جزء الديناميكا

الفرقة الاولى

شعبة طبيعة وكيمياء

تمهيد

أفضلُ ما أبدأ به هو حمدُ اللهِ بما هو أهله وأصلي وأسلم على من لانبي بعده سيدنا محمد عليه وعلى آله وصحبه.

لا شك أن هناك عدداً لا يُعد و لا يُحصى من الاجسام الي تتحرك على الأرض بينما الأرض بدورها تدور حول محورها متنقلةٍ في الفضاء في مدارها حول الشمس كما أن الشمس و معها مجموعة الكواكب تنتقل في الفضاء بين عدد هائل من النجوم المتحركة في الفضاء " وكـــل في فلك يسبحون"...حتى أننا لو تأملنا أدق جزء من المادة – الذرة – لوجدناها تموج بالحركـــة شأنها شأن المجموعة الشمسية ... وهكذا.

تنشأ حركة المادة بتغير المكان و الزمان ولذا لا يمكن فصل المكان و الزمان عن المادة المتحركة ، و لذلك عندما يغير جسم موضعه بالنسبة لغيره من الاجسام نقول أن الجســم في حالــة حركةو يسمس هذا التغير النسبي في موضع الجسم بـــــ "الحركة الميكانيكية" ، كما يسمى العلم المختص بقوانين الحركة بـــــ " لم الميكانيكا".

فالميكانيكا علم يبحث في الحركة النسبية للاجسام مستقصياً مقوماتها وشـــتى صـــورها و لا تقتصر أهمية هذا العلم على النواحي الطبيعية و الفلسفية بل تتعدى ذلك إلى كونهـــا أحـــد الأركان الاساسية في بناء وتطوير العلوم الهندسية.

لقد أنفقت البشرية آلاف السنين على تعليلات علمية لبعض الظواهر الميكانيكية. غير أن ما نسميه "الميكانيكا الكلاسيكية" يرجع إلى عَلَمين من أعلام القرن السابع عشر همـــا العـــالم جاليليو جاليلي (١٥٦٤–١٦٤٢) "Galileo Galilei" والذي اكتشـــف مبـــدأ القصـــور ، والسير اسحاق نيوتن)١٦٤٢–١٧٢٧("Isaac Newton" وقد شاهد القرن الثامن عشـــر تقدماً كبيراً في ميكانيكا السوائل على يد دانيال برنـــولي "Daniel Bernoulli" (١٧٠٠–١٧٨٢)، كما حدثت طفرة أخرى على يد العالم جوزيف لـــويس كونـــت دي لاجـــرانج (١٧٦٣–١٨١٣) Joseph-Louis Lagrange فيما يسمى بـــ الميكانيكـــا التحليليـــة. ثم خطت الميكانيكا خطوةً أخرى في بداية القرن العشرين على يد العالم ألبرت أينشتين " Albert

Einstein" (١٨٧٩–١٩٥٥) بإدخال مفهوم النسبية. كما نشط البحث في النصف الأول من من القرن العشرين فيما يسمى بـ ميكانيكا الكم و الميكانيكا الموجية و ذلك لتفسير بعض الظواهر الطبيعية التي عجزت الميكانيكا الكلاسيكية عن تفسيرها.

هذا وينقسم علم الميكانيكا بوجه عام إلى فرعين أساسيين هما الاستاتيكا والديناميكا.

وتبحث الاستاتيكا في اتزان الاجسام تحت تأثير القوى ،أما الديناميكا فتبحث في وصف الحركة ودراسة مقوماها وتنقسم بدورها إلى الكينماتيكا والكينتيكا

فالكينماتيكا هو علم وصف الحركة وصفاً مجرداً دون التعرض للقوى المسببة لهذه الحركة والكينتيكا يبحث في تكييف القوى للحركة.

مرةً أخرى تنقسم الميكانيكا من ناحية نوع المادة موضوع الدراسة إلى ميكانيكا الجسيمات والاجسام المتماسكة ، ميكانيكا المرونة واللدونة و ميكانيكا الموائع.

تنقسم ميكانيكا الموائع إلى ميكانيكا السوائل وديناميكا الغازات.

وعلى أية حال فإن دراسة كينماتيكا أو كينتيكا الجسيم المادي يمكن أن تتم في واحد من ثلاثة فضاءات – فضاء أحادي البعد (الحركة في خط مستقيم) ، فضاء ثنائي البعد (الحركة في مستوى) و فضاء ثلاثي الأبعاد (الحركة في الفراغ). وأخيراً فإن دراسة الحركة تتطلب اختيار نوع مناسب من الاحداثيات التي تتوافق مع نوع الحركة.

إن كان من توفيق فمن الله وإن كان من خطأ فمن نفسى ومن الشيطان عصمنا الله وإياكم

كينماتيكا الجســـــــيم

Kinematics of a Particle

لدراسة الظواهر الطبيعية للحركة بطريقة علمية يتعين علينا أن نتخذ صوراً ذهنية عن الصفات الميكانيكية للاجسام المتحركة دون غيرها من الصفات قليلة الأهمية في دراستنا للحركة. وعلى ذلك بُنيت التعاريف الأساسية و نُورد أهمها فيما يلي:

الجسيم: هو جزء معين من المادة و تعرف فيما يلي أنواع الاجسام

■ **الجسيم أو النقطة المادية Particle or Mass Point**

هو جزء من المادة و يشغل حيزاً صغيراً في الفراغ و يسمى النقطة المادية و نعتبر الجسيم إذا كانت صفات الجسيم من حيث الشكل أو الحجم غير ذات موضوع في دراستنا.

■ **الجسم المتماسك Rigid Body**

و هو جزء معين من المادة يظل حجمه و شكله بدون تغيّر مهما كانت القوى المــؤثرة عليـــه حيث تبقى المسافة بين أي نقطتين من نقاطه بدون تغيير أي أن الجسم المعنيّ بالدراسة يُعتـــبر متماسكاً إذا كان ما يعتريه من تغيرات في الشكل أو الحجم لا أهمية لا في الدراسة.

■ **الجسم المرن Elastic Body**

هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية بفعل القوى المؤثرة عليـــه غـــير أنـــه يســـترجع صورتهاالأصلية بمجرد زوال هذه القوى.

■ **الجسم اللدن Plastic Body**

و هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية غير أنها –التغيرات– غير مسترجعة.

■ **الاطار الانتسابي (الفراغ الأقليدي) Reference Frame**

و هو فراغ ثلاثي الأبعاد – الطول و العرض و الارتفاع – ويفرض فيه ثبات المسافاتمن نقطة إلى أخرى و عدم تغيرها بوجود المادة أو حدوث حركة فيه. و تقاس المسافات بمقاييس معينة متفق عليها عالمياً ولتحديد الموضع (النسبي) في الفراغ يُختار هيكل أو اطار متماسك مـــن

ثلاثة محاور متلاقية في نقطة معينة – تُسمى نقطة الأصل – و يسمى هيكل رصد الحركة ويتم تحديد موضع النقطة المادية بمعرفة أبعادها الثلاثة بالنسبة لهذا الهيكل و يفضل غالباً الاستعانة بهيكل رصد متعامد المحاور.

■ الزمن Time

و هو يعبر عن الفترة الزمنية بين حدثين و لقد افترضت الميكانيكا الكلاسيكية أو ميكانيكا نيوتن صفة مطلقة لكل من الزمن و الفراغ بمعنى أنهما لا يتغيران بتغير المشاهد ولا يتأثرا بحركة الراصد و هو ما نفاه ألبرت أينشتين في نظريتة النسبية.

■ الكلتة Mass

و تُعرف على أنها تلك المادة الموجودة في جسم ما ويرمز لها عادةً بالرمز m .

كينماتيكا الجسيم في بعد واحد Kinematics of a Particle in One Dimension

أو الحركة في خط مستقيم Rectilinear Motion

■ السرعة و العجلة Velocity and Acceleration

نعلم أنه عندما يتحرك جسيم (نقطة مادية) في خط مستقيم فإن موضعه بالنسبة لنقطة ثابتة O – نقطة الأصل – يتغير من نقطة إلى أخرى. باعتبار أن الجسيم احتل الموضع عند النقطة A و على بعد x من نقطة الأصل O عند اللحظة الزمنية t ثم انتقل إلى الموضع عند النقطة B و التي تبعد $x+\delta x$ عن نقطة الأصل عند اللحظة الزمنية $t+\delta t$ ومن ثم فإن متوسط سرعة الجسيم في قطع المسافة AB هو $\dfrac{\delta x}{\delta t}$. و إذا أردنا تعيين سرعة الجسيم v عند النقطة A نحسب قيمة $\dfrac{\delta x}{\delta t}$ عندما تقترب δt من الصفر أي عندما تقترب النقطة A من النقطة B ويُعبر عن ذلك رياضياً كالتالي

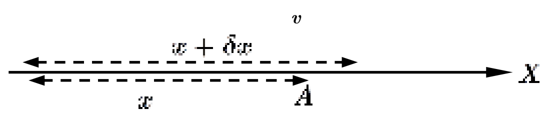
$$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

وتُعرف سرعة الجسيم v بأنها معدل التغير في الازاحة بالنسبة للزمن و تُكتب $v = \dfrac{dx}{dt}$ ، أما العجلة a فتعرف على أنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن والتي تكتب على الصورة الرياضية

$$a = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

ومن قاعدة السلسة في حساب التفاضل يمكن كتابة العجلة على الصورة

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$



وهذه العلاقة من العلاقات الهامة في حل بعض المسائل، وحيث أن الازاحة والسرعة و العجلة هي كميات متجهة فيمكن تطبيق قوانين المتجهات عليها من جمع و طرح وتحليل الاتجاهات و.....

■ تذكر أن

يمكن أن تُعطى عجلة الجسيم a في المسائل كدالة في الزمن t أو دالة في المسافة x أو دالة في السرعة v

١- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في الزمن t مثلا $a = \varphi(t)$

$$
\begin{aligned}
a = \varphi(t) \qquad & \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi(t) \\
& \Rightarrow dv = \varphi(t)dt \\
& \Rightarrow v = \int \varphi(t)dt + c_1
\end{aligned}
$$

ومن ثم

$$
\begin{aligned}
\because \quad & v = \int \varphi(t)dt + c_1 \\
\Rightarrow & \frac{dx}{dt} = \int \varphi(t)dt + c_1 \\
\Rightarrow & dx = \quad \int \varphi(t)dt + c_1 \quad dt \\
\therefore & x = \int \quad \int \varphi(t)dt + c_1 \quad dt + c_2
\end{aligned}
$$

٢- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في المسافة x مثلا $a = f(x)$

$$
\begin{aligned}
a = f(x) \qquad & \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = f(x) \\
& \Rightarrow vdv = f(x)dx \\
& \Rightarrow v^2 = 2\int f(x)dx + c_3
\end{aligned}
$$

ايضاً

$$
\begin{aligned}
\because \quad & v^2 = 2\int f(x)dx + c_3 \\
\Rightarrow & \frac{dx}{dt} = \mp\sqrt{2\int f(x)dx + c_3} \\
\Rightarrow & \mp\frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx + c_3}} = dt \\
\Rightarrow & t + c_4 = \mp\int \frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx + c_3}}
\end{aligned}
$$

٣- أخيراً إذا كانت العجلة معطاة كدالة في السرعة v مثلا $a = \varphi(v)$ فإن

$$
\begin{aligned}
a = \varphi(v) \qquad & \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi(v) \\
& \Rightarrow \frac{dv}{\varphi(v)} = dt \qquad \text{بالتكامل} \\
& \Rightarrow t = \int \frac{dv}{\varphi(v)} + c_5
\end{aligned}
$$

أو باستخدام العلاقة

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \varphi(v) \\
& \Rightarrow \frac{vdv}{\varphi(v)} = dx \\
& \Rightarrow x = \int \frac{vdv}{\varphi(v)} + c_6
\end{aligned}
$$

حيث $c_1 - c_6$ ثوابت التكامل و يمكن تعيينها من شروط الحركة المعطاة في المسألة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ١ـــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة يتعين من $x = t^3 + 2t^2$. أوجد مقدار كل من السرعة و العجلة بعد مضي ثانية واحدة.

الحـــــــل

يمكن تعيين السرعة والعجلة كالآتي

السرعة $\because v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 + 4t$

العجلة $\because a = \dfrac{dv}{dt} = 6t + 4$

وبعد مضي ثانية واحدة يكون مقدار السرعة 7 ومقدار العجلة 10 من الوحدات.

مثـــ٢ـــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة زمنية يتعين من $x = t^3 - 3t^2$. أوجد مقـــدار كل من السرعة و العجلة عند أي لحظة ، متى تنعدم كل من السرعة والعجلة وما هو موضع الجسيم عندما تكون سرعته 24 .

الحـــــــل

السرعة والعجلة للجسيم عند أي لحظة تتعين من

السرعة $\because v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

العجلة $\because a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 6 = 6(t-1)$

هاتان العلاقتان تعطيان السرعة والعجلة كدوال في الزمن ولتعيين زمن انعدام السرعة والعجلة نساويهما بالصفر أي أن

$$0 = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \qquad \Rightarrow t = 0 \quad \text{Or} \quad t = 2$$

$$0 = 6t - 6 = 6(t-1) \qquad \Rightarrow t = 1$$

أي أن سرعة الجسيم تساوي صفر عند بداية الحركة وبعد مضي ثانيتين وتنعدم العجلة بعـــد مضي ثانية واحدة. تكون سرعة الجسيم مساوية 24 عند زمن يتعين من

$$24 = 3t^2 - 6t \qquad \Rightarrow 3t^2 - 6t - 24 = 0 \quad \text{Or} \quad t^2 - 2t - 8 = 0$$
$$\Rightarrow (t+2)(t-4) = 0 \qquad \therefore t = 4$$

وتكون سرعة الجسيم مساوية 24 بعد مرور أربع ثوان ويكون موضع الجسيم – بالتعويض في دالة الموضع – $x\big|_{t=4} = 4^3 - 3(4)^2 = 16$ ويهمل الزمن السالب.

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كان موضعه عنـــد أي لحظـــة زمنيـــة يـــتعين مـــن $x = 2\ 1 - e^{-t}$ حيث t يمثل الزمن ، أوجد السرعة كدالة في المسافة والعجلة كدالة في السرعة.

الحـــــــل

لتعيين سرعة الجسيم نشتق دالة الموضع بالنسبة للزمن ومن ثم

$$x = 2\ 1 - e^{-t} \qquad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 2e^{-t} \qquad \text{Note} \quad \frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\because x - 2 = -2e^{-t} \qquad \Rightarrow v = 2 - x$$

وهذه العلاقة تعطي السرعة كدالة في المسافة ولايجاد العلاقة بين العجلة والسرعة

$$\because a = v\frac{dv}{dx} = v(-1) = -v \qquad \text{Note} \quad \frac{dv}{dx} = -1 \quad \therefore a = -v$$

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $x = b - b\cos kt$ حيث b, k ثابتان ، أوجـــد السرعة و العجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة ثم أوجد أقصى بعد للجسيم عن نقطة الأصل.

الحـــــــل

السرعة والعجلة يتعينان كالآتي

$$x = b - b\cos kt \quad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = bk\sin kt \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} = bk^2 \cos kt$$

ولايجاد العجلة كدالة في المسافة حيث أن

$$\because\ b\cos kt = b - x \qquad \Rightarrow a = k^2 \ \ b - x$$

ولايجاد أقصى بعد أي أكبر ما يمكن يتحقق هذا حينما يكون المقدار $a\cos kt$ أقل ما يمكـــن ويحدث هذا حينما $\cos kt = -1$ أي أن $x_{\max} = b - b(-1) = 2b$ هناك طريقة أخرى.

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $v = u + bx$ حيث u,b ثابتان ، أوجد السرعة والعجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة وكدالة في السرعة.

الحــــــــل

السرعة والعجلة يتعينان بتفاضل الموضع ثم السرعة بالنسبة للزمن

$$v = u + bx \quad \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = b\frac{dx}{dt} = bv = b(u + bx)$$

هذه العلاقة تُعطي العجلة كدالة في السرعة $a = bv$ وكدالة في المسافة $a = b(u + bx)$

وللحصول على السرعة والعجلة كدوال في الزمن حيث أن

$$\because\ v = u + bx \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = b(u + bx) \qquad \Rightarrow \frac{dx}{u + bx} = bdt$$

وباجراء التكامل بعد ضرب طرفي المعادلة في b يكون

$$\int \frac{bdx}{u + bx} = \int b^2 dt \quad \Rightarrow \ln(u + bx) = b^2\, t + C$$

حيث C ثابت التكامل ، يمكن كتابة العلاقة الاخيرة في الصورة

$$\because\ \ln(u + bx) = b^2\, t + C \qquad \therefore \ln v = b^2\, t + C \quad \text{Or} \quad v = Ae^{b^2 t}, \quad A = e^C$$

وهي علاقة السرعة بالزمن و العجلة بالزمن ايضاً من العلاقة $a = bAe^{b^2 t}$

مثـــ ٦ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بعجلة $\mathrm{ft\,sec^{-2}}$ $6t+2$ حيث t يمثل الزمن ، فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل وأصبحت سرعته 5 بعد مضي ثانية واحدة عين موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

الحـــل

حيث أن العجلة تعطى بالعلاقة $a=6t+2$ وللحصول على السرعة نستبدل a بـ $\dfrac{dv}{dt}$ ثم بفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dv}{dt}=6t+2 \qquad \Rightarrow dv=(6t+2)dt$$

$$\int dv=\int(6t+2)dt+c_1 \qquad\qquad \therefore\ v=3t^2+2t+c_1$$

حيث c_1 ثابت التكامل ويعين من الشروط الابتدائية و هي $v=5$ عندما $t=1$ وبالتعويض في معادلة السرعة نجد أن $5=3(1)^2+2(1)+c_1 \quad \therefore\ c_1=0$ أي أن صيغة السرعة تصبح على الصورة $\therefore\ v=3t^2+2t$ وللحصول على دالة الموضع نضع $v=\dfrac{dx}{dt}$ أي أن

$$\frac{dx}{dt}=3t^2+2t \qquad \Rightarrow dx=(3t^2+2t)dt \qquad \text{Or} \qquad x=t^3+t^2+c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 نستخدم الشرط وهو أن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل أي أن عندما $t=0$ كانت $x=0$ ويؤدي هذا $0=0^3+0^2+c_2 \quad \therefore\ c_2=0$ و يصبح موضع الجسيم عند أي لحظة في الصورة $x=t^3+t^2$ و بعد خمس ثواني يكون $x\big|_{t=5}=150$.

مثـــ ٧ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تتعين من العلاقة $a=-2v^2$ حيث a تمثل العجلة ، v هي السرعة. أوجد موضع الجسيم عند أي لحظة علماً بأن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل بسرعة قدرها الوحدة.

الحـــل

نلاحظ أن العجلة تقصيرية وحيث أن $a = \dfrac{dv}{dt}$ فإن

$$\because a = -2v^2 \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2v^2$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$-\int \frac{dv}{v^2} = \int 2dt + c_1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{v} = 2t + c_1$$

حيث ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 1$ عندما $t = 0$ ومنها $1 = 2(0) + c_1 \quad \therefore c_1 = 1$ وتتعين سرعة الجسيم تبعاً لذلك من العلاقة

$$\frac{1}{v} = 2t + 1 \quad \text{but} \quad v = \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dt}{dx} = 2t + 1 \quad \text{Or} \quad \frac{dt}{2t+1} = dx$$

وباجراء التكامل نحصل على

$$\frac{2dt}{2t+1} = 2dx \quad \Rightarrow \ln(2t+1) = 2x + c_2$$

من اشرط الابتدائي للحركة وهو $x = 0$ عندما $t = 0$ أي $c_2 = 0$ وتصبح صيغة العلاقة بين المسافة والزمن $x = \dfrac{1}{2}\ln(2t+1)$ ومنها يمكن ايجاد المسافة المقطوعة بعد مضي أي زمن.

مثـــال ٨

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تقصيرية تتعين من العلاقة $-4x^{-3}$ فإذا بدأ الجسيم في التحرك من السكون من موضع على بعد h من نقطة الأصل فاثبت أنه يصل إلى مســـافة ℓ من نقطة الأصل في زمن قدره $\dfrac{h}{2}\sqrt{h^2 - \ell^2}$ ثم أوجد سرعته عند هذا الموضع.

الحـــــــل

حيث أن $a = -16x^{-3}$ وايضاً $a = v\dfrac{dv}{dx}$ ومن ثم يكون

$$\therefore v\frac{dv}{dx} = -4x^{-3} \qquad \Rightarrow vdv = -4x^{-3}\ dx$$

باجراء التكامل

$$\therefore \int vdv = -\int 4x^{-3}\ dx + c_1 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{2}v^2 = \frac{2}{x^2} + c_1 \quad \text{Or} \quad v^2 = \frac{4}{x^2} + c$$

ويتعين الثابت c من الشرط الابتدائي و هو $v = 0$ عندما $x = h$ وبالتالي $0 = \frac{4}{h^2} + c$

أي أن $c = -\frac{4}{h^2}$ وبالتالي

$$v^2 = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{h^2} = \frac{4(h^2 - x^2)}{x^2 h^2} \qquad \therefore v = \pm \frac{2}{h} \frac{\sqrt{h^2 - x^2}}{x}$$

وسنعتبر الاشارة السالبة لأن حركة حركة الجسيم نحو نقطة الأصل – أي في اتجاه تناقص x –

وحيث أن $v = \frac{dx}{dt}$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{h} \frac{\sqrt{h^2 - x^2}}{x} \quad \Rightarrow -\frac{x dx}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \frac{2}{h} dt \quad \text{Or}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{x dx}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \int \frac{2}{h} dt + c_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{h^2 - x^2} = \frac{2}{h} t + c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 حيث أن $x = h$ عندما $t = 0$ وبالتالي $c_2 = 0$ أي أن

$$\therefore \sqrt{h^2 - x^2} = \frac{2}{h} t \qquad \text{Or} \qquad t = \frac{h}{2} \sqrt{h^2 - x^2}$$

والزمن الذي يستغرقة الجسيم حتي يصل إلى مسافة ℓ هي $t = \frac{h}{2} \sqrt{h^2 - \ell^2}$

وللحصول على مقدار السرعة عند هذا الموضع نعوض عن $x = \ell$ في علاقة السرعة

$$v\Big|_{x=\ell} = \frac{2\sqrt{h^2 - \ell^2}}{h\ell}$$

مثـــ ٩ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين السرعة والموضع والزمن يـــتعين مـــن $v = (1 + x^2)t$ ، أوجد المسافة كدالة في الزمن إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل.

الحــــــل

حيث أن $v = (1 + x^2)t$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = (1 + x^2)t \qquad \Rightarrow \frac{dx}{1 + x^2} = tdt \qquad \therefore \int \frac{dx}{1 + x^2} = \int tdt + c_1$$

$$\therefore \tan^{-1} x = \frac{1}{2} t^2 + c_1$$

ومن الشرط الابتدائي حيث بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل فإن

$$\therefore \tan^{-1} 0 = \frac{1}{2} 0^2 + c_1 \quad \Rightarrow 0 = 0 + c_1 \ \therefore c_1 = 0 \qquad \therefore x = \tan\left(\frac{1}{2} t^2\right)$$

Kinematics of a Particle in Two Dimensions كينماتيكا الجسيم في بعدين
Motion in a plane (x-y) الحركة في المستوي

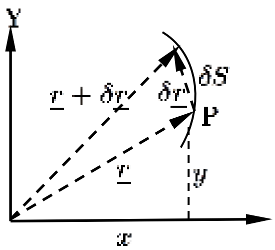
من المعلوم أنه يوجد نوعان من الكميات الطبيعية، الأول يتحدد تماماً بالمقدار مثل الطول و الحجم و الزمن و الكتلة و درجة الحرارة ....وتلك تسمى بالكميات القياسية. أما النوع الثاني فلا يمكن تحديده بالمقدار فقط وإنما يلزم أن نعرف الاتجاه ايضاً إلى جانب المقدار مثل الازاحة و السرعة و العجلة .... وتسمى بالكميات المتجهة.

■ السرعة و العجلة في الاحداثيات الكارتيزية

عندما يتحرك جسيم في مستوى يلزم لتحديد موضعه احداثيان والذي يمكن كتابة موضع الجسيم في صورة متجهة كالتالي $\underline{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ حيث – كما نعلم من دراستنا السابقة – فإن $\hat{i}$ يمثل متجه وحدة في اتجاه المحور الأفقي X ، أما $\hat{j}$ فيمثل متجه وحدة في اتجاه المحور الرأسي Y . وعندما يتحرك جسيم فإن موضعه يتغير من لحظة إلى أخرى و يقال أن متجه الموضع دالة في الزمن أي أن $\underline{r} = \underline{r}(t)$ وبالتالي تكون الاحداثيات الكارتيزية للجسيم دوالاً في الزمن وتكتب في الصورة

$$\underline{r} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \qquad \text{Or} \qquad x = x(t), \;\; y = y(t)$$

يسمى جزئا المعادلة السابقة بالمعادلتين البارامتريتين للمسار ، حيث t يسمى البارامتر وبحذف البارامتر بين مركبات الموضع نحصل على علاقة بين x, y وتسمى هذه العلاقة بالمعادلة الكارتيزية للمسار.



الآن نفرض أن جسيماً يتحرك في المستوى XY (هذه المحاور ثابتة) ونفرض أن الجسيم عند اللحظة t كان عند النقطة P حيث متجه موضعه هو $\underline{r}$ وبعد فترة زمنية δt أصبح الجسيم عند النقطة Q و متجه موضعه $\underline{r} + \delta\underline{r}$ حيث طول القوس PQ هو δS وحيث أن السرعة المتوسطة للجسيم خلال انتقاله من النقطة P إلى النقطة Q خلال الفترة الزمنية δt تتعين من

$$\underline{v} = \frac{\underline{r} + \delta \underline{r} - \underline{r}}{\delta t} = \frac{\delta \underline{r}}{\delta t}$$

وبأخذ نهاية المقدار السابق عندما $\delta t \to 0$ و من ثم تقترب النقطة Q من النقطة P و بالتالي يمكن الحصول على سرعة الجسيم عند النقطة P عند الزمن t وتتعين من

$$\underline{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{j} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$$

أي أن متجه السرعة $\underline{v}$ له مركبتان إحداهما v_x ومقدارها $\frac{dx}{dt}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية v_y وتساوي $\frac{dy}{dt}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه السرعة من العلاقة $v = |\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية θ تتيعين من العلاقة $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$

أيضاً متجه العجلة هو المعدل الزمني لتغير متجه السرعة وعليه

$$\underline{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \underline{v}}{\delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{a_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{a_y}\hat{j} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$$

مرةً أخرى نجد أن متجه العجلة له مركبتان إحداهما a_x ومقدارها $\frac{d^2x}{dt^2}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية a_y وتساوي $\frac{d^2y}{dt^2}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه العجلة من العلاقة $a = |\underline{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية φ تتيعين من العلاقة $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)$

ونستنتج مما سبق أن الحركة المستوية هي محصلة حركتين في خطين مستقيمين هما محورا الاحداثيات.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

إذا تحركت نقطة مادية في المستوى XY بحيث يتعين احداثي موضعها عند أي لحظـــة مـــن العلاقتين

$$x = t^2, \qquad y = 3t^2 + 4$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة ومعادلة المسار.

الحـــــــل

حيث أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 6t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 6$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = 2t\,\hat{i} + 6t\,\hat{j}, \qquad \underline{a} = 2\,\hat{i} + 6\,\hat{j}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت $2\sqrt{10}$ (لا يعتمد على الزمن). ولتعيين معادلة المســـار وهي حذف البارامتر t بين x, y وواضح أن $y = 3x + 4$ وهي معادلة خط مستقيم ميله 3 ويمر بالنقطة $(0, 4)$.

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم فى المستوى الكارتيزي خاضعاً للعلاقة

$$x = 20t - 3t^2, \qquad y = 16t - 4t^2$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة وأقصى ارتفاع وسرعته عند هذا الموضع ومتى وايـــن يقع الجسم على المحور الأفقي X.

الحـــــل

كما ذكرنا آنفاً أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية XY يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 6t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -6$$

$$\frac{dy}{dt} = 16 - 8t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -8$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = (20 - 6t)\,\hat{i} + (16 - 8t)\,\hat{j}\,, \qquad \underline{a} = -6\hat{i} - 8\,\hat{j}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت 10وحدة و لإيجاد اقصى ارتفاع ، نعلم أنه عند أقصى ارتفاع تنعدم مركبة السرعة الرأسية أي أن $\dot{y} = 0$ وعندها يكون $t = 2$

أي أن الجسيم يصل إلى أقصى ارتفاع بعد ثانيتين ويكون هذا الارتفاع مساوياً

$$y\big|_{t=2} = 16(2) - 4(2)^2 = 16$$

ولحساب السرعة عند هذا الموضع نعوض بالزمن $t = 2$ في متجة السرعة $\underline{v} = 8\,\hat{i}$

يقع الجسيم على المحور الأفقي عندما يكون الاحداثي الرأسي y مساوياً الصفر ومن ثم

$$0 = 16t - 4t^2 \quad \Rightarrow t(4 - t) = 0 \qquad \text{i.e. } t = 0,\ t = 4$$

أي أن الجسيم يقع على المحور الأفقي بعد أربع ثوان وموضعه x يتعين من

$$x\big|_{t=4} = 20(4) - 3(4)^2 = 32$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن مركبة السرعة الأفقية ثابتة وتساوي 3 ومركبة السرعة الرأسية تتناسب مع الاحداثي x وثابت التناسب يساوي 6 اثبت أن معادلة المسار قطع مكافئ إذا علمت أن النقطة $(2,4)$ تقع على المسار.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة الأفقية $\dot{x}$ ثابتة اي أن $\dot{x} = 3$ ومركبة السرعة الرأسية $\dot{y}$ تتناسب مع x أي أن $\dot{y} = 6x$ والآن

$$\frac{dx}{dt} = 3, \qquad \frac{dy}{dt} = 6x \qquad \Rightarrow \frac{dy\ /\ dt}{dx\ /\ dt} = \frac{6}{3}x = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{Or} \qquad dy = 2xdx$$

باجراء التكامل نحصل على $\quad y = x^2 + c$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $y = 4$ As $x = 2$ وبالتعويض نجد أن $c = 0$

وتصبح معادلة المسار $y = x^2$ وهي معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن موضعه عند أي لحظة يتعين من

$$x = 3\cos 2t + 1, \qquad y = 4\sin 2t - 2$$

أوجد معادلة المسار.

الحـــــــل

معادلة المسار هي علاقة بين x, y و حيث أن $\quad x = 3\cos 2t + 1, \qquad y = 4\sin 2t - 2$

ومن ثم

$$\frac{x-1}{3} = \cos 2t, \qquad \frac{y+2}{4} = \sin 2t$$

بالتربيع والجمع ينتج أن

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $(1,-2)$ و طول محوره الأكبر 4 والأصغر 3

(اجتهد في رسم المسار رسماً تخطيطياً)

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية على المسار $y = 2x^2$ حيث الاطوال بالقدم وكانـــت المركبـــة الأفقيـــة لسرعتها ثابتة وتساوي $2\ \mathrm{ft\,sec^{-1}}$. اوجد عجلة النقطة المادية مقداراً واتجاهــاً ، ثم اوجـــد سرعتها مقداراً واتجاهاً عندما يكون الأحداثي الرأسي 8 .

الحـــــــل

حيث أن $\dot{x} = 2$ وبالتفاضل بالنسبة للزمن يكون $\ddot{x} = 0$ أي أن المركبة الأفقيـــة للعجلـــة تنعدم و للحصول على المركبة الرأسية للعجلة حيث $y = 2x^2$ فإن

$$y = 2x^2 \quad \Rightarrow \dot{y} = 4x\underset{2}{\dot{x}} = 8x \quad \text{again} \quad \ddot{y} = 8\dot{x} = 16$$

أي أن العجلة تتعين بالمتجة $a = 16\,\hat{j}$ ومقدارها 16 وتعمل في اتجاه المحور Y

ولتعيين السرعة حيث $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ فإن $\underline{v} = 2\,\hat{i} + 8x\,\hat{j}$ وعندما $y = 8$ فإن $x = \pm 2$

ومنها $\underline{v} = 2\,\hat{i} - 16\,\hat{j}$ أو $\underline{v} = 2\,\hat{i} + 16\,\hat{j}$ ومقدار السرعة في كلتا الحالتين $\sqrt{260}$

مثـــ ٦ ـــال

بدأ جسيم حركته من السكون من النقطة (a,b) على مسار معادلته $y^2 = \dfrac{b^2}{a}x$ وكانـــت المركبة الرأسية لعجلته تتعين من $\ddot{y} = -k^2 y$. اوجد المركبة الأفقية للعجلة كدالـــة في x ثم أوجد x, y, v كدوال في الزمن.

الحـــــــل

للحصول على المركبة الأفقية للعجلة بتفاضل معادلة المسار بالنسبة للزمن نجد أن

$$y^2 = \frac{b^2}{a}x \quad \Rightarrow y\dot{y} = \frac{b^2}{2a}\dot{x}$$

$$\text{differentiating again} \quad \Rightarrow \dot{y}^2 + y\ddot{y} = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 + \sqrt{\frac{b^2}{a}x}\left(-k^2\sqrt{\frac{b^2}{a}x}\right) = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}\left(\dot{y}^2 - k^2\frac{b^2}{a}x\right) = \frac{2a}{b^2}\dot{y}^2 - 2k^2x \qquad (1)$$

والآن لحساب $\dot{y}$ من العلاقة $\ddot{y} = -k^2 y$ حيث $\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \dot{y}\dfrac{d\dot{y}}{dy}$ ومنها

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -k^2 y \qquad \Rightarrow \dot{y}d\dot{y} = -k^2 y dy \qquad \text{Or} \quad \dot{y}^2 = c - k^2 y^2$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من شرط أن الجسيم بـدأ الحركـة مـن السـكون أى أن $t = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = 0, \quad x = a, \quad y = b$ وتكون قيمة الثابت

$$0 = c - k^2 b^2 \qquad \therefore c = k^2 b^2$$

ومن ثم فإن المركبة الأفقية للعجلة تتعين من

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}(k^2 b^2 - k^2 \frac{b^2}{a}x) - 2k^2 x \qquad \Rightarrow \ddot{x} = 2ak^2 - 4k^2 x$$

وهذه العلاقة تعطى المركبة الأفقية للعجلة بدلالة x

$$\dot{y}^2 = k^2 b^2 - k^2 y^2 \qquad \Rightarrow \dot{y} = k\sqrt{b^2 - y^2} \quad \text{Or} \quad \frac{dy}{dt} = k\sqrt{b^2 - y^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = kdt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = kt + \alpha \quad \text{Or} \quad y = b\sin(kt + \alpha)$$

حيث α ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط عند $t = 0$ فإن $y = b$ ويكون

$$b = b\sin(\alpha) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

ومنها فإن $y = b\sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Or} \quad y = b\cos kt \quad y$ given as a function of t

أيضاً للحصول على المسافة x كدالة في الزمن

$$x = \frac{a}{b^2}y^2 = \frac{a}{b^2}b^2\cos^2 kt = a\cos^2 kt$$

والسرعة $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ و من ثم

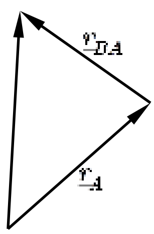
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{4a^2}{\cancel{b^4}}\cancel{b^2}\cos^2 kt(\cancel{b^2}k^2\sin^2 kt) + k^2 b^2 - k^2 b^2\cos^2 kt} \\ &= \sqrt{4a^2 k^2\cos^2 kt\sin^2 kt + k^2 b^2\sin^2 kt} = k\sin kt\sqrt{4a^2\cos^2 kt + b^2} \end{aligned}$$

■ الحركة النسبية في مستوى **Relative Motion in a Plane**

علمنا مما سبق أن صور الحركة و وصفها لحركة جسيم تتغير تبعاً لـــتغير مجموعـــة الاســـناد (مجموعة المحاور المنسوبة إليها هذه الحركة سواء كارتيزية او قطبية أو ذاتية) وكذلك إذا ما كانت هذه المحاور ثابتة أو متغيرة وايضاً راصد الحركة (نقطة الأصل) فمثلا لو تصـــورنا أن هناك راصد لحركة قطار و تحرك القطار أمام الراصد فسيرى الراصـــد أن القطـــار يتحـــرك بسرعته التي يسير بها ، ولكن لو كان الراصد راكباً قطاراً آخر يسير بنفس ســـرعة القطـــار الأول و في نفس الاتجاه فبالنسبة لهذا الراصد سيكون القطار المرصود كما لو كان ساكناً.

نعتبر نقطة ثابتة O، نفرض أن نقطة ما A متجه الموضع لها هو $\underline{r}_A$ بالنسبة إلى O ونعتـــبر نقطة أخرى B متجه الموضع لها هو $\underline{r}_B$ بالنسبة إلى O أيضاً. فإذا نسبنا متجه موضع النقطة A إلى النقطة B فسيكون هو المتجه $\underline{r}_{BA}$ ، أي أن متجه الموضع قد تغير بتغير الراصد و من الشكل المجاور يكون

$$\underline{r}_B = \underline{r}_A + \underline{r}_{B|A} \qquad \Rightarrow \underline{r}_{B|A} = \underline{r}_B - \underline{r}_A$$



حيث رمزنا لمتجه موضع النقطة A بالنسبة إلى B بالرمز $\underline{r}_{AB}$. يُسمى المتجه $\underline{r}_{AB}$ بمتجـــه الموضـــع النسبي للنقطة A بالنسبة للنقطة B و للحصـــول على السرعة النسبية للنقطـــة A بالنســـبة إلى B بتفاضل المعادلة السابقة نجد أن

$$\frac{d\underline{r}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{r}_B}{dt} - \frac{d\underline{r}_A}{dt} = \underline{v}_B - \underline{v}_A \qquad \Rightarrow \underline{v}_{B|A} = \underline{v}_B - \underline{v}_A$$

حيث $\underline{v}_A, \underline{v}_B$ سرعة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{v}_{A|B}$ هي سرعة A بالنسبة إلى B نلاحظ أن العلاقتان السابقتان علاقات اتجاهية وليست قياسية والعجلة النســـبية عـــي مشتقة السرعة النسبية بالنسبة للزمن أي أن

$$\frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{v}_B}{dt} - \frac{d\underline{v}_A}{dt} = \underline{a}_B - \underline{a}_A \qquad \Rightarrow \underline{a}_{B|A} = \underline{a}_B - \underline{a}_A$$

حيث $\underline{a}_A, \underline{a}_B$ عجلة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{a}_{A|B}$ هي عجلة A بالنسبة إلى B

مثـــ ١ ـــال

تتحـــرك نقطتـــان ماديتـــان A, B بحيـــث يـــتعين موضـــعهما مـــن $x_A = t^3 - 2t$ ، $x_B = 2t^3 + t^2 - 5$. اوجد كلاً من السرعة النسبية العجلة النسبية.

الحــــــل

حيث أن الموضع النسبي للنقطة B بالنسبة للنقطة A هو $\underline{x}_{B|A}$ حيث

$$\underline{x}_{B|A} = \underline{x}_B - \underline{x}_A \qquad \Rightarrow \underline{x}_{B|A} = (2t^3 + t^2 - 5) - (t^3 - 2t) = t^3 + t^2 + 2t - 5$$

ومن ثم فإن السرعة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{v}_{B|A} = \frac{d\underline{x}_{B|A}}{dt} = 3t^2 + 2t + 2$$

وأيضاً العجلة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{a}_{B|A} = \frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = 6t + 2$$

مثـــ ٢ ـــال

تتحرك باخرة A بسرعة ثابتة مقدارها 24 m.p.h في اتجاه الشرق ، بينما تتحرك باخرة B في اتجاه الجنوب بسرعة ثابتة مقدارها 18 m.p.h . أوجد سرعة الباخرة الأولى بالنسبة لراكب في الباخرة الثانية.

الحــــــل

بفرض أن $\hat{i}$, $\hat{j}$ متجها وحدة في اتجاهي الشرق والجنوب فإنه يمكن كتابة سرعة البـــاخرتين A, B على الصورة

$$\underline{v}_A = 24\hat{i}, \quad \underline{v}_B = 18\hat{j}$$

و حيث أن السرعة النسبية تتعين من $\underline{v}_{B|A} = \underline{v}_A - \underline{v}_B$ فيكون $\underline{v}_{A|B} = 24\hat{i} - 18\hat{j}$ و في مقدار السرعة النسبية يتعين مـــن $v_{A|B} = \left|\underline{v}_{A|B}\right| = \sqrt{(24)^2 + (18)^2} = 30\,\text{m.p.h}$ اتجاه يصنع زاوية θ جنوب الشرق حيث $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{18}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

■ مسائل Problems ■

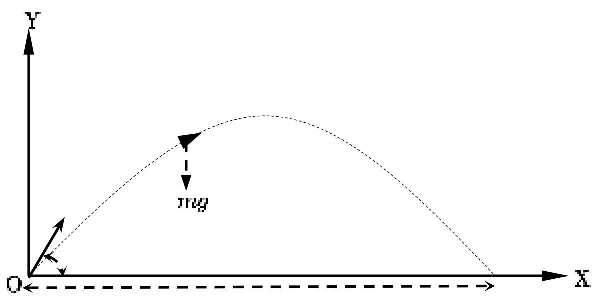
حركة المقذوفـــات

Projectiles Motion

تُعتبر حركة المقذوفات من اهم التطبيقات على الحركة المستوية للنقطة المادية (الجسيم). مـــن المعلوم أن المقذوفات تتعرض اثناء حركتها لجذب الأرض وكذلك مقاومـــة الهـــواء وبدايـــةً سنهمل مقاومة الهواء وسنعتبر أيضاً أن عجلة الجاذبية ثابتة في المقدار خلال حركة المقـــذوف وذلك للحصول على صورةٍ تقريبيةٍ لحركة المقذوف والتي بدورها تلقي ضوءاً لا بأس به على الحركة الحقيقية . وتُستخدم الاحداثيات الكارتيزية عادةً لدراسة هذا النوع مـــن الحركـــة- حيث نستخدم محورين متعامدين ثابتين هما غالباً OX, OY - على أن تُستكمل دراسة حركة المقذوفات مع الأخذ في الاعتبار مقاومة الهواء لاحقاً - إن شاء الله تعالى.

■ معادلات الحركة Equations of Motion

نعتبر الآن حركة مقذوف قُذف من نقطة O بسرعة مقدارها u وفي اتجاه يصنع زاوية α مع المحور الأفقي. كما ذكرنا آنفاً ستحرك الجسيم تحت تأثي قوة الوزن فقط (مقاومـــة الهـــواء أُهملت) وهي - كما نعلم - قوة رأسية إلى أسفل. من الواضح أم مسار المقذوف واقـــع في مستوى رأسي لذلك من المناسب استعمال الاحداثيات الكارتيزية - كما ذكرنـــا ســـالفاً - ولتكن نقطة الأصل هي نقطة القذف O . نفرض أن الجسيم يصل إلى سطح الأرض عنـــد النقطة A بعد زمن ما ومن ثم سنأخذ المحور OX في اتجاه OA والمحـــور OY هـــو المحـــور العمودي على OX في مستوى الحركة كما هو موضح بالشكل.



نفرض أن المقذوف بعد زمن t كان يشغل الموضع P والذي احداثياته (x, y)
ومن ثم بكتابة قانون نيوتن الأساسي في الاتجاهين الأفقي والرأسي يكون:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \text{and} \qquad m\ddot{y} = -mg \tag{1}$$

بالقسمة على m وتكامل جزئي (1) المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = c_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = c_2 - gt \tag{2}$$

حيث c_1, c_2 ثابتا التكامل واللذان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة. عند $t = 0$ يكون $\dot{x} = u\cos\alpha,\ \dot{y} = u\sin\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = u\cos\alpha$ و $c_2 = u\sin\alpha$
وبالتالي تأخذ المعادلة (2) الصورة الرياضية

$$\dot{x} = u\cos\alpha \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt \tag{3}$$

مرةً أخرى بأجراء التكامل بالنسبة للزمن لشقيّ المعادلة (3) ينتج أن

$$x = (u\cos\alpha)t + c_3 \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4 \tag{4}$$

ايضاً الثابتان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة حيث عند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = 0,\ y = 0$ ومنها نجد أن $c_3, c_4 = 0$ و المعادلة (4) تصبح

$$x = (u\cos\alpha)t \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

وبذلك نكون قد أوجدنا مركبتا سرعة المقذوف عند أي لحظة زمنية من جزئي المعادلة (3) وأيضاً موضع المقذوف يتعين عند أي لحظة من جزئي المعادلة (5) ونلاحظ من الشق الأول من المعادلة (3) نجد أن المركبة الأفقية للسرعة $\dot{x}$ دائماً ثابتة و تساوي $u\cos\alpha$ أما المركبة الرأسية $\dot{y}$ فتعتمد على الزمن . ويُسمى جزئا المعادلة (5) بالمعادلتين البارامتريتين لمسار القذيفة.

أهم خصائص حركة المقذوفات

■ أقصى ارتفاع للمقذوف Maximum Height

كما علمنا أن المركبة الأفقية للسرعة تظل ثابتة بينما تتناقص المركبة الرأسية حتى تنعدم عند موضع ما والذي يُمثل أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف ، عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الشق الثاني من المعادلة (3) نحصل على زمن الوصول إلى اقصى ارتفاع وليكن T وهو

$$T = \frac{u \sin \alpha}{g} \qquad (6)$$

ونحصل على أقصى ارتفاع Y بأن نضع $t = T$ في الجزء الثاني من المعادلة (5) أي أن أقصى ارتفاع يتعين من

$$Y = (u \sin \alpha) T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (7)$$

■ زمن الطيران (التحليق) Time of flight

يُعرف زمن الطيران بأنه الزمن المنقضي بين لحظة اطلاق القذيفة وحتى لحظة مرورها بالمستوى الأفقي المار بنقطة القذف (عند النقطة A) وسنرمز له بالرمز $T^{\star}$ وحيث أنه عند النقطة A يكون $y = 0$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الجزء الثاني من المعادلة (5) يكون

$$0 = (u \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (8)$$

المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية في الزمن t وجذراها هما

$$T^{\star} = 0, \qquad T^{\star} = \frac{2u \sin \alpha}{g} \qquad (9)$$

الجذر الأول $T^{\star} = 0$ عند بداية قذف الجسيم عند نقطة الأصل والجذر الثاني يُمثل زمن التحليق ومن الملاحظ من المعادلتين (6) و (9) نجد أن $T^{\star} = 2T$ وهذا يعني أن الزمن الذي يأخذه المقذوف من لحظة اطلاقه حتى وصوله الى اقصى ارتفاع يساوي زمن وصول المقذوف من أقصى ارتفاع على المستوى الأفقي المار بنقطة القذف.

■ مدى القذيفة على المستوى الأفقي Range

ويُقصد به طول المستقيم الواصل من نقطة القذف وحتى النقطة A (في نفس مستوى نقطة القذف) ولحساب المدى R نضع $t = T^{*}$ في الجزء الأول من المعادلة (5) ، أي أنه للحصول على صيغة رياضية للمدى على المستوى الأفقي نعوض عن الزمن بقيمة زمن التحليق في الجزء الأول من المعادلة (5) ومنها

$$R = (u\cos\alpha)T \qquad \Rightarrow R = \frac{2u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{10}$$

و واضح أن المدى R يبلغ أقصى قيمة له – عند قيمة معينة للسرعة – عندما $\sin 2\alpha = 1$ أي عندما $\alpha = \pi / 4$ ويكون المدى حينئذ مساوياً

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \tag{11}$$

من المعادلة (10) نلاحظ أن المدى الأفقي يمكن الحصول عليه بقيمتين لزاوية القـــذف همـــا $(\alpha, \pi / 2 - \alpha)$ وذلك لأن $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

■ معادلة المسار لمقذوف Path Equation

بحذف البارامتر t بين جزئي المعادلة (5) نحصل على ما يُعرف بمعادلة المسار الكارتيزيـــة في الصورة الرياضية

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2\alpha} \tag{12}$$

و يتضح من المعادلة السابقة أنه لقيمة معينة للسرعة توجد زاويتان لإصابة الهدف.

ايضاً يمكن وضع المعادلة (12) في الصورة

$$y - \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2u^2 \cos^2\alpha}\left(x - \frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2$$

ومنها نلاحظ أن مسار القذيفة هو قطع مكافئ رأســه النقطـــة $\left(\dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$ ومحوره رأسي إلى أسفل وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\dfrac{g}{2u^2 \cos^2 \alpha}$

■ مدى القذيفة على مستوى مائل Inclined Range

لإيجاد مدى القذيفة على مستوى مائل. نفرض أن الجسيم قُذف من نقطـــة O بســـرعة u وزاوية قذف α مع الأفقي أعلى مستوى مائل- يميل على الأفقي بزاوية φ - كما بالشكل وأن اتجاه القذف يقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى المائـــل ، نفـــرض أن الجسيم يصطدم بالمستوى المائل عند النقطة M ولتكن احداثياهما (x, y) . فإذا كان $R^\star$ هو المدى على المستوى المائل - المطلوب تعيينه - فإن

$$x = R^\star \cos\varphi, \qquad y = R^\star \sin\varphi$$

ونعلم أن هذين الاحداثيين يحققان معادلة المسار (12) وعلى ذلك وبالتعويض في معادلة المسار ينتج أن

$$R^\star \sin\varphi = R^\star \cos\varphi \tan\alpha - \frac{gR^{\star 2} \cos^2\varphi}{2u^2} \sec^2\alpha$$

ومن هذه المعادلة إما $R^\star = 0$ وهو مناظر لنقطة الأصل أو

$$R^\star = \frac{2u^2}{g} \;\; \cos\varphi \tan\alpha - \sin\varphi \;\; \cos^2\alpha \sec^2\varphi$$

$$= \frac{2u^2 \cos\alpha}{g \cos^2\varphi} \;\; \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha \;\; = \frac{2u^2 \cos\alpha}{g \cos^2\varphi} \sin(\alpha - \varphi) \qquad (13)$$

هذه المعادلة تُعطي المدى لقذيفة على مستوى مائل. كما يتضح من المعادلة أيضاً أن أقصـــى مدى على المستوى المائل (بزاوية φ) يحدث عندما تكون $\cos\alpha \sin(\alpha - \varphi)$ أكبر ما يمكن وحيث أنه من المعلوم من حساب المثلثات

$$2\cos\alpha \sin(\alpha - \varphi) = \sin(2\alpha - \varphi) - \sin\varphi$$

وعلى هذا فإن اقصى مدي على المســـتوى المائـــل يمكـــن الحصـــول عليـــه هـــو عنــــدما $\sin(2\alpha - \varphi) = 1$ أي عندما

$$2\alpha-\varphi=\frac{\pi}{2} \qquad \text{Or} \qquad \alpha-\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\text{Or} \quad \alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) \qquad \text{Or} \qquad \alpha=\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tag{14}$$

أي أننا نحصل على أقصى مدى على المستوى المائل عندما ينصف اتجاه القذف الزاويـــة بـــين الراسي والمستوى المائل ويكون اقصى مدى هو

$$R^{\star}_{\max}=\frac{u^2}{g\cos^2\varphi}\;\; 1-\sin\varphi \;\;=\frac{u^2}{g(1+\sin\varphi)} \tag{15}$$

ونلاحظ أنه بوضع $\varphi=0$ في المعادلتين (14) ، (15) نحصل على النتائج المنـــاظرة في حالـــة المستوى الأفقي. تنبيه للحصول على المدى لمستوى مائل لأسفل نضع $-\varphi$ بدلا من φ.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

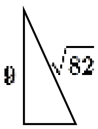
رصدت حركة مقذوف فوجد أن اقصى ارتفاع له فوق المستوى الأفقي المار بنقطة القذف هو 900 ft و أن مداه على المستوى الأفقي 400 ft عيّن سرعة القذف مقداراً واتجاهاً.

الحـــــــــل

حيث أن اقصى ارتفاع والمدى يعينان من المعادلتين

$$Y = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ومنها بالتعويض بالقيم المعطاة



$$900 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad 400 = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

بقسمة المعادلتين نحصل على

$$\frac{9}{4} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Big/ \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{\tan \alpha}{4} \quad \therefore \tan \alpha = 9$$

وهي اتجاه سرعة القذف ومقدار السرعة يتعين بالتعويض في أي من المعادلتين ويكون

$$900 = \frac{u^2}{2g} \times \frac{81}{82} \Rightarrow u^2 = \frac{1800 \times 82 \times 32.2}{81} \quad \text{Or} \quad u \cong 242.23 \quad (g = 32.2 \text{ ft} \sec^{-2})$$

حيث أن $\tan \alpha = 9$ فإن $\sin \alpha = \frac{9}{\sqrt{82}}$ كما بالشكل.

مثـــ ٢ ـــال

قذف جسيم من نقطة بسرعة ابتدائية مقدارها $3\sqrt{gh}$ لتصيب هدفاً عنـــد النقطـــة $(3h, h)$ بالنسبة إلى محورين متعامدين مارين بنقطة القـــذف. أوجـــد زاويـــتي القـــذف الممكنـــتين لإصابةالهدف.

الحـــــــل

حيث أن الهدف عند النقطة $(3h, h)$ ومن ثم فهذه النقطة تحقق معادلة المسار أي أن

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ h = 3h\tan\alpha - \frac{g(3h)^2}{2(9\,gh)\cos^2\alpha} \quad \text{Or} \quad 1 = 3\tan\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha}$$

$$2 = 6\tan\alpha - \sec^2\alpha \Rightarrow 2 = 6\tan\alpha - (1+\tan^2\alpha) \quad \therefore\ \tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 3 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\alpha$ وجذراها هما

$$\tan\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \quad \text{i.e.} \quad \tan\alpha_1 = 3+\sqrt{6}, \quad \tan\alpha_2 = 3-\sqrt{6}$$

وهما الزاويتان الممكنتان لإصابة الهدف.

مثــ ٣ ــال

إذا كان T هو زمن وصول قذيفة إلى نقطة P على مسارها وكان T' هو زمن وصولها من تلك النقطة إلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف أوجد ارتفاع النقطة P عن المستوى الأفقي للقذف.

الحـــــــل

حيث أن زمن الطيران هو الزمن من لحظة انطلاق القذيفة وحتى وصولها الى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف وكما رأينا فإن

$$\text{Time of Filght} = \frac{2u\sin\alpha}{g} = T + T' \qquad \therefore\ u\sin\alpha = \frac{1}{2}g\ \ T + T'$$

ولحساب ارتفاع النقطة P حيث $y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ولذلك

$$y_{\text{P}} = y\big|_{t=T} = (\underbrace{u\sin\alpha}_{\frac{1}{2}g(T+T')})T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g(T+T')T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gTT'$$

مثــ ٤ ــال

أطلقت قذيفة على هدف معين في مستوى أفقي يمر بنقطة القذف فسقطت قبل الهدف بمسافة ℓ عندما كانت زاوية القذف 15^0 وعندما قُذفت بنفس السرعة وضوعفت زاوية القـــذف سقطت بعد الهدف بمسافة ℓ. أوجد الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف.

الحـــــــــــل

باعتبار أن سرعة القذف هي u وأن هو المدى الصحيح لإصابة الهدف هو R وبناءً عليه فإن المدي في الحالة الأولى هو $R-\ell$ والمدى في الحالة الثانية هو $R+\ell$ وحيث أن معادلة المدي هي

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

في الحالة الأولى $$R-\ell=\frac{u^2\sin 30}{g}=\frac{u^2}{2g}$$

في الحالة الثانية $$R+\ell=\frac{u^2\sin 60}{g}=\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$$

من هاتين المعادلتين ينتج أن – بالجمع –

$$2R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{2} \qquad \text{Or} \qquad R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{4} \qquad (1)$$

وبفرض أن هي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف θ وبالتالي يكون (2) $$R=\frac{u^2\sin 2\theta}{g}$$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن $\sin 2\theta=\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$ أي أن

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

وهي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف

مثـــ ٥ ـــال

أطلقت قذيفة من نقطة الأصل فوجد أنها تمر بالموضعين $(12,0)$, $(8,2)$ على مسارها أوجـــد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً واحسب الزمن الذي تأخذه القذيفة لتمر بالموضعين الســـابقين وسرعتها عند هذين الموضعين.

الحـــــــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y=x\tan\alpha-\dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(12,0)$, $(8,2)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة $(8,2)$ فإن $$2 = 8\tan\alpha - \frac{g(8)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة $(12,0)$ فإن $$0 = 12\tan\alpha - \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في 9 والثانية في 4 والطرح نحصل على

$$18 = 24\tan\alpha \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

وهي اتجاه سرعة القذف مع الأفقي و لتعيين مقدار السرعة بالتعويض في أي من المعادلتين

$$\Rightarrow 12\tan\alpha = \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha} \quad \therefore u^2 = \frac{g(12)^2}{24\tan\alpha\cos^2\alpha} = \frac{6g}{\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{2}g$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{25}{2}g}$$

<u>على الدارس أن يكمل الحل</u>

مثـــ ٦ ـــال

قُذفت نقطة مادية لتمر بالموضعين $(a,b), (b,a)$ على مسارها حيث $a > b$. اثبت أن المدى على المستوى الأفقي يساوي $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$ و أن زاوية القذف أكبر من $\tan^{-1} 3$.

الحـــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(a,b), (b,a)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة (b,a) فإن $$a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة (a,b) فإن $$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في a والثانية في b والطرح نحصل على

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{(a+b)(\cancel{a-b})} = \frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}(\cancel{a-b})$$

$$\text{Or} \quad a+b = \frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Or} \quad \frac{ab}{a+b} = \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$$

مرةً أخرى بضرب المعادلة الأولى في a^2 والثانية في b^2 و الطرح نحصل على

$$\underbrace{a^3 - b^3}_{(a^2+ab+b^2)(\cancel{a-b})} = ab(\cancel{a-b})\tan\alpha \qquad \Rightarrow ab\tan\alpha = a^2 + ab + b^2$$

ولكن معادلة المدي تُعطى من

$$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2u^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

$$= \underbrace{\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}}_{ab/(a+b)}\tan\alpha = \frac{ab}{a+b}\tan\alpha = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وهو المطلوب $\qquad \therefore R = \dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

وحيث أننا أثبتنا أن $\qquad \tan\alpha = \dfrac{a^2+ab+b^2}{ab}$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{a^2+ab+b^2}{ab} \pm 3 = \frac{a^2-2ab+b^2}{ab} + 3 = \frac{(a-b)^2}{ab} + 3$$

و حيث أن المقدار $\dfrac{(a-b)^2}{ab} > 0$ فإن $\tan\alpha > 3$ أو $\alpha > \tan^{-1} 3$

مثـــال ٧

أطلقت قذيفة بسرعة h من سطح الأرض بحيث تمر بنقطة أقصى بعد لها A في نفس المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. اثبت أنه لكي يصيب المقذوف هدفاً على ارتفاع h فوق النقطة A بحيث أن زاوية القذف في الحالتين واحدة فإن سرهة القذف يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2 - gh}}$.

الحـــل

واضح أن أقصى بعد حينما تكون الزاوية 45^0 ويكون المدى أي بعد النقطة A هو $R = \dfrac{u^2}{g}$

ولكي تصيب القذيفة الهدف B و الذي يقع على ارتفاع h فوق النقطة A نفترض أن السرعة أصبحت v ومن ثم يجب أن تكون النقطة $B = \left(\dfrac{u^2}{g}, h\right)$ تحقق معادلة المسار

$$h = \frac{u^2}{g}\tan 45 - \frac{g\ \ u^2 / g\ ^2}{2v^2\cos^2 45} \qquad \Rightarrow h = \frac{u^2}{g} - \frac{u^4}{gv^2} \quad \text{Or} \quad \frac{u^4}{gv^2} = \frac{u^2}{g} - h$$

$$\frac{u^4}{gv^2} = \frac{u^2 - gh}{g} \quad \text{Or} \quad v^2 = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - gh}} > u$$

أي أن السرعة يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2 - gh}}$

مثـــ ٨ ـــال

قذف جسيم بسرعة $64\ \text{ft sec}^{-1}$ وفي اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الأفقي أوجد المدى على مستوى يميل بزاوية 30^0 على الأفقي إذا قذف الجسيم أعلى المستوى أو أسفل المستوى.

الحـــــــل

حيث أن المدى على المستوى المائل يتعين من $- \ g = 32.2\ \text{ft sec}^{-2}\ -$

$$R = \frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha - \varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

حيث $u = 64\ \text{ft sec}^{-1}$ ، $\varphi = 30^0$ ، $\alpha = 45^0$ نجد أن المدى على المستوى المائل لأعلى

$$R = \frac{2(64)^2\cos 45\sin(45 - 30)}{32.2\cos^2 30} = \frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \ \sqrt{3} - 1\ \ \cong\ 62.08\ \text{ft}$$

ثم بالتعويض عن $\varphi = -30^0$ نحصل على المدى على المستوى المائل إلى أسفل

$$R = \frac{2(64)^2\cos 45\sin(45 + 30)}{32.2\cos^2(-30)} = \frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \ \sqrt{3} + 1\ \ \cong\ 231.7\ \text{ft}$$

مثـــ ٩ ـــال

إذا كانت النسبة بين مقداري سرعة جسيم مقذوف عند أقصى ارتفاع و عندما يكون على ارتفاع يساوي نصف اقصى ارتفاع هي $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ فاثبت أن زاوية القذف هي 30^0 .

الحـــــــل

حيث أن الاحداثي الرأسي عند أي لحظة يتعين من $y = (u\sin\alpha)\ t - \frac{1}{2}gt^2$

وحيث أن أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة A هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

وعند ارتفاع يساوي نصف أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة B هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{4g}$

الزمن الذي يأخذه الجسيم من لحظة انطلاقه حتى يصل إلى النقطة B يتعين من

$$\frac{u^2\sin^2\alpha}{4g} = (u\sin\alpha)\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$2(gt)^2 - 4(gt)u\sin\alpha + u^2\sin^2\alpha = 0 \qquad \Rightarrow gt = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha$$

مركبتا سرعة الجسيم عند النقطة B هما

$$\dot{x}_B = u\cos\alpha, \quad \dot{y}_B = u\sin\alpha - gt = u\sin\alpha - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha$$

ويكون مقدار السرعة عند B هو

$$v = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha\right)^2} = \frac{u}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$$

عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}_A = 0$ ، $\dot{x}_A = u\cos\alpha$ أي أن

$$v = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = u\cos\alpha$$

وحيث أن $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{6}{7}}$ وبالتالي

$$\frac{\sqrt{2}u\cos\alpha}{u\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \qquad \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{Or} \quad \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{3}{7}$$

$$7\cos^2\alpha = 3 + 3\cos^2\alpha \qquad \Rightarrow 4\cos^2\alpha = 3 \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \alpha = 30^0$$

وهو المطلوب

مثـــال ١٠

اطلقت كرة من نقطة على سطح الأرض تبعد مسافة a من قاعدة حائط رأسي ارتفاعـــه b إذا كانت زاوية القذف مع الافقي α والكرة مرت بحافة الحائط اثبت أن أقصـــى ارتفـــاع للكرة هو $\dfrac{a^2 \tan^2 \alpha}{4(a \tan \alpha - b)}$.

الحــــــــل

نفترض أن سرعة القذف هي u وحيث أن الكرة تمس الحائط ومن ثم فإن النقطة (a, b) تقع على مسار الكرة ومن ثم فهي تحقق معادلة المسار

$$b = a \tan \alpha - \frac{ga^2}{2u^2 \cos^2 \alpha} \qquad \text{Or} \qquad a \tan \alpha - b = \frac{ga^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\therefore u^2 = \frac{ga^2}{2(a \tan \alpha - b) \cos^2 \alpha}$$

والآن أقصى ارتفاع للكرة

$$\begin{aligned} Y &= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{2g} \frac{ga^2}{2(a \tan \alpha - b) \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{a^2 \tan^2 \alpha}{4(a \tan \alpha - b)} \end{aligned}$$

■ حركة مقذوف مع اعتبار مقاومة الهواء

درسنا في الجزء السابق حركة المقذوف مع اهمال مقاومة الهواء وهي حالة مثالية حيث أنه في الواقع توجد مقاومة لحركة الجسيم المقذوف وهي مقاومة الهواء ، دعنا نفترض أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسيم وهي $\gamma m\underline{v}$ (حيث γm ثابت التناسب) والآن بكتابة قانون نيوتن الاساسي وبالتحليل في الاتجاهين الأفقي و الرأسي نحصل على

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\gamma\cancel{m}\dot{x} \quad \text{and} \quad \cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g - \gamma\cancel{m}\dot{y} \qquad (1)$$

لاحظ أن $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ و $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ وبتكامل شقي المعادلة (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\ln\dot{x} = c_1 - \gamma t \quad \text{and} \quad \ln\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) = c_2 - \gamma t \qquad (2)$$

حيث c_2, c_1 ثابتا التكامل و اللذان يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية للحركة وهي عند $t = 0\dot{x} = u\cos\alpha$ يكون $\dot{y} = u\sin\alpha,\ \dot{x} = u\cos\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = \ln u\cos\alpha$ و $c_2 = \ln\left(u\sin\alpha + \dfrac{g}{\gamma}\right)$ بالتعويض عن قيمة الثابتين تأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha\ e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \qquad (3)$$

وجزئي هذه المعادلة يعينان مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة زمنية. مرةً أخرى بإجراء التكامل بالنسبة للزمن لجزئي المعادلة (3) يكون

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ e^{-\gamma t} + c_3 \quad \text{and} \quad y = -\frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}t + c_4 \qquad (4)$$

ايضاً الثابتان c_4, c_3 يمكن تعيين قيمتهما من الشرط الابتدائي للحركة فعند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = y = 0$ ومنها نجد أن

$$c_3 = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}, \qquad c_4 = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$$

وتأخذ المعادلة السابقة (4) الصورة

$$x = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ \ 1 - e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)\ 1 - e^{-\gamma t}\ \ - \frac{g}{\gamma}t \qquad (5)$$

وجزئا هذه المعادلة يعينان موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

و للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نضع $\dot{y}=0$ في المعادلة (3) ومن ثم

$$T=\frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma u\sin\alpha}{g}+1\right) \tag{6}$$

ويتعين أقصى ارتفاع من المعادلة (5) أي أن

$$y=\frac{u\sin\alpha}{\gamma}-\frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1+\frac{\gamma u\sin\alpha}{g}\right)$$

زمن الطيران T' يتعين بوضع $y=0$ في الشق الثاني من المعادلة (5)

$$T'=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u\sin\alpha}{g}+1\right)\ 1-e^{-\gamma T'}$$

أما معادلة المسار فتتعين بحذف البارامتر بين جزئي المعادلة وتأخذ الصورة

$$y=\frac{g}{\gamma u\cos\alpha}\left(\frac{\gamma u\sin\alpha}{g}+1\right)x+\frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1-\frac{\gamma x}{u\cos\alpha}\right)$$

وأخيراً يجب أن نلاحظ أن الحركة التي سبق دراستها عند اهمال مقاومة الهواء هي حالة خاصة من هذه الحالة ويمكن الحصول على جميع النتائج والمعادلات التي سبق الحصول عليها (عند اهمال مقاومة الهواء) بجعل $\gamma\to 0$ فمثلاً للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نستخدم المفكوك اللوغاريتمي

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-.....$$

هذا المفكوك صحيح بشرط أن $|x|<1$ والآن بجعل $\gamma\to 0$ في المعادلة (6) نجد أن

$$\begin{aligned}T&=\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u\sin\alpha}{g}-\frac{\gamma^2u^2\sin^2\alpha}{2g^2}+\frac{\gamma^3u^3\sin^3\alpha}{3g}+....\right)\\&=\lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{u\sin\alpha}{g}-\frac{\gamma u^2\sin^2\alpha}{2g^2}+\frac{\gamma u^3\sin^3\alpha}{3g}+....\right)=\frac{u\sin\alpha}{g}\end{aligned}$$

وهو نفسه زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع والذي سبق الحصول عليه عند اهمال مقاومة الهواء (المعادلة (6)) ونترك للقارئ كتمرين الحصول على بقية النتائج في حالة اهمال مقاومة الهواء.

مثـ ١١ ـــال

قذف جسيم كتلته m بسرعة u و في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاومتـــه تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب يساوي μm. اثبت أن اتجاه حركته يصنع زاويـــة مقدارها α مع الأفقي بعد مضي زمن $\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu u}{g}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.

الحـــــــل

بكتابة معادلتي الحركة للجسيم في الاتجاهين OX, OY والتكامل واستخدام الشروط الابتدائية للحركة كما سبق أن اوضحنا بالتفصيل نحصل على مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة في الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha \; e^{-\mu t} \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}$$

حيث أن زاوية القذف هي α وأن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة مع المحور الأفقي تتناقص حتى تنعدم عند أقصى ارتفاع ثم يعكس الجسيم اتجاه حركته لتصبح الزاوية α لأسفل. يصنع اتجاه الحركة زاوية α بعد زمن t يتعين من

$$\tan\ -\alpha\ = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}}{u\cos\alpha \; e^{-\mu t}} = -\tan\ \alpha$$

أي أن

$$\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu} = -u\sin\alpha \; e^{-\mu t} \;\Rightarrow \left(2u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} = \frac{g}{\mu}$$

$$\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right) = e^{\mu t} \qquad \Rightarrow t = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right)$$

وهو المطلوب.

■ مســــائل Problems ■

قُذف جسيم بسرعة $\underline{u} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j}$ من نقطة A لتصطدم بسقف منزل ارتفاعــه ℓ عــن المستوى الأفقي المار بالنقطة A . فإذا كان أقصى ارتفاع للجسيم يساوي 2ℓ . فاثبــت أن سرعة الجسيم عند أصطدامه بسقف المنزل تتعين من $\underline{u}_A = a\,\hat{i} - \sqrt{b^2 - 2g\ell}\,\hat{j}$.

الحركـــــة في وسط مقـــــاوم

Motion in a Resisting Medium

تُعالج الكينماتيكا – كما رأينا – وصف الحركة المجردة دون التعرض لبواعث تغيير هـــذه الحركة. والميكانيكا الكلاسيكية أو الميكانيكا النيوتونية مبنية على عدة قوانين وضعها العـــالم الانجليزي المعرف سير اسحق نيوتن في القرن السابع عشر وهي معروفة باسمه و أثبتت التجربة والمشاهدة معاً إلى يومنا هذا دقة هذه القوانين في وصفها لحركة الاجسام الا في حالات نادرة والتي تكون فيها سرعة الاجسام هائلة ، مما دعا ألبرت أينشتين رائد نظرية النسبية الأول إلى اعادة التفكير في الأسس التي أقام عليها العالم نيوتن نظريته االميكانيكية فخرج على العـــالم في بدايات القرن العشرين بنوع آخر من الميكانيكا يعتمد في جوهره على النسبية. تمتاز ميكانيكا نيوتن بسهولة في التفكير والتطبيق مع دقةٍ كافيةٍ لاغلب التطبيقات والأغراض الهندسية جعلتنا نستمر حتى يومنا هذا في استعمالها و تطبيقها مُرجئين الأخذ بأساليب النسبية إلى بضع حالات من الحركة السريعة جداً كحركة الالكترونات.

■ قوانين نيوتن للحركة Newton's Laws of Motion

القانون الأول

وينص على أن "كل جسيم بعيد عن المؤثرات يظل محتفظاً بحالة حركته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم وفقاً لأحوال البداية"

فإذا ما لاحظنا تغيّراً في سرعة الجسيم سواء كان ذلك في المقدار أو الاتجاه أو التغير في كليهما معاً وهو ما عُرف بعجلة الجسيم فقد نسب نيوتن هذا التغير أو هذه العجلة إلى مؤثر أسمـــاه القوة. و على هذا يمكن تعريف القوة على أنها ذلك المؤثر الي يُحدث تغييراً في حالة الجسم أو بتعبير آخر هو المؤثر الذي يُحدث العجلة.

القانون الثاني

لقد أستخدم هذا القانون كأساس للديناميكا. وينص هذا القانون على "هناك تناسب مباشـــر بين القوة المؤثرة والعجلة الناتجة". و وجد أن ثابت التناسب هو كتلة الجسيم m. أو بعبارةٍ

أخرى "المعدل الزمني للتغير في كمية حركة الجسيم يتناسب مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه ويكون في اتجاهها".

تُعرف كمية حركة الجسيم بحاصل ضرب كتلته في سرعته أي أن $\underline{P} = m\underline{v}$ وهي تبعاً لذلك كمية متجهه وبالتالي يمكن صياغة قانون نيوتن الثاني على الصورة

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = m\frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{v}\frac{dm}{dt}$$

وفي دراستنا هنا سنعتبر كتلة الجسيم ثابتة ومن ثم $\frac{dm}{dt} = 0$ ويأخذ قانون نيوتن الصورة $\underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a}$ حيث $\underline{a}$ يمثل متجه عجلة الجسيم.

نلاحظ أنه في الاحداثيات الكارتيزية تُعطى مركبات القوة في الصورة (F_x, F_y) وبالتالي

$$F_x = ma_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = ma_y = m\ddot{y}$$

و هذا القانون هو قانون لا يعتمد على برهان رياضي وإنما أثبتت التجارب صحته وتنبني عليه باقي قوانين الديناميكا بالاستنتاج الرياضي ولذا سُميّ بالقانون الأساسي للحركة.

القانون الثالث

ينص على أن "لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه و على خط واحد"

قانون الجذب العام

كل جسيمان يتجاذبان بقوة تتناسب طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مع مربع البعد بينهما و تؤثر في الخط الواصل بينهما وتأخذ الصورة الرياضية

$$\underline{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{F}$$

حيث m_1, m_2 تمثل كتلة الجسمين ، γ ثابت الجذب العام و يمكن تحديد قيمته تجريبياً وتساوي ، r هو البعد بين الكتلتين ، $\hat{F}$ متجه وحدة في اتجاه القوة .

ولقد تطرقنا في ابوابٍ سابقة إلى حركة الاجسام الساقطة او المقذوفة رأسياً لأعلى مع اهمال مقاومة الهواء – حركة الجسيم بعجلة ثابتة – والآن نتعرض لحركة الاجسام مع الأخذ في

الاعتبار مقاومة الهواء سواء كانت الحركة رأسية أو أفقية. لاحظ أنه في حالـة السـرعات الصغيرة فإن المقاومة تتناسب مع السرعة أما إذا كانت حركة الجسم بسرعة كـبيرة فـإن المقاومة تتناسب مع مربع السرعة.

■ دراسة حركة جسيم ساقط مع وجود مقاومة تتناسب مع سرعته

نفرض جسيم كتلته m سقط من السكون من نقطة O و بأخذ هذه النقطة كنقطة أصل و الخط الرأسي لأسفل هو المحور Y و حيث أن مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة أي أنه يؤثر على الجسيم اثناء حركته قوة الوزن mg رأسياً لأسفل و مقاومة الهواء R رأسـياً لأعلـى وتساوي μmv حيث v سرعة الجسيم عند اللحظة t ، μm ثابت التناسب

معادلة الحركة هي

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{g-\mu v} = dt \qquad \text{Or} \qquad \frac{-\mu dv}{g-\mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v) = c_1 - \mu t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 0$ عنـدما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g-\mu v) = \ln g - \mu t \qquad \text{Or} \quad v = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t كالتالي

$$\underset{v}{\frac{dy}{dt}} = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t} \qquad \Rightarrow \quad dy = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t}\ \ dt$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t}\ \ dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$y = \frac{g}{\mu}\left(t + \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right) + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $y=0$ عنـــدما $t=0$ ومنها $c_2=-\dfrac{g}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y=\frac{g}{\mu}\left(t+\frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right)-\frac{g}{\mu^2}$$

وهذه العلاقة تعطي موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية t

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم كتلته m أفقياً في وسط مقاومته αmv حيث α ثابت ، v سرعة الجســـيم فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل بسرعة u فأوجد المسافة التي يتحركها الجسيم بعد زمن .

الحـــــــل

معادلة الحركة الأفقية للجسيم (لاحظ أن قوة الوزن ليس لها تأثير) هي

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\alpha dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(v) = c_1 - \alpha t \tag{1}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln u$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(v) = \ln u - \alpha t \qquad \text{Or} \quad v = ue^{-\alpha t} \tag{2}$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عند أي لحظة t كالتالي

$$\frac{dx}{dt} = ue^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad dx = ue^{-\alpha t}dt$$

v

$$\Rightarrow \int dx = \int ue^{-\alpha t}dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$x = -\frac{u}{\alpha}e^{-\alpha t} + c_2 \tag{3}$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $x = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{u}{\alpha}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$x = \frac{u}{\alpha}\ 1 - e^{-\alpha t}$$

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم كتلته الوحدة في وسط مقاومته تساوي $\lambda v + \mu v^2$ فإذا كانت المقاومة هـــي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسيم فأوجد المسافة المقطوعة قبل أن يقف الجسيم إذا علمت أن سرعته الابتدائية u .

الحـــــــــل

معادلة الحركة للكتلة هي– قوة المقاومة هي القوة الوحيدة المؤثرة –

$$v\frac{dv}{dx} = -(\lambda v + \mu v^2) \qquad \Rightarrow \frac{\mu dv}{\lambda + \mu v} = -\mu dx$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(\lambda + \mu v) = c_1 - \mu x \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $x = 0$ ومنها $c_1 = \ln(\lambda + \mu u)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(\lambda + \mu v) = \ln(\lambda + \mu u) - \mu x \qquad \text{Or} \quad \ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda + \mu v}\right) = \mu x \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عندما تنعدم السرعة

$$x\Big|_{v=0} = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda}\right) = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}u\right)$$

مثـــ ٣ ـــال

قذف جسيمان كتلة كل منهما m رأسياً إلى اسفل من نفس النقطة و في نفـــس اللحظـــة بسرعتين u_1, u_2 في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة و ثابت التناسب μm فإذا كانـــت u_1', u_2' هما سرعتي الجسيمان بعد مضي زمن T فاثبت ان $u_1' - u_2' = (u_1 - u_2)e^{-\mu T}$.

الحـــــــــل

بالنسبة للكتلة الأولى نفرض أن سرعتها عند أي لحظة هي ومن ثم فإن معادلة الحركة لها

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu m v \quad \Rightarrow \frac{dv}{g - \mu v} = dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv}{g - \mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v)=c-\mu t$$

حيث c ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v=u_1$ عنـــدما $t=0$ ومنها $c=\ln(g-\mu u_1)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v)=\ln(g-\mu u_1)-\mu t \qquad \text{Or} \qquad g-\mu v=(g-\mu u_1)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_1' أي أن

$$g-\mu u_1'=(g-\mu u_1)e^{-\mu T} \qquad (1)$$

بالنسبة للكتلة الثانية نفرض أن سرعتها عند أي لحظة t هي v' وباتالي معادلة حركتها

$$m\frac{dv'}{dt}=mg-\mu mv' \quad \Rightarrow \frac{dv'}{g-\mu v}=dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv'}{g-\mu v'}=-\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v')=c'-\mu t$$

حيث c' ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v'=u_2$ عنـــدما $t=0$ ومنها $c'=\ln(g-\mu u_2)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v')=\ln(g-\mu u_2)-\mu t \qquad \text{Or} \qquad g-\mu v'=(g-\mu u_2)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_2' أي أن

$$g-\mu u_2'=(g-\mu u_2)e^{-\mu T} \qquad (2)$$

وبطرح المعادلتين (2) , (1) نجد أن

$$\mu \quad u_1'-u_2' \quad =\mu(u_1-u_2)e^{-\mu T} \qquad \text{Or} \qquad u_1'-u_2'=(u_1-u_2)e^{-\mu T}$$

وهو المطلوب اثباته

مثـــ ٤ ـــال

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى بسرعة أبتدائية $\sqrt{g\mu^{-1}}$ في وسط مقاومته لوحدة الكتل تساوي μv^2 حيث v سرعة النقطة المادية ، μ ثابت التناسب . اثبـــت أن أقصـــى ارتفاع للنقطة المادية هو $\frac{1}{2\mu}\ln 2$ وتصل إليه في زمن قدره $\frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$.

الحـــــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \mu mv^2 \quad \Rightarrow \frac{vdv}{g+\mu v^2} = -dy \quad \text{Or} \quad \frac{2\mu vdv}{g+\mu v^2} = -2\mu dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\mu v^2) = c_1 - 2\mu y \tag{1}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln 2g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g+\mu v) = \ln 2g - 2\mu y \quad \text{Or} \quad y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g+\mu v} \tag{2}$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t وعند أقصى ارتفاع يكون $v = 0$ وبالتالي

$$y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g} \qquad \Rightarrow Y = \frac{1}{2\mu}\ln 2$$

وهو أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم وللحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع حيث

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu mv^2 \quad \Rightarrow \frac{dv}{g+\mu v^2} = -dt \quad \text{Or} \quad \frac{\sqrt{\frac{\mu}{g}}dv}{1+\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right)^2} = -\sqrt{g\mu}\,dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = c_2 - \sqrt{g\mu}\,t \tag{3}$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{\pi}{4}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = \frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t \qquad \text{Or} \qquad v = \sqrt{\frac{g}{\mu}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right)$$

وهذه المعادلة تعطي السرعة عند أي لحظة زمنية وعند $v = 0$ فإن t

$$0 = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\, t\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\, t\right) = 0 \qquad \text{Or} \quad t = \frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$$

مثـــ ٥ ـــال

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب μm فإذا تلاشت سرعة النقطة المادية بعد زمن T من لحظة القذف وعلى ارتفاع ℓ من نقطة القذف فاثبت إن السرعة الابتدائية التي قذفت بها النقطة المادية هي $\mu\ell + gT$.

الحـــــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{\mu dv}{g + \mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g + \mu v) = c_1 - \mu t \tag{1}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $t = 0$ – بفرض أن سرعة القذف u والمراد تعيينها – ومنها $c_1 = \ln(g + \mu u)$ وتأخـــذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g + \mu v) = \ln(g + \mu u) - \mu t \qquad \text{Or} \quad g + \mu v = \; g + \mu u \;\; e^{-\mu t}$$

$$\text{at } \; t = T, \; v = 0 \quad \Rightarrow \; g = \; g + \mu u \;\; e^{-\mu T} \tag{2}$$

وللحصول على ارتفاع النقطة حيث

$$\because \; g + \mu v = (g + \mu u)e^{-\mu t} \qquad \text{Or} \qquad v = \frac{1}{\mu} \; (g + \mu u)e^{-\mu t} \; - g$$

ولكن $v = \dfrac{dy}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu} \; (g + \mu u)e^{-\mu t} \; - g \qquad \Rightarrow dy = \frac{1}{\mu} \; (g + \mu u)e^{-\mu t} \; - g \;\; dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$y = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{(g + \mu u)}{\mu} e^{-\mu t} \; + gt\right) + c_2 \tag{3}$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط الحركة وهي $y = 0$ عندما $t = 0$ ومنـــها $c_2 = \dfrac{(g+\mu u)}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{(g+\mu u)}{\mu}e^{-\mu t} + gt\right)$$

والآن بالتعويض عن $y = \ell$ عندما $t = T$

$$\ell = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} - \frac{gT}{\mu}$$
$$\Rightarrow \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \quad \text{Or} \quad \frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell$$

(استخدمنا المعادلة (2))

$$\frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \qquad \Rightarrow u = gT + \mu\ell$$

و هو المطلوب اثباته

مثـــ ٦ ـــال

قذف جسيم كتلته m رأسياً لأعلى بسرعة u في وسط مقاومته تساوي $m\gamma v^2$. أثبت أن الجسيم يعود إلى نقطة القذف بسرعة قدرها $\dfrac{uu'}{\sqrt{u^2+u'^2}}$ حيث $u' = \sqrt{g\gamma^{-1}}$

الحـــــــل

لمعرفة السرعة التي يعود بها الجسيم إلى نقطة القذف نتبع حركته اثناء الصعود حتى يتوقف ثم يرجع مرة ثانية.

اثناء الصعود معادلة الحركة هي – اخترنا المحور Y رأسياً لأعلى ونقطة القذف هـــي نقطـــة الأصل–

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g+\gamma v^2} = -2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\gamma v^2) = c_1 - 2\gamma y \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln(g+\gamma u^2)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g+\gamma v^2)=\ln(g+\gamma u^2)-2\gamma y \quad Or \quad y=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g+\gamma u^2}{g+\gamma v^2}\right)$$

ويقف الجسيم عند انعدام سرعته وبالتعويض عن $v=0$ في المعادلة السابقة نجد أن

$$y\Big|_{v=0}=Y=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g+\gamma u^2}{g}\right)=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(1+\frac{u^2}{u'^2}\right),\quad (u'^2=\frac{g}{\gamma})$$

و الآن باعتبار الحركة أثناء الهبوط ، سنأخذ في هذه الحالة نقطة السقوط هي نقطة الأصل الجديدة والمحور Y لإسفل ويكون الشرط الابتدائي هو $v=0$ عندما $y=0$ حيث v سرعة الجسيم عند أي لحظة اثناء السقوط. والآن بكتابة معادلة الحركة اثناء السقوط

$$mv\frac{dv}{dy}=mg-\gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g-\gamma v^2}=-2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\gamma v^2)=c_2-2\gamma y \tag{2}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v=0$ عندما $y=0$ ومنها $c_2=\ln g$ وتأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\ln(g-\gamma v^2)=\ln g-2\gamma y \quad \text{Or} \quad y=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g-\gamma v^2}\right)$$

وتصبح سرعة الجسيم عند عودته إلى نقطة القذف أي عند ارتفاع Y هي

$$\frac{1}{2\gamma}\ln\left(1+\frac{u^2}{u'^2}\right)=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g-\gamma v^2}\right) \quad \text{Or} \quad 1+\frac{u^2}{u'^2}=\frac{g}{g-\gamma v^2}$$

$$\therefore \frac{u'^2+u^2}{u'^2}=\frac{g}{g-\gamma v^2} \quad \Rightarrow g-\gamma v^2=\frac{gu'^2}{u'^2+u^2} \quad \Rightarrow \gamma v^2=g-\frac{gu'^2}{u'^2+u^2}$$

$$\begin{aligned} v^2 &= u'^2-\frac{u'^4}{u'^2+u^2}=\frac{u'^2(u'^2+u^2)}{u'^2+u^2}-\frac{u'^4}{u'^2+u^2} \\ &= \frac{u'^2u^2}{u'^2+u^2} \qquad \therefore v=\frac{uu'}{\sqrt{u^2+u'^2}} \quad (u'^2=\frac{g}{\gamma}) \end{aligned}$$

■ الشغل والطاقة Work and Energy

إذا تحركت نقطة مادية تحت تأثير قوة يُقال أن القوة بذلت شغلاً ويُعرف الشغل المبذول بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة التي تحركتها النقطة المادية في اتجاه تأثي القوة أي أن

$$W = \underline{F}.\underline{r} = F\, r \cos\theta$$

لاحظ أن المركبة العمودية على متجه الازاحة لا تبذل شغلاً. العلاقة السابقة التي تُعطي الشغل تستخدم حينما تكون القوة غير متغيرة أما إذا كانت القوة متغيرة فإن الشغل المبذول في ازاحة صغيرة $d\underline{r}$ هو

$$dW = \underline{F}.d\underline{r} = F\, dr \cos\theta$$

ويكون الشغل الكلي المبذول يُعطى بالعلاقة $W = \int \underline{F}.d\underline{r}$ و هو كمية قياسية وإذا كانت $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن الشغل يكون

$$W = \int F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

<u>وحدات الشغل</u> و يقاس الشـــغل بوحـــدات الأرج أو الجـــول حيـــث $\text{Joule} = 10^7\ \text{erg}$ ، $\text{erg} = \text{dyne} \times \text{cm}$

■ <u>الطاقة</u> وتعرف على أنها مقدرة الجسم على بذل شغل و وحداتها هي نفس وحدات الشغل وهناك نوعان

■ طاقة الحركة

تعرف طاقة الحركة لجسيم كتلته m و سرعته v بالعلاقة $T = \frac{1}{2} m v^2$ و هي كمية قياسية موجبة وتقاس بالشغل المبذول بواسطة قوة في تحريك الجسيم حتى يصل إلى حالة الســـكون وحيث أن

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r} = \int_1^2 m\underline{\ddot{r}}.d\underline{r} = \int_1^2 m\underline{\ddot{r}}.\frac{d\underline{r}}{dt}dt$$

$$= m\int_1^2 \underline{\ddot{r}}.\underline{\dot{r}}\;\; dt = \frac{1}{2}m\int_1^2 \frac{d}{dt}\;\; \underline{\dot{r}}^2\;\; dt = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1$$

وتعرف هذه القاعدة بقاعدة الشغل والطاقة.

■ طاقة الوضع

في الديناميكا عادة تسمى طاقة الجهد U بطاقة الوضع لأن الجسيم يكتسب طاقة نتيجة لموضعه. تعرف طاقة الجهد او طاقة الوضع بأنها الشغل المبذول ضد القوة المؤثرة على الجسيم في تحريكه من نقطة إلى أخرى فإذا كان الشغل المبذول هو W طاقة الجهد بين الموضعين $1,2$ هي

$$U_2 - U_1 = -W_{1\to 2} = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

ويمكن أعتبار أن طاقة الوضع لجسيم كتلته m وعلى ارتفاع h من سطح الأرض تساوي الشغل المبذول اثناء هبوطه نفس المسافة حتى يعود غلى سطح الأرض أي أن

$$U = Fh = mgh$$

وطاقة الجهد هي دالة قياسية تعتمد على الموضع فقط ولا تعتمد على الزمن صراحةً. العلاقة السابقة

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

و التي تربط القوة مع طاقة الجهد هي علاقة خاصة – ليست صحيحة لجميع أنواع القوى – ولكنها صحيحة لبعض أنواع القوى وتسمى القوى المحافظة. لاحظ أن وحدات طاقة الجهد هي نفسها وحدات الشغل.

■ مبدأ ثبوت الطاقة

ينص هذا المبدأ على أن الطاقة لا تفنى ولا تستحدث من العدم بليمكن تحويلها من صورة إلى اخرى وفي حالة الطاقة الميكانيكية فإن مجموع طاقتى الحركة و الوضع لجسم ما مقدار ثابت.

من المعادلة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ والمعادلة $T_2 - T_1 = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ نجد أن

$$U_2 - U_1 = -(T_2 - T_1) \qquad \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

ونستنتج أن مجموع طاقتي الحركة والجهد يساوي مقداراً ثابتاً ويرمز له بالرمز E والذي يمثل الطاقة الكلية للجسم و هذا هو مبدأ ثبوت الطاقة والذي يمكن كتابته في الصورة

$$T + U = E$$

■ القدرة

في الآلات فإننا نهتم بالشغل المبذول بواسطة الآلة في وقت محدد و هو ما يقيس قدرة الآلة. و تعرف القدرة بأنها المعدل الزمني للشغل المبذول ويرمز لها بالرمز P ، أي أن $P = \dfrac{dW}{dt}$ و حيث أن $dW = \underline{F}.d\underline{r}$ وبالتالي تكون القدرة $P = \dfrac{\underline{F}.d\underline{r}}{dt} = \underline{F}.\underline{v}$ حيث $\underline{v}$ هـــو متجـــه السرعة. وحدات القدرة منها الوات حيث $\text{Watt} = \text{Joule}\,\text{sec}^{-1}$ و أيضاً الكيلو وات حيث $\text{K.W.} = 10^3\ \text{Watt}$ و أيضاً الحصان حيث $\text{hp} = 745.7\,\text{Watt}$.

■ القوى والمجالات المحافظة

سبق أن ذكرنا أن القوى المحافظة هي التي تحقق العلاقة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ و نلاحظ أن الشغل المبذول بمثل هذه القوة في ازاحة جسيم من الموضع 1 إلى الموضع 2 لا يعتمد علـــى نوع المسار ولكن فقط على موضعي البداية والنهاية

فإذا أعتبرنا $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن

$$dU = -\underline{F}.d\underline{r} = -\ \ F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

وحيث أن

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

وبمقانة العلاقتين الأخيرتين نجد أن

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

وعندما تحقق القوة $\underline{F}$ العلاقة الأخيرة فإنه يكون $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ حيث $\underline{\nabla} \wedge \underline{F}$ يسمى دوران القوة و يتعين من

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

و هذا هو الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

اوجـــد الشـــغل الـــذي تبذلـــه القـــوة $\underline{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ لازاحـــة جســـيم الازاحـــة $\underline{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$.

الحـــــــل

الشغل المبذول W و الذي تبذله القوة $\underline{F}$ لازاحة جسيم الازاحة $\underline{r}$ يتعين من

$$W = \underline{F}.\underline{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right) . \left(3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}\right) = 6 - 2 + 5 = 9$$

مثـــ ٢ ـــال

اثبت أن مجال القـــوة $\underline{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\,\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$ محـــافظ وأوجد دالة الجهد.

الحـــــــل

نعلم أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً هو $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} = &\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(3xy^2z^2 - 6x^2z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(2xyz^3\right)\right\}\hat{i} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(y^2z^3 - 6xz^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2z^2 - 6x^2z\right)\right\}\hat{j} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2xyz^3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2z^3 - 6xz^2\right)\right\}\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = &(6xyz^2 - 6xyz^2)\hat{i} + (3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz)\hat{j} \\ &+ (2yz^3 - 2yz^3)\hat{k} = \underline{0} \end{aligned}$$

أي أن مجال القوة محافظ.لإيجاد دالة الجهد وحيث أن القوة محافظة ومن ثم تتحقق العلاقـــات التالية

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

أي أن

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(y^2 z^3 - 6xz^2),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2xyz^3,$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = -(3xy^2 z^2 - 6x^2 z)$$

بتكامل المعادلات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y, z ثابتين – ، بالنسبة إلي y – مع بقاء x, z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x, y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3 + f_1(y, z),$$
$$U = -xy^2 z^3 + f_2(x, z),$$
$$U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3 + f_3(x, y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y,z) = c, \quad f_2(x,z) = 3x^2 z^2 + c, \quad f_3(x,y) = c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3$$

(في هذا المثال أوجد الشغل المبذول لتحريك الجسيم من الموضع $A(-2,1,3)$ إلى الموضع $B(1,-2,-1)$)

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= U_1 - U_2 = U(-2,1,3) - U(1,-2,-1) \\ &= 3(-2)^2(3)^2 - (-2)(1)^2(3)^3 - \; 3(1)^2(-1)^2 - (1)(-2)^2(-1)^3 \;= 155 \end{aligned}$$

مثـــ ٣ ـــال

جسيم كتلته $2m^2$ يتحرك على المحور OX (في خط مستقيم) تحت تأثير قوة محافظة. إذا كان الجسيم عند الموضعين x_1, x_2 عند اللحظتين t_1, t_2 على الترتيب و أن $U(x)$ هي طاقة الجهد و أن E هي الطاقة الكلية فاثبت أن $t_2 - t_1 = m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$.

الحـــــــل

نعلم أن الطاقة الكلية E هو مجموع طاقتي الحركة T والوضع $U(x)$ وهو مقدار ثابـــت ، أي أن

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

ولكن $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ومنها

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \quad \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\;\; E - U(x) \quad \text{Or}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\, dt$$

باجراء التكامل بين الموضعين x_1, x_2 المناظرين للحظتين t_1, t_2 نحصل على

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad \Rightarrow t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

وهو المطلوب اثباته.

مثـــ ٤ ـــال

في المثال السابق إذا كانت طاقة الجهد تعطى بالعلاقة $U(x) = \frac{1}{2}mk^2x^2$ وأن الجسيم بـــدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فاثبت أن $x = a\cos kt$.

الحـــــــل

حيث أن الجسيم بدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فإن الطاقة الكلية تعين من

$$E = T + U(x = a) = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}mk^2a^2 = \frac{1}{2}mk^2a^2$$

بتكامل المعادلة $dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$ بين الموضعين (موضع البداية a وموضع عـــام x المناظرين للزمنين $t = 0$ والزمن t على الترتيب)

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = \int_0^t dt \qquad \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}mk^2a^2 - \frac{1}{2}mk^2x^2}} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = t\Big|_0^t = t$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)}_{\pi/2} = kt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = kt + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = a\cos\ kt$$

<u>لاحظ أن</u> $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم كتلتــه m في المســتوى XY بحيــث أن متجــه موضــعه يــتعين مــن $\underline{r} = a\cos\omega t\,\hat{i} + b\sin\omega t\,\hat{j}$ حيث a, b, ω ثوابت أثبت أن القوة المؤثرة علــى الجســم محافظة و أوجد طاقة الجهد و طاقة الحركة عند أي موضع و تحقق من مبدأ ثبوت الطاقة.

الحـــــــل

$$\because\ \underline{r} = a\cos\omega t\,\hat{i} + b\sin\omega t\,\hat{j} \quad = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\hat{i} + b\omega\cos\omega t\,\hat{j} \qquad \text{and}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\hat{j} = -\omega^2(x\,\hat{i} + y\,\hat{j})$$

وحيث أن القوة المؤثرة على الجسم تتعين من

$$\underline{F} = m\underline{a} = -m\omega^2\ \ x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

يكون مجال القوة محافظاً إذا تحقق $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = -m\omega^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

وبالتالي فإن مجال القوة محافظ. لإيجاد طاقة الجهد نستخدم العلاقة $\underline{F} = -\underline{\nabla} U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m\omega^2 x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = m\omega^2 y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

بتكامل العلاقات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y, z ثابتين – ، بالنسبة إلي y – مع بقاء x, z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x, y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + f_1(y,z),$$
$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + f_2(x,z),$$
$$U = f_3(x,y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 c,$$
$$f_2(x,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + c,$$
$$f_3(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \ \ x^2 + y^2$$

طاقة الحركة تتعين من – حيث $\underline{v} = -a\omega \sin\omega t\, \hat{i} + b\omega \cos\omega t\, \hat{j}$ –

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \ \ a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t$$

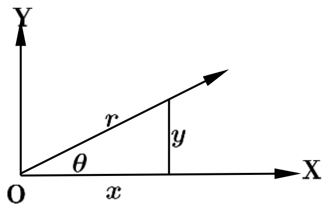
وللتحقق من مبدأ ثبوت الطاقة

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{1}{2} m\omega^2 \left(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t \right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t \right) \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + b^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)) \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 + b^2) = \text{Constant} \end{aligned}$$

■ مســـــائل Problems ■

الحـــــركة في المستوي القطبي

Motion in Polar Co-ordinates



من المناسب في بعض المسائل استخدام احداثيات أخرى غير الاحداثيات الكارتيزية ومن هذه الاحداثيات هي الاحداثيات القطبية.العلاقة بين الاحداثيات القطبيـــة والكارتيزية كما بالهمدسة تتعين من

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

■ السرعة الزاوية و العجلة الزاوية Angular Velocity and Acceleration

نعتبر جسيم يتحرك في مستوى ، وأن O نقطة ثابتة فيه (تسمى القطب) وكذلك مســـتقيم OX ثابت في المستوى. عند اللحظة الزمنية t يكون موضع الجسيم عند النقطة P حيـــث OP يصنع زاوية θ مع الخط الثابت OX . الزاوية θ تسمى الازاحة الزاوية للجسيم عند هذه اللحظة وبعد مرور زمن صغير δt نفرض أن الجسيم عند الموضع Q حيث OQ يصنع زاوية $\theta + \delta\theta$ مع الخط الثابت ، أي أن الجسيم أُزيح ازاحة زاوية $\delta\theta$ في زمن δt ومن ثم تكون السرعة الزاوية المتوسطة للجسيم حول O مساوية $\frac{\delta\theta}{\delta t}$ وعندما تؤول δt إلى الصفر فإننا نحصل على السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ ونرمز لها (عادةً) بالرمز ω أي أن

$$\text{Angular Velocity} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

و تعرف السرعة الزاوية للجسيم حول O بأنها معدل تغير الازاحة الزاوية بالنســـبة للـــزمن وايضاً فإن العجلة الزاوية للجسيم حول O هي معدل تغـــير الســـرعة الزاويـــة بالنســـبة للزمن أي أن

$$\text{Angular acceleration} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\dot{\theta}}{\delta t} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

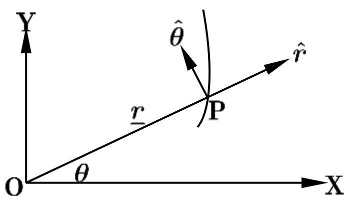
■ سرعة و عجلة الجسيم في الاحداثيات القطبية

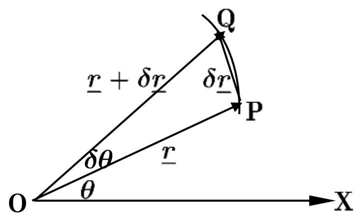
تستعمل هذه الاحداثيات في التحليل لدراسة حركة مستوية عندما تنشأ عجلة الجسيم من مركز أو قطب ثابت ويُختار هذا القطب ليكون هو النقطة الثابتة.

من الاحداثيات القطبية يتعين موضع الجسيم عند نقطة ما P بدلالة (r,θ) حيث r هو بعد الجسيم عن نقطة ثابتة O $\underline{r} = \mathbf{OP}$ ، θ هي الزاوية التى يصنعها r مع مستقيم ثابت OX ويلاحظ أن اتجاهي التحليل في هذه الحالة ليسا ثابتين كما كان الحال في الاحداثيات الكارتيزية بل يدوران مع حركة الجسيم. والعلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية (x,y) والاحداثيات القطبية (r,θ) من الهندسة هي

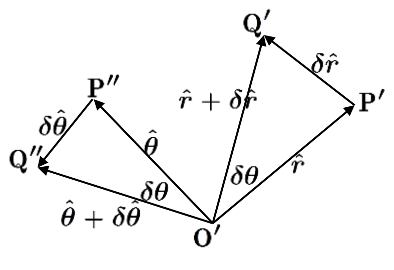
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

نفرض أن $\hat{r}$ هو متجه وحدة في اتجاه تزايد $\underline{r}$ ، وأن $\hat{\theta}$ هو متجه وحدة في الاتجاه العمودي على $\underline{r}$ – في اتجاه تزايد θ كما بالشكل





وبعد فترة زمنية صغيرة δt يصبح الجسيم عند النقطة Q حيث $\underline{\mathbf{OQ}} = \underline{r} + \delta\underline{r}$ و يصنع زاوية $\theta + \delta\theta$ مع المحور الثابت OX و أن متجي الوحدة عند Q في اتجاهي تزايد r,θ هما على الترتيب $\underline{r} + \delta\underline{r},\ \theta + \delta\theta$ وحيث أن $\delta\theta$ زاوية صغيرة فإن



$$\mathbf{P'Q'} = \left|\delta\hat{r}\right| = \mathbf{O'P'}\cdot\delta\theta = \delta\theta$$
$$\mathbf{P''Q''} = \left|\delta\hat{\theta}\right| = \mathbf{O'P''}\cdot\delta\theta = \delta\theta$$

وذلك لأن $\mathbf{O'P''} = \left|\hat{\theta}\right| = 1$, $\mathbf{O'P'} = \left|\hat{r}\right| = 1$ وعندما $\delta\theta \to 0$ فإن $\delta\hat{r}$ يصبح في اتجاه $\hat{\theta}$ وكذلك $\delta\hat{\theta}$ يصبح في اتجاه $-\hat{r}$ أي أن

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\hat{r}}{\delta\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \qquad \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\hat{\theta}}{\delta\theta} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad (\star)$$

وحيث أن متجه موضع الجسيم عند النقطة P هو $\underline{r} = r\,\hat{r}$ ولإيجاد سرعة الجسيم عند الموضع P بتفاضل العلاقة $\underline{r} = r\,\hat{r}$ بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\underbrace{\frac{d\hat{r}}{d\theta}}_{\hat{\theta}}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} \qquad (1)$$

ولكن من المعادلة $(\star)$ حيث $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$, $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$ وبالتعويض من تلك العلاقة في المعادلة (1) نجد أن

$$\underline{v} = \underbrace{\dot{r}\,\hat{r}}_{v_r} + \underbrace{r\dot{\theta}\,\hat{\theta}}_{v_\theta}$$

من هذه المعادلة يتضح أن متجه السرعة له مركبتين الأولى v_r في اتجاه تزايد r وتساوي $\dot{r}$ ، والمركبة الثانية v_θ عمودية على المركبة الأولى وفي اتجاه تزايد الزاوية θ وقيمتها $r\dot{\theta}$ كما بالشكل. كما أن مقدار السرعة هند أي لحظة يتعين من

$$v = \left|\underline{v}\right| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2}$$

و اتجاه السرعة هو اتجاه المماس لمنحنى المسار عند P ويصنع زاوية φ مع $\underline{r}$ حيث ويصنع متجه السرعة زاوية ψ مع $\underline{r}$ حيث

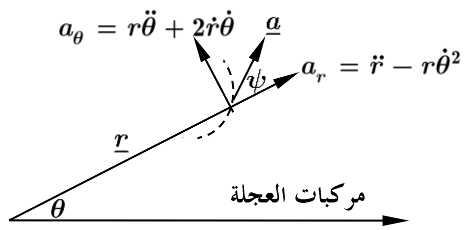
$$\tan\varphi = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}}$$

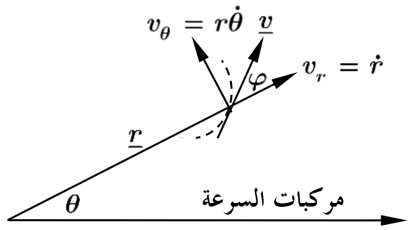
و الآن لايجاد متجه عجلة الجسيم في الاحداثيات القطبية عند أي لحظة نشتق المعادلة بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot r\,\hat r + \dot r\,\frac{d\hat r}{dt} + r\ddot\theta\,\hat\theta + \dot r\dot\theta\,\hat\theta + r\dot\theta\,\frac{d\hat\theta}{dt}$$

$$= \underbrace{(\ddot r - r\dot\theta^2)}_{a_r}\,\hat r + \underbrace{(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)}_{a_\theta}\,\hat\theta$$

وهذه المعادلة تُعطي عجلة الجسيم عند أي لحظة ويتضح أن متجه العجلة له مركبتـــان الأولى a_r في اتجاه تزايد r وتساوي $\ddot r - r\dot\theta^2$ ، والثانية a_θ عمودية على المركبة الأولى وفي اتجاه تزايد الزاوية وقيمتها $r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$ كما بالشكل.





■ <u>انتبه</u> المركبة الثانية للعجلة a_θ يمكن كتابتها في الصورة $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta)$ و ذلك لأن

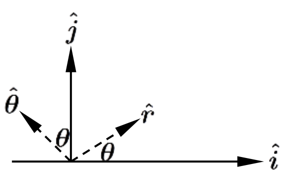
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\ddot\theta + 2r\dot r\dot\theta) = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$$

ومقدار العجلة يـــتعين مـــن $a = |\underline{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(\ddot r - r\dot\theta^2)^2 + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)^2}$

ويصنع متجه العجلة زاوية ψ مع $\underline{r}$ حيث $\tan\psi = \frac{a_\theta}{a_r} = \frac{r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta}{\ddot r - r\dot\theta^2}$

ويمكن اثبات أن $\frac{d\hat r}{d\theta} = \hat\theta, \quad \frac{d\hat\theta}{d\theta} = -\hat r$ بطريقة أخرى أبسط كالآتي

من الشكل المجاور وبتحليل متجهي الوحدة $\hat r, \hat\theta$ في الاتجاهين $\hat i, \hat j$ نجد أن



$$\hat{r}=\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j},\quad \hat{\theta}=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j} \tag{2}$$

(انتبه إلى أن) وكما ذكرنا آنفاً فإن $\hat{i},\hat{j}$ متجها وحدة ثابتان مقداراً واتجاهاً وبتفاضل شــقي المعادلة (2) السابقة بالنسبة للمتغير θ نحصل على

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta}=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}=\hat{\theta},\quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}=-\ \cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}\ =-\hat{r}$$

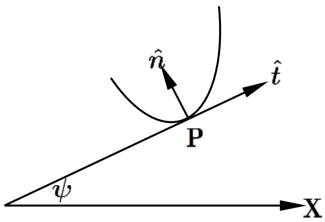
■ <u>حالة خاصة</u>: واضح أن الجسيم إذا تحرك على محيط دائرة نصف قطرها ℓ أي أن $r=\ell$ ويكون $\dot{r}=\ddot{r}=0$ ومن ثم تتعين سرعة الجسيم من العلاقة $\underline{v}=\ell\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ أي يكــون متجــه السرعة في الاتجاه العمودي على المماس للدائرة عند الجسيم وأيضاً فإن عجلة الجسيم تــتعين عند أي لحظة من $\underline{a}=-\ell\dot{\theta}^2\,\hat{r}+\ell\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$.

الاحداثيات الذاتية (الطبيعية) Intrinsic Coordinates

إذا تحرك جسيم في مستوى حركة مقيدة بمسار معين كانزلاق حلقة على سلك منحنى ثابت الشكل والوضع كانت الاتجاهات الطبيعية للتحليل هي اتجاه المماس لمنحنى المسار والعمودي عليه ويعرفان بالاحداثيات الطبيعية

ناخذ نقطة ثابتة ولتكن O على المنحنى الطبيعي ومن ثم يتم تحديد موضع النقطة P (أية نقطة على المنحنى) بطول القوس $S =$ OP بين النقطة الثابتة O والنقطة P وكذلك بمعرفة الزاوية ψ و التي يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة P مع الاتجاه الافقي OX ومن ثم فإن احداثيات النقطة P هي (S, ψ) والتي تعرف بالاحداثيات الذاتية و عندما تتحرك النقطة P على المنحنى فإن S تتغير مع ψ و العلاقة التي تربط هذا التغير $S = S(\psi)$ هي و تُسمى هذه المعادلة بالمعادلة الذاتية للمسار . أيضاً $\rho = \dfrac{dS}{d\psi}$ حيث ρ يُسمى نصف قطر التقوس أو الانحناء عند النقطة P أما $\dfrac{d\psi}{dS}$ يُسمى الانحناء للمنحنى عند النقطة P .

■ سرعة وعجلة الجسيم في الاحداثيات الذاتية

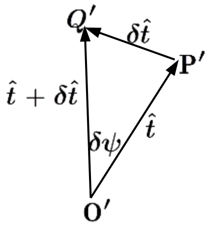


إذا كانت النقطة P نقطة متحركة على المنحنى حيث احداثياها (S, ψ) و بأخذ $\hat{t}$ متجه وحدة في اتجاه المماس للمنحنى عند النقطة P ، $\hat{n}$ متجه وحدة في اتجاه عمودي على المماس للمنحنى عند هذه النقطة – أي في اتجاه نصف قطر الانحناء –

واضح أنه حينما تتحرك النقطة P فإن متجهي الوحدة سيتغيران في الاتجاه من لحظة إلى اخرى – وهذا يعني أهما دوال في الزمن t (مع ثبوت أطوالهما الوحدة) –.

نفرض أن $\hat{n}, \hat{t}$ هما متجها وحدة في اتجاهي المماس لمنحنى المسار و العمودي عليه في اتجاه تزايد ψ. وبعد فترة زمنية صغيرة δt يصبح الجسيم عند الموضع Q حيث متجهي الوحدة في اتجاهي المماس والعمودي عليه يصبحان $\hat{n} + \delta\hat{n}, \hat{t} + \delta\hat{t}$ حيث المماسين عند Q, P يصنعان زاويتين $\psi + \delta\psi, \psi$ مع الخط الأفقي الثابت. نرسم $\hat{t} + \delta\hat{t}, \hat{t}$ المتجهين من نقطة

اصـــل O' كمـــا بالشـــكل و حيـــث أن $\delta\psi$ زاويـــة صـــغيرة فـــإن $P'Q' = \left|\delta\hat{t}\right| = O'P'\,\delta\psi = \delta\psi$ حيث $O'P' = \left|\hat{t}\right| = 1$ وعندما تؤول $\delta\psi$ إلى الصفر أي أن $\delta\psi \to 0$ فإن $\delta\hat{t}$ يصبح في اتجاه العمودي $\hat{n}$ أي أن $\lim\limits_{\delta\psi\to 0}\dfrac{\delta\hat{t}}{\delta\psi} = \dfrac{d\hat{t}}{d\psi} = \hat{n}$



وحيث أن سرعة الجسيم دائماً تكون في اتجاه المماس للمـــنحنى S وقيمتها $v = \left|\underline{v}\right| = \dot{S}$ و عليه فإن متجه الســـرعة في الاحـــداثيات الذاتية هو $\underline{v} = \dot{S}\,\hat{t}$

وبتفاضل تلك العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على متجة العجلة

$$\underline{a} = \frac{d^2S}{dt^2}\hat{t} + \frac{dS}{dt}\frac{d\hat{t}}{dt}, \qquad \because \frac{d\hat{t}}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{t}}{d\psi}}_{\hat{n}}\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}\hat{n} \qquad \Rightarrow \underline{a} = \frac{d^2S}{dt^2}\hat{t} + \frac{dS}{dt}\frac{d\psi}{dt}\hat{n}$$

أو $$\underline{a} = v\underbrace{\frac{dv}{dS}\hat{t}}_{a_t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\hat{n}}_{a_n} \quad \text{Or} \quad \underline{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \quad \text{Or} \quad \underline{a} = \ddot{S}\hat{t} + \dot{S}\dot{\psi}\hat{n}$$

لاحظ أن $$\frac{dS}{dt}\frac{d\psi}{dt} = \dot{S}\frac{d\psi}{dS}\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{\dot{S}} = \dot{S}^2\frac{d\psi}{dS} = \frac{\dot{S}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

أي أن متجة العجلة في الاحداثيات الذاتية لها مركبتان إحداهما a_t في اتجاه المماس ومقدارها $\dfrac{dv}{dt}$ ، والثانية a_n في الاتجاه العمودي على المماس – في اتجـــاه نصـــف قطـــر الانحنـــاء – ومقدارها $\dfrac{v^2}{\rho}$ ومقدار متجه العجلة يتعين من $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2}$

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم حركة مستوية بحيث كانت مركبتا سرعته في الاتجاهين ثابتتين. اثبت أن العجلة تتناسب عكسياً مع نصف قطر المتجه r.

الحـــــــل

حيث أن مركبتي السرعة ثابتتين فإن $\dot{r} = A$ و $r\dot{\theta} = B$ حيث A, B ثـــابتين وبالتفاضـــل بالنسبة للزمن نجد أن

$$\dot{r} = A \quad \Rightarrow \ddot{r} = 0 \qquad \text{و} \qquad r\dot{\theta} = B \quad \Rightarrow r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\because a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_r = 0 - \frac{B^2}{r} = -\frac{B^2}{r}$$

وايضاً

$$\because a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad a_\theta = \underbrace{r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}}_{0} + \dot{r}\dot{\theta} = \frac{AB}{r}$$

وحيث أن مقدار العجلة يتعين من

$$\begin{aligned} |\underline{a}| &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\frac{B^4}{r^2} + \frac{A^2B^2}{r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{B^4 + A^2B^2}{r^2}} = \frac{C}{r}, \qquad C = \sqrt{B^4 + A^2B^2} \end{aligned}$$

وهذه العلاقة تعنى أن العجلة تتناسب عكسياً مع r أي أن $a \propto \dfrac{1}{r}$

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم على منحنى معادلته القطبية $r = 2\cos\theta$ بحيث أن عجلته تتجه دائماً نحو قطب الاحداثيات. اثبت أن سرعته تتناسب عكسياً مع مربع بعده عن القطب.

الحـــــــل

حيث أن $r = 2\cos\theta$ وبالتفاضل بالنسبة للزمن يكون

$$r = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{r} = -2\sin\theta\ \dot{\theta}$$

وحيث أن العجلة تتجه دائماً نحو القطب فإن

$$a_r = 0 \qquad \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0 \qquad \Rightarrow d\ \ r^2\dot{\theta}\ \ = 0 \qquad \therefore r^2\dot{\theta} = h\ \text{(const.)}$$

ومقدار السرعة يتعين من

$$\begin{aligned}
\left|\underline{v}\right| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} &= \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} \\
&= \sqrt{(-2\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + (r\dot{\theta})^2} \\
&= \sqrt{4\sin^2\theta + r^2}\ \ \dot{\theta} \\
&= \sqrt{4(1-\cos^2\theta) + r^2}\,\dot{\theta} \\
&= \sqrt{4 - 4\cos^2\theta + r^2}\,\dot{\theta} \\
&= \sqrt{4 - r^2 + r^2}\,\dot{\theta} = 2\ \underbrace{\dot{\theta}}_{h/r^2}\ = \frac{2h}{r^2}
\end{aligned}$$

أي أن السرعة تتناسب عكسياً مع مربع r

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك نقطة مادية على منحنى بسرعة ثابتة فإذا كانت السرعة الزاوية لها حول نقطة ثابتة O تتناسب عكسياً مع بعدها عن هذه النقطة. اوجد معادلة المسار.

الحـــــــل

بفرض أن سرعة النقطة المادية V ثابت وكذلك فإن السرعة الزاوية للنقطة المادية تتناسب عكسياً مع r أي أن

$$\frac{d\theta}{dt} \propto \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r}\ \ (k\ \text{ is constant})$$

$$\because v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = V\ \ (V\ \text{ is constant})$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{k}{r}\right)^2 = V^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = V^2 - k^2$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{V^2 - k^2} = \mu$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mu \qquad \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}\frac{k}{r} = \mu \qquad \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\mu}{k}d\theta$$

بالتكامل

$$\therefore \ln r = \frac{\mu}{k}\theta + \ln c \ \ (\ln c \text{ is integration constant})$$

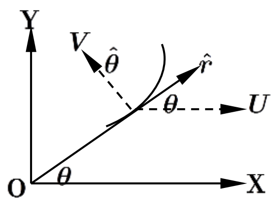
$$\therefore \ln\frac{r}{c} = \frac{\mu}{k}\theta \qquad \Rightarrow r = ce^{\mu/k\,\theta}$$

وهي تعطي معادلة المسار

مثـــ ٤ ـــال

تتحرك نقطة مادية على منحنى بحيث أن مركبتيه ثابتتان في المقدار احداهما U في اتجاه المحور X والثانية V متعامدة على متجه الموضع دائماً. اوجد المعادلة القطبية لمسار النقطة إذا علم أنها بدأت الحركة من الموضع $(a,0^0)$.

الحـــــــل



واضح أن السرعة V في اتجاه متجه الوحدة $\hat{\theta}$ و من الشكل المقابل

وبتحليل السرعة U في الاتجاهين $\hat{r},\hat{\theta}$ نجد أن

$$\frac{dr}{dt} = U\cos\theta \qquad \text{و} \qquad r\frac{d\theta}{dt} = V - U\sin\theta$$

بقسمة هاتين المعادلتين و فصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{U\cos\theta}{V - U\sin\theta} \qquad \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{U\cos\theta}{V - U\sin\theta}d\theta$$

بالتكامل نحصل على

$$\ln r = -\ln(V - U\sin\theta) + \ln c$$

حيث ثابت التكامل $\ln c$ و يتعين من الشرط أن النقطة بدأت الحركة من الموضع $(a,0^0)$

$$\ln a = -\ln(V - U\sin 0) + \ln c \qquad \Rightarrow \ln c = \ln a + \ln V = \ln aV$$

$$\therefore \ln r = \ln aV - \ln(V - U\sin\theta) \quad \Rightarrow \ln r = \ln\frac{aV}{V - U\sin\theta}$$

$$\therefore \ r = \frac{aV}{V - U\sin\theta}$$

وهي معادلة مسار النقطة المادية

مثـــال ٥

تتحرك نقطة مادية على منحنى الكتينة $S = c\tan\psi$ وكان اتجاه العجلة ينصف دائماً الزاوية بين المماس للمنحنى والعمودي عليه، فإذا كانت u هي مقدار السرعة عندما $\psi = 0$ أوجد مقداري السرعة والعجلة عند أي موضع .

الحـــــــل

نعلم أن متجه العجلة يتعين من $\underline{a} = v\dfrac{dv}{dS}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n}$ وحيث أن اتجاه العجلة ينصف دائماً الزاوية بين المماس والعمودي عليه فإن مركبتي العجلة متساويتان اي أن

$$\because v\frac{dv}{dS} = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v\frac{dv}{dS} = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \frac{dv}{dS}\rho = v \quad \text{Or}$$

$$\frac{dv}{dS}\frac{dS}{d\psi} = v \quad \Rightarrow \frac{dv}{d\psi} = v \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = d\psi$$

باجراء التكامل نحصل على $\ln v = \psi + c$ حيث c ثابت التكامل ويتعين من

$$(\text{at} \quad \psi = 0, \quad v = u, \qquad \therefore c = \ln u)$$

$$\therefore \ln v = \psi + \ln u \quad \Rightarrow \ln\frac{v}{u} = \psi \qquad \Rightarrow v = ue^{\psi}$$

وهذه العلاقة تُعطي السرعة عند أي موضع ψ ومن معطيات المسألة فإن المسار هو $S = c\tan\psi$ ومن ثم

$$\therefore \rho = \frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

ومن هذا فإن مقدار العجلة يتعين من

$$= \sqrt{\left(v\frac{dv}{dS}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{v^2}{\rho}\right) = \sqrt{2}\,u^2 e^{2\psi}\,\frac{1}{c\sec^2\psi} = \frac{\sqrt{2}}{c}u^2 e^{2\psi}\cos^2\psi$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت العلاقة بين سرعة جسيم v يتحرك على منحنى مستوٍ وبين عجلته المماسية a_t هي $a_t = \dfrac{1}{1+v}$ فأوجد العلاقة بين v,S و v,t بين إذا علمت أن الجسيم بدأ الحركـــة مـــن السكون عندما كانت $S = 0$.

الحـــــــل

للحصول على علاقة بين v,t حيث أن $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{1+v} \qquad \Rightarrow (1+v)dv = dt$$

وباجراء التكامل يكون
$$v + \frac{1}{2}v^2 = t + c_1$$

و للحصول على ثابت التكامل c_1 نستخدم الشرط $v = 0$ عندما $t = 0$ ومنها $c_1 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,t في الصورة
$$v + \frac{1}{2}v^2 = t$$

مرةً أخرى حيث أن $a_t = v\dfrac{dv}{dS}$ وبناءً عليه يكون

$$v\frac{dv}{dS} = \frac{1}{1+v} \qquad \Rightarrow (v+v^2)dv = dS$$

وباجراء التكامل يكون
$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 = S + c_2$$

و للحصول على ثابت التكامل c_2 نستخدم الشرط $v = 0$ عندما $S = 0$ ومنها $c_2 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,S في الصورة $S = \dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{1}{3}v^3$

مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية على دائرة نصف قطرها 2 ft بعجلة مماسية ثابتة مقدارها $4\,\text{ft}\sec^{-2}$ و مبتدئاً من سكون من نقطة A على الدائرة. أوجد سرعتها عند عودتها للنقطة A والزمن اللازم لذلك. أوجد عجلة النقطة المادية مقداراً واتجاهاً عند عودتها للنقطة A .

الحـــــــــل

من المعطيات $a_t = 4$ ومن ثم

$$\frac{dv}{dt} = 4 \quad \Rightarrow dv = 4dt \qquad \Rightarrow v = 4t + c_1$$

و للحصول على ثابت التكامل c_1 نستخدم الشرط $v = 0$ عندما $t = 0$ ومنها $c_1 = 0$

وتصبح العلاقة بين v, t في الصورة $\qquad v = 4t$

مرةً أخرى حيث أن $v = \dfrac{dS}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dS}{dt} = 4t \quad \Rightarrow dS = 4tdt \quad \Rightarrow S = 2t^2 + c_2$$

و لتعيين قيمة ثابت التكامل c_2 نستخدم الشرط $S = 0$ عندما $t = 0$ على اعتبار أن النقطة A هي نقطة القياس ومنها $c_1 = 0$ وتصبح العلاقة بين S, t في الصورة $S = 2t^2$ ومن هذه العلاقة يتعين الزمن اللازم للعودة للنقطة A حيث تكون النقطة قد قطعت مسافة S مساوية محيط الدائرة وهو 4π ويكون الزمن $\qquad 4\pi = 2t^2 \quad \therefore\ t = \sqrt{2\pi}$

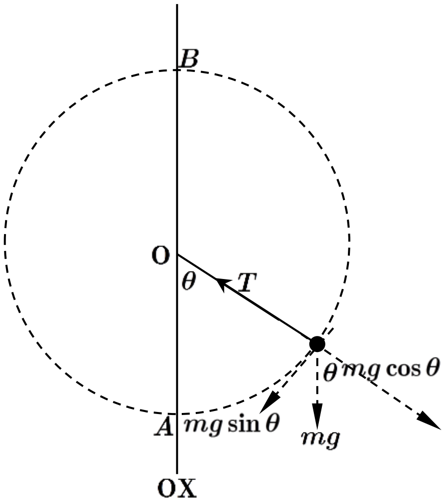
وسرعتها عندها بالتعويض في علاقة السرعة والزمن فيكون $v = 4\sqrt{2\pi}$

وتتعين العجلة بمركبتين احداهما ثابتة مقدارها $a_t = 4\,\text{ft}\sec^{-2}$ والعمودية a_n قيمتها

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{16(2\pi)}{2} = 16\pi\ \text{ft}\sec^{-2}$$

لاحظ أن $\rho = 2$ ft

■ الحركة على دائرة رأسية



نعتبر حركة جسيم كتلته m مربوط في طرف خيط غير مرن طوله ℓ و طرفه الآخر مثبت في نقطة O. إذا قذف الجسيم من اسفل نقطة A بسرعة افقية u فيتحرك الجسيم على محيط دائرة رأسية نصف قطرها يساوي طول الخيط. يؤثر على الخيط قوتان هما وزنه mg رأسياً لأسفل والشد في الخيط T في اتجاه $\hat{r}$ نحو القطب كما بالشكل. نفرض موضع عام للجسيم بعد دوران للخيط زاوية θ باعتبار مركز الدائرة هو القطب O والرأسي المار بمركز الدائرة هو الخط الثابت OX و حيث أن مركبات العجلة في الاحداثيات القطبية هي

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

وحيث أن $r = \ell \;\Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ وتؤول مركبات العجلة إلى الصورة

$$a_r = -\ell\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \ell\ddot{\theta}$$

معادلة الحركة في اتجاه متجه الموضع

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

معادلة الحركة في اتجاه تزايد θ

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

وحيث أن $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ وبالتعويض في معادلة الحركة في اتجاه تزايد θ نجد

$$m\ell\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -mg\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ell\dot{\theta}d\dot{\theta} = -mg\sin\theta\; d\theta$$

باجراء التكامل يكون

$$m\ell\dot{\theta}^2 = 2mg\cos\theta + c_1 \qquad (1)$$

حيث ثابت التكامل ويتعين من الشرط الابتدائي للحركة وهو $v = u$ عندما $\theta = 0$ ولكن مركبات السرعة هي $(\dot{r}, r\dot{\theta})$ وهنـــا $r = \ell \;\; \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ أي أن مـــركبتي الســـرعة $(0, \ell\dot{\theta})$ اي أن $v = u = \ell\dot{\theta}$ عند $\theta = 0$ ومن ثم بالتعويض في المعادلة (1) يكون

$$m\frac{u^2}{\ell} = 2mg + c_1 \qquad \Rightarrow c_1 = m\frac{u^2}{\ell} - 2mg$$

و تصبح المعادلة (1)

$$m\ell\dot{\theta}^2 = 2mg(\cos\theta - 1) + m\frac{u^2}{\ell} \qquad \Rightarrow \ell^2\dot{\theta}^2 = 2g\ell(\cos\theta - 1) + u^2$$

$$\therefore\ v = \ell\dot{\theta} = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - 1) + u^2} \tag{2}$$

وهذه العلاقة تعطي السرعة عند اي موضع θ ولتعيين الشد T في الخيط نعوض عن $\ell\dot{\theta}^2$ في معادلة الحركة في اتجاه متجه الموضع أي أن

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \qquad \Rightarrow T = mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{u^2}{\ell} \tag{3}$$

وجدير بالذكر أننا هنا استخدمنا الاحداثيات القطبية ويمكن الحصول على نفس النتـــائج إذا استخدامنا الاحداثيات الذاتية

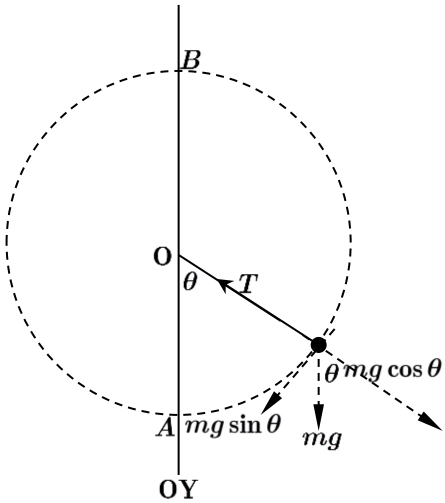
نلاحظ من المعادلة (2) أن اصغر قيمة للسرعة عند $\theta = \pi$ (أعلى نقطـــة في الـــدائرة B) وتساوي $v_B^2 = u^2 - 4g\ell$ ولكي يتم الجسيم دورة كاملة يجب أن تزيد سرعته v_B عـــن الصفر أي ان $u^2 - 4g\ell > 0$ ويكون الشرط اللازم لكي يعمل الجسيم دورات كاملة هو $u > 2\sqrt{g\ell}$ ، و إذا نقصت السرعة الابتدائية عن $2\sqrt{g\ell}$ فإن سرعة الجسيم تنعدم قبل أن يصل إلى أعلى نقطة و بذلك يعود الجسيم والخيط مرة اخرى. كما ينعدم الشد في الخيط عند نقطة معينة تتعين زاويتها θ من $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{u^2}{3g\ell}\right)$ (المعادلة (3))

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

جسيم كتلته m متصل بخيط خفيف غير مرن يرسم دائرة في مستوى رأسي فإذا كان الشد عند أعلى نقطة في المسار $4mg$ فأوجد الشد عند أي موضع واثبت أن الشد في الخيط عند أسفل نقطة للمسار هي $10mg$.

الحـــــــل



نعتبر أن طول الخيط ℓ والقوتان المؤثرتان على الجســـيم اثناء حركته هما وزنه mg والشد في الخيط T، نعتـــبر مركز الدائرة هو القطب O (النقطة الثابتة) و نأخـــذ OY هو خطاً ابتدائياً إلى أسفل وبالتالي معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر و في الاتجاه العمودي عليه (في اتجاه تزايد θ) هما (انتبه $r = \ell \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$)

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta \qquad (2)$$

وحيث أن $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ وبالتعويض في المعادلة (1) والتكامل

$$\ell\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -g\sin\theta \quad \Rightarrow \ell\dot{\theta}d\dot{\theta} = -g\sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \ell\dot{\theta}^2 = 2g\cos\theta + c \qquad (3)$$

حيث c ثابت التكامل وبالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (1) نحصل على

$$T = m(2g\cos\theta + c) + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta + C \qquad (4)$$

ومن معطيات المسألة الشد عند أعلى نقطة على المسار يســـاوي $4mg$ أي أن $T = 4mg$ عندما $\theta = \pi$ و منها يكون $C = 7mg$ و تصبح المعادلة (4) في الصورة

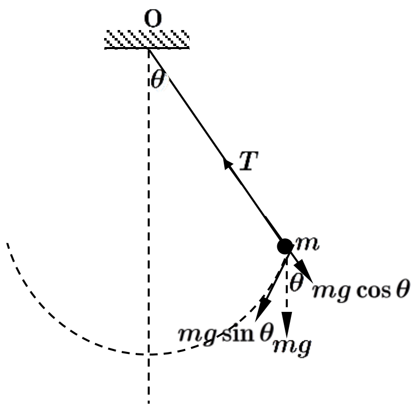
$$T = mg \;\; 3\cos\theta + 7$$

هذه العلاقة تعطي قيمة الشد عند أي موضع θ و قيمة الشد عند أسفل نقطة أي عندما $\theta = 0$ يكون الشد $T = mg\ \ 3\cos 0 + 7\ \ = 10mg$

لاحظ أننا في حل المثال استخدمنا الاحداثيات القطبية ويمكن اعادة حل المثال باستخدام الاحداثيات الطبيعية.

اثبت أن حركة البندول البسيط هي حركة توافقية بسيطة واجد زمنها الدوري.

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طرف خيط غير مرن (ساق خفيفة) مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طول الخيط وليكن b . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في اتجاه المماس لقوس الدائرة هى

$$mb\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\sin\theta$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\sin\theta \cong \theta$ ومن ثم تؤول المعادلة السابقة إلى الصورة

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\theta \qquad \text{Or} \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$. المعادلة الأخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من

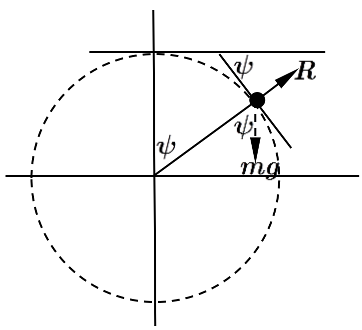
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـ " بندول الثواني ".

مثال ٢

يتزلق جسيم كتلته m على دائرة نصف قطرها b ملساء من الخارج مبتدئاً من السكون من أعلى نقطة من الدائرة. اوجد سرعة الجسيم عند اي موضع و كذلك رد الفعل للدائرة على الجسيم ، ثم اوجد الموضع الذي يترك فيه الجسيم الدائرة.

الحل



حيث أن القوى المؤثرة على الجسيم اثناء الحركة هما وزنه mg و رد الفعل العمودي على المماس R سنعتبر المستوى الأفقي المار بمركز الدائرة كمستوى قياس. معادلة الحركة للجسيم في اتجاه المماس هي

$$mv\frac{dv}{dS} = mg\sin\psi \quad \text{Or} \quad v\frac{dv}{d\psi}\frac{d\psi}{dS} = g\sin\psi \ \left(\frac{dS}{d\psi} = b\right)$$

$$\Rightarrow vdv = bg\sin\psi\ d\psi$$

بالتكامل نحصل على $v^2 = C - 2bg\cos\psi$

وثابت التكامل C يتعين من الشرط الابتدائي و هو $v = 0$ عندما $\psi = 0$ ومنها $C = 2bg$ وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة في الصورة

$$v^2 = 2bg(1 - \cos\psi)$$

معادلة الحركة في الاتجاه العمودي على المماس هي

$$m\frac{v^2}{b} = mg\cos\psi - R \qquad \Rightarrow R = mg\cos\psi - m\frac{v^2}{b}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad R &= mg\cos\psi - 2mg(1-\cos\psi)\\ &= mg(3\cos\psi - 2)\end{aligned}$$

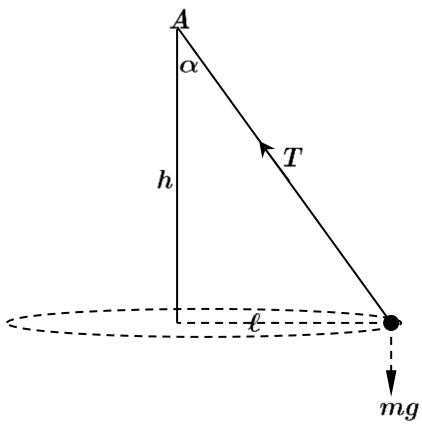
المعادلة الأخيرة تعين رد فعل الدائرة على الجسيم R عند أي موضع ψ ويترك الجسيم الدائرة عندما يتلاشى رد الفعل أي أن $R = 0$ و من العلاقة الاخيرة نحصل على

$$mg(3\cos\psi - 2) = 0 \qquad \Rightarrow \cos\psi = \frac{2}{3}$$

أي أن الجسيم يترك الدائرة عندما يترلق مسافة رأسية تساوي ثلث نصف قطر الدائرة

مرةً أخرى استخدمنا في حل هذا المثال الاحداثيات الطبيعية ويمكن الحل ايضاً باستخدام الاحداثيات القطبية – كما يمكن الحل باستخدام مبدأ الشغل والطاقة.

■ الحركة على دائرة أفقية (البندول المخروطي)



يتكون البندول المخروطي من نقطة مادية كتلتها معلقة في نهاية خيط طرفه الآخر مثبت ثم قذفت النقطة المادية بحيث تتحرك في دائرة أفقية بسرعة زاوية ثابتة كما بالشكل هذا ولدراسة حركة البندول المخروطي ، نفرض أن النقطة المادية تتحرك بسرعة زاوية ثابتة ω على محيط دائرة نصف قطرها ℓ وبالتالي فإن سرعة النقطة المادية و عجلتها هما على الترتيب

$$a_t = \frac{v^2}{\ell} = \omega^2\ell \qquad v = \omega\ell,\ .$$

كذلك نجد أن القوى المؤثرة على حركة النقطة المادية هما قوتا الوزن mg و قوة الشد في الخيط T ، حيث أن النقطة المادية تتحرك في دائرة أفقية فإن مركبة الشد رأسياً لأعلى تساوي الوزن والمركبة الأفقية للشد هي التي تحفظ حركة النقطة المادية في الدائرة و تكون معادلة الحركة في الدائرة الأفقية هي

$$m\omega^2\ell = T\sin\alpha$$

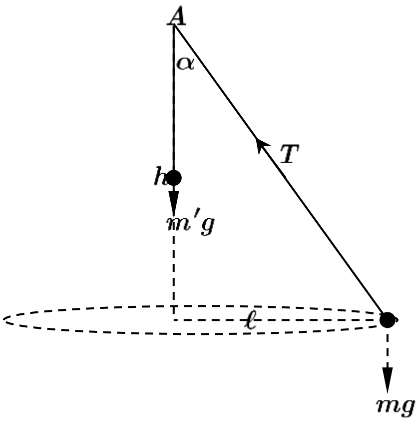
و معادلة الاتزان في الاتجاه الراسي هي $\omega mg = T\cos\alpha$

و من المعادلتين السابقتين نحصل على $\tan\alpha = \dfrac{\omega^2\ell}{g}$ ولكن من الشكل نجد أن $\tan\alpha = \dfrac{\ell}{h}$ – حيث h يمثل المسافة من نقطة تثبيت طرف الخيط A حتى مركز الدائرة الأفقية – و من ثم نحصل على $\sqrt{\dfrac{g}{h}} = \omega$ و الزمن الـــدوري يعطـــى بـــــ $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$. العلاقـــة $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{h}}$ تعطى العلاقة بين ω, h ومنها نتبين أن $h \propto \dfrac{1}{\omega^2}$ ، أي أن المسافة الرأسية للنقطة المادية أسفل A تتناسب عكسياً مع مربع السرعة الزاوية أي ω^2 .

مثـــ ٣ ـــال

كتلتان m, m' متصلتان بخيط خفيف طوله ℓ يمر من حلقة صغيرة ثابتـــة. اوجـــد عـــدد الدورات التي تدورها الكتلة m في الثانية كبندول مخروطي لكي تظل الكتلة m' معلقة في حالة سكون على بعد h من الحلقة.

الحـــــــل



الكتلة m' في حالة سكون (متزنة) تحت تـــأثير وزنهـــا $m'g$ والشد في الخيط T

$$T = m'g$$

معادلة الحركة للكتلة m في اتجاه نصف قطر الـــدائرة الأفقية هي

$$m(\ell - h)\sin\alpha(2\pi n)^2 = T\sin\alpha$$

و ذلك بفرض أن n هي عدد الدورات التي تدورها الكتلة m في الثانية ، α هي الزاويـــة التي يصنعها الخيط مع الرأسي المار بالحلقة ، بالتعويض من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نجد أن

$$4\pi^2 n^2 m(\ell - h) = m'g$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m'g}{m(\ell - h)}}$$

حساب التفاضل والتكامل

II

المحتويات

الفصل الثالث التكامل المحدد

3-1 التجميع Summation
3-2 تكامل ريمان المحدد
3-3 خواص التكامل المحدد
3-4 <u>تكاملات خاصة</u>
أمثلة متنوعة على التكامل المحدد
3-5 استخدام التعويض فى التكامل المحدد
3-6 صور الاختزال المتتالى (صور واليس)
3-7 نظرية القيمة المتوسطة للتكامل وتقدير التكاملات
3-8 <u>التكاملات المعتلة</u>

الفصل الرابع تطبيقات التكامل المحدد

4-1 المساحة لمنطقة مستوية
4-2 حجم الجسم الدورانى
4-3 طول قوس منحنى فى مستوى
4-4 مساحة السطح الدائرى

الفصل الأول
التكامل غير المحدد

مقدمة :

درسنا من قبل اشتقاق دالة ما فى فترة معطاة (نطاق تعريف الدالة) ، وسندرس فى هذا الفصل العملية العكسية لعملية الاشتقاق. بمعنى أنه يعطى لنا دالة ما $f(x)$ على فترة مفتوحة (a,b) ويطلب منا إيجاد دالة أخرى $F(x)$ على نفس الفترة بحيث يكون $F'(x)=f(x)$.

سوف نرمز لتلك الدالة المطلوب إيجادها بالرمز : $\int f(x)d(x)$ ونقرأ "التكامل غير المحدد" للدالة $f(x)$. وهذه التسمية جاءت نتيجة للارتباط الوثيق بين ما نسميه "الدالة المقابلة" و "التكامل المحدد" الذى سوف نتناوله بالدراسة فى فصل لاحق.

ولقد اكتشف التكامل المحدد فى أواخر القرن الثامن عشر بواسطة مجموعة من العلماء أمثال ريمان - ليمنتر - داربو وغيرهم ، وذلك فى محاولة لإيجاد مساحات الأشكال الهندسية المختلفة وأطوال المنحنيات وحجوم الأجسام المختلفة وغير ذلك من المشاكل الرياضية. أما مفهوم التكامل غير المحدد فإنه قدم واكتشف وطور كوسيلة لحساب التكامل المحدد.

(1-1) الدالة المقابلة :

لتكن $f(x)$ دالة معرفة فى فترة مفتوحة (a, b) من خط الأعداد ومطلوب منا البحث عند دالة أخرى $F(x)$ تحقق العلاقة :

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \qquad (1\text{-}1)$$

"تسمى الدالة $F(x)$ إن وجدت "دالة مقابلة" للدالة $f(x)$."

فمثلا : الدالة $F(x)=x^5$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=5x^4$ لأن $F'(x)=f(x)$.

والدالة $F(x)=\sin x$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=\cos x$.

(1-2) بعض خواص الدالة المقابلة :

خاصية 1 : إذا كانت $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ وكان أ ثابت فإن $\psi(x)=F(x)+c$ تكون أيضاً دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

البرهان : الدالة $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ، لذا فإن $F'(x)=f(x)$ وحيث أن $\psi(x)=F(x)+c$ فإن

$\psi'(x)=F'(x)=f(x)$ إى أن $\psi(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

مثال : رأينا أن $F(x)=x^5$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=5x^4$ لأن $F'(x)=f(x)$ الدالة $\psi(x)=x^5+12$ هى أيضا دالة مقابلة للدالة $f(x)$ كذلك الدوال $x^5-7,\ x^5+\sqrt{2},\ x^5+d$ أى أنه يوجد عدد لا نهائى من الدوال المقابلة معطاة $f(x)$.

خاصية 2 : إذا كانت كل من $F(x),\psi(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ فى فترة ما فإن

$$\psi 9x) - F(x) = const.$$

البرهان : من المعطيات نجد أن

$$F'(x) = \psi'(x) = f(x).$$

ضع $\phi(x) = \psi(x) - F(x)$ يكون $\phi'(x) = \psi'(x) - F'(x) = 0$ مما يعنى أن $\phi(x) = const.$.
من خاصية (1) ، (2) يتضح وجود عائلة من الدوال المقابلة لدالة ما $f(x)$. ونعبر عن هذه العائلة بالصورة : $F(x) + const$ حيث تختلف قيمة الثابت من دالة مقابلة إلى أخرى ، وهذا يعنى أنه لا يعتمد على المتغير x وتتحدد قيمته إذا أعطى شرط إضافى تحققه الدالة المقابلة.

مثال : $F(x) = \sin x + c$

هى عائلة الدوال المقابلة للدالة $\cos x$. ولكن الدالة $\cos x$ التى تحقق الشرط $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

والدالة $\chi(x) = \sin x + 1$ هى الدالة المقابلة للدالة $\cos x$ التى تحقق الشرط $\chi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ وهكذا ....

تعريف :

"التكامل غير محدد الدالة $f(x)$ هو الصورة العامة لأى دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ويرمز له بالرمز $\int f(x) d(x)$. ويقرأ متكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x."

وإذا كانت $\phi(x)$ أى دالة مقابلة للدالة $f(x)$ فإن :

(2-1) $\int f(x) d(x) = \phi(x) + c$ وحيث أن $\phi'(x) = f(x)$ فإن

(3-1) $\int \phi'(x) d(x) = \phi(x) + c$

أمثلة توضيحية :

(1) ليكن $\phi(x) = x^2$ فإن $\phi'(x) = 2x$ لذا فإن $\int 2x dx = x^2 + c$

(2) ليكن $F(x) = \sin x$ فإن $F'(x) = \cos x$ لذا فإن $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(3) إذا كان $\psi(x) = \tan x$ فإن $\psi'(x) = \sec^2 x$ وعليه فإن $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

(4) نعلم أن الدالة $g(x) = e^x$ تحقق العلاقة $g'(x) = e^x$ وبذلك يكون $\int e^x dx = e^x + c$

(5) ليكن $h(x) = e^{x^2}$ فإن $h'(x) = e^{x^2}.2x$ لذا فإن $\int e^{x^2}.2x \, dx = e^{x^2} + c$

من تعريف التكامل غير المحدد يمكن مباشرة برهان قوانين التكامل ، وهى مدونة فى الجدول التالى حتى يسهل الرجوع إليها عند لضرورة. يبقى هنا أن نعطى تفسيراً هندسياً لثابت التكامل c ، لذلك نعتبر المثال التالى :

نرسم مجموعة الدوال المعرفة بالمعادلة $y = x^2 + c$ فنجدها عبارة عن المنحنى $y = x^2$ منزلقا بالمقدار c إلى أعلى أو إلى أسفل حسب إشارة c كما بالرسم.

إذا رسمنا مستقيماً يوازى المحور oy ليقطع هذه المنحنيات؟ ثم رسمنا من نقاط التقاطع مماسات للمنحنيات فإن المماسات تكون متوازية وميل كل منها $\frac{dy}{dx}=2x$ من ذلك نستنتج أن $y=\int 2x\,dx$ تدل على أحد المنحنيات $y=x^2+c$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^n, n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\sec^2 x$	$\tan x+c$
$\text{sosec}^2 x$	$-\text{cotan}\, x+c$
$\sec x.\tan x$	$\sec x+c$
$\text{cosec}\, x.\tan x$	$-\text{cosec}\, x+c$
e^x	e^x+c
$\sinh x$	$\cosh x+c$
$\cosh x$	$\sinh x+c$
$\text{sech}^2 x$	$\tanh x+c$
$\text{socech}^2 x$	$-\text{cotan}\, x+c$

(3-1) خواص التكامل غير المحدد :

نظرية (1-1) : ليكن $\psi'(x)=g(x), \phi'(x)=f(x)$ وليكن c ثابت فإن :

(1) $\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(2) $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx.$

البرهان :

(1) اعتبر الدالة $\psi(x)+\phi(x)$ فيكون :

$$[\psi(x)+\phi(x)]'=\psi'(x)+\phi'(x)=g(x)+f(x)$$

وبالتالى فإن $\psi(x)+\phi(x)$ هى دالة مقابلة للدالة $g(x)+f(x)$ أى أن :

$$\int [f(x)+g(x)]dx=\phi(x)+\psi(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

(2) اعتبر الدالة $c.\phi(x)$ فإن :

$$[c.\phi(x)]'=c.\phi'(x)=c.f(x)$$

ولذلك فإن $c.\phi(x)$ هى الدالة المقابلة للدالة $c.f(x)$ وبالتالى فإن

$$\int c.f(x)dx = c.\phi(x) + d = c.\int f(x)dx$$

ملاحظات :

(1) النظرية السابقة تمدنا بأحدى القواعد الأساسية لإجراء عملية التكامل ويمكن صياغتها كما يلى :

"تكامل مجموع دالتين = مجموع تكاملى الدالتين ،

تكامل ثابت مضروباً فى دالة = الثابت مضروباً فى تكامل الدالة"

(2) يمكننا صياغة النظرية السابقة بصورة عامة كما يلى :

لتكن $f(x), g(x)$ معرضتين كما سبق وليكن c_1, c_2 ثابتتين فإن :

$$\int [c_1.f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1\int f(x)dx + c_2.\int g9x)dx$$

(3) القاعدة السابقة تعطينا خاصية هامة هى "الخاصية الخطية" للدوال التى يوجد تكامل لها.

(4-1) الصورة القياسية :

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$

(2) $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$

الصورة القياسية (01) صحيحة لجميع قيم n الموجبة والسالبة والكسرية ماعدا $n=-1$ حيث نستخدم فى الحالة $n=-1$ الصورة (2).

أمثلة مباشرة :

1- $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$ $\qquad n = 5$

2- $\int dx = \frac{x^2}{2} + c$ $\qquad n = 1$

3- $\int sx = x + c$ $\qquad n = 0$

4- $\int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + c$ $\qquad n = \sqrt{2}$

5- $\int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + c$ $\qquad n=-3$

$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c$ $\qquad n = +\frac{2}{3}$

أمثلة مباشرة (بها أكثر من دالة) :

هنا سوف نطبق الخاصية الخطية للتكامل والتى سبق صياغتها فى نظرية (1-1).

مثال : أوجد قيمة التكامل $\int [3x^2 + 5x - 1]dx$

الحل : سوف نرمز للتكامل المعطى بالرمز I وذلك للاختصار.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(3x^2+5x-1\right)dx \\
&= 3\int x^2dx + 5\int xdx - \int dx \\
&= x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c.
\end{aligned}
$$

يلاحظ فى هذا المثال أن الدالة المكاملة من البساطة بحيث لا تحتاج للاعتماد على قاعدة أو طريقة معينة لتحويلها إلى أحدى الصور القياسية. وفيما يلى نعطى بعض الطرق والأساليب التى تفيد فى حالات الدوال الأكثر تعقيداً والتى سوف نراها من خلال أمثلة.

(5-1) طرق التكامل :

من المشاكل التى تقابلنا عادة لإيجاد تكاملات الدوال مشكلة تحويل الدالة المراد تكاملها إلى احدى الصور القياسية. لذلك سنقوم بدراسة عدة طرق لإيجاد التكامل مثل :

1- طرق أولية.

2- طريقة التعويض.

3- طريقة التكامل بالتجزئ

4- طريقة الاختزال.

1- الطرق الأولية للتكامل :

نقصد بالطرق الأولية استخدام العمليات الأولية مثل الضرب والقسمة وفك الأقواس وخلافه. وسنوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال : أوجد

$$I = \int \frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2}dx$$

الحل : واضح أن

$$\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2} = \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2} = x-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$

ولذلك يكون

$$
\begin{aligned}
I &= \int x\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{dx}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x + \log|x| + \frac{1}{x} + c
\end{aligned}
$$

حيث c ثابت إختيارى.

مثال : احسب قيمة التكامل

$$I = \int \sqrt{x}\,(x+1)dx$$

الحل

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^{\frac{3}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx \\
&= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c
\end{aligned}
$$

تمرينات (1-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int (x^2-1)dx$

2- $\int (x-1)^2 dx$

3- $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

4- $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

5- $\int \frac{(2x+1)^2}{x} dx$

6- $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^2} dx$

7- $\int x(x-1)^2 dx$

8- $\int \frac{4x^2+7}{\sqrt{x}} dx$

9- $\int \left[\sqrt{7x}+\frac{3}{\sqrt{5x}}\right] dx$

10- $\int (x+\frac{1}{x})^2 dx$

11- $\int \frac{x(x-1)+5}{x} dx$

12- $\int \frac{1}{x}(x+1)^3 dx$

13- $\int (2x+1)^2(x-6)^2 dx.$

2- طريقة التعويض :

كما أشرنا فى البند السابق إلى أن صعوبة إيجاد التكامل هى فى وضع الدالة المكاملة فى صورة جدولية ، وطريقة التعويض هى أحدى الطرق الهامة التى يمكن بها وضع الدالة المكاملة بصورة يصلح معها استخدام الصور القياسية. ولتوضيح الفكرة :

ليكن $F'(x)=f(x)$ فإن $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ وإذا كانت كل من $f, \ F$ دالة فى المتغير y وكان

$$\frac{d}{dy}\left[F(y)\right] = F'(y) = f(y) \quad \text{فإن} \quad \int f(y)\,dy = F(y)+c$$

وإذا فرضنا أن y دالة فى المتغير x وليكن $y=\phi(x)$ فإن $\frac{dy}{dx}=\phi'(x)$ وهى تكافىء $dy=\phi'(x)dx$

بالتعويض عن y بدلالة x ينتج أن

$$\int f\left[\phi(x)\right]\phi'(x)\,dx = F\left[\phi(x)\right]+c$$

وسوف نطبق هذا القانون فى حالاته الخاصة :

حالات خاصة :

1- الصور القياسية :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$$

بوضع $x=\phi(y), \quad dx=\phi'(y)dy$ نحصل على $\int\left[\phi(y)\right]^n \phi'(y)\,dy = \frac{\left[\phi(y)\right]^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$

2- الصورة القياسية :

$$\int \frac{dy}{y} = \log|y| + c$$

بوضع $y = \phi(x)$, $dy = \phi'(x)dx$ نحصل $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \log|\phi(x)| + c$

أمثلة :

1- أوجد $\int \left(x^2+3\right)^5 x\,dx$

الحل **:** يمكن إتباع الطرق الأولية مثل فك $\left(x^2+3\right)^5$ باستخدام نظرية ذات الحدين وضرب الناتج فى x ثم التكامل حدا حدا.

ويمكننا استخدام التعويض كما يلى :

ضع $\phi(x) = x^2+3$ يتضح أن $\phi'(x) = 2x$

نكتب التكامل على الصورة $I = \frac{1}{2}\int \left(x^2+3\right)^5 (2x)\,dx$

واستخدم القاعدة

$$\int [\phi(x)]^n . \phi'(x)\,dx = \frac{[\phi(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث $n = 5$, $\phi(x) = x^2+3,$ ينتج أن $I = \frac{1}{2}.\frac{\left[x^2+3\right]^6}{6} + c$

$$= \frac{1}{12}\left[x^2+3\right]^6 + c$$

صورى أخرى للحل : ضع

$$y = x^2+3$$
$$dy = 2x\,dx$$
$$\therefore I = \frac{1}{2}\int \left(x^2+3\right)^5 (2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int y^5\,dy = \frac{1}{12}y^6 + c$$
$$= \frac{1}{12}\left(x^2+3\right) + c$$

2- أوجد $\int \sin^3 x.\cos x\,dx$

الحل :

ضع $y = \sin x$ نجد أن $dy = \cos x\,dx$

$$\therefore I = \int y^3\,dy = \frac{y^4}{4} + c = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$$

3- أوجد $\int \frac{1}{x}\log x\,dx,\ x>0$

الحل :

نفرض أن $y = \log x$ نحصل على

$$dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore I = \int \log x . \frac{1}{x} dx = \int y \, dy = \frac{y^2}{2} + c.$$

$$= \frac{1}{2} [\log x]^2 + c.$$

4- أوجد $\int \frac{e^x}{\sqrt{ye^x + 1}} sx$

الحل :

بوضع $y = e^x + 1$ نحصل على

$$dy = e^x + 1$$

$$\therefore I = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

$$= \int y^{-\frac{1}{2}} dy = 2 y^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{e^x + 1} \quad + c$$

5- أوجد $\int \frac{3x \, dx}{x^2 - 1}; \quad |x| \neq 1$

الحل :

بفرض أن $y = x^2 - 1$ ينتج أن $dy = 2x \, dx$

نقوم بتعديل البسط فى الدالة المكاملة :

$$I = \frac{3}{2} \int \frac{2x \, dx}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{3}{2} \log|y| + c$$

$$= \frac{3}{2} \log|x^2 - 1| + c.$$

ملاحظة : الصورة القياسية

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \log|\phi(x)| + c$$

يمكن صياغتها كما يلى :

"إذا كانت الدالة المراد تكامله على صورة كسر ، بحيث أن البسط تفاضل المقام فإن التكامل هو لوغاريتم المقام".

6- أوجد $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x + 1} dx$

الحل : نلاحظ أن البسط تفاضل المقام فإذا كان $\phi(x) = \tan x + 1$ فإن $\phi'(x) = \sec^2 x$ وبالتالى يكون

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x + 1} dx = \log|1 + \tan x| + c.$$

تمرينات (2-1)

1- $\int \left(x^2+5\right)^3 x\,dx$

2- $\int \sqrt{x^3+5}\,x^2\,dx$

3- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

4- $\int \sqrt[3]{5-4x}\,dx$

5- $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$

6- $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+7}}$

7- $\int \tan^2 x\,\sec^2 x\,dx$

8- $\int \sin^5 x\,\cos x\,dx$

9- $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

10- $\int \sin 2x\,\cos 2\,dx$

11- $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

12- $\int \frac{dx}{x\left(\log x\right)^2}$

13- $\int \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}\,dx$

14- $\int \frac{\cos x}{\sin x+1}\,dx$

15- $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}\,dx$

16- $\int \frac{x+5}{x+1}\,dx$

17- $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

18- $\int \frac{x+1}{x^2+2X+3}\,dx$

19- $\int \frac{x^2+2x-1}{x+2}$

20- $\int \frac{dx}{x\left(\log x+2\right)}$

(6-1) تكاملات الدوال المثلثية :

الصور القياسية لهذه التكاملات :

1- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

2- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

3- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

4- $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\text{cotan}\, x + c$

5- $\int \sec x \tan x\, dx = \tan x + c$

6- $\int \text{cosec}\, x\ \text{cotan}\, x\ dx = -\text{cosec}\, x + c$

وهذه الصور يمكن كتابتها على صورة عامة باستخدام المتغير y بدلا من x. فمثلا

$$\int \sin y\ dy = -\cos y + c$$

وإذا كانت y دالة فى المتغير x أى أن $y = \phi(x)$ فإن $dy = \phi'(x)dx$

وبالتعويض ينتج أن

$$\int \sin[\phi(x)].\phi'(x)\, dx = -\cos[\phi(x)] + c$$

وبالمثل لبقية الصور القياسية :

حالة خاصة :

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

حيث a, b مقادير ثابتة.

وهذا صحيح لأنه بفرض أن $y = ax + b$ فإن

$$dy = a.dx$$

$$\therefore I = \frac{1}{a}\int \sin y\ dy = -\frac{1}{a}\cos y + c$$

$$= -\frac{1}{a}\cos[ax+b] + c$$

أمثلة

1- أوجد

1- $\int \sin 3x\, dx$

2- $\int \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) dx$

الحل :

1- $\int \sin 3x\ dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + c.$

2- $\int \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) dx = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + 4\right) + c$

2- أوجد

1- $\int \tan x\ dx$

2- $\int \text{cotan}\, x\ dx$

الحل :

1- $\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

والدالة المكاملة فيها البسط تفاضل المقام

$$\therefore I = -\log|\cos x| + c$$
$$= \log\left|[\cos x]^{-1}\right| + c$$
$$= \log|\sec x| + c$$

وبالمثل

2- $\int \cot an\, x\ dx = \log|\sin x| + c$

3- أوجد

1- $\int x\ \sin x^2\ dx$

2- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\ dx$

الحل :

1- $\int x \sin x^2\ dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2 . (2x)\ dx$
$$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

2- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\ dx = 2\int \cos\sqrt{x} . \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
$$= 2\sin\sqrt{x} + c$$

4- أوجد

1- $\int (1+\tan x)^2\, dx$

2- $\int (\sec x - \tan x)^2\ dx$

الحل :

1- $I = \int \left(1 + 2\tan x + \tan^2 x\right) dx$

ولكن

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$\therefore I = \int \sec^2 x\ dx + 2\int \tan x\ dx$$
$$= \tan x + 2\log|\sec x| + c$$

2- $I = \int \left[\sec^2 x + \tan^2 x - 2\sec . \tan x\right] dx$

بوضع

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

نجد أن

$$I = \int \left[2\sec^2 x - 2\sec x . \tan x - 1\right] dx$$
$$= 2\tan x - 2\sec x - x + c$$

(7-1) تكاملات على الصورة :

$$\int \sin^n x\ dx, \quad \int \cos^n x\ dx, \quad \int \sin^m x\ \cos^n x\ dx$$

حيث أن n أو m أو كلاهما فردى

إذا كانت n فردية فإن (n-1) زوجية لذا نستخدم المتطابقة $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ لتحويل دالة الجيب إلى جيب التمام أو العكس.

أمثلة

1- أوجد $\int \sin^5 x\ dx$

الحل :

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sin^4 x . \sin x\ dx \\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\ dx \\
&= \int \left[1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right] \sin x\ dx
\end{aligned}
$$

ولكن

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x \\
&\therefore I = -\int \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)(-\sin x)dx \\
&\quad = -\int \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right) d(\cos x)
\end{aligned}
$$

بوضع $y=\cos x$ نجد أن

$$
\begin{aligned}
I &= -\int \left(1-2y^2+y^4\right)dy \\
&= -\left(y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right)+c \\
&= -\left(\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x\right)+c
\end{aligned}
$$

2- أوجد $\int \sin^4 x\ \cos^3 x\ dx$

الحل : نكتب التكامل على الصورة

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(y^4-y^6\right)dy \\
I &= \int \sin^4 x\ \cos^2 x . \cos x\ dx \\
&= \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\ \cos x\ dx \\
&= \int \left(\sin^4 x-\sin^6 x\right)\ d\sin x
\end{aligned}
$$

بوضع $y=\sin x$ نحصل على

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{5}y^5-\frac{1}{7}y^7+c \\
&= \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\sin^2 x\right)\sin^5 x+c.
\end{aligned}
$$

(8-1) تكاملات على الصور :

$$\int \sin^n x\ dx,\quad \int \cos^m x\ dx,\quad \int \sin^n x\ \cos^m x\ dx$$

حيث كلا من m, n زوجية.
فى هذه الحالة نستخدم قواعد التحويل لضعف الزاوية

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

أمثلة

1-
$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\ dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c\\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c\\ &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c.\end{aligned}$$

2-
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\ dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx\\ &= \frac{1}{2}(x + \sin x\ \cos x) + c.\end{aligned}$$

النتائج السابقة يمكن أن تحفظ كقواعد للتكاملين

$$\int \sin^2 x\ dx,\quad \int \cos^2 x\ dx.$$

3- أوجد $\int \sin^2 x\ \cos^2 x\ dx$

الحل : نعلم أن

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\therefore \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)$$

ولكن

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$\therefore \sin^2 x\cos^2 = \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{8}(1+\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

$$\therefore \int \sin^2 x\ \cos^2 x\ dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

تمرينات (3-1)

1- $\int \sin^4 4x\ dx$

2- $\cos(2x+1)dx$

3- $\int x\sin x^2\ dx$

4- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\ dx$

5- $\int \sec^2 2x\ dx$

6- $\int \tan 2x\ dx$

7- $\int x\sec^2 x^2\ dx$

8- $\int \sec^3 x\ \tan x\ dx$

9- $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$

10- $\int \cotan 3x\ dx$

11- $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x+1}}dx$

12- $\int \sin^2 x\cos^3 x\ dx$

13- $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

14- $\int \tan^2 x\sec^2 x\ dx$

15- $\int \cos^3 x\ dx$

16- $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$

17- $\int \tan^3 x\ \sec x\ dx$

18- $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$

19- $\int x\sin^3 x^2\ dx$

20- $\int \frac{\sin^4}{\sqrt{\tan x}}dx$

21- $\int \cos^4 x\ dx$

22- $\int \sin^4 x\ dx$

23- $\int \sin^2 2x\cos^2 2x\ dx$

24- $\int \sin^3 x\ \cos^2\ dx$

25- $\int \sin^6 x\ dx$

26- $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$

(9-1) تكاملات تحتوى دوال أسية وزائدية:

نعلم أن $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$ فإن

1- $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

وحيث أن $\frac{d}{dx}\left(e^{\phi(x)}\right) = e^{\phi(x)}.\phi'(x)$ فإن

2- $\int e^{\phi(x)}\phi'(x)\,dx = e^{\phi(x)} + c$

كذلك نعلم أنه لأى ثابت a يكون $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x.\log a$ فإن

3- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log\, a}a^x + c$

أمثلة :

من المعلوم أن $\cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ لذا يكون

4- $\int \sinh x\,\, dx = \cosh x + c$

5- $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$

6- $\int \text{sech}^2\, x\, dx = \tanh^2\, x + c$

7- $\int \text{cosech}^2\, x\, dx = \text{cotanh}\, x + c$

أمثلة

1- أوجد $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,\, dx$

الحل : نفرض أن $\phi(x) = \cos 2x$ نجد أن

$$\phi'(x) = -2\sin^2 x$$

$$\therefore I = \int e^{\cos 2x}\sin 2x\,\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{\cos 2x}\left(-2\sin 2x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\cos 2x} + c$$

2- أوجد $\int \frac{e^{2x}+4}{e^x}$

الحل :

$$I = \int e^x\,dx + 4\int e^{-x}\,dx$$

$$= e^x - 4e^{-x} + c$$

$$= \frac{e^{2x}-4}{e^x} + c$$

3- أوجد $\int e^x \cosh x\,dx$

الحل :

$$I=\int e^{x}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(e^{2x}+1\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}+x\right]+c$$

تمارين (4-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int e^{4x}\,dx$

2- $\int a^{4x}\,dx$ (a ثابت)

3- $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

4- $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5- $\int e^{x}\sinh x\,dx$

6- $\int \cos h^{2}x\,dx$

7- $\int e^{2x}\operatorname{sech}^{2}x\,dx$

8- $\int \operatorname{sech}^{2}2x\,dx$

9- $\int x\cosh x^{2}\,dx$

10- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\tanh\sqrt{x}\,dx$

11- $\int e^{1/x}\frac{dx}{x^{2}}$

12- $\int \frac{dx}{e^{x}+1}$

(10-1) تكاملات تعطى دوالا مثلثية عكسية :

سبق بنا تقديم ما يسمى بالدوال المثلثية العكسية وهى

$\sin^{-1}x,\quad \cos^{-1}x,\quad \tan^{-1}x,\ \ldots$

حيث $y=\sin^{-1}x\Rightarrow x=\sin^{-1}y$ بحيث أن $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2},\quad -1\le x\le 1$ وبالمثل أمكننا تعريف بقية تلك المجموعة من الدوال. ونعلم أيضا أن :

(i) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};\quad :\left(|x|<1\right)$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};\quad \left(|x|<1\right)$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^{2}}$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cotan}^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^{2}}$

من قوانين الاشتقاق السابقة نحصل على قواعد التكاملات الآتية :

1- $\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c=-\cos^{-1}\frac{x}{a}+c\quad\left(|x|<1\right)$

2- $\frac{dx}{a^{a}+x^{2}}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c=-\frac{1}{a}\operatorname{cotan}^{-1}\frac{x}{a}+c$

ويمكننا كالمعتاد الحصول على صور عامة لهذه الصور السابقة إذا استبدلنا x بمتغير آخر وليكن $y=\phi(x)$.

أمثلة

1- أحسب قيمة التكاملات

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ b) $\int \frac{dx}{1+25x^2}$

الحل :

a) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

استخدم التعويض

$$y=2x$$
$$dy=2dx$$
$$\therefore I=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}y+c$$
$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}2x+c$$

b) $I=\int \frac{dx}{1+25x^2}$

نضع $y=5x$ نحصل على $dy=5dx$

$$\therefore I=\frac{1}{5}\int \frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{5}\tan^{-1}5x+c$$

2- أوجد قيمة

1- $\int \frac{dx}{16+9x^2}$ 2- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

الحل :

$$I=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{16}{9}+x^2}=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+x^2}$$
$$=\frac{1}{9}-\frac{3}{4}\tan^{-1}\frac{3x}{4}+c$$
$$=\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{3x}{4}+c$$

2- $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2}+c$

3- أوجد

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}dx$$

ضع $y = e^x$ نجد أن

$$dy = e^x d^x$$

$$\therefore I = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$= \sin^{-1} y + c$$
$$= \sin^{-1} e^x + c$$

(11-1) تكاملات تؤدى إلى دوال زائدية عكسية :

نعلم أن

1- $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2- $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad x > 1$

3- $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}; \quad |x| < 1$

4- $\frac{d}{dx}\text{cotanh}^{-1} x = \frac{1}{x^2-1}; \quad |x| > 1$

من ذلك يمكننا اشتقاق صور تكاملات تؤدى إلى دوال زائدية عكسية :

1- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$

2- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$

3- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + c$

4- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} + c$

الصورتان (4)، (3) سوف تدرسان بطريقة آخرى فيما بعد ، كما وأن جميع الصور لهالا تكاملات بصورة لوغاريتمية وكذلك سندرس هذه التكاملات باستخدام طرق التعويض فى الفصل القادم.

مثال (1) : أوجد $\int \frac{dx}{9x^2-4}$

الحل :

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{3}{2}\right)\coth^{-1}\frac{3x}{2} + c$$
$$= -\frac{1}{6}\coth^{-1}\frac{3x}{2} + c; \qquad \left|\frac{3x}{2}\right| > 1$$

مثال (2) : أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}}$

الحل :

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sinh^{-1}\frac{2x}{5}+c$$

تمارين (5-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

2- $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

3- $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

4- $\int \frac{dx}{16+x^2}$

5- $\int \frac{dx}{1+16x^2}$

6- $\frac{dx}{9+16x^2}$

7- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$

8- $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

9- $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-4}}$

10- $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

11- $\int \frac{e^x dx}{1-e^{2x}}$

12- $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

13- $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}$

14- $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{9+\tan^2 x}$

15- $\int \frac{dx}{2x^2+6}$

16- $\int \frac{dx}{4-x^2}$

17- $\int \frac{1+x^2}{1-x^2}dx$

18- $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

الفصل الثانى
طرق التكامل

أوضحنا فى الفصل الأول أن صعوبة إيجاد التكامل غير المحدد لدالة ما تتمثل فى كيفية وضع الدالة المكاملة فى صورة دوال للتكامل ومن الصور القياسية يمكن إيجاد قيمة التكامل ، ولقد استخدمنا فى الفصل الأول طرق أولية كذلك طريقة التعويض وسوف نستكمل فى هذا الفصل طريقة التعويض وندرس طرق أخرى للتكامل منها طريقة الكسور الجزئية والتكامل بالتجزئ والاختزال.

1-2 طريقة التعويض.

استخدمنا هذه الطريقة فى الفصل الأول عندما تكون الدالة المكاملة على الصورة $f[\phi(x)].\phi'(x)$ وسوف نستخدم التعويض أيضا عندما تكون الدالة المكاملة على صورة الدالة $f(x)$ غير جدولية (الدالة المقابلة غير معروفة) وبالتعويض عن المتغير x بدلالة متغير آخر مثل y ليكن $x=\psi(y)$ نحصل على دالة مكاملة أخرى حيث :

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi y)\psi'(y)\,dy$$

سنوضح نماذج لهذه التعويضات فى الأمثلة التالية :

1- تعويضات جبرية.

مثال (1) : أوجد $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x+1}}$

الحل :

سنحاول التخلص من الجذر التربيعى بوضع $y^2 = x+1$ أى أن

$$x = y^2 - 1$$
$$\therefore dx = 2y\,dy$$
$$I = \int \frac{2y\,dy}{\left(y^2+1\right)y} = 2\int \frac{dy}{1+y^2}$$
$$= 2\tan^{-1} y + c$$

مثال (1) أوجد $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$

الحل :

ضع $x^2 - 4 = y^2$

$$\therefore x^2 = y^2 + 4 \Rightarrow 2x\,dx = 2y\,dy$$

$$I = \int \frac{x^2 . xdx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{\left(y^2 + 4\right) y\,dy}{y}$$

$$= \int \left(y^2 + 4\right) dy = \frac{1}{3} y^3 + 4y + c$$

$$= \frac{1}{3} y\left(y^2 + 12\right) + c = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 4}\left(x^2 + 8\right) + c$$

مثال (3) : أوجد $\int \frac{x^m}{\left(ax+b\right)^n} dx$ حيث m عدد صحيح موجب

الحل : بوضع $y = ax + b$

$$\therefore x = \frac{1}{a}\left(y - b\right), \quad dx = \frac{1}{a} dy$$

ومن ذلك يكون

$$\int \frac{x^m}{\left(ax+b\right)^n} dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int \frac{\left(y-b\right)^m}{y^n} dy$$

ثم تجرى الطرق الأولية لإيجاد التكامل الأخير

مثال (4) : أحسب قيم كلا من

$$\int \frac{x^3}{\left(3x+2\right)^4} dx, \qquad \int \frac{x^2}{\left(5-2x\right)^{3/2}} dx$$

الحل : أولا : بفرض $3x = y - 2$

نجد أن

$$\int \frac{x^3}{\left(3x+2\right)^4} dx = \frac{1}{\left(3\right)^4} \int \frac{\left(y-2\right)^3}{y^4} dy$$

$$= \frac{1}{81} \int \frac{y^3 - 6y^2 + 12y - 8}{y^4}\, dy$$

$$= \frac{1}{81} \int \left\{ \frac{1}{y} - \frac{6}{y^2} + \frac{12}{y^3} + \frac{8}{y^4} \right\} dy$$

$$= \frac{1}{81} \left\{ \ln y + \frac{6}{y} - \frac{6}{y^2} + \frac{8}{3y^3} \right\} + c$$

$$= \frac{1}{81} \left\{ \ln\left(3x+2\right) + \frac{6}{3x+2} - \frac{6}{\left(3x+2\right)^2} + \frac{8}{3\left(3x+2\right)^3} \right\} + c$$

لإيجاد قيمة التكامل الثانى نفرض أن $2x = 5 - y$ فنجد أن

$$\int \frac{x^2\,dx}{(5-2x)^{3/2}} = -\frac{1}{8}\int \frac{5-y}{y^{3/2}}\,dy$$

$$= -\frac{1}{8}\int \left\{\frac{25-10y+y^2}{y^{3/2}}\right\}dy$$

$$= -\frac{1}{8}\left\{-50y^{-1/2} - 20y^{1/2} + \frac{2}{3}y^{3/2}\right\} + c$$

$$= \frac{-1}{8}\left\{\frac{50}{\sqrt{5-2x}} - 20\sqrt{5-2x} + \frac{2}{3}\sqrt{(5-2x)^3}\right\} + c$$

مثال (5) : أوجد $\int \frac{dx}{x^m (ax+b)^n}$ حيث $m+n$ عدد صحيح موجب أكبر من الواحد

الحل : نفرض أن $y = \frac{ax+b}{x}$ ومنها

$$x = \frac{b}{y-a}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{a-y}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^m (ax+b)^n} = \frac{-1}{b^{m+n-1}}\int \frac{(y-a)^{m+n-2}}{y^n}\,dy$$

ثم نجرى الطرق الأولية لحساب قيمة التكامل الأخير كما سنرى فى الأمثلة الآتية :

مثال (6) : أحسب قيمة $I = \int \frac{dx}{x^3 (1+x)^4}$

الحل : نفرض أن $\frac{1+x}{x} = y$ منها $x+1 = xy$ أى

$x = \frac{1}{y-1}, \qquad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y-1}$ لذلك فإن

$$I = \int \frac{dx}{x^3 (1+x)^4} = -\int \frac{(y-1)^6}{y^4}\,dy \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\int \frac{y^6 - 6y^5 + 15y^{14} - 20y^3 + 15y^2 - 6y + 1}{y^4}\,dy$$

$$= -\int \left\{y^2 - by + 15 - \frac{20}{y} + \frac{5}{y^2} - \frac{6}{y^3} + \frac{1}{y^4}\right\}dy$$

$$= -\frac{(1+x)^3}{3x^3} + 3\frac{(1+x)^2}{x^2} - 15\left(\frac{1+x}{x}\right) + 20\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{15x}{1+x} - \frac{3x^2}{(1+x)^2}$$

$$+ \frac{x^3}{3(1+x)^3} + c$$

مثال (7) : أحسب قيمة كلا من $I = \int \frac{dx}{x^{3/2}(5+3x)^{5/2}}, \qquad II = \int \frac{x^{3/4}\,dx}{(2+x)^{15/4}}$

الحل : واضح أن $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 > 1$ لذا نفرض أن $\frac{5+3x}{x} = y$ ومنها

$$x=\frac{5}{y-3},\qquad dy=-\frac{5}{x^2}dx$$

$$\therefore I=-\frac{1}{125}\int\frac{(y-3)^2}{y^{5/2}}dy$$

$$=\frac{-1}{125}\left\{2\sqrt{y}+\frac{12}{\sqrt{y}}-\frac{6}{y\sqrt{y}}\right\}+c$$

$$=\frac{-1}{125}\left\{2\sqrt{\frac{5+3x}{x}}+12\sqrt{\frac{x}{5+3x}}-6\sqrt{\left(\frac{x}{5+3x}\right)^3}\right\}+c$$

$$II=\int\frac{dx}{x^{-314}(2+x)^{15/4}}$$

واضح كذلك أن $\frac{15}{4}-\frac{3}{4}=3>1$ لذا نفرض أن $\frac{2+x}{x}=y$ ومنها نجد أن

$$x=\frac{2}{y-1},\qquad \frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y-1}$$

$$\therefore II=-\frac{1}{4}\int\frac{(y-1)}{y^{15/4}}dy$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{4}{7}y^{-7/4}+\frac{4}{11}y^{-11/4}\right\}+c$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{7/4}-\frac{1}{11}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{11/4}+c$$

مثال (8) : وضح كيف توجد قيمة التكامل $\int\frac{dx}{x(ax^n+b)}$

ثم احسب قيمة التكامل $\int\frac{dx}{x(x^3+2)}$

الحل : نضع $x^n=\frac{1}{y}$ ومنها $n\ln x=-\ln y$ وبذلك نجد أن

$$\frac{n}{x}dx=-\frac{1}{y}dy$$

$$\therefore\int\frac{dx}{x(a^n+b)}=-\frac{1}{n}\int\left(\frac{y}{a+by}\right)\frac{dy}{y}$$

$$=\frac{1}{nb}\ln(a+by)+c$$

$$=-\frac{1}{nb}\ln\left[\frac{ax^n+b}{x^n}\right]+c$$

$$II=\int\frac{dx}{x(x^3+2)}=\frac{1}{6}\ln\left[\frac{x^3+2}{x^3}\right]+c$$

$$=\ln\left[\frac{x^3}{x^3+2}\right]^{1/6}+c$$

تمارين (2-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x+2}}$ 2- $\int \frac{3x-2}{\sqrt{2x-3}}dx$

3- $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ 4- $\int \frac{2x+1}{\sqrt[7]{(x+2)^2}}\,dx$

5- $\int \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$ 6- $\int (x+2)\sqrt{x-1}\,dx$

7- $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\,dx$ 8- $\int \frac{x^3-x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

9- $\int \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ 10- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

11- $\int x\left(3-4x^2\right)^3\,dx$ 12- $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

13- $\int \frac{x^7}{(3x+4)^2}\,dx$ 14- $\int \frac{x^2}{(2x-1)^5}\,dx$

15- $\int \frac{dx}{x^3(2-5x)^2}$ 16- $\int \frac{x\,dx}{(3x-8)^3}$

17- $\int \frac{dx}{x\left(2\sqrt{x}+5\right)}$ 18- $\int \frac{dx}{x\left(x^3+5\right)}$

19- $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$ 20- $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

2- تعويضات مثلثية وزائدية.

1- إذا أحتوى التكامل على الجذر $\sqrt{a^2-x^2}$ استخدم التعويض $x = a\sin\theta$ ويمكننا أيضا استخدام التعويض $x=\cos\theta$

2- إذا أحتـوى التكامـل علـى الجـذر : $\sqrt{x^2-a^2}$ اسـتخدام التعـويض $x = a\sec x$ أو التعـويض $x=\cosh\theta$

3- إذا احتوى التكامل على الجذر $\sqrt{a^2+x^2}$ نستخدم التعويض

$x = a\tan\theta$ or $x = a\sinh\theta$

أمثلة

1- أوجد $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$

الحل :

ضع $x=a\sin\theta$ نجد أن $dx=a\cos\theta\,d\theta$, $\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$ وبالتالى يكون

$$I=\int \frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}{a^2\sin^2\theta}\, a\cos\theta\, d\theta$$
$$=\int \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}\cos\theta\ d\theta=\int \frac{\cos\theta^2}{\sin^2\theta}\, d\theta$$
$$=\int \cot an^2\theta\ d\theta=\int\left(\operatorname{cosec}^2\theta-1\right)d\theta$$
$$=-\text{caton}\,\theta-\theta+c$$
$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

2- أوجد $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\, dx$

الحل :

ضع $x=3\sec\theta$ نجد أن $dx=3\sec\theta\ \tan\ \theta\ d\theta$

$$\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9\sec^2\theta-9}=3\sqrt{\sec^2\theta-1}=3\tan\theta$$
$$\therefore I=\int \frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}3\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$$
$$=3\int \tan^2\theta\, d\theta=3\int\left(\sec^2\theta-1\right)d\theta$$
$$=3\tan\theta-3\theta+c$$
$$=3\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}-3\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$$
$$=\sqrt{x^2-9}-3\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$$

4- تعويضات مثلثية لتكاملات تحتوى على الدوال المثلثية : $\sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$

أولا : إذا أحتوى التكامل على الدوال $\sin x,\ \cos x$ نستخدم التعويض $y=\tan\frac{x}{2}$ فنجد منها أن

$$dy=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+y^2\right)dx$$

أى أن $dx=\frac{2dy}{1+y^2}$

كذلك $\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$

لأنه

أن

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$= 2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$
$$= 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

بالمثل يمكن إثبات إن $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

مثال (4) : أوجد $I = \int \frac{dx}{5+4\cos x}$

الحل : باستخدام التعويضات السابقة نجد أن

$$I = \int\left(\frac{1+y^2}{9+y^2}\right)\left(\frac{2dy}{1+y^2}\right) = \int\left(\frac{1+y^2}{9+y^2}\right)\frac{2dy}{1+y^2}$$
$$= 2\int\frac{dy}{9+y^2} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3}+c$$
$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+c$$

مثال (5) : أحسب قيمة $I = \int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

الحل : من التعويضات السابقة نجد أن

$$I = \frac{dy}{1+y}\ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)+c$$
$$I = \int\frac{dy}{1+y} = 1n(1+y)+c = 1n\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)+c$$

ثالثا : إذا أحتوى التكامل على مربعات الدوال المثلثية $\sin x, \cos x$

فى هذه الحالة نستخدم التعويض $y = \tan x$ فنجد أن

$$dy = \sec^2 x\ dx$$
$$= \left(1+\tan^2 x\right)dx$$
$$= \left(1+y^2\right)dx$$

ومنها $dx = \frac{dy}{1+y^2}$

كذلك يمكن حساب

$$\sin^2 x = \tan^2 x\cos^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

مثال (5) : أوجد قيمة $I=\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

الحل : باستخدام التعويضات السابقة

$$I=\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin^4+\cos^4 x}dx \;=2\int \frac{\left(1+y^2\right)^2}{1+y^4}.\frac{y\,dy}{\left(1+y^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&=2\int \frac{y\,dy}{1+y^4}=\int \frac{dy^2}{1+\left(y^2\right)^2}\\
&=\tan^{-1} y^2+c\\
&=\tan^{-1}\tan^2 x+c.
\end{aligned}$$

ثالثا : إذا أحتوى التكامل على الدوال الزائدية :

إذا أحتوى التكامل على الدوال الزائدية $\sinh x,\cosh x$ فإنه من المناسب استخدام التعويض $y=\tanh x\frac{x}{2}$ حيث نجد أن

$$\begin{aligned}
dy&=\frac{1}{2}\operatorname{sec h}^2 dx\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\tanh^2\frac{x}{2}\right)dx\\
&=\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)dx\\
\therefore dx&=\frac{2dy}{1-y^2}
\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}
\sinh x&=2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}\\
&=2\frac{\sinh\frac{x}{2}\cosh^2\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}\\
&=2\tanh\frac{x}{2}.\frac{1}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}=\frac{2y}{1-y^2}
\end{aligned}$$

أيضا نجد أن

$$\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}$$
$$= \cosh^2\frac{x}{2}\left(1+\tanh^2\frac{x}{2}\right)$$
$$= \frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

مثال (6) : أوجد $I = \int \frac{dx}{1+\cosh x}$

الحل : باستخدام التعويضات السابقة نجد أن

$$I = \int \frac{1-y^2}{2} \cdot \frac{2dy}{1-y^2} = \int dy = y + c = \tanh\frac{x}{2} + c$$

أما إذا أحتوى التكامل على مربعات الدوال الزائدية $\sinh, \cosh x$ فإننا نستخدم التعويض $y = \tanh x$ فيؤدى إلى

$$dy = \operatorname{sech}^2 x\, dx$$
$$= \left(1-y^2\right) dx$$
$$\therefore dx = \frac{dy}{1-y}$$

كذلك $\sinh^2 x = \frac{y^2}{1-y^2},\ \cosh^2 x = \frac{1}{1-y^2}$

مثال (6) : أحسب القيمة $I = \int = \frac{dx}{\sinh^2 x - \tanh^2 x}$

الحل : باستخدام التعويض السابق نجد أن

$$I = \int \left(\frac{1}{\frac{y^2}{1-y^2} - y^2} \right) \cdot \left(\frac{dy}{1-y^2} \right)$$
$$= \int \frac{dy}{y^4} = \int y^4 dy = -\frac{1}{3} y^{-3} + c = -\frac{1}{\tanh^3 x} + c.$$

تمارين (2-2)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

2- $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} dx$

3- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

4- $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^2}}$

$5- \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$6- \int \frac{2dx}{x\sqrt{x^2-25}}$

$7- \int \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^{2/3}}$

$8- \int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$

$9- \int \frac{x^2 dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$

$10- \int \frac{x^3 dx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$

$11- \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

$12- \int x^3\sqrt{x^2+4}\, dx$

$13- \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx$

$14- \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$

$15- \int x\left(3-4x^2\right)^3 dx$

$16- \int \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

$17- \int a^x e^x\, dx$

$18- \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$19- \int \frac{x^2 (x+1)}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} dx$

$20- \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$

$21- \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x} dx$

$22- \int \frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x} dx$

$23- \int \sqrt{1-\cos x}\, dx$

$24- \int \frac{1}{5+13\cosh x} dx$

$25- \int \frac{1}{12+5\sinh x} dx$

$26- \int \frac{1}{5\sin x-3\cos x} dx$

(2-2) تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

حيث a, b, c ثوابت

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \\ &= a(x+d)^2+e \end{aligned}$$

حيث أن $d=\frac{b}{2a},\ e=c-\frac{b^2}{4a}$

وبذلك يحول التكامل إلى أحدى الصور التالية :

$1- \int \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \sin^{-1}\frac{y}{a}+c.$

$$2\text{-}\ \int \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \sinh^{-1}\frac{y}{a} + c.$$

$$3\text{-}\ \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{y}{a} + c.$$

مثال (1) أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$

الحل :

$$2x^2+2x+1 = 2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$

وهى بالصورة (2) السابقة $y = x+\frac{1}{2},\ \ a = \frac{1}{2}$

$$dy = dx$$

$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{x+1/2}{1/2}\right)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}(2x+1)+c.$$

مثال (2) : أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

الحل : المقدار

$$2+3x-2x^2 = -2\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)$$

$$= -2\left[\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{25}{16}\right]$$

$$= 2\left[\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}$$

وهى الصورة (1) حيث $y = x-\frac{3}{4},\ \ a = \frac{5}{4}$

$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x-3/4}{5/4}+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-3}{5}\right)+c.$$

(3-2) تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{lx+m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

يحور البسط إلى مقدار يحتوى على تفاضل ما تحت الجذر وثابت. وحيث أن

$$\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b$$

نكتب البسط على الصورة

$$\ell x+m=\frac{\ell}{2a}(2a+b)+\left(m-\frac{\ell b}{2a}\right)$$

ونعلم أن

$$\int \frac{\phi'(x)}{\sqrt{\phi(x)}}dx=2\sqrt{\phi(x)}+c$$

مثال (1) أوجد $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

الحل :

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^2-4x+5\right)=2x-4$$

نكتب البسط على الصورة

$$\begin{aligned}3x-5&=\frac{3}{2}(2x-4)+5+6\\&=\frac{3}{2}(2x-4)+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore I&=\frac{3}{2}\int\left(\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}\right)\\&=\frac{3}{2}2\sqrt{x^2-4x+5}+I_1+c\end{aligned}$$

والتكامل I_1 هو من النوع السابق (2-2) حيث

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}}=\sinh^{-1}(x-2)+c$$

ومنها

$$I=3\sqrt{x^2-4x+5}+\sinh^{-1}(x-2)+c$$

مثال (2) أوجد $\int\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}dx$

الحل : بضرب كل من البسط والمقام فى الجذر التربيعى $2x-1$ نجد أن

$$I=\int\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-1}}dx$$

واضح أن تفاضل ما تحت الجذر هو $8x$

$\therefore$ لابد من وضع البسط على الصورة

$$2x-1=\frac{1}{4}(8x)-1$$

$$\therefore I=\frac{1}{4}\int\frac{8x}{\sqrt{4x^2-1}}dx-\int\frac{dx}{4x^2-1}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{8x}{\sqrt{4x^2-1}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}2x+c.$$

مثال (3) : أوجد قيم التكاملات الآتية :

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx,\quad \int\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx,\ \int\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}dx$$

الحل :

فى كل من هذه التكاملات يمكن تبسيط الدالة المكاملة بتحويلها إلى مقدار كسرى بسط دالة من الدرجة الأولى ومقام جذر تربيعى لدالة من الدرجة الثانية (يحل كما سبق شرحه فى الحالات السابقة) ، يتم ذلك بضرب البسط والمقام والجذر التربيعى الموجود فى البسط فمثلا نعتبر

$$I=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}.\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\sqrt{x^2-1}-\cosh^{-1}x+c$$

يترك للقارئ حساب قيم التكاميلين الأخيرين.

مثال (4) : أحسب قيمة التكامل $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^3-3}}$

الحل : بوضع $x^3={}^{1}\!/_{y^2}$ نجد أن

$$3\ln x=-2\ln y,\ \frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}\frac{dy}{y}$$

ومنها

$$I=-\frac{2}{3}\int\frac{dy}{\sqrt{4-3y^2}}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{4}{3}-y^2}}$$

$$=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\sinh^{-1}\frac{\sqrt{3}y}{2}+c$$

$$=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\sinh^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2x\sqrt{x}}+c.$$

الصورة عامة فإنه لإيجاد قيمة تكامل على الصورة

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^n+b}}$$

فإنه يكون من المناسب استخدام التعويض $x^n={}^{1}\!/_{y^2}$ ومنها نجد أن

$$I=-\frac{2}{n}\int\frac{dy}{\sqrt{a+by^2}}$$

بذلك يؤول التكامل I إلى إحدى الصور القياسية :

i- $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$
$$=-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

ii- $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

iii- $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

حيث a مقدار ثابت.

مثال (5) : أوجد $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

الحل : نفرض أن $x^2=y^{-2}$ ومنها نجد أن $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}$

$$\therefore I=-\int\frac{dy}{\sqrt{4-9y^2}}=\frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{3y}{2}+c\ =\frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{3}{2x}+c.$$

مثال (6) : أوجد

$$\int\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{3x+1}},\ \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}},\ \int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

يمكن إزالة الجذر التربيعي فى هذه التكاملات أو تحويل التكامل إلى إحدى الصور القياسية السابق دراستها ، وذلك طبقاً للقاعدة التالية :

إذا كان $I=\int\frac{dx}{f(x)\sqrt{g(x)}}$

حيث $f(x),g(x)$ دوال جبرية (كثيرات الجذور) فى المتغير x فإنه من المناسب استخدام أحد التعويضات الآتية :

التعويض المناسب	درجة $g(x)$	درجة $f(x)$
$g(x)=y^2$	الدرجة الأولى	لايهم
$\frac{g(x)}{f(x)}=y$	الدرجة الثانية	الدرجة الثانية
$f(x)=1/y$	الدرجة الثانية	الدرجة الأولى وإن حررت

حل مثال (6) :

بتطبيق القاعدة السابقة يمكن استنتاج أن

$$I=\int\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{3x+1}}=-2\coth^{-1}4\sqrt{3x+1}+c$$

($g(x)=3x+1$ من الدرجة الأولى)

$$II=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)+c$$

هنا $g(x)=x^2+4x+2$ من الدرجة الثانية ، بينما $f(x)=x+1$ من الدرجة الأولى.
كذلك نجد أن

$$III=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{1+x^2}\right)+c$$

وذلك أنه بفرض $\frac{1-x^2}{1+x}=y$ فإنه

$$x^2=\frac{1-y}{1+y},\qquad 1+x^2=\frac{2}{1+y}$$

$$1-x^2=\frac{2y}{1+y},\qquad =-\frac{dy}{2\sqrt{1-y^2}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$III=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\frac{2y}{1+y}}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y-y^2}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{1+x^2}\right)+c.$$

تمارين (3-2)

أحسب التكاملات الآتية :

1- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

2- $\int\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

3- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

4- $\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

5- $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

6- $\int\frac{(2x-5dx)}{\sqrt{4x-x^2}}$

7- $\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{2x+x^2}}$

8- $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx$

9- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

10- $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$

11- $\int\frac{dx}{\sqrt{27+12x-4x^2}}$

12- $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

13- $\int\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}dx$

14- $\int\sqrt{\frac{5x+4}{2x-6}}dx$

15- $\int \sqrt{\frac{2+x}{x}}dx$

16- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

17- $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$

18- $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

19- $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-2x^3}}$

20- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+3}}$

21- $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)\sqrt{x+1}}$

22- $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{x^2-4}}$

(4-2) تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

تحول إلى أحدى الصور التالية

1- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$

2- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

3- $\int \frac{dx}{a^2-x} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

البرهان : (1) يتضح من الصورة

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x+c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

(2) واضح أن

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dy}{x-a}-\int \frac{dx}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|x-a|-\log|x+a|\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

(3) البرهان يترك للقارئ.

مثال : أحسب $\int \frac{dx}{2x^2-5x+3}$

الحل :

$$\because 2x^2-5x+3=2\left(x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=2\left[\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{25}{16}\right)\right]=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

وهى بالصورة (2) باعتبار أن $y=x-\frac{5}{4}$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)}\log\left|\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\left(x-\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}}\right|+c=\log\left|\frac{x-\frac{6}{4}}{x-1}\right|+c=\log\left|\frac{2x-3}{x-1}\right|+c$$

(5-2) تكاملات على الصورة $\int\frac{\ell x+m}{ax^2+bx+c}dx$

يحول البسط إلى جزئية احدهما (تفاضل المقام) أى يكتب

$$\ell x+m=\frac{\ell}{2a}\left(2ax+b\right)+(m-\frac{\ell b}{2a}\Big)$$

$$\therefore I=\frac{\ell}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(m.\frac{\ell b}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{l}{2a}\log\left|ax^2+bx+c\right|+\left(m-\frac{\ell b}{2a}\right).I_1,$$

حيث التكامل

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

هو من النوع الذى درس فى البند السابق (4-2) .

مثال : أوجد $\int\frac{2x+1}{5x^2-4x+3}dx$

الحل : تفاضل المقام هو $10x-4$

$\therefore$ لابد أن نكتب البسط على الصورة

$$2x+1=\frac{1}{5}(10x-4)+\left(1+\frac{4}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}(10x-4)+\frac{9}{5}$$

$$\therefore I=\frac{1}{5}\int\frac{10x-4}{5x^2 4x+3}dx+\frac{9}{5}\int\frac{dx}{5x^2-4x+3} \qquad (1)$$

$$=\frac{1}{5}\log\left|5x^2-4x+3\right|+\frac{9}{5}I_1,$$

حيث

$$I_1=\int\frac{dx}{5x^2-4x+3}$$

بالنسبة للتكامل الثانى نكمل المربع :

$$5x^2-4x+3=5\left(x^2-\frac{4}{5}x+\frac{3}{6}\right)$$

$$=5\left[\left(x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{25}\right)\right]$$

$$=5\left[\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{11}{25}\right] \qquad (2)$$

$$\therefore I_1=\int\frac{dx}{5x^2-4x+3}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{11}{25}}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{\sqrt{11}}\right)\tan^{-1}\frac{x-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{11}}{5}}+c=\frac{1}{\sqrt{11}}+\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{11}}{5}}\right)+c$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$I=\frac{1}{5}\log\left|5x^2-4x+3\right|+\frac{9}{5\sqrt{11}}\tan^{-1}\frac{5x-2}{\frac{\sqrt{11}}{5}}+c$$

تمارين (2-4)

أوجد قيم التكاملات الآتية :

1- $\int\frac{dx}{x^2+4x+2}$

2- $\int\frac{dx}{2x^2-4x+3}$

3- $\int\frac{dx}{3+x-x^2}$

4- $\int\frac{x+1}{x\ \ -x-1}dx$

5- $\int\frac{dx}{3-2x^2}$

6- $\int\frac{dx}{x(x+1)}$

7- $\int\frac{dx}{x^2+x-1}$

8- $\int\frac{x-1}{x^2+1}dx$

9- $\int\frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

10- $\int\frac{3x}{5x^2+1}dx$

11- $\int\frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$

12- $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+4\cos x+1}$

(6-2) تكاملات الدوال النسبية :

وهى دوال على الصورة $\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$ حيث أن كل من $\phi(x),\psi(x)$ كثيرة حدود فى المتغير x.

طريقة التكامل : إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام يمكننا عندئذ إجراء عملية القسمة المطولة فنحصل على خارج قسمة f(x) + باقى g(x) درجته أقل من درجة المقام $\psi(x)$ فنكتب

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=f(x)+\frac{g(x)}{\psi(x)}$$

ثم يحول الكسر $\frac{g(x)}{\psi(x)}$ إلى كسور جزئية بسيطة

أولا : إذا أمكن تحليل المقام إلى عوامل من الدرجة الأولى ومختلفة.

فيمكننا كتابة المقام على الصورة

$$\frac{9(x)}{\psi(x)}=\frac{c_1}{x-a_1}+\frac{c_2}{x-a_2}+\dots+\frac{c_n}{x-a_n}$$

فمثلاً :

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x}=\frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1}$$

$$=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x-1}+\frac{c_3}{x+1}$$

بالتالى فإن $x^2+2x+3\equiv c_1(x-1)(x+1)+c_2x(x+1)+c_3x(x-1)$

بوضع $x=0,\ x=1,\ x=-1$ على التوالى نجد أن $c_1=-3,\ c_2=3,\ c_3=1$

$$\therefore \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x}$$

$$\therefore \int\frac{x^2+2x+3}{x^3-x}dx=\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-1}-3\int\frac{dx}{x}$$

$$=\log|x+1|+3\log|x-1|-3\log|x|+c$$

$$=\log\left|\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^3}\right|+c$$

ثانيا : إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الأولى وبعضها مكرر

نكتب

$$\frac{g(x)}{\psi(x)}=\frac{c_1}{x-a_1}+\frac{c_2}{(x-a_1)^2}+\dots+\frac{c_n}{(x-a_1)^n}+\frac{b_1}{(x-a_2)}+\dots+\frac{b_n}{(x-a_n)}$$

بفرض أن العامل $x-a_1$ مكرر n مرة وأن المقام $\psi(x)$ يمكن تحليله إلى العوامل ذات الدرجة الأولى $(x-a_1),\dots,(x-a_n)$.

مثال : أوجد $\int \frac{x+5}{x^3-3x+2}dx$

الحل :

$$\because x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

$$\therefore \frac{x+5}{x^2-3x+2}=\frac{c_1}{x-1}+\frac{c_2}{(x-1)^2}+\frac{b}{x+2}$$

$$\therefore x+5=c_1(x-1)(x+2)+c_2(x+2)+b(x-1)^2$$

نضع $x=0,\ x=1,\ x=-2$ نجد أن $c_1=-1/3,\ c_2=2,\ b=1/3$

$$\therefore \int \frac{x+5}{x^2-3x+2}dx=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{2}{x-1}+\log|x+2|+c$$

$$=-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{3}\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+c$$

ثالثا : إذا تضمن المقام عاملا من الدرجة الثانية يتعذر تحليله.

فى هذه الحالة يكون بسط مثل هذا العامل مقدارا من الدرجة الأولى كما يتضح من المثال الآتى.

مثال : أوجد $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx$

الحل :

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{c_1}{x-1}+\frac{c_2x+c_3}{x^2+1}$$

$$\therefore 3x^2+x-2=c_1(x^2+1)(c_2x+c_3)$$

ضع $c_1,\ c_2=2,\ c_3=3$

وعلى ذلك

$$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{2x+3}{x^2+1}dx$$

$$=\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{2x}{x^2+1}dx+3\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\log|x-1|+\log|x^2+1|+3\tan^{-1}x+c$$

$$=\log|(x-1)(x^2+1)|+3\tan^{-1}x+c$$

رابعا : إذا كان أحد العوامل من الدرجة الثانية ومكرراً

فى هذه الحالة يعالج الكسر كما فى الحالة التى تكرر فيها العوامل الخطية. فمثلا

$$\frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2x+c_3}{x^2+2x+2}+\frac{c_4+c_5}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$\therefore 2x^3+3x^2+x-1=c_1(x^2+2x+2)^2+(c_2x+c_3)(x+1)(x^2+2x+2)+(c_4x+c_5)(x+1)$$

ثم بالتعويض بالقيم $x=-2$ $x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=2$ على التوالى نحصل على

$c_1=-1,\ c_2=1,\ c_3=3,\ c_4=-3$

تمارين (5-2)

أوجد التكاملات الآتية

1- $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

2- $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$

3- $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$

4- $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

5- $\int \frac{dx}{x^4+1}$

6- $\int \frac{dx}{x^3+1}$

7- $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

8- $\int \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$

9- $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-27}dx$

10- $\int \frac{x-3}{\left(x+1(x-2)\right)}dx$

11- $\int \frac{x^3+2x^2-4}{x^2-4x+3}dx$

12- $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

13- $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

14- $\int \frac{x^3+2}{x^2+4}dx$

15- $\int \frac{x^4+1}{x^3-x}dx$

(7-2) التكامل بالتجزئ.

من المعلوم من قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين قابلتين للتفاضل أنه :

$$\frac{d}{dx}(\phi.\psi)=\phi.\frac{d\psi}{dx}+\psi.\frac{d\phi}{dx}$$

أى أن $d(\phi.\psi)=\phi.d\psi+\psi.d\phi$ ومنها نجد أن $\phi.d\psi=d(\phi.\psi)-\psi.d\phi$

بالتكامل مع العلم بأن $\int d(\phi.\psi)=\phi.\psi+c$ نجد أن $\int \phi d\psi=\phi\psi-\int \psi d\phi$

معنى ذلك أننا استبدلنا التكامل $\int \phi d\psi$ بتكامل آخر هو $\int \psi d\phi$. ونكون الطريقة مفيدة إذا كان التكامل الثانى أبسط فى إجرائه من التكامل الأول.

مثال (1) : أوجد $\int xe^x dx$

الحل : ضع $\phi=x$ ، $d\psi=e^x dx,$ يكون (بالتكامل) $d\phi=dx,\ \psi=e^x$

$$\therefore \int \phi d\psi=\phi\psi-\int \psi d\phi$$

$$\therefore \int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c$$

لاحظ أن $I=\int x e^x dx=\int x\, d e^x$ وهى على صورة $\int \phi d\psi$ وبالتالى فإن

$$I=\int x\, d e^x=x e^x-\int e^x dx$$

مثال (2) : أوجد $\int \log\ x\, dx$

الحل : نختار

$$\phi = \log x, \qquad d\psi = dx$$
$$\therefore d\phi = \frac{1}{x}dx, \qquad \psi = x$$
$$\therefore \int \log x\, dx = x\log x - \int x.\frac{1}{x}dx$$
$$= x\log x - x + c$$

مثال (3) أوجد $\int e^x \sin x\, dx$

الحل : نختار

$$\phi = e^x, \quad d\psi = \sin x\; dx$$
$$\therefore d\phi = e^x\, dx, \qquad \psi = -\cos x$$
$$\therefore \int e^x \sin x\; dx = -e^x \cos x + \int \cos x.e^x dx \qquad (1)$$

وبالتكامل الثانى يبدو أنه يماثل التكامل الأصلى وليس أفضل منه فى التبسيط. نحاول مرة أخرى باختيار :

$$\phi = e^x \qquad d\psi = \cos x\, dx$$
$$\therefore d\phi = e^x\; dx, \qquad \psi = \sin x$$
$$\therefore \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \qquad (2)$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$
$$\therefore 2\int e^x.\sin x\, dx = e^x\left[\sin x - \cos x\right] + c$$
$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x\left[\sin x - \cos x\right] + c$$

تمارين (6-2)

أوجد قيم التكاملات الآتية

1- $\int x\log x\, dx$

2- $\int x \sin x\; dx$

3- $\int x^2 \sin x\, dx$

4- $\int x^2 \log x\; dx$

5- $\int (\log x)^2\, dx$

6- $\int e^x \sin 2x\; dx$

7- $\int e^{3x} \sin 2x\; dx$

(8-2) التكامل بلاختزال المتتالى

سوف نستعرض بعض الصور القياسية للاختزال

صورة (1) : إذا كان $In = \int x^n e^{ax}\, dx$ فإن

$$\therefore I_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1} \qquad (1)$$

واضح أن

$$I_1=\int x\,e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}x\,e^{ax}-I_0+c$$
$$I_0=\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c$$

وتكرار استخدام القانون يؤدى فى النهاية إلى ظهور I_0.

البرهان : نستخدم التكامل بالتجزئ بوضع

$$\phi=x^n,\quad d\psi=e^{ax}\,dx$$
$$\therefore d\phi=n\,x^{n-1}\,dx,\ \psi=\frac{1}{a}e^{ax}$$
$$\therefore \int x^n\,e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}x^n\,e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$
$$=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}$$

مثال (1) : أوجد $\int x^3\,e^{2x}\,dx$

الحل : واضح أن $n=3,\ a=2$ لذا يكون

$$I_3=\int x^3\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}x^3\,e^{2x}-\frac{3}{2}\int x^2\,e^{2x}\,dx \qquad (1)$$
$$=\frac{1}{2}x^3\,e^{2x}-\frac{3}{2}I_2$$

حيث

$$I_2=\int x^2\,e^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{2}{2}I_1$$
$$I_1=\int x\,e^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{2}I_0$$
$$I_0=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

بالتعويض المتتالى نجد أن

$$I_1=\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$
$$I_2=\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{1}{2}x\,e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$
$$I_3=\frac{1}{2}x^3\,e^{2x}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}\right)+c$$
$$=e^{2x}\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right]+c$$
$$=\frac{1}{8}e^{2x}\left[4x^3-6x^2+6x-3\right]+c$$

صورة (2) : إذا كان

$$I_n = \int x^n \cos(ax)\,dx,$$
$$J_n = \int x^n \sin(ax)\,dx$$

فإن

$$I_n = \frac{1}{a}x^n \sin(ax) - \frac{n}{a}J_{n-1} \qquad (2)$$
$$J_n = -\frac{1}{a}x^n \cos(ax) + \frac{n}{a}I_{n-1} \qquad (3)$$

والاختزال المتتالى يصل بنا فى النهاية إلى إحدى الصورتين :

$$I_0 = \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$$ أو $$J_0 = \int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$$

البرهان : يترك للقارئ (باستخدام التكامل بالتجزئ)

مثال : أوجد $\int x^2 \cos 3x \; dx$

الحل :

$$\therefore I_2 = \int x^2 \cos 3x \; dx \qquad (a = 3)$$
$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}I_1,$$
$$I_1 = \int x \; \sin 3x \; dx$$
$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x - \frac{1}{3}I_0,$$
$$I_0 = \int \cos 3x \; dx$$
$$= \frac{1}{3}\sin 3x + c.$$

بالتعويض نجد أن

$$I_1 = -\frac{1}{3}x\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x$$
$$\therefore I_2 = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\right) + c$$
$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{5}x\cos 3x + \frac{2}{27}\sin 3x + c$$

صورة (3) : إذا كان $I_n = \int \cos^n x\,dx$ فإن $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

صورة (4) : إذا كان $I_n = \int \sin^n x\,dx$ فإن $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

البرهان : نستخدم أيضا التكامل بالتجزئ

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d(\sin x)$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n+1)\left[I_{n-2} - I_n\right].$$
$$\therefore nI_n = \cos^{n-1} \sin x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\therefore I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

وتكرار هذه الخطوات يصل بنا إلى إحدى الصورتين :

$$I_0 = \int dx = x + c$$

إذا كانت n زوجية

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

إذا كانت n فردية

برهان الصورة (4) بالمثل حيث

$$I_0 = x + c, \qquad I_1 = \cos x + c.$$

مثال (1) : أوجد $\int \cos^5 x\,dx$

باستخدام قاعدة الاختزال (3) نجد أن

$$I_5 = \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int \cos^4 d(\sin x)$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3,$$
$$I_3 = \int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\,dx(\sin x)$$
$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} I,$$
$$I_1 = \sin x + c$$
$$\therefore I_5 = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + c.$$

مثال (2) :أوجد $\int \sin^4 \theta\,d\theta$

الحل :

$$\because I_4 = \int \sin^4 \theta \, d\theta = -\int \sin^3 x d(\cos x)$$

$$\therefore I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 \theta \cos\theta + \frac{3}{4} I_2,$$

$$I_2 = \int \sin^2 \theta d\theta = -\int \sin x \, d(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2} I_0,$$

$$I_0 = \theta + c$$

$$\therefore I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 \theta \cos\theta - \frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\theta + c$$

ملحوظة : سبق لنا دراسة مثل هذه التكاملات وكيفية التكامل معها بدون اختزال

تمارين (7-2)

أوجد مستخدماً الاختزال قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \cos^3 x \, dx$

2- $\int \tan^2 x \, dx$

3- $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

4- $\int \sec^4 x \, dx$

5- $\int \cos^4 x \, dx$

6- $\int \cos^3 2x \, dx$

7- $\int x^3 e^x \, dx$

8- $\int x^3 \sin x \, dx$

9- $\int x^2 \cos 2x \, dx$

أمثلة عامة

1- أوجد قيمة $\int \left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

الحل :

$$\int\left(6x^4-10x^2+7+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int 6x^4dx-10\int x^2dx+7\int dx+\frac{1}{2}\int x^{-1/2}dx$$
$$=\frac{6}{5}x^5-\frac{10}{3}x^3+7x+x^{1/2}+c$$

2- أوجد قيمة $\int 6x(5-x)dx$

الحل :

$$\int 6x(5-x)dx=6\int\left(5x-x^2\right)dx$$
$$=30\int x\,dx-6\int x^2\,dx$$
$$=15x^2-2x^3+c.$$

3- أوجد قيمة $\int\left[(4t-3)/t^3\right]dt$

الحل :

$$\int\frac{4t-3}{t}dt=4\int\frac{1}{t^2}dt-3\int\frac{1}{t^3}dt$$
$$=4t^{-1}+\frac{3}{2}t^{-2}+c$$
$$=\frac{-4}{t}+\frac{3}{2t^2}+c=\frac{8t+3}{2t^2}+c$$

4- أوجد قيمة $\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx$

الحل : نفرض أن $x^2+1=t$ نجد أن $2x\,dx$ كذلك

$$\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+c$$

بالتعويض العكسى بوضع $t=x^2+1$ نجد أن

$$\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx=\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+c$$

5- أوجد قيمة $\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx}$

الحل : بوضع $z=5-x^3$ نجد أن $dz=-3x^2\,dx$ وأن

$$\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx}=-\frac{4}{3}\int z^{1/2}\,dz$$
$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}+c$$
$$=-\frac{8}{9}\left(5-x^3\right)^{3/2}+c$$

6- أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int\left(3x^2-8x\right)dx$

2- $\int\frac{5}{13}du$

3- $\int(x+5)^n dx$

4- $\int(at+b)^5\,dt$

الحل :

(1) $\int\left(3x^2-8x\right)dx=3\int x^2dx-8\int x\,dx=x^3-4x^2+c$

(2) $\int\frac{5}{\sqrt{3}}du=\frac{5}{\sqrt{3}}\int du=\frac{5u}{13}+c$

(3) بوضع $x+5=t$ نجد أن $dx=dt$ كذلك

$$\int(x+5)^n\,dx=\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}+c=\frac{(x+5)^{n+1}}{n+1}+c$$

(4) نفرض أن $at+b=z$ فيكون $adt=dz$

$$\therefore\int(at+b)^5\,dt=\frac{1}{a}\int z^5dz=\frac{z^6}{6a}+c$$

$$=\frac{(at+b)^6}{6a}+c$$

(7) أوجد قيم التكاملات التالية

1- $\int\pi r^2dr$

2- $\int\left(t^2+t+5\right)/7\,dt$

3- $\int 4x^2(x+1)dx$

4- $\int\left(y^2+5\right)^3 y\,dy$

5- $\int\left[x\left(x^3+1\right)-1/x^4\right]dx$

6- $\int\frac{4}{\sqrt[3]{}}dt$

الحل :

1- $\int\pi r^2\,dr=\pi\int dr=\frac{\pi}{2}r^3+c$

2- $\int\left(t^2+t+5\right)/7\,dt$

$$=\frac{1}{7}\int t^2dt+\frac{1}{7}\int tdt+\frac{5}{7}\int dt$$

$$=\frac{1}{21}t^3+\frac{t^2}{14}+\frac{5}{7}t+c$$

3- $\int 4x^2(x+1)dx=4\int\left(x^3+x^2\right)dx$

$$=4\int x^3dx+4\int x^2dx$$

$$=x^4+\frac{4}{3}x^3+c$$

4- بفرض أن $y^2+5=z$ يكون $2y\,dy=dz$

$$\therefore\int\left(y^2+5\right)^3 y\,dy=\frac{1}{2}\int\left(y^2-5\right)^3 2y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int z^3dz=\frac{1}{8}z^2+c$$

$$=\frac{1}{8}\left(y^2+5\right)^4+c$$

$$\int\left(x\left(x^3-1\right)-1.x^4\right)dx$$

5- $\int\left[x\left(x^3\right)-1/x^4\right]dx$

$$=\int\left(x^4+x-1/x^4\right)dy=\int x^4dx-\int xdx-\int\frac{dx}{x^4}$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3x^3}+c$$

6- $\int\frac{4}{\sqrt[3]{t}}dt=\int\frac{4}{t^{1/3}}dt=4\int t^{-1/3}dt$

$$=4\frac{t^{2/3}}{2/3}+c=6t^{2/3}+c$$

8- كامل كلا مما يأتى :

i- $\frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx$

ii- $\int\frac{5z^2-12z-10}{z^4}dz$

iii- $\int\sqrt{y}\,(3y+1)^2\,dy$

iv- $\int(3-4x)^{17}\,dx$

v- $\int(3x+5)^{-3}\,dx$

vi- $\int(8x-6)\left(4x^2-6x\right)^3dx$

vii- $\int\left[x+\frac{1}{(4x+3)^2}\right]dx$

viii- $\int x\sqrt{2x^2-1}\,dx$

الحل :

i- $\frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx=\frac{1}{2}\int(4-9x)^{1/2}(-9)\left(\frac{1}{-9}\right)dx$

$$=-\frac{1}{18}\int(4-9x)^{1/2}(-9)dx$$

$$=-\frac{1}{18}\int(4-9x)^{1/2}d(-9x)$$

$$=-\frac{1}{18}\frac{(4-9x)^{3/2}}{3/2}+c$$

$$=-\frac{1}{27}(4-5x)^{3/2}+c$$

ii- $\int\frac{5z^2-12z-10}{z^4}dz=5\int z^{-2}dz-12\int z^{-3}dz-10\int z^{-4}dz$

$$=-5z^{-1}-\frac{12}{-2}z^{-2}-\frac{10}{-3}z^{-3}+c$$

$$=-\frac{5}{z}+\frac{1}{6z^2}+\frac{10}{3z^3}+c$$

iii- $\int\sqrt{y}\,(3y+1)^2\,dy=\int\sqrt{y}\left(9y^2+6y+1\right)dy$

$$=9\int y^{5/2}dy+6\int y^{3/2}dy+\int y^{1/2}\,dy$$

$$=\frac{18}{7}y^{7/2}+\frac{12}{5}y^{5/2}+\frac{2}{3}y^{3/2}+c$$

$$=\sqrt{y}\left(\frac{18}{7}y^3+\frac{12}{5}y^2+\frac{2}{3}y\right)+c$$

iv- $\int(3-4x)^{17}\,dx=\int(3-4x)^{17}(-4)\left(\frac{1}{-4}\right)dx$

$$=-\frac{1}{4}\int(3-4x)^{17}\,d(-4x)$$
$$=-\frac{1}{4(18)}(3-4x)^{18}+c$$
$$=\frac{-1}{72}(3-4x)^{18}+c$$

v- $\int(3x+5)^{-3}\,dx$
$$=\frac{1}{3}\int 3(3x+5)^{-3}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\int(3x+5)^{-3}\,d(3x)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{-2}}{-2}+c$$
$$=-\frac{(3x+5)^{-2}}{6}+c$$

vi- $\int(8x-6)\left(4x^2-6x\right)^3\,dx$

بوضع $z=4x^2-6x$ نجد أن

$$=\int z^3dz$$
$$=\frac{1}{4}z^4+c$$
$$=\frac{1}{4}((4x-6x)^4+c$$

vii- $\int\left[x+\frac{1}{(4x+3)^2}\right]dx=\int x\,dx+\int(4x+3)^{-2}\,dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\int(4x+3)^{-2}\,d(4x+3)$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(4x+3)^{-1}+c$$

viii- $\int x\sqrt{2x^2}-1dx=\int\left(2x^2-1\right)^{1/2}x\,dx$

بوضع $2x^2-1=t$ نجد أن

$$=\frac{1}{4}\int t^{1/2}dt$$
$$=\frac{1}{4}.\frac{t^{3/2}}{3/2}+c$$
$$=\frac{1}{6}\left(2x^2-1\right)^{3/2}+c$$

9- أوجد قيم التكاملات الآتية :

1- $\int ex\,dx$

2- $\int e^{ax}\,dx$

3- $\int 2e^{3x+2}dx$

4- $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2dx$

5- $\int\left(\frac{e^z-2}{e^z}\right)dz$

6- $\int e^{x^2}x\,dx$

الحل :

1- $\int e\,x\,dx = e\int x\,dx = \frac{e}{2}x^2 + c$

حيث e عدد طبيعى وهو مقدار ثابت $e \approx 2.718$

2- $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int e^{t}dt = \frac{e^{ax}}{a} + c$

3- $\int 2e^{3x+2}dx = 2\int e^{3x}.e^{2}dx$

$= 2e^2\int e^{3x}dx = \frac{2e^2}{3}e^{3x} + c$

$= \frac{3}{2}e^{3x+2} + c$

4- $\int\left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \int\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\,2x + \frac{e^{-2x}}{-2} + c$

5- $\int \frac{e^z - 2}{e^z}dz = \int\left(1 - 2e^{-z}\right)dz$

$= z + \frac{2}{e^z} + c$

$= \frac{ze^z + 2}{e^z} + c$

6- $\int e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{z}dz = \frac{e^z}{2} + c$

$= \frac{e^{x^2}}{2} + c$

10- عين كلا من التكاملات الآتية :

$1-\int\frac{2x}{x^2+3}dx$

ii- $\int\frac{4}{3t-11}dt$

iii- $\int\frac{4x}{x^2+3}dx$

iv- $\int\frac{u+1}{u^2+2u+11} + du$

v- $\int\frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}d\theta;\ \ b \neq 0$

الحل :

بوضع $t = x^2$

i- $\int\frac{2x}{x^2+3}dx = \int\frac{dt}{t+3} = \ln(t+3) + c$

$= \ln(x^2+3) + c$

ii- $\int\frac{4dt}{3t-11} = \frac{4}{3}\int\frac{dz}{z} = \frac{4}{3}\ln z + c$

$= \frac{4}{3}\ln(3t-11) + c$

بفرض أن $3t-11=z$

iii- $\int \frac{4x}{x^2+3}dx = 2\int \frac{2x}{x^2+3}dx$

بوضع $t=x^2+3$ نجد أن

$$= 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln t + c$$
$$= 2\ln\left(x^2+3\right)+c$$
$$= \ln\left(x^2+3\right)^2 + c$$

iv- $\int \frac{u+1}{u^2+2u+11}du = \frac{1}{2}\int \frac{2y+2}{u^2+2u+11}du$

بوضع $z=u^2+2u+11$ نحصل على

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left\{u^2+2u+11\right\}+c$$
$$= \ln\left\{u^2+2u+11\right\}^{1/2}+c$$

iv- $\int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}de = \frac{1}{b}\int \frac{b\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}de$

بوضع $z=a+b\tan\theta$ نجد أن $dz=b\sec^2\theta d\theta$

$$\therefore \int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}d\theta = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\ln z + c$$
$$= \frac{1}{b}\ln\left\{a+b\tan\theta+c\right\}$$

11- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sin 2x\, dx$

ii- $\int 3\cos 3\theta\, d\theta$

iii- $\int \sec^2(-2y)dy$

iv- $\int \sin^3 t dt$

v- $\int \sqrt{\cos x}\sin x\, dx$

vi- $\int x\sin x^2 dx$

الحل :

i- $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x 2x + c$

ii- $\int 3\cos 3\theta\, d\theta = \sin 3\theta + c$

iii- $\int \sec^2(-2y)dy = -\frac{1}{2}\int(-2)\sec^2(-2y)dy = -\frac{1}{2}\tan(-2y)+c$

iv- $\int \sin^3 t\, dt = \int \sin^2 t \sin t\, dt$

$$= \int\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\, dt$$
$$= \int\left(\sin t - \cos^2 t \sin t\right)dt$$
$$= -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + c$$

v- $\int \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx = \int \cos^{1/2} x \sin x\, dx$

$= -\frac{2}{3} \cos^{3/2} x + c$

vi- $\int x \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin x^2\, dx$

بوضع $x^2 = \theta$ نجد أن

$= \frac{1}{2} \int \sin \theta\, d\theta$

$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$

12- أوجد قيم التكاملات التالية :

i- $\int \frac{6\,du}{9+u^2}$ ii- $\int \frac{dy}{1+9y^2}$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\sin^2 x}} dx$ iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

الحل :

i- $\int \frac{6\,du}{9+u^2} = 6\int \frac{du}{3^3+u^2}$

$= 6\left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{u}{3}\right) + c$

$= 2 \tan^{-1} \frac{u}{3} + c$

ii- $\int \frac{dy}{1+9y^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dy}{\frac{1}{9}+y^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dy}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2}$

$= \frac{1}{9}\left(3 \tan^{-1} 3y\right) + c$

$= \frac{1}{3} \tan^{-1} 3y + c$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\sin^2 x}} dx = \int \left(\frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}} dx\right)$

بوضع $3 - \sin^2 x = y$ نجد أن

$= -\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -2\sqrt{y} + c$

$= -2\sqrt{3-\sin^2 x} + c$

iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x}} = \sin^{-1} \frac{x}{2\sqrt{2}} + c$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3} + c$

وذلك بفرض أن $\sec\theta = \frac{x}{3}$ حيث هذا يؤدى إلى $dx = 3\sec\theta\tan d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta}{9\sec\theta\tan\theta}d\theta = \frac{1}{3}\theta + c$$

$$= \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3} + c$$

13- أثبت أن

1- $\int \frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{3\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{7}}{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}\right| + c$

2- $\int \frac{dx}{3x^3-8x+7} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right) + c$

الحل :

1- $\because \frac{1}{5x^2-7} = \frac{1}{5}.\frac{1}{x^2-7/5} = \frac{1}{5}.\frac{1}{\left(x+\sqrt{7/5}\right)\left(x-\sqrt{7/5}\right)}$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{7/5}} - \frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{35}} - \frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)$$

$$\therefore \int\left(\frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{2\sqrt{35}}\left\{\int\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}} - \int\left(\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}}\right)\right\}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{25}}\left\{\ln\left|x-\sqrt{7/5}\right| - \ln\left|x+\sqrt{7/5}\right|\right\} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7/5}}{x+\sqrt{7/5}}\right| + c$$

2- $\because 3x^2-8x+7 = 3\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}\right)$

$$= 3\left[\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)+\frac{7}{3}-\frac{16}{9}\right]$$

$$= 3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}\right]$$

$$\therefore \int\frac{dx}{3x\ \ -8x+7} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}$$

بوضع $x-\frac{4}{3}=u$ نجد أن

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{3u}{\sqrt{5}}+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right)+c$$

14- أوجد قيمة كلا من التكاملات الآتية :

i- $\int x^2 e^x\,dx$ ii- $\int x\cos x\,dx$

iii- $\int \tan^{-1}x\,dx$ iv- $e^x\sin x\,dx$

i- الحل : نفرض أن

$$dv=e^x\,dx,\qquad u=x^2$$

$$\therefore u=x^2,\qquad v=e^x$$

بالتكامل بالجزئ

$$\therefore\int x^2 e^x dx=x^2e^x-\int 2x\,e^x\,dx$$

$$\because\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$$

$$=x\,e^x-e^x+c$$

$$\therefore\int x^2e\;\;dx=x^2e^x-2x\,e^x+2e^x+c$$

$$=\left(x^2-2x+2\right)e^x+c$$

ii-

بوضع

$$dv=\cos x\,dx,\qquad u=x$$

$$\therefore v=\sin x,\qquad u=x$$

بالتكامل بالتجزئ

$$\therefore\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\sin x+\cos x+c.$$

iii- $\int\tan^{-1}x\,dx$

بوضع $u=\tan^{-1}x,\qquad dv=dx$

$$\therefore du=\frac{dx}{1+x^2},\qquad v=x$$

$$\therefore\int\tan^{-1}x\,dx=x\tan^{-1}x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$$

iv- $\int e^x\sin x\,dx$

بوضع $u=\sin x.\qquad dv=e^x\,dx$

$$\therefore du=\cos x\,dx,\qquad v=e^x$$

$$\therefore\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

مرة أخرى بفرض أن

$$u_1 = \cos x \qquad dv_1 = e^x\, dx$$
$$\therefore du_1 = -\sin x\, dx, \qquad v_1 = e^x$$
$$\therefore \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx$$
$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x) - e^x \sin x\, dx + c$$
$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c$$

15- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sec^4 2x \tan 2x\, dx$

ii- $\int \tan^3 x\, dx$

iii- $\int (\sec x\, dx)$

iv- $\int \cos 2x \cos 5x\, dx$

v- $\int \left(\sin^{-1} x\right)^3 dx$

الحل :

i- $\int \sec^4 2x \tan 2x\, dx = \int \sec^3 2x\left(\sec 2x \tan 2x) dx\right)$

بوضع $\sec 2x = z$ نجد أن

$$= \frac{1}{2}\int z^3\, dz$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4} z^4 + c$$
$$= \frac{1}{8}\sec^4 2x + c$$

ii- $\int \tan^3 x\, dx = \int \tan^2 x \tan x\, dx$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\tan x\, dx$$
$$= \int \sec^2 x \tan x\, dx - \int \tan x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ell n \cos x + c$$

iii- $\int \sec x\, dx = \int \sec x \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec + \tan x} dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

ولأن البسط تفاضل المقام فإن $= \ln(\sec x + \tan x) + c$

iv-

تذكر أن

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha+\beta\right)\right]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2-1$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

والآن من العلاقة الأولى عندما $\alpha=2,\beta=5$ نجد أن

$$\int\cos 2x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos 7x+\cos 3x\right]dx=\frac{1}{2}\int\cos 7x\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 3x\,dx$$
$$=\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{6}\sin 3x+c$$

v- $\int\left(\sin^{-1}x\right)^3 dx$

نفرض أن $\sin^{-1}x=z$

$$\therefore x=\sin z,\qquad dx=\cos z\,dz$$
$$\therefore\int\left(\sin^{-1}\right)^3 dx=\int z^3\cos z\,dz$$

بالتكامل بالتجزئ وذلك بفرض أن

بفرض أن

$$u=z^3,\quad dv=\cos z\,dz$$
$$\therefore du=3z^2dz,\qquad v=\sin z$$

نجد أن

$$\int\left(\sin^{-1}\right)dx=\int z^3\cos z\,dz$$
$$=z^3\sin z-3\int z^2\sin z\,dz\qquad(*)$$

بفرض أن

$$u_1=z^2,dv_1=\sin z\,dz$$
$$\therefore du_1=2z\,dz,\qquad v_1=\cos z=-\cos z$$
$$\therefore\int z^2\sin z\,dz=z^2\cos z+2\int z\cos z\,dz\qquad(**)$$

مرة أخى نفرض أن $u_2=z,dv_2=\cos z\,dz$

$$\therefore du_2=dz,\qquad \upsilon_2=\sin z$$
$$\therefore\int z\cos z\,dz=z\sin z-\int\sin z\,dz$$
$$=z\sin z+\cos z+c$$

بالتعويض فى (**) ثم فى (*) نحصل على

$$\int\left(\sin^{-1}\right)dx=z^3\sin z+3z^2\cos z-6z\sin z+6\cos z+c$$
$$=x\left(\sin^{-1}x\right)^3+3\left(1-x\right)^{1/2}\left(\sin^{-1}x\right)^2-6x\sin^{-1}x+6\left(1-x\right)^{1/2}+c$$

16- أثبت أن

$$i-\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c;\ \ a>0$$

$$ii-\ \int\sqrt{2+3x^2\,dx}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\left(2+3x^2\right)^{1/2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2}x\left(2+3x^2\right)^{1/2}+c$$

$$iii-\ \int\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}=.\ln\left|\frac{t}{a}+\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{a}\right|+c$$

$$iv-\ \int\frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}(x-1)+c$$

$$v-\ \int\frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy=3\sin^{-1}e^y+c$$

الحل :

i-

بوضع $x=a\sin\theta$ حيث $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$\therefore\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta,\qquad dx=a\cos\theta\,d\theta$$

$$\therefore\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}a\cos\theta\,d\theta$$

$$\int\cot^2\theta\,d\theta=\int\left[\operatorname{cosec}^2\theta-1\right]d\theta$$

$$=-\cot\theta-\theta+c.$$

$$\because\sin\theta=x/a\qquad\therefore\cos\theta=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\therefore\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$ii-\ \int\sqrt{2+3x^2\,dx}$$

بوضع $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\tan\theta$ فإن $dx=\sqrt{\frac{2}{3}\text{sex}^2}\theta\,d\theta$

$$\therefore\int\sqrt{2+3x^2\,dx}=\sqrt{3}\int\left(\frac{2}{3}+x^2\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\sec^3\theta\,d\theta$$

بالتكامل بالتجزئ بوضع

$$u=\sec\theta,\qquad dv=\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\therefore du=\sec\theta\tan\theta\,d\theta,\qquad v=\tan\theta$$

$$\therefore\int\sec^3\theta\,d\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\tan^2\theta\sec\theta\,d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\left(\sec^2\theta-1\right)\sec\theta\,d\theta$$

$$\therefore \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

$$\therefore \int \sqrt{2+x3^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right] + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\left(2+3x^2\right)^{1/2} + \sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2}x\left(2+3x^2\right)^{1/2} + c$$

iii- $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}$

نفرض أن $t = a\sec\theta$

$$\therefore dt = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a\tan\theta} = \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{t}{a} + \frac{\sqrt{t^2-a}}{a}\right| + c$$

iv- $\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}\,dx$

$$\because 6x-3x^2 = -3\left(x^2-2x\right) = -3\left[\left(x-1\right)^2-1\right] = 3\left[1-\left(x-1\right)^3\right]$$

بوضع $u = x-1$ نحج أن $dx = du$

$$\therefore \int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}\,dx = \int \frac{2\left(u+1\right)+1}{\sqrt{3\left(1-u^2\right)}}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}\,du + \sqrt{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-u^2} + \sqrt{3}\sin^{-1}u + c$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{3}\sin^{-1}\left(x-1\right) + c$$

v- $\int \frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\,dy$

بوضع $u = e^y$ نجد أن $du = e^y dy$

$$\therefore \int \frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy = 3\int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = 3\sin^{-1}u + c$$

$$= 3\sin^{-1}e^y + c$$

17- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}\,dx$

$$\text{ii- } \int \frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx$$

الحل :

(1) يلاحظ أن الدالة المكاملة هى كسر حقيقى لأن درجة البسط أقل من درجة المقام ،لذلك يجب تحليل هذه الكسر إلى عدد عوامل المقام الأولية. لذا نبدأ بتحليل المقام حيث :

$$x^4-3x^3+x^2-2x = x(x-2)\left(x^2-1\right)$$

بذلك يكون

$$\frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}=\frac{4}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{cx+D}{x^2+1}$$

لإيجاد قيم الثوابت A, B, C, D نجمع الكسور فى الطرف الأيمن نلاحظ أنه يجب لتساوى الطرفين أن يكون

$$6x^3-11x^2+5x+4=A(x-2)\left(x^2+1\right)+BX\left(x^2+1\right)+(CX+D)X(x-2)$$

بمقارنة معاملات قوى X فى الطرفين نجد أن $A=2,\ B=1,\ C=3,\ D=-1$

$$\therefore \int \frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}dx=2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{3x-1}{x^2+1}dx$$

$$=2\ln x+\ln(x-2)+3\int\frac{x}{x+1}dx-\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\ln\left(x^2(x-2)\right)+\ln\left(x^2+1\right)+\tan x+c$$

$$=\ln\left(x^2(x-2)\left(x^2+1\right)^{3/2}\right)+\tan^{-1}x+c$$

(2) واضح أن درجة البسط للدالة المكاملة أكبر من درجة المقام لذلك فهى تمثل كسر غير حقيقى وبأجراء القسمة المطولة نجد أن

$$\frac{x^4+48x^3+37x^2 20x+3}{9x\ \ +12x^2-11x+2}=x+4+\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}$$

حيث الكسر الذى فى الطرف الأيمن هو كسر حقيقى

$$\therefore \int \frac{x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx=\frac{x^2}{2}4x+\int\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}dx$$

ولإيجاد التكامل الأخير نحلل الكسر $\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}$ حيث

$$9x^3+12x^2 11x+2=(x-2)(3x-1)^2$$

$$\therefore \frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{3x-1}+\frac{C}{(3x-1)^2}$$

ومنها يمكن إيجاد أن $A=-1,\ B=3,\ C=1$

$$\therefore \int\frac{22x-5}{9x^3+12x^2 11x+2}dx=-\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{3x-1}+\int\frac{dx}{(3x-1)^2}$$

$$=-\ln(x+1)+\ln(3x-1)-\frac{1}{3(3x-1)}+c$$

$$=\ln\frac{3x-1}{x+1}-\frac{1}{3(3x-1}+c$$

تمارين عامة

أوجد قيم التكاملات الآتية:

1- $\int 3\left(x+\frac{5}{2}x^3\right)dx$

2- $\int x(2x-3)dx$

3- $\int(3x^2-8x)dx$

4- $\int\left(x\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3\right)dx$

5- $\int 3x\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

6- $\int\left[t^3(4-2t)+\frac{6}{t}\right]dt$

7- $\int c\theta\left(a+\theta^2\right)d\theta$

8- $\int 9\left(z+4+\frac{1}{z^2}\right)dz$

9- $\int\left(3x^{-2}+\frac{11}{2}x^{-5}\right)dx$

10- $\int\sqrt{7z}\,dz$

11- $\int\left(\sqrt{\omega}-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)d\omega$

12- $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$

13- $\int\frac{u-1}{u^3}du$

14- $\int 3x^2\left(x^3-10\right)dx$

15- $\int u^2\left(u^3+3\right)^{10}du$

16- $\int 3x\left(x^2+6\right)^3dx$

17- $\int\left(x^2+6\right)^3dx$

18- $\int\frac{dt}{(t-1)^2}$

19- $\int\left(6z^2+5\right)\left(2z^3+5z+9\right)^4dz$

20- $-\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

21- $\int\left(x+\sqrt{1-x}\right)dx$

22- $\int e^{ax+b}dx$

23- $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

24- $\int e^{-t/z}dt$

25- $\int\frac{3dx}{e^{4x+1}}$

26- $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

27- $\int\frac{3x^2 2x}{x^3-x^2}dx$

28- $\int\frac{8x+10}{2x^2 5x}dx$

29- $\int x4^{x^2+6}dx$

30- $\int\frac{1-\sin\alpha}{\alpha+\cos\alpha}d\alpha$

31- $\int 5^{3t}dt$

32- $\int\frac{1}{3^{2u}}du$

33- $\int\sin(ax+b)dx;\ a\neq 0$

34- $\int\sin 2x\,dx$

35- $\int\left(2\sin\frac{4}{3}x+4\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$

36- $\int\sec\frac{4}{2}\tan\frac{4}{2}du$

37- $\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

38- $\int\tan ax\sec^2 ax\,dx$

39- $\int(1-\cos z2)^4\sin 2t\,dt$

40- $\int(1+\sin y)^2\cos y\,dy$

41- $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

42- $\int\frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

43- $\int \frac{x^2+a}{x^3}dx$

44- $\int \frac{3x-4}{x-4}dx$

45- $\int \frac{dx}{x^2-2x+8}$

46- $\int \sin^{-1}3y\,dy$

47- $\int x\,a^{x^2}\,dx$

48- $\int x\,a^{x}\,dx$

49- $\int (3x+x^2)\cos x\,dx$

50- $\int \sin^7\frac{x}{2}dx$

51- $\int \sqrt{4x^2-9}\,dx$

52- $\int x\sqrt{4x^2-25}\,dx$

53- $\int \frac{dz}{\sqrt{3-7z^2}}$

54- $\int \frac{dx}{x(x+4)}$

55- $\int \frac{1+x^3}{x^2-4x+3}dx$

56- $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

57- $\int \frac{y^5+3y^4+2y^3-y^2+4}{y^3+3y^2+2y}dy$

58- $\int \frac{dx}{2x^2+9}$

59- $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$

60- $\int x\sec^{-1}x\,dx$

61- $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

62- $\int \frac{b\,dt}{\cos^2 at};\ a \neq 0$

63- $\int \sin 7x \sin 3x\,dx$

64- $-\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10-x^2}}$

65- $\int \tan^{-1}\sqrt{u}\,du$

(7-2) التكامل بالتجزئ.Integration by Parts

من المعلوم من قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين قابلتين للتفاضل أنه :

$$\frac{d}{dx}(\phi.\psi) = \phi.\frac{d\psi}{dx} + \psi.\frac{d\phi}{dx}$$

أى أن $d(\phi.\psi) = \phi.d\psi + \psi.d\phi$ ومنها نجد أن $\phi.d\psi = d(\phi.\psi) - \psi.d\phi$

بالتكامل مع العلم بأن $\int d(\phi.\psi) = \phi.\psi + c$ نجد أن $\int \phi d\psi = \phi\psi - \int \psi d\phi$

معنى ذلك أننا استبدلنا التكامل $\int \phi \, d\psi$ بتكامل آخر هو $\int \psi \, d\phi$. وتكون الطريقة مفيدة إذا كان التكامل الثانى أبسط فى إجرائه من التكامل الأول.

مثال (1) : أوجد $\int xe^x dx$

الحل

ضع $\phi = x, \; d\psi = e^x dx$ **يكون (بالتكامل)** $\psi = e^x, \; d\phi = dx$

$$\therefore \int \phi \, d\psi = \phi\psi - \int \psi \, d\phi$$

$$\therefore \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

لاحظ أن $I = \int x e^x dx = \int x \, d e^x$ **وهى على صورة** $\int \phi \, d\psi$ **وبالتالى فإن**

$$I = \int x \, d e^x = x e^x - \int e^x \, dx$$

مثال (2) : أوجد $\int \log x \, dx$

الحل

نختار

$$\phi = \log x, \quad d\psi = dx$$

$$\therefore d\phi = \frac{1}{x} dx, \quad \psi = x$$

$$\therefore \int \log x \, dx = x \log x - \int x . \frac{1}{x} dx$$
$$= x \log x - x + c$$

مثال (3) أوجد $\int e^x \sin x \, dx$

الحل

نختار

$$\phi = e^x, \quad d\psi = \sin x \, dx$$

$$\therefore d\phi = e^x \, dx, \quad \psi = -\cos x$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int \cos x . e^x dx \quad (1)$$

وبالتكامل الثانى يبدو أنه يماثل التكامل الأصلى وليس أفضل منه فى التبسيط. نحاول مرة أخرى باختيار :

$$\phi = e^x \qquad d\psi = \cos x\, dx$$

$$\therefore d\phi = e^x\, dx, \qquad \psi = \sin x$$

$$\therefore \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \qquad (2)$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

تمارين (6-2)

أوجد قيم التكاملات الآتية

(1) $\int x \log x\, dx$ (2) $\int x \sin x\, dx$

(3) $\int x^2 \sin x\, dx$ (4) $\int x^2 \log x\, dx$

(5) $\int (\log x)^2\, dx$ (6) $\int e^x \sin 2x\, dx$

(7) $\int e^{3x} \sin 2x\, dx$

(8-2) التكامل بلاختزال المتتالى

سوف نستعرض بعض الصور القياسية للاختزال

صورة (1) : إذا كان $I_n = \int x^n e^{ax}\, dx$ فإن

$$\therefore I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1} \qquad (1)$$

واضح أن

$$I_1 = \int x e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} x e^{ax} - I_0 + c$$

$$I_0 = \int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

وتكرار استخدام القانون يؤدى فى النهاية إلى ظهور I_0.

البرهان : نستخدم التكامل بالتجزئ بوضع

$$\phi = x^n, \qquad d\psi = e^{ax}\,dx$$

$$\therefore d\phi = n\,x^{n-1}\,dx, \quad \psi = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\therefore \int x^n\,e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n\,e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1}$$

مثال (1) : أوجد $\int x^3\,e^{2x}\,dx$

الحل

واضح أن $n = 3, a = 2$ **لذا يكون**

$$I_3 = \int x^3\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3\,e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2\,e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^3\,e^{2x} - \frac{3}{2}I_2$$

حيث

$$I_2 = \int x^2\,e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,e^{2x} - \frac{2}{2}I_1$$

$$I_1 = \int x\,e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\,e^{2x} - \frac{1}{2}I_0$$

$$I_0 = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

بالتعويض المتتالى نجد أن

$$I_1=\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

$$I_2=\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{1}{2}x\,e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

$$I_3=\frac{1}{2}x^3\,e^{2x}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\,e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}\right)+c$$

$$=e^{2x}\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right]+c$$

$$=\frac{1}{8}e^{2x}\left[4x^3-6x^2+6x-3\right]+c$$

صورة (2) : إذا كان

$$I_n=\int x^n\cos(ax)\,dx,$$

$$J_n=\int x^n\sin(ax)\,dx$$

فإن

$$I_n=\frac{1}{a}x^n\sin(ax)-\frac{n}{a}J_{n-1} \qquad \textbf{(2)}$$

$$J_n=-\frac{1}{a}x^n\cos(ax)+\frac{n}{a}I_{n-1} \qquad \textbf{(3)}$$

والاختزال المتتالى يصل بنا فى النهاية إلى إحدى الصورتين :

$$I_0=\int\cos(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+c$$

أو

$$J_0=\int\sin(ax)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+c$$

البرهان : يترك للقارئ (باستخدام التكامل بالتجزئ)

مثال(2) : أوجد $\int x^2\cos 3x\;dx$

الحل

$$\therefore I_2 = \int x^2 \cos 3x \; dx \qquad (a = 3)$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} I_1,$$

$$I_1 = \int x \; \sin 3x \; dx$$

$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{3} I_0,$$

$$I_0 = \int \cos 3x \; dx$$

$$= \frac{1}{3} \sin 3x + c.$$

بالتعويض نجد أن

$$I_1 = -\frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x$$

$$\therefore I_2 = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x\right) + c$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{5} x \cos 3x + \frac{2}{27} \sin 3x + c$$

صورة (3) : إذا كان $I_n = \int \cos^n x \, dx$ **فإن**

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

صورة (4) : إذا كان $I_n = \int \sin^n x \, dx$ **فإن**

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

البرهان : نستخدم أيضا التكامل بالتجزئ

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d(\sin x)$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n+1)\left[I_{n-2} - I_n\right].$$
$$\therefore nI_n = \cos^{n-1} \sin x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\therefore I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

وتكرار هذه الخطوات يصل بنا إلى إحدى الصورتين :

$$I_0 = \int dx = x + c$$

إذا كانت n زوجية

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

إذا كانت n فردية

برهان الصورة (4) بالمثل حيث

$$I_0 = x + c, \quad I_1 = \cos x + c.$$

مثال (3) : أوجد $\int \cos^5 x\,dx$

باستخدام قاعدة الاختزال (3) نجد أن

$$I_5 = \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int \cos^4 d(\sin x)$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3,$$
$$I_3 = \int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\,dx(\sin x)$$
$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} I,$$
$$I_1 = \sin x + c$$
$$\therefore I_5 = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + c.$$

مثال (4) :أوجد $\int \sin^4 \theta\,d\theta$

الحل

$$\because\ I_4=\int\sin^4\theta\,d\theta=-\int\sin^3 x\,d(\cos x)$$

$$\therefore\ I_4=-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta+\frac{3}{4}I_2,$$

$$I_2=\int\sin^2\theta d\theta=-\int\sin x\,d(\cos x)$$

$$=-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}I_0,$$

$$I_0=\theta+c$$

$$\therefore\ I_4=-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta-\frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta+\frac{3}{8}\theta+c$$

ملحوظة : سبق لنا دراسة مثل هذه التكاملات وكيفية التكامل معها بدون اختزال

تمارين (7-2)

أوجد مستخدماً الاختزال قيمة التكاملات الآتية :

(1) $\int\cos^3 x\,dx$

(2) $\int\tan^2 x\,dx$

(3) $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx$

(4) $\int\sec^4 x\,dx$

(5) $\int\cos^4 x\,dx$

(6) $\int\cos^3 2x\,dx$

(7) $\int x^3e^x\,dx$

(8) $\int x^3\sin x\,dx$

(9) $\int x^2\cos 2x\,dx$

أمثلة عامة

1- أوجد قيمة $\int \left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

الحل

$$\int \left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$
$$= \int 6x^4 dx - 10\int x^2 dx + 7\int dx + \frac{1}{2}\int x^{-1/2} dx$$
$$= \frac{6}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 7x + x^{1/2} + c$$

2- أوجد قيمة $\int 6x(5-x)\,dx$

الحل

$$\int 6x(5-x)\,dx = 6\int (5x - x^2)dx$$
$$= 30\int x\,dx - 6\int x^2\,dx$$
$$= 15x^2 - 2x^3 + c.$$

3- أوجد قيمة $\int \left[(4t-3)/t^3 \right] dt$

الحل

$$\int \frac{4t-3}{t}\,dt = 4\int \frac{1}{t^2}\,dt - 3\int \frac{1}{t^3}\,dt$$
$$= 4t^{-1} + \frac{3}{2}t^{-2} + c$$
$$= \frac{-4}{t} + \frac{3}{2t^2} + c = \frac{8t+3}{2t^2} + c$$

4- أوجد قيمة $\int (x^2+1)^3\, 2x\,dx$

الحل

نفرض أن $x^2+1=t$ **نجد أن** $2x\,dx$ **كذلك**

$$\int \left(x^2+1\right)^3 2x\,dx = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + c$$

بالتعويض العكسى بوضع $t = x^2 + 1$ نجد أن

$$\int \left(x^2+1\right)^3 2x\,dx = \frac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + c$$

5- أوجد قيمة $\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx}$

الحل

بوضع $z = 5 - x^3$ نجد أن $dz = -3x^2\,dx$ وأن

$$\int 4x^2\sqrt{5-x^3\,dx} = -\frac{4}{3}\int z^{1/2}\,dz$$

$$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2} + c$$

$$= -\frac{8}{9}\left(5-x^3\right)^{3/2} + c$$

6- أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \left(3x^2 - 8x\right)dx$

2- $\int \frac{5}{13}du$

3- $\int (x+5)^n\,dx$

4- $\int (at+b)^5\,dt$

الحل

(1)

$$\int \left(3x^2-8x\right)dx = 3\int x^2 dx - 8\int x\,dx = x^3 - 4x^2 + c$$

(2)

$$\int \frac{5}{\sqrt{3}}du = \frac{5}{\sqrt{3}}\int du = \frac{5u}{13} + c$$

(3) بوضع $x + 5 = t$ نجد أن $dx = dt$ كذلك

$$\int (x+5)^n\,dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(x+5)^{n+1}}{n+1} + c$$

(4) نفرض أن $at + b = z$ فيكون $adt = dz$

$$\therefore \int (at+b)^5\,dt = \frac{1}{a}\int z^5 dz = \frac{z^6}{6a} + c$$

$$= \frac{(at+b)^6}{6a} + c$$

(7) أوجد قيم التكاملات التالية

1- $\int \pi r^2 dr$

2- $\int \left(t^2+t+5\right)/7\,dt$

3- $\int 4x^2(x+1)\,dx$

4- $\int \left(y^2+5\right)^3 y\,dy$

5- $\int \left[x\left(x^3+1\right) - 1/x^4\right]dx$

6- $\int \frac{4}{\sqrt[3]{}}dt$

الحل

1- $\int \pi r^2\,dr = \pi\int dr = \frac{\pi}{2}r^3 + c$

2- $\int \left(t^2+t+5\right)/7\,dt$

$$=\frac{1}{7}\int t^2 dt+\frac{1}{7}\int tdt+\frac{5}{7}\int dt$$

$$=\frac{1}{21}t^3+\frac{t^2}{14}+\frac{5}{7}t+c$$

3- $\int 4x^2\left(x+1\right)dx=4\int\left(x^3+x^2\right)dx$

$$=4\int x^3dx+4\int x^2dx$$

$$=x^4+\frac{4}{3}x^3+c$$

4- $2y\,dy=dz$ **يكون** $y^2+5=z$ **بفرض أن**

$$\therefore\int\left(y^2+5\right)^3 y\,dy=\frac{1}{2}\int\left(y^2-5\right)^3 2y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int z^3dz=\frac{1}{8}z^2+c$$

$$=\frac{1}{8}\left(y^2+5\right)^4+c$$

$$\int\left(x\left(x^3-1\right)-1.x^4\right)dx$$

5- $\int\left[x\left(x^3\right)-1/x^4\right]dx$

$$=\int\left(x^4+x-1/x^4\right)dy=\int x^4dx-\int xdx-\int\frac{dx}{x^4}$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3x^3}+c$$

6- $\int\frac{4}{\sqrt[3]{t}}dt=\int\frac{4}{t^{1/3}}dt=4\int t^{-1/3}dt$

$$=4\frac{t^{2/3}}{2/3}+c=6t^{2/3}+c$$

8- كامل كلا مما يأتى :

i- $\frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx$

ii- $\int\frac{5z^2-12z-10}{z^4}dz$

iii- $\int\sqrt{y}\left(3y+1\right)^2 dy$

iv- $\int\left(3-4x\right)^{17}dx$

v- $\int\left(3x+5\right)^{-3}dx$

vi- $\int\left(8x-6\right)\left(4x^2-6x\right)^3dx$

vii- $\int\left[x+\frac{1}{(4x+3)^2}\right]dx$

viii- $\int x\sqrt{2x^2-1}\,dx$

الحل

i- $\frac{1}{2}\int\sqrt{4-9x}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(4-9x\right)^{1/2}\left(-9\right)\left(\frac{1}{-9}\right)dx$

$$=-\frac{1}{18}\int\left(4-9x\right)^{1/2}(-9)dx$$
$$=-\frac{1}{18}\int\left(4-9x\right)^{1/2}d(-9x)$$
$$=-\frac{1}{18}\frac{\left(4-9x\right)^{3/2}}{3/2}+c$$
$$=-\frac{1}{27}\left(4-5x\right)^{3/2}+c$$

ii- $\int\frac{5z^2-12z-10}{z^4}dz=5\int z^{-2}dz-12\int z^{-3}dz-10\int z^{-4}dz$
$$=-5z^{-1}-\frac{12}{-2}z^{-2}-\frac{10}{-3}z^{-3}+c$$
$$=-\frac{5}{z}+\frac{1}{6z^2}+\frac{10}{3z^3}+c$$

iii- $\int\sqrt{y}\left(3y+1\right)^2dy=\int\sqrt{y}\left(9y^2+6y+1\right)dy$
$$=9\int y^{5/2}dy+6\int y^{3/2}dy+\int y^{1/2}dy$$
$$=\frac{18}{7}y^{7/2}+\frac{12}{5}y^{5/2}+\frac{2}{3}y^{3/2}+c$$
$$=\sqrt{y}\left(\frac{18}{7}y^3+\frac{12}{5}y^2+\frac{2}{3}y\right)+c$$

iv- $\int\left(3-4x\right)^{17}dx=\int\left(3-4x\right)^{17}(-4)\left(\frac{1}{-4}\right)dx$
$$=-\frac{1}{4}\int\left(3-4x\right)^{17}d\left(-4x\right)$$
$$=-\frac{1}{4(18)}\left(3-4x\right)^{18}+c$$
$$=\frac{-1}{72}\left(3-4x\right)^{18}+c$$

v- $\int\left(3x+5\right)^{-3}dx$
$$=\frac{1}{3}\int 3\left(3x+5\right)^{-3}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\left(3x+5\right)^{-3}d(3x)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{\left(3x+5\right)^{-2}}{-2}+c$$
$$=-\frac{\left(3x+5\right)^{-2}}{6}+c$$

vi- $\int\left(8x-6\right)\left(4x^2-6x\right)^3dx$

بوضع $z=4x^2-6x$ **نجد أن**

$$= \int z^3 dz$$
$$= \frac{1}{4} z^4 + c$$
$$= \frac{1}{4}\left((4x - 6x\right)^4 + c$$

vii- $\int \left[x + \frac{1}{(4x+3)^2} \right] dx = \int x\, dx + \int (4x+3)^{-2}\, dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} \int (4x+3)^{-2}\, d(4x+3)$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} (4x+3)^{-1} + c$$

viii- $\int x\sqrt{2x^2} - 1 dx = \int \left(2x^2 - 1\right)^{1/2} x\, dx$

بوضع $2x^2 - 1 = t$ **نجد أن**

$$= \frac{1}{4} \int t^{1/2} dt$$
$$= \frac{1}{4} . \frac{t^{3/2}}{3/2} + c$$
$$= \frac{1}{6} \left(2x^2 - 1\right)^{3/2} + c$$

9- أوجد قيم التكاملات الآتية :

1- $\int ex\, dx$

2- $\int e^{ax}\, dx$

3- $\int 2 e^{3x+2} dx$

4- $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$

5- $\int \left(\frac{e^z - 2}{e^z} \right) dz$

6- $\int e^{x^2}\, x\, dx$

الحل

1- $\int e\, x\, dx = e \int x\, dx = \frac{e}{2} x^2 + c$

حيث e عدد طبيعى وهو مقدار ثابت $e \approx 2.718$

2- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{e^{ax}}{a} + c$

3- $\int 2 e^{3x+2} dx = 2 \int e^{3x} . e^2 dx$

$$= 2e^2 \int e^{3x} dx = \frac{2e^2}{3} e^{3x} + c$$
$$= \frac{3}{2} e^{3x+2} + c$$

4- $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \int \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2} e^{2x}\, 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} + c$$

5- $\int \frac{e^z - 2}{e^z} dz = \int \left(1 - 2e^{-z}\right) dz$

$$= z + \frac{2}{e^z} + c$$

$$= \frac{ze^z + 2}{e^z} + c$$

6- $\int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{e^z}{2} + c$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

10- عين كلا من التكاملات الآتية :

$1-\int \frac{2x}{x^2+3}dx$ **ii-** $\int \frac{4}{3t-11}dt$

iii- $\int \frac{4x}{x^2+3}dx$ **iv-** $\int \frac{u+1}{u^2+2u+11} + du$

v- $\int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}d\theta;\ b \neq 0$

الحل

بوضع $t = x^2$

i- $\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \int \frac{dt}{t+3} = \ln(t+3) + c$

$$= \ln(x^2+3) + c$$

ii- $\int \frac{4dt}{3t-11} = \frac{4}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{4}{3}\ln z + c$

$$= \frac{4}{3}\ln(3t-11) + c$$

بفرض أن $3t - 11 = z$

iii- $\int \frac{4x}{x^2+3}dx = 2\int \frac{2x}{x^2+3}dx$

بوضع $t = x^2 + 3$ **نجد أن**

$$= 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln t + c$$

$$= 2\ln\left(x^2+3\right) + c$$

$$= \ln\left(x^2+3\right)^2 + c$$

iv- $\int \frac{u+1}{u^2+2u+11}du = \frac{1}{2}\int \frac{2y+2}{u^2+2u+11}du$

بوضع $z = u^2 + 2u + 11$ **نحصل على**

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left\{u^2+2u+11\right\} + c$$

$$= \ln\left\{u^2+2u+11\right\}^{1/2} + c$$

iv- $\int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}\,de = \frac{1}{b}\int \frac{b\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}\,de$

بوضع $z=a+b\tan\theta$ **نجد أن** $dz=b\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{\sec^2\theta}{a+b\tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\ln z + c$$

$$= \frac{1}{b}\ln\{a+b\tan\theta + c\}$$

11- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sin 2x\, dx$

ii- $\int 3\cos 3\theta\, d\theta$

iii- $\int \sec^2(-2y)\,dy$

iv- $\int \sin^3 t dt$

v- $\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\, dx$

vi- $\int x\sin x^2 dx$

الحل

i- $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x 2x + c$

ii- $\int 3\cos 3\theta\, d\theta = \sin 3\theta + c$

iii- $\int \sec^2(-2y)\,dy = -\frac{1}{2}\int (-2)\sec^2(-2y)\,dy = -\frac{1}{2}\tan(-2y)+c$

iv- $\int \sin^3 t\, dt = \int \sin^2 t \sin t\, dt$

$$= \int \left(1-\cos^2 t\right)\sin t\ dt$$

$$= \int \left(\sin t - \cos^2 t \sin t\right)dt$$

$$= -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + c$$

v- $\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\, dx = \int \cos^{1/2} x \sin x\, dx$

$$= -\frac{2}{3}\cos^{3/2} x + c$$

vi- $\int x\sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\sin x^2\, dx$

بوضع $x^2=\theta$ **نجد أن**

$$= \frac{1}{2}\int \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

12- أوجد قيم التكاملات التالية :

i- $\int \frac{6du}{9+u^2}$

ii- $\int \frac{dy}{1+9y^2}$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}\,dx$

iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

الحل

i- $\int \frac{6\,du}{9+u^2} = 6\int \frac{du}{3^3+u^2}$

$$= 6\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3}\right)+c$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{u}{3}+c$$

ii- $\int \frac{dy}{1+9y^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dy}{\frac{1}{9}+y^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dy}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+y^2}$

$$= \frac{1}{9}\left(3\tan^{-1}3y\right)+c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}3y+c$$

iii- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx = \int\left(\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx\right)$

بوضع $3-\sin^2 x = y$ نجد أن

$$= -\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -2\sqrt{y}+c$$

$$= -2\sqrt{3-\sin^2 x}+c$$

iv- $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x}} = \sin^{-1}\frac{x}{2\sqrt{2}}+c$

v- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$

وذلك بفرض أن $\sec\theta = \frac{x}{3}$ حيث هذا يؤدى إلى $dx = 3\sec\theta\tan d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta}{9\sec\theta\tan\theta}d\theta = \frac{1}{3}\theta+c$$

$$= \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3}+c$$

13- أثبت أن

1- $\int \frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{3\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{7}}{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}\right|+c$

2- $\int \frac{dx}{3x^3-8x+7} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right)+c$

الحل

1- $\because \frac{1}{5x^2-7} = \frac{1}{5}.\frac{1}{x^2-7/5} = \frac{1}{5}.\frac{1}{\left(x+\sqrt{7/5}\right)\left(x-\sqrt{7/5}\right)}$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{7/5}}-\frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{35}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{35}}-\frac{1}{x+\sqrt{7/5}}\right)$$

$$\therefore\int\left(\frac{dx}{5x^2-7}=\frac{1}{2\sqrt{35}}\left\{\int\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}}-\int\left(\frac{dx}{x-\sqrt{7/5}}\right)\right\}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{25}}\left\{\ln\left|x-\sqrt{7/5}\right|-\ln\left|x+\sqrt{7/5}\right|\right\}+c$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7/5}}{x+\sqrt{7/5}}\right|+c$$

2- $\because 3x^2-8x+7=3\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}\right)$

$$=3\left[\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)+\frac{7}{3}-\frac{16}{9}\right]$$

$$=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}\right]$$

$$\therefore\int\frac{dx}{3x\ \ -8x+7}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}$$

بوضع $x-\frac{4}{3}=u$ **نجد أن**

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{3u}{\sqrt{5}}+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-4}{\sqrt{5}}\right)+c$$

14- أوجد قيمة كلا من التكاملات الآتية :

i- $\int x^2 e^x\,dx$ **ii-** $\int x\cos x\,dx$

iii- $\int \tan^{-1}x\,dx$ **iv-** $e^x\sin x\,dx$

الحل

i- **نفرض أن**

$$dv=e^x\,dx,\qquad u=x^2$$

$$\therefore u=x^2,\qquad v=e^x$$

بالتكامل بالجزئ

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$\because \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$\therefore \int x^2 e \ \ dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$= \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + c$$

ii-

بوضع $dv = \cos x \, dx, \quad u = x$

$\therefore v = \sin x, \quad u = x$

بالتكامل بالتجزئ

$$\therefore \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c.$$

iii- $\int \tan^{-1} x \, dx$

بوضع $u = \tan^{-1} x, \quad dv = dx$

$$\therefore du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x$$

$$\therefore \int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2}$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + c$$

iv- $\int e^x \sin x \, dx$

بوضع $u = \sin x. \quad dv = e^x dx$

$$\therefore du = \cos x \, dx, \quad v = e^x$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

مرة أخرى بفرض أن

$$u_1 = \cos x \quad dv_1 = e^x dx$$

$$\therefore du_1 = -\sin x \, dx, \quad v_1 = e^x$$

$$\therefore \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = e^x \left(\sin x - \cos x\right) - e^x \sin x \, dx + c$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right) + c$$

15- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \sec^4 2x \tan 2x \, dx$

ii- $\int \tan^3 x \, dx$

iii- $\int \left(\sec x \, dx\right)$

iv- $\int \cos 2x \cos 5x \, dx$

v- $\int \left(\sin^{-1} x\right)^3 dx$

الحل

i- $\int \sec^4 2x \tan 2x\,dx = \int \sec^3 2x\left(\sec 2x \tan 2x)dx\right)$

بوضع $\sec 2x = z$ نجد أن

$$= \frac{1}{2}\int z^3\,dz$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}z^4 + c$$

$$= \frac{1}{8}\sec^4 2x + c$$

ii- $\int \tan^3 x\,dx = \int \tan^2 x \tan x\,dx$

$$= \int\left(\sec^2 x - 1\right)\tan x\,dx$$

$$= \int \sec^2 x \tan x\,dx - \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ell n \cos x + c$$

iii- $\int \sec x\,dx = \int \sec x \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec + \tan x}dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx$$

ولأن البسط تفاضل المقام فإن $= \ln(\sec x + \tan x) + c$

iv-

تذكر أن

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 - 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

والآن من العلاقة الأولى عندما $\alpha = 2, \beta = 5$ نجد أن

$$\int \cos 2x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos 7x + \cos 3x\right]dx = \frac{1}{2}\int \cos 7x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{6}\sin 3x + c$$

v- $\int\left(\sin^{-1} x\right)^3 dx$

نفرض أن $\sin^{-1} x = z$

$$\therefore x = \sin z, \qquad dx = \cos z\, dz$$

$$\therefore \int \left(\sin^{-1}\right)^3 dx = \int z^3 \cos z\, dz$$

بالتكامل بالتجزئ وذلك بفرض أن

بفرض أن

$$u = z^3, \quad dv = \cos z\, dz$$

$$\therefore du = 3z^2 dz, \qquad v = \sin z$$

نجد أن

$$\int \left(\sin^{-1}\right) dx = \int z^3 \cos z\, dz$$

$$= z^3 \sin z - 3\int z^2 \sin z\, dz \qquad (*)$$

بفرض أن

$$u_1 = z^2, dv_1 = \sin z\, dz$$

$$\therefore du_1 = 2z\, dz, \qquad v_1 = \cos z = -\cos z$$

$$\therefore \int z^2 \sin z\, dz = z^2 \cos z + 2\int z \cos z\, dz \qquad (**)$$

مرة أخى نفرض أن $u_2 = z, dv_2 = \cos z\, dz$

$$\therefore du_2 = dz, \qquad \upsilon_2 = \sin z$$

$$\therefore \int z \cos z\, dz = z \sin z - \int \sin z\, dz$$

$$= z \sin z + \cos z + c$$

بالتعويض فى (**) ثم فى (*) نحصل على

$$\int \left(\sin^{-1}\right) dx = z^3 \sin z + 3z^2 \cos z - 6z \sin z + 6\cos z + c$$

$$= x\left(\sin^{-1} x\right)^3 + 3(1-x)^{1/2}\left(\sin^{-1} x\right)^2 - 6x \sin^{-1} x + 6(1-x)^{1/2} + c$$

16- أثبت أن

$$i - \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + c; \ a > 0$$

ii- $$\int \sqrt{2 + 3x^2\, dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\left(2+3x^2\right)^{1/2} + \sqrt{3x}}{\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2} x \left(2 + 3x^2\right)^{1/2} + c$$

iii- $$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = .\ln\left|\frac{t}{a} + \frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{a}\right| + c$$

iv- $$\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x - 3x^2}} dx = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x - x^2} + \sqrt{3}\sin^{-1}(x-1) + c$$

v- $$\int \frac{3e^y}{\sqrt{1 - e^{2y}}} dy = 3\sin^{-1} e^y + c$$

الحل

i-

بوضع $x = a\sin\theta$ **حيث** $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta, \qquad dx=a\cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}a\cos\theta\, d\theta$$

$$\int\cot^2\theta\, d\theta=\int\left[\mathrm{cosec}^2\theta-1\right]d\theta$$

$$=-\cot\theta-\theta+c.$$

$$\because \sin\theta=x/a \qquad \therefore \cos\theta=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\therefore \int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

ii- $\int\sqrt{2+3x^2\, dx}$

بوضع $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\tan\theta$ فإن $dx=\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{sex}^2}\theta\, d\theta$

$$\therefore \int\sqrt{2+3x^2\, dx}=\sqrt{3}\int\left(\frac{2}{3}+x^2\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\sec^3\theta\, d\theta$$

بالتكامل بالتجزئ بوضع

$$u=\sec\theta, \qquad dv=\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore du=\sec\theta\tan\theta\, d\theta, \qquad v=\tan\theta$$

$$\therefore \int\sec^3\theta\, d\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\left(\sec^2\theta-1\right)\sec\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int\sec^3\theta\, d\theta=\sec\theta\tan\theta+\int\sec\theta\, d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c$$

$$\therefore \int\sqrt{2+x3^2}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right]+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\left(2+3x^2\right)^{1/2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2}x\left(2+3x^2\right)^{1/2}+c$$

iii- $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}$

نفرض أن $t=a\sec\theta$

$$\therefore dt=a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}}=\int\frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a\tan\theta}=\int\sec\theta\, d\theta$$

$$=\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{t}{a}+\frac{\sqrt{t^2-a}}{a}\right|+c$$

iv- $\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx$

$$\because 6x-3x^2=-3\left(x^2-2x\right)=-3\left[\left(x-1\right)^2-1\right]=3\left[1-\left(x-1\right)^3\right]$$

بوضع $u=x-1$ **نحج أن** $dx=du$

$$\therefore \int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}dx=\int \frac{2\left(u+1\right)+1}{\sqrt{3\left(1-u^2\right)}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}du+\sqrt{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-u^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}u+c$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{3}\sin^{-1}\left(x-1\right)+c$$

v- $\int \frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy$

بوضع $u=e^y$ **نجد أن** $du=e^y dy$

$$\therefore \int \frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}dy=3\int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}}=3\sin^{-1}u+c$$

$$=3\sin^{-1}e^y+c$$

17- أوجد قيم التكاملات الآتية :

i- $\int \frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}dx$

ii- $\int \frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx$

الحل

(1) يلاحظ أن الدالة المكاملة هى كسر حقيقى لأن درجة البسط أقل من درجة المقام ،لذلك يجب تحليل هذه الكسر إلى عدد عوامل المقام الأولية. لذا نبدأ بتحليل المقام حيث :

$$x^4-3x^3+x^2-2x \;=\; x(x-2)\left(x^2-1\right)$$

بذلك يكون

$$\frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}=\frac{4}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{cx+D}{x^2+1}$$

لإيجاد قيم الثوابت A, B, C, D نجمع الكسور فى الطرف الأيمن نلاحظ أنه يجب لتساوى الطرفين أن يكون

$$6x^3-11x^2+5x+4=A(x-2)\left(x^2+1\right)+BX\left(x^2+1\right)+(CX+D)X(x-2)$$

بمقارنة معاملات قوى X فى الطرفين نجد أن $A=2,\ B=1,\ C=3,\ D=-1$

$$\therefore \int \frac{6x^3-11x^2+5x+4}{x^4-3x^3+x^2-2x}dx = 2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{3x-1}{x^2+1}dx$$
$$= 2\ln x+\ln(x-2)+3\int\frac{x}{x+1}dx-\int\frac{dx}{x+1}$$
$$= \ln\left(x^2(x-2)\right)+\ln\left(x^2+1\right)+\tan x+c$$
$$= \ln\left(x^2(x-2)\left(x^2+1\right)^{3/2}\right)+\tan^{-1}x+c$$

(2) واضح أن درجة البسط للدالة المكاملة أكبر من درجة المقام لذلك فهى تمثل كسر غير حقيقى وبأجراء القسمة المطولة نجد أن

$$\frac{x^4+48x^3+37x^2 20x+3}{9x\ \ +12x^2-11x+2} = x+4+\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}$$

حيث الكسر الذى فى الطرف الأيمن هو كسر حقيقى

$$\therefore \int\frac{x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx = \frac{x^2}{2}4x+\int\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}dx$$

ولإيجاد التكامل الأخير نحلل الكسر $\dfrac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}$ **حيث**

$$9x^3+12x^2 11x+2=(x-2)(3x-1)^2$$
$$\therefore \frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{3x-1}+\frac{C}{(3x-1)^2}$$

ومنها يمكن إيجاد أن $A=-1,\ B=3,\ C=1$

$$\therefore \int\frac{22x-5}{9x^3+12x^2 11x+2}dx = -\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{3x-1}+\int\frac{dx}{(3x-1)^2}$$
$$= -\ln(x+1)+\ln(3x-1)-\frac{1}{3(3x-1)}+c$$
$$= \ln\frac{3x-1}{x+1}-\frac{1}{3(3x-1}+c$$

تمارين عامة

أوجد قيم التكاملات الآتية:

1- $\int 3\left(x+\frac{5}{2}x^3\right)dx$

2- $\int x(2x-3)dx$

3- $\int\left(3x^2-8x\right)dx$

4- $\int\left(x\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3\right)dx$

5- $\int 3x\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

6- $\int\left[t^3(4-2t)+\frac{6}{t}\right]dt$

7- $\int c\theta\left(a+\theta^2\right)d\theta$

8- $\int 9\left(z+4+\frac{1}{z^2}\right)dz$

9- $\int\left(3x^{-2}+\frac{11}{2}x^{-5}\right)dx$

10- $\int\sqrt{7z}\,dz$

11- $\int\left(\sqrt{\omega}-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)d\omega$

12- $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$

13- $\int \frac{u-1}{u^3} du$

14- $\int 3x^2 \left(x^3-10\right) dx$

15- $\int u^2 \left(u^3+3\right)^{10} du$

16- $\int 3x \left(x^2+6\right)^3 dx$

17- $\int \left(x^2+6\right)^3 dx$

18- $\int \frac{dt}{\left(t-1\right)^2}$

19- $\int \left(6z^2+5\right)\left(2z^3+5z+9\right)^4 dz$

20- $-\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

21- $\int \left(x+\sqrt{1-x}\right) dx$

22- $\int e^{ax+b} dx$

23- $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$

24- $\int e^{-t/z} dt$

25- $\int \frac{3dx}{e^{4x+1}}$

26- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

27- $\int \frac{3x^2 2x}{x^3-x^2} dx$

28- $\int \frac{8x+10}{2x^2 5x} dx$

29- $\int x 4^{x^2+6} dx$

30- $\int \frac{1-\sin\alpha}{\alpha+\cos\alpha} d\alpha$

31- $\int 5^{3t} dt$

32- $\int \frac{1}{3^{2u}} du$

33- $\int \sin\left(ax+b\right) dx;\ a \neq 0$

34- $\int \sin 2x \, dx$

35- $\int \left(2\sin\frac{4}{3}x+4\sec^2\frac{x}{2}\right) dx$

36- $\int \sec\frac{4}{2}\tan\frac{4}{2} du$

37- $\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

38- $\int \tan ax \sec^2 ax \, dx$

39- $\int \left(1-\cos z 2\right)^4 \sin 2t \, dt$

40- $\int \left(1+\sin y\right)^2 \cos y \, dy$

41- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

42- $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

43- $\int \frac{x^2+a}{x^3} dx$

44- $\int \frac{3x-4}{x-4} dx$

45- $\int \frac{dx}{x^2-2x+8}$

46- $\int \sin^{-1} 3y \, dy$

47- $\int x a^{x^2} dx$

48- $\int x a^x dx$

49- $\int \left(3x+x^2\right) \cos x \, dx$

50- $\int \sin^7 \frac{x}{2} dx$

51- $\int \sqrt{4x^2-9} \, dx$

52- $\int x\sqrt{4x^2-25} \, dx$

53- $\int \frac{dz}{\sqrt{3-7z^2}}$

54- $\int \frac{dx}{x\left(x+4\right)}$

55- $\int \frac{1+x^3}{x^2-4x+3} dx$

56- $\int \frac{dx}{x\left(x+1\right)^2}$

57- $\int \frac{y^5+3y^4+2y^3-y^2+4}{y^3+3y^2+2y} dy$

58- $\int \frac{dx}{2x^2+9}$

59- $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$

60- $\int x \sec^{-1} x \, dx$

61- $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

62- $\int \frac{b\,dt}{\cos^2 at}; \;\; a \neq 0$

63- $\int \sin 7x \sin 3x \, dx$

64- $-\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10-x^2}}$

65- $\int \tan^{-1} \sqrt{u} \, du$

الفصل الرابع
تطبيقات التكامل

تطبيقات التكامل الغير محدد.

أولا : تطبيقات هندسية.

الأمثلة التالية تبين كيفية استخدام التكامل الغير محدد فى حل بعض المشكلات الهندسية.

مثال (1) : اوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة $(2, 3)$ والذى ميله عند أى نقطة عليه يكون مساويا للأحداثى السينى لتلك النقطة.

الحل : نفرض أن معادلة المنحنى هى $y = f(x)$

نعلم من دراسة المشتقة التفاضلية الأولى لدالة فى متغير واحد أنها تمثل هندسيا ميل لمنحنى الدالة عند النقطة المحسوب عندها التفاضل أى أن

ميل المماس للمنحنى الذى معادلته $y = f(x)$ عند النقطة (x, y) هو y'. من معطيات المسألة يكون

$$y' = x \qquad (1)$$

المعادلة (1) تعنى أن الدالة المطلوبة y هى الدالة مقابلة للدالة $g(x) = x$ بتطبيق قواعد التكامل غير المحدد نجد أن

$$y = \int x\,dx$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad (2)$$

المعادلة (2) تعطى عائلة المنحنيات. يختلف كل منحنى فيها عن الآخر بالمقدار c. ولتحديد المنحنى المطلوب الذى يمر بالنقطة $(2, 3)$ نضع فى المعادلة $y = 3, x = 2$ لإيجاد قيمة c حيث

$$c = y - \frac{1}{2}x^2 = 3 - \frac{1}{2} \qquad (4)$$

وعلى ذلك فإن معادلة المنحنى المطلوب هى : $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

مثال (2) : أوجد معادلة المنحنى الذى إحداثى أى نقطة (x, y) عليه يحققان العلاقة

$$y'' = 6x - 2$$

ويمر بالنقطة $(0, 3)$ ويكون ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة مساوياً الواحد الصحيح.

الحل : لإيجاد معادلة المنحنى المطلوب $y = f(x)$ من العلاقة المعطاة نحتاج لإجراء التكامل غير المحدد مرتين متتاليتين فى المرة الأولى نحصل على y' حيث

$$y' = 3x^2 - 2x + c_1 \qquad (1)$$

وفى المرة الثانية نحصل على y على الصورة

$$y = x^3 - x^2 + c_1x + c_2 \qquad (2)$$

وقيم الثوابت الاختيارية c_1, c_2 تتحدد من باقى المعطيات بالمسألة نتعلم أن ميل المماس عند نقطة $(0, 3)$ للمنحنى يساوى الواحد أى أن $y' = 1$ at $x = 0$ بالتعويض فى المعادلة (1) عند $y' = 1, x = 0$ نجد أن

$$c_1 = 1$$
$$\therefore y' = 3x^2 - 2x + 1$$
$$y = x^3 - x^2 + x + c_2$$

ولأن المنحنى يمر بالنقطة (0, 3) فإن

$$-3 = a^3 - o^2 + c_2$$
$$\therefore c_2 = -3$$

ومنها $y = x^3 - x^2 + x - 3$ هى معادلة المنحنى المطلوب.

ثانيا : تطبيقات فى الميكانيكا

إذا كانت سرعة جسم متحرك تعنى معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن أى أن العلاقة بين المسافة f التى يقطعها جسم متحرك من نقطة ثابتة وبسرعة v عند لحظة معينة بعد مرور زمن قدره t من نقطة البدء هى $v = \frac{df}{dt}$

وتعرف العملة بأنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن أى أن $w = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2f}{dt^2}$

ويستخدم التكامل غير المحدد فى الميكانيكا لحساب سرعة جسم متحرك كذلك المسافة التى قطعها الجسم بعد مرور فترة زمنية t من لحظة بدء الحركة وذلك إذا علمنا عجلة حركة الجسم. حيث $\upsilon = \int w\,dt$ تعطى السرعة التى يتحرك لها الجسم إذا كانت عجلته معروفة. أما $f = \int \upsilon\,dt$ فتعطى المسافة التى يقطعها الجسم يتحرك بسرعة υ بعد مرور زمن قدرة t من بدء الحركة.

مثال (1) : قذفت كرة راسياً إلى أعلى بسرعة 128 14 sec من حافة برج ارتفاعه 160 ft فوق سطح الأرض. أوجد معادلات الحركة للكرة علماً بأن عجلة الجاذبية الأرضية هى 32 $\dot{}$ft/ sec^2

الحل : نعتبر اتجاه الحركة لأعلى هو الاتجاه الموجب للحركة فتكون عجلة الحركة (وهى عجلة الجاذبية) هى - 32 قدم / ث^2 (-32 ft/sec^2) أى أن

$$w = -32\,ft/sec^2 \qquad (1)$$

لإيجاد السرعة هند أى لحظة $\upsilon = \int w\,dt = -32t + c_1$ حيث c_1 ثابت التكامل.

عند بدء الحركة يكون $t = 0,\ \upsilon = 128\,ft/sec.$

$$\therefore c_1 = 128$$

وعلى ذلك فإن

$$\upsilon = -32t + 128 \qquad (2)$$

لإيجاد المسافة فإن

$$f = \int \upsilon\,dt = -\int (32t - 128)\,dt$$
$$= -32\int t\,dt + 128\int dt$$
$$= -16t^2 + 128t + c_2$$

ولكن عند بدء الحركة كانت الكرة على ارتفاع 160 قدم أى أنه عندما $t = 0$ فإن $f = 160$ ft أى أن

$$c_2 = 160$$
$$\therefore f = -16t^2 + 128t + 160 \qquad (3)$$

العلاقات الثلاثة (1), (2), (3) هى القوانين (معادلات الحركة) المطلوبة لإيجاد w, υ, f عند أى لحظة.

مثال (2) : سقطت كرة فى بئر ليس به ماء فوصلت إلى ارتفاع بعد مضى 12 ثانية. أوجد عمق البئر.

الحل : اتجاه الحركة هنا إلى أسفل فيكون $w = 32\,ft/sec^2$

$$\therefore v = \int 32\,dt = 32t + c_1$$

الكرة تركت لتسقط ولم تقذف أى أنها بدأت الحركة بسرعة صفر عندما كانت $t = 0$ ومنها يكون $c_1 = 0$

$$\therefore v = 32t$$
$$\because f = \int \upsilon\,dt$$
$$\therefore f = 16t^2 + c_2$$

وباعتبار أن نقطة السقوط هى نقطة بدء قياس المسافة فإن $f = 0, t = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\therefore f = 16t^2$$

وعندما $t = 12$ وهى لحظة وصول الكرة إلى قاع البئر فإن $f = 16 \times 144 = 2304$ ft أى أن عمق البئر 2304 قدم.

تمارين

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

1- $f'(x) = -4x, \quad f(2) = 3$

2- $f'(x) = 1 - +3x, \quad f(0) = -1$

3- $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f(3) = 0$

4- $f'(t) = 9^2 - 1, \quad f(-1) = 0$

5- $f'(t) = \dfrac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}, \quad f(1) = 2$

6- $f' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}, \quad f(4) = \dfrac{7}{4}$

(7) أوجد معادلة المنحنى الذى ميله عند أى نقطة (x, y) عليه هو x^2 ويمر بالنقطة (-2,0).

(8) أوجد معادلة منحنى على الصورة $y = f(x)$ علما بأن $f''(x) = 6$ عند أى نقطة (x, y) عليه ، ويمر بالنقطة (1, 4) بميل 5 عند تلك النقطة.

(9) سقط حجر من بناء ارتفاعه 484 قدم عند سطح الأرض فبعد كم ثانية يصل هذا الحجر لسطح الأرض ؟ وما هى سرعة الحجر لحظة اصطدامه بالأرض.

10- أطلق سهم رأسياً لأعلى من على سطح الأرض بسرعة 96 قدم/ثانية أوجد أقصى ارتفاع له؟ ومتى يصل السهم إلى سطح الأرض. وما هى سرعته عند لحظة وصوله للأرض؟

11- أطلق مقذوف من بندقية بسرعة 800قدم/ثانية راسياً لأعلى ما هو أقصى ارتفاع يصل إليه؟

تطبيقات التكامل المحدد.

حسابات الأشكال المستوية.

1- المساحة فى الإحداثيات الكارتيزية.

إذا كانت $y = f(x)$ بحيث $f(x) \geq 0$ تعرف منحنى متصل فى المستوى xy فإن المساحة المحصورة بين هذا المنحنى والخطية الراسيين $x = a, x = b$ وجزء المحور ox $a \leq x \leq b$ تعطى بالصورة.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

مثال (1) : أحسب المساحة المحصورة بين القطع المكافئ المكانى $y = \frac{x^2}{2}$ والخطيين المستقيمين $x = 3, x = 1$ ومحور x

الحل :

$$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\left[x^3\right]_3^1}{6} = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}$$

مثال (2) : أحسب قيمة المساحة المحصورة بالمنحنى $x = 2 - y - y^2$ ومحور y

الحل : أولا يجب أن نحدد نقط تقاطع المنحنى مع محور y. ولنقط التقاطع هذه يكون الأحداثى الأول مساوياً للصفر أى أن $x = 0$

$$\therefore y^2 + y - 2 = 0 \qquad (*)$$

ومنها $y = 1,\ y = -2$ حلان للمعادلة (*) أى أن تقاطع المنحنى المعطى مع محور y هى $(0,1), (0,-2)$ وعلى ذلك فإن المساحة المطلوبة S هى

$$\therefore S = \int_{-2}^{1} x\,dy = \int_{-2}^{1} \left(2 - y - y^2\right) dy$$

$$= \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{1} = 4\frac{1}{2}.$$

فى الحالة العامة يمكن إيجاد المساحة S المحصورة بين منحنيين راسيين $y = f_1(x), y = f_2(x)$ والخطين الرأسيين $x = b, x = a$ حيث $f_1)x) \leq f_2(x)$ عندما $a \leq x \leq b$ كما بالشكل القادم. حيث

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - -f_1(x)\right] dx \qquad (2)$$

مثال (3) : أحسب قيمة المساحة M المحصورة بين المنحنيين

$$y = 2 - x^2, \qquad y^3 = x^2 \qquad (3)$$

الحل : بحل المعادلتين (3) معاً نجد أن حدود التكامل هى $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ وبمقتضى الصيغة (2) نجد أن المساحة المطلوبة هى

$$M = \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - x^{2/3}\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^{5/3}\right]_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}$$

وإذا كانت معادلة المنحنى معطاة فى الصورة البارامترية $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ فإن المساحة المحصورة بين المنحنى والخطين الرأسيين $x = a,\ x = b$ وجزء محور x يعبر عنها بالتكامل :

$$S = \int_{t}^{t_2} \psi(t)\phi'(t)\,dt \qquad (4)$$

حيث $t_{1,}t_2$ تعينان من المعادلات $a = \phi(t_1),\ b = \phi(t_2)$ علماً بأن $\phi(t) \geq 0$ على الفترة $[t_1, t_2]$

مثال (4) : أوجد مساحة القطع الناقص المعطى بالمعادلات البارامترية.

الحل : نظراً للتماثل الهندسى للشكل (أنظر الشكل المقابل) يكفى أن نسب مساحة الربع ثم نضرب النتيجة فى 4. فى الربع الأول (المظلل) نجد أن $0 \leq x \leq a$ وبالتالى فإن حدود التكامل فى الصيغة (4) تتعين من المعادلات $0 = a\cos t,\ a = a\cos t_2$ أى أن $t_1 = \frac{\pi}{2},\ t_2 = 0$ وعلى ذلك فإن مساحة الربع هى

$$\frac{S}{4} = \int_{\pi/2}^{0} (b\sin t)(-a\sin t)\,dt = ab\int_{a}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4}$$

وعندئذ

$$S = \pi ab$$

2- المساحة فى الإحداثيات القطبية.

إذا عرف المنحنى بالإحداثيات القطبية r, θ بالمعادلة $r = f(\theta)$ عندئذ مساحة القطاع AoB والمحدودة بقوس المنحنى $\overset{\frown}{AB}$ والمتجهين $oA,\ oB$ واللذين يصنعان زوايا $\theta_1 = \alpha,\ \theta_2 = \beta$ مع المحور ox يعبر عنها بالصورة التكاملية

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\,d\theta \qquad (5)$$

مثال (5) : أوجد المساحة داخل المنحنى $r^2 = a^2\cos 2\theta$

الحل : بمقتضى تماثل المنحنى (انظر الشكل) نعين أولا ربع المساحة

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore S = a^2$$

تمارين (2-4)

1- أوجد المساحة المحصورة بالقطع المكافئ $y = 4x - x^2$ ومحور x.

2- أحسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = \ln x$ ومحور x والخط المستقيم x = e.

3- أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $y = 2x - x^2$ والخط المستقيم y = -x.

4- أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $r = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$ وانصاف المستقيمات $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \theta\dfrac{\pi}{4}$

حساب طول قوس منحنى.

1- طول القوس فى الإحداثيات الكرتيزية.

طول القوس S لمعنى معطى بالمعادلة $y = f(x)$ والواقع بين النقطتين اللتين لهما x = a, x = b يكون $S\int_a^b \sqrt{1+y^2}dx$

مثال (1) : أوجد طول قوسى منحنى الأسترويد $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (أنظر الشكل)

الحل : بتفاضل معادلة منحنى الاسترويد نحصل على $y' = -\dfrac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$ من هندسة الشكل وتماثله يكفى إيجاد طول ربع القوس ثم نضرب الناتج فى 4 أى أن

$$\frac{S}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx = \frac{3}{2}a$$

2- طول القوس لمنحنى ممثل بارامتريا.

إذا كان المنحنى معطى فى صورة بارامترية $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ فإن طول القوس للمنحنى يكون $S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ حيث t_1, t_2 هما قيم البارامتر t والتى تقابل طرفى القوس .

مثال (2) : أوجد طول قوص واحد لمنحنى السيكلويد $x = a(t - \sin t)\quad y = a(1 - \cos t)$

الحل : $\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t),\ \dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ لذلك

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8a$$

والنهايتين $t_2 = 2\pi,\ t = 0$ تتقابلان طرفى قوس السيكلويد.

إذا كانت معادلة المنحنى معطاة فى الصورة القطبية $r = f(\theta)$ فـ'ن طول القوس يكون $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\theta$ حيث α, β هما قيمتى الزاويتين القطبيتين عند نقطتى طرفى القوس.

مثال (3) : أوجد طول قوس كل منحنى $r = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$

ملحوظة : المنحنى هو المحل الهندسى نقطة يتعير موضعها عندما تتغير θ من 0 إلى 3π.

الحل : $r' = a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$ لذلك يكون طول القوس المنحنى هو

$$S = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin\frac{\theta}{3} + a^2\sin^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta}$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{3\pi a}{2}$$

تمارين (3-4)

1- أحسب طول قوس المنحنى $y = 2\sqrt{x}$ من $x = 0$ إلى $x = 1$.

2- أوجد طول قوس المنحنى $y = e^x$ الذى يقع بين النقطتين $(1,e),(0,1)$.

3- أوجد طول القوس للمنحنى

$$x = a(\cos t + t\sin t)$$
$$y = a(\sin t - t\cos t)$$

من $t = 0$ إلى $t = T$.

4- أوجد طول قوس المنحنى $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ من $r = 1$ إلى $r = 3$.

حساب حجوم المجسمات.

1- حجم الجسم الدورانى.

حجم الجسم الذى يتكون من دوران المساحة المحدودة بالمنحنى $y = f(x)$ ومحور x والخطين الرأسيين $x = b, x = a$ حول محور x أو حول محور y.

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx \qquad (1)$$

أو

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy\,dx \qquad (2)$$

مثال (2) : أحسب حجم الجسم المكون من دوران الشكل بفرع واحد من المنحنى $y = \sin x$ والجزء $0 \le x \le \pi$ من محور x

(أ) حول محور x (ب) حول محور y

الحل : (أ)
$$V_x = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{2}$$

(ب)
$$V_y = 2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$

$$= 2\pi\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi} = 2\pi^2$$

وحجم الجسم الناتج من الدوران حول محور y للشكل المحدود بالمنحنى $x = g(y)$ ومحور y والخطين المتوازيين $y = d, y = c$ يعين بالصيغة $V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$

فى الحالة العامة تتعين حجوم الأجسام الناتجة من الدوران حول محورى x, y لشكل بالمنحنيين $y = f_1(x), y = f_2(x)$ (حيث $f_1(x) \le f_2(x)$) والخطوط المستقيمة $x = a, x = b$ من الصيغ الآتية على الترتيب

$$V_x = \pi\int_a^b \left[y_2^2 - y_1^2\right]dx$$
$$= \pi\int_a^b \left[\left(f_2(x)\right)^2 - \left(f_1(x)\right)^2\right]dx$$

و

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$

مثال (2) : أوجد الحجم الناتج من الدوران حول محور x للدائرة $(b \ge a)$. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$

الحل :لأن معادلة الدائرة تعطى دالة غير وحيدة القيمة فإننا نعتبر

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

عندئذ

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}\left\{\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right\}dx$$
$$= 4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\pi^2 a^2 b$$

والتكامل الأخير يمكن إيجاده باستعمال التعويض $x = a\sin t$

تمارين (4-4)

1- أوجد حجم الجسم الناتج من الجدوران حول محور x للشكل المحدود بالمنحنى $y = \sin^2 x$ فى الفترة بين $x = \pi, x = 0$

2- أوجد الحجوم الناتجة عند دوران المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 0, x = 0, y = e^x$ حول
(أ) محور x (ب) محور y

2- مساحة السطح الناتج من الدوران

مساحة السطح الناتج من دوران جزء المنحنى $y=f(x)$ بين النقطتين $x=a$, $x=b$ حول محور x يعبر عنها بالتكامل

$$S_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

مثال (1) : أوجد مساحة السطح الناتج من الدوران حول محور x لفرع من المنحنى $gy^2=x(3-x)^2$

الحل :للجزء العلوى من المنحنى عندما $0\le x\le 3$ يكون

$$y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$$

$$\therefore s=2\pi\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=3\pi$$

مثال (2) : أوجد مساحة السطح الناتج من دوران قوس واحد من منحنى السكلويد $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ حول محور التماثل.

الحل : السطح المطلوب يتكون من دوران القوس oA حول الخط المستقيم الذى معادلته $x=\pi a$ يأخذ y كمتغير مستقل وملاحظة أن محور الدوران $x=\pi a$ يبعد مسافة قدرها πa عند محور y نجد أن

$$S=2\pi\int_a^{2a}\left(\pi a-x\right)\frac{ds}{dy}\,dy$$

$$=2\pi\int_0^{2a}(\pi a-x)\sqrt{1+x'2}dy$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\left(\pi a-at+a\sin t\right)\sqrt{x^{0^2+y^{0^2}}}\,dt$$

$$=2\pi\int_a^{\pi}\left(\pi a-at+a\sin t\right)2a\sin t\frac{t}{2}\,dt$$

$$=4\pi a^2\int_a^{\pi}\left[\pi\sin\frac{t}{2}-t\sin\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right]dt$$

$$=4a^2\left[-2\pi\cos\frac{t}{2}+2t\cos\frac{t}{2}\right]$$

مسائل محلولة

1- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y=\frac{1}{4}\left(8+2x+x^2\right)$ والمحور السينى

. $L(x)=y=\frac{1}{4}\left(8+2x+x^2\right)$

الحل : المساحة المطلوبة هى المساحة المظللة فى الشكل المقابل وهذه المساحة A تعطى بالعلامة

$$A=\int_a^b L(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{4}\left(8+2x+x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[8x+x^2\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{4}=9$$

2- أوجد المساحة المحدودة بالمنحنى $y=-x(x-3)^2$ والمحور السينى والخط المستقيم x = 2

الحل :

$$A=\int_0^2 x(x-3)^2dx=\int_0^2\left(x^3-6x^2+9x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^2=6$$

يلاحظ أننا أخذنا الإشارة الموجبة لـ y عند حساب المساحة .

3- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنين $y=x^2-2,\ y=6-x^2$

الحل : أولا نوجد نقط تقاطع المنحنى $y=x^2-2, y=6-x^2$ وهى (2 ,2-), (2 ,2) وبالتالى تكون المساحة المطلوبة هى

$$A=\int_{-2}^{2}\left\{\left(6-x^2\right)-\left(x^2-2\right)\right\}dx$$

لأن $6-x^2\geq x^2-2$ لكل قيم x فى الفترة [-2, 2]

$$\therefore A=\int_{-2}^{2}\left(8-2x^2\right)dx=\frac{64}{3}$$

4- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالشكل البيانى للدالة $f(x)=x^2-x^2-8x+8$ والمستقيمات $y=0, x=0, x=2$

الحل : المساحة المطلوبة مكونة من جزئين $\therefore A=A_1+A_2$ حيث

$$A_1=\int_0^1\left(x^3-x^2-8x+8\right)dx=\frac{47}{12}$$

$$A_2=\int_1^2 -f(x)dx=-\int_1^2\left(x^3-x^2-8x+8\right)dx=\frac{31}{12}$$

$$\therefore A=\frac{47}{12}+\frac{31}{12}=\frac{78}{12}=\frac{13}{2}$$

5- أوجد مساحة المنطقة بين المحور الصادى والقطع المكافئ $y^2-6y+2x+5=0$

الحل :

$$\because y^2-6y+2x+5=0$$

$$\therefore y=\frac{6I\sqrt{36-4(2x+5)}}{2}=3I\sqrt{4-2x}$$

المساحة المطلوبة تتكون من جزئيين A_1 وهى المساحة المحدودة بالمنحنى $y=3+\sqrt{4-2x}$ والمحور الصادى والمستقيم $y = 3$ (أعلاه) . A_2 وهى المساحة المحدودة بالمنحنى $y_2=3-\sqrt{4-2x}$ والمحور الصادى والمستقيم $y = 3$ (أسفله.

$$\therefore A=\int_a^b (y_1-y_2)\,dx$$

حيث أن x تتغير من 0 إلى 2 فإن

$$A=2\int_0^2 \sqrt{4-2x}\,dx=-\frac{2}{3}(4-2x)^{3/2}\int_0^2=\frac{16}{3}$$

طريقة أخرى

$$\because y^2-6y+2x+5=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2}\left(y^2-6y+5\right)$$

حيث أن $1\le y\le 5$ فإن

$$A=-\frac{1}{2}\int_1^5\left(y^2-6y+5\right)dy=\frac{16}{3}$$

6- أوجد حجم الكرة التى نصف قطرها r.

الحل : الكرة يمكن اعتبارها جسماً دورانياً ينشأ بدوران الدائرة $x^2+y^2=r^2$ حول المحور السينى ox كما فى الشكل المقابل. وبذلك يكون حجم الكرة مساوياً

$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi r^3$$

7- أوجد حجم الجسم الدورانى الناشئ عن دوران المنطقة فى الربع الأول المحدودة بالمعنى $y=x^3$ والمحور الصادى oy والخط المستقيم $y = 4$ حول المحور الصادى.

الحل : المنطقة المحددة فى المسألة هى المنطقة المظللة فى الشكل المقابل وبدورانها تكون مساحة دائرة دوران النقطة (x, y) منها $A=\pi x^2=\pi y^{2/3}$ وحيث أن $0\le y\le 4$ فإن الحجم المطلوب V هو

$$V=\int_0^4 A\,dy=\pi\int_0^4 y^{2/3}=\frac{3}{5}\pi.4^{5/3}=6.05\pi$$

8- أوجد حجم الجسم الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=\frac{4}{x}$ والخط المستقيم $y=5-x$ حول المحور السينى ox.

الحل : المنطقة المحصورة بين المنحنى $xy = 4$ والمستقيم $y = 5 - x$ هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل. ولذلك

$$\therefore A=\pi\left[(5-x)^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2\right]=\pi\left[25-10x+x^2\,\frac{16}{x^2}\right]$$

تمثل مساحة الدائرة الناتجة بدوران نقطة (x, y) من هذه المنطقة. ومن تقاطع المستقيم $y=5-x$ والمنحنى $y=\frac{4}{x}$ نجد أن $1\le x\le 4$ وعلى ذلك فإن الحجم المطلوب هو

$$\therefore V=\int_1^4 \pi\left[25-10x+x^2\frac{16}{x^2}\right]dx$$

$$=\pi\left[25x+5x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{16}{x}\right]_1^4=9\pi$$

9- أوجد حجم جسم على شكل بوق ناشئ عند دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x=\frac{1}{2}\sqrt{y},\ y=0,\ x=1$ حول الخط المستقيم $x = 1$.

الحل : المساحة بين المنحنى $y=4x^2$ والمستقيم $x = 1$ (كما هى مظللة بالشكل المقابل) تدور حول $x = 1$ لتكون $A=\pi(1-x)^2$ هى مساحة الدائرة الناتجة عن دوران نقطة (x, y) فى هذه المنطقة. $\therefore A=\pi\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$ ومن تقاطع المستقيم $x = 1$ والقطع المكافئ $x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$ نجد أن $0\le y\le 4$ ولذلك يكون حجم الجسم الدورانى الناشئ هو

$$V=\int_0^4 A\,dy=\int_0^4 \pi\left(1-\sqrt{y}+\frac{1}{4}y^2\right)dy=\frac{2}{3}\pi$$

10- أعطيت إحداثيات النقطة $P(x,y)$ للدويرى التحتى ذى القرنات الأربعة $x=a\cos^3\theta,\quad y=a\sin^3\theta$ أوجد طول المنحنى الكلى.

الحل : عندما تتغير θ من G إلى $\pi/2$ (نرسم النقطة أ جزء المنحنى الرابع فى الربع الأول. كذلك نستنتج أن

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^{2/3}$$

يقع جزء المنحنى فى الربع الأول بين قرنين ويساوى طوله ربع الطول الكلى L لذلك.

$$L=4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

ونحصل من معادلة المنحنى على

$$dy=3a\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta,\ dx=3a\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

وينتج من ذلك أن

$$L=4\int_0^{\pi/2}3a\cos\theta\sin\theta\,d\theta=6a$$

11- دورت المنطقة التى داخل الدائرة $x^2+y^2=a^2$ حول المحور x لتكن كرة مجسمة. أوجد حجمها.

الحل : إذا تصورنا أن الكرة قد قطعت إلى شرائح رقيقة بمستويات عمودية على المحور ox فإن

$$\Delta V=\pi y^2\Delta x=\pi\left(a^2-x^2\right)\Delta x$$

تعطى حجم الشريحة وبذلك يكون حجم الكرة V هو :

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi a^3$$

تمارين

1- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=4-x^2$ والخط المستقيم $y+3=0$.

2- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=a^2+x^2,\ y=x^2$ وذلك فى الفترة $x=\pi,\ x=0$.

3- أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران $y=\sin x$ بين $x=\pi, x=0$ حول المحور ox.

4- أوجد حجم المخروط الدائرى القائم الذى ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a.

5- حفر ثقب بقطر a فى الكرة الناتجة عن دوران الدائرة $x^2+y^2=a^2$ حول المحور ox. أوجد حجم كلا من (أ) الثقب الناتج. (ب) باقى الكرة.

6- أوجد أطوال المنحنيات

i- $y=4a^2x^2;\quad x\in[0,a];a>0.$

ii- $r=a\sec^2\dfrac{\theta}{2};\quad 0\le\theta\le\pi/2.$

iii- $y=2x-x^2,\quad y=0,\ y=1$

iv- $x=y^2-y^3,\quad x=0$

v- $y=4\cos 2x;\quad 0\le x\le\pi$

7- أوجد مساحة السطح الدورانى الناتج عن دوران القطع الناقص $y=b\cos t, x=a\sin t$ إذا كان الدوران حول أ- المحور الأصغر ب- المحور الأكبر

جامعة جنوب الوادي
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الهندسة التحليلية

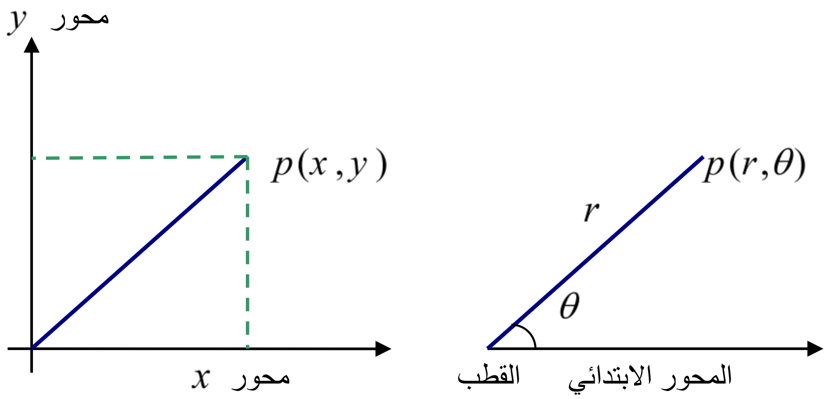
إعداد: أعضاء هيئة التدريس

الفهرس

الفصل الأول: الإحداثيات القطبية

في دراستنا السابقة كنا نحدد موضع أي نقطة في مستوى من خلال محورين متعامدين x, y و هو ما يطلق عليه اسم الإحداثيات الإقليدية أو الكارتيزية .و لكن في الحقيقة إن هذه الإحداثيات لا تلبي كل احتياجات الهندسة ولا تغطي كل الظواهر الطبيعية ناهيك عن ابتكارات التكنولوجيا العلمية الحديثة.

وعلى سبيل المثال فإن حركة كوكب ما مثل الأرض تكون في مدار حول الشمس و في مثل هذه الحالات يكون من المناسب وصف موضع النقطة من خلال الزاوية الاتجاهية θ و البعد عن نقطة ثابتة r و هو ما يطلق عليه اسم الإحداثيات القطبية

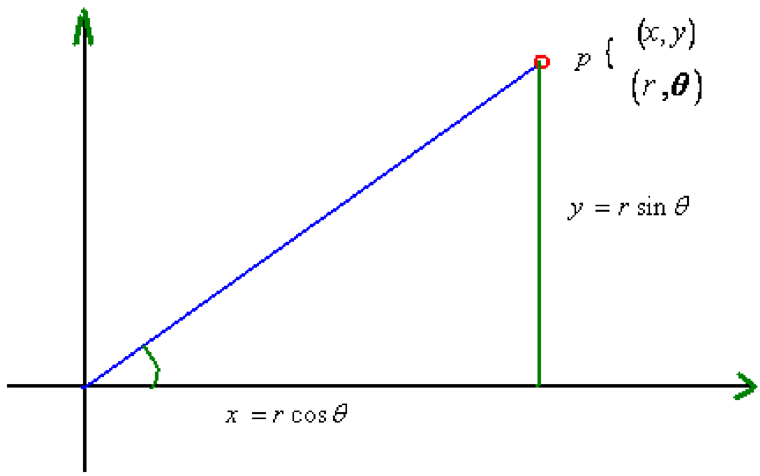


<u>العلاقة بين الإحداثيات القطبية و الإقليدية</u>

تتعين العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r,θ) و الكارتيزية (x, y) و كذا العلاقة العكسية من المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta \tag{1}$$

$$r^2 = x^2 + y^2,\ \ \tan\theta = \tfrac{y}{x} \tag{2}$$



مثال(1):

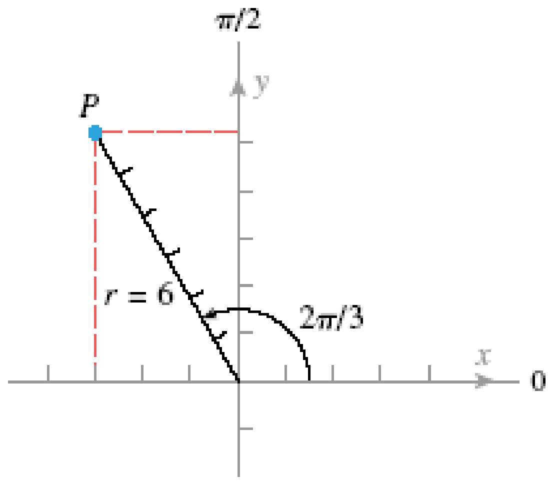
أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة p ذات الإحداثيات القطبية $(6, 2\pi/3)$

الحل:

بالتعويض عن $\theta = 2\pi l 3$ and $r = 6$ في (1) تحصل على

$x = 6\cos\frac{2\pi}{3} = 6(-\frac{1}{2}) = -3, \ \ y = 6\sin\frac{2\pi}{3} = 6(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\sqrt{3}$

إذن الإحداثيات الكارتيزية للنقطة p هي $(-3, 3\sqrt{3})$ ، و ذلك كما يوضحه الرسم التالي



مثال(2):

أوجد الإحداثيات القطبية للنقطة $P\left(-2,2\sqrt{3}\right)$

الحل:

باستخدام العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية والقطبية فإن

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

و حيث أن النقطة المعطاة تقع في الربع الثاني فإن الزاوية θ تحقق $\le \theta \le 2\pi$. وبالتالي فإن

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

إذن النقطة هي $\left(\pm 4, \frac{2\pi}{3}\right)$ وبالتالي فإن جميع النقاط p المناظرة للنقطة المعطاة هي:

$$\left(4, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) \ \ or \ \ \left(-4, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

حيث n عدد صحيح

مثال(3)
حول المعادلات التالية إلى الإحداثيات الكارتيزية:

$$r+8\cos\theta=0$$

الحل:
بالضرب في r نحصل على $r^2=-8r\cos\theta$
و حيث أن $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$
إذن المعادلة الكارتيزية هي $x^2+y^2=-8x$

الرسم في الإحداثيات القطبية

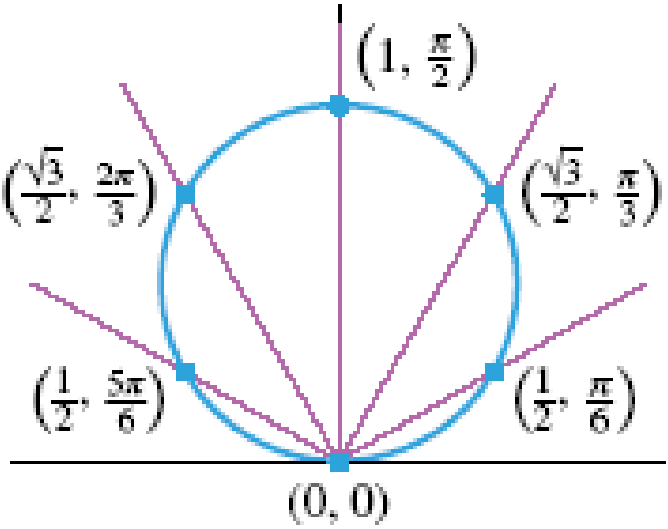
سوف ندرس الآن مسألة رسم المعادلة $r=f(\theta)$ في الإحداثيات القطبية. حيث θ مقاسة بالتقدير الدائري

مثال (4) :
ارسم منحنى الدالة $r=\sin\theta$ في الإحداثيات القطبية و ذلك من خلال تحديد مجموعة نقاط داخل النطاق $[0,\pi]$

الحل:
في الجدول التالي سوف نسجل مجموعة نقاط مختارة داخل النطاق $\theta\in[0,.\pi]$ وقيم r المناظرة

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

وهذه النقاط سوف نرسمها في الشكل التالي



لاحظ أن هذه النقاط تظهر كما لو كانت تقع على محيط دائرة و في الحقيقة فإننا إذا وصفنا المنحنى $r=\sin\theta$ في الإحداثيات الكارتيزية سوف نجد الآتي: لنضرب طرفي المعادلة في r إذن $r^2=r\sin\theta$

وحيث أن $r^2=x^2+y^2$

إذن $x^2+y^2=y$

و هو ما يمكن كتابته على الصورة $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

و هي معادلة دائرة مركزها $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\dfrac{1}{2}$

مثال (5) :

ارسم المنحنى $r=a(1-\cos\theta)$ في الإحداثيات القطبية بفرض أن a ثابت موجب في الفترة $\theta\in[0,2\pi]$

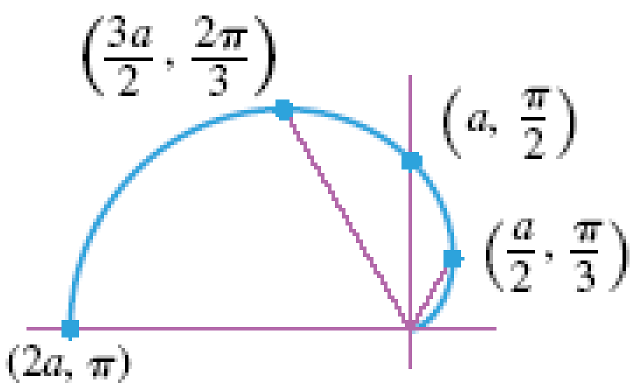
الحل:

لنكتب المعادلة بالصورة $r = a - a\cos\theta$ نلاحظ أن استبدال θ بـ $(-\theta)$ لا تغير من المعادلة و التالي سوف نرسم الجزء العلوي $\theta \in [0,\pi]$ ثم نرسم جزء مماثل في الجزء السفلي $\theta \in [0,-\pi]$ و الذي يناظر $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

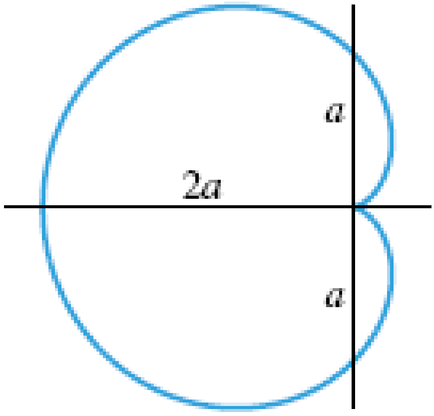
و بحساب قيم r لمجموعة نقاط مختارة داخل النطاق $\theta \in [0,\pi]$ نجد الجدول التالي

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$2a$

و عند رسمها تكون بالشكل التالي



و عند إضافة الجزء السفلي نحصل على الشكل التالي



معادلة المماس و طول القوس للمنحنيات الموصوفة بارامترياً

ميل المماس

نأخذ في الاعتبار المنحنيات الموصوفة بالشكل التالي

$x = f(t), \quad y = g(t)$

و التي فيها تكون $f(t), g(t)$ لهما مشتقة أولى متصلة . و بفرض أن

$$0 \neq \frac{dx}{dt}$$

فإن مشتقة y بالنسبة لـ x توصف بـ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال (6) :

أوجد ميل المماس للدائرة التي نصف قطرها واحد

$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

عند النقطة $t = \frac{\pi}{6}$

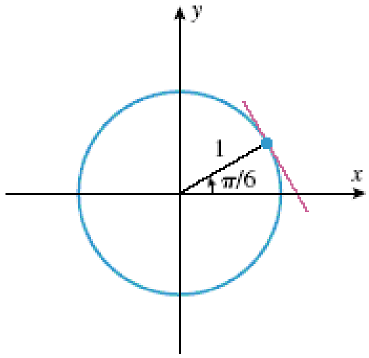
الحل:

في هذه الحالة فإن ميل المماس عند أي نقطة يتعسن من

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t$$

و بالتالي فإن الميل عند النقطة $t=\dfrac{\pi}{6}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\cot\tfrac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$$



مثال(7):

فراشة تطير بين الأغصان سالكة المسار الموصوف بالمعادلتين البارامتريتين

$x=t-3\sin t\ ,\quad y=4-3\cos t \qquad (t\geq 0)$

(أ)حدد اللحظات الزمنية التي كانت تطير فيها الفراشة أفقياً

(ب) حدد اللحظات الزمنية التي كانت تطير فيها الفراشة رأسياً

الحل :

(أ) تطير الفراشة أفقياً عندما $\dfrac{dy}{dt}=0$ بينما $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$

وحيث أن

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin t \quad \text{and} \quad \frac{dx}{dt} = 1 - 3\cos t$$

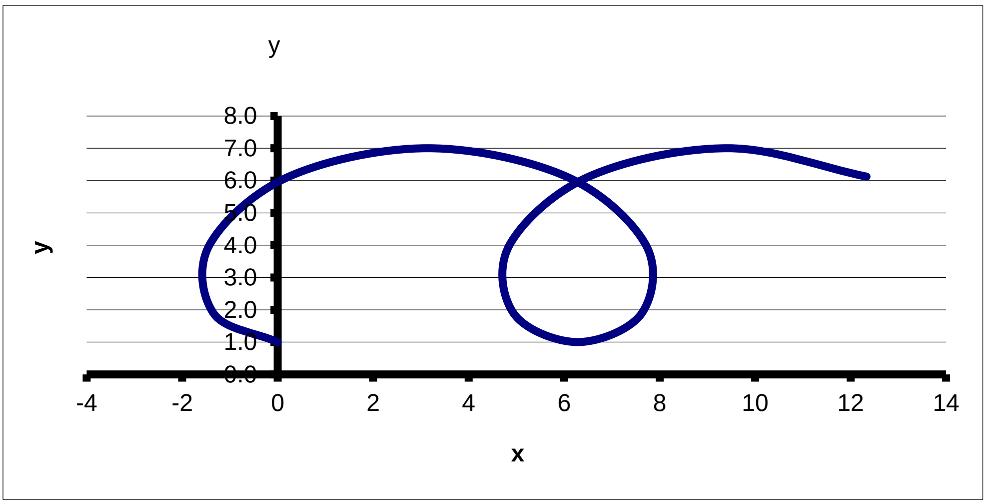
فإن $\sin t = 0$ والتي تحدث عند النقاط $t = 0, \pi, 2\pi, ..., k\pi$

إذن تطير الفراشة أفقياً عند اللحظات الزمنية $t = k\pi,\ k = 0,1,2,...$

(ب) تطير الفراشة رأسياً عندما $\frac{dy}{dt} \neq 0$ بينما $\frac{dx}{dt} = 0$ أي عندما

$$1 - 3\cos t = 0$$

أي $\cos t = \frac{1}{3}$ و هذا يحدث عندما $t = 2k\pi \pm \cos^{-1}\frac{1}{3}$



معادلة المماس

في هذه الحالة يوصف المنحنى بالمعادلة $r = f(\theta)$ في الإحداثيات القطبية و بالتالي يكون

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

و منها

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta = -r\sin\theta + \frac{dr}{d\theta}\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta = r\cos\theta + \frac{dr}{d\theta}\sin\theta$$

و على ذلك فإذا كانت $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}}$$

مثال(8):

أوجد ميل المماس للدائرة $r = 4\cos\theta$ عند النقطة $\theta = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta}{-8\sin\theta\cos\theta}$$

و حيث أن عند النقطة $\theta = \frac{\pi}{4}$ يكون

$\sin\theta = \cos\theta = 1/\sqrt{2}$

إذن الميل يساوي الصفر

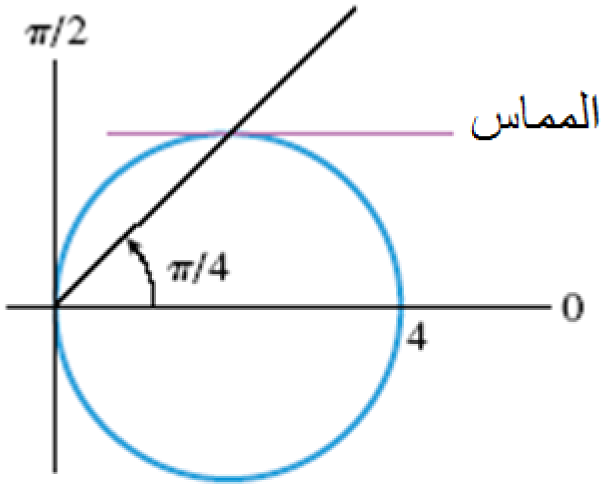
$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 0$$

و بالتالي فإن المماس يكون أفقيا عند النقطة $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

مثال(9):

أكتب معادلة المماس للمنحنى $r=3+\sin\theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{6}$.

الحل:



بحساب المشتقة

$$\frac{dr}{d\theta} = 8\cos\theta$$

و بالتالي يصبح

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8\cos\theta\sin\theta + (3+8\sin\theta)\cos\theta}{8\cos^2\theta - (3+8\sin\theta)\sin\theta} = \frac{16\cos\theta\sin\theta + 3\cos\theta}{8\cos^2\theta - 3\sin\theta - 8\sin^2\theta}$$

إذن الميل يساوي

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{4\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{4-\frac{3}{2}}=\frac{11\sqrt{3}}{5}$$

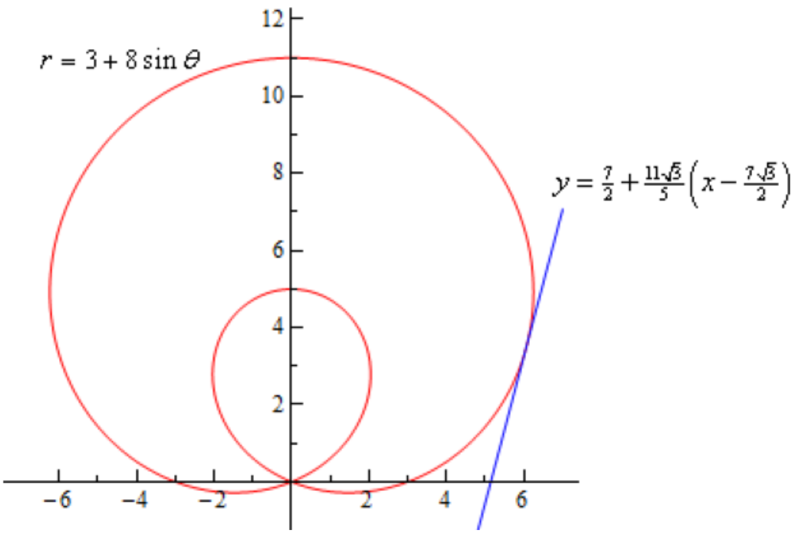
الآن عند $\theta=\frac{\pi}{6}$ يكون $r=7$ و تكون الإحداثيات الكارتيزية المناظرة

$$x=7\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{2} \qquad y=7\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{2}$$

إذن معادلة المماس

$$y=\frac{7}{2}+\frac{11\sqrt{3}}{5}\left(x-\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$$

و يوضح ذلك الرسم التالي:



طول القوس للمنحنيات الموصوفة في الاحداثيات القطبية

يوصف طول القوس للمنحنى المعطى بالمعادلة $r = f(\theta)$

بين القيمتين $\theta = \alpha$ إلى $\theta = \beta$ من القانون

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

مثال(10):

أوجد طول القوس للدالة $r = e^{\theta}$ بين $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$

الحل:

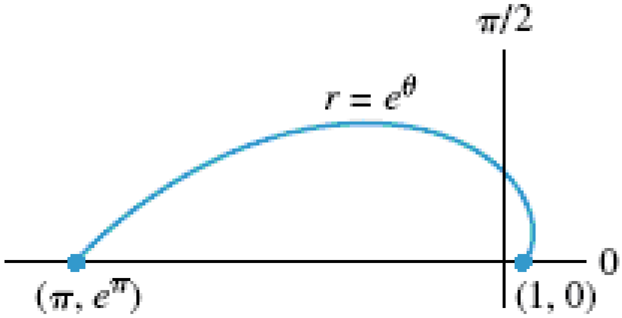
$$r = e^{\theta} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = e^{\theta}$$

وبالتالي

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(e^{\theta})^2 + (e^{\theta})^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, e^{\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\, e^{\theta}\Big]_0^{\pi} = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1) \approx 31.3$$

ويوضح ذلك الرسم التالي:



تمارين

(1)حول النقاط التالية إلى الإحداثيات المطلوبة:

(أ) $(-4, 2\pi/3)$ إلى الإحداثيات الكارتيزية

(ب) $(-1, -1)$ إلى الإحداثيات القطبية

(2)حول النقاط التالية إلى الإحداثيات الكرتيزية

(a) $(6, \pi/6)$ (b) $(7, 2\pi/3)$ (c) $(-6, -5\pi/6)$

(d) $(0, -\pi)$ (e) $(7, 17\pi/6)$ (f) $(-5, 0)$

(3)حول النقاط التالية إلى الإحداثيات القطبية

(a) $(-8, \pi/4)$ (b) $(7, -\pi/4)$ (c) $(8, 9\pi/4)$

(d) $(5, 0)$ (e) $(-2, -3\pi/2)$ (f) $(0, \pi)$

(4)حول المعادلات التالية إلى الإحداثيات المطلوبة:

(أ) $r = 3\cos\theta$ إلى الإحداثيات الكارتيزية

(ب) $2x - 5x^3 - 1 = xy$ إلى الإحداثيات القطبية

(5) المعادلات التالية لمنحنيات في الإحداثيات القطبية. حدد نوع المنحني مع التوضيح بالرسم:

(أ) $\theta = \beta$

(ب) $r\cos\theta = a$

(ج) $r\sin\theta = b$

(6) ارسم المنحنى

$x = t - 3\sin t$, $y = 4 - 3\cos t$ $(t \geq 0)$

(7) ارسم المنحنيات $r\sin\theta=-3$ $r\cos\theta$ *and* $\theta=\frac{3\pi}{4}$, و ذلك في شكل واحد.

(8)أوجد النقاط على منحنى الكاردويد $r=1-\cos\theta$ التي يكون عندها المماس أفقيا أو رأسيا.

(9) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية عند النقاط المناظرة .

21. $r=2\cos\theta;\ \theta=\pi/3$

22. $r=1+\sin\theta;\ \theta=\pi/4$

23. $r=1/\theta;\ \theta=2$

24. $r=a\sec 2\theta;\ \theta=\pi/6$

25. $r=\cos 3\theta;\ \theta=3\pi/4$

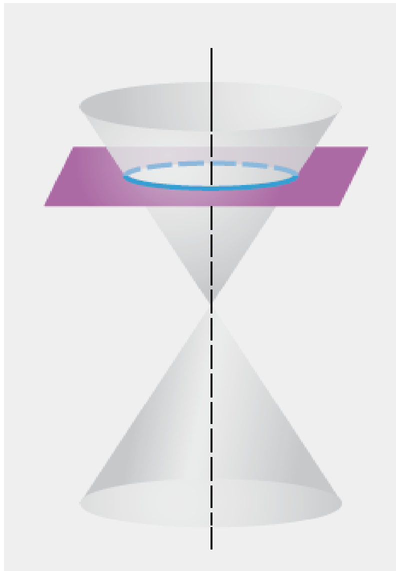
26. $r=4-3\sin\theta;\ \theta=\pi$

(10) أوجد الطول الكلي لمنحنى الكاردويد للدالة $r=1+\cos\theta$.

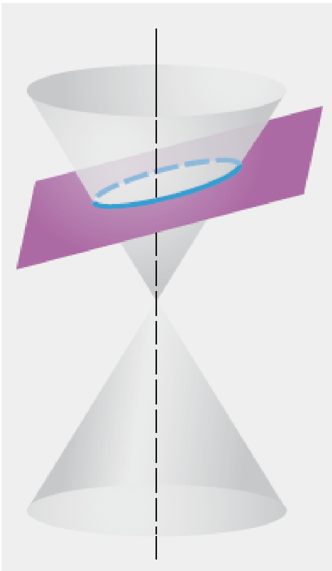
(11) أوجد طول المنحنى $r=\theta,\ 0\le\theta\le1$.

الفصل الثانى القطوع المخروطية

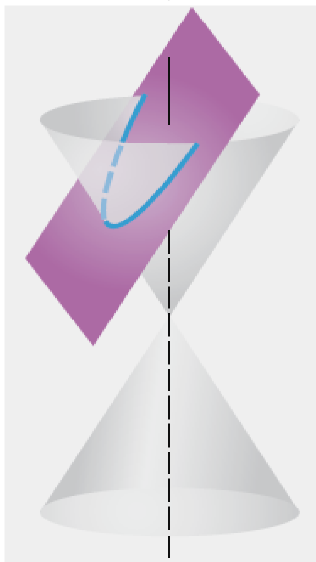
تنتج القطوع المخروطية عند قطع سطح مستوي لمخروط كما هو واضح من الأشكال التالية:



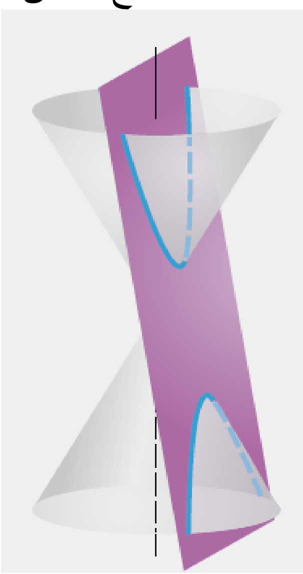
دائرة



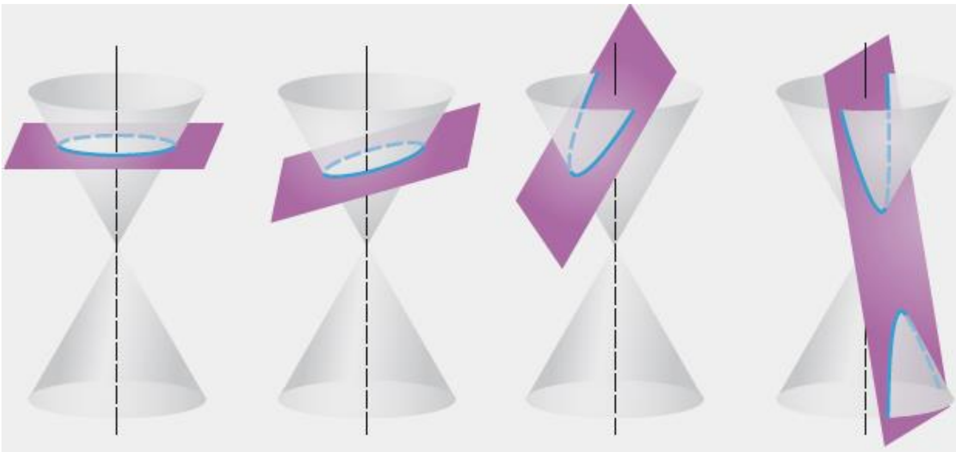
قطع ناقص



قطع مكافئ



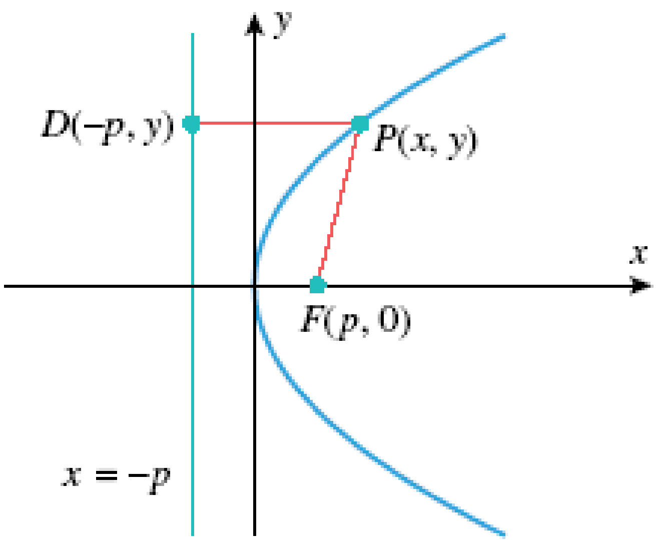
قطع زائد



القطوع المخروطية الأربعة (دائرة- قطع ناقص- قطع مكافئ-قطع زائد)

القطع المكافئ

القطع المكافئ: هو المسار الذي ترسمه نقطة مادية تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) مساوياً بعدها عن مستقيم ثابت (يسمى الدليل).



وفـي الشـكل (1) فـإن النقطـة $P(x,y)$ تقـع علـى القطـع المكـافئ, و $F(P,0)$ هي البؤرة أما المستقيم $x=-P$ والذي تقع عليه النقطة D التي إحداثياتها $(-P,y)$ هو الدليل للقطع المكافئ.

من التعريف فإن $PF=PD$

ومن صيغة تعريف المسافة بين نقطتين

$$PF=\sqrt{(x-p)^2+y^2} \quad \text{and} \quad PD=\sqrt{(x+p)^2}$$

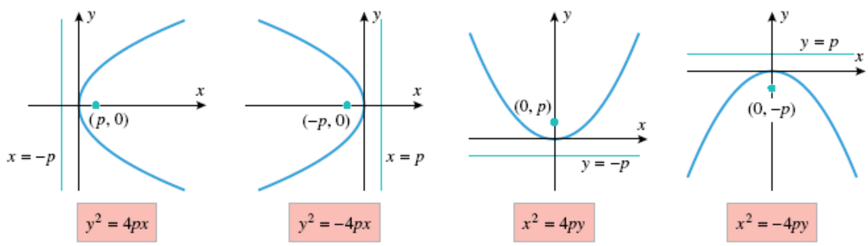
أي أن

$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$$

وبعد تبسيط هذه المعادلة تصبح

$$y^2=4px$$

وهي الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره هو x ورأسه عند نقطة الأصل. في الشكل (2) مجموعة من القطوع المكافئة مختلفة البؤرة والدليل مع معادلة كل منها.



(a) **(b)** **(c)** **d)**

مثال(1) :

أوجد بؤرة ودليل القطع المكافئ $x^2 = 8y$

الحل:

بالمقارنة مع المعادل القياسية $x^2 = 4px$ أي أن محوره هو y. إذاً $p = 2$ وبالتالي إحداثيات البؤرة هي $F(0,p) = (0,2)$.

أما الدليل فمعادلته $y = -p \quad \Rightarrow \quad y = -2$

انظر شكل (c.2).

<u>تطبيق على المثال السابق:</u>

القطع المكافئ $x^2 = ay$

محوره y البؤرة $\left(0, \frac{a}{4}\right)$ الدليل $y = \frac{-a}{4}$ ورأسه $(0,0)$

القطع المكافئ $y^2 = bx$

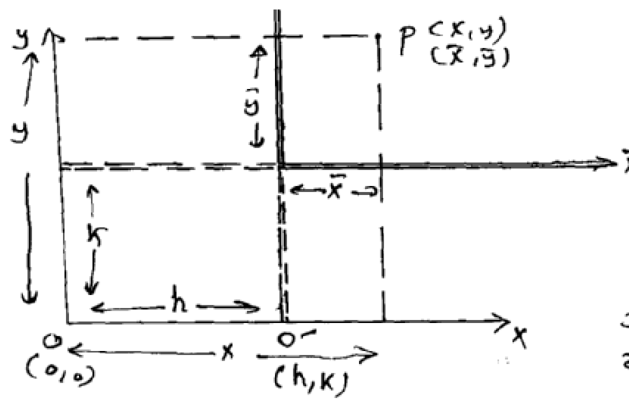
محوره x البؤرة $\left(\frac{b}{4}, 0\right)$ الدليل $x = \frac{-b}{4}$ ورأسه $(0,0)$

القطع المكافئ $y^2 = 8x$

محوره x البؤرة $(2,0)$ الدليل $x = -2$ ورأسه $(0,0)$

<u>إزاحة الإحداثيات:</u>

إذا أزيحت نقطة الأصل من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة (h,k) فإن إحداثيات النقطة p بالمحاور الأصلية (x,y) ترتبط بالإحداثيات بالمحاور الجديدة $(\bar{x},\bar{y})$ بالعلاقة



$$\bar{x} = x - h, \qquad \bar{y} = y - k$$

أو

$$x = \bar{x} + h, \qquad y = \bar{y} + k$$

مثال(2):

ادرس صفات القطع المكافئ

$$y = x^2 + 4$$

الحل:

بإكمال المربع

$$(y + 4) = (x + 2)^2$$

وبالمقارنة مع الصورة العامة مع نقل المحاور إلى نقطة الأصل

$$\bar{y} = 4p\bar{x}^2$$

هذا القطع رأسه $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ ومحوره y .

إذن رأس القطع هي

$$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$
$$y+4=0 \quad \Rightarrow \quad y=-4$$

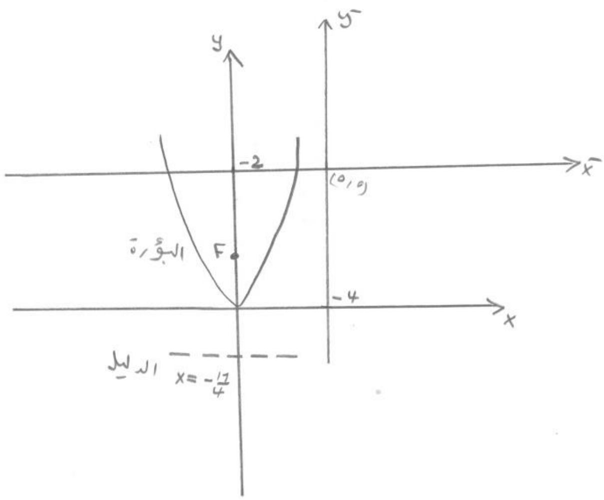
وحيث أن $p=1/4$ فإن البؤرة نسبة إلى المحاور الجديدة هي $(0,1/4)$

وبعد الأصلية

$$x = x'-2 = -2, \qquad y = y'-4 = 1/4-4 = -15/4$$

البؤرة نسبة إلى المحاور الأصلية هي $(-2,5-1/4)$

والدليل $x = -4-1/4 = -17/4$

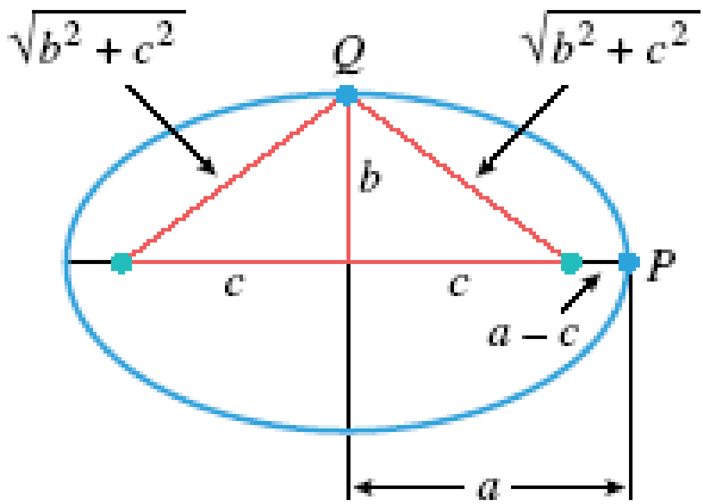


<u>القطع الناقص</u>

القطع الناقص: هو المسار الذي ترسمه نقطة مادية تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (هما البؤرتان) مقداراً ثابتاً.

وتكون نقطة المنتصف بين البؤرتين هي مركز القطع. والخط المستقيم الواقع عليه البؤرتين هو المحور الأكبر. أما الخط العمودي عليه ماراً بمركز القطع فهو المحور الأصغر.

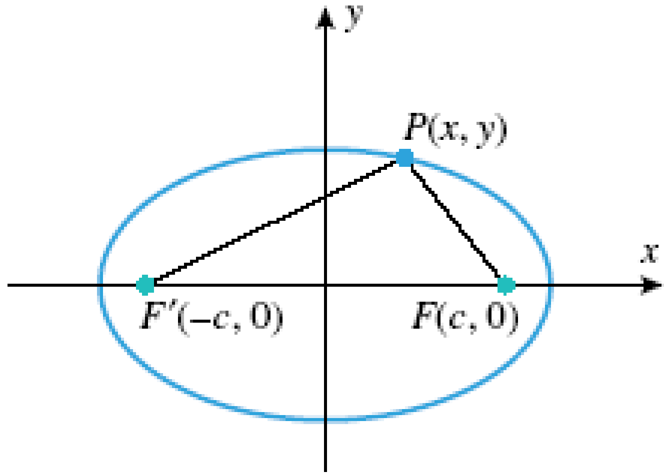
وفي شكل (1) فإن $F(c,0)$,$F'(-c,0)$ هما البؤرتان, والمحور الأكبر يقع على محور x والأصغر يقع على المحور y.



وحيث أن Q نقطة على القطع. ومن التعريف

$$2\sqrt{b^2+c^2}=(a-c)+(a+c)$$
$$a=\sqrt{b^2+c^2}$$
$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad (*)$$

الآن لنشتق معادلة القطع الناقص.



ومن التعريف فإن

$$PF'+PF=2a$$

حيث $2a$ هو طول المحور الأكبر.

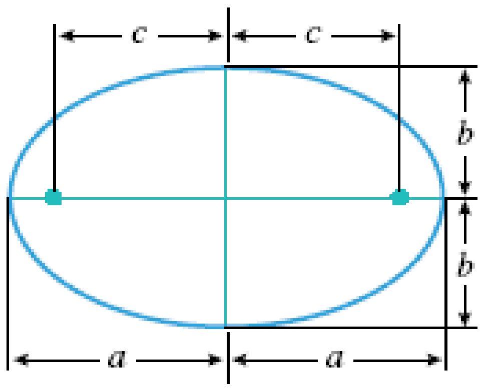
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

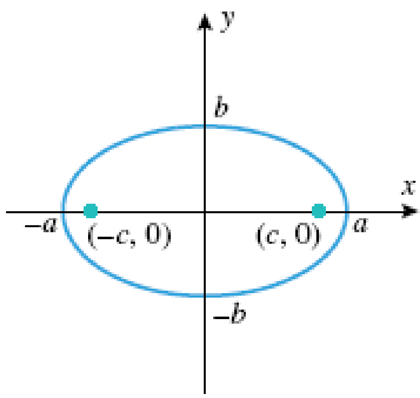
وباستعمال المعادلة (*)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

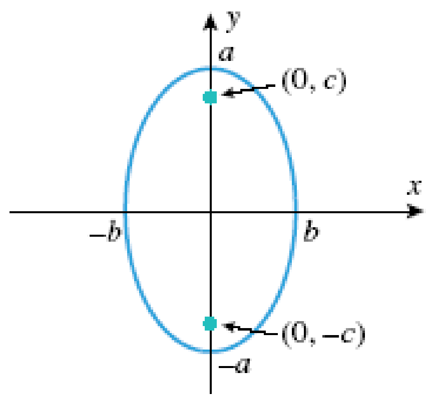
المعادلة (1) هي المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ ومحوره الأكبر على محور x.



وتختلف معادلة القطع الناقص إذا كان المحور الأكبر هو محور x عنه إذا كان المحور الأكبر هو محورy. و يوضح ذلك الشكل التالي:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

مثال(3) :

ادرس صفات القطع الناقص

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

الحل:

بالمقارنة مع المعادلة القياسية نجد أن

$$a^2=9,\quad b^2=4 \qquad \Rightarrow\ a=3,\quad b=2$$
$$\therefore c^2=a^2-b^2=5 \qquad \Rightarrow c=\sqrt{5}$$

إذن البؤرتان $(c,0)$, $(-c,0)$ أي $\left(\sqrt{5},0\right)$, $\left(-\sqrt{5},0\right)$

والمحور الأكبر يقع على محور x وطوله $2a=6$

والمحور الأصغر يقع على محور y وطوله $2b=4$.

^^

مثال(4) :

ادرس صفات القطع الموصوف بالمعادلة

$$9x^2+4y^2+36x-8y+4=0$$

الحل:

بإكمال المربع نجد أن

$$9(x+2)^2+4(y-1)^2=36$$

أو بالقسمة على 36

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2, \quad y-1=0 \Rightarrow y=1$$

$$0(-2,1)$$

المحور الأكبر على محور y وطوله $2\sqrt{9}=2(3)=6$

والمحور الاصغر على محور x وطوله 4.

وذلك بالمقارنة بمعادلة القطع القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$c^2=a^2-b^2=5 \qquad c=\sqrt{5}$

إذن البؤرتين $\left(-2,1\pm\sqrt{5}\right)$

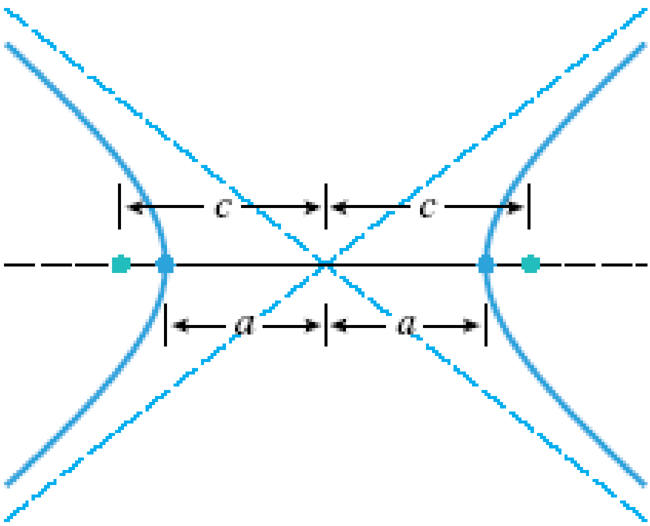
ملاحظة: في المعادلة التربيعية التي يكون فيها معامل x^2 له نفس إشارة معامل y^2 فإن المعادلة تؤول بإكمال المربع إلى قطع ناقص. أما إذا كانت الإشارتان مختلفتان فإن القطع سوف يكون زائداً.

تمرين:

ادرس صفات القطع الموصوف بالمعادلة $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

القطع الزائد

القطع الزائد: هو المسار الذي ترسمه نقطة مادية تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها من نقطتين ثابتتين (هما البؤرتان) مقداراً ثابتاً.

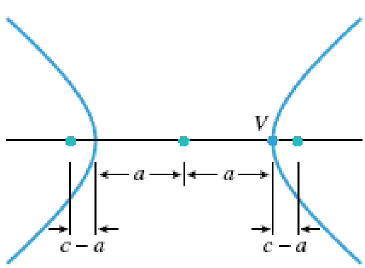


المعادلة القياسية للقطع الزائد المتماثل حول محور x هي

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ورأسه هي نقطة الأصل $(0,0)$ وبؤرتيه هما $(\pm c,0)$ حيث

$$c^2=a^2+b^2 \qquad (2)$$

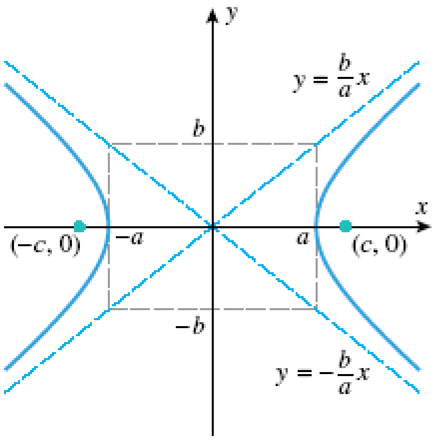


معادلتا الخطوط التقاربية للقطع يمكن الحصول عليها من (1) إذا تمّ وضع صفر بدلاً من 1 في الطرف الأيمن من معادلة القطع الزائد لتصبح

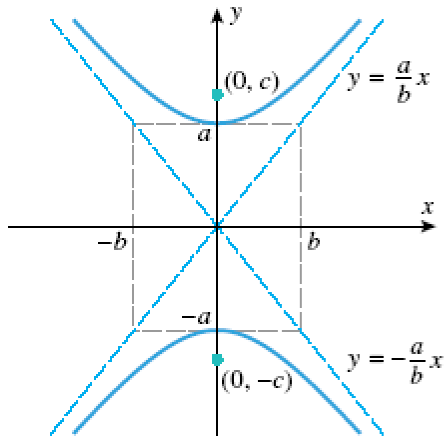
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \qquad \text{or} \qquad y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad \text{or} \qquad y=\pm\frac{b}{a}x$$

وهي معادلتا الخطوط التقاربية للقطع الزائد.

وتختلف معادلة القطع الزائد إذا كان المحور الأكبر هو محور x عنه إذا كان المحور الأكبر هو محورy. و يوضح ذلك الشكل التالي:



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

مثال(5):

ادرس المعادلة

$$x^2-y^2-4x+8y-21=0$$

الحل:

بإكمال المربع

$$x^2-4x-(y^2-8y)-21=0$$

$$(x^2-4x)+4-(y^2-8y+16)-21=4-16$$

$$(x-2)^2-(y-4)^2=-16+21$$

$$(x-2)^2-(y-4)^2=9$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

وهي معادلة قطع زائد مركزها $(2,4)$ وفيه

$$a=b=3,\quad c=\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2}$$

البؤرتان هما

$$\left(2-3\sqrt{2},4\right),\left(2+3\sqrt{2},4\right)$$

محوره هو x (صاحب الإشارة الموجبة). ومعادلتا الخطوط التقاربية

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{9}=0$$

$$y-4=\pm(x-2)$$
$$y=x+2,\quad y=-x+6$$

مثال(6):

ادرس المعادلة $x^2+y^2+4x-6y=12$

الحل:

بإكمال المربع

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(-2,3)$ ونصف قطرها 5.

مثال(7):

حدد أوصاف الشكل الموصوف بالمعادلة التربيعية

$$y^2-8x-6y-23=0$$

مع التوضيح بالرسم.

الحل:

المعادلة تحتوي حداً مربعاً في y وليس في x وبالتالي نأخذ حدود y في جانب:

$$y^2-6y=8x+23$$

وبإكمال المربع

$$(y-3)^2=8x+32$$

وبأخذ عامل مشترك في حدود x

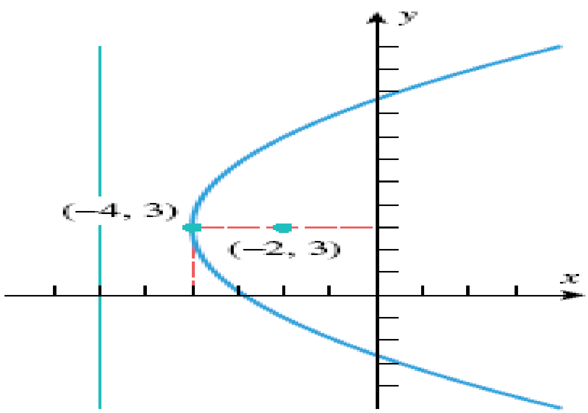
$$(y-3)^2=8(x+4)$$

وهذه المعادلة تشبه المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي يفتح جهة اليمين

$$y^2=4px$$

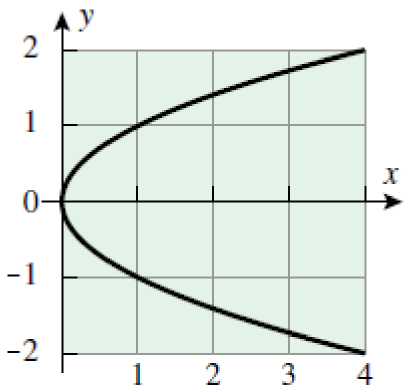
حيث هناك نقلاً للمحاور إلى النقطة $(-4,3)$. كذلك فإن $p = 2$ وبالتالي فإن البؤرة تبعد عن الرأس بمقدار 2 أي نقطة البؤرة هي $(-2,3)$. أما الدليل فيبعد عن الرأس بمقدار 2 من الجهة الأخرى وبالتالي فإن معادلته

$x = -6$

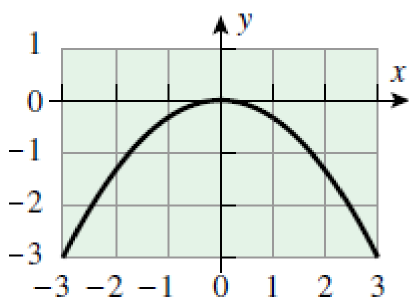


<u>تمارين</u>

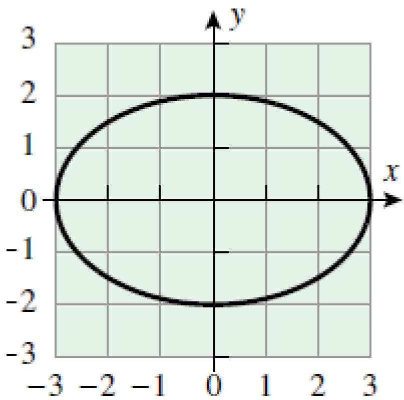
(1) في كل من الرسوم البيانية التالية، أوجد معادلة القطوع التالية:



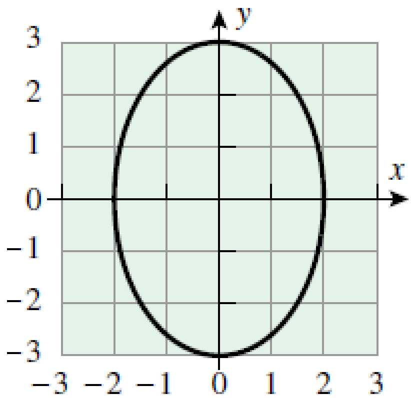
(i)



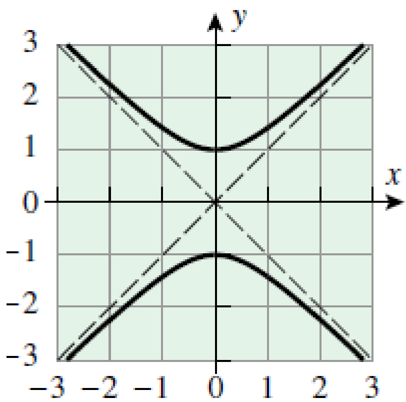
(ii)



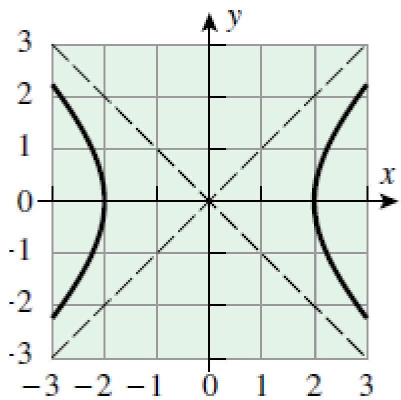
(i)



(ii)



(i)



(ii)

(2) أوجد البؤرة والدليل للقطوع في التمرين(1).

(3) أرسم للقطوع التالية ثم أوجد البؤرة والدليل.

(a) $y^2 = 6x$

(b) $y^2 = -10x$

(c) $x^2 = 4y$

(d) $x^2 = -9y$

(e)

(f) $(y+1)^2 = -7(x-4)$

(g) $(y-3)^2 = 6(x-2)$

(h) $y = 4x^2 + 8x + 5$

(i) $x^2 - 4x + 2y = 1$

(j) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2(y-1)$

(k) $(x+2)^2 = -(y+2)$

(4) فيما يلي من قطوع، حدد البؤرة والمحاور وارسم القطع

(a) $$9x^2 + y^2 = 9$$

(b) $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(c) $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

(d) $$4x^2 + 9y^2 = 36$$

(5) فيما يلي من قطوع، حدد البؤرة والمحاور والخطوط التقاربية وارسم القطع

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$16x^2 - 25y^2 = 400$$

$$\frac{(y+4)^2}{3} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$$

الفصل الثالث: تدوير المحاور و معادلات السطوح التربيعية

المعادلة

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

هي معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية). وهي تؤول إما إلى دائرة أو قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد.

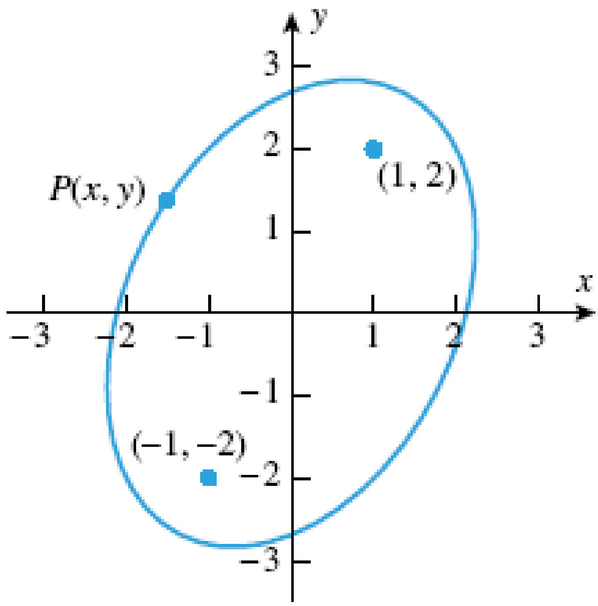
إذا كانت $B = 0$ فإننا يمكن بسهولة الحصول على الصيغة القياسية عن طريق إكمال المربع ثم نقل المحاور.

أما إذا كانت B (معامل xy) مختلف عن الصفر فإننا نحتاج إلى تدوير المحاور للتخلص منه.

فمثلاً المعادلة

$$8x^2 - 4xy + 5y^5 = 36$$

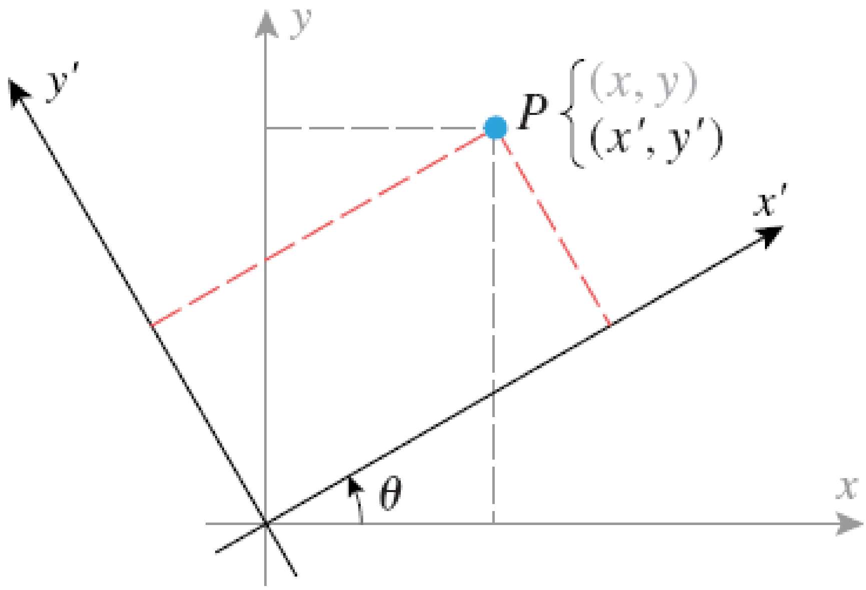
هي معادلة قطع ناقص مع محاور تميل على المحاور المعتادة للإحداثيات بزاوية (كما بالشكل)



تدوير المحاور

في الشكل التالي تم تدوير المحاور xy حول نقطة الأصل بزاوية θ لتصبح المحاور x'y'. و بالتالي سوف ترتبط الإحداثيات القديمة لأي نقطة P(x,y) في المستوي بالإحداثيات الجديدة P(x',y') بالعلاقات:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \qquad (1)$$



و يكون التحويل العكسي كالتالي:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \qquad (2)$$

مثال(1):

إذا تم تدوير المحاور xy حول نقطة الأصل بزاوية $\theta=\pi/4$ لتصبح المحاور x'y'. أوجد معادلة المنحنى

$$\mathbf{x^2-xy+y^2-6=0}$$

بالإحداثيات الجديدة.

الحل:

حيث أن

$$\sin\pi/4 = \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$$

و باستخدام معادلات تدوير المحاور

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

فإن

$x = x'/\sqrt{2} - y'/\sqrt{2}$
$y = x'/\sqrt{2} + y'/\sqrt{2}$

و بالتعويض في المعادلة المعطاة

$\mathbf{x^2 - xy + y^2 - 6 = 0}$

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6 = 0$$

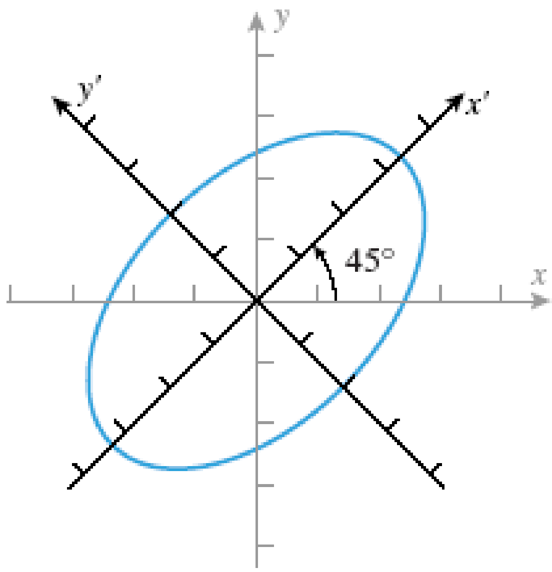
و بالاختصار

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2 - x'^2 + y'^2 + x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} = 6$$

أي

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

و هي معادلة قطع ناقص كما هو واضح بالشكل:



مثال(2):
أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة $P(2,4)$ إذا تم تدوير المحاور xy حول نقطة الأصل بزاوية $\theta=\pi/6$ لتصبح المحاور x'y'.

الحل:

حيث أن

$x=2$, $y=4$, $\sin \pi/6 = \frac{1}{2}$, $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$

و باستخدام معادلات تدوير المحاور العكسية

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$
$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

فإن

$$x' = 2\left(\sqrt{3}/2\right) + 4(1/2) = \sqrt{3} + 2$$
$$y' = -2(1/2) + 4\left(\sqrt{3}/2\right) = -1 + 2\sqrt{3}$$

إذن الإحداثيات الجديدة للنقطة **P هي**

$$\left(\sqrt{3}+2, -1+2\sqrt{3}\right)$$

<u>التخلص من الحد xy</u>

نظرية: إذا تم تدوير المحاور xy حول نقطة الأصل بزاوية θ تحقق أن

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$$

(3)

فإن المعادلة

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(4)

حيث $B\neq 0$ تصبح

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$
(5)

الإثبات: بالتعويض من معادلات التحويل

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$
$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

في (4) و التبسيط تصبح

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

حيث

$$A' = A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta$$
$$B' = B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2(C - A)\sin\theta\cos\theta$$
$$C' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$
$$D' = D\cos\theta + E\sin\theta$$
$$E' = -D\sin\theta + E\cos\theta$$
$$F' = F$$

و بوضع B'=0

$$B' = B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2(C - A)\sin\theta\cos\theta$$

و استخدام قوانين ضعف الزاوية ينتج أن

$$B' = B\cos 2\theta - (A - C)\sin 2\theta$$

أي أن

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A - C}{B}$$

إذن

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

^^^

ملحوظة : سوف نتفق على اختيار الزاوية θ لتكون في الربع الأول.

مثال(3):
حدد مع التوضيح بالرسم نوع المنحنى التربيعي:

$$153x^2 - 192xy + 97y^2 - 30x - 40y - 200 = 0$$

الحل:
بالمقارنة مع المعادلة العامة للمنحنيات التربيعية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

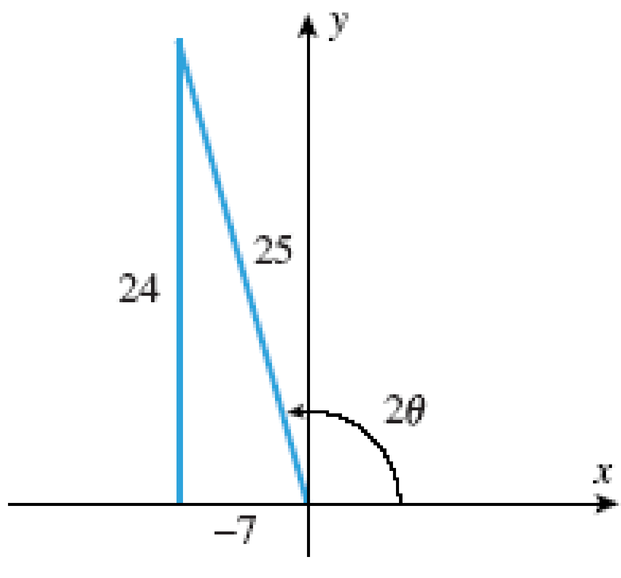
فإن

$$A = 153,\ B = -192,\ \text{and}\ C = 97$$

و بالتالي يمكن حذف الحد xy بتدوير المحاور حول نقطة الأصل بزاوية θ تحقق أن

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = -\frac{56}{192} = -\frac{7}{24}$$

و باختيار الزاوية θ لتكون في الربع الأول(ضعفها قد يتعدى الربع الأول) فإن المثلث التالي سوف يمثل هذه الزاوية:



و منه نجد أن

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\frac{3}{5}$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\frac{4}{5}$$

و بالتعويض فإن معادلات التحويل

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$
$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

تصبح

$$x=\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y' \quad \text{and} \quad y=\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'$$

و بالتعويض في المعادلة المعطاة

$$153x^2-192xy+97y^2-30x-40y-200=0$$

تصبح

$$\frac{153}{25}(3x'-4y')^2-\frac{192}{25}(3x'-4y')(4x'+3y')$$
$$+\frac{97}{25}(4x'+3y')^2-\frac{30}{5}(3x'-4y')-\frac{40}{5}(4x'+3y')-200=0$$

$$-\frac{40}{5}(4x'+3y')-200=0$$

و بالتبسيط

$$25x'^2+225y'^2-50x'-200=0$$

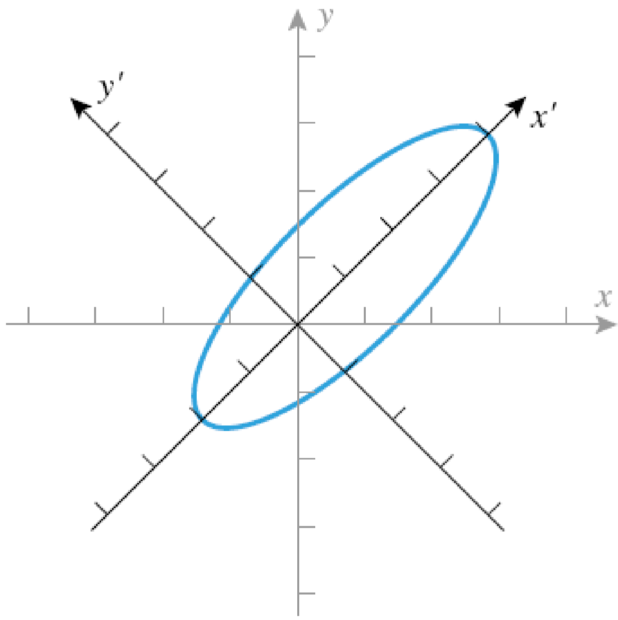
أو

$$x'^2+9y'^2-2x'-8=0$$

و بإكمال المربع

$$\frac{(x'-1)^2}{9}+y'^2=1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه (1,0) و محوره الأكبر على ' x و طوله a=3 و الأصغر b=1.



تمارين

(1) قم بإدارة المحاور لحذف الحد xy من المعادلات التربيعية التالية، ثم حدد نوع القطع الناتج وارسمه

(a) $xy = -9$

(b) $x^2 - xy + y^2 - 2 = 0$

(c) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

(d) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$

(e) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 80x - 60y + 100 = 0$

(f) $6x^2 + 24xy - y^2 - 12x + 26y + 11 = 0$

(2) إذا تم تدوير المحاور xy حول نقطة الأصل بزاوية θ لتصبح المحاور x'y'. أوجد معادلة المنحنيات التالية بالإحداثيات الجديدة.

(a) $\sqrt{3}xy + y^2 = 6$, $\theta = 60°$

(b) $2x^2 + 2\sqrt{3}xy = 3$, $\theta = 30°.$

(3) إذا تم تدوير المحاور xy حول نقطة الأصل بزاوية θ لتصبح المحاور x'y'. فإذا كانت معادلة المنحنيات التالية بالإحداثيات الجديدة هي كما يلي، أوجد معادلة المنحنيات بالإحداثيات الأصلية

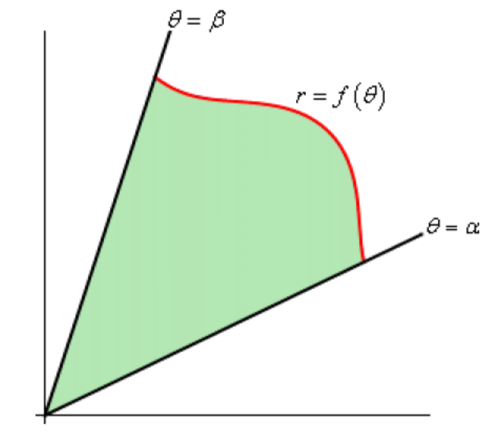
(a) $3x'^2 + y'^2 = 6$, $\theta = 45°.$

(b) $y = x^2$, $\theta = 30°.$

الفصل الرابع: المساحات في الإحداثيات القطبية

المساحة بين منحنى و شعاعين

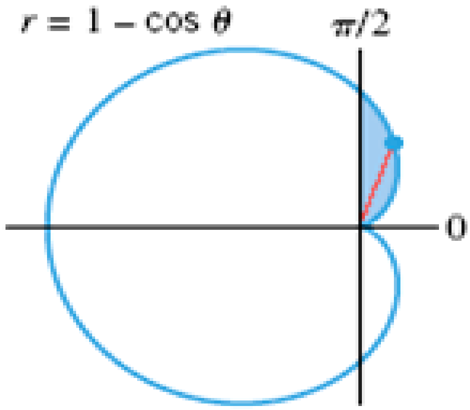
في هذا الجزء سوف نحسب المساحات المحصورة بين منحنيات قطبية.
نأخذ في الاعتبار الزاويتين α, β التين تحققان $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$. و أن الدالة $f(\theta)$ متصلة في النطاق $\alpha < \theta \le \beta$. عندئذٍ فإن المساحة A للمنطقة R المحصورة بالمنحنى $r = f(\theta)$ و الشعاعين $\theta = \alpha \ and \ \theta = \beta$ تتعين من



$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

مثال (1):
أوجد المساحة المحصورة في الربع الأول لمنحنى الكاردويد للدالة
$r = 1 - \cos\theta$

الحل:
المساحة المحصورة كما هو واضح من الشكل تكون θ بين $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi / 2$ و بالتالي فإن المساحة المطلوبة تتحدد من



$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

و بالاستعانة بـ

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta),$$

فإن

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\pi - 1$$

مثال (2):

أوجد المساحة المحصورة داخل منحنى الكاردويد للدالة $r = 1 - \cos\theta$

الحل:

المساحة المحصورة كما هو واضح من الشكل تكون θ بين $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$ و بالتالي فإن المساحة المطلوبة تتحدد من

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta$$

و بحساب التكامل

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

المساحة بين منحنين و شعاعين

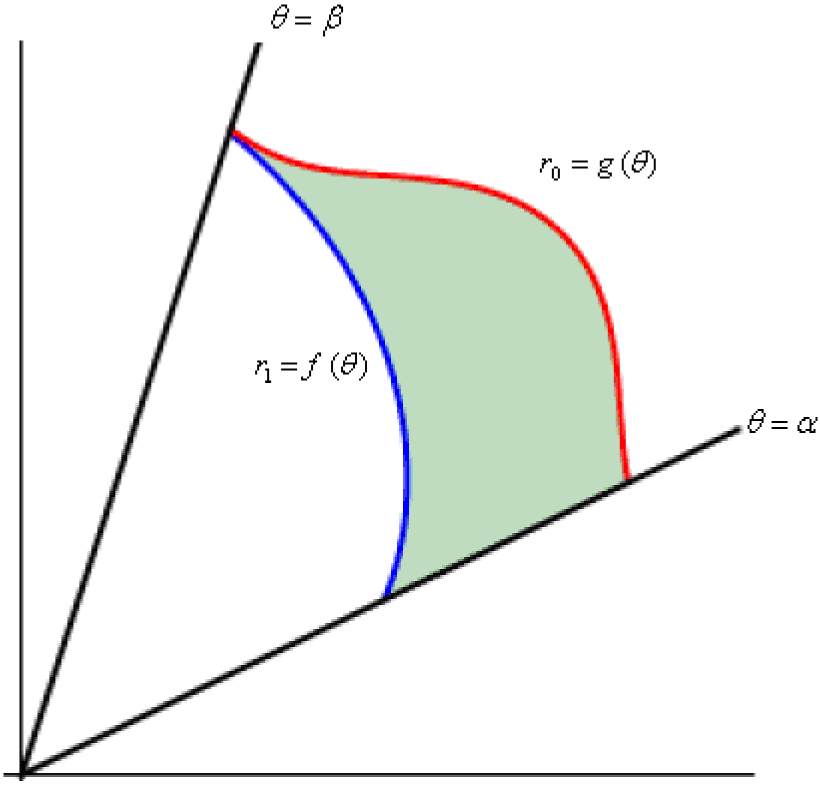
و لإيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين القطبيين $r_0 = g(\theta), r_1 = f(\theta)$

و الشعاعين $\theta = \alpha \ and \ \theta = \beta$

وبالتالي فإن المساحة تتعين من

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2} \left(r_0^2 - r_1^2 \right) d\theta$$

ويوضح ذلك الرسم التالي:

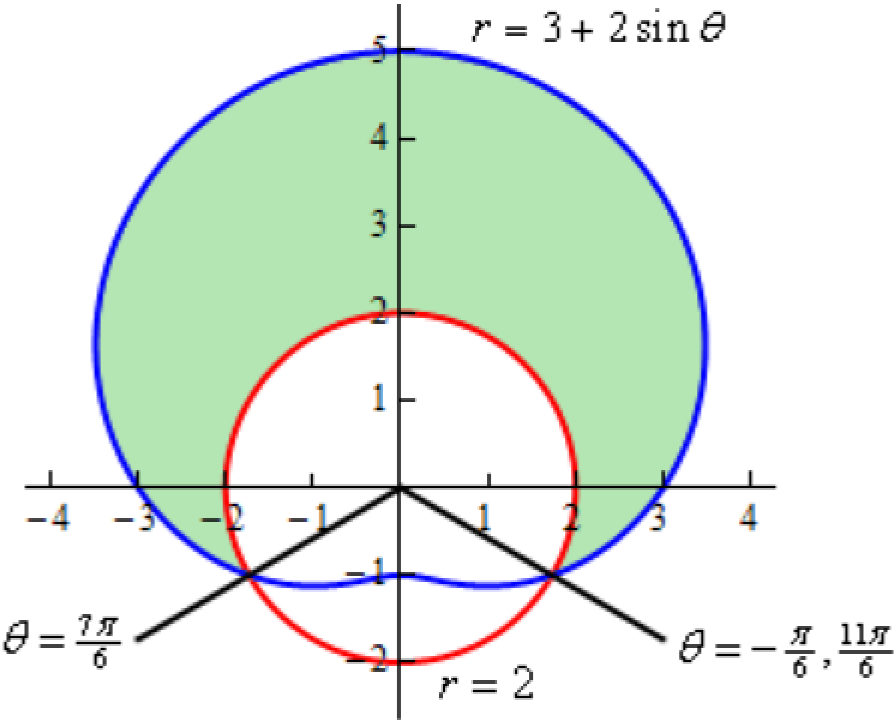


مثال(3):

أوجد المساحة الواقعة داخل المنحنى $r = 3 + 2\sin\theta$ و خارج الدائرة $r = 2$

الحل:

$$3 + 2\sin\theta = 2 \Rightarrow \sin\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}$$



$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\tfrac{1}{2}\left(r_0^2-r_1^2\right)d\theta=\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\tfrac{1}{2}\left((3+2\sin\theta)^2-(2)^2\right)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(5+12\sin\theta+4\sin^2\theta\right)d\theta$$

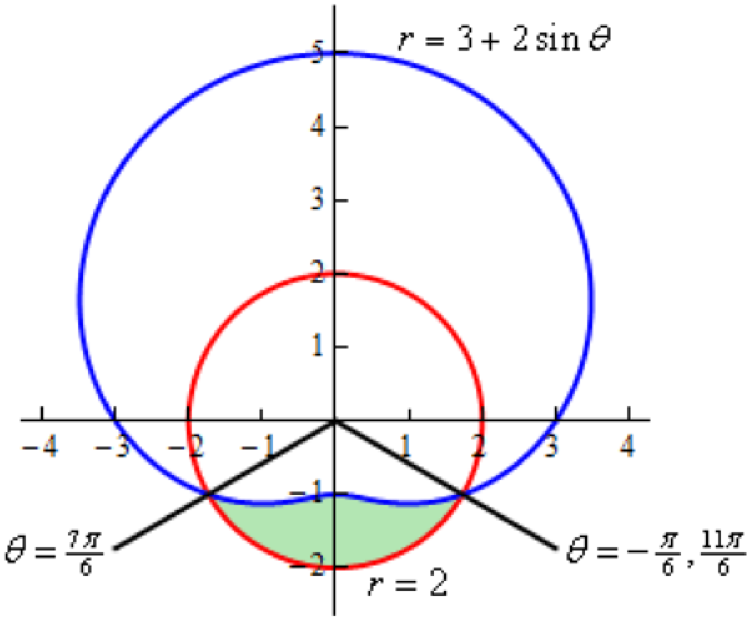
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(7+12\sin\theta-2\cos(2\theta)\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(7\theta-12\cos\theta-\sin(2\theta)\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

$$=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}=24.187$$

مثال(4):
أوجد المساحة الواقعة خارج المنحنى $r=3+2\sin\theta$ و داخل الدائرة $r=2$

الحل:
نرسم المنحنى المعطى ثم نرسم الدائرة. فيكون الرسم كما بالشكل.
ونلاحظ فيه الجزء الواقع في الجزء السفلي للدائرة والواقع خارج المنحني. وهو الجزء المظلل بالشكل.



إذن المساحة تعطى من

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\tfrac{1}{2}\left(r_0^2-r_1^2\right)d\theta=$$

$$\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}\frac{1}{2}\left((2)^2-(3+2\sin\theta)^2\right)d\theta$$

$$= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(-5-12\sin\theta-4\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(-7-12\sin\theta+2\cos\left(2\theta\right)\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(-7\theta+12\cos\theta+\sin\left(2\theta\right)\right)\Big|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{3}=2.196$$

تمارين

(1) أوجد المساحة المحصورة داخل منحنى الكاردويد للدالة $r = 1 - \cos\theta$.

(2) أوجد المساحة المحصورة داخل منحنى الوردة للدالة $r = \cos 2\theta$.

(3) أوجد المساحة المحصورة داخل منحنى الكاردويد للدالة $r = 2 + 4\cos\theta$.

(4) أوجد المساحة الواقعة داخل المنحنى $r = 4 + 4\cos\theta$ و خارج الدائرة $r = 6$.

(5) أوجد المساحة الواقعة خارج المنحنى $r = 3 + 2\sin\theta$ و داخل الدائرة $r = 2$.

(6) أوجد المساحة المشتركة داخل المنحنى $r = 3 + 2\sin\theta$ و الدائرة $r = 2$.