد معامل الاحتكاك اللازم لتحقيق الاتزان إذا كانت الزاوية التي يصنعها السلم مع الافقي هي α ؟



﴿ الحـــــل ﴾

بكتابة معادلات الاتزان في الاتجاهين الافقي والرأسي يكون

$$N = \mu N'$$

$$N' + \mu N = w \quad \therefore N'(1+\mu^2) = w$$

بأخذ العزوم حول النقطة a يكون

$$\mu N' L \sin\alpha + \frac{1}{2} w L \cos\alpha - N' L \cos\alpha = 0$$

وبالتعويض من $N' = \dfrac{w}{1+\mu^2}$ في المعادلة الاخيرة نحصل على

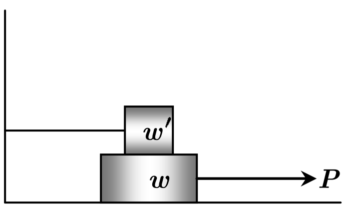
$$2\cancel{wL}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right) = (1+\mu^2)\cancel{wL}\cos\alpha$$

$$\therefore \mu^2 + 2\mu\tan\alpha - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \mu_{1,2} = -\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + 1} = -\tan\alpha \pm \sec\alpha$$

والقيمة الصحيحة لمعامل الاحتكاك هي القيمة الموجبة أي أن $\mu = \sec\alpha - \tan\alpha$

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

كتلة وزنها w تستقر على سطح أفقي ومعامل الاحتكـــاك بينها وبين السطح يساوي μ . وضعت كتلة أخـــرى w' فوق الكتلة الأولى وربطت بواسطة خيط أفقي كما بالشكل ، معامل الاحتكاك بين الكتلتين μ' ، عين أقل قوة P أفقية تلزم لتحريك الكتلة ثم أوجد الشد في الخيط عندئذ ؟

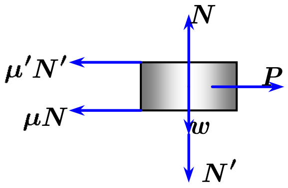


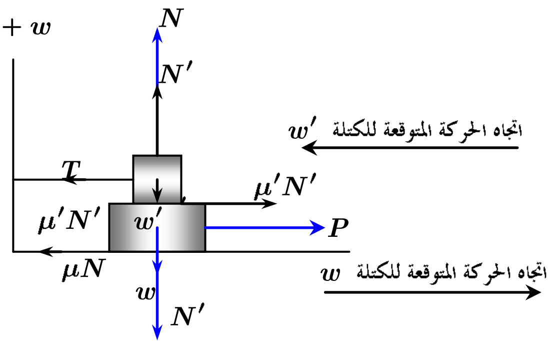
﴿ الحـــــل ﴾

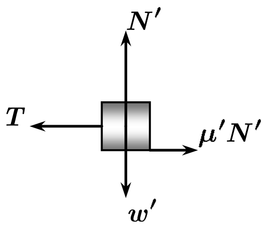
الشكل التالي يوضح كيفية ظهور ردود الافعال على الكتلتين

من اتزان الكتلة w تكون معادلات الاتزان في الاتجاهين الأفقي والرأسي هي

$$P = \mu N + \mu' N', \qquad N = N' + w$$







من التحليل الرأسي لاتزان الكتلة w' يكون $N' = w'$

وبالتالي $P = \mu N + \mu' N' = \mu(w + w') + \mu' w'$

ولايجاد الشد في الخيط ندرس اتزان الكتلة w'

$$T = \mu' N' = \mu' w' \qquad \text{where} \quad N' = w'$$

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

أوجد قيمة القوة التي تميل بزاوية 15^o مع المستوى المائل والتي تجعل الكتلة 10 والموضـــوعة على مستوى مائل بزاوية 30^o تبدأ الحركة إلى أعلى. إذا علمت أن معامل الاحتكـــاك بـــين الكتلة والمستوى المائل هي $\mu = 0.25$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

لقد قمنا بتحليل قوة الوزن إلى مركبتين كما بالشكل ، كذلك تم تحليل القوة F إلى مركبتين بكتابة معادلات الاتزان في اتجاه المستوى المائل والعمودي عليه نحصل على مع ملاحظـــة أن الجسم سيكون على وشك الحركة إلى أعلى (اتزان حرج)

$$F\cos 15 - 10g\sin 30 - 0.25N = 0 \qquad (\mu = 0.25)$$

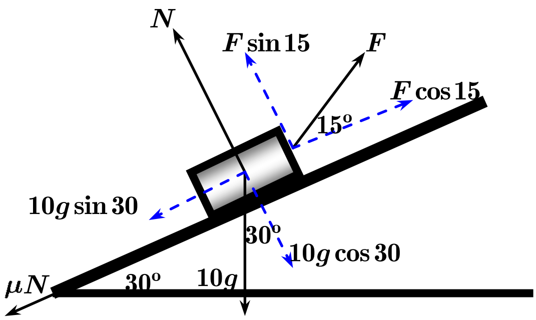
$$N + F\sin 15 - 10g\cos 30 = 0 \qquad \Rightarrow \quad N = 10g\cos 30 - F\sin 15$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على القوة المجهولة F في الصورة

$$F\cos 15 - 10g\sin 30 - 0.25(10g\cos 30 - F\sin 15) = 0$$

$$F(\cos 15 + 0.25\sin 15) = 10g\sin 30 + 2.5g\cos 30$$

$$\therefore\ F = \frac{10g\sin 30 + 2.5g\cos 30}{\cos 15 + 0.25\sin 15} \cong 68.2 \qquad g = 0.981$$

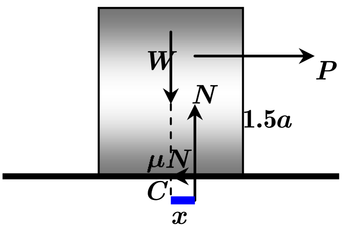


﴿ مثــ ٤ ـــال ﴾

مكعب منتظم طول ضلعه $2a$ ووزنه W يؤثر على وجهه الأيمن قوة أفقية P تزداد بانتظام تدريجياً وعلى بعد $1.5a$ من أرضية أفقية خشنة $(\mu = 0.7)$ بحيث تجعل المكعب على وشك الحركة. هل ينقلب أم يتزلق المكعب؟

﴿ الحـــــل ﴾

➤ حالة وشك الإنزلاق



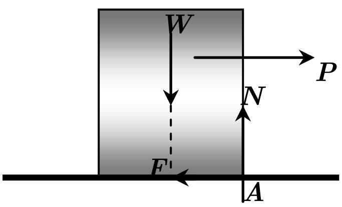
عندما يكون المكعب على وشك الإنزلاق تكون القوى المؤثرة عليه كما هو مبين بالشكل ومن شروط الإتزان

$$N = W\,, \qquad P = \mu N = \mu W$$

$$Nx = P(1.5a) \qquad \text{بأخذ العزوم حول } C$$

ومن المعادلات السابقة نجد أن $x = 1.05a$. وهذا لا يمكن أن يتحقق حيث أن x يجـــب أن تكون أقل من أو تساوي a

➤ حالة وشك الإنقلاب



عندما يكون المكعب على وشك أن ينقلب

من شروط الإتزان $N = W, \qquad F = P$

بأخذ العزوم حول A $\quad Na = P(1.5a) = Wa$

ومن هذه المعادلات نجد أن $F / N = 0.666 < \mu$ أي أن فرض أن المكعب سينقلب تحت تأثير القوة P هو الصحيح. وبالتالي سينقلب المكعب عندما تصل القوة إلى القيمة $0.666W$.

﴿ مثـــ ٥ ـــال ﴾

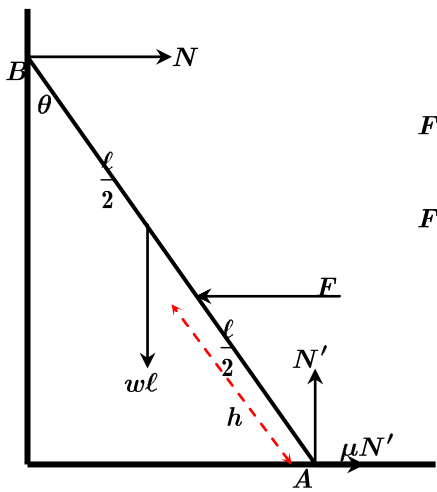
سلم طوله ℓ ووزن وحدة الأطوال منه w ، يرتكز على حائط رأسي أملس وأرض أفقيـــة خشنة ويميل على الرأسي بزاوية α . أثرت قوة F عند نقطة من السلم على بعـــد h مـــن أسفل نقطة في السلم بحيث تدفع أسفل نقطة نحو الحائط. إذا كان μ هو معامل الإحتكاك بين السلم والأرض فاثبت أن F يجب أن تزيد عن $\dfrac{w\ell^2}{\ell - h}\left\{\mu + \dfrac{1}{2}\tan\alpha\right\}$ ؟

﴿ الحــــــل ﴾

السلم متزن تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل وهي قوة رد الفعل العمودية على الحائط N عند B ، وزن السلم $w\ell$ رأسياً لأسفل ويؤثر في منتصفه ، رد الفعل المحصل R عـــند A ومركبتاه رد الفعل العمودي N' و قوة الإحتكاك $\mu N'$ ، القوة F وتصـــبح معـــادلات الإتزان هي

$$N' = w\ell \qquad (1)$$

$$N + \mu N' = F \qquad (2)$$



بأخذ العزوم حول A نحصل على

$$F.h\cos\theta + w\ell.\frac{\ell}{2}\sin\theta - N.\ell\cos\theta = 0$$

$$Fh\cos\theta + \frac{1}{2}w\ell^2\sin\theta - N\ell\cos\theta = 0 \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) ، (2) فإن $N = F - \mu w\ell$

وبالتعويض في المعادلة (3) نجد أن

$$Fh\cos\theta + \frac{1}{2}w\ell^2\sin\theta - (F - \mu w\ell)\ell\cos\theta = 0$$

بالقسمة على $\cos\theta$ فإن

$$F(\ell - h) = w\ell^2\left(\mu + \frac{1}{2}\tan\theta\right)$$

أو

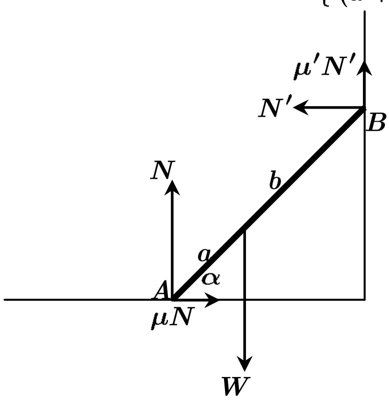
$$F = \frac{w\ell^2}{\ell - h}\left(\mu + \frac{1}{2}\tan\theta\right)$$

وهي القوة اللازمة لحفظ الإتزان بحيث تكون الحركة المتوقعة للنقطة A نحو الحائط ولكي تبدأ النقطة A الحركة نحو الحائط يجب أن تزيد القوة F عن القيمة التي حصلنا عليها سابقاً.

﴿ مثــ ٦ ــال ﴾

يرتكز قضيب وزنه W بطرفه A على أرض أفقية خشنة وبطرفه الآخر B علـــى حـــائط رأسي خشن. فإذا كان بعد مركز ثقله عن الطرف A هو a ويبعد عن الطرف B مســـافة b وكان معامل إحتكاك الأرض هو μ ومعامل إحتكاك الحائط هو μ' فاثبت أن القضـــيب يصنع زاوية مع الأفقي تتعين في وضع الإتزان من $\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{a - b\mu\mu'}{(a+b)\mu}\right\}$؟

﴿ الحـــــل ﴾



بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على

$$N' = \mu N \qquad (1)$$

$$\mu'N' + N = W \qquad (2)$$

وبأخذ العزوم حول النقطة A نجد أن

$$N'(a+b)\sin\alpha + \mu'N'(a+b)\cos\alpha = Wa\cos\alpha \qquad (3)$$

بالتعويض عن W من المعادلة (1) وعن N' من المعادلة (2) في المعادلة (3) نجد أن

$$\mu N(a+b)\sin\alpha + \mu\mu'N(a+b)\cos\alpha = (N + \mu\mu'N)a\cos\alpha$$

بالقسمة على $N\cos\alpha$ يكون

$$\mu(a+b)\tan\alpha + \mu\mu'(a+b) = (1 + \mu\mu')a$$

$$\mu(a+b)\tan\alpha = a - b\mu\mu' \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}$$

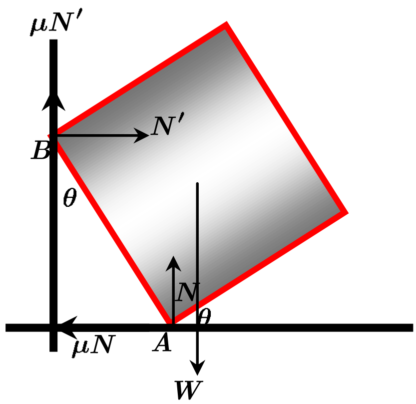
$$\therefore\ \alpha = \tan^{-1}\left\{\frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right\}$$

وهو المطلوب اثباته.

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

مكعب وزنه W وطول ضلعه ℓ يرتكز على أرض أفقية وحائط رأســـي خشـــن معامـــل إحتكاكهما كما هو مبين بالشكل. اوجد الزاوية θ في حالة الإتزان الحرج ؟

﴿ الحـــــل ﴾



بالتحليل أفقياً ورأسياً

$$N' = \mu N$$
$$N + \mu N' = W$$

ومن المعادلتين السابقتين نجد أن

$$N = \frac{W}{1+\mu^2}, \qquad N' = \frac{\mu W}{1+\mu^2}$$

بأخذ العزوم حول النقطة A فإن

$$N'\ell\cos\theta + \mu N'\ell\sin\theta - W\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

بالتعويض عن قيمة N, N' نحصل على

$$\mu\cos\theta + \mu^2\sin\theta - \left(\frac{1}{2}\right)\ 1+\mu^2 \quad \cos\theta - \sin\theta \quad = 0, \qquad \therefore\ \tan\theta = ...?$$

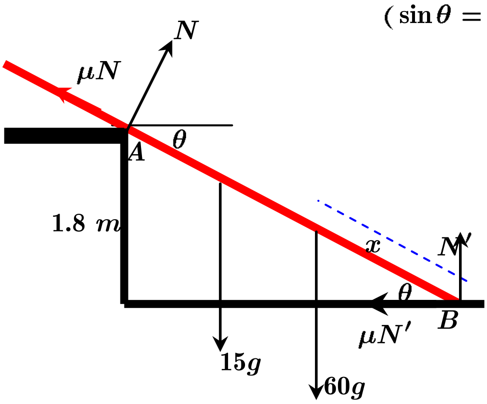
﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

لوح منتظم كتلته $15\ Kg$ وطوله $4\ m$ يستقر على سطحين عند A, B المسافة بينهما $3\ m$ وهما نفس معامل الإحتكاك عين أقصى مسافة يصعدها رجل كتلته $60\ Kg$ بسرعة منتظمة قبل أن يتزلق اللوح ($\mu = 0.2$)؟

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن الرجل يصعد مسافة قبا أن يتزلق اللوح أي يكون اللوح على وشك الإنزلاق

القوى المؤثرة على اللوح مبينة بالشكل ($\sin\theta = \frac{1.8}{3}$)



بأخذ العزوم حول النقطة B

$$15g(2\cos\theta) - 3N + 60g(x\cos\theta) = 0$$

ومن هذه المعادلة نجد أن

$$N = 8g(1+2x)$$

بالتحليل أفقياً

$$N\sin\theta - \mu N\cos\theta - \mu N' = 0$$

وبالتعويض عن قيمة N في المعادلة السابقة نحصل على $N' = 170g(1+2x)$

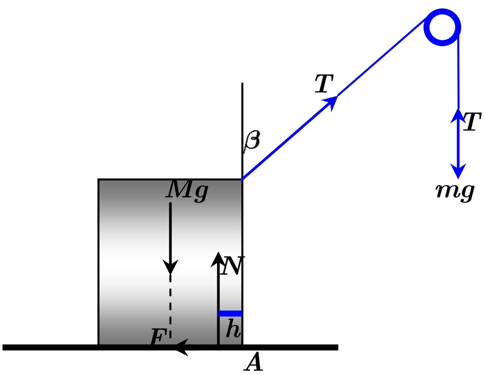
وبالتحليل رأسياً $N\cos\theta + \mu N\sin\theta - 75g + N' = 0$

وبالتعويض في هذه المعادلة عن قيمة كل من N, N' نحصل على $x = 1.0277\ m$

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

وضع مكعب كتلته M على مستوى أفقي خشن زاوية إحتكاكه λ ثم ربط بخـــيط عنـــد منتصف أحد أحرفه العليا ومر الخيط على بكرة مثبتة عند نقطة بحيث يتدلى من طرفه الآخر كتلة m . فإذا كان الخيط عمودي على الحرف ويميل على الرأسي بزاوية β . اثبـــت أن المكعب ينقلب قبل أن يتزلق إذا كان $\cot\lambda + \cot\beta < 2$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾



نفرض أن طول ضلع المكعب $2a$.

من إتزان الكتلة المدلاة في الخيط $T = mg$

من إتزان المكعب في الاتجاه الرأسي

$$N = Mg - T\cos\beta = Mg - mg\cos\beta$$

وفي الاتجاه الأفقي $F = T\sin\beta = mg\sin\beta$

وبأخذ العزوم حول نقطة تأثير رد الفعل N وباعتبار أن المسافة بين هذه النقطة والنقطة A هي h نجد أن

$$T\sin\beta(2a) = T\cos\beta(h) + Mg(a-h)$$

$$m\sin\beta(2a) = m\cos\beta(h) + M(a-h) \qquad \therefore h = \frac{m\sin\beta(2a) - Ma}{m\cos\beta - M}$$

شرطي الإنزلاق هما $F = \mu N,\ h > 0$ وبالتالي

$$F = T\sin\beta = mg\sin\beta = \mu N \qquad \Rightarrow m\sin\beta = \mu(M - m\cos\beta)$$

$$\therefore m = \frac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}$$

ومن الشرط $h > 0$ يكون

$$h = \frac{m\sin\beta(2a) - Ma}{m\cos\beta - M} > 0 \qquad \therefore \frac{2\left\{\dfrac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}\right\}\sin\beta - M}{\left\{\dfrac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}\right\}\cos\beta - M}$$

وباجراء الاختصارات للعلاقة الأخيرة نحصل على $1 - 2\mu < \mu\cot\beta > 2\mu - 1$ أو $\cot\beta > 2 - \dfrac{1}{\mu} = 2 - \cot\lambda$ أو $\cot\beta + \cot\lambda > 2$ وهو شرط الإنزلاق حيث ($\mu = \tan\lambda$)

وشرطي الإنقلاب هما $F < \mu N,\ h = 0$ وبالتالي

$$h = \frac{m\sin\beta(2a) - Ma}{m\cos\beta - M} = 0 \qquad \therefore 2m\sin\beta = M \qquad \Rightarrow m = \frac{M}{2\sin\beta}$$

$$F = T\sin\beta = mg\sin\beta < \mu N \qquad \Rightarrow mg\sin\beta < \mu(M - m\cos\beta)g$$

$$\therefore m < \frac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta} \qquad \Rightarrow \frac{M}{2\sin\beta} < \frac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}$$

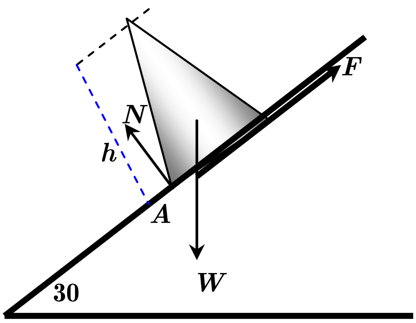
وباجراء الاختصارات للعلاقة الأخيرة نحصل على شرط الإنقلاب $\cot\beta + \cot\lambda < 2$ حيث $(\mu = \tan\lambda)$.

﴿ مثـــ ١٠ ـــال ﴾

وضع مخروط دائري قائم بقاعدته على مستوى خشن مائل بزاوية $\frac{\pi}{6}$ على الأفقي . اثبت أنه ينقلب عندما يكون نسبة ارتفاعه إلى نصف قطر قاعدته كنسبة $4\sqrt{3} : 1$ ثم أوجد أقل قيمة لمعامل الإحتكاك بحيث يحث سقوطه قبل إنزلاقه؟

﴿ الحـــــل ﴾

عندما يكون المخروط على وشك الإنقلاب فإن رد الفعل العمودي يؤثر عند أسفل نقطة من قاعدة المخروط A وتكون معادلات الإتزان هي



$$F = W\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}W,$$

$$N = W\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}W$$

وبأخذ العزوم حول النقطة A فإن

$$\therefore W\sin\frac{\pi}{6}.\frac{h}{4} = W\cos\frac{\pi}{6}.a \qquad \therefore \frac{h}{a} = 4\sqrt{3}$$

حيث h تمثل ارتفاع المخروط بينما a تمثل نصف قطر قاعدته أي أن المخروط ينقلب عندما يكون نسبة ارتفاعه إلى نصف قطر قاعدته كنسبة $4\sqrt{3} : 1$ ، ولكي يحدث الإنقـــلاب قبـــل الإنزلاق يجب أن يؤثر رد الفعل عند أسفل نقطة A وأيضاً يجب أن تكون قـــوة الإحتكـــاك $F < \mu N$ ومن ثم

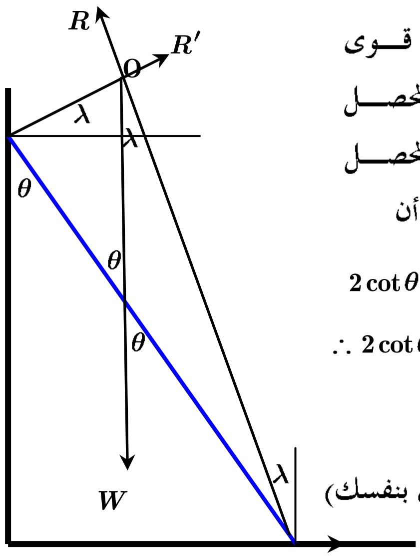
$$\therefore \frac{W}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}\mu W \qquad \therefore \mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وهي أقل قيمة لمعامل الإحتكاك بحيث ينقلب المخروط قبل الإنزلاق.

﴿ مثـــ ١١ ـــال ﴾

قضيب ثقيل منتظم يستند بأحد طرفية على حائط رأسي خشن والطرف الثاني على مستوى أفقي خشن متساويان في معامل الإحتكاك ويقع في مستوى رأسي عمودي على الحائط والمستوى وكان القضيب على وشك الإنزلاق. اوجد زاوية ميل السلم على الرأسي؟

﴿ الحـــل ﴾



كما بالشكل فإن القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية عند النقطة وهي الوزن W ، رد الفعل المحصل للمستوى الأفقي على القضيب R ، رد الفعل المحصل للحائط على القضيب R' ومن هندسة الشكل نجد أن

$$2\cot\theta = \cot\lambda - \cot\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$$

$$\therefore\ 2\cot\theta = \cot\lambda - \tan\lambda = 2\cot 2\lambda \qquad \therefore\ \theta = 2\lambda$$

حيث λ هي زاوية الإحتكاك وهو المطلوب.

يمكن استنتاج هذه العلاقة من هندسة الشكل (حاول بنفسك)

﴿ مثـــ ١٢ ـــال ﴾

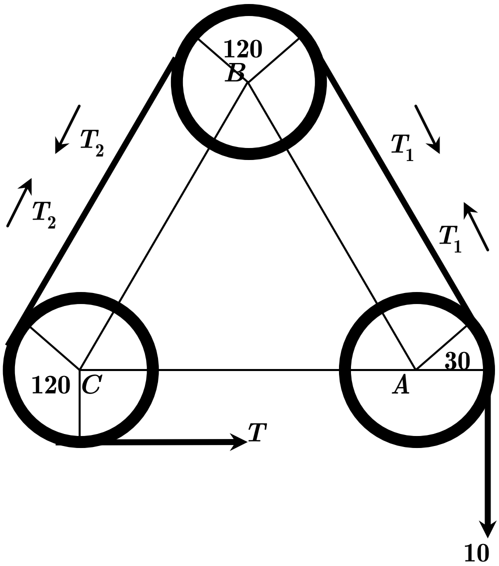
يلتف خيط يحمل في طرفه ثقلاً قدره 10 حول ثلاث بكرات خشنة متماثلة موضوعة عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع كما بالشكل ، إذا كان معامل الاحتكاك يساوي 0.25 فأوجد الشد (كما بالشكل) في الطرف الآخر من الخيط حتى لا يتزلق؟

﴿ الحـــل ﴾

هنا سنستخدام المعادلة $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$ بالنسبة لجميع البكرات

اولاً بالنسبة للبكرة A فإن الجزء من الخيط والذي يلامس الدائرة في زاوية $\pi / 6$

وبالتالي يكون $T_1 = 10e^{\mu\frac{\pi}{6}}$



وبالنسبة للبكرة B فإن الخيط يلامس الدائرة ويحصر زاوية $\frac{2\pi}{3}$ ومنها يكون

$$T_2 = T_1 e^{\mu\frac{2\pi}{3}} = 10e^{\mu\frac{5\pi}{6}} ،$$

وبالنسبة للبكرة C فإن الخيط يلامس الدائرة ويحصر زاوية $\frac{2\pi}{3}$ و من ثم

$$T = T_2 e^{\mu\frac{2\pi}{3}} = 10e^{\mu\frac{9\pi}{6}} = 10e^{\mu\frac{3\pi}{2}} = 10e^{\frac{3\pi}{8}}$$

﴿ مثـــ ١٣ ـــال ﴾

وضع قضيب منتظم طوله 2ℓ داخل كرة نصف قطرها a في المستوى الرأسي المار بمركـــز الكرة. إذا كانت λ هي زاوية الإحتكاك بين القضيب والكرة. اوجد أكبر ميل للقضيب على الأفقي إذا كانت $\ell < a\cos\lambda$ ؟

﴿ الحــــــل ﴾

القضيب واقع تحت تأثير وزنه W إلى أسفل وردي الفعل المحصلين عند نهايته R_1, R_2 ويصنع كل منهما مع العمودي على المماس (المار بالمركز) زاوية الإحتكاك λ، يمكن تحليل كل مـــن ردي الفعل R_1, R_2 إلى مركبتيهما في اتجاه المركز والمماس كما هو موضح بالشكل وبتطبيق شروط الإتزان و بالتحليل في اتجاه القضيب والعمودي عليه نحصل على

$$(N_1 - N_2)\cos\alpha + \mu(N_1 + N_2)\sin\alpha - W\sin\theta = 0$$

$$(N_1 + N_2)\sin\alpha + \mu(N_2 - N_1)\cos\alpha - W\cos\theta = 0$$

α هي الزاوية بين رد الفعل العمودي والقضيب ،

بحذف N_1, N_2 من هاتين العلاقتين نجد أن

$$N_1 + N_2 = \frac{W(\mu\sin\theta + \cos\theta)}{1 + \mu^2 \ \sin\alpha}$$

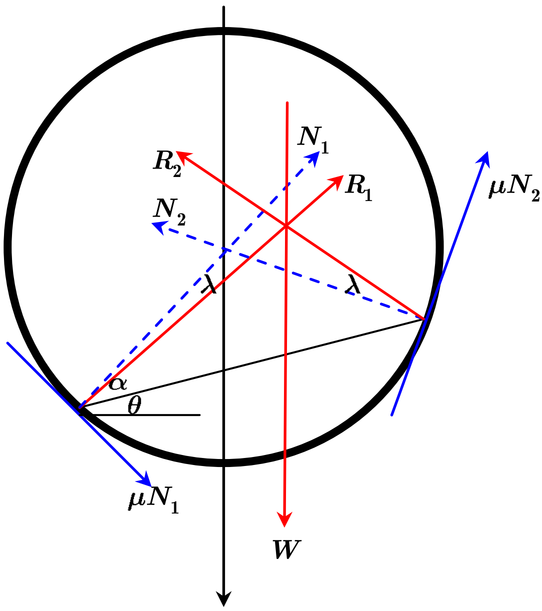
بأخذ العزوم حول مركز الكرة نجد أن

$$\mu(N_1 + N_2)a = W\sqrt{a^2 - \ell^2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mu\cancel{W}(\mu\sin\theta + \cos\theta)a}{1 + \mu^2 \ \sin\alpha} = \cancel{W}\sqrt{a^2 - \ell^2}\sin\theta$$

وباستخدام $\cos\alpha = \dfrac{\ell}{a}, \quad \text{and} \quad \mu = \tan\lambda$

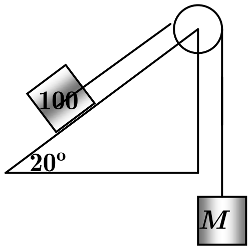
و بعد الاختصارات نحصل على $\tan\theta = \dfrac{a^2\sin\lambda\cos\lambda}{a^2\cos^2\lambda - \ell^2}$ وهو أكبر ميل القضيب على الأفقي. ويمكن استخدام طريقة (مثـــ ١١ ـــال) في هذه المسألة. (حاول ذلك بنفسك)



الخلاصة

- إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الحركة فإن قياس زاوية الإحتكاك يساوي قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي.
- رد الفعل المحصل يمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودي وقوة الإحتكاك وتعمل قوة الإحتكاك عكس اتجاه الحركة المتوقعة للجسم.
- الزاوية بين رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودي هي زاوية الإحتكاك λ وظلها هو معامل الإحتكاك.أي أن $\mu = \tan\lambda$.
- هناك أنواع كثيرة من الإحتكاك منها إحتكاك الإنزلاق ، الإنقلاب ، التدحرج ، الحبال والسيور ، المفاصل.
- شرط حدوث الإنزلاق قبل الإنقلاب هو $h > 0, \quad F = \mu N$ أما شرط هو الإنقلاب قبل الإنزلاق هو $h = 0, \quad F < \mu N$.
- المعادلة التي تتعامل مع الحبال والسيور هي $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$

تمـــــــــارين



(١) اوجد مدى قيم الكتلة M بحيث لا تستطيع الكتلة 100 والموضحة بالشكل ان تتحرك إلى أعلى أو إلى اسفل المستوى والذي يميل بزاوية 20^o مع الأفقي علماً بأن معامل الاحتكاك بين المستوى والكتلة هو 0.3 ، والبكرة ملساء؟

(٢) وضع جسم وزنه w على مستوى خشن مائل بزاوية α أكبر من زاوية الإحتكاك λ. أوجد أقل وأكبر قيمة للقوة التي تؤثر على الجسم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى بحيث يكون الجسم على وشك الحركة؟

(٣) بيّن أن أقل قوة تحرك جسيم وزنه W على إمتداد مستوى أفقي خشن هي $W\sin\lambda$ حيث λ هي زاوية الإحتكاك بين المستوى والجسيم؟

(٤) اسطوانة منتظمة ارتفاعها 2ℓ ونصف قطر مقطعها a . وضعت بقاعدتها على مستوى خشن مائل معامل الإحتكاك بينهما μ . أثبت أن الاسطوانة تنقلب قبل أن تنزلق إذا كان $\mu > \frac{a}{\ell}$؟

(٥) قضيب منتظم وزنه W يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسي أملس وبطرفه الاخر على مستوى خشن ينحدر من الحائط ويميل على الأفقي بزاوية α . أثبت أنه إذا كان القضيب على وشك الإنزلاق فإن الزاوية θ و التي يميل بها على الحائط تعطى من $\tan\theta = 2\tan(\lambda - \alpha)$ حيث λ هي زاوية الإحتكاك ثم أوجد رد الفعل المحصل بين القضيب والمستوى؟

(٦) وضعت كتلتان متساويتان على مستويين خشنين يميلان على الأفقي بزاويتين $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$ واتصلتا بخيط غير مرن يمر على بكرة ملساء عند خط اتصال المستويين فإذا كانت الكتلتان على وشك الحركة فاثبت أن معامل الإحتكاك يساوي $2-\sqrt{3}$؟

(٧) وضعت نصف أسطوانة نصف قطرها a على قاعدتها المستوية على مستوى أفقي خشن ووضع قضيب منتظم طوله ℓ ووزنه W عمودي على محور الأسطوانة ونهايته الأخرى على

الأرض الأفقية ، إذا كانت α هي زاوية ميل القضيب مع الأفقي في وضع الإتزان ومعامل الإحتكاك بين القضيب والأرض يساوي معامل الإحتكاك بين القضيب والأسطوانة فاثبت أن $\ell \sin^2 \alpha = a \sin 2\lambda$ حيث λ زاوية الإحتكاك؟

(۸) أسطوانة منتظمة تستقر على مستوى أفقي خشن بحيث كان محورها أفقياً. استقرت عليها لوحة وإحدى نهايتيها على المستوى الأفقي ، إذا كانت اللوحة على وشك الإنزلاق على الأسطوانة فاثبت أن معامل الإحتكاك بينهما يساوي $\tan \frac{\alpha}{2}$ حيث α زاوية ميل اللوحة على المستوى الأفقي؟

(۹) وضع جسيم وزنه 5 على مستوى مائل خشن معامل إحتكاكه $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ويميل على الأفقي زاوية 45^o. ثبت طرف خيط غير مرن عند الجسيم ثم سحب الخيط بقوة شد T إلى أعلى في اتجاه المستوى. أحسب أقل قيمة للشد تكفي لتحريك الجسيم أعلى المستوى؟

(۱۰) قضيب منتظم متزن في مستوى رأسي يستند بأحد اطرافه على حائط خشن ، والطرف الآخر على أرض أفقية خشنة لها نفس معامل احتكاك الحائط. إذا كان الاحتكاك عند طرفي القضيب نهائياً ، وكان القضيب يميل على الأفقي بزاوية α . أوجد زاوية الاحتكاك؟

(۱۱) وضع مربع على مستوى خشن مائل بزاوية α على الأفقي بحيث كان مستواه رأسياً وانطبق أحد أضلاعه على خط أكبر ميل ، ربط خيط في رأس المربع العليا وشد في اتجاه يوازي خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى اثبت أنه إذا زاد الشد بالتدرج فأوجد شرط انزلاق أو انقلاب المربع إذا كان μ معامل الإحتكاك؟

(۱۲) قضيب منتظم وزنه W وطوله $2a$ يستند بنقطة منه على وتد خشن وبطرفه الأسفل على حائط رأسي مساوٍ للوتد في الخشونة بحيث كان القضيب في مستوى رأسي عمودي على الحائط ، فإذا كانت b بعد الوتد عن الحائط وكان القضيب على وشك الإنزلاق إلى أسفل فاثبت أن $\sin^2 \theta \sin(\theta + 2\lambda) = \frac{b}{a} \cos^2 \lambda$ حيث θ ميل القضيب على الرأسي ، λ زاوية الإحتكاك؟

(١٣) سلم AB منتظم وزنه W يستند بطرفه A على أرض أفقية خشنة وبطرفه الآخر على حائط رأسي أملس بحيث يقع السلم في مستوى رأسي ويميل على الحائط بزاوية 45^o . فإذا كان السلم متزناً فاثبت أن معامل الإحتكاك بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من 0.5. وإذا كان معامل الإحتكاك يساوي $\frac{2}{3}$ فإن مقدار القوة الأفقية التي تؤثر عند A وتجعله على وشك الحركة نحو الحائط تعادل $\frac{7}{6}W$ ؟

(١٤) وضعت صفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل بحيث كان مستواها رأسياً وأحد أحرفها منطبق على خط أكبر ميل لمستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية 30^o. أثرت قوة أفقية عند أعلى نقطة في الصفيحة بحيث كانت تعمل إلى أعلى المستوى فإذا زيدت هذه القوة تدريجياً فاثبت أن الصفيحة تنقلب دون أن تنزلق إذا كان معامل الإحتكاك أكبر من $\frac{3-\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}}$ ؟

(١٥) قضيب منتظم موضوع في حالة إتزان نهائي داخل فجوة كروية خشنة بحيث يقابل زاوية 2α عند مركز الفجوة. إذا كانت λ هي زاوية الإحتكاك بيّن أن الزاوية التي يصنعها القضيب مع الرأسي تعطى من $\tan^{-1}\left\{\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\lambda}{\sin 2\lambda}\right\}$ ؟

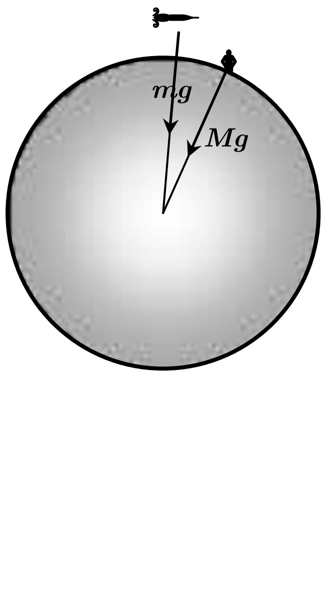
(١٦) ثلاثة أوتاد متساوية نصف قطر كل منها ℓ وضعت عند رؤوس المثلث المتساوي الأضلاع ABC بحيث كان BC أفقياً والرأس A أعلى BC . لف خيط حول الثلاثة أوتاد وأثر في أحد أطرافه الوزن W. أوجد القوة F التي يجب أن تؤثر في الطرف الآخر من الخيط حتى لا ينزلق؟

مركز الثقل (الجذب)

من المعروف أن الجسيم ما هو الاّ جسم يمكن إعتباره مركزاً في نقطة ، والجسم من الوجهه الميكانيكية يمكن تقسيمه إلى عدد من الأجزاء وكل جزء من هذه الأجزاء يعتبر جسيماً ، والجسم الذي تكون فيه المسافات الفاصلة بين أي جسيمين من الجسيمات المكونة له ثابتة يُطلق عليه الجسم المتماسك أو الجاسئ.

حيث – كما ذكرنا – فإن أي جسم يمكن إعتباره مكوناً من مجموعة من الجسيمات الصغيرة وبالتالي يكون تأثير الجاذبية الأرضية (والتي تساوي كتلة الجسم في عجلة الجاذبية الأرضية mg) على هذا الجسم هو ناتج تأثيراهما على الجسيمات المكونة له وكما هو معلوم فإن كل جسيم من هذه الجسيمات يقع تحت تأثير قوة جذب تساوي عددياً وزن هذا الجسيم وتعمل في الخط المستقيم المار بهذا الجسيم وبمركز الكرة الأرضية ونظراً لأن بعد الجسم المتماسك عن مركز الأرض يكون كبيراً جداً إذا ما قُورنت بالمسافات بين الجسيمات المكونة للجسم ومن ثم يمكننا إعتبار خطوط عمل أوزان الجسيمات المكونة للجسم متوازية كلها وعلى ذلك يمكن إيجاد قوة وحيدة هي محصلة هذه القوى وهي تساوي عددياً مجموع أوزان هذه الجسيمات و تعمل رأسياً لأسفل نحو مركز الأرض. وهذه المحصلة تسمى وزن الجسم وتعمل رأسياً لأسفل وموجهه نحو مركز الأرض ومقدارها هو وزن الجسم أو ثقله بينما نقطة تأثيرها (المحصلة) تسمى مركز ثقل الجسم.

ويعرف مركز ثقل الجسم الجاسئ على أنه تلك النقطة من الفراغ والتي يمر بها دائماً خط عمل وزن هذا الجسم مهما تغير وضعه بالنسبة لسطح الأرض.



أهمية تحديد مركز الثقل

■ حمل الأجسام كالماكينات والمحركات أو رفعها أو تعليقها ونقلها بسهولة وأمان حيث يجب أن يقع خطاف آلة الرفع أعلى مركز ثقل الجسم مباشرةً حتى لا ينتج عزم غير متزن يسبب ميل الجسم.

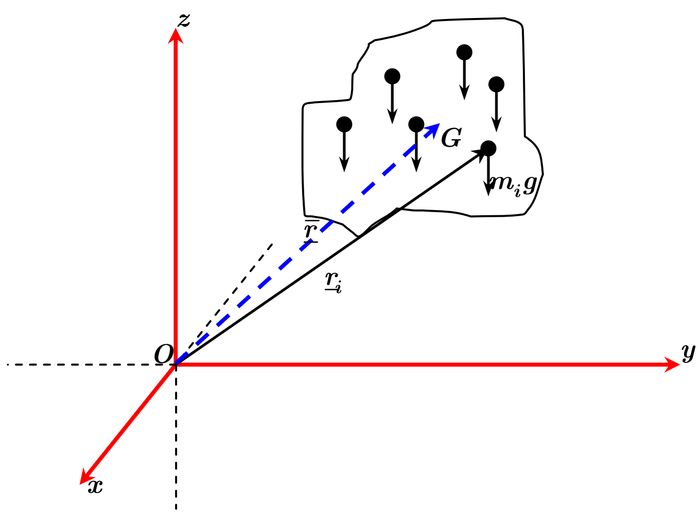
■ الحصول على الاتزان الاستاتيكي المستقر للآلات عند تثبيتها على سطح أفقي أو مائل وذلك بأن يقع الخط الرأسي المار بمركز الثقل في حدود قاعدة الجسم. وهناك العديد من الفوائد في الحياة العملية.

مركز ثقل مجموعة من الجسيمات

إذا كان هناك عدة جسيمات عددها n كتلها هي $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ موضوعة عند النقط التي متجهات الموضع لها $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, ...\underline{r}_n$ على الترتيب كما بالشكل فإن مركز ثقل هذه المجموعة هو النقطة والتي متجه الموضع لها $\overline{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$

نفرض أن الكتل $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ مرقمة هكذا $1, 2, 3, ..., n$ وأن أوزانها $m_1 g, m_2 g, m_3 g, ..., m_n g$ وهي كلها رأسياً لأسفل حيث g عجلة الجاذبية ولذا فإن محصلة هذه الأوزان هي

$$m_1 g + m_2 g + m_3 g + ... + m_n g = g \sum_{i=1}^{n} m_i = Mg$$



ونفرض أن هذا الوزن Mg يؤثر عند نقطة متجه الموضع لها هو $\underline{\bar{r}}$ وحيث أن مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة الأصل يساوي عزم محصلة هذه القوى حول نقطة الأصل. بأخذ العزوم حول نقطة الأصل نجد أن

$$\underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \underline{r}_n \wedge \underline{F}_n = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

حيث

$$\underline{F}_1 = -m_1 g\hat{k},\ \underline{F}_2 = -m_2 g\hat{k}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\ \underline{F}_n = -m_n g\hat{k},\ \underline{F} = -Mg\hat{k}$$

بفرض أن احداثيات متجهات موضع الجسيمات كالتالي

$$\underline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \underline{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),\ \dots\dots,\ \underline{r}_n = (x_n, y_n, z_n),\ \underline{\bar{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & -m_1 g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & -m_2 g \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_n & y_n & z_n \\ 0 & 0 & -m_n g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 0 & 0 & -Mg \end{vmatrix}$$

بمساواة مركبات الطرفين نحصل على

$$-m_1 g y_1 - m_2 g y_2 - m_3 g y_3 - \dots\dots\dots\dots - m_n g y_n = -Mg\bar{y}$$

$$m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \dots\dots\dots\dots + m_n g x_n = Mg\bar{x}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad \textbf{and}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

بالمثل إذا أدرنا المحاور فلن يتغير موضع الكتل أو مركز الكتله ونحصل علـــى صـــيغة مماثلـــة للمقدار $\bar{z}$ في الصورة

$$\bar{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

ومن ثم يكون متجه الموضع لمركز ثقل المجموعة يتعين من

$$\underline{\bar{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

ومن هذا القانون يمكن إيجاد مركز ثقل جسم مكون من عدة جسيمات (معروف مراكز ثقلها)

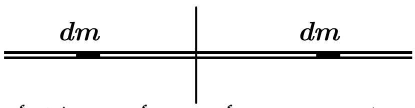
خاصية هامة ١: يوجد مركز ثقل واحد للجسم الجاسئ.

خاصية هامة ٢: مركز ثقل الجسم الجاسئ يقع عند نقطة ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض.

خاصية هامة ٣: إذا وجد محور (نقطة) تماثل للجسم فإن مركز الثقل للجسم يقع على محور (نقطة) التماثل.

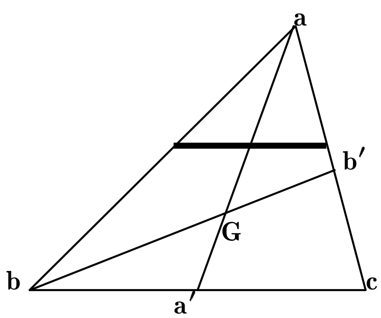
مركز ثقل بعض الأجسام الجاسئة البسيطة

➤ مركز ثقل قضيب منتظم هو منتصفه وذلك بتقسيم القضيب إلى عناصر صغيرة متساوية وتحصيل وزن كل عنصرين متساويي البعد عن الطرفين إلى وزن منتصف القضيب. كذلك القضيب متماثل حول نقطة المنتصف وبالتالي فهي مركز ثقله.



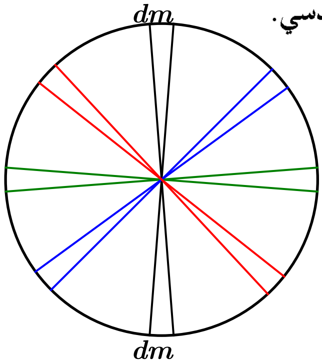
➤ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على هيئة مربع أو معين أو مستطيل أو متوازي أضلاع هو مركزها الهندسي أي نقطة تلاقي القطرين و ذلك بتقسيم الصفيحة إلى شرائح طولية متساوية (ثم عرضية) ويمكن إعتبار كل شريحة على هيئة قضيب رفيع منتظم (مركز ثقله في المنتصف).

➤ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل مثلث عند نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث. وذلك بتقسيم الصفيحة المثلثية abc إلى شرائح موازية للضلع bc فإن مركز ثقل كل شريحة يقع عند منتصفها وبالتالي فإن مركز ثقل الصفيحة يقع على المستقيم المتوسط aa′ ، وبالمثل فإن مركز ثقل الصفيحة يقع على المستقيم المتوسط bb′ وعلى ذلك فإن مركز ثقل الصفيحة المثلثية يقع عند نقطة تلاقي المتوسطات.



➤ مركز ثقل حلقة دائرية منتظمة السمك والكثافة هو مركزها الهندسي و ذلك بتقسيم الحلقة إلى عناصر متساوية فنجد أن كل عنصرين متقابلين مركز كتلتهم يكون عند مركز الحلقة ، وبذلك فإن مركز كتلة جميع هذه العناصر يكون في المركز الهندسي للحلقة ونلاحظ أن مركز الكتلة للجسم يقع خارج الجسم.

وكذلك حيث أن الحلقة متماثلة بالنسبة للمركز فإن مركز ثقل الحلقة يقع على المركز الهندسي.



➤ مركز ثقل أسطوانة مصمتة أو مفرغة منتظمة السمك والكثافة وحيث أن الأسطوانة تكون متماثلة حول محورها وكذلك حول المستوى المار بمنتصف المحور ويوازي قاعدتيها فإن مركز ثقل الأسطوانة الدائرية المصمتة أو المفرغة يقع عند منتصف المحور.وكذلك مركز ثقل المنشور هو منتصف محوره.

➤ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على هيئة قرص دائري هو مركزها الهندسي و ذلك بتقسيم الصفيحة إلى شرائح كل منها عبارة عن قضيب رفيع وموازية لأحد الأقطار ومن ثم فإن مراكز ثقل هذه الشرائح جميعها يقع على القطر الذي يتعامد مع القطر الأول. مرة أخرى نقسم الصفيحة إلى شرائح موازية لقطر آخر فمراكز ثقلها يقع على قطر متعامد معه وبذلك نجد أن مركز ثقل الصفيحة لابد أن يقع على تقاطع القطرين أي يقع على مركز الدائرة. كذلك فإن أي قطر في الدائرة هو محور تماثل ومن ثم فإن مركز الثقل يقع على جميع الأقطار (والنقطة التي تحقق هذه الخاصية هي نقطة المركز).

وبطريقة أخرى يمكن تقسيم الصفيحة إلى حلقات دائرية متحدة المركز ومن المعروف أن مركز كل حلقة هو هو المركز الهندسي للصفيحة وعلى ذلك فإن مركز ثقل الصفيحة هو مركزها الهندسي.

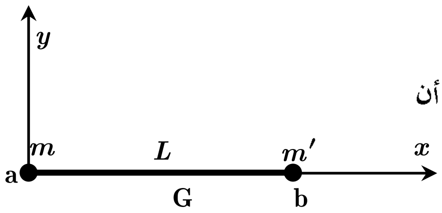
➤ مركز ثقل قشرة كروية أو الكرة المصمتة منتظمة الكثافة هو مركزها الهندسي و ذلك لأن كل من القشرة أو الكرة المصمتة متماثلتان حول المركز الهندسي.

﴿ مثـــ ١ ـــال ﴾

أوجد مركز ثقل نقطتين ماديتين كتلتيهما m, m' وتفصل بينهما مسافة L ؟

﴿ الحــــــل ﴾

نفرض أن الكتلتين تقعان على المحور x ومن ثم فإن احداثيات مركز ثقل النقطتين الماديتين هو $(0,0),\ (L,0)$ كما بالشكل



ومن القانون السابق الخاص بحساب مركز الثقل نجد أن

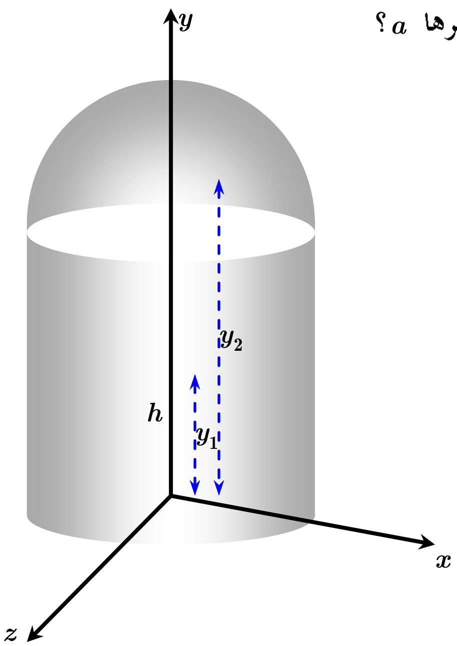
$$\bar{x} = \mathrm{Ga} = \frac{m \times 0 + m' \times L}{m + m'} = \frac{m'L}{m + m'}$$

و $$\bar{y} = \frac{m \times 0 + m' \times 0}{m + m'} = \frac{0}{m + m'} = 0$$

أي أن مركـــز الثقـــل يقســـم المســـافة بـــين النقطـــتين المـــاديتين ab بنســـبة $\mathrm{Ga}:\mathrm{Gb} \equiv \dfrac{m'L}{m+m'} : L - \dfrac{m'L}{m+m'} = m' : m$ أي بنسبة عكسية لكتلتيهما.

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

أوجد المركز المتوسط لجسم صلب كثافته ثابتة ويتكون من أســـطوانة نصـــف قطرهـــا a وارتفاعها h يعتليها نصف كرة مصمتة نصف قطرها a ؟



﴿ الحــــــل ﴾

نلاحظ أن المحور y هو محور تماثل ومـــن ثم يقع مركز الثقل عليه ، كتلة الأسطوانة تتعين من $M = \pi a^2 h \rho$ وكتلة نصـــف الكرة هي $m = \frac{2}{3}\pi a^3 \rho$ حيث ρ هي الكثافة الحجمية لكل من

الأسطوانة ونصف الكرة كذلك مركز ثقل الأسطوانة هو $y_1 = \frac{1}{2}h$ ومركز ثقل نصف الكرة هو $y_2 = \frac{3}{8}a + h$ (مثـــ ٩ ـــال) وبالتالي فإن مركز ثقل الجسم كله يتعين من

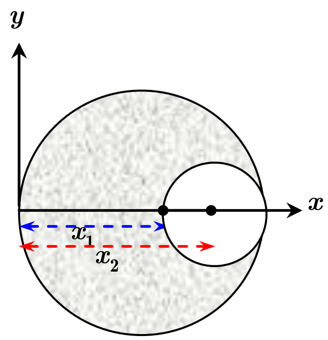
$$\because \bar{y} = \frac{My_1 + my_2}{M + m}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\pi a^2 h\rho \left\{\frac{1}{2}h\right\} + \left(\frac{2}{3}\pi a^3 \rho\right)\left\{\frac{3}{8}a + h\right\}}{\pi a^2 h\rho + \left(\frac{2}{3}\pi a^3 \rho\right)}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3a^2 + 8ah + 6h^2}{8a + 12h}$$

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

ثقب دائري نصف قطره a قطع في حيز دائري نصف قطره $2a$ كما هو موضح بالشـــكل. أوجد المركز المتوسط للمنطقة المضللة؟



﴿ الحــــــل ﴾

نلاحظ أن المحور x هو محور تماثل ومن ثم يقـــع مركز الثقل على المحور x أي أن $\bar{y} = 0$ كتلـــة الصـــفيحة الدائريـــة الكـــبرى تـــتعين مـــن $M = \pi(2a)^2\sigma = 4\pi a^2\sigma$ وكتلـــة الثقـــب الدائري تتعين من $m = \pi a^2\sigma$ حيث σ هـــي الكثافـــــة الســـــــطحية للصـــــــفيحة

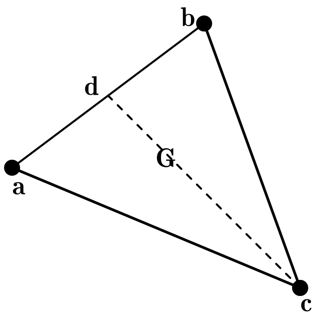
كذلك مركز ثقل الصفيحة الكبرى هو $x_1 = 2a$ ومركز ثقل الثقب الدائري هو $x_2 = 3a$ وبالتالي فإن مركز ثقل الجزء المظلل هو

$$\bar{x} = \frac{Mx_1 - mx_2}{M - m} = \frac{(4\pi a^2\sigma)(2a) - (\pi a^2\sigma)(3a)}{(4\pi a^2\sigma) - (\pi a^2\sigma)} = \frac{5\pi a^3\sigma}{3\pi a^2\sigma} = \frac{5}{3}a$$

﴿ مثـــ ٤ ــــال ﴾

أثبت أن مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها $3m$ محدودة بمثلث يتكافئ مع مركز ثقـــل ثلاث كتل متساوية (كتلة كل منها m) موضوعة عند رءوس المثلث؟

﴿ الحـــــل ﴾



من الشكل محصلة الكتلتين الموضوعتان عند a, b هي الكلتة $2m$ وتقع في منتصف المسافة بين a, b ولتكن عند النقطة d كذلك محصلة القوتين m الموضوعة عند النقطة c ، الكتلة $2m$ الموضوعة

عند النقطة d هي كتلة مقدارها $3m$ وتقع بين النقطتين c, d ولتكن عند النقطة G وتقسم المســـــافة بينــــهما بنســــبة عكســــــية لكتلتيهمـــــــا أي أن $Gc = 2, Gd = 1$

معنى ذلك أن النقطة تقع على المتوسط cd وتقسمه بنسبة $1 : 2$ من ناحية الرأس أي أنهـــا تنطبق مع مركز ثقل الصفيحة المثلثة.

خاصية هامة ٤: إذا عُلق جسم تعليقاً حراً من إحدى نقطه فإنه يتزن بحيث يمر الخط الرأسي من نقطة التعليق بمركز ثقل الجسم ، وذلك لأنه بفرض أن O هي مركز ثقلـــه وأن نقطـــة التعليق A فإن الجسم يتزن تحت تأثير قوتين R, mg وهاتان القوتان متساويتان في المقـــدار ومتضادتان في الاتجاه وخط عملهما على استقامة واحده في الاتجاه الرأسي.

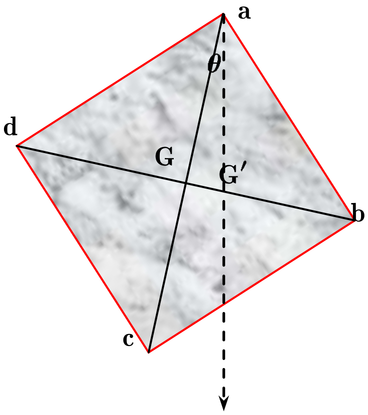
﴿ مثـــ ٥ ــــال ﴾

عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها $40\ Ib$ تعليقاً حراً من الرأس a وثبت عند الرأس b ثقل قدره $10\,Ib$. أوجد قياس زاوية ميل القطر ac على الرأسي في وضع الاتزان؟

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن G هو مركز ثقل الصفيحة وهو نقطة تلاقي قطريها ونفرض أن G' هو مركز ثقل

المجموعة المكونة من الصفيحة والثقل عند b . عند وضع الاتزان تكون النقطة G' واقعـة على الخط الرأسي المار بنقطة التعليق كما بالشكل وكذلك تكون $G' \in \overline{Gb}$ بحيث أن



$$10 \times G'b = 40 \times GG'$$

$$\therefore GG' = \frac{1}{4}G'b, \quad \text{Or} \quad GG' = \frac{1}{5}Gb = \frac{1}{5}Ga$$

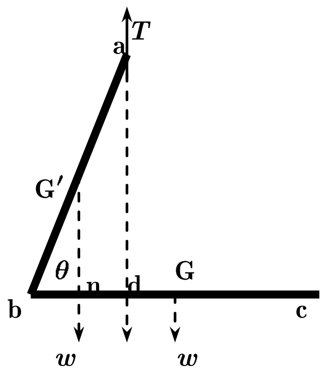
وفي المثلث $GG'a$ يكون $\tan\theta = \dfrac{GG'}{Ga}$

$$\therefore \tan\theta = \frac{Ga}{5Ga} = \frac{1}{5} \qquad \therefore \theta = \tan^{-1}(0.2)$$

حيث θ هي زاوية ميل القطر ac على الخط الرأسي.

﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

ثني قضيب منتظم abc طوله 2ℓ من نقطة منتصفه b ثم علق من الطرف a تعليقاً حراً فإذا عُلم أن $\overline{bc}$ كان أفقياً في وضع الاتزان فأوجد قياس زاوية $a\hat{b}c$ ؟



﴿ الحـــــل ﴾

حيث أن a هي نقطة التعليق ، $\overline{bc}$ أفقياً وبرسم $\overrightarrow{ad} \perp \overline{bc}$ فنجد أن مركز الثقل يقع على $\overrightarrow{ad}$ (حتى يتزن مع قوة الشــــد) وبفرض أن وزن الجزء bc من القضيب يساوي w ويؤثر عند منتصفه G وأيضاً وزن الجزء ab يساوي w ويؤثر عند منتصفه G' وبالتالي

$$w \times Gd = w \times nd \qquad \text{(See Ex.1)} \qquad \text{but} \qquad nd = nb = \frac{1}{2}\ell\cos\theta \qquad \text{and}$$

$$Gd = Gb - db \therefore Gd = \ell\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right)$$

$$\therefore \cancel{w} \times \cancel{\ell}\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right) = \cancel{w} \times \frac{1}{2}\cancel{\ell}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \quad \text{Or} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

إيجاد مركز الثقل بالتكامل

مما سبق يتضح أنه يمكن ايجاد مركز ثقل بعض الاجسام وذلك إما بتقسيمها إلى عناصر صغيرة وإيجاد مركز ثقل كل عنصر وبعد ذلك نجري عملية تجميع لمراكز ثقل هذه العناصر لنحصل على مركز ثقل الجسم الكلي. وهذ الطريقة تكون مفيدة في حالة الاجسام التي لها نقطـــة أو محور تماثل. أما الطريقة العامة لايجاد مركز ثقل أي جسم مهما كان شكله هو تقســـيمه إلى عدد كبير جداً لانهائي من العناصر وعندما تزداد هذه العناصر إلى مالانهاية فإن كتلة العنصر ستؤول إلى الصفر ومن ثم تؤول علامة الجمع إلى علامة تكامل ويصبح احداثيات مركز الثقل في الصورة

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}, \qquad \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

والأمثلة التالية ستوضح طريقة حساب مركز الثقل باستخدام التكامل:

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

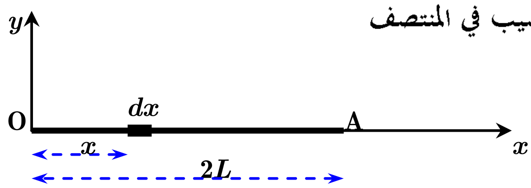
أوجد مركز ثقل قضيب منتظم طوله $2L$ باستخدام التكامل؟

﴿ الحـــــل ﴾

بأخذ عنصر صغير من القضيب طوله dx بحيث أن صغره يكون كافياً حيث تكون الكثافـــة على طوله ثابتة تقريباً وليكن هذا العنصر على بعد x من الطرف O والذي سوف يتخـــذ كنقطة أصل حيث OA هو محور x والعمودي عليه هو المحور y وتكون كتلـــة العنصـــر $dm = \lambda dx$ حيث λ ثابت كذلك مركز هذا العنصر هي النقطة $(x,0)$ ويتعين مركز ثقل القضيب من

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{2L} \lambda x dx}{\int_0^{2L} \lambda dx} = \frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2L}}{\left[x\right]_0^{2L}} = \frac{2L^2}{2L} = L$$

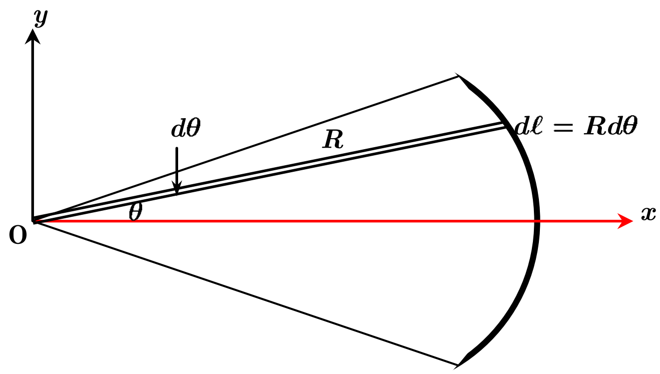
أي أن مركز ثقل القضيب في المنتصف



﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

أوجد مركز ثقل سلك رفيع على هيئة قوس دائري نصف قطره R ويصنع زاوية 2α عنـــد مركزه الهندسي؟

﴿ الحـــــل ﴾



واضح أن السلك متماثل حول المحور Ox وبالتالي فإن مركز ثقل السلك يقع عليـــه أي أن $\bar{y} = 0$ ولحساب $\bar{x}$ بفرض أن ρ هي كتلة وحدة الأطوال من السلك وبتقسيم السلك إلى عناصر ونعتبر أحد هذه العناصر عند الموضـــع (R,θ) فـــإن كتلـــة هـــذا العنصـــر هـــي $dm = \rho d\ell = R\rho d\theta$ وبالتالي فإن

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} (R\cos\theta)(R\rho d\theta)}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\rho d\theta} = \frac{R\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

حالة خاصة : في حالة سلك على شكل نصف دائرة أي أن $\alpha = \frac{\pi}{2}$ فإن

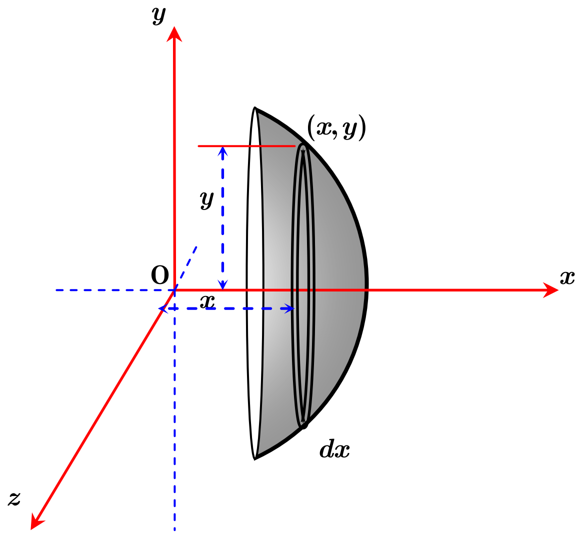
$$\bar{x} = \frac{R\sin(\pi / 2)}{\pi / 2} = \frac{2R}{\pi}$$

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

عين مركز ثقل قطعة كروية مصمتة ارتفاعها h ونصف قطر كرتها a؟

﴿ الحـــــــل ﴾

نلاحظ أن المحور Ox هو محور تماثل وبالتالي $\bar{y} = \bar{z} = 0$



بأخذ عنصر عبارة عن قرص كتلته $dm = \pi y^2 \rho dx$ (سمكه dx) ومركز ثقله $(x, 0, 0)$

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int\limits_{a-h}^{a} \pi x y^2 \rho dx}{\int\limits_{a-h}^{a} \pi y^2 \rho dx} = \frac{\int\limits_{a-h}^{a} x \;\; a^2 - x^2 \;\; dx}{\int\limits_{a-h}^{a} \;\; a^2 - x^2 \;\; dx} = \frac{\left[\frac{1}{2} a^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4\right]_{a-h}^{a}}{\left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right]_{a-h}^{a}}$$

$$\therefore \; \bar{x} = \frac{3(2a - h)^2}{4(3a - h)}$$

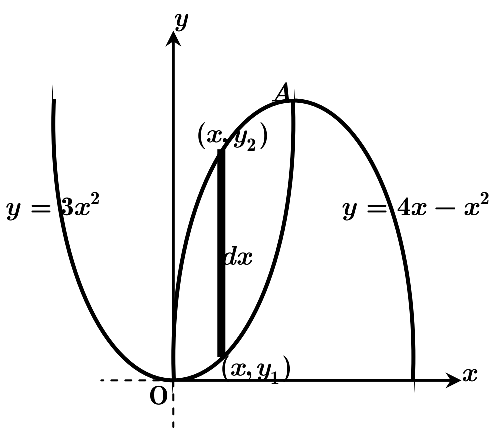
حالة خاصة : نصف الكرة هي قطعة كروية ارتفاعها a أي أن $h = a$ ويكون $\bar{x} = \frac{3}{8} a$.

﴿ مثــ ١٠ ــال ﴾

أوجد مركز ثقل المساحة المحصورة بين القطعين المكافئين $y = 4x - x^2 \quad y = 3x^2,$ ؟

﴿ الحــــــل ﴾

من المهم في هذه الحالة إيجاد نقـاط تقـاطع المنحنيين وبالتعويض من إحدى المعـادلتين في الأخرى نجد أن



$$3x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow x\ \ x - 1\ \ = 0$$
$$\therefore x = 0 \quad \text{Or} \quad x = 1$$

وبالتـــالي فـــإن نقـــط التقـــاطع هـــي $O(0,0),\ A(1,3)$ دعنا نأخذ عنصراً يوازي المحور y وهـــو محصـــور بـــين النقطـــتين $(x, y_1), (x, y_2)$ وسمكه dx وعليه فمساحة العنصر هي $y_2 - y_1\ \ dx$ وتكون كتلتـــه dm ويمكن حسابها كالتالي

$$dm = \sigma\ \ y_2 - y_1\ \ dx = \sigma\ \ 4x - x^2 - 3x^2\ \ dx = 4\sigma\ \ x - x^2\ \ dx$$

ومركز ثقل هذه الشريحة هو $\left(x, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(x, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{2}\right)$ أي $x, 2x + x^2$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^1\ \ x^2 - x^3\ \ dx}{\int_0^1\ \ x - x^2\ \ dx} = \frac{\left\{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right\}\Big|_0^1}{\left\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right\}\Big|_0^1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int_0^1\ \ 2x + x^2\ \ \ \ x - x^2\ \ dx}{\int_0^1\ \ x - x^2\ \ dx} = \frac{\int_0^1\ \ 2x^2 - x^3 - x^4\ \ dx}{\int_0^1\ \ x - x^2\ \ dx}$$

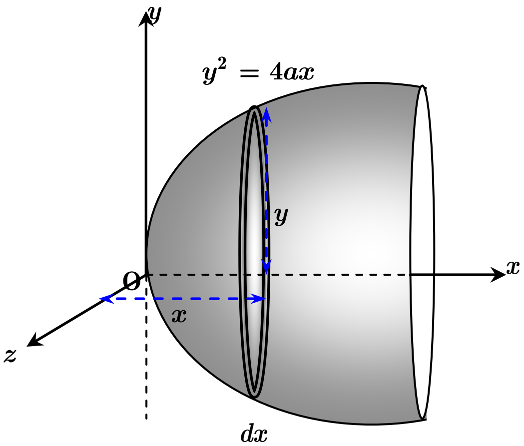
$$\therefore \bar{y} = \frac{\left\{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right\}\Big|_0^1}{\left\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right\}\Big|_0^1} = \frac{13}{10}$$

أي أن مركز ثقل المساحة المحصورة هو $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{10}\right)$

﴿ مثـــال ١١ ﴾

أوجد مركز كتلة السطح الناتج من دوران المنحنى $y^2 = 4ax$ حـــول المحـــور Ox بـــين المستويين $x = 0$ ، $x = a$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾



واضح أن المنحنى متماثل حول المحور Ox وبالتالي فإن مركز الثقل يقع عليـــه أي أن $\bar{y} = \bar{z} = 0$ وبأخذ عنصر من المـــنحنى طوله $d\ell$ عند النقطة (x, y) على المنحنى فينتج عن دوران هذا العنصر حول المحور Ox عنصر مساحة (حلقة نصف قطرهـــا y) ومن ثم فإن احداثيات مركـــز ثقـــل السطح المتولد عن الدوران هو (حيـــث $dm = 2\pi y \rho d\ell$)

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\cancel{2\pi\rho} \int x y d\ell}{\cancel{2\pi\rho} \int y d\ell}$$

ولكن $d\ell = \sqrt{1 + \left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2} dx$ ، بتفاضل معادلة القطع $y^2 = 4ax$ بالنســـبة إلى x فنجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$ ومن ثم يكون

$$\therefore d\ell = \sqrt{1 + \frac{4a^2}{y^2}} dx = \sqrt{1 + \frac{4a^2}{4ax}} dx = \sqrt{\frac{x + a}{x}} dx$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن

$$\bar{x} = \frac{\int xyd\ell}{\int yd\ell} = \frac{\int_0^a x\sqrt{x+a}\,dx}{\int_0^a \sqrt{x+a}\,dx}$$

حيث التكاملين في البسط والمقام يمكن حسابهما كالآتي

تكامل البسط يمكن حسابه بسهوله

$$\int_0^a \sqrt{x+a}\,dx = \frac{2}{3}\ \ x+a\ \ ^{3/2}\Big|_0^a = \frac{2}{3}\ \ (2a)^{3/2} - a^{3/2}\ \ = \frac{2}{3}a^{3/2}\ \ 2\sqrt{2}-1$$

لحساب تكامل المقام نستخدم التعويض $r = \sqrt{x+a}$ ومنها $x = r^2 - a$ ومنها $dx = 2rdr$ ونجد أن

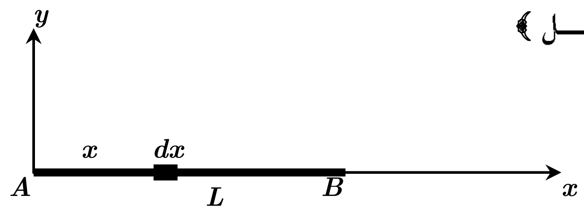
$$\int_0^a x\sqrt{x+a}\,dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}} (r^2 - a)\,r\,(2rdr) = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}} (r^4 - ar^2)\,dr = 2\left[\frac{r^5}{5} - \frac{ar^3}{3}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}}$$

$$= \frac{4}{15}a^{5/2}\ \ \sqrt{2}+1 \qquad \therefore\ \bar{x} = \frac{2a}{5}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\right)$$

﴿ مثـــ ١٢ ـــال ﴾

حبل سميك غير منتظم تتناسب كثافته الطولية مع البعد عن أحد طرفيه وضع الحبل في وضع أفقي وعلى استقامه واحدة. أثبت أن مركز ثقله يقسمه بنسبة 1 : 2 من هذا الطرف؟

﴿ الحـــــل ﴾



نفرض أن الحبل هو AB وأن طوله L وأن الكثافة تتناسب مع البعد عـــن الطـــرف A ، بأخذ عنصر صغير من الطول dx بحيث أن صغره يكون كافياً حيث تكون الكثافة على طوله ثابتة تقريباً وليكن هذا العنصر على بعد x من الطرف A والذي سوف يتخذ كنقطة أصـــل حيث AB هو محور x والعمودي عليه هو المحور y وتكون كتلة العنصر $dm = \lambda xdx$

حيث λ ثابت كذلك مركز هذا العنصر هي النقطة $(x,0)$ ويتعين مركز ثقل الحبل G من

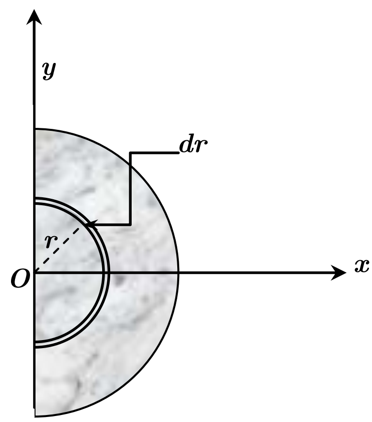
$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int_0^L \lambda x^2dx}{\int_0^L \lambda xdx}=\frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^L}{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^L}=\frac{2}{3}L$$

لاحظ التماثل حول المحور x يؤدي إلى $\bar{y}=0$. وعليه فإن النسبة المطلوبة هي

$$\frac{AG}{GB}=\frac{2/3\ L}{1/3\ L}=\frac{2}{1}$$

﴿ مثــ ١٣ ــال ﴾

إذا كانت الكثافة السطحية لصفيحة نصف دائرية تتناسب مع بعدها من المركز O. أوجــد مركزثقلها ، نصف قطرها a ؟



﴿ الحــــل ﴾

نقسم الشكل إلى شرائح صغيرة وهــذه الشرائح تأخذ شــكل أقــواس متحــدة المركز. باعتبار إحدى هــذه الشــرائح وليكن نصف قطرها r و سمكهــا dr وبفرض أن كثافة مادة الشريحة هــي μ وحيث أن $\mu\propto r$ Or $\mu=\lambda r$

وكتلة الشريحة هي $dm=\pi r\mu dr=\pi\lambda r^2dr$ ومركز ثقل الشريحة على إعتبار أنها قوس نصف قطره r هو $\left(\frac{2r}{\pi},0\right)$ (مثــ ٨ ــال) حيث أن الجسم متماثــل حــول المحــور Ox

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int_0^a 2r^3dr}{\pi\int_0^a r^2dr}=\frac{\left[\frac{1}{2}r^4\right]_0^a}{\pi\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a}=\frac{3a}{2\pi}$$

أي أن مركز الثقل يتعين من $\left(\frac{3a}{2\pi},0\right)$

﴿ مثـــ ١٤ ـــال ﴾

استخدم التكامل لإيجاد مركز ثقل مخروط أجوف ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a ؟

﴿ الحـــــــل ﴾

نقسم المخروط إلى عناصر كل منها عبارة عن حلقة موازية لقاعدة المخروط سمكها $d\ell$ (نختار محاور الاحداثيات كما بالشكل) كتلة العنصر هي $dm=2\pi y\sigma d\ell$ ونلاحظ أن المحـــور z هو محور تماثل أي أن $\bar{x}=\bar{y}=0$ أي أن مركز الثقل يقع على المحور z ويتعين من

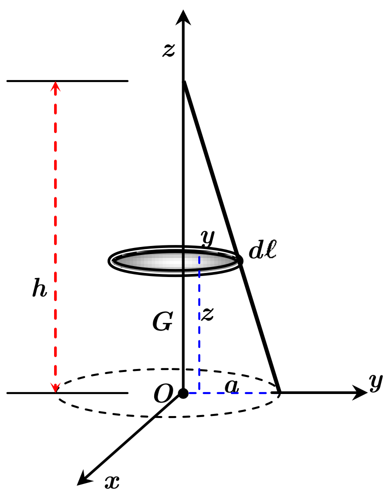
$$OG=\bar{z}=\frac{\int zdm}{\int dm}=\frac{\cancel{2\pi\sigma}\int yzd\ell}{\cancel{2\pi\sigma}\int yd\ell}\quad \textbf{where}\quad d\ell=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,dz$$

حيث y هو نصف قطر العنصر والموجود علـــى ارتفـــاع z ، مـــن الشـــكل نجـــد أن $hy+az=ah$ وبالتالي بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلى z يكون

$\frac{dy}{dz}=-\frac{a}{h}$ وبالتعويض في معادلة مركز الثقل

$$\therefore\ \bar{z}=\frac{\int_0^h \left(hz-z^2\right)dz}{\int_0^h \left(h-z\right)dz}=\frac{\left[\frac{1}{2}hz^2-\frac{1}{3}z^3\right]_0^h}{\left[hz-\frac{1}{2}z^2\right]_0^h}=\frac{1}{3}h$$

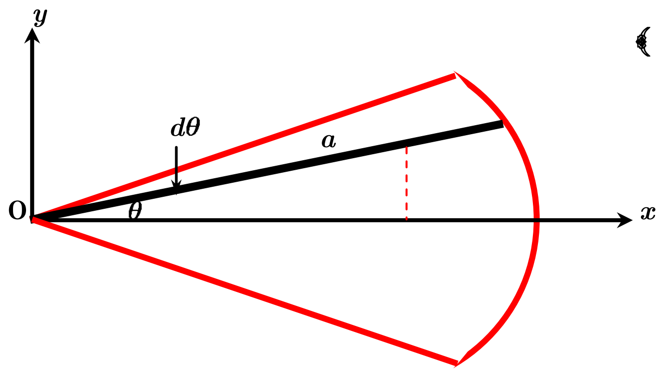
أي أن مركز الثقل G يتعين من $\left(0,0,\frac{h}{3}\right)$



﴿ مثـــال ١٥ ﴾

أوجد مركز ثقل صحيفة منتظمة رقيقة على هيئة قطاع دائري يقابل زاوية 2α نصف قطـــر دائرته a ؟

﴿ الحـــــل ﴾



واضح أن المحور Ox هو محور تماثل أي أن $\bar{y} = 0$ وكذلك مركز ثقل العنصر المأخوذ وهو عبارة عن مثلث يتعين مـــن $\left(\frac{2}{3}a\cos\theta, \frac{2}{3}a\sin\theta\right)$ وأيضـــاً كتلـــة هـــذا العنصـــر هـــي $dm = \frac{1}{2}a^2\rho\sin d\theta \simeq \frac{1}{2}a^2\rho d\theta$ ويحسب مركز الثقل $\bar{x}$ كالتالي

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3}a\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta} = \frac{2\sin\alpha}{3\alpha}a$$

➤ وإذا كان القطاع عبارة عن نصف قرص (أي أن $\alpha = \frac{\pi}{2}$) يكون مركز الثقل

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3}a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{3\frac{\pi}{2}}a = \frac{4a}{3\pi}$$

يمكن إعادة حل هذا المثال بأخذ الشريحة عبارة عن قوس نصف قطر دائرته r وسمكه dr .

نظريتا بابوس السكندري **Pappus**

النظرية الأولى

إذا دار جزء من منحنى مستو حول محور في مستواه غير قاطع له خلال زاوية ما فإن المساحة الجانبية للسطح الدوراني المتولد يساوي طول المنحنى مضروباً في المسافة التي دارهـا مركـز ثقله.

النظرية الثانية

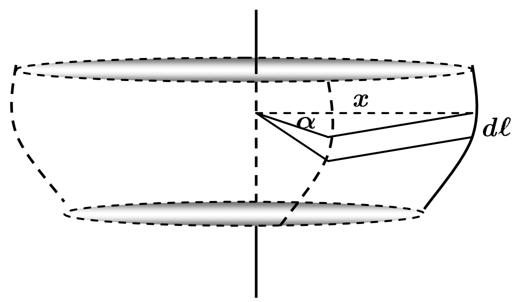
إذا دارت مساحة مستوية حول محور في مستواها غير قاطع لها خلال زاوية ما فـإن الحجـم الدوراني المتولد يساوي المساحه مضروبه في المسافة التي دارها مركز ثقلها.

البرهـــــان

نفرض أن $d\ell$ عنصراً صغيراً من عناصر المنحنى ونفرض أن المنحنى قد دار خلال زاويـة α وأن العنصر $d\ell$ على بعد x من محور الدوران ومن ثم فإن العنصر $d\ell$ يرسم شريطاً صغيراً أثناء دورانه مولداً عنصر المساحه dS حيث $dS = x\alpha d\ell$

المساحة الكلية الناتجة من دوران المنحنى تتعين من

$$S = \int dS = \int x\alpha d\ell = \alpha \int x d\ell \qquad (1)$$



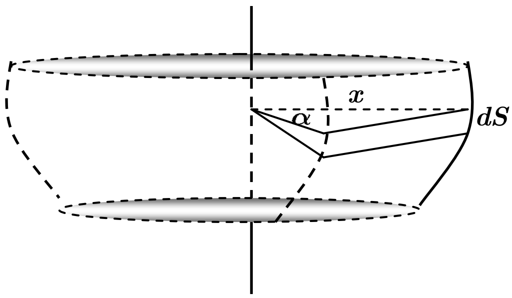
ولكن إذا كان مركز ثقل المنحنى يقع على بعد $\bar{x}$ من المحور فإن

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\rho \int x d\ell}{\rho \int d\ell} = \frac{\int x d\ell}{\ell} \qquad \therefore \int x d\ell = \ell \bar{x} \qquad (2)$$

حيث ρ الكثافة الطولية للمنحنى ، ℓ هو طول المنحنى المعلوم. ومـــن المعـــادلتين (1) ، (2) يكون $S = \ell\alpha\bar{x}$. ونلاحظ أنه إذا كانت $\alpha = 2\pi$ ، أي أنه إذا دار المنحنى دورة كاملـــة فإن المساحة تساوي $S = 2\pi\bar{x}\ \ell$ أي أن المساحة الناتجة تساوي طول المنحنى مضـــروباً في محيط الدائرة التي يرسمها مركز ثقل المنحنى.

لاثبات الجزء الثاني من النظرية نأخذ عنصر مساحة صغير dS من المساحة الكلية S وأنـــه على بعد x من محور الدوران وبفرض أن المساحة S قد دارت خلال زاوية α وبالتالي فإن دوران العنصر dS ينتج عنه أنبوبة صغيرة طولها αx ومساحة مقطعها dS ويكون حجـــم العنصر الناشئ بالدوران $\alpha x dS$ والحجم الكلي الناشئ بدوران المساحة S يتعين من

$$V = \int \alpha x dS = \alpha \int x dS \tag{3}$$



ولكن إذا كان مركز ثقل هذه المساحة على بعد من محور الدوران نجد أن

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\sigma \int x dS}{\sigma \int dS} = \frac{\int x dS}{S} \qquad \therefore \int x dS = S\bar{x} \tag{4}$$

حيث σ هي الكثافة السطحية للمساحة المعلومـــة ، ومـــن المعـــادلتين (3) ، (4) يكـــون $V = S\alpha\bar{x}$. ونلاحظ أنه إذا كانت $\alpha = 2\pi$ ، أي أنه إذا دارت المساحة دورة كاملة فإن الحجم يساوي $V = 2\pi\bar{x}\ S$ ، أي أن الحجم الناتج يساوي المساحة مضـــروبةً في محـــيط الدائرة التي يرسمها مركز ثقلها.

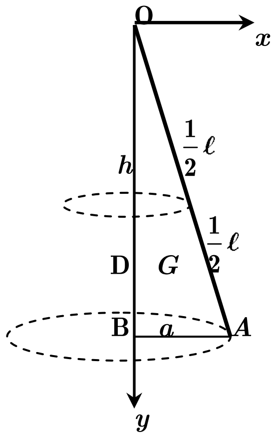
﴿ مثــ ١٦ ــال ﴾

باستخدام نظريتا بابوس أوجد حجم ومساحة سطح مخروط دائري قائم؟

﴿ الحــــل ﴾

يمكن اعتبار المخروط على أنه ناتج من دوران القطعة المستقيمة OA حول المحور Oy دوره كاملة فينشأ المخروط المطلوب إيجاد مساحته ، وحيث أن مركز ثقل القطعة المستقيمة يقع عند منتصــــفها ، بفـــــرض أن $OA = \ell$ وأن $ab = a$ وأن $OB = h$ كمـــا بالشــــكل

$$\because S = 2\pi\bar{x}\ell, \qquad \bar{x} = \frac{1}{2}a \qquad \therefore S = \pi a\ell$$



حيث S هي المساحة الجانبية للمخـــروط ولحســـاب حجم المخروط بدوران المثلـــث OAB دورة كاملـــة حول Oy فإن حجم المخروط يساوي

$$\because V = 2\pi\bar{x}S' \quad \therefore V = 2\pi(DG)\left(\frac{1}{2}ah\right)$$

أي أن

$$V = 2\pi.\frac{1}{3}a.\frac{1}{2}ah = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

حيث S' هي مساحة المثلث OAB

﴿ مثــ ١٧ ــال ﴾

استخدم نظرية بابوس لإيجاد مركز ثقل صفيحة على شكل نصف دائرة نصف قطرها a ؟

﴿ الحــــل ﴾

عند دوران مساحة مستوية على شكل نصف دائرة نصف قطرها a تنشأ كرة مصمتة نصف قطرها a والتي حجمها $\frac{4}{3}\pi a^3$ وكذلك مساحة الصفيحة النصف دائرية $\frac{1}{2}\pi a^2$ وباستخدام نظرية بابوس نجد أن

$$V = 2\pi\bar{x}S \qquad \Rightarrow \frac{4}{3}\pi a^3 = 2\pi\bar{x}\left(\frac{1}{2}\pi a^2\right) \qquad \therefore \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

الخلاصـــــــــــــــة

- ➤ مركز ثقل الجسم الجاسئ هو تلك النقطة من الفراغ والتي يمر بها دائماً خط عمل وزن هذا الجسم مهما تغير وضعه بالنسبة لسطح الأرض.
- ➤ يتعين مركز ثقل مجموعة من الجسيمات عددها n من العلاقات

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} m_i \,,$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} m_i \,,$$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} m_i$$

- ➤ أما في حالة الأجسام المتصلة تؤول عملية الجمع إلى عملية تكامل

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}, \qquad \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

- ➤ أي محور أو نقطة تماثل للجسم فإن مركز ثقل الجسم يقع على المحور أو نقطة التماثل.
- ➤ إذا عُلق جسم تعليقاً حراً من إحدى نقطه فإنه يتزن بحيث يمر الخط الرأسي من نقطة التعليق بمركز ثقل الجسم.
- ➤ يوجد مركز ثقل واحد للجسم الجاسئ.
- ➤ مركز ثقل الجسم الجاسئ يقع عند نقطة ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض.

تماريـــــن

(١) أوجد مركز ثقل صفيحة رقيقة على شكل مستطيل متصل بمثلث متساوي الساقين وقاعدته تساوي طول الضلع المشترك مع المستطيل؟

(٢) جسم متجانس مكون من نصف كرة ومخروط (نصف قطر دائرة قاعدة المخروط تساوي نصف قطر الكرة).اثبت أن مركز ثقله يقسم المحور بنسبة $1:2$ من جهة رأس المخروط حيث أن زاوية رأس المخروط $\frac{\pi}{4}$؟

(٣) أوجد مركز ثقل نصف كرة مصمتة نصف قطرها ℓ،ماذا لو كان نصف الكرة مجوف؟

(٤) أوجد مركز ثقل المساحة المحصورة بين القطعين المكافئين $y = 4x - x^2 \quad y = 3x^2,$ ؟

(٥) قرص دائري نصف قطره $12\ cm$، عمل به ثقب دائري يبعد مركزه مسافة $6\ cm$ عن مركز القرص ونصف قطره $2\ cm$. عين مركز ثقل الجزء المتبقي؟

(٦) abc سلك رفيع منتظم الكثافة الطولية على شكل مثلث قائم الزاوية في b فيه $\mathrm{ab} = 6\ cm, \mathrm{bc} = 8\ cm$ أوجد بعد مركز ثقل السلك عن كلٍ من $\overline{\mathrm{bc}}, \overline{\mathrm{ba}}$

(٧) صفيحة منتظمة السمك والكثافة على شكل مثلث abc مركزه O وقائم الزاوية في b حيث $\mathrm{ab} = 9\ cm$ ، $\mathrm{bc} = 6\ cm$ فصل المثلث ade والدائرة التي مركزها O ونصف قطرها الوحدة ، حيث d نقطة تقع على ab ، $\mathrm{ad} = 3\ cm$ ونقطة e هي تقاطع ac مع الموازي من d للقاعدة bc. فإذا عُلق الجزء المتبقي من b تعليقاً حراً فاتزن بحيث اصبح ab يصنع زاوية α مع الرأسي. أثبت أن $\tan\alpha = 2\ \ 26 - \pi \quad 3\ \ 20 - \pi$ ؟

(٨) أزيل من اسطوانة دائرية منتظمة مخروط دائري قائم تنطبق قاعدته مع قاعدة الاسطوانة ، اوجد ارتفاع المخروط بحيث يكون مركز كتلة الجزء الباقي من الاسطوانة يقع عند رأس المخروط؟

(٩) عيّن مركز ثقل قطعة دائرية منتظمة السمك والكثافة تقابل زاوية 2α عند المركز ثم استنتج مركز ثقل صفيحة نصف دائرية؟

(١٠) إذا كانت الكثافة السطحية لصفيحة دائرية تتناسب مع مربع بعدها من نقطـــة علـــى المحيط O. اثبت أن مركز ثقلها يقسم القطر بنسبة $1:2$ من O؟

(١١) صفيحة منتظمة على شكل مثلث ، علقت تعليقاً حراً من أحد الأركان بحيث أصبحت القاعدة أفقية برهن أن الصفيحة متساوية الأضلاع؟

(١٢) استخدم نظريتا بابوس لتعيين مركز ثقل قوس على هيئة نصف دائرة نصف قطرها a وكذلك لتعيين مركز ثقل مساحة على هيئة نصف قرص دائري نصف قطره b؟

(١٣) قطاع كروي محيط قاعدته دائرة قطرها يقابل زاوية 2α عند مركز الكرة. عين حجم هذا القطاع بفرض أن القطاع مأخوذ من كرة نصف قطرها a ؟

(١٤) طبق نظريتا بابوس لايجاد مساحة وحجم مخروط ناقص بدلالة ارتفاعه ونصـــفا قطـــرا قاعدتيه؟

(١٥) أوجد مركز ثقل السطح الناشئ عن دوران جزء المنحنى $y^2 = 4x$ المحصـــور بـــين $x = 0$ ، $x = 1$ حول المحور x دورة كاملة؟

(١٦) عين مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة السطحية على شكل قطاع دائري نصف قطره ℓ وزاويته المركزية 2φ؟

مبدأ الشغل الافتراضي واستقرار الاتزان

خلال دراستنا في الابواب السابقة لاتزان منظومة ميكانيكية بتأثير مجموعة من القيود كان يتم عزل كل جسم على حدة باستبدال القيود المفروضة عليه بقوى رد فعل خارجية مجهولة ثم كتابة معادلات الاتزان لكل جسم ، وكلما زاد عدد الاجسام في المنظومة زادت المعادلات وزاد معها الحل صعوبةً. ولذا سوف نلجأ لدراسة طريقة أخرى للحل تعطى شروط الاتزان دفعة واحدة. وتعرف هذه الطريقة باسم مبدأ الشغل الافتراضي، وهي تعتمد أساساً على استعمال المبادئ الديناميكية للمنظومة وذلك بحساب الشغل المبذول بالقوى المؤثرة على المنظومة خلال إزاحة افتراضية ناتجة عن اضطراب افتراضي للاتزان (وهي تخالف الفكرة القائمة على استبدال القيود على المجموعة بقوى مجهولة ثم كتابة معادلات الاتزان).

مبدأ الشغل الافتراضي

في هذا الجزء نحاول الحصول على معادلة الشغل الافتراضي لأي جسم متماسك في وضع الاتزان. لنفرض أن جسماً متماسكاً متزناً تحت تأثير مجموعة من القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, ..., \underline{F}_n$ وأن هذه المجموعة من القوى قد أمكن اختزالها إلى قوة وحيدة $\underline{F}$ تؤثر عند نقطة ما وازدواج متجه عزمه $\underline{M}$ ، ولنفرض أن الجسم قد أُزيح ازاحة عامة (انتقالية ودورانية) صغيرة. إذن فإن هناك شغلاً قد بُذل في ازاحة هذا الجسم بواسطة قوة المحصلة $\underline{F}$ والازدواج $\underline{M}$ ، معادلة هذا الشغل هي

$$\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} + \underline{M}.\delta\underline{\theta}$$

وحيث أن الجسم متزن اصلاً فإن هذا الشغل المبذول يكون افتراضياً ويساوي صفراً ، أي أن معادلة الشغل الافتراضي تأخذ الصورة

$$\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} + \underline{M}.\delta\underline{\theta} = 0 \qquad (1)$$

ويمكن التدليل على أن الجزء $\underline{M}.\delta\underline{\theta}$ من المعادلة السابقة يمثل شغلاً حيث أننا نعرف سابقاً $\underline{M} = \underline{r} \wedge \underline{F}$ ومن ثم فإن $\underline{M}.\delta\underline{\theta} = \underline{r} \wedge \underline{F} \;.\delta\underline{\theta}$ وبتطبيق قاعدة التبديل لحاصل الضرب الثلاثي القياسي نجد أن

$$\underline{M}.\delta\underline{\theta} = \ \underline{r} \wedge \underline{F} \ .\delta\underline{\theta} = \underline{F}. \ \delta\underline{\theta} \wedge \underline{r} \ = \underline{F}.\delta\underline{s}$$

حيث $\delta\underline{s}$ هي الازاحة الخطية الناتجة عن الدوران.

وسوف نبرهن فيما يلي أن الشرط الضروري والكافي لاتزان المنظومة تلاشي الشغل δW

اولاً الشرط ضروري: إذا كانت المنظومة متزنة فإن شرطي الاتزان هما $\underline{F} = \underline{0}, \ \underline{M} = \underline{0}$ أي تلاشي محصلة القوى المؤثرة ومحصلة العزوم بالنسبة لنقطة في الفراغ وبالتعويض في المعادلة (1) يكون $\delta W = 0$ وهو المطلوب.

ثانياً الشرط كافٍ: أي إذا علم أن $\delta W = 0$ فإن المنظومة تكون متزنة

$$\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} + \underline{M}.\delta\underline{\theta} = 0 \qquad (2)$$

وبما أن الازاحة الافتراضية اختيارية فيمكن اختيار الإزاحة بحيث أن $\delta\theta = \underline{\theta} = \underline{0}$ وبذلك من المعادلة السابقة يكون $\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} = 0$ وهذه لا تتحقق الا إذا كان $\underline{F} = \underline{0}$ (لأن $\delta\underline{r}$ اختيارية) أي أن محصلة القوى الخارجية تنعدم.

من ناحية أخرى إذا أُختيرت الازاحة الافتراضية بحيث أن $\delta\underline{r} = \underline{0}$ فيكون $\delta W = \underline{M}.\delta\underline{\theta} = 0$ ولكي يتحقق ذلك لجميع قيم $\delta\underline{\theta}$ (لأنها اختيارية) يجب أن يتلاشى $\underline{M}$ أي أن $\underline{M} = \underline{0}$ وهذا يعني أن محصلة العزوم للقوى والازدواجات الخارجية تساوي صفراً أي أن $\underline{M} = \underline{0}, \ \underline{F} = \underline{0}$.

<u>عند استخدام مبدأ الشغل الافتراضي في حل مسائل الاتزان يُراعى الآتي:</u>

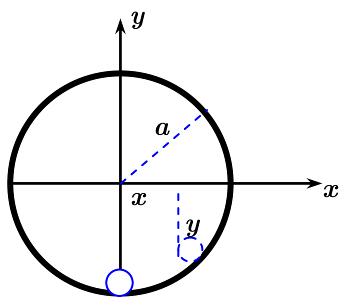
- ينعدم الشغل الذي يبذله الفعل و رد الفعل المتبادلين بين نقطتين إذا لم تتغير المسافة بين النقطتين اثناء الازاحة.
- ردود الافعال على الأسطح الملساء لا تبذل شغل حيث أن رد الفعل يكون عمودياً على اتجاه الازاحة.
- الشد في الخيوط غير المرنة لا يبذل شغل ومن ثم نسقطها عند حساب الشغل الافتراضي.
- إذا كانت الازاحة صغيرة فينعدم الشغل المبذول بواسطة رد الفعل المتبادل بين سطحين يتدحرج كل منهما على الآخر.
- نقط التأثير الثابتة كالمفاصل نهمل ردود الافعال عندها حيث تنعدم الازاحة.

➤ كما يجب مراعاة الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات المختارة واتجاهات القوى الفعالة.

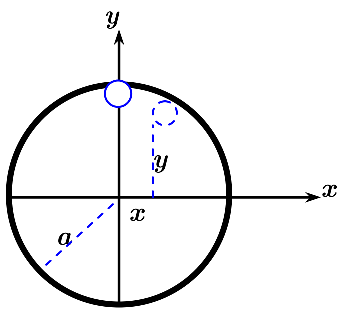
الآن ، إن تحديد نوع الاتزان لمنظومة ميكانيكية من حيث أنه مستقر من عدمه له مدلولاته العملية الهامة. وسوف نتعرض فيما يلي لمفاهيم الموضوع بطريقة مبسطة.

الاتزان المستقر

إذا أزحنا الجسم إزاحة صغيرة عن وضع الاتزان ففي حالة الاتزان المستقر يتذبذب الجسم وتخمد هذه الذبذبة حتى يعود إلى وضع اتزانه الأول. ويحدث هذا الاتزان حينما تكون طاقة الوضع أقل ما يمكن ،(توضيح: نفرض أن طاقة الجهد نهاية عظمى وأزيح الجسم إزاحة صغيرة فإن طاقة حركته تزداد ومن ثم تقل طاقة جهده تبعاً لمبدأ ثبوت الطاقة (مجموع طاقتي الحركة والجهد مقدار ثابت) ويبتعد بذلك الجسم عن موضع الاتزان ويكون الاتزان في هذه الحالة غير مستقر). في الشكل التالي (شكل ١) وضعت خرزة عند أسفل السلك الأملس المنثني على شكل دائرة. وبالنظر يتضح أن هذا المكان هو توازن مستقر مع طاقة وضع للخرزة أقل ما يمكن لأن أي إزاحه سوف يتبعها عوده إلى نفس المكان. وباستخدام محور x كأساس فإن طاقة الوضع للخرزة عند أي مكان تحت محور x تتعين من $V = -wy = -w\sqrt{a^2 - x^2}$ وبوضع $\frac{dV}{dx} = 0$ لايجاد مكان الاتزان يكون $\frac{dV}{dx} = \frac{wx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$.



اتزان مستقر شكل ١



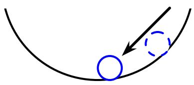
اتزان غير مستقر شكل ٢

والحل المطلوب للعلاقة الأخيرة هو $x = 0$ (الموضع للخرزة عند قاع الدائرة) ولإيجاد نوع الاتزان من الضروري ايجاد $\frac{d^2V}{dx^2}$ عند موضع الاتزان، وبالتالي

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{w}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{wx^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

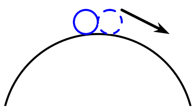
وعند $x = 0$ فإن $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{w}{a} > 0$ وهذا يعني أن الاتزان مستقر.

اتزان مستقر



الاتزان غير المستقر

في هذه الحالة إذا أزحنا الجسم إزاحة صغيرة عن وضع الاتزان فإن الجسم لا يعود إلى وضع اتزانه الأول وانما يبتعد عنه، و يحدث الاتزان غير المستقر حينما تكون طاقة الوضع أكبر مـــا يمكن ، كما في الشكل السابق (شكل ٢)، الخرزة عند قمة السلك الدائري فبالنظر نجـــد أن هذا المكان هو اتزان غير مستقر ، وباستخدام محور x كأساس فإن طاقة الوضع للخرزة عند أي مكان فوق محور x تتعين من $V = wy = w\sqrt{a^2 - x^2}$ وبوضع $\frac{dV}{dx} = 0$ لايجـــاد موضع الاتزان يكون $0 = \frac{dV}{dx} = -\frac{wx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.



اتزان غير مستقر

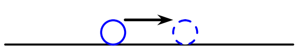
والحل المطلوب هنا هو $x = 0$ (الخرزة عند قمة الدائرة) كذلك

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{w}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{wx^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

وعند $x = 0$ فإن $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{w}{a} < 0$ وهذا يعني أن الاتزان غير مستقر.

الاتزان المتعادل (المحايد)

إذا أعطي الجسم إزاحة صغيرة وأخذ وضع اتزان جديد مشابه لوضعه الأول فإن الاتـــزان في هذه الحالة يسمى اتزان محايد (متعادل). كمثال ، الخرزة ممكن وضعها عند أي نقطـــة علـــى سلك أفقي وستبقى كذلك.



اتزان متعادل

خلاصة الاتزان

لتعيين قيم المتغيرات لنظام متزن. استنتج طاقة الوضع V للنظـام كدالـة في المـتغيرات في المناقشة السابقة كانت x هي المتغير. دع $\frac{dV}{dx} = 0$ لتعيين قيم للاتزان ويكون

$$\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \qquad \text{اتزان مستقر}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} < 0 \qquad \text{اتزان غير مستقر}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \qquad \text{اتزان متعادل}$$

اتزان التدحرج

نفرض جسم A متزن على جسم آخر B ثابت بحيث يكون سطحي التلامس جزئين مـن كرتين خشنتين نصفا قطريهما b, a ونقطة التلامس d ومركز ثقل الجسم العلوي هـو o حيث $\text{od} = h$. الآن لمعرفة نوع الاتزان نزيح الجسم A ازاحة صغيرة يتدحرج خلالهـا الجسم A على السطح الكروي B كما بالشكل، ولتكن e هي نقطة التلامس الجديدة بعد الازاحة الصغيرة. نفرض أن الاحتكاك كافي بحيث تكون حركة الجسم A على B حركـة تدحرجية بحتة ومن ثم فإن $\text{de} = \text{ed}'$ أي أن

$$b\theta = a\phi \tag{3}$$

وباعتبار الأفقي المار بمركز الكرة السفلى مستوى قياس الجهد نجد أن دالة الجهد تعطى مـن العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} V &= w\ \ (a+b)\cos\theta - (a-h)\cos(\theta+\phi) \\ &= w\left\{(a+b)\cos\theta - (a-h)\cos(1+\frac{b}{a})\theta\right\} \end{aligned}$$

وذلك باستخدام المعادلة (3) ويتعين موضع الاتزان من :

$$\frac{dV}{d\theta} = -w\left\{(a+b)\sin\theta - (a-h)(1+\frac{b}{a})\sin(1+\frac{b}{a})\theta\right\} = 0$$

أحد حلول هذه المعادلة هو $\theta = 0$ أي الموضع الاصلي للجسم ويكون الاتزان مسـتقراً إذا تحقق الشرط

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{\theta=0} > 0$$

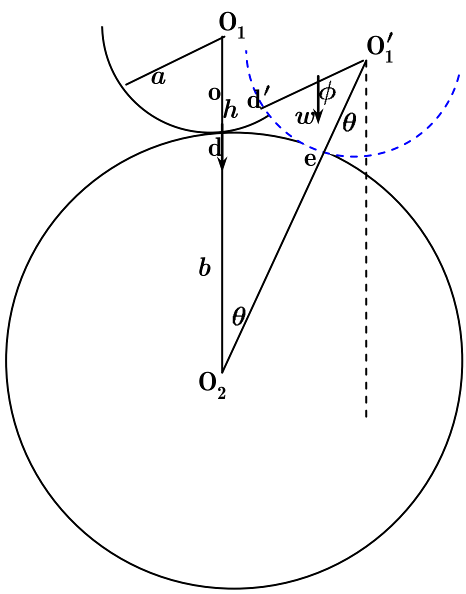
$$\because \frac{d^2V}{d\theta^2} = -w\left\{(a+b)\cos\theta - (a-h)(1+\frac{b}{a})^2\cos(1+\frac{b}{a})\theta\right\}$$

$$\therefore \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = -w\left\{(a+b) - (a-h)(1+\frac{b}{a})^2\right\} > 0$$

وبعد الاختصارات نجد أن شرط أن يكون الاتزان مستقر هو

$$ab-(a+b)h>0 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{h} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (4)$$

وهو شرط استقرار اتزان التدحرج



أو الاتزان غير مستقر فإن

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} < 0 \qquad \Rightarrow ab-(a+b)h>0 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{h} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (5)$$

أو الاتزان يكون متعادل

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = 0 \qquad \Rightarrow ab-(a+b)h=0 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (6)$$

حالات خاصة:

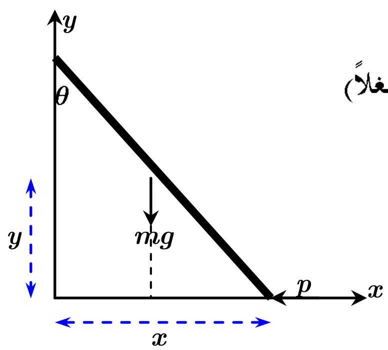
➤ إذا كان تقوس الجسم الثابت السفلي إلى اعلى ، أي كان الجسم السفلي مقعراً فإن شرط الاتزان المستقر يكون $\frac{1}{h} > \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ وغير المستقر $\frac{1}{h} < \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ والمتعادل $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

➤ إذا كان الجسم الثابت السفلي مستوياً فإن $b \to \infty$ ويكون الاتزان مستقراً إذا كان $h < a$ وغير مستقر $h > a$ ومتعادل $h = a$ أما إذا كان الجسم العلوي مستوياً فإن $a \to \infty$ ويكون الاتزان مستقراً إذا كان $h < b$ وغير مستقر $h > b$ ومتعادل $h = b$.

﴿ مثـــ ١ ـــال ﴾

سلم منتظم كتلته m وطوله ℓ ، اتزن تحت تأثير القوة الأفقية p كمـــا مـــبين بالشـــكل باستخدام مبدأ الشغل الافتراضي أوجد القوة p ؟

﴿ الحـــــل ﴾



معادلة الشغل الافتراضي هي (ردود الافعال لا تبذل شغلاً)

$$-mg\,\delta y - p\,\delta x = 0$$

والاشارات سالبة لأن كل من القوتين w, p تعملان على انقاص x , y من الشكل نجد أن

$$x = \ell \sin\theta \qquad \text{and} \qquad y = \frac{1}{2}\ell\cos\theta$$

$$\therefore\ \delta x = \ell\cos\theta\,\delta\theta \qquad \text{and} \qquad \delta y = -\frac{1}{2}\ell\sin\theta\,\delta\theta$$

بالتعويض عن هذه القيم في معادلة مبدأ الشغل الافتراضي نحصل على

$$\left\{mg(-\frac{1}{2}\ell\sin\theta) + p(\ell\cos\theta)\right\}\delta\theta = 0$$

وحيث أن $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$mg(-\frac{1}{2}\ell\sin\theta) + p(\ell\cos\theta) = 0 \qquad \Rightarrow p = \frac{1}{2}mg\tan\theta$$

وهي القوة المطلوب تعيينها.

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

قضيب ab منتظم طوله $2L$ ووزنه w ، يرتكز بطرفه b على حائط رأسي أملس ويستند كذلك على وتد ثابت أملس يبعد مسافه h عن الحائط. اثبت باستخدام مبدأ الشغل الافتراضي أن القيب يميل على الأفقي في وضع الاتزان بزاوية $\cos^{-1}\left\{\sqrt[3]{\frac{h}{L}}\right\}$ ؟

﴿ الحـــل ﴾

القوى التي تبذل شغل فقط قوة الوزن w أما قوى رد الفعل لا تبذل شغلاً وبالتالي معادلة مبدأ الشغل الافتراضي $w\delta y = 0 \quad \Rightarrow \delta y = 0$

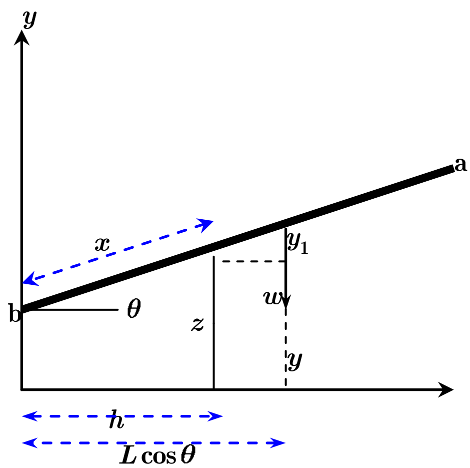
من هندسة الشكل نجد أن $x = h\sec\theta$ ، كذلك ارتفاع مركز ثقل القضيب يعطى من

$$y = z + y_1$$

حيث z طول الوتد وهو ثابت أي أن $\delta z = 0$ ومن ثم

$$y = z + (L - x)\sin\theta = (L - h\sec\theta)\sin\theta + z = z + L\sin\theta - h\tan\theta$$

$$\therefore \delta y = \quad L\cos\theta - h\sec^2\theta \quad \delta\theta$$



وحيث أن $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$L\cos\theta - h\sec^2\theta = 0$$

$$\therefore h\sec^2\theta = L\cos\theta \quad \Rightarrow \cos^3\theta = \frac{h}{L} \quad \text{Or} \quad \theta = \cos^{-1}\left\{\sqrt[3]{\frac{h}{L}}\right\}$$

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

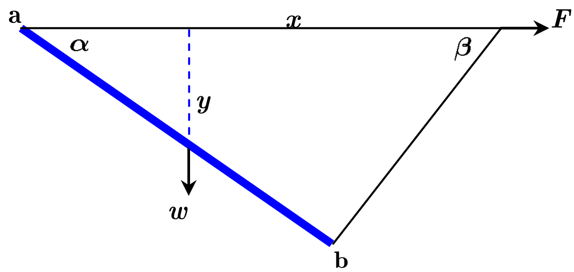
قضيب ab قابل للحركة حول a ، وطرفه الآخر b مربوط بخيط متصل بحلقة تنزلق علـــى سلك أفقي أملس عند a . اثبت أن القوة الأفقية اللازمة لحفظ الحلقة في حالة اتزان تساوي $\dfrac{w\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ حيث w وزن القضيب ، α زاوية ميل القضيب على الأفقي ، β زاويـــة ميل الخيط على الافقي ؟

﴿ الحـــــل ﴾

بفرض أن x هو بعد الحلقة عن a ، y عمق مركز ثقل القضيب عن السلك فإن معادلـــة الشغل الافتراضي تتعين من

$$w\,\delta y + F\,\delta x = 0$$

بفرض أن h طول الخيط ، 2ℓ طول القضيب فمن هندسة الشكل نحصل على



$$y = \ell\sin\alpha \qquad \text{and} \qquad x = 2\ell\cos\alpha + h\cos\beta, \qquad 2\ell\sin\alpha = h\sin\beta$$

$$\delta y = \ell\cos\alpha\ \delta\alpha, \qquad \delta x = -2\ell\sin\alpha\,\delta\alpha - h\sin\beta\,\delta\beta, \qquad 2\ell\cos\alpha\,\delta\alpha = h\cos\beta\,\delta\beta$$

$$\therefore\ \delta x = -2\ell\sin\alpha\,\delta\alpha - \sin\beta\left\{\frac{2\ell\cos\alpha}{\cos\beta}\right\}\delta\alpha = -\frac{2\ell\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\,\delta\alpha$$

بالتعويض عن قيم كل من $\delta x, \delta y$ في معادلة مبدأ الشغل الافتراضي

$$\left\{w\,\ell\cos\alpha - F\frac{2\ell\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\right\}\delta\alpha = 0$$

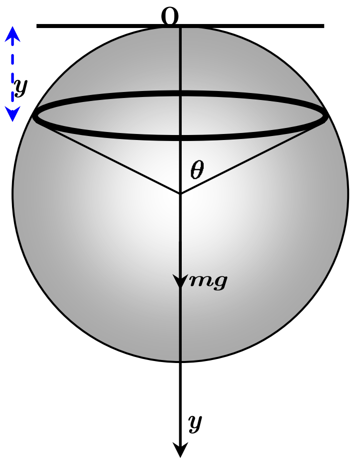
وحيث أن $\delta\alpha$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$w\,\ell\cos\alpha - F\frac{2\ell\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = 0 \qquad \Rightarrow F = \frac{w\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

﴿ مثـــ ٤ ـــال ﴾

حلقة مرنة رفيعة كتلتها m ونصف قطرها الطبيعي $\frac{1}{2}\ell$ ومعامل مرونتـــها λ ، وضـــعت ومستواها أفقي على كرة ملساء نصف قطرها ℓ وتستطيل تحت تأثير وزنها. اثبـــت أنـــه في وضع الاتزان فإن $2\pi\lambda(2\sin\theta - 1) = mg\tan\theta$ حيث 2θ هي الزاوية التي يحصرها أي قطر في الحلقة عند مركز الكرة ؟

﴿ الحـــــل ﴾



معادلة مبدأ الشغل الافتراضي تتعين من

$$w\,\delta y - T\,\delta L = 0$$

حيث L هو طول الحلقة والاشارة السالبة لأن الشد يعمل على ارجاع الحلقة الى وضعها الأصلي ،

y ارتفاع مركز ثقل الحلقة عن الخط الثابت ،

من هندسة الشكل نجد أن طول الحلقة يتعين من

$$L = 2\pi\ell\sin\theta$$

ومنها يكون

$$\delta L = 2\pi\ell\cos\theta\,\delta\theta$$

كذلك $y = \ell - \ell\cos\theta$ ومنها $\delta y = \ell\sin\theta\,\delta\theta$

بالتعويض من هذه العلاقات في معادلة الشغل الافتراضي نحصل على

$$w\,\ell\sin\theta\,\delta\theta - 2\pi\ell T\cos\theta\,\delta\theta = 0 \qquad \text{Or} \qquad w\,\ell\sin\theta - 2\pi\ell T\cos\theta \quad \delta\theta = 0$$

وحيث أن $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$w\,\ell\sin\theta - 2\pi\ell T\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow mg\tan\theta = 2\pi T \qquad (w = mg)$$

ولكن الشد T يمكن تعيينه من قانون هوك (الطول الاصلي للحلقة $\pi\ell$)

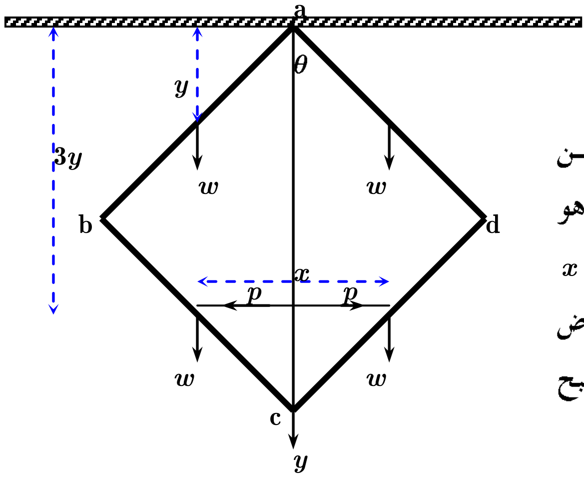
$$T = \frac{\lambda}{\pi\ell}(L - \pi\ell) = \frac{\lambda}{\pi\ell}(2\pi\ell\sin\theta - \pi\ell) = \lambda(2\sin\theta - 1)$$

بالتعويض عن قيمة الشد في العلاقة الاخيرة نحصل على

$$mg\tan\theta = 2\pi T \qquad \Rightarrow mg\tan\theta = 2\pi\lambda(2\sin\theta - 1)$$

﴿ مثــ ٥ ــال ﴾

اربعة قضبان متساوية منتظمة وزن كل منها w متصلة ببعضها اتصالاً مفصلياً لتكون المعين abcd ، إذا وضع هذا المعين في مستوى رأسي وكان قطره ac رأسياً وعلق من a وحفظ في هذا الوضع ليكون المربع بواسطة قضيب خفيف يصل بين منتصفي القضيبين cd, bc ، أوجد الضغط في هذا القضيب ؟



﴿ الحــــل ﴾

بفرض أن عمق مركز ثقل القضيبين عن المستوى الافقي المار بنقطة التعليق a هو y ، أن طول القضيب الخفيف يساوي x ولاستخدام مبدأ الشغل الافتراضي نفرض أن الهيكل أزيح ازاحة اختيارية لتصبح الزاوية $c\hat{a}d = \theta$

معادلة الشغل الافتراضي هي $8w\,\delta y + p\,\delta x = 0$

من هندسة الشكل نجد أن

$$y = \ell\cos\theta \qquad \text{and} \qquad x = 2\ell\sin\theta$$

حيث 2ℓ طول أي قضيب من المعين

$$\therefore\ \delta y = -\ell\sin\theta\,\delta\theta \qquad \text{and} \qquad x = 2\ell\cos\theta\,\delta\theta$$

بالتعويض من المعادلة الاخيرة في معادلة الشغل الافتراضي نجد أن

$$-8w\ell\sin\theta\,\delta\theta + 2\ell p\cos\theta\,\delta\theta = 0 \qquad \text{Or} \qquad \left(-8w\ell\sin\theta + 2\ell p\cos\theta\right)\delta\theta = 0$$

وحيث أن $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر

$$\therefore\ -8w\ell\sin\theta + 2\ell p\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow p = 4w\tan\theta$$

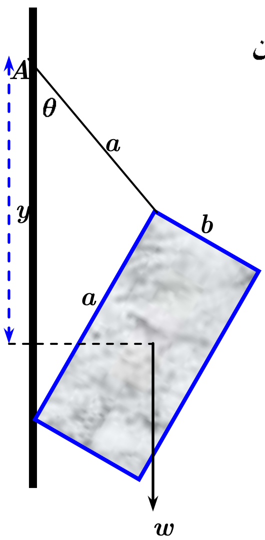
وفي وضع الاتزان فإن الهيكل يكون مربع الشكل ومن ثم $\theta = \pi / 4$ وبالتالي فإن الضغط في القضيب الذي يصل بين منتصفي القضيبين cd, bc يتعين من

$$p = 4w\tan(\pi / 4) = 4w$$

﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

إطار مستطيل الشكل ومستند على حائط رأسي أملس بطرفه السفلي ومعلق مـــن عرضـــه العلوي من نقطتين بواسطة خيطين متوازيين طول كل منهما a ويساوي طول الاطار. اثبت أنه في وضع الاتزان فإن الخيط يميل على الرأسي بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{b}{3a}\right)$ حيث b سمك الاطار ؟

﴿ الحـــــــل ﴾



نفترض أن نقطة تعليق الحبل A ، θ زاوية ميل الخيط على الرأسي من هندسة الشكل فإن انخفاض مركز الثقل عن نقطة التعليق هو y حيث

$$y = \frac{1}{2}\quad 3a\cos\theta + b\sin\theta$$

بفرض إزاحة افتراضية δy ينخفض فيها مركز الثقل لأسفل فإن معادلة الشغل الافتراضي في هذه الحالة هي

$$w\delta y = 0 \qquad \Rightarrow \delta y = 0$$

ولكن $\delta y = \quad b\cos\theta - 3a\sin\theta \quad \delta\theta$ وحيث أن $\delta\theta \neq 0$

ومن ثم $b\cos\theta - 3a\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{3a}$

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

قضيب منتظم ab منتظم طوله $2L$ يستند بطرفيه على مســـتويين مـــائلين علـــى الأفقـــي بالزاويتين في جهتين مختلفتين ويتقاطعان في خط أفقي. اوجد باستخدام مبدأ الشغل الافتراضي الزاوية التي يميل بها القضيب على الافقي في وضع الاتزان ؟

﴿ الحـــــــل ﴾

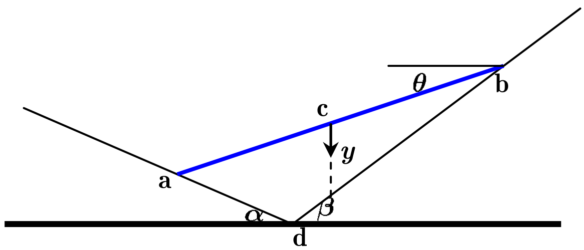
القوى التي تبذل شغلاً هي قوة الوزن فقط بينما ردود الافعال نسقطهما عند استخدام مبـــدأ الشغل الافتراضي ويكون $-w\delta y = 0 \qquad \Rightarrow \delta y = 0$

حيث y هـــو ارتفـــاع مركـــز الثقـــل عـــن المســـتوى الافقـــي والـــذي يـــتعين مـــن

$$y = L\sin\theta + \mathrm{ad}\sin\alpha$$

حيث يمكن حساب الطول ad من قاعدة الجيب للمثلث abd ومنها

$$\frac{\text{ad}}{\sin(\beta-\theta)}=\frac{2L}{\sin\ \ \pi-(\alpha+\beta)}$$



$$\therefore \text{ad}=\frac{2L\sin(\beta-\theta)}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \Rightarrow y=L\sin\theta+\frac{2L\sin(\beta-\theta)}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha$$

$$\therefore \delta y=\left\{L\cos\theta-\frac{2L\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\beta-\theta)\right\}\delta\theta=0$$

وحيث أن $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$L\cos\theta-\frac{2L\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\beta-\theta)=0 \ \Rightarrow \cos\theta\sin(\alpha+\beta)-2\cos(\beta-\theta)\sin\alpha=0$$

$$\therefore (\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\cos\theta-2(\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\sin\theta)\sin\alpha=0$$

$$\therefore \sin\beta\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta=0$$

بالقسمة على $\cos\theta$ ينتج أن

$$\therefore \underbrace{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}_{\sin(\beta-\alpha)}=2\sin\alpha\sin\beta\tan\theta$$

$$\Rightarrow \sin(\beta-\alpha)=2\sin\alpha\sin\beta\ \tan\theta$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta} \qquad \text{Or} \qquad \theta=\tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta}\right\}$$

وهي الزاوية التي يميل بها القضيب على الافقي في وضع الاتزان.

﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

قضيبان ab, bc متساويان طولاً يتصلان اتصالاً أملس سهل عند نقطة b . وزن القضيب ab هو w بينما وزن القضيب bc هو $2w$. القضيبان موضوعان في مستوى رأسي بحيث تكون

الزاوية بين القضيبين قائمة ، وطرفاهما a,c على مستوى أفقي أملس ، ويتصل هذان الطرفان بخيط لحفظ الاتزان. أوجد الشد في الخيط ؟

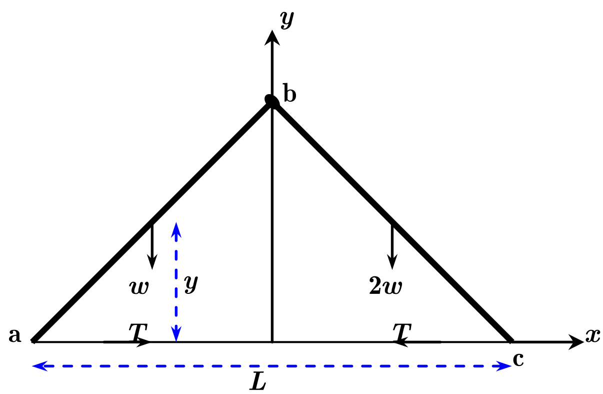
﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن طول أي من القضيبين هو 2ℓ ، كما نفرض أن المجموعة حدثت لها إزاحة بسيطة بحيث أن ac قد استطال قليلاً ، نلاحظ أن ردود الافعال عند a,c وعند المفصل b من القوى لا تبذل شغلاً وبالتالي معادلة مبدأ الشغل الافتراضي تتعين من

$$-w\,\delta y - 2w\,\delta y - T\,\delta L = 0 \qquad \text{Or} \qquad -3w\,\delta y - T\delta L = 0$$

حيث y ارتفاع مركز ثقلي القضيبين L طول الخيط ، كذلك

$$y = \ell\sin\theta, \qquad L = 4\ell\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \delta y = \ell\cos\theta\,\delta\theta, \qquad \delta L = -4\ell\sin\theta\,\delta\theta$$



وبالتعويض في معادلة مبدأ الشغل الافتراضي يكون

$$-3w\ell\cos\theta\,\delta\theta - T(-4\ell\sin\theta\,\delta\theta) = 0 \qquad \text{Or} \qquad 4T\sin\theta - 3w\cos\theta \quad \delta\theta = 0$$

وحيث أن $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$4T\sin\theta - 3w\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow T = \frac{3}{4}w\cot\theta$$

وعند وضع الاتزان فإن $\theta = \frac{\pi}{4}$ ومنها مقدار الشد $T = \frac{3}{4}w\cot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}w$.

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

جسيمان متساويا الوزن متصلتان بخيط خفيف غير مرن يمر على سلك دائري أملس رأسـي. أدرس أوضاع الاتزان (مستقر ، غير مستقر ، متعادل) طول الخيط أقل من نصف محيط الدائرة ؟

﴿ الحـــل ﴾

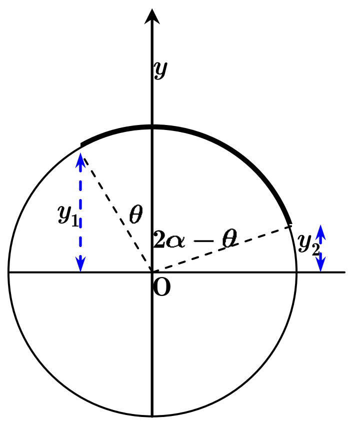
بفرض أن ℓ طول الخيط ، a نصف قطر السلك ، باختيار الافقي المار بمركز السلك مستوى قياس فإن طاقة الجهد (الوضع) V تتعين من

$$V = wy_1 + wy_2 = w(y_1 + y_2)$$

حيث y_1, y_2 هما ارتفاعا الجسمين عن مستوى القياس ، من هندسة الشكل فإن

$$y_1 = a\cos\theta, \quad y_2 = a\cos(2\alpha - \theta)$$

على اعتبار أن الخيط يقابل زاوية 2α عند المركز وبالتالي



$$V = wa \left(\cos\theta + \cos(2\alpha - \theta) \right) \qquad \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = -wa \left(\sin\theta - \sin(2\alpha - \theta) \right)$$

عند وضع الاتزان يكون $\frac{dV}{d\theta} = 0$ ومنها

$$\sin\theta - \sin(2\alpha - \theta) = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

وهذا هو وضع الاتزان ، ولمعرفة نوع الاتزان نوجد $\frac{d^2V}{d\theta^2}$

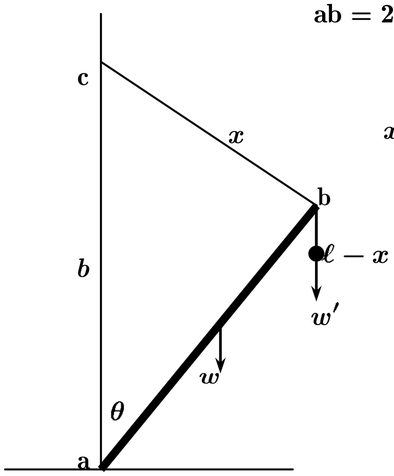
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -wa \quad \cos\theta + \cos(2\alpha - \theta) \qquad \therefore \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\alpha} = -2wa\cos\alpha < 0$$

أي أن طاقة الجهد تكون نهاية عظمى ومن ثم فإن الاتزان غير مستقر.

﴿ مثـــ ١٠ ـــال ﴾

قضيب ab وزنه w يتحرك بسهوله حول المفصل a ، المفصل مثبت في حائط رأســـي. إذا ربط خيط من نقطة c رأسياً أعلى a ومر خلال ثقب في b من حاملاً وزناً w' في طرفـــه الحر اثبت أنه في وضع الاتزان المائل للقضيب فإن $\text{bc}=\dfrac{w'\text{ac}}{w' + 0.5w}$ وبيّن نوع الاتزان ؟

﴿ الحــــــل ﴾



بفرض أن طول الخيط هو ℓ وأن $\text{ab} = 2a, \quad \text{ac} = b, \quad \text{bc} = x$

مع أخذ المستقيم الأفقي المار بالنقطة a مستوى قياس

من هندسة الشكل نجد أن $x^2 = b^2 + 4a^2 - 4ab\cos\theta$

وتتعين طاقة الجهد من

$$V = w' \quad 2a\cos\theta - (\ell - x) \quad + wa\cos\theta$$

وبالتعويض من المعادلة الأولى في الثانية يكون

$$V = -w'(\ell - x) + \frac{1}{4b}(w + 2w')(b^2 + 4a^2 - x^2)$$

عند وضع الاتزان يكون $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$ ومنها

$$\frac{dV}{dx} = w' - \frac{1}{2b}(w + 2w')x = 0 \Rightarrow x = \text{bc} = \frac{2bw'}{w + 2w'}$$

وهذا هو وضع الاتزان ، ولمعرفة نوع الاتزان نوجد $\dfrac{d^2V}{d\theta^2}$

$$\because \frac{d^2V}{d\theta^2} = -\frac{1}{2b}(w + 2w') \qquad \therefore \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{x=\text{bc}} = -\frac{1}{2b}(w + 2w') < 0$$

أي أن طاقة الجهد تكون نهاية عظمى ومن ثم فإن الاتزان غير مستقر.

﴿ مثـ ١١ ـال ﴾

اسطوانة مصمتة ارتفاعها ℓ متحدة القاعدة مع نصف كرة مصمتة في قاعدتها المستوية إذا كان نصف قطر الكرة a والجسم منتظم وموضوع بسطحه الكروي على مستوى ، متى يكون الاتزان مستقراً ؟

﴿ الحـل ﴾

شرط استقرار الاتزان كما رأينا يأخذ الصورة $\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ حيث h تمثل ارتفاع مركز ثقل الجسم العلوي وفي مسألتنا هنا $b \to \infty$ وبالتالي يصبح الشرط السابق في الصورة $h < a$ ، وبفرض أن m', m هما كتلتي نصف الكرة و الاسطوانة فإنه (من المعلوم أن مركز ثقل نصف كرة مصمتة يقع على بعد $\frac{3}{8}$ من القاعدة المستوية مثـ ٨ ـال باب مركز الثقل)

$$\therefore h = \frac{\frac{5}{8}am + (a + \frac{\ell}{2})m'}{m + m'} < a \quad \Rightarrow \frac{5}{8}am + (a + \frac{\ell}{2})m' < a \ \ m + m'$$

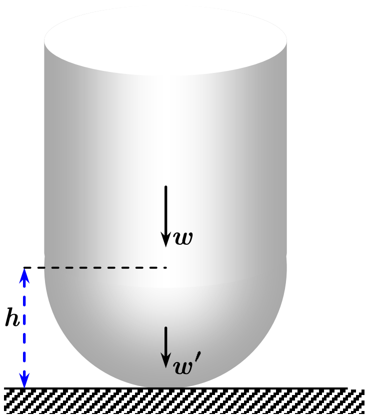
وباجراء الاختصارات نحصل على $\frac{m'}{m} < \frac{3}{4}\frac{a}{\ell}$ ولكن

$$\frac{m'}{m} = \frac{\pi \rho a^2 \ell}{\frac{2}{3}\pi \rho a^3} = \frac{3\ell}{2a}$$

$$\therefore \frac{m'}{m} = \frac{3\ell}{2a} < \frac{3a}{4\ell} \quad \Rightarrow \quad 2\ell^2 < a^2$$

$$\text{Or} \qquad \sqrt{2}\ell < a$$

وهو شرط استقرار الاتزان.



﴿ مثـ ١٢ ـال ﴾

نصف كرة مجوفة وزنها $2w$ ونصف قطرها ℓ ، علق وزن w في نقطة على حافتها وترتكز نصف الكرة بسطحها المنحني على كرة ثابتة نصف قطرها 2ℓ عند أعلى نقطة. أدرس نوع الاتزان ؟

﴿ الحـــل ﴾

شرط استقرار الاتزان كما رأينا يأخذ الصورة $\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ حيث h تمثل ارتفاع مركـز ثقل الجسم العلوي.

والآن لإيجاد مركز ثقل الجسم المكون من وزن نصف الكرة $2w$ والثقل w ، نفرض أن هذا المركز يقع على المستقيم co وبالتالي يكون $w(\mathrm{bo}') = 2w(\mathrm{o}'\mathrm{d})$

ولكن $\mathrm{o}'\mathrm{d} = \frac{a}{2}\sin\theta, \quad \mathrm{bo}' = a\cos\theta$ ومنها يكون

$$wa\cos\theta = 2w\frac{a}{2}\sin\theta \qquad \therefore \tan\theta = 1 \qquad \text{Or} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

ومن قانون حساب مركز الثقل يكون $\mathrm{Ac} = h$

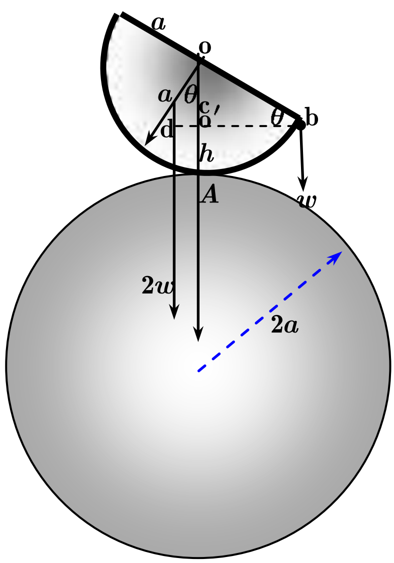
$$\therefore h = \frac{(a - a\sin\theta)m + (a - \frac{a}{2}\cos\theta)2m}{m + 2m} = \left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}a, \qquad \left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$$

حيث m كتلة الوزن $w = mg$ و $2m$ كتلة وزن نصف الكرة $2w = 2mg$

وحيث أن شرط الاتزان المستقر $\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\therefore \frac{1}{a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)} > \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \qquad \Rightarrow \sqrt{2} > 1$$

وهذا صحيح أي أن الاتزان مستقر.



الخلاصـــــــــــة

- يستخدم مبدأ الشغل الافتراضي في حل مسائل الاتزان مع مراعاة بعض القواعد والتي ذُكرت.
- أنواع الاتزان مستقر ، غير مستقر ، متعادل وإذا كانت V دالة الجهد فإن

$\frac{d^2V}{dx^2} > 0$ اتزان مستقر ، $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ اتزان غير مستقر ،

$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ اتزان متعادل

تماريـــــــــن

(١) قضيب طوله L يتصل بمفصل سهل في حائط رأسي بينما طرفه الاخر مربوط بخيط مرن طوله الطبيعي a ومعامل مرونته λ ، إذا ربط الطرف الآخر للخيط في نقطة على ارتفاع ما من المفصل. أوجد طول الخيط في حالة الاتزان ؟

(٢) خيط مرن طوله الطبيعي $2\pi a$ ووزنه w ومعامل مرونته λ على شكل حلقة. وضـــع على السطح الخارجي لمخروط محوره رأسي لكي يصبح مستوى الحلقة أفقياً. اوجد نصـــف قطر الحلقة في حالة الاتزان علماً بأن نصف زاوية رأس المخروط هي α ؟

(٣) خرزتان وزناهما w, w' تنزلقان على سلك دائري في مستوى رأسي ومربوطتان بخـــيط يحصر زاوية 2β عند المركز عندما تكونان الخرزتان في حالة اتزان على الجزء العلوي مـــن السلك. اثبت أن ميل الخيط على الأفقي يعطى من $\tan\theta = \frac{w'-w}{w'+w}\tan\beta$ ؟

(٤) إطار مكون من أربعة قضبان متساوية وزن أي منها w ومتصلة اتصالاً أملس عند نهايتها علق من أحد أركانه وحوفظ على الشكل بواسطة خيط مرن طوله الطبيعي a ومعامل مرونته λ مربوط في ركنيه العلوي والسفلي ، أوجد ميل أي من القضيبين على الرأسي ؟

(٥) قضيب ab طوله $2a$ وزنه w يتحرك بسهوله حول مفصل ثابت a ، والنهاية الأخرى متصلة بخيط غير مرن يمر في حلقة ملساء على بعد $2a$ من a وفي نفس المستوى الأفقي مع a وفي النهاية الأخرى للخيط وزن $\frac{w}{12}$ اثبت أن الاتزان مستقر واوجد الزاوية التي يميل بها القضيب على الأفقي ؟

(٦) يتكون الشكل الرباعي abcd من أربعة قضبان منتظمة ومتصلة ببعضها بمفصلات ملساء في اطرافها ، وبحيث يكون ab=ad ووزن أي منهما w كذلك cb=cd ووزن أي منهما w'. علق الهيكل في نقطة a ، وربط الطرف a بالطرف c بواسطة خيط خفيف بحيث أن الزاوية $a\hat{b}c$ أصبحت قائمة. اثبت أن الشد في الخيط في وضع الاتزان $T = w' + (w + w')\sin^2\theta$ ؟

(٧) عُلّقت نصف كرة مصمتة على حافة قاعدتها المستوية ، والطرف الآخر من الخيط مثبت في نقطة على حائط رأسي أملس بحيث يكون الجزء المنحني من الكرة ملاصقاً للحائط. إذا كانت θ, ϕ هما زاويتا ميل الخيط والقاعدة المستوية على الرأسي اثبت أن $\tan\phi - \tan\theta = \frac{3}{8}$ ؟

(٨) جسم مكون من مخروط مصمت دائري قائم ونصف كرة مصمتة لهما نفس القاعدة ذات نصف القطر ℓ أوجد اكبر ارتفاع للمخروط حتى يصبح اتزان الجسم مستقراً إذا وضع على مستوى أفقي ورأس المخروط إلى اعلى. أوجد أيضاً ارتفاع المخروط إذا كان الاتزان متعادلاً؟

(٩) تستقر نصف كرة مصمتة على سطح كروي مساوٍ في نصف القطر. اثبت أن الاتزان غير مستقرإذا تلامس السطحان الكرويان ويكون الاتزان مستقراً إذا تلامست القاعدة المستوية مع السطح الكروي ؟

(١٠) شكل سداسي منتظم مكون من ستة قضبان متساوية وزن كل منها w متصلة اتصالاً مفصلياً. اتصل رأسين متقابلين بخيط أفقي وكان أحد القضبان مستقراً على مستوى أفقي ثم وضع وزن w' في منتصف القضيب المقابل له. اثبت أن الشد في الخيط يساوي $\sqrt{3}(w + w')$ ؟

رياضيات تطبيقية ٢

أ.د مهدى

الفرقة الأولي

كلـــــية التربية
شعبة الرياضيات

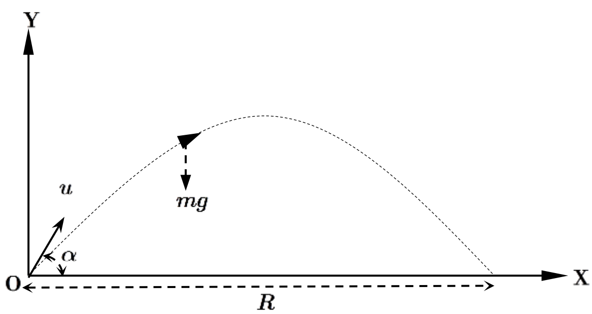
حركة المقذوفـــات

Projectiles Motion

تُعتبر حركة المقذوفات من اهم التطبيقات على الحركة المستوية للنقطة المادية (الجسيم). مـــن المعلوم أن المقذوفات تتعرض اثناء حركتها لجذب الأرض وكذلك مقاومـــة الهـــواء وبدايـــةً سنهمل مقاومة الهواء وسنعتبر أيضاً أن عجلة الجاذبية ثابتة في المقدار خلال حركة المقـــذوف وذلك للحصول على صورةٍ تقريبيةٍ لحركة المقذوف والتي بدورها تلقي ضوءاً لا بأس به على الحركة الحقيقية . وتُستخدم الاحداثيات الكارتيزية عادةً لدراسة هذا النوع مـــن الحركـــة– حيث نستخدم محورين متعامدين ثابتين هما غالباً OX, OY – على أن تُستكمل دراسة حركة المقذوفات مع الأخذ في الاعتبار مقاومة الهواء لاحقاً – إن شاء الله تعالى.

■ معادلات الحركة Equations of Motion

نعتبر الآن حركة مقذوف قُذف من نقطة O بسرعة مقدارها u وفي اتجاه يصنع زاوية α مع المحور الأفقي. كما ذكرنا آنفاً ستحرك الجسيم تحت تأثي قوة الوزن فقط (مقاومـــة الهـــواء أُهملت) وهي – كما نعلم – قوة رأسية إلى أسفل. من الواضح أم مسار المقذوف واقـــع في مستوى رأسي لذلك من المناسب استعمال الاحداثيات الكارتيزية – كما ذكرنـــا ســـالفاً – ولتكن نقطة الأصل هي نقطة القذف O . نفرض أن الجسيم يصل إلى سطح الأرض عنـــد النقطة A بعد زمن ما ومن ثم سنأخذ المحور OX في اتجاه OA والمحـــور OY هـــو المحـــور العمودي على OX في مستوى الحركة كما هو موضح بالشكل.



نفرض أن المقذوف بعد زمن t كان يشغل الموضع P والذي احداثياته (x, y) ومن ثم بكتابة قانون نيوتن الأساسي في الاتجاهين الأفقي والرأسي يكون:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \text{and} \qquad m\ddot{y} = -mg \qquad (1)$$

بالقسمة على m وتكامل جزئي (1) المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = c_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = c_2 - gt \qquad (2)$$

حيث c_1, c_2 ثابتا التكامل واللذان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة. عند $t = 0$ يكون $\dot{x} = u\cos\alpha,\ \dot{y} = u\sin\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = u\cos\alpha$ و $c_2 = u\sin\alpha$ وبالتالي تأخذ المعادلة (2) الصورة الرياضية

$$\dot{x} = u\cos\alpha \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt \qquad (3)$$

مرةً أخرى بأجراء التكامل بالنسبة للزمن لشقيّ المعادلة (3) ينتج أن

$$x = (u\cos\alpha)t + c_3 \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4 \qquad (4)$$

ايضاً الثابتان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة حيث عند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = 0,\ y = 0$ ومنها نجد أن $c_3, c_4 = 0$ و المعادلة (4) تصبح

$$x = (u\cos\alpha)t \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (5)$$

وبذلك نكون قد أوجدنا مركبتا سرعة المقذوف عند أي لحظة زمنية من جزئي المعادلة (3) وأيضاً موضع المقذوف يتعين عند أي لحظة من جزئي المعادلة (5) ونلاحظ من الشق الأول من المعادلة (3) نجد أن المركبة الأفقية للسرعة $\dot{x}$ دائماً ثابتة و تساوي $u\cos\alpha$ أما المركبة الرأسية $\dot{y}$ فتعتمد على الزمن . ويُسمى جزئا المعادلة (5) بالمعادلتين البارامتريتين لمسار القذيفة.

أهم خصائص حركة المقذوفات

■ أقصى ارتفاع للمقذوف Maximum Height

كما علمنا أن المركبة الأفقية للسرعة تظل ثابتة بينما تتناقص المركبة الرأسية حتى تنعدم عند موضع ما والذي يُمثل أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف ، عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الشق الثاني من المعادلة (3) نحصل على زمن الوصول إلى اقصى ارتفاع وليكن T وهو

$$T = \frac{u \sin \alpha}{g} \qquad (6)$$

ونحصل على أقصى ارتفاع Y بأن نضع $t = T$ في الجزء الثاني من المعادلة (5) أي أن أقصى ارتفاع يتعين من

$$Y = (u \sin \alpha) T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (7)$$

■ زمن الطيران (التحليق) Time of flight

يُعرف زمن الطيران بأنه الزمن المنقضي بين لحظة اطلاق القذيفة وحتى لحظة مرورها بالمستوى الأفقي المار بنقطة القذف (عند النقطة A) وسنرمز له بالرمز $T^\star$ وحيث أنه عند النقطة A يكون $y = 0$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الجزء الثاني من المعادلة (5) يكون

$$0 = (u \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (8)$$

المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية في الزمن t وجذراها هما

$$T^\star = 0, \qquad T^\star = \frac{2u \sin \alpha}{g} \qquad (9)$$

الجذر الأول $T^\star = 0$ عند بداية قذف الجسيم عند نقطة الأصل والجذر الثاني يُمثل زمن التحليق ومن الملاحظ من المعادلتين (6) و (9) نجد أن $T^\star = 2T$ وهذا يعني أن الزمن الذي يأخذه المقذوف من لحظة اطلاقه حتى وصوله الى اقصى ارتفاع يساوي زمن وصول المقذوف من أقصى ارتفاع غلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف.

■ مدى القذيفة على المستوى الأفقي Range

ويُقصد به طول المستقيم الواصل من نقطة القذف وحتى النقطة A (في نفس مستوى نقطة القذف) ولحساب المدى R نضع $t = T^{*}$ في الجزء الأول من المعادلة (5) ، أي أنه للحصول على صيغة رياضية للمدى على المستوى الأفقي نعوض عن الزمن بقيمة زمن التحليق في الجزء الأول من المعادلة (5) ومنها

$$R = (u\cos\alpha)T \qquad \Rightarrow R = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \tag{10}$$

و واضح أن المدى R يبلغ أقصى قيمة له – عند قيمة معينة للسرعة – عندما $\sin 2\alpha = 1$ أي عندما $\alpha = \pi / 4$ ويكون المدى حينئذ مساوياً

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \tag{11}$$

من المعادلة (10) نلاحظ أن المدى الأفقي يمكن الحصول عليه بقيميتين لزاوية القـــذف همـــا $(\alpha, \pi / 2 - \alpha)$ وذلك لأن $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

■ معادلة المسار لمقذوف Path Equation

بحذف البارامتر t بين جزئي المعادلة (5) نحصل على ما يُعرف بمعادلة المسار الكارتيزيـــة في الصورة الرياضية

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \tag{12}$$

و يتضح من المعادلة السابقة أنه لقيمة معينة للسرعة توجد زاويتان لإصابة الهدف.

ايضاً يمكن وضع المعادلة (12) في الصورة

$$y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2u^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2$$

ومنها نلاحظ أن مسار القذيفة هو قطع مكافئ رأســه النقطــة $\left(\dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$ ومحوره رأسي إلى أسفل وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\dfrac{g}{2u^2 \cos^2 \alpha}$

■ مدى القذيفة على مستوى مائل Inclined Range

لإيجاد مدى القذيفة على مستوى مائل. نفرض أن الجسيم قُذف من نقطــة O بســرعة u وزاوية قذف α مع الأفقي أعلى مستوى مائل– يميل على الأفقي بزاوية φ – كما بالشكل وأن اتجاه القذف يقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى المائــل ، نفــرض أن الجسيم يصطدم بالمستوى المائل عند النقطة M ولتكن احداثياتها (x,y) . فإذا كان $R^\star$ هو المدى على المستوى المائل – المطلوب تعيينه – فإن

$$x = R^\star \cos\varphi, \qquad y = R^\star \sin\varphi$$

ونعلم أن هذين الاحداثيين يحققان معادلة المسار (12) وعلى ذلك وبالتعويض في معادلة المسار ينتج أن

$$R^\star \sin\varphi = R^\star \cos\varphi \tan\alpha - \frac{gR^{\star 2} \cos^2\varphi}{2u^2} \sec^2\alpha$$

ومن هذه المعادلة إما $R^\star = 0$ وهو مناظر لنقطة الأصل أو

$$R^\star = \frac{2u^2}{g}\ \cos\varphi \tan\alpha - \sin\varphi\ \cos^2\alpha \sec^2\varphi$$

$$= \frac{2u^2 \cos\alpha}{g \cos^2\varphi}\ \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha\ = \frac{2u^2 \cos\alpha}{g\cos^2\varphi} \sin(\alpha - \varphi) \qquad (13)$$

هذه المعادلة تُعطي المدى لقذيفة على مستوى مائل. كما يتضح من المعادلة أيضاً أن أقصــى مدى على المستوى المائل (بزاوية φ) يحدث عندما تكون $\cos\alpha \sin(\alpha - \varphi)$ أكبر ما يمكن وحيث أنه من المعلوم من حساب المثلثات

$$2\cos\alpha \sin(\alpha - \varphi) = \sin(2\alpha - \varphi) - \sin\varphi$$

وعلى هذا فإن اقصى مدي على المســتوى المائــل يمكــن الحصــول عليــه هــو عنــدما $\sin(2\alpha - \varphi) = 1$ أي عندما

$$2\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{Or} \qquad \alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\text{Or} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \qquad \text{Or} \qquad \alpha = \varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tag{14}$$

أي أننا نحصل على أقصى مدى على المستوى المائل عندما ينصف اتجاه القذف الزاويـــة بـــين الراسي والمستوى المائل ويكون اقصى مدى هو

$$R^{\star}_{\max} = \frac{u^2}{g\cos^2\varphi}\;\; 1 - \sin\varphi \;\; = \frac{u^2}{g(1+\sin\varphi)} \tag{15}$$

ونلاحظ أنه بوضع $\varphi = 0$ في المعادلتين (14) ، (15) نحصل على النتائج المنـــاظرة في حالـــة المستوى الأفقي. تنبيه للحصول على المدى لمستوى مائل لأسفل نضع $-\varphi$ بدلا من φ.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

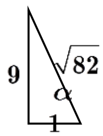
رصدت حركة مقذوف فوجد أن اقصى ارتفاع له فوق المستوى الأفقي المار بنقطة القذف هو 900 ft و أن مداه على المستوى الأفقي 400 ft عيّن سرعة القذف مقداراً واتجاهاً.

الحـــــــــل

حيث أن اقصى ارتفاع والمدى يعينان من المعادلتين

$$Y = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ومنها بالتعويض بالقيم المعطاة



$$900 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad 400 = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

بقسمة المعادلتين نحصل على

$$\frac{9}{4} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Big/ \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{\tan \alpha}{4} \quad \therefore \tan \alpha = 9$$

وهي اتجاه سرعة القذف ومقدار السرعة يتعين بالتعويض في أي من المعادلتين ويكون

$$900 = \frac{u^2}{2g} \times \frac{81}{82} \Rightarrow u^2 = \frac{1800 \times 82 \times 32.2}{81} \quad \text{Or} \quad u \cong 242.23 \quad (g = 32.2 \text{ ft sec}^{-2})$$

حيث أن $\tan \alpha = 9$ فإن $\sin \alpha = \frac{9}{\sqrt{82}}$ كما بالشكل.

مثـــ ٢ ـــال

قذف جسيم من نقطة بسرعة ابتدائية مقدارها $3\sqrt{gh}$ لتصيب هدفاً عنـــد النقطـــة $(3h, h)$ بالنسبة إلى محورين متعامدين مارين بنقطة القـــذف. أوجـــد زاويـــتي القـــذف الممكنـــتين لإصابةالهدف.

الحـــــــل

حيث أن الهدف عند النقطة $(3h, h)$ ومن ثم فهذه النقطة تحقق معادلة المسار أي أن

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ h = 3h\tan\alpha - \frac{g(3h)^2}{2(9\,gh)\cos^2\alpha} \quad \text{Or} \quad 1 = 3\tan\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha}$$

$$2 = 6\tan\alpha - \sec^2\alpha \Rightarrow 2 = 6\tan\alpha - (1+\tan^2\alpha) \quad \therefore\ \tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 3 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\alpha$ وجذراها هما

$$\tan\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \quad \text{i.e.} \quad \tan\alpha_1 = 3+\sqrt{6}, \quad \tan\alpha_2 = 3-\sqrt{6}$$

وهما الزاويتان الممكنتان لإصابة الهدف.

مثـــ ٣ ـــال

إذا كان T هو زمن وصول قذيفة إلى نقطة P على مسارها وكان T' هو زمن وصولها من تلك النقطة إلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف أوجد ارتفاع النقطة P عن المستوى الأفقي للقذف.

الحـــــــل

حيث أن زمن الطيران هو الزمن من لحظة انطلاق القذيفة وحتى وصولها الى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف وكما رأينا فإن

$$\text{Time of Filght} = \frac{2u\sin\alpha}{g} = T + T' \qquad \therefore\ u\sin\alpha = \frac{1}{2}g\ \ T + T'$$

ولحساب ارتفاع النقطة P حيث $y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ولذلك

$$y_{\text{P}} = y\big|_{t=T} = (\underbrace{u\sin\alpha}_{\frac{1}{2}g(T+T')})T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g(T+T')T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gTT'$$

مثـــ ٤ ـــال

أطلقت قذيفة على هدف معين في مستوى أفقي يمر بنقطة القذف فسقطت قبل الهدف بمسافة ℓ عندما كانت زاوية القذف 15^0 وعندما قُذفت بنفس السرعة وضوعفت زاوية القـــذف سقطت بعد الهدف بمسافة ℓ. أوجد الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف.

الحـــــــل

باعتبار أن سرعة القذف هي u وأن هو المدى الصحيح لإصابة الهدف هو R وبناءً عليه فإن المدي في الحالة الأولى هو $R-\ell$ والمدى في الحالة الثانية هو $R+\ell$ وحيث أن معادلة المدي هي

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

في الحالة الأولى
$$R-\ell=\frac{u^2\sin 30}{g}=\frac{u^2}{2g}$$

في الحالة الثانية
$$R+\ell=\frac{u^2\sin 60}{g}=\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$$

من هاتين المعادلتين ينتج أن – بالجمع –

$$2R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{2}\qquad \text{Or}\qquad R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{4}\qquad (1)$$

وبفرض أن هي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف θ وبالتالي يكون (2) $R=\dfrac{u^2\sin 2\theta}{g}$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن $\sin 2\theta=\dfrac{(1+\sqrt{3})}{4}$ أي أن

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

وهي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف

مثـــ ٥ ـــال

أطلقت قذيفة من نقطة الأصل فوجد أنها تمر بالموضعين $(12,0)$, $(8,2)$ على مسارها أوجـــد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً واحسب الزمن الذي تأخذه القذيفة لتمر بالموضعين الســـابقين وسرعتها عند هذين الموضعين.

الحـــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y=x\tan\alpha-\dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(12,0)$, $(8,2)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة $(8,2)$ فإن $$2 = 8\tan\alpha - \frac{g(8)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة $(12,0)$ فإن $$0 = 12\tan\alpha - \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في 9 والثانية في 4 والطرح نحصل على

$$18 = 24\tan\alpha \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

وهي اتجاه سرعة القذف مع الأفقي و لتعيين مقدار السرعة بالتعويض في أي من المعادلتين

$$\Rightarrow 12\tan\alpha = \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \therefore u^2 = \frac{g(12)^2}{24\tan\alpha\cos^2\alpha} = \frac{6g}{\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{2}g$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{25}{2}g}$$

<u>**على الدارس أن يكمل الحل**</u>

مثـــ ٦ ـــال

قُذفت نقطة مادية لتمر بالموضعين $(a,b),\ (b,a)$ على مسارها حيث $a > b$. اثبت أن المدى على المستوى الأفقي يساوي $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ و أن زاوية القذف أكبر من $\tan^{-1}3$.

الحـــــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(a,b),\ (b,a)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة (b,a) فإن $$a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة (a,b) فإن $$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في a والثانية في b والطرح نحصل على

$$\underbrace{a^2-b^2}_{(a+b)\cancel{(a-b)}}=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\cancel{(a-b)}$$

$$\text{Or}\qquad a+b=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\qquad\qquad \text{Or}\qquad \frac{ab}{a+b}=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$$

مرةً أخرى بضرب المعادلة الأولى في a^2 والثانية في b^2 و الطرح نحصل على

$$\underbrace{a^3-b^3}_{(a^2+ab+b^2)\cancel{(a-b)}}=ab\cancel{(a-b)}\tan\alpha\qquad\Rightarrow ab\tan\alpha=a^2+ab+b^2$$

ولكن معادلة المدي تُعطى من

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{2u^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

$$=\underbrace{\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}}_{ab/(a+b)}\tan\alpha=\frac{ab}{a+b}\tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وهو المطلوب $$\therefore R=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وحيث أننا أثبتنا أن $$\tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\pm 3=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}+3=\frac{a-b^{\ 2}}{ab}+3$$

و حيث أن المقدار $\frac{a-b^{\ 2}}{ab}>0$ فإن $\tan\alpha>3$ أو $\alpha>\tan^{-1}3$

مثـــ ٧ ـــال

أطلقت قذيفة بسرعة h من سطح الأرض بحيث تمر بنقطة أقصى بعد لها A في نفس المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. اثبت أنه لكي يصيب المقذوف هدفاً على ارتفاع h فوق النقطة A بحيث أن زاوية القذف في الحالتين واحدة فإن سرهة القذف يجب أن تزيد إلى $\frac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$.

الحـــــــل

واضح أن أقصى بعد حينما تكون الزاوية 45^0 ويكون المدى أي بعد النقطة A هو $R=\frac{u^2}{g}$

ولكي تصيب القذيفة الهدف B و الذي يقع على ارتفاع h فوق النقطة A نفترض أن السرعة أصبحت v ومن ثم يجب أن تكون النقطة $B=\left(\dfrac{u^2}{g},h\right)$ تحقق معادلة المسار

$$h=\frac{u^2}{g}\tan 45-\frac{g\ \left(u^2\ /\ g\right)^2}{2v^2\cos^2 45}\qquad \Rightarrow h=\frac{u^2}{g}-\frac{u^4}{gv^2}\quad \text{Or}\quad \frac{u^4}{gv^2}=\frac{u^2}{g}-h$$

$$\frac{u^4}{gv^2}=\frac{u^2-gh}{g}\quad \text{Or}\quad v^2=\frac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}>u$$

أي أن السرعة يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$

مثـــ ٨ ـــال

قذف جسيم بسرعة $64\ \text{ft}\sec^{-1}$ وفي اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الأفقي أوجد المدى على مستوى يميل بزاوية 30^0 على الأفقي إذا قذف الجسيم أعلى المستوى أو أسفل المستوى.

الحــــــــل

حيث أن المدى على المستوى المائل يتعين من – $g=32.2\ \text{ft}\sec^{-2}$ –

$$R=\frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

حيث $u=64\ \text{ft}\sec^{-1}$ ، $\varphi=30^0$ ، $\alpha=45^0$ نجد أن المدى على المستوى المائل لأعلى

$$R=\frac{2(64)^2\cos 45\sin(45-30)}{32.2\cos^2 30}=\frac{2(64)^2}{3(32.2)}\left(\sqrt{3}-1\right)\cong 62.08\ \text{ft}$$

ثم بالتعويض عن $\varphi=-30^0$ نحصل على المدى على المستوى المائل إلى أسفل

$$R=\frac{2(64)^2\cos 45\sin(45+30)}{32.2\cos^2(-30)}=\frac{2(64)^2}{3(32.2)}\left(\sqrt{3}+1\right)\cong 231.7\ \text{ft}$$

مثـــ ٩ ـــال

إذا كانت النسبة بين مقداري سرعة جسيم مقذوف عند أقصى ارتفاع و عندما يكون على ارتفاع يساوي نصف اقصى ارتفاع هي $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ فاثبت أن زاوية القذف هي 30^0.

الحـــــل

حيث أن الاحداثي الرأسي عند أي لحظة يتعين من $y = (u\sin\alpha)\ t - \frac{1}{2}gt^2$

وحيث أن أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة A هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

وعند ارتفاع يساوي نصف أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة B هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{4g}$

الزمن الذي يأخذه الجسيم من لحظة انطلاقه حتى يصل إلى النقطة B يتعين من

$$\frac{u^2\sin^2\alpha}{4g} = (u\sin\alpha)\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$2(gt)^2 - 4(gt)u\sin\alpha + u^2\sin^2\alpha = 0 \qquad \Rightarrow gt = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha$$

مركبتا سرعة الجسيم عند النقطة B هما

$$\dot{x}_B = u\cos\alpha, \quad \dot{y}_B = u\sin\alpha - gt = u\sin\alpha - \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha$$

ويكون مقدار السرعة عند B هو

$$v = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha\right)^2} = \frac{u}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$$

عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}_A = 0$ أي أن $\dot{x}_A = u\cos\alpha,$

$$v = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = u\cos\alpha$$

وحيث أن $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{6}{7}}$ وبالتالي

$$\frac{\sqrt{2}u\cos\alpha}{u\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \qquad \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{Or} \quad \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{3}{7}$$

$$7\cos^2\alpha = 3 + 3\cos^2\alpha \qquad \Rightarrow 4\cos^2\alpha = 3 \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \alpha = 30^0$$

وهو المطلوب

مثـ ١٠ ـــال

اطلقت كرة من نقطة على سطح الأرض تبعد مسافة a من قاعدة حائط رأسي ارتفاعـــه b إذا كانت زاوية القذف مع الافقي α والكرة مرت بحافة الحائط اثبت أن أقصـــى ارتفـــاع للكرة هو $\dfrac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)}$.

الحـــــــل

نفترض أن سرعة القذف هي u وحيث أن الكرة تمس الحائط ومن ثم فإن النقطة (a,b) تقع على مسار الكرة ومن ثم فهي تحقق معادلة المسار

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Or} \qquad a\tan\alpha - b = \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ u^2 = \frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha}$$

والآن أقصى ارتفاع للكرة

$$\begin{aligned} Y &= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \\ &= \frac{\sin^2\alpha}{2g}\,\frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha} \\ &= \frac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)} \end{aligned}$$

■ حركة مقذوف مع اعتبار مقاومة الهواء

درسنا في الجزء السابق حركة المقذوف مع اهمال مقاومة الهواء وهي حالة مثالية حيث أنه في الواقع توجد مقاومة لحركة الجسيم المقذوف وهي مقاومة الهواء ، دعنا نفترض أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسيم وهي $\gamma m\underline{v}$ (حيث γm ثابت التناسب) والآن بكتابة قانون نيوتن الاساسي وبالتحليل في الاتجاهين الأفقي و الرأسي نحصل على

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\gamma\cancel{m}\dot{x} \quad \text{and} \quad \cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g - \gamma\cancel{m}\dot{y} \qquad (1)$$

لاحظ أن $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ و $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ وبتكامل شقي المعادلة (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\ln\dot{x} = c_1 - \gamma t \quad \text{and} \quad \ln\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) = c_2 - \gamma t \qquad (2)$$

حيث c_2, c_1 ثابتا التكامل و اللذان يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية للحركة وهي عند $t = 0\dot{x} = u\cos\alpha$ يكون $\dot{y} = u\sin\alpha,\ \dot{x} = u\cos\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = \ln u\cos\alpha$ و $c_2 = \ln\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$ بالتعويض عن قيمة الثابتين تأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha\ e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \qquad (3)$$

وجزئي هذه المعادلة يعينان مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة زمنية. مرةً أخرى بإجراء التكامل بالنسبة للزمن لجزئي المعادلة (3) يكون

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ e^{-\gamma t} + c_3 \quad \text{and} \quad y = -\frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}t + c_4 \quad (4)$$

ايضاً الثابتان c_4, c_3 يمكن تعيين قيمتهما من الشرط الابتدائي للحركة فعند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = y = 0$ ومنها نجد أن

$$c_3 = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}, \qquad c_4 = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$$

وتأخذ المعادلة السابقة (4) الصورة

$$x = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ \ 1 - e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)\ 1 - e^{-\gamma t}\ \ - \frac{g}{\gamma}t \qquad (5)$$

وجزئا هذه المعادلة يعينان موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

و للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نضع $\dot{y} = 0$ في المعادلة (3) ومن ثم

$$T = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right) \tag{6}$$

ويتعين أقصى ارتفاع من المعادلة (5) أي أن

$$y = \frac{u\sin\alpha}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 + \frac{\gamma u \sin\alpha}{g}\right)$$

زمن الطيران T' يتعين بوضع $y = 0$ في الشق الثاني من المعادلة (5)

$$T' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)\ 1 - e^{-\gamma T'}$$

أما معادلة المسار فتتعين بحذف البارامتر بين جزئي المعادلة وتأخذ الصورة

$$y = \frac{g}{\gamma u \cos\alpha}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)x + \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{u\cos\alpha}\right)$$

وأخيراً يجب أن نلاحظ أن الحركة التي سبق دراستها عند اهمال مقاومة الهواء هي حالة خاصة من هذه الحالة ويمكن الحصول على جميع النتائج والمعادلات التي سبق الحصول عليها (عند اهمال مقاومة الهواء) بجعل $\gamma \to 0$ فمثلاً للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نستخدم المفكوك اللوغاريتمي

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .....$$

هذا المفكوك صحيح بشرط أن $|x| < 1$ والآن بجعل $\gamma \to 0$ في المعادلة (6) نجد أن

$$\begin{aligned} T &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} - \frac{\gamma^2 u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma^3 u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{\gamma u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) = \frac{u\sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

وهو نفسه زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع والذي سبق الحصول عليه عند اهمال مقاومة الهواء (المعادلة (6)) ونترك للقارئ كتمرين الحصول على بقية النتائج في حالة اهمال مقاومة الهواء.

مثـ ١١ ـال

قذف جسيم كتلته m بسرعة u و في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاومتـه تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب يساوي μm . اثبت أن اتجاه حركته يصنع زاويـة مقدارها α مع الأفقي بعد مضي زمن $\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu u}{g}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.

الحـــــل

بكتابة معادلتي الحركة للجسيم في الاتجاهين OX,OY والتكامل واستخدام الشروط الابتدائية للحركة كما سبق أن اوضحنا بالتفصيل نحصل على مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة في الصورة

$$\dot{x}=u\cos\alpha\ \ e^{-\mu t}\qquad \text{and}\qquad \dot{y}=\left(u\sin\alpha+\frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t}-\frac{g}{\mu}$$

حيث أن زاوية القذف هي α وأن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة مع المحور الأفقي تتناقص حتى تنعدم عند أقصى ارتفاع ثم يعكس الجسيم اتجاه حركته لتصبح الزاوية α لأسفل. يصنع اتجاه الحركة زاوية α بعد زمن t يتعين من

$$\tan\ -\alpha\ =\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\left(u\sin\alpha+\frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t}-\frac{g}{\mu}}{u\cos\alpha\ \ e^{-\mu t}}=-\tan\ \alpha$$

أي أن

$$\left(u\sin\alpha+\frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t}-\frac{g}{\mu}=-u\sin\alpha\ \ e^{-\mu t}\ \ \Rightarrow\left(2u\sin\alpha+\frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t}=\frac{g}{\mu}$$

$$\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g}+1\right)=e^{\mu t}\qquad\qquad \Rightarrow t=\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g}+1\right)$$

وهو المطلوب.

■ مســـــائل Problems ■

قُذف جسيم بسرعة $\underline{u} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j}$ من نقطة A لتصطدم بسقف منزل ارتفاعـــه ℓ عـــن المستوى الأفقي المار بالنقطة A . فإذا كان أقصى ارتفاع للجسيم يساوي 2ℓ . فاثبـــت أن سرعة الجسيم عند أصطدامه بسقف المنزل تتعين من $\underline{u}_A = a\,\hat{i} - \sqrt{b^2 - 2g\ell}\,\hat{j}$.

الحركـــة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، ثم حركة جسيم في مســـتوى ثم تناولنا في الباب الذي يليه حركة المقذوفات وهي نوع مـــن أنـــواع الحركـــة في المســـتوى وسنتعرف بمشيئة الله في هذا الباب على نوع له أهميه من أنواع الحركة تُســـمى " الحركـــة التوافقية البسيطة " أو الحركة الموجية. إذا تحرك جسيم متذبذباً حول موضع اتزانـــه (وهـــو الوضع الذي إذا زُحزح الجسيم عنه وهو متزن عاد إليه مرةً أخرى) سُميت حركة الجســـيم بالحركة الاهتزازية أو الحركة الدورية وهناك أنواع مختلفة من الإهتزازات منها

♦الإهتزاز الحر أو الحركة التوافقية البسيطة وهى ما سندرسه بالتفصيل.

♦الإهتزاز القسري إذا أثرت قوة قاسرة دورية على جسيم يُقال أن الحركة إهتزاز قسري.

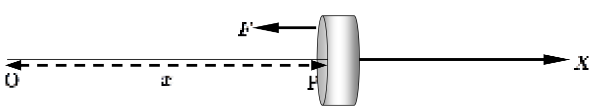
♦الإهتزاز المخمد الحر وفيها يكون الجسيم لقوة مقاومة مثل الاحتكاك والتي تجعـــل ســـعة الذبذبة تتناقص تدريجياً حتى تنعدم ومن ثم يتوقف الجسيم عن الحركة.

♦الإهتزاز القسري المخمد وهذه الحالة تمثل الحالتين السابقتين معاً وفيها يتلاشى تأثير المقاومة تدريجياً مع الزمن ويتبقى تأثير الذبذبة القسرية.

الإهتزاز الحر يُقال أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة وفيها يتحرك الجسيم متذبـــذباً حول موضع اتزانه دون أن تتغير سعة الذبذبة أو الزمن الدوري لها كما أن القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً تتجه نحو نقطة ثابتة أثناء الحركة ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناســـب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تُسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفـــرض أن O هـــي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذي سيمثله المحور OX وأن موضع الجسيم عند اللحظة t هو P حيث $\mathrm{OP} = x$ كما بالشكل. من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = k/m \qquad ....(1)$$



والاشارة السالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الذبذبة ولإيجاد سرعة الجسيم عند أي موضع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad ....(2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج أن $v\dfrac{dv}{dx} = -\omega^2 x$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$v^2 = c_1 - \omega^2 x^2 \qquad ....(3)$$

حيث c_1 هو ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج إلى شروط أبتدائية ولذلك سنعتبر أن أقصى مسافة للجسيم هي a والتي عندها يسكن الجسيم (أي أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c_1 = \omega^2 a^2$ وتُكتب المعادلة (3) في الصورة

$$v^2 = \omega^2 a^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 \;\; a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad .....(4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الأشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه الموجب (أي في اتجاه OX – تزايد x) وسنعتبر الأشارة السالبة إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه المضاد.

والآن لمعرفة موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية نضع $v = dx/dt$ في المعادلة (4) (على اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \omega dt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad ....(5a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل ويُسمى " زاوية الطور " ويُعيّن من الشروط الأبتدائية للحركة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$x = a\sin \;\; \omega t + \epsilon \qquad ......(5b)$$

وهذه المعادلة تُمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالة الأشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $1 \geq |\sin \ \omega t + \epsilon \ |$ ومن المعادلة (5 b) يكون

$$|x| = |a\sin \ \omega t + \epsilon \ | = |a||\sin \ \omega t + \epsilon \ | \leq a \qquad \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x = a$ ، $x = -a$ لذلك فإن a تُسمى سعة الحركة التوافقية.

كما يمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x = \pm a$ ، كما تكون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x = 0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x و $-x$ متساوٍ.

■ الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية ، ومن ثم فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويُعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من أحد أطراف الذبذبة $x = +a$ إلى الطرف الآخر $x = -a$ ثم العودة مرة أخرى $x = +a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبةً كاملةً وحيث أن

$$\begin{aligned} x &= a\sin(\omega t + \epsilon) = a\sin(\omega t + \epsilon + 2\pi) \\ &= a\sin\left(\omega\underbrace{\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'} + \epsilon\right) \\ &= a\sin(\omega t' + \epsilon), \qquad\qquad \left(t' = t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned}$$

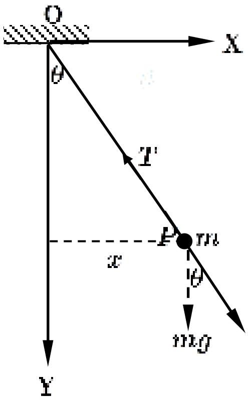
أي أن x عند الزمن t هي نفسها عند الزمن $t' = t + \frac{2\pi}{\omega}$ و ذلك يعني أن الجسيم يعود إلى وضعه الأول بعد زمن $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ و هو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري).

و لأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملـــها الجسيم في وحدة الزمن و هو ما يُعرف بالتردد.

■ التردد Frequency

يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) وسنرمز له بالرمز ν وهو مقلوب الزمن الدوري أي أن $\nu = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طـــرف خـــيط غـــير مـــرن (ساق خفيفة) طولها L مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طـــول الخيط L . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحـــت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومـــن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في الاتجاه الأفقي OX هى (بتحليل قوة الشد) بفرض أن $\angle \mathrm{YOP} = \theta$

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ddot{x} = -T\frac{x}{L}$$

وحيث أن θ صغيرة جداً فيمكن اعتبار أن الحركـــة هـــي حركـــة أفقيـــة فقـــط أي أن $T\cos\theta = mg$ ومن ثم تصبح المعادلة السابقة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L\cos\theta}$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\cos\theta \cong 1$ ومن ثم تؤول المعادلـــة السابقة إلى الصورة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -\frac{g}{L}\,x$$

هذه المعادلة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من – حيث $- \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

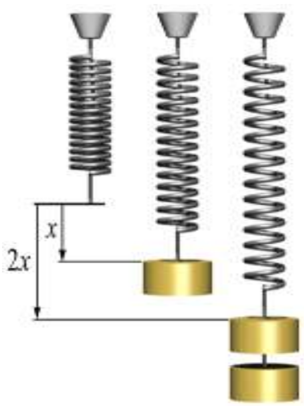
و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـ " بندول الثواني ".

■ قانون هوك Hooke's Law

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب تناسباً طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. الصيغة الرياضية لهذا القانون هي $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه و عدد لفاته إلى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell}x$$

حيث λ ثابت يُسمى معامل المرونة للخيط و الزنبرك ، x مثُل الأستطالة الحادثة ، ℓ لطول الطبيعي للخيط ، T وة الشد الناشئة في الخيط. (الأستطالة الحادثة هي الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي).



كما ذكرنا ما يسري على الخيط المرن يسري على الزنبركات في حالة الأستطالة فقط أما في حالة الأنضغاط فتختفي القوة الناشئة في الخيط خلافاً لحالة الزنبرك و هذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم اغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ فاثبت أن حركة هذا الجسيم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن الدوري لها.

الحـــــــل

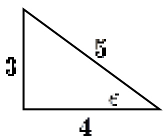
حيث أن موضع الجسيم يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على

$\dot{x} = -6\sin 2t + 8\cos 2t,$ again differentiating $\therefore \ddot{x} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$

Or $\therefore \ddot{x} = -4(\underbrace{3\cos 2t + 4\sin 2t}_{x}) = -2^2 x$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $\omega = 2$ حيث أن العجلة تتناسب مع المسافة و زمنها الدوري τ يتعين من $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ وسعة الحركة يمكن الحصول عليه كالآتي

$$3\cos 2t + 4\sin 2t = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\sin 2t\right)$$
$$= 5\ \ \sin\epsilon\, cos2t + \cos\epsilon\,\sin 2t\ \ = 5\sin(2t+\epsilon)$$



ومن ثم فإن سعة الذبذبة هي 5

مثـــ ٢ ـــال

إذا تعينت سرعة نقطة مادية تتحرك في خط مستقيم من العلاقة $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ فاثبت أن حركة هذه النقطة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$.

الحـــــــل

حيث أن $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ و باجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير x ينتج أن

$$v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \Rightarrow 2v\frac{dv}{dx} = n^2(4b - 2x) \quad \text{Or}$$
$$\underbrace{v\frac{dv}{dx}}_{\text{accel}} = -n^2(x - 2b) \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -n^2(x - 2b)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها مركز الذبذبة $4b$ و $\omega = n$

(توضيح: بوضع $y = x - 2b$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -n^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = 2b$).

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v = 0$ ومنها

$$0 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \quad \Rightarrow (x-2b)(x-6b) = 0 \quad \text{i.e.} \;\; x = 2b, \; x = 6b$$

وهذه القيم تمثل أطراف الذبذبة ومن ثم فتكون سعة الذبذبة هي $2b$ والزمن T اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$ يمثل ربع الزمن الدوري أي أن

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \because T = \frac{1}{4}\tau \qquad \Rightarrow T = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u, u' سرعتي الجسيم على بعدين b, b' من مركز الذبذبة على الترتيب. أوجد الزمن الدورى لها.

الحـــــــــل

حيث أن السرعة لجسيم يتحرك حركة توافقية هي $v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ حيث أن سعة الحركة هي a وعند الموضعين المذكورين يكون

$$u^2 = w^2(a^2 - b^2), \qquad u'^2 = w^2(a^2 - b'^2)$$

من العلاقتين نحصل على – بالطرح –

$$u'^2 - u^2 = w^2(b^2 - b'^2), \qquad Or \qquad \omega^2 = \frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2}}$$

ومن ثم يكون الزمن الدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b^2 - b'^2}{u'^2 - u^2}}$ وهو المطلوب

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = \mu - \mu\cos 2t$ حيث μ ثابت فاثبـــت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة واوجد زمنها الدوري ومركزها.

الحـــــــل

حيث أن موضع الجسيم المتحرك $x = \mu - \mu\cos 2t$ وبالتفاضل مرتين للحصـــول علـــى العجلة نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\sin 2t \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\underbrace{\mu\cos 2t}_{\mu-x} = 4(\mu - x) = -4(x-\mu)$$

وهي معادلـــة حركـــة توافقيـــة بســـيطة مركزهـــا النقطـــة $x = \mu$ وزمنـــها الـــدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ حيث $\omega = 2$.

(توضيح: بوضع $y = x - \mu$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -2^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = \mu$).

(على الدارس ايجاد سعة الذبذبة).

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة اثناء جزء من الحركة – مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الذبذبة – هي X_1, X_2, X_3 عند نهايات ثلاث ثوانٍ متتالية عيّن الزمن الدوري للحركة.

الحـــــــل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركة التوافقيـــة البســـيطة هـــي $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$ و سنفرض أن زمن وصول الجسيم إلى الموضع X_1 هو t وبالتالي زمن وصوله إلى الموضع X_2 هو $t+1$ وزمن وصوله إلى الموضع X_3 هو $t+2$ ويكون

$$\begin{aligned} X_1 &= a\sin(\omega t + \epsilon) \\ X_2 &= a\sin(\omega(t+1) + \epsilon) \\ X_3 &= a\sin(\omega(t+2) + \epsilon) \end{aligned}$$

من المعادلات السابقة – بجمع الأولى والثالثة – ينتج أن

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= a\ \ \sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon) \\ &= 2\underbrace{a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{X_2}\cos\omega \\ &= 2X_2\cos\omega \end{aligned}$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$\because\ X_1 + X_3 = 2X_2\cos\omega$$
$$\Rightarrow \cos\omega = \frac{X_1 + X_3}{2X_2}$$
$$\text{Or} \qquad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)$$

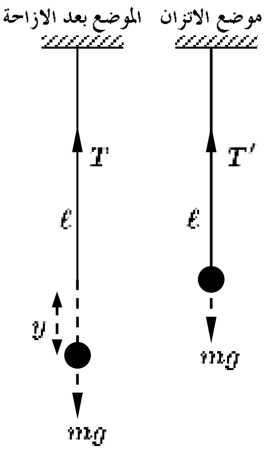
وحيث أن الزمن الدوري يُعطى بالعلاقة $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وبالتعويض عن قيمة ω يكون

$\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)}$ و يجب أن يتحقق الشرط $-2X_2 \le X_1 + X_3 \le 2X_2$

مثـــ ٦ ـــال

عُلق جسيم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زحزح الجسيم من موضع اتزانه مسافةً رأسيةً صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبةً في الثانية. فإذا كان طول الخيط عند موضع الاتزان هو ℓ . اوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الاستطالة مساويةً للطول الطبيعي هو $m(4\pi^2 n^2 \ell - g)$.

الحـــل



حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الاتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط (قبل تعليق الكتلة m) و أن T' هو قيمة الشد في الخيط عند الاتزان ، في حالة الاتزان تؤثر على الكتلة قوتا الوزن والشد في الخيط فقط ومن قانون هوك يكون

$$mg = T' = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \qquad (1)$$

إذا أعطينا الكتلة ازاحة y بعيدا عن موضع اتزانها في هذه الحالة فإن معادلة حركة الكتلة هي

$$m\ddot{y} = mg - T \qquad (2)$$

حيث T هو الشد في الخيط و يساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$ وبالتعويض عن قيمة الشد في المعادلة (2) و باستخدام المعادلة (1)

$$\therefore m\ddot{y} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$$
$$= \cancel{mg} - \underbrace{\frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0)}_{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0} y = -\frac{\lambda}{\ell_0} y$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{\lambda}{\ell_0 m} x = -w^2 x, \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$$

المعادلة الاخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 m}{\lambda}}$ و التردد يتعين من $\therefore n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$ $\nu = \frac{1}{\tau}$ و نجد من هذه العلاقة $2\pi n^{\ 2} m = \frac{\lambda}{\ell_0}$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$\cancel{m}g = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4\pi^2 n^2 \cancel{m}(\ell - \ell_0)$$

$$\therefore \ell - \ell_0 = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \text{ Or } \ell_0 = \ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$

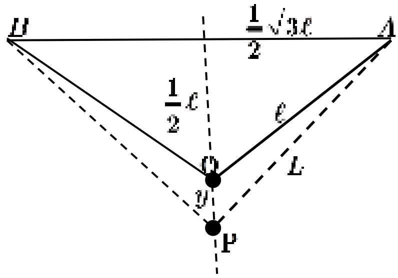
وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعيين قيمة الشد حينما تكون الاستطالة مساوية للطول الطبيعي من قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4\pi^2 n^2 m \ell_0 = 4\pi^2 n^2 m\left(\ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}\right) = m\ \ 4\pi^2 n^2 \ell - g$$

مثـــ ٦ ـــال

عُلق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن c مثبت طرفاه في نقطتين A, B يقعان في مستوى أفقي واحد. و في وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية 60^0 مع الرأسي و يكون طول كل منهما ℓ ، معامل مرونة الخيط يساوي mg . فإذا زحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي و ترك ليتذبذب. اوجد زمن الذبذبة.

الحـــــل



باعتبار أن λ هو معامل المرونة للخيط حيث $\lambda = mg$ و بفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط ومن ثم فعند حالة الاتزان يكون الشد من قانون هوك

$$mg = 2\lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \cos 60^0 = \lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

ولكن $\lambda = mg$ ومن ثم $\ell_0 = \frac{1}{2}\ell$

باعتبار أن y يمثل المسافة الرأسية و L هو هو طول الخيط بعد الازاحة كما بالشكل

ومن ثم بكتابة معادلة الحركة الرأسية للكتلة يكون

$$m\ddot{y} = mg - 2\lambda \frac{L - \ell_0}{\ell_0} \cos \angle \mathrm{OPA}$$

حيث P موضع الجسيم عند اللحظة t ، O هو موضع الاتزان وعند موضع عام حيث

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB} = L$ هو طول الخيط والآن

$$L^2 = \left(y + \frac{1}{2}\ell\right)^2 + \frac{3}{4}\ell^2 = \ell^2 + \ell y + y^2$$

ومن ثم

$$L = \ell\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)^{1/2} = \ell + \frac{1}{2}y$$

حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية فأعلى وايضاً

$$\begin{aligned}\cos \angle \mathrm{OPA} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{L} &= \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{\ell + \frac{1}{2}y} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{2\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)\end{aligned}$$

لأول قوة حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية

$$m\ddot{y} = mg - \frac{2\lambda\left(\ell + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\ell\right)}{\frac{1}{2}\ell} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

وهذا $$\ddot{y} = g - g\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

أو $$\ddot{y} = -\frac{5g}{2\ell}y$$

والاخيرة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $2\pi\sqrt{2\ell / 5g}$

■ Problems مســــــائل ■

<u>الحركة الدفعية وتصادم الاجسام</u>

<u>Impulse and Collision Motion</u>

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وسنتعرف بمشيئة الله تعالى في هذا الباب على نوع من أنواع الحركة تُسمى " الحركة الدفعية ".

■ <u>الدفع وقانون الحركة</u>

إذا بدأنا بقانون نيوتن الثاني للحركة معوضين عـــن العجلـــة بصـــورتها $a = \dfrac{dv}{dt}$ يكـــون $F = m\dfrac{dv}{dt}$ وبضرب طرفي هذه العلاقة في dt وتكاملها بين اللحظتين t_1, t_2 حيث سرعة الجسيم عندهما v_1, v_2 فإن

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv = mv\Big|_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1$$

يُعرف التكامل الزمني للقوة F بين اللحظتين t_1, t_2 والوارد بالطرف الأيسر للمعادلة السابقة ب دفع القوة خلال الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ ويرمز له بالرمز $\underline{I}$ اختصاراً لكلمة **Impulse** أي أن $\underline{I} = \int_{t_1}^{t_2} F dt$. ودفع أي قوة هو متجه ينطبق عليها نظراً لأن الزمن كمية قياسية.

■ <u>مبدأ ثبوت كمية الحركة</u>

ينص هذا المبدأ على أن كمية الحركة mv في اتجاه خط التصادم (في حالة الكرات يكون خط المركزين) ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ <u>قانون نيوتن التجريبي Experimental Newton's Law</u>

في اتجاه خط المركزين تخضع لقاعدة نيوتن التجريبية والتي تنص على أن الســـرعة النســـبية للجسمين بعد التصادم تساوي معكوس السرعة النسبية لهما قبل التصادم مضروباً في معامـــل الأرتداد (يُرمز له بالرمز e)أي أن

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

ويُطبق هذا القانون في اتجاه خط التصادم (خط المركزين) ، وتنحصر قيمة معامل الأرتداد e بين الصفر والواحد $0 \leq e \leq 1$ ويكون $e = 0$ إذا كان الجسمان عديمي المرونة ويساوي الواحد $e = 1$ إذا كان الجسمان تامي المرونة.

ايضاً حيث أن الكرتين ملساوتان فإنه لا توجد قوة عمودية على خط المركزين (خط التصادم) ومن ثم فإنه في حالة التصادم غير المباشر تظل مركبة السرعة لكل من الكرتين في اتجاه العمودي على خط المركزين ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ تصادم الاجسام

عند تصادم جسمان مرنان فإنه يحدث نتيجةً لهذا التصادم ردود فعل كبيرة جداً تؤثر على كلا الجسمين لفترة صغيرة ثم يميل الجسمان بعدها للعودة إلى حركتهما ، تُسمى ردود الأفعال هذه بردود الأفعال الدفعية.

سنعتبر في دراستنا تصادم الاجسام الملساء بحيث أننا سنهمل جميع قوى الاحتكاك ويبقى فقط ردود الأفعال العمودية على الأسطح المشتركة و لسهولة الدراسة سنعتبر تصادم اجسام على هيئة كرات مرنة ملساء كما سنهمل كلا من قوى الأوزان لصغر دفوعها و التغير في مواضع الكرات أثناء فترة التصادم باعتبار أن هذه الفترة الزمنية للتصادم صغيرة جداً ، أي أن التصادم سيغير من سرعات الكرات ولن يغير من مواضعها أثناء فترة حدوثة. وفي دراستنا سوف نعتبر نوعين من التصادم (تصادم مرن وتصادم غير مرن) – التصادم غير المرن تم دراسته سابقاً – والتصادم المرن ينقسم إلى تصادم مباشر وتصادم غير مباشر.

■ التصادم المباشر وغير المباشر (مائل)

نعتبر تصادم كرتين ملساوتين ، الخط الواصل بين المركزين الهندسيين للكرتين يُسمى بخط المركزين أو خط التصادم ، و إذا كان التصادم بحيث كانت السرعتان قبل التصادم كلاهما في اتجاه خط التصادم للكرتين سُميّ هذا التصادم بـ "التصادم المباشر" أما في حالة التصادم غير المباشر يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كليهما مائلاً على خط التصادم بزاوية معينة – نلاحظ أن التصادم المباشر هو حالة خاصة من التصادم غير المباشر فيها زاوية الميل صفراً.

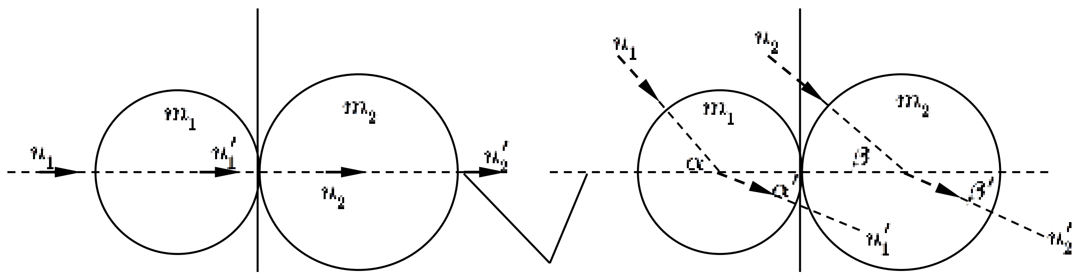
و في التصادم المرن سواءً كان التصادم مباشراً أو غير مباشر يُطبق قانون مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية و قانون نيوتن التجريبي في اتجاه خط التصادم. ويأخذ مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في حالة التصادم المباشر الصورة الرياضية

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2'$$

أما في حالة التصادم غير المباشر يكون

$$m_1u_1\cos\alpha + m_2u_2\cos\beta = m_1u_1'\cos\alpha' + m_2u_2'\cos\beta'$$

كما أن سرعة أي من الكرتين في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة قبل وبعد التصادم و من ثم فإن الكرة الساكنة أو الكرة المتحركة في اتجاه خط التصادم فإن حركتها بعد التصادم إذا تحركت تكون في اتجاه خط التصادم.



خط التصادم (خط المركزين)

تصادم مباشر

تصادم غير مباشر (مائل)

■ تصادم كرة بمستوى ثابت

نعتبر كرة ملساء كتلتها m اصطدمت بمستوى ثابت أملس وأن سرعة الكرة قبل التصـــادم مباشرة هي u وأن سرعتها بعد التصادم هي u' كما بالشكل و نظراً لأن كل من الكـــرة والمستوى أملسين فإن سرعة الكرة في اتجاه المستوى (العمودي على خط التصادم) لا تـــتغير بالتصادم أي أن

$$u\sin\alpha = u'\sin\theta \qquad (1)$$

ومن قانون نيوتن التجريبي

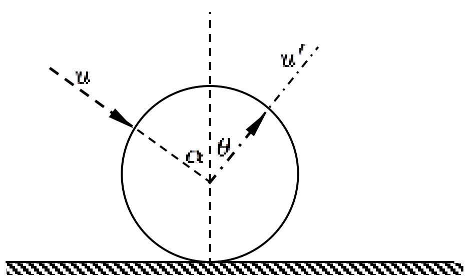
$$u'\cos\theta = eu\cos\alpha$$

وهاتان العلاقتان كافيتان لتعيين سرعة الكرة بعد التصادم إذا عُلمت سرعة الكرة قبل التصادم.

ومن العلاقة $u'\cos\theta = eu\cos\alpha$ نجد أنه إذا كان $e=0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه في حالة تصادم كرة غير مرنة فإنها لا ترتد وإنما تتحرك على المستوى وبسرعة مقدارها $u\sin\alpha$.
أما إذا كان $e=1$ فإنه يكون $u'\cos\theta = u\cos\alpha$ ومن هذه المعادلة والمعادلة (1) نحصل على

$$\tan\theta = \tan\alpha, \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

أي أن زاوية السقوط تساوي زاوية الأرتداد ونستنتج ايضاً أن $u = u'$ أي ان سرعة الكرة بعد التصادم تساوي في المقدار سرعتها قبل التصادم



■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

كرة تتحرك بسرعة u اصطدمت تصادماً مباشراً بكرة أخرى مساوية لها في الكتلة تتحـــرك بسرعة u' في الاتجاه المعاكس إذا توقفت الكرة ذات السرعة u بعد التصـــادم فاثبـــت أن $\frac{u}{u'}=\frac{1+e}{1-e}$ حيث e هو معامل الارتداد.

الحـــــــل

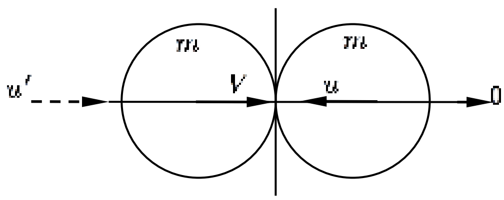
نفترض أن سرعة الكرة التي تتحرك بسرعة u' بعد التصادم هي V وأن m هي كتلة كل من الكرتين و حيث أن الكرة ذات السرعة u توقفت بعد التصادم فإنه من مبدأ ثبوت كمية الحركة

$$m\times 0+m\times V=mu+m(-u') \quad \text{Or} \quad V=u-u'$$

ومن قانون نيوتن التجريبي

$$0-V=-e(u-(-u')) \qquad \text{Or} \quad V=e(u+u')$$
$$\therefore u-u'=V=e(u+v) \quad \text{Or} \quad (1-e)u=(1+e)u'$$

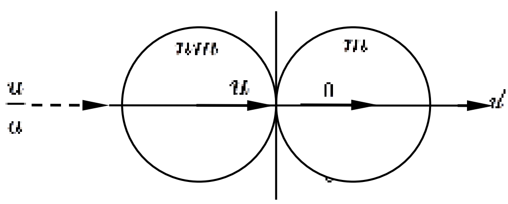
ولهذا فإن $\frac{u}{u'}=\frac{1+e}{1-e}$



مثـــ ٢ ـــال

اصطدمت كرة كتلتها nm وسرعتها $\frac{u}{a}$ تصادماً مباشراً بكرة أخرى كتلتها m وسرعتها u وكانت السرعتان في نفس الاتجاه. إذا وقفت الكرة ذات الكتلة m بعد التصادم فاوجد معامل الارتداد.

الحـــــــل



نفرض أن الكرة ذات الكتلة nm تحركت بعد التصادم بسرعة V (في اتجاه خط التصادم حيث أن التصادم مباشر) و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$m(0) + nmV = mu + nm\left(\frac{u}{a}\right) \quad \Rightarrow nV = \left(1 + \frac{n}{a}\right)u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - 0 = -e\left(\frac{u}{a} - u\right) \quad \Rightarrow V = eu\left(1 - \frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

ومن المعادلتين (1) ، (2)

$$ne\cancel{u}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left(1 + \frac{n}{a}\right)\cancel{u} \quad \Rightarrow e = \frac{a+n}{n(a-1)}$$

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك كرة ملساء بسرعة $20\ \mathrm{ft\,sec^{-1}}$ اصطدمت بمستوى افقي أملس ثابت و في اتجاه يصنع زاوية 60^0 مع المستوى فإذا كان معامل الارتداد يساوي $e = 0.5$ فأوجد سرعة الكـــرة و اتجاهها بعد التصادم ثم أوجد مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة في اتجاه المستوى لا تتغير (في الاتجاه العمودي على خط التصـــادم) أي أن

$$u\sin\theta = 20\sin 30 \quad \Rightarrow u\sin\theta = 10$$

من قانون نيوتن التجريبي

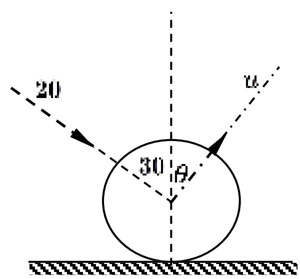
$$u\cos\theta = -e(-20\cos 30) \quad \text{Or} \quad u\cos\theta = 10\sqrt{3}(0.5) = 5\sqrt{3}$$

من المعادلتين بالتربيع والجمع نحصل على

$$u^2 = 100 + 75 = 175 \quad \Rightarrow u = \sqrt{175}$$

وبقسمة المعادلتين

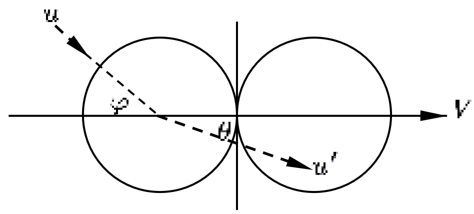
$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



مثـــ ٤ ـــال

اصطدمت كرة بأخرى ساكنة مساوية لها في الكتلة تصادماً مائلاً. إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع مع خط التصادم زاوية φ. و كان e هومعامل الارتداد فاثبت ان اتجاه هذه الكرة بعد التصادم يصنع مع خط التصادم زاوية تتعين من $\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$.

الحـــــــل



من الشكل و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos\theta + mV = mu\cos\varphi + 0 \quad \Rightarrow u'\cos\theta + V = u\cos\varphi \tag{1}$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$u'\cos\theta - V = -e(u\cos\varphi - 0) \tag{2}$$

بجمع المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore 2u'\cos\theta = (1-e)u\cos\varphi \tag{3}$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u\sin\varphi \tag{4}$$

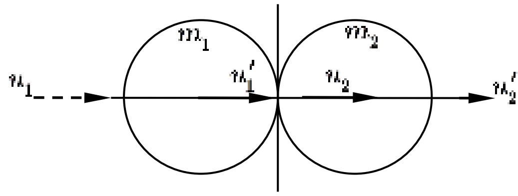
و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4)

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\tan\varphi}{1-e} \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\tan\varphi}{1-e} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$$

مثـــ ٥ ـــال

اثبـــت أنـــه في حالـــة التصـــادم المباشـــر يكـــون الفقـــد في طاقـــة الحركـــة مســـاوياً $\dfrac{(1-e^2)m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2$ حيث m_1, m_2 تمثل كتلتا الكرتين ، u_1, u_2 سرعتيهما قبل التصادم ، e معامل الارتداد.

الحـــــــل



من الشكل ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط التصادم

$$m_1u_1' + m_2u_2' = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (1)$$

و ذلك بفرض أن سرعتي الكرتان بعد التصادم هما u_1', u_2' و من قانون نيوتن التجريبي

$$u_1' - u_2' = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

الآن بتربيع المعادلة (1) ، (2) وضرب المعادلة (2) في m_1m_2 ثم الجمع نحصل على

$$(m_1u_1' + m_2u_2')^2 + m_1m_2(u_1' - u_2')^2 = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

باضافة وطرح المقدار $m_1m_2(u_1 - u_2)^2$ إلى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة نجد أن

$$(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 \pm m_1m_2(u_1 - u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

أي أن

$$(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) = (m_1 + m_2)(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ نحصل على

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

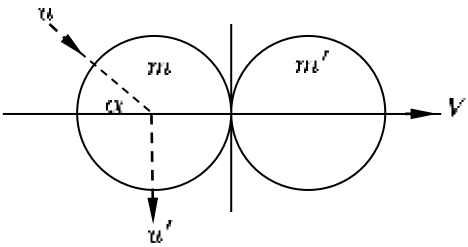
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2\right) = \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

من هذه العلاقة يتضح أن مجموع طاقتي الحركة بعد التصادم أقل من مجموع طاقتي حركة الكرتين قبل التصادم بمقدار $\frac{m_1 m_2 \;\; 1-e^2 \;\; (u_1-u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$ وهو ما يمثل مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

مثـــ ٦ ـــال

اصطدمت كرة ملساء بأخرى ساكنة. إذا كان اتجاها الحركة بعد التصادم متعامدين وكانـــت الكرتان تامتي المرونة فاثبت أن كتلتيهما متساويتان.

الحـــــــل



بفرض أن الكرة الساكنة كتلتها m' وحيث أن هذه الكرة كانت ساكنة فإن حركتها بعد التصادم بكون في اتجاه خط التصادم بسرعة ولتكن V وحيث أن اتجاها الحركة بعد التصادم متعامد فتكون السرعة u' عمودية على خط التصادم من الشكل وباعتبار أن كتلة الكرة الثانية m وسرعتها u في اتجاه يصنع زاوية α مع خط التصادم وأن سرعتها بعد التصادم u' و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos 90 + m'V = mu\cos\alpha + 0 \quad \Rightarrow m'V = mu\cos\alpha \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

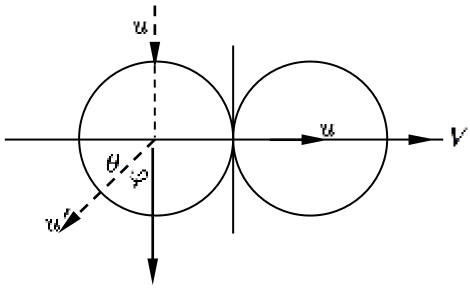
$$u'\cos 90 - V = -e(u\cos\alpha - 0) \quad \Rightarrow V = u\cos\alpha \quad (e=1) \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (2) يكون $\therefore m = m'$

مثـــ ٧ ـــال

تصطدم كرتان متساويتان وتتحركان بنفس السرعة و في اتجاهين متعامدين. إذا كـــان خـــط المركزين لحظة التصادم عمودياً على اتجاه الكرة الثانية وكان معامل الارتـــداد e فاثبـــت أن الكرة الثانية تنحرف بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ عن اتجاهها الأصلي.

الحـــــــل



من الشكل – مع مراعاة اتجاه السرعات – و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mV - mu'\cos\theta = mu\cos 90 + mu \quad \Rightarrow V - u'\cos\theta = u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - (-u'\cos\theta) = -e(u - u\cos 90) \quad \Rightarrow V + u'\cos\theta = -eu \qquad (2)$$

بطرح المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore\ 2u'\cos\theta = (1+e)u \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u \qquad (4)$$

و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4) $\tan\theta = \frac{2}{1+e}$ ولحساب انحراف السرعة عن اتجاهها الأصلي حيث الانحراف عن الاتجاه الأصلي هو $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ و من ثم

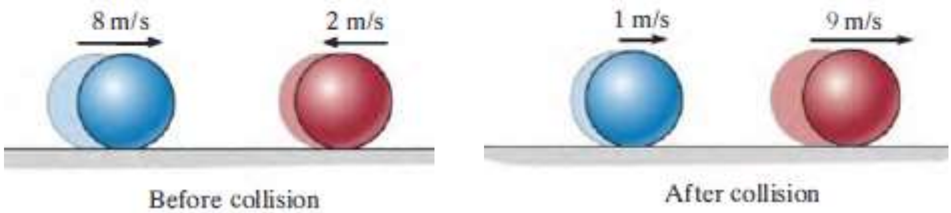
$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1+e}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{1+e}{2} \text{ Or } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

■ مســــــائل Problems ■

١– تتحرك كرة كتلتها الوحدة بسرعة $8\ \mathrm{ft\,sec^{-1}}$ عندما صدمت مستوى أفقي أملس ثابت في اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الرأسي. اثبت أنه إذا كان معامل الارتداد يســـاوي 0.5 فـــإن مقدار الفقد في طاقة الحركة يساوي 12 وحدة طاقة.

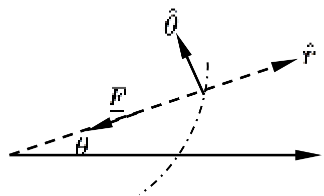
٢- عيّن معامل الارتداد بين الكرتين المتساويتين الكتلة ١ ، ٢ حيث وضّحت السرعات قبل وبعد التصادم على الرسم.



الحركـة المداريـة

Orbital Motion

سنعالج في هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى. كثيراً ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين O يسمى بمركز القوة. كما تُسمى القوة في هذه الحالة بالقوة المركزية – حيث تنعدم المركبة العمودية لقوة المجال (طاردة أو جاذبة) ومن ثم تنعـــدم العجلة العمودية لحركة الجسيم دائماً و بتطبيق هذا الشرط نجد أنه من الاحداثيات القطبية



$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0$$
$$\therefore\ r^2\dot{\theta} = h\ \ (\text{const.})$$

ويسمى المسار الذي ترسمه القوة بالمسار المركزي.

■ المعادلة التفاضلية للمسار المركزي Differential Equation of Orbital Path

معادلة الحركة في الاتجاهين r,θ هما

$$m\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ = -F \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تُعطي $r^2\dot{\theta} = h\ \ (\text{const.})$

حيث h مقدار ثابت. المعادلتان (1) و (2) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب ومـــن هاتين المعادلتين بحذف $\dot{\theta}$ نحصل على

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{F}{m} \qquad (3)$$

ويمكن اجراء تكامل للمعادلة (3) باستخدام التعويض $\left(r = \dfrac{1}{u}\right)$ وبحذف t منها

$$\because r = \frac{1}{u} \qquad \therefore \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{dr/du}\frac{du}{d\theta}\underbrace{\frac{h}{r^2}}_{d\theta/dt} = -h\frac{du}{d\theta},$$

$$\therefore \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$
$$= -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2},$$

وبتعويض عن هذه النتائج في المعادلة نحصل على

$$-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{F}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \tag{4}$$

هذه المعادلة تُسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي وهي تُستخدم لمعرفة قانون القوة المركزي إذا عُلمت معادلة المسار و أيضاً إذا عُلمت القوة المركزية F فإنه يمكن حل المعادلة التفاضلية وايجاد معادلة المسار.

و كحالة خاصة حينما تكون الحركة في مجال قوة تتبع قانون التربيع العكسي $F = \dfrac{\mu}{r^2}$ فمن المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu \cancel{u^2}}{mh^2\cancel{u^2}} = \frac{1}{\mu^\star}, \qquad \mu^\star = \frac{mh^2}{\mu}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها العام على الصورة

$$u = \frac{1}{\mu^\star}\ \ 1 + \epsilon\cos(\theta - \alpha)$$

حيث ϵ, α ثابتي التكامل والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها

$$r = \frac{\mu^\star}{1 + \epsilon\cos(\theta - \alpha)}$$

وهذه المعادلة تُمثل قطع مخروط ويكون قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً حسبما تكون $1 > \epsilon$ أو $\epsilon = 1$ أو $1 < \epsilon$ على الترتيب.

■ قانون السرعة Velocity Law

كما نعلم أن مركبتي السرعة في الاتجاهين r,θ هما $\dot{r},\ r\dot{\theta}$ ومن ثم فإن مقدار سرعة الجسيم v تتعين من $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ولكن $\dot{r} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ ومنها

$$v^2 = \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2h^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \quad (5)$$

وهذه المعادلة تُعطي مقدار سرعة الجسيم عند أي موضع θ على المسار المركزي.

■ قوانين كبلر Kepler's Laws

من أهم تطبيقات الحركة بالاحداثيات القطبية هو دراسة حركة الكواكب. و لقد قام العالم يوهان كبلر (١٥٧١–١٦٣٠) و هو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية والمعرفة باسمه:

القانون الأول: تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

القانون الثاني: يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما أقترب من الشمس.

القانون الثالث: يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدوري ومعامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية.

هذه هي نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالي ٦٠ عاماً ليثبت على أساسها قانون الجذب العام والذي يُعتبر من أكبر كشوف الانسان

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية

كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب (الطرد) O هي عزم كمية الحركة الخطية حول O وتساوي -تذكر أن $v \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$ -

$$m\dot{r}(0) + mr\dot{\theta}(r) = mr^2\dot{\theta} = mh = \text{constant}$$

أي أن كمية الحركة الزاوية للجسيم حول المركز تظل ثابتة أثناء الحركة وهو ما يُسمى بمبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية.

■ السرعة المساحية **Area Velocity**

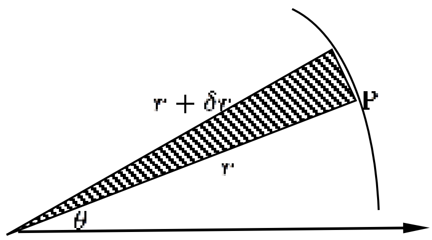
بفرض أن $\mathrm{P}(r,\theta)$ هو موضع الكوكب عند اللحظة الزمنية t وأنه بعد زمـــن صـــغير δt يكون عند الموضع $\mathrm{Q}(r+\delta r,\theta+\delta\theta)$. المساحة δA المقطوعة بمتجه الموضع خلال الفترة الزمنية δt تساوي تقريباً مساحة المثلث OPQ – كما بالشكل – أي أن

$$\delta A = \frac{1}{2} r(r+\delta r)\sin\delta\theta \cong \frac{1}{2} r^2 \delta\theta$$

السرعة المساحية $\dot{A}$ هي المساحة التي يرسمها OP في وحدة الزمن و تتعين من

$$\begin{aligned}
\dot{A} = \frac{dA}{dt} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta A}{\delta t} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}r^2\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{1}{2}r^2\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t} \\
&= \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{h} = \frac{1}{2}h, \qquad \dot{A} = \frac{1}{2}h
\end{aligned}$$

أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة في حالة المسار المركزي.



■ القُبا **Apse**

وتُعرف بأنها نقاط المسار المركزي والتي عندها يكون البعد عن مركز القوة نهاية عظمـــى أو صغرى. هذه الأبعاد تُسمى أبعاد القُبا أي عنـــد نقـــط القُبـــا يكـــون $\dot{r}$ أو $\frac{du}{d\theta}$ أو $\frac{dr}{d\theta}$ وهذا يعني أنه عند القُبا تكون حركة الكوكب عمودية على متجه الموضع.

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثـــ ١ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^2 = a^2\cos 2\theta$. اثبـــت أن الســـرعة تتناسب عكسياً مع r^3 وأن القوة تتناسب عكسياً مع r^7 .

الحـــــل

باختيار $r = \frac{1}{u}$ فيكون $\frac{1}{u^2} = a^2\cos 2\theta$

بالتفاضل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$-\cancel{2}\frac{1}{u^3}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{2}a^2\sin 2\theta \;\Rightarrow\; \frac{du}{d\theta} = a^2u^3\sin 2\theta$$

ولحساب قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = h^2\left(\;a^2u^3\sin 2\theta\;\;^2 + u^2\right)$$

$$= h^2\;\;a^4u^6\sin^2 2\theta + u^2$$

$$= h^2\;\;a^4(1-\cos^2 2\theta)u^6 + u^2\;\; = h^2\;\;a^4u^6 - u^2\; + u^2\;\; = h^2a^4u^6$$

$$\therefore\; v^2 = h^2a^4u^6 \;\Rightarrow\; v = ha^2u^3 = \frac{ha^2}{r^3} \qquad \text{that is } v \propto \frac{1}{r^3}$$

بالتفاضل مرةً ثانية لـــ $\frac{du}{d\theta}$ يكون

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2a^2u^3\cos 2\theta + 3a^2u^2\frac{du}{d\theta}\sin 2\theta = 2u^3\underbrace{a^2\cos 2\theta}_{1/u^2} + 3a^2u^2\;\;\underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^2u^3\sin 2\theta}\;\;\sin 2\theta$$

$$\therefore\; \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2u + 3a^4u^5\sin^2 2\theta = 2u + 3a^4u^5\;\;1-\cos^2 2\theta$$

$$= 2u + 3a^4u^5\; - 3a^4u^5\cos^2 2\theta$$

$$= 2u + 3a^4u^5\; - 3u = 3a^4u^5\; - u$$

$$\therefore\; \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^5$$

$$\because\; F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore\; F = mh^2u^2\;\;3a^4u^5\;\; = 3ma^4h^2u^7 = \frac{3ma^4h^2}{r^7} \qquad \text{that is } F \propto \frac{1}{r^7}$$

مثـــ ٢ ـــال

إذا كان المسار المركزي لجسيم هو قطع مخروطي فاثبت أن القوة تخضـــع لقـــانون التربيـــع العكسي.

الحـــــــــل

معادلة المسار هي $r=\dfrac{\ell}{1+e\cos\theta}$ حيث e هو الاختلاف المركزي ، ℓ هو نصـــف وتره البؤري العمودي

$$\because\ u=\frac{1}{r}\quad\Rightarrow u=\frac{1}{\ell}+\frac{e}{\ell}\cos\theta$$
$$\therefore\ \frac{du}{d\theta}=-\frac{e}{\ell}\sin\theta,\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2}=-\frac{e}{\ell}\cos\theta=\frac{1}{\ell}-u$$

ومن ثم فإن قانون القوة يتعين من

$$\because\ F=mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)$$
$$=mh^2u^2\left(\frac{1}{\ell}-u+u\right)=\frac{mh^2}{\ell r^2}\qquad \text{i.e.}\quad F\propto\frac{1}{r^2}$$

مثـــ ٣ ـــال

اوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو القطب حتى يتحرك جسيم كتلته الوحدة على المسار $r=a(1-\cos\theta)$. وإذا كان مقدار كل من سرعة الجسيم والقوة عند القُبا همـــا P, V فاثبت أن $3V^2=4aP$.

الحـــــــــل

حيث أن $r=a(1-\cos\theta)$ وباستخدام الفرضية $r=\dfrac{1}{u}$ نحصل على

$$\frac{1}{u}=a(1-\cos\theta)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}=a\sin\theta\ \Rightarrow\frac{du}{d\theta}=-au^2\sin\theta$$

بالتفاضل مرةً أخرى بالنسبة إلى θ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -2au\frac{du}{d\theta}\sin\theta - au^2\cos\theta = 2a^2u^3\sin^2\theta - au^2\cos\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2 \quad \cos\theta - 2au\sin^2\theta \quad = -au^2 \quad \cos\theta - 2au \quad 1-\cos^2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2 \quad \cos\theta + 2au \quad 1-\cos^2\theta$$

$$= -au^2\left(\cos\theta - 2u\underbrace{a \quad 1-\cos\theta}_{1/u}(1+\cos\theta)\right)$$

$$= -au^2 \quad \cos\theta - 2(1+\cos\theta)$$

$$= -au^2(-2-\cos\theta) = -au^2(-3+\underbrace{1-\cos\theta}_{1/au})$$

$$= 3au^2 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3au^2$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \quad 3au^2 \quad = 3mah^2u^4 \quad = \frac{3mah^2}{r^4}$$

عند نقاط القُبا يكون

$$\dot{r} = 0 \text{ Or } \frac{du}{d\theta} = 0 \qquad \Rightarrow -au^2\sin\theta = 0 \qquad \therefore \sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\because h = r^2\dot{\theta} = \underbrace{(r\dot{\theta})}_{V}r = 2aV \quad \text{Note } r\Big|_{\theta=\pi} = a(1-\cos\pi) = 2a$$

ومن قانون القوة التى حصلنا عليها

$$\because F = \frac{3ah^2}{r^4} \quad \Rightarrow F\Big|_{\theta=\pi} = P = \frac{3a(2aV)^2}{(2a)^4} \quad \Rightarrow \quad 3V^2 = 4aP$$

مثـــ ٤ ـــال

جسيم كتلته واحد جرام يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية تتناسب عكسياً مع مكعب r بحيث أن القوة تساوي واحد داين عند $r = 1$ cm. أوجد معادلة المسار علماً بأنـــه عنـــد $\theta = 0$ فإن $r = 2$ cm والسرعة تساوي $\frac{1}{2}\,\text{cm}\,\text{sec}^{-1}$ واتجاهها يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الثابت.

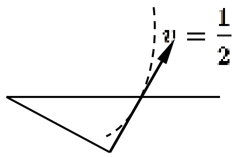
الحــــــل

حيث أن قوة الجذب تتناسب مع مكعب r فإن $F = \frac{\mu}{r^3}$ حيث μ ثابت التناسب ويمكن حساب قيمته من الشـــرط $F = 1$ عنـــدما $r = 1$ ويكـــون ثابـــت التناســـب $\mu = 1$ أي أن $F = \frac{1}{r^3}$ ومن المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u^3 \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u \quad \text{Or} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{1}{h^2}\right)u = 0 \quad (1)$$

نوجد الثابت h باستخدام مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب ويكون

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}(2\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على $\frac{d^2u}{d\theta^2} - u = 0$

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\theta}\right) - u = 0 \quad \text{Or} \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)d\left(\frac{du}{d\theta}\right) - udu = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل ولحساب c_1 يلزمنا حساب $\frac{du}{d\theta}$ عندما $r = 2$ والتي يمكن حسابها من قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$$

وحيث أن $v = \frac{1}{2}$ عندما $u = \frac{1}{2}$ فإن

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \left.\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right|_{r=2} = \frac{1}{4}$$

أي أن عند $u = \frac{1}{2}$ فإن $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{4}$ وبالتالي قيمة ثابت التكامل $c_1 = 0$ من المعادلة (2)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -u \qquad \text{Or} \qquad \frac{du}{u} = -d\theta$$

وبعد اجراء فصل المتغيرات ، الآن بالتكامل

$\ln u = -\theta + c_2$

ومن الشرط $u = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 0$ نجد أن $c_2 = -\ln 2$ Or $c_2 = \ln\frac{1}{2}$

$\ln u = -\theta - \ln 2 \quad \Rightarrow \ln r = \theta + \ln 2 \quad$ Or $\quad r = 2e^{\theta}$

وهي معادلة المسار.

مثـــال ٥

تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مركزية جاذبة F وكانت سرعة النقطة المادية $v = \frac{\ell}{r}$ حيث ℓ ثابت. فاثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r وأن معادلة المســـار الذي تتحرك عليه النقطة المادية هي $r = e^{a\theta}$ حيـــث $a = \frac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2 - h^2}$ إذا علمـــت أن $r = 1$ عندما $\theta = 0$.

الحـــــــل

من قانون السرعة حيث $v^2 = \frac{\ell^2}{r^2} = \ell^2 u^2$

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2 u^2 \qquad (1)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$2h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\frac{\cancel{du}}{\cancel{d\theta}} = 2\ell^2 u\frac{\cancel{du}}{\cancel{d\theta}} \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \ell^2 u$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \qquad \Rightarrow F = mh^2\ell^2u^3 = \frac{mh^2\ell^2}{r^3}$$

ولايجاد معادلة المسار من المعادلة (1)

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2u^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{h^2}u^2$$

Or $$\frac{du}{d\theta} = -\underbrace{\frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{h}}_{a}u = -au$$

واعتبرنا الاشارة سالبة لأن القوة جاذبة أى نحو المركز. بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{du}{u} = -ad\theta \quad \Rightarrow \ln u = -a\theta + c$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $r = 1$ عندما $\theta = 0$ ومنها $c = 0$

$$\ln u = -a\theta \qquad \Rightarrow \ln\frac{1}{r} = -a\theta \quad \text{Or} \quad \ln r = a\theta \quad \text{Or} \quad r = e^{a\theta}$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت النسبة بين اكبر سرعة زاوية يدور بها كوكب حول الشمس واقل ســـرعة زاويـــة تساوي γ^2 فاثبت أن الاختلاف المركزي لمسار هذا الكوكب هو $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

الحـــــــــل

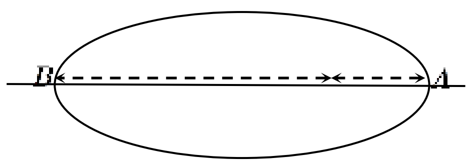
حسب قوانين كبلر فإن الكوكب يتحرك حول الشمس في مسار على شكل قطع نـــاقص و حيث أن

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \therefore \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

واضح أن السرعة الزاوية تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن الشمس r ومن ثم فإن اكـــبر سرعة زاوية تحدث عندما تكـــون r اصـــغر مـــا يمكـــن ، اي عنـــدما $r = r_1$ حيـــث $r_1 = OA = a - ae$ واصـــغر ســـرعة زاويـــة تحـــدث عنـــدما $r = r_2$ حيـــث $r_2 = OB = a + ae$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B} = \gamma^2 = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1+e}{1-e} \qquad \text{Or} \qquad e = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$



مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^n = a^n \cos n\theta$. اثبـــت أن القـــوة تتناسب عكسياً مع r^{2n+3}.

الحـــــــل

حيث أن $r^n = a^n \cos n\theta$ وباستخدام $r = \dfrac{1}{u}$ نجد أن

$$\frac{1}{u^n} = a^n \cos n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى المتغير θ

$$-\cancel{n}\,\frac{1}{u^{n+1}}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{n}a^n \sin n\theta \;\;\Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^n u^{n+1} \sin n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ مرة أخرى

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= na^n u^{n+1} \cos n\theta + (n+1)a^n u^n \frac{du}{d\theta} \sin n\theta \\ &= nu^{n+1}\underbrace{a^n \cos n\theta}_{1/u^n} + (n+1)a^n u^n \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^n u^{n+1}\sin n\theta} \sin n\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}\sin^2 n\theta = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}(1-\cos^2 n\theta) \\ &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u^{2n+1}\underbrace{a^{2n}\cos^2 n\theta}_{1/u^{2n}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1}$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \;\; (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \;\; = (n+1)ma^{2n}h^2u^{2n+3} \; = \frac{3ma^{2n}h^2}{r^{2n+3}}$$

وهذا يعني أن $F \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$ (على الدراس استنتاج قانون السرعة)

■ مســــــائل Problems ■