جامعة جنوب الوادي

محاضرات في
تكامل (2)
لطلبة الفرقة الثانية
رياضيات - عام

اعداد

قسم الرياضيات

الباب الأول

التكاملات المتعددة

التكامل المكرر :-

نفرض أن

$$I = \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

فإذا كانت

$$\varphi(x) = \int_{y=y_1}^{y=y_2} f(x,y)\, dy$$

حيث أن التكامل الأخير مأخوذ بالنسبة إلى y باعتبار أن x ثابتة وحدود التكامل y_1, y_2 بصفة عامة دوال في x. فإن

$$I = \int_{x=a}^{b} \left\{ \int_{y=y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy \right\} dx$$

ويسمى هذا التكامل بالتكامل المكرر للدالة $f(x,y)$ وفيه تكامل الدالة $f(x,y)$ بالنسبة الى y باعتبار x ثابتة بين الحدين y_1, y_2 وهما بصفة عامة دالتين في x ثم تكامل النتيجة كدالة في x بالنسبة إلى x بين الحدين $x = a, x = b$. ويمكن للسهولة حذف الأقواس فيكون التكامل المكرر هو:

$$I = \int_{x=a}^{b} \int_{y=y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy\, dx$$

بالمثل إذا كانت

$$I = \int_c^d \varphi(y)\, dy \qquad \text{حيث} \qquad \varphi(y) = \int_{x=x_1}^{x_2} f(x,y)\, dx$$

فإننا نحصل على التكامل المكرر :

$$I=\int_{y=c}^{d}\int_{x=x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

وفيه تكامل الدالة $f(x,y)$ أولاً بالنسبة إلى x باعتبار y ثابتة بين الحدين $x_1 ، x_2$ وهما بصفة عامة دالتين في y ؛ فنحصل بذلك على دالة في y ثم تكامل هذه النتيجة بالنسبة إلى y بين $y=c,\ y=d$.

كذلك يمكن تعريف التكامل المكرر الثلاثي للدالة $F(x,y,z)$:

$$I=\int_{x=a}^{b}\left\{\int_{y=y_1}^{y_2}\left[\int_{z=z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx$$

$$=\int_{x=a}^{b}\int_{y=y_1}^{y_2}\int_{z=z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

وفيه تكامل الدالة $F(x,y,z)$ أولاً بالنسبة إلى z باعتبار x, y ثوابت بين الحدين $z_1(x,y) , z_2(x,y)$ ثم تكامل نتيجة التكامل الأول وهي دالة في x, y بالنسبة إلى y باعتبار أن x ثابتة بين الحدين $y_1(x) , y_2(x)$ أخيراً تكامل نتيجة التكامل الثاني وهي دالة في x بالنسبة إلى x بين الحدين a, b .

ويلاحظ ضرورة مراعاة عدم تغيير ترتيب العناصر التفاضلية dz , dy , dx عند حساب التكامل المكرر لأن استبدال أي عنصرين تفاضليين يغير بصفة عامة قيمة التكامل إلا تحت شروط معينة على الدالة المكاملة كما سنرى بعد ذلك.

مثال (1) : احسب قيم التكاملات المكررة الآتية :-

(i) $\displaystyle\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1}(x+y)\,dx\,dy$, (ii) $\displaystyle\int_{x=0}^{a}\int_{y=x^2/a}^{2a-x} y\,dy\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x^2} e^{x^3}\,dy\,dx$, (iv) $\displaystyle\int_{y=0}^{2}\int_{x=2-y}^{6-2y}\int_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}} z\,dz\,dx\,dy$

(v) $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4\sin\theta} r^3\cos^3\theta\,dr\,d\theta$.

الحل :-

(i) $$\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1}(x+y)\,dx\,dy=\int_{y=0}^{2}\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{x=0}^{1}dy$$

$$=\int_{y=0}^{2}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=3.$$

(ii) $$\int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=x^2/a}^{2a-x}y\,dy\right)dx=\int_{x=0}^{a}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2/a}^{2a-x}dx$$

$$=\int_{x=0}^{a}\frac{1}{2}\left((2a-x)^2-x^4/a^2\right)dx$$

$$=\frac{16}{15}a^3.$$

(iii) $$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x^2}e^{x^3}\,dy\,dx=\int_{x=0}^{2}x^2e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}(e^8-1).$$

(iv) $$\int_{y=0}^{2}\int_{x=2-y}^{6-2y}\int_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}}z\,dz\,dx\,dy=\int_{y=0}^{2}\int_{x=2-y}^{6-2y}\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-y^2}\right)^2dx\,dy$$

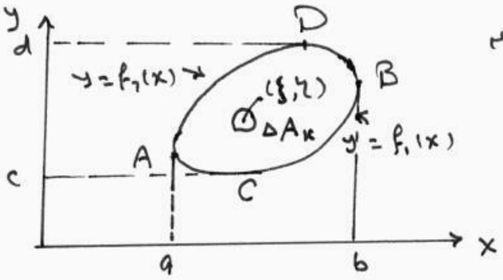
$$=\frac{1}{2}\int_{y=0}^{2}(4-y^2)(4-y)\,dy=\frac{26}{3}$$

(v) $$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4\sin\theta}r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta=\frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\pi/2}64\cos^2\theta\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=2\pi.$$

التكاملات الثنائية

نفرض أن الدالة $F(x,y)$ معرفة في منطقة مغلقة R من المستوى xy محدودة بالمنحنيين $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ كما بالشكل.



نقسم المنطقة R جزئياً إلى n من المناطق الجزئية ΔR_k مساحتها ΔA_k حيث $k=1,2,\dots,n$

نفرض أن (ξ_k,η_k) نقطة من المنطقة الجزئية ΔR_k . نكون المجموع

$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k)\,\Delta A_k \qquad (1)$$

نعتبر النهاية عندما $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k)\,\Delta A_k \qquad (2)$$

أي عندما نقسم المنطقة R إلى عدد لا نهائي من المناطق الجزئية. في هذه الحالة تؤول المنطقة الجزئية ΔR_k إلى النقطة (ξ_k,η_k) فإذا وجدت النهاية السابقة فإنه يشار إليها بالرمز

$$\iint_R F(x,y)\,dA \qquad (3)$$

وتسمى بالتكامل المزدوج للدالة $F(x,y)$ على المنطقة R.
ومن الممكن البرهنة على أن النهاية (2) موجودة إذا كانت $F(x,y)$ دالة متصلة في المنطقة R.

التكاملات المكررة:-

إذا كانت المنطقة R بحيث أن أي خطوط موازية لمحور y تقابل حدود

المنطقة R على الأكثر في نقطتين حينئذ يمكننا كتابة المعادلات للمنحنيات المميزة للمنطقة على الصورة $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ (كما بالشكل المرسوم) حيث $f_1(x)$, $f_2(x)$ دوال وحيدة القيمة ومتصلة لجميع قيم x بحيث $a\le x\le b$.
وفي هذه الحالة فإنه يمكن تقسيم المنطقة R إلى مستطيلات ΔR_k وذلك بإنشاء شبكة من الخطوط الموازية لمحوري ox, oy وتكون مساحة ΔA_k للمنطقة الجزئية ΔR_k على الصورة

$$\Delta A_k = \Delta x\,\Delta y = \Delta y\,\Delta x$$

$$\therefore \iint_R F(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b}\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=a}^{b}\left\{\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy\right\}dx \qquad (4)$$

حيث التكامل بين الأقواس يحسب قيمته أولاً (محتفظاً بالمقدار x ثابت) وأخيراً يحسب التكامل بالنسبة إلى x للدالة الناتجة من التكامل الأول بين الحدين $x=a, x=b$. الصيغة السابقة تبين كيفية حساب التكامل المزدوج إذا كانت المنطقة R على الشكل المرسوم.
إذا كانت R بحيث أن أي خطوط مستقيمة توازي محور ox تقطع حدودها على الأكثر في نقطتين فإن المنطقة R تعرف بالمنحنيات

$$x = g_1(y)\ ,\quad x = g_2(y)$$

$$\therefore \iint_R F(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{d}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{y=c}^{d}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\,dy \qquad (5)$$

إذا وجد أن الصيغتين (4),(5) تعطيان نفس القيمة للتكامل المزدوج نستنتج أنه من الصيغتين نستطيع تبديل ترتيب التكامل بالنسبة للصورة الأخرى.

مثلاً :

$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1}(x+y)\,dx\,dy = 3 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}(x+y)\,dy\,dx$$

علماً أن هذا لا يتحقق بصفة عامة . لنعتبر المثال التالي :

مثال (1) :- أثبت أن

(i) $$\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right\}dx = \frac{1}{2}$$

(ii) $$\int_{y=0}^{1}\left\{\int_{x=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right\}dy = -\frac{1}{2}$$

الحل :-

(i) $$\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right\}dx = \int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=0}^{1}\left(\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy\right\}dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\left(\frac{-x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right)\Bigg|_{y=0}^{1}dx$$

$$= \int_{0}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2} = 1/2$$

(ii)

كما في حالة (i) نحصل على

$$\int_{y=0}^{1}\left\{\int_{x=0}^{1}\frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx\right\}dy = 1/2$$

اثبت ذلك

بضرب الطرفين في -1 نجد أن

$$\int_{y=0}^{1}\left\{\int_{x=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right\}dy = -1/2$$

هذا المثال يوضح أن تبديل ترتيب التكامل يعطي نتائج متساوية دائماً وبشرط الكافي لتبديل ترتيب التكامل هو أن الدالة المكاملة $F(x,y)$ تكون متصلة على المنطقة R.

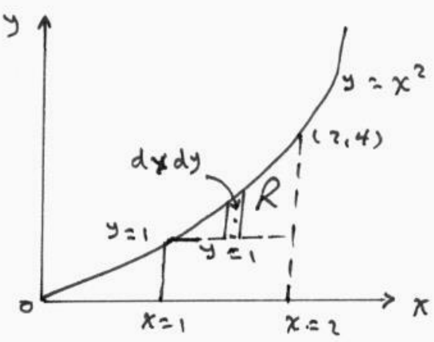
مثال (٢): (i) ارسم شكلاً تخطيطياً لمنطقة R من المستوى xy المحدودة بالمنحنيات

$$y = x^2 \; , \; x = 2 \; , \; y = 1$$

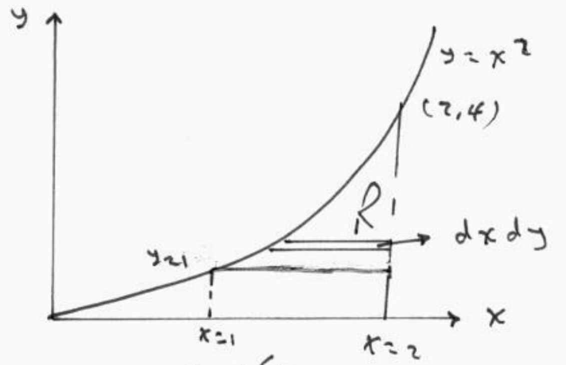
(ii) اعط تفسير الفيزيائي للمقدار $\iint_R (x^2+y^2)\, dx\, dy$

(iii) أوجد قيمة التكامل المزدوج في الجزء (ب)

الحل :- (i) المنطقة المطلوبة R موضحة بالشكل (١)



شكل (١)



شكل (٢)

(ii) بما أن (x^2+y^2) هو مربع المسافة من أي نقطة (x,y) الى نقطة الأصل $(0,0)$ فيمكننا اعتبار أن التكامل المزدوج يمثل عزم القصور الذاتي القطبي [عزم القصور الذاتي بالنسبة الى نقطة الأصل] للمنطقة R وذلك بفرض وحدة الكثافة.

(iii) الطريقة الأولى :-

التكامل المزدوج يمكن التعبير عنه كتكامل مكرر

$$\int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{x^2} (x^2+y^2)\, dy\, dx = \int_{x=1}^{2} \left\{ \int_{y=1}^{x^2} (x^2+y^2)\, dy \right\} dx$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left(x^4 - x^2 + \tfrac{1}{3}x^6 - \tfrac{1}{3} \right) dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{21}x^7-\frac{1}{3}x\right]_{x=1}^{2}=\frac{1006}{105}=9.581.$$

الطريقة الثانية :-

التكامل المزدوج يمكن ايجاده من صورة التكامل المكرر

$$\int_{y=1}^{4}\int_{x=\sqrt{y}}^{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_{y=1}^{4}\left\{\int_{x=\sqrt{y}}^{2}(x^2+y^2)\,dx\right\}dy$$

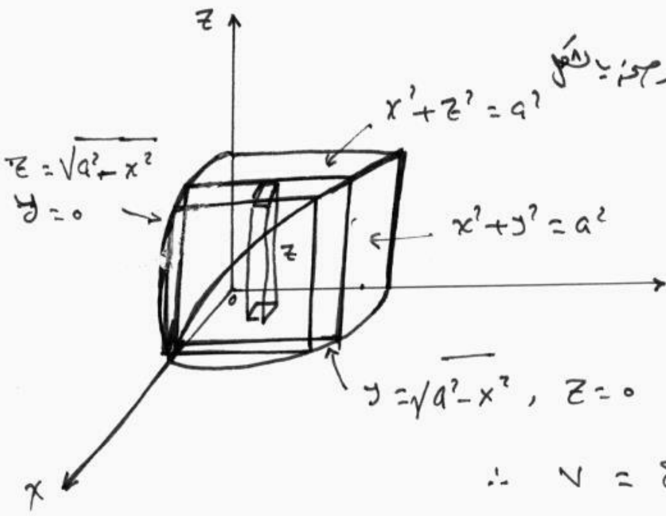
$$=\int_{y=1}^{4}\left(\frac{8}{3}+2y^2-\frac{1}{3}y^{3/2}-y^{5/2}\right)dy$$

$$=\frac{1006}{105}=9.581$$

مثال (٣) :- أوجد حجم المنطقة المشتركة لتقاطع الأسطوانتين

$$x^2+y^2=a^2\ ,\quad x^2+z^2=a^2$$

الحل :-



الحجم المطلوب = ٨ مرات حجم المنطقة الموجودة في الثمن الأول

لنفرض أن الحجم المطلوب هو V

واضح أن عنصر الحجم عبارة عن اسطوانة قائمة محورها z وقاعدتها في المستوى xy هي dydx لذا فإن

$$\therefore\ V=8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}z\,dy\,dx$$

$$=\frac{16}{3}a^2$$

مثال (٤) :- لتعيين المنطقة المأخوذ عليها التكامل المكرر الآتي

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=\sqrt{y}}^{2}e^{x^3}\,dx\,dy$$

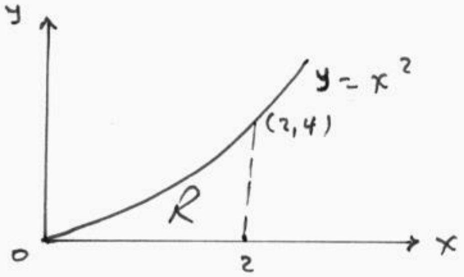
ثم احسب قيمته بتغيير ترتيب التكامل فيه .

الحل :-

منطقة التكامل هي المنطقة المحصورة تحت القطع المكافئ $y = x^2$ بالمستقيمين $y = 0,\ x = 0$.

والموجودة في الربع الأول من المستوى xy .

بتغيير ترتيب التكامل نجد أن



$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x^2} e^{x^3}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{8}-1\right) .$$

التكاملات الثلاثية :-

النتائج السابقة تعمم بسهولة في مناطق مقفلة في الفراغ الثلاثي. مثال ذلك. إذا اعتبرنا $F(x,y,z)$ معرفة في المنطقة R من الفراغ الثلاثي xyz مقفلة. بتقسيم المنطقة R إلى n من المناطق الجزئية حجم كل منها ΔV . ولنفرض أن (ξ_k, η_k, ζ_k) نقطة ما في المنطقة الجزئية ΔR_k .
نكون المجموع الآتي والذي يمثل مجموع حجوم المناطق الجزئية ΔR_k حيث $k=1,2,\dots,n$

$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta V \qquad (6)$$

لايجاد حجم المنطقة الأصلية نأخذ النهاية للمجموع السابق عندما $n \to \infty$.
إذا وجدت هذه النهاية يرمز لها بالرمز

$$\iiint_R F(x,y,z)\,dV \qquad (7)$$

تسمى التكامل الثلاثي للدالة $F(x,y,z)$.

إذا أخذنا شبكة مكونة من مستويات موازية للمستويات المتعامدة

xy, xz, yz والمنطقة R قسمت الى مناطق جزئية عبارة عن متوازيات سطوح قائمة ففي مثل هذه الحالة يمكن أن نعبر عن التكامل الثلاثي على المنطقة R المعطى بالمعادلة (7) كتكامل مكرر على الصورة

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=a}^{b}\left\{\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right)dy\right\}dx .$$

حيث أننا نوجد قيمة التكامل الداخلي (بالنسبة الى z) أولاً . ثم التكامل بالنسبة الى y ، وأخيراً بالنسبة الى x . التكامل يمكن أيضاً حسابه لأي ترتيب آخر للعناصر التفاضلية dx, dy, dz بشرط أن تكون الدالة $F(x,y,z)$ متصلة على المنطقة R . ويراعى تغيير حدود التكامل على النحو المناسب كما سنرى من المثال التالي.

نلاحظ أن المعنى الفيزيائي للتكامل الثلاثي (7) يتوقف على طبيعة الدالة المكاملة $F(x,y,z)$ وما تمثله. فإذا كانت $F \equiv 1$ فإن التكامل $\iiint_R dV$ يعطي حجم الحيز الفراغي R . إذا كانت $F(x,y,z)=\rho$ هي كثافة وحدة الحجوم للمنطقة R وهي بصفة عامة دالة في x,y,z فإن $\iiint_R \rho\, dV$ يعطي كتلة الحجم R.
إذا كانت النقطة $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ هي مركز ثقل الجسم الذي يشغل الحيز R من الفراغ فإن

$$\bar{x}=\iiint_R x\rho\, dV\Big/\iiint_R \rho\, dV , \quad \bar{y}=\iiint_R y\rho\, dV\Big/\iiint_R \rho\, dV$$

$$\bar{z}=\iiint_R z\rho\, dV\Big/\iiint_R \rho\, dV .$$

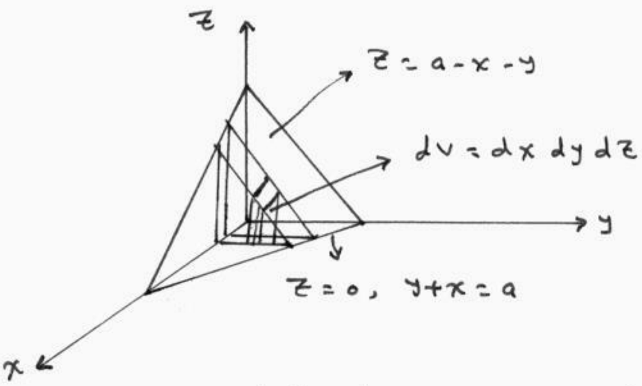
مثال (٥):- (i) ارسم شكلاً تخطيطياً للمنطقة R الفراغية المحدودة بما يلي:

$$x+y+z=a \quad (a>0), \quad x=0,\ y=0,\ z=0 .$$

(ii) اعط تفسيراً فيزيائياً لمقدار $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$.

(iii) أوجد قيمة التكامل الثلاثي في (ii) .

الحل :- (أ)



(ii) حيث أن ($x^2+y^2+z^2$) هو مربع لبعد أي نقطة (x,y,z) عند نقطة الأصل $(0,0,0)$ فيمكن اعتبار التكامل الثلاثي يمثل عزم القصور الذاتي القطبي (أي عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى نقطة الأصل) للمنطقة R (بفرض وحدة الكثافة) يمكننا أيضاً أن نعتبر أن التكامل الثلاثي يمثل كتلة المنطقة إذا كانت الكثافة تتغير تبعاً لمقدار $x^2+y^2+z^2$.

(iii) التكامل الثلاثي يمكن التعبير عنه بإحدى الصور الآتية :

$$\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dz$$

$$=\int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{a-y}\int_{z=0}^{a-x-y}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy$$

$$=\int_{z=0}^{a}\int_{y=0}^{a-z}\int_{x=0}^{a-y-z}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

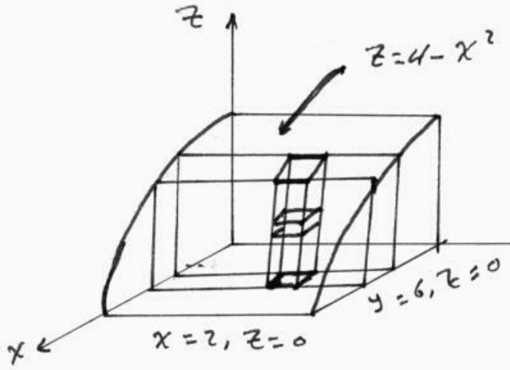
$$=\int_{z=0}^{a}\int_{y=0}^{a-z}\Big\{z^2(a-z)-z^2y+(a-z)y^2-y^3+ + \frac{(a-y-z)^3}{3}\Big\}\,dy\,dz$$

$$=\int_{z=0}^{a}\Big\{\frac{z^2(a-z)^2}{2}+\frac{(a-z)^4}{12}\Big\}dz=\frac{a^5}{20}$$

مثال (٦) :- أوجد

(١) الحجم (٢) المركز المتوسط لمنطقة R المحدودة بالاسطوانة مكافئة المقطع التي معادلتها $z = 4 - x^2$ والمستويات $x=0, y=6, y=0, z=0$ بفرض أن الكثافة σ مقدار ثابت.

الحل :-



المنطقة R موضحة بالشكل المقابل.

(١) الحجم المطلوب V هو

$$V = \iiint_R dx\,dy\,dz$$

$$\therefore V = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} dz\,dy\,dx = 32.$$

(٢) الكتلة الكلية M لمنطقة R إذا كانت كثافة وحدة الحجوم هي σ تعطى من

$$M = \iiint_R \sigma\, dx\,dy\,dz$$

وحيث أن σ مقدار ثابت

$$\therefore M = 32\sigma$$

$\therefore$ المركز المتوسط $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ لمنطقة R هو

$$\bar{x} = \frac{\text{العزم الكلي حول المستوى } yz}{\text{الكتلة الكلية } M} = \frac{1}{32\sigma}\iiint_R \sigma x\, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{32}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} x\, dz\,dy\,dx$$

$$= 3/4$$

بالمثل نجد أن

$$\bar{y} = 3 \quad , \quad \bar{z} = 8/5$$

تحويلات التكاملات المتعددة

لحساب قيمة التكامل المتعدد لمنطقة ما R يكون من الملائم غالباً أن نختار احداثيات اخرى غير الاحداثيات العمودية مثل الإحداثيات القطبية (r, θ) أو الإحداثيات الكروية (r, θ, φ) أو الاحداثيات الاسطوانية (r, θ, z). وربما نستخدم أي من الإحداثيات المنحنية. بصفة عامة إذا كانت $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ هي معادلات التحويل من الإحداثيات الكارتيزية $(x\ y)$ إلى الاحداثيات العامة المنحنية (u, v). فإن المنطقة R في المستوى xy تتحول إلى المنطقة R' في المستوى uv ويكون

$$\iint_R F(x,y)\, dx\, dy = \iint_{R'} G(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

حيث $G(u,v) = F\{f(u,v), g(u,v)\}$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

هو محدد الجاكوبيان للمقادير x, y بالنسبة إلى u, v.

بالمثل إذا كانت (u, v, w) هي احداثيات منحنية ثلاثية الابعاد وكانت $x = f(u,v,w)$, $y = g(u,v,w)$, $z = h(u,v,w)$ هي المعادلات للتحويل من الفراغ الثلاثي المتعامد xyz إلى الفراغ uvw فإن

$$\iiint_R F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{R'} G(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\, dv\, dw$$

حيث $G(u,v,w) = F\{f(u,v,w), g(u,v,w), h(u,v,w)\}$,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

هو محدد الجاكوبيان للمقادير x, y, z بالنسبة إلى u, v, w.

النتائج السابقة توضح تغيير المتغيرات للتكاملات المزدوجة والثلاثية. تعميم ذلك على الابعاد الاكثر (اكثر من ثلاثية الابعاد) يمكن عمله بسهولة.

مثال (٧): إذا كانت $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ أوجد $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ بدلالة u, v . ثم أوجد عزم القصور الذاتي القطبي في المستوى xy لمنطقة محدودة بالمنحنيات $xy = 4$, $xy = 2$, $x^2 - y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$ مفترضاً وحدة الكثافة .

الحل: أولاً :

$$\because \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 4\,(x^2+y^2)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)} = \frac{1}{4\,(x^2+y^2)}$$

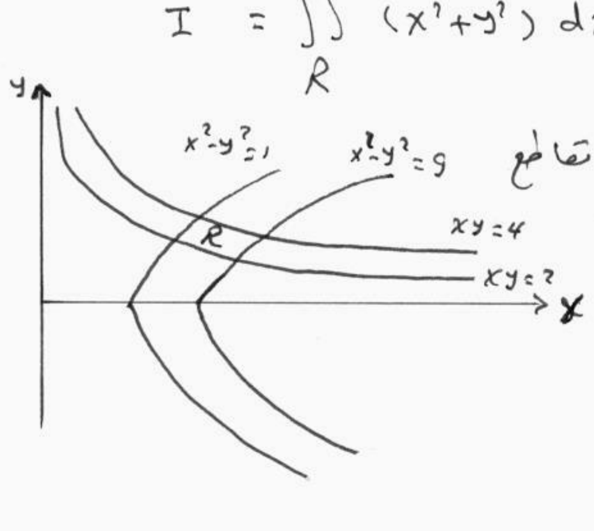
$$\because \quad x^2 - y^2 = u \,, \quad 2xy = v$$

$$\therefore \quad (x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = u^2 + v^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}} .$$

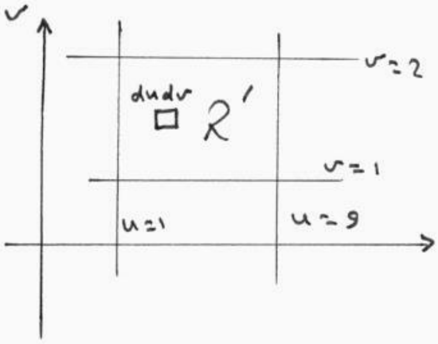
ثانياً : عزم القصور الذاتي القطبي المطلوب هو

$$I = \iint_R (x^2+y^2)\, dx\, dy$$



حيث R هي المنطقة الناتجة من تقاطع القطاعات الزائدية $xy = 2 , xy = 4$ ، $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$ كما بالشكل المقابل .

باستخدام التحويلات $x^2-y^2=u$, $2xy=v$ نجد أن



$$I=\iint_{R'} (x^2+y^2)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

حيث R' هي صورة المنطقة R تحت التحويلات المستخدم وهي ناتجة من تقاطع المستقيمات

$u=1,\ u=9\ ,\ v=4,\ v=8$

كما بالشكل المقابل .

من أولاً نجد أن

$$\therefore\quad I=\int_4^8\int_1^9 \sqrt{u^2+v^2}\ \frac{du\,dv}{4\sqrt{u^2+v^2}}=1/4\int_4^8\int_1^9 du\,dv=8.$$

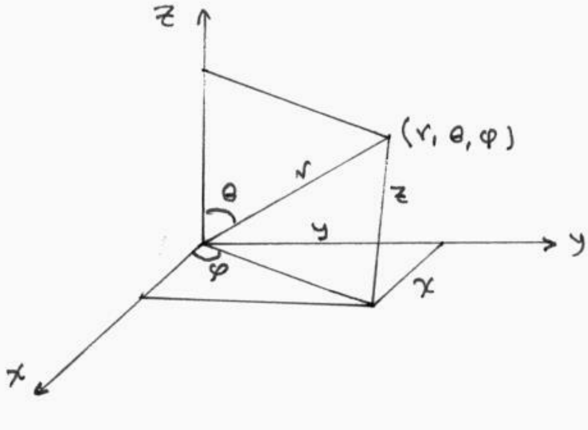
حساب عنصر المساحة والحجم بالإحداثيات القطبية :-

(i) إذا كانت $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ فإن

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=r\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]=r$$

∴ عنصر المساحة $dx\,dy$ يتحول إلى $r\,dr\,d\theta$



(ii) إذا كانت

$x=r\sin\theta\cos\varphi$

$y=r\sin\theta\sin\varphi$

$z=r\cos\theta$

فإن

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

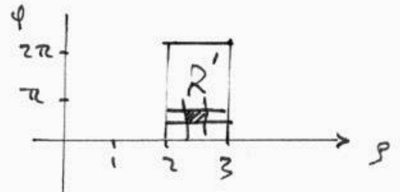
$$= r^2\sin\theta$$

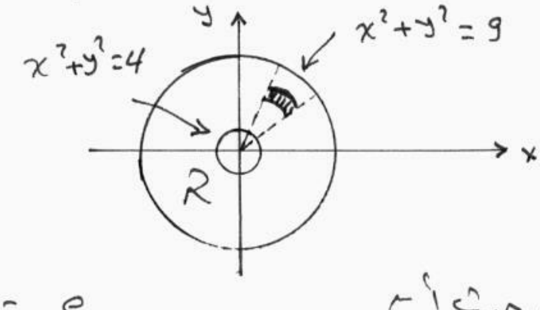
∴ عنصر الحجم $dx\,dy\,dz$ من الإحداثيات الكارتيزية يتحول إلى عنصر الحجم $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ من الإحداثيات القطبية.

مثال (٨):- أوجد قيمة $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ حيث R هي المنطقة من المستوى xy المحدودة بالمنحنيين $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$.

الحل:-

وجود المقدار x^2+y^2 يجعلنا نقترح استعمال الإحداثيات (ρ,φ) حيث $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. تحت تأثير هذا التحويل تتحول المنطقة الحلقية R (كما بالشكل (1)) إلى المنطقة المستطيلة R' (من الشكل (2))





وحيث أن $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \rho$ فإن

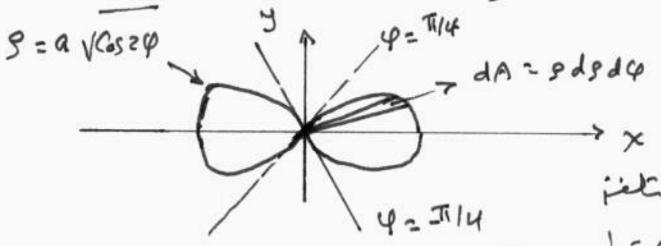
$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{R'} \rho^2\,d\rho\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=2}^{3} \rho^2\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=2}^{3} d\varphi = \frac{38\pi}{3} .$$

مثال (٩) :- أوجد مساحة المنطقة المحدودة في المستوى xy بالمنحنى ذي العروتين

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

الحل :-



هذا المنحنى معطى بالإحداثيات القطبية (ρ, φ) بتخصيص قيم مختلفة لمقدار φ وإيجاد القيم المناظرة لمقدار ρ نحصل على الشكل التخطيطي المبين بالشكل المقابل.

المساحة المطلوبة S تساوي أربعة أمثال المساحة المحصورة تحت المنحنى $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ في الربع الأول $(x>0,\ y>0)$. ومن هندسة الشكل نجد أن

$$S = 4\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi$$

$$= a^2 \sin 2\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\pi/4} = a^2 .$$

أمثلة متنوعة

(١) أوجد الحجم تحت السطح $z = 3x^2y + 2xy^2$ فوق المنطقة المستوية

$$0 \le x \le 3 ,\quad 1 \le y \le 2$$

الحل :- الحجم الناشئ تحت السطح $z = 3x^2y + 2xy^2$ فوق المنطقة R المعرفة بـ

$$0 \le x \le 3 ,\quad 1 \le y \le 2$$

هو

$$V = \iint_R (3x^2y + 2xy^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \int_0^3 (3x^2y + 2xy^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 (27y + 9y^2)\, dy = \frac{123}{2} .$$

(٥) احسب قيمة $\iint_R \frac{dx\,dy}{x+y+1}$ على المربع R حيث

$$R := \{(x,y)\ ;\ 0 \le x \le 2\ ,\ 0 \le y \le 2\}$$

الحل :-

$$I := \iint_R \frac{dx\,dy}{x+y+1} = \int_0^2\int_0^2 \frac{dx\,dy}{x+y+1} = \int_0^2 \ln(x+y+1)\Big|_{x=0}^{2} dy$$

$$= \int_0^2 [\ln(y+3) - \ln(y+1)]\,dy$$

باستخدام التكامل بالتجزيء نحصل على

$$I = 5\ln 5 - 6\ln 3 .$$

(٦) احسب قيمة

$$\int_1^3\int_0^2 x\,e^{xy}\,dx\,dy$$

الحل :- إذا اجرينا التكامل أولا بالنسبة إلى x فإننا يجب أن نستخدم التكامل بالتجزيء. وبعد ذلك نكامل الناتج بالنسبة إلى y. ولأن الدالة المكاملة دالة متصلة في المنطقة: $0 \le x \le 2\ ,\ 1 \le y \le 3$ فإننا يمكننا تبديل ترتيب التكامل بسهولة.

$$\therefore \int_1^3\int_0^2 x\,e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^2\int_1^3 x\,e^{xy}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 e^{xy}\Big|_{y=1}^{3} dx = \int_0^2 (e^{3x} - e^{x})\,dx$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{3} - e^{x}\right)\Big|_{x=0}^{2} = \frac{e^6}{3} - e^2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{e^6 + 2}{3} - e^2 .$$

قاعدة :- نفرض أن $F(x,y) = f(x)g(y)$ حيث $f(x), g(y)$ دالتان متصلتان على الفترات $[a,b], [c,d]$ على الترتيب فإن

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x)\,g(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_c^d g(y)\,dy \,.$$

(٤) لمنطقة المستطيلة R : $c \leq y \leq d$, $a \leq x \leq b$ أوجد

$$\iint_R x^2 y^3\,dx\,dy$$

الحل:

$$\iint_R x^2 y^2\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b x^2 y^3\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b x^2\,dx \int_c^d y^3\,dy$$

$$= \frac{1}{12}\,(b^3 - a^3)(d^4 - c^4)$$

(٥) أوجد كتلة المستطيل R المحدود بمحاور الاحداثيات والخطوط $x = 2$, $y = 3$ إذا كانت كثافة وحدة المساحات تتناسب مع مجموع الابعاد عن محاور الاحداثيات .

الحل: . الكثافة σ تعطى بالدالة $\sigma = k\,(x+y)$

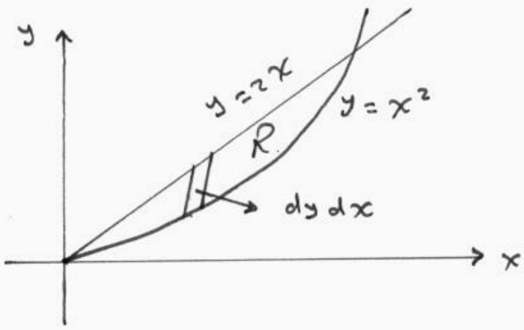
حيث k ثابت التناسب . عندئذ تكون الكتلة المطلوبة M هي

$$M = \iint_R k\,(x+y)\,dx\,dy = k\int_0^3 \int_0^2 (x+y)\,dx\,dy$$

$$= 15\,k \,.$$

(٦) أحسب قيمة التكامل المزدوج

$$\int_0^2 \int_{y=x^2}^{2x} 3x^2 y\,dy\,dx$$

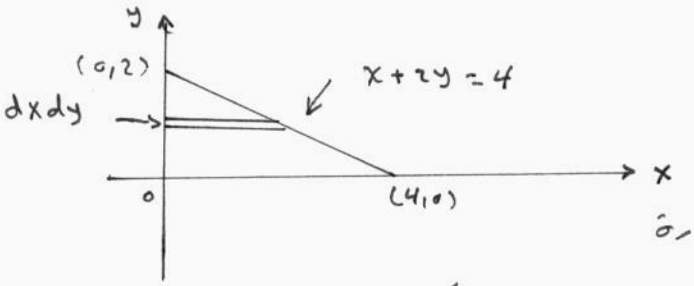


الحل :-

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x} 3x^2 y\,dy\,dx = \frac{384}{35}.$$

(٧) أوجد حجم المنطقة الفراغية التي تقع تحت السطح $z = x^2+y$ والموضوعة فوق المنطقة المثلثة في الربع الأول من المستوى xy المحدودة بالخط $x+2y=4$ ومحوري الإحداثيات ox, oy .

الحل :-



شكل (٩)

المنطقة R من المستوى xy

كما هو مبين بالشكل المقابل (٩)

ونأخذ عنصر المساحة الأفقي مقداره

$$dA = dx\,dy$$

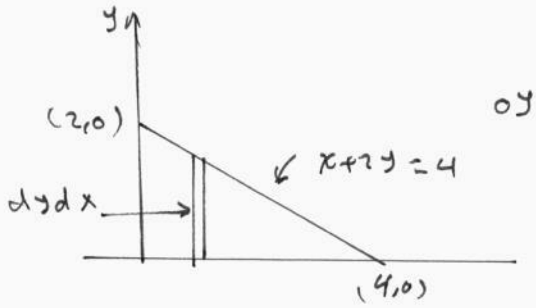
فيكون الحجم المطلوب V هو

$$V = \int_0^2\int_0^{4-2y} (y+x^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy\right)\Bigg|_0^{4-2y} dy$$

$$= \int_0^2 \left\{ \frac{(4-2y)^3}{3} + 4y - 2y^2 \right\} dy$$

$$= \left[\frac{4-2y}{-24} + 2y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{40}{3}$$ وحدة مكعبة



شكل (ط)

كما يمكن أن نأخذ عنصر الحجم موازياً للمحور oy

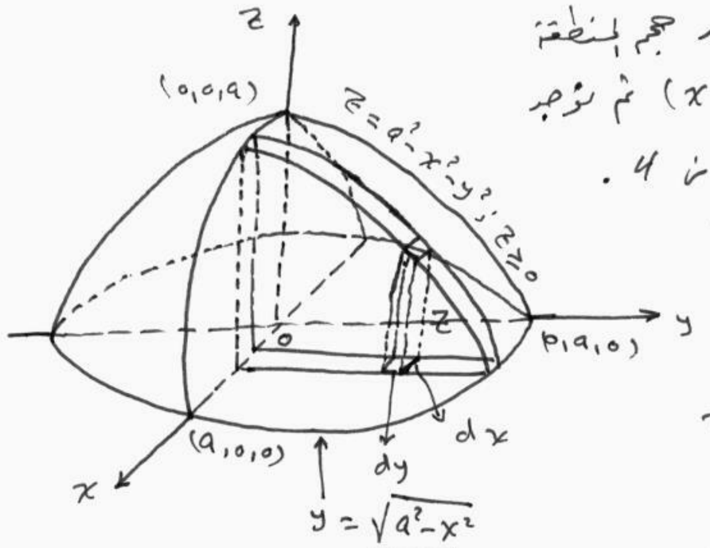
فيكون

$$V = \int_0^4\int_0^{\frac{4-x}{2}} (x^2+y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{40}{3}$$ وحدة مكعبة

مثال (٨) :- أوجد الحجم المحصور بين الجسم الدوراني المكافئ $z = a^2 - x^2 - y^2 \,;\, z \geq 0$ والمستوى xy (كما بالشكل التالي)

الحل :-



من التماثل يمكن أن نوجد حجم المنطقة من الربع الأول $(x>0, y>0)$ ثم نوجد الحجم المطلوب بضرب الناتج في 4 .
التقاطع بين المستوى xy والسطح $z = a^2 - x^2 - y^2$ يكون مع طول الدائرة
$z = 0, \; x^2 + y^2 = a^2$
∴ الحجم V المطلوب هو

$$V = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} z \, dy\, dx = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^a \left[(a^2 - x^2) y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2}\, dx$$

بوضع $x = a\sin\theta$ ينتج أن

$$V = \frac{8a^4}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} a^4$$ وحدة مكعبة

مثال (٩) :- أوجد المساحة A المحصورة بالمنحنيين
$y = 6 - x^2 \quad , \quad 2x - y - 2 = 0$

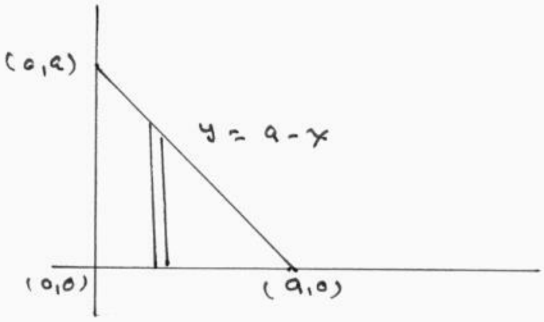
الحل :- المنحنيين يتقاطعان عندما

$$6 - x^2 = 2x - 2$$

∴ نقط تقاطع المنحنيين هي $(2,2) \; , \; (-4,-10)$

$$\therefore \; A = \int_{-4}^{2} \int_{2x-2}^{6-x^2} dy\, dx = \int_{-4}^{2} [(6 - x^2) - (2x - 2)]\, dx = 36$$

(10) صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين. طول ضلعيه المتساويين a ورؤوسه $(0,0)$ ، $(a,0)$ ، $(0,a)$. إذا كانت كثافة وحدة المساحات ρ تتعين من العلاقة $\rho = \rho_0 xy$ حيث ρ_0 مقدار ثابت.
أوجد مركز الكتلة للصفيحة.



الحل: -
كتلة الصفيحة M تتعين من

$$M = \iint_R \rho_0 \, x y \, dA$$

$$= \rho_0 \int_0^a \int_0^{a-x} x y \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{24} \rho_0 a^4$$

لزم العزوم الذاتية للصفيحة حول محوري الإحداثيات يتعين من العلاقتين

$$M_x = \iint_R y \cdot \rho_0 x y \, dA = \rho_0 \int_0^a \int_0^{a-x} x y^2 \, dy \, dx = \frac{\rho a^5}{60}$$

بالمثل

$$M_y = \frac{\rho a^5}{60}$$

$\therefore$ مركز الكتلة للصفيحة هو $(\bar{x}, \bar{y})$ حيث

$$\bar{x} = \frac{M}{M} = \frac{2a}{5} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2a}{5} .$$

(11) أوجد مركز ثقل صفيحة لنصف دائرة الشكل تشغل المنطقة المستوية $x^2 + y^2 \le a^2 \; ; \; y \ge 0$. إذا كانت كثافة وحدة المساحات تعطى

$$\rho(x,y) = \frac{1}{a} \rho_0 |x| \; ; \; \rho_0 = \text{real Const.}$$

الحل: - من تماثل الشكل حول محور y فإن $\bar{x} = 0$ ، ثم كتلة الصفيحة M تعطى ب

$$M = \frac{1}{a}\rho_0 \iint_R |x|\, dA = \frac{2\rho_0}{a}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} r^2 \cos\theta \, dr\, d\theta$$

$$= \frac{2\rho_0}{a}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^{a} r^2\, dr\right) = \frac{2}{3}a^2\rho_0 .$$

لعزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور x يكون

$$M_x = \frac{1}{a}\rho_0 \iint_R y\,|x|\, dA$$

$$= \frac{1}{a}\rho_0 \int_0^{\pi/4}\int_0^{a} r^3 \sin 2\theta \, dr\, d\theta = \frac{1}{4}a^3\rho_0$$

ونظراً للتماثل حول محور y فإن عزم القصور الذاتي حول محور التماثل y

$$M_y = 0$$

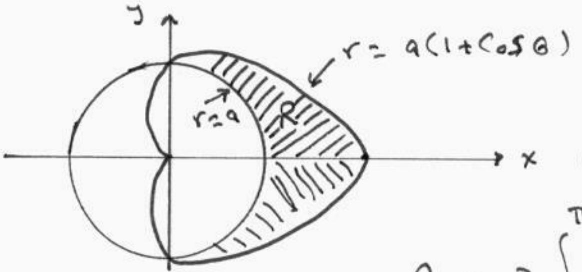
∴ مركز الثقل هو $(\bar{x}, \bar{y})$ حيث

$$\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{y} = M_x / M = \frac{3}{8}a .$$

(١٢) أوجد المساحة المحصورة خارج الدائرة $r = a$ وداخل منحنى الكارديويد

$$r = a(1+\cos\theta) \quad ; \quad a > 0$$

الحل :-



بسبب التماثل حول المحور القطبي ($\theta = 0$)

فإن المساحة A المطلوبة تعطى من

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\int_a^{a(1+\cos\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[a^2\left((1+\cos\theta)^2 - 1\right)\right] d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\left[2\cos\theta + \cos^2\theta\right] d\theta$$

$$= a^2\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$$ وحدة مربعة.

(١٣) احسب قيمة التكامل التالي

$$I = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

حيث R هي الدائرة $x^2+y^2=a^2$.

الحل :- مثل هذا التكامل لا يمكن حسابه باستخدام الاحداثيات الكرتيزية

لذا لابد من التحويل إلى الاحداثيات القطبية :

$$x = r\cos\theta \,,\quad y = r\sin\theta$$

$\therefore$ R تعرف بالمعادلة $r = a$

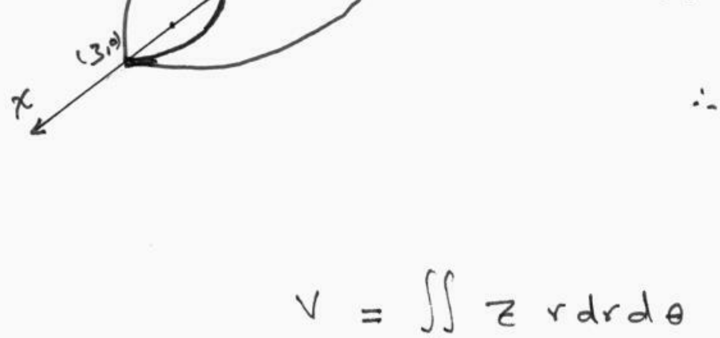
$$\therefore\ I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{a} r e^{-r^2} dr\right)$$

$$= \pi\left(1 - e^{-a^2}\right).$$

(١٤) أوجد الحجم المقطوع من النصف العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=9$

بالاسطوانة $x^2+y^2-3x=0$.



الحل :- معادلة الكرة في الاحداثيات

الاسطوانية (r,θ,z) هي

$$r^2+z^2=9$$

ومعادلة مقطع الاسطوانة هي

$$r^2-3r\cos\theta=0$$

$$\therefore\quad r = 3\cos\theta$$

$\therefore$ الحجم المطلوب V هو

$$V = \iint_R z\, r\, dr\, d\theta$$

حيث R هو مقطع الاسطوانة في المستوى xy والمعرفة بـ : $r = 3\cos\theta$

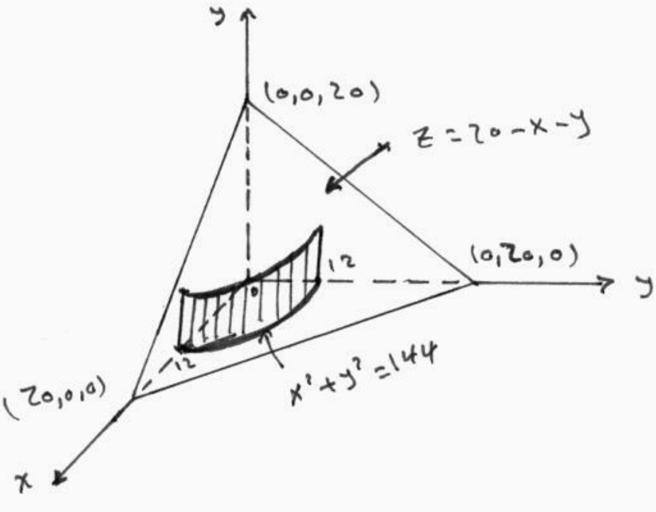
$$\therefore\ V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{3\cos\theta}(9-r^2)^{1/2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3}(9-r^2)^{3/2}\Big|_0^{3\cos\theta}\,d\theta$$

$$= -18\int_0^{\pi/2}(\sin^3\theta-1)\,d\theta = 3(3\pi-4).$$

(١٥) أوجد حجم الجسم الذي يقع في الربع الأول والمحدود بالمستويين $z = 20-x-y$ ، $z=0$ وبالأسطوانة $x^2+y^2=144$

الحل :.



الحجم المطلوب هو

$$V = \int_0^{12}\int_0^{\sqrt{144-x^2}}\int_0^{20-x-y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{12}\int_0^{\sqrt{144-x^2}}(20-x-y)\,dy\,dx$$

$$= 1110$$ وحدة مكعبة .

تمارين

(١) احسب قيم التكاملات المكررة التالية

(i) $\displaystyle\int_{x=0}^{a}\int_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} y\,dy\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}\int_0^{r\cos\theta}(r+z)\,dz\,dr\,d\theta$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$ (iv) $\displaystyle\int_0^{4}\int_{y^2/4}^{4}\int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx\,dz\,dy$

(v) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}(x\sin y - y\cos x)\,dx\,dy$ (vi) $\displaystyle\int_0^{1}\int_x^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)^{-1/2}\,dy\,dx.$

(vii) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} dz\, dx$ (viii) $\int_0^2 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx\, dy$

(٢). أوجد قيمة التكامل المزدوج $\iint_R y\, dA$ المأخوذ على المنطقة R المحدودة بالمستقيمين $x+y=2a$, $x=0$ والقطع المكافئ $x^2=ay$ الموجودة في الربع الأول.

(٣). منشور ثلاثي محدود بالمستويات $x=0,\ y=0,\ x+y=0$

أوجد حجم جزء المنشور المحصور بين المستوى $z=0$ والسطح $z=b+xy$

(٤). أوجد حجم المنطقة المحدودة بالمستويات الآتية

$$z=x+y\ ,\ z=6\ ,\ x=0,\ y=0,\ z=0$$

(٥). بفرض أن

$$I=\int_{y=0}^{3}\int_{x=1}^{\sqrt{4-y}}(x+y)\,dx\,dy$$

(i) بدل رتبة التكامل (ii) احسب قيمة التكامل المزدوج I .

(٦). اثبت أن

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx+\int_{x=2}^{4}\int_{y=\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}.$$

(٧). احسب قيم التكاملات الآتية

(i) $$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xyz\,dz\,dy\,dx$$

(ii) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} e^{-x^2}xy\,dx\,dy\,dz .$$

(٨). أوجد قيمة التكامل الثلاثي $\iiint z\,d\tau$ حيث V هو الحيز الموجود في الثمن الموجب والمحدود بالمستويات $y=0,\ z=0$

$x+y=2,\ x+2y=6$ والاسطوانة $y^2+z^2=4$

(9) أوجد حجم المنطقة المحدودة من أعلى بالكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$ ومن أسفل بالمخروط $z^2\sin^2\alpha=(x^2+y^2)\cos^2\alpha$ حيث a مقدار ثابت، $0<\alpha<\pi$. ثم استخدم النتائج لإيجاد حجم الكرة التي نصف قطرها a.

(10) - أوجد قيمة $\iint_R (x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy$ حيث R هي المنطقة $x^2+y^2\le a^2$.

(11) - إذا كانت R هي المنطقة في المسألة (10) أوجد قيمة $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

(12) - باستخدام التحويل $xy=v$, $x+y=u$ وضح أن

$$\int_0^1\int_0^{1-x} e^{y/(x+y)}\,dy\,dx=\frac{e-1}{2}$$

(13) - أوجد المساحة للمنطقة المحدودة بالمنحنيات

$xy=4$, $xy=8$, $xy^3=5$, $xy^3=15$

(14) - أوجد قيمة التكامل المزدوج $\iint_R xy\,dx\,dy$ حيث R هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y^2=x$, $y^2=2x$, $x^2=3y$, $x^2=4y$

(15) - أوجد الكتلة ومركز الثقل لصفيحة دائرية نصف قطرها a إذا كانت الكثافة السطحية عند أي نقطة فيها تتناسب مع مربع بعد هذه النقطة عن نقطة معينة على المحيط.

(16) - إذا اخترقت الاسطوانة $x^2+y^2=ax$ الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$ أوجد الحجم المحصور بين السطحين.

(17) ابدل x, y بمتغيرات أخرى مناسبة ثم احسب قيمة التكامل

$$\int_{x=0}^{a}\int_{y=\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

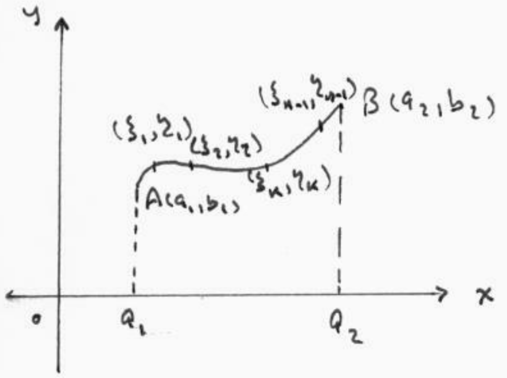
(18) - أوجد المساحة التي تقع داخل الدائرة $r=2a\cos\theta$ وخارج الدائرة $r=a$.

الباب الثاني

التكاملات الخطية و التكاملات السطحية

نظريات التكامل

التكاملات الخطية :-



نفرض أن C هو منحنى في المستوى xy يربط بين النقطتين $A(a_1,b_1)$, $B(a_2,b_2)$ كما بالشكل المقابل.

نفرض أن $P(x,y)$, $Q(x,y)$ دالتان وحيدتا القيمة لجميع النقط (x,y) على المنحنى C.

نقسم المنحنى C إلى n من الأقواس الجزئية باختيار $(n-1)$ من النقط عليه هي $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_{n-1},y_{n-1})$. نسمي

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} , \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1} ; \quad k=1,2,\dots,n$$

$$(x_0,y_0) = (a_1,b_1) , \quad (x_n,y_n) = (a_2,b_2)$$

ولنفرض أن (ξ_k,η_k) نقطة تتوسط المنحنى بين النقطتين (x_{k-1},y_{k-1}) , (x_k,y_k) على المنحنى C. نكون المجموع

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k \right\} \qquad (1)$$

نهاية هذا المجموع عندما $n \to \infty$ بحيث أن $\Delta x_k \to 0, \Delta y_k \to 0$ عندئذ. إذا وجدت تسمى التكامل الخطي على طول المنحنى C ويشار إليه

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P\,dx + Q\,dy \quad \text{or} \quad \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (2)$$

نهاية المجموع (1) توجد إذا كانت P , Q دوال متصلة لجميع نقط المنحنى C. قيمة التكامل الخطي (2) تعتمد بصفة عامة على الدالتين P, Q

والمنحنى C وأيضاً على النقطتين (a_1, b_1) , (a_2, b_2) .
بطريقة مشابهة تماماً نعرف التكامل الخطي على طول المنحنى C في الفراغ ذي الثلاث الأبعاد :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \{ A_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k + A_2(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k + A_3(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k \}$$

$$= \int_C A_1(x,y,z)\, dx + A_2(x,y,z)\, dy + A_3(x,y,z)\, dz \qquad .(3).$$

حيث A_1 , A_2 , A_3 هي دوال متصلة على طول المنحنى C لمقادير x, y, z .

نموذج آخر من التكاملات الخطية تعتمد على المنحنيات الخاصة في تحليل تعريفه
مثلاً : إذا كانت Δs_k تشير إلى طول القوس على منحنى C في الشكل السابق بين النقطتين (x_{k-1}, y_{k-1}) , (x_k, y_k) فإن

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \int_C u(x,y)\, ds \qquad (4)$$

تسمى التكامل الخطي للدالة $u(x,y)$ على طول المنحنى C .
ويسري ذلك لثلاث أبعاد (أو أكثر) .

مثال (1) : أوجد قيمة التكامل الخطي $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)\, dx + (y^2 + x)\, dy$ على طول

(أ) الخط المستقيم من النقطة $(0,1)$ إلى النقطة $(1,2)$.
(أأ) خط مستقيم من $(0,1)$ إلى $(1,1)$ وبعد ذلك من $(1,1)$ إلى $(1,2)$.
(أأأ) القطع المكافئ $x = t , y = t^2 + 1$

الحل :- (أ) معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(0,1)$, $(1,2)$ هي

$$y = x + 1$$

$$\therefore \quad dy = dx$$

$$\therefore \int_{x=0}^{1} \left\{ \left(x^2 - (x+1) \right) dx + \left((x+1)^2 + x \right) dx \right\}$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[2x^2 + 2x \right] dx = 5/3 .$$

(ii) على طول الخط المستقيم من (0,1) إلى (1,1) يكون $y=1$, $dy=0$

∴ التكامل الخطي يساوي

$$\int_{x=0}^{1} (x^2-1)\,dx + (1+x).0 = \int_0^1 (x^2-1)\,dx = -2/3$$

وعلى طول الخط المستقيم من (1,1) إلى (1,2) يكون $x=1$, $dx=0$

$$\therefore \int_{y=1}^{2} (1-y).0 + (y^2+1)\,dy = \int_1^2 (y^2+1)\,dy = 10/3$$

∴ القيمة المطلوبة هي

$$-2/3 + 10/3 = 8/3$$

(iii) واضح أن $t=0$ عند النقطة (0,1) ، $t=1$ عند النقطة (1,2)

∴ التكامل الخطي يساوي

$$\int_{t=0}^{1} \left\{ \left(t^2 - (t^2+1)\right) dt + \left((t^2+1)^2 + 1 \right) . 2t\,dt \right\}$$

$$= \int_{t=0}^{1} \left(2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1 \right) dt = 2 .$$

من المناسب بعض الأحيان أن نعبر عن التكامل الخطي على صورة متجه للمساعدة من الفهم الفيزيائي أو الهندسي وأيضاً كاختصار ، فالدالة مثلاً يمكن التعبير عن التكامل الخطي (3) في الصورة :

$$\int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \int_C (A_1 i + A_2 j + A_3 k) . (dx\, i + dy\, j + dz\, k)$$

$$= \int_C A . dr$$

حيث $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$, $dr = dx\, i + dy\, j + dz\, k$.

التكامل الخطي (2) هو حالة خاصة لمعادلة $z = 0$.

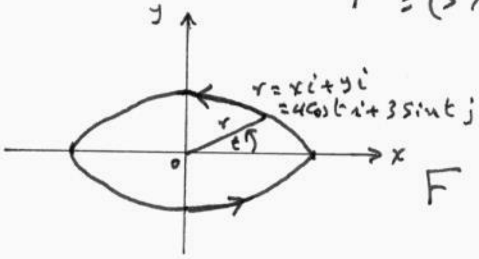
إذا كانت عند كل نقطة (x, y, z) تراصف قوة F تؤثر على جسم (إذا كان مجال القوة معرف) فإن التكامل

$$\int_C F \cdot dr$$

يمثل فيزيائياً الشغل الكلي المبذول بالقوة F لتحريك الجسم على طول المنحنى C .

مثال (٢): - أوجد الشغل المبذول لتحريك جسيم مرة واحدة حول قطع ناقص C في المستوي xy إذا كان مركز القطع هو نقطة الأصل ونصف قطره الأكبر 4 والأصغر 3 وذلك بواسطة قوة مجال معطى بالعلاقة

$$F = (3x-4y+2z)i + (4x+2y-3z^2)j + (2xz-4y^2+z^3)k$$



الحل: -

في المستوي $z = 0$ تعطى القوة بالصورة

$$F = (3x-4y)i + (4x+2y)j - 4y^2 k$$

و $dr = dx\, i + dy\, j$

∴ الشغل المبذول هو

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C \{(3x-4y)i + (4x+2y)j - 4y^2 k\} \cdot (dx\, i + dy\, j)$$

$$= \oint_C (3x-4y)\,dx + (4x+2y)\,dy$$

نختار المعادلات البارامترية للقطع الناقص هي $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$ حيث $0 < t < 2\pi$.

∴ الشغل المبذول هو

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{t=0}^{2\pi} \{3(4\cos t) - 4(3\sin t)\}\{-4\sin t\}\,dt + \{4(4\cos t) + 2(3\sin t)\}\{3\cos t\}\,dt$$

$$= 96\pi .$$

من اختيار المنحنى C اخترنا اتجاهاً ضد عقارب الساعة كما هو موضح بالشكل السابق. يسمى هذا الاتجاه بالاتجاه الموجب. إذا كانت C عكس اتجاه عقارب الساعة (الاتجاه السالب) فقيمة التكامل ستكون -96π.

مثال (٢):- أوجد قيمة $\int_C y\,ds$ على طول المنحنى C المعطى بالصورة $y=2\sqrt{x}$ من $x=3$ إلى $x=24$.

الحل: نعلم أن

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\because\ y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore\ ds=\sqrt{1+1/x}\,dx$$

$$\therefore \int_C y\,ds=\int_3^{24} 2\sqrt{x}\,\sqrt{1+1/x}\,dx=2\int_3^{24}\sqrt{x+1}\,dx$$

$$=156.$$

حساب التكاملات الخطية :-

إذا كانت الدالة للمنحنى C في المستوى xy معطاة بالصورة $y=f(x)$ فإن التكامل الخطي (٦) يقيم بوضع $y=f(x)$, $dy=f'(x)dx$ في التكامل (٦) للحصول على التكامل المحدد

$$\int_{a_1}^{a_2} P[x,f(x)]\,dx+Q[x,f(x)]\,f'(x)\,dx \qquad (7)$$

الذي حينئذ يحسب بالطريقة العادية.

بالمثل إذا كانت C معطاة على الصورة $x=g(y)$ فإن $dx=g'(y)\,dy$ والتكامل الخطي يصبح:

$$\int_{b_1}^{b_2} P[g(y),y]\,g'(y)\,dy+Q[g(y),y]\,dy \qquad (8)$$

إذا كانت معادلات المنحنى C في الصورة البارامترية:

$$y=\psi(t)\ ,\quad x=\phi(t)$$

فإن التكامل الخطي يصبح

$$\int_{t_1}^{t_2} P[\phi(t),\psi(t)]\,\phi'(t)\,dt + Q[\phi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt \qquad (9)$$

حيث t_1 , t_2 يشير إلى قيم t المناظرة للنقطتين A, B على الترتيب.
جميع الطرق السابقة يمكن تعميمها لحساب تكاملات خطية على طول منحنيات فراغية.

خواص التكاملات الخطية :

التكاملات الخطية لها خواص مناظرة لخواص التكاملات العادية. مثال ذلك

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy \qquad (1)$$

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{(a_2,b_2)}^{(a_1,b_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (2)$$

لذا عكس مسار التكامل يغير إشارة التكامل الخطي.

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(a_1,b_1)}^{(\alpha,\beta)} P\,dx + Q\,dy + \int_{(\alpha,\beta)}^{(a_2,b_2)} P\,dx + Q\,dy \qquad (3)$$

حيث (α,β) نقطة على المنحنى بحيث $b_1 < \beta < b_2$, $a_1 < \alpha < a_2$.
خواص مشابهة تصلح للتكامل الخطي في الفراغ.

المنحنيات المقفلة البسيطة. المناطق المتصلة المتعددة والبسيطة الترابط.

المنحنى المقفل البسيط هو المنحنى المقفول الذي لا يقطع نفسه في أي مكان منه. رياضياً المنحنى C في المستوى xy المعرف بالمعادلات

$$x = \phi(t)\ ,\ y = \psi(t)\ ;\quad t_1 \le t \le t_2$$

حيث ψ , ϕ دوال متصلة ووحيدة القيمة في الفترة $t_1 \le t \le t_2$.
إذا كانت $\phi(t_1)=\phi(t_2)$ و $\psi(t_1)=\psi(t_2)$ فإنه يقال أن المنحنى مقفل.
إذا كانت $\phi(u)=\phi(v)$ و $\psi(u)=\psi(v)$ فقط عندما $u=v$
(ما عدا الحالة الخاصة عند $u=t_1 , v=t_2$) فإننا نقول أن المنحنى مقفل وبسيط
أو مقفل ولا يقطع نفسه.

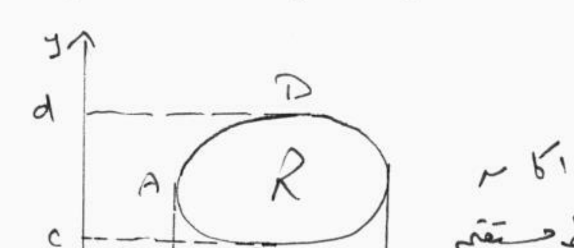
عندما تتغير t من t_1 إلى t_2 فإن منحنى المستوى يرسم في اتجاه معين. للمنحنيات في المستوى xy نضع اختيارياً هذا الاتجاه كموجب أو سالب طبقاً لحركة شخص يقطع المنحنى في هذا الاتجاه وبحيث تقع المنطقة المغلقة بهذا المنحنى على يساره أو يمينه على الترتيب.

نظرية جرين في المستوى

إذا فرضنا أن $P , Q , \frac{\partial P}{\partial y} , \frac{\partial Q}{\partial x}$ دوال متصلة ووحيدة القيمة في منطقة متصلة ببساطة R محدودة بالمنحنى المقفل البسيط C فإن

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad (15)$$

حيث $\oint_C$ تستخدم للتأكد أن المنحنى C مقفل وأيضاً مرسوم في الاتجاه الموجب.



البرهان :

البرهنة نظرية جرين في المستوى إذا كان C منحنى مقفل له خاصية أن أي خط مستقيم يوازي المحور ox أو المحور oy يقطع المنحنى على الأكثر في نقطتين.

نفرض معادلات المنحنيين ADB, ACB (انظر الشكل المقابل) هما
$$y = y_2(x) , \quad y = y_1(x)$$
على الترتيب إذا كانت R هي المنطقة المحدودة بالمنحنى C يكون
$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]\, dx$$

$$= - \int_{x=a}^{b} P(x, y_1(x))\, dx - \int_{b}^{a} P(x, y_2(x))\, dx$$

$$= - \oint_C P(x,y)\, dx$$

أي أن

$$\oint_C P\, dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \qquad (*)$$

بالمثل نفرض أن معادلة المنحنيين CBD, CAD هما بالترتيب:

$$x = x_2(y) \;, \quad x = x_1(y)$$

$$\therefore \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d} \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

$$= \int_c^d [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]\, dy$$

لأن منحنى CAD في الاتجاه السالب

$$= \int_d^c Q(x_1, y)\, dy + \int_c^d Q(x_2, y)\, dy$$

$$= \oint_C Q(x,y)\, dy$$

إذن

$$\oint_C Q(x,y)\, dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy \qquad (**)$$

من (*) و (**) نجد أن

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy = - \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx\, dy$$

مثال (٥) :- وضح أن المساحة المحدودة بالمنحنى المقفل البسيط C تعطى بالعلاقة

$$\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

الحل :- من نظرية جرين نضع $P = -y$ ، $Q = x$ نجد أن

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dx\,dy$$

$$= 2\iint_R dx\,dy = 2A$$

حيث A هي المساحة المطلوبة

$$\therefore A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx .$$

الشرط الضروري والكافي لتكامل الخطي أن يكون مستقلاً عن المسار :-

---

نظرية (١) :-

الشرط الضروري والكافي للمقدار $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ أن يكون مستقلاً عن المسار C الواصل بين أي نقطتين معطيتين في المنطقة R هو أن في المنطقة R يكون

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (11)$$

حيث من المفترض أن المشتقات الجزئية Q_x ، P_y تكون متصلة في المنطقة R .

الشرط (11) هو أيضاً الشرط الكافي للمقدار $P\,dx + Q\,dy$ أن يكون تفاضلة تامة لدالة $\varphi(x,y)$ أي أن $d\varphi = P\,dx + Q\,dy$ من هذه الحالة إذا كانت النقط الرئيسية للمنحنى C هي (x_2,y_2) و (x_1,y_1) فإن قيمة التكامل الخطي تعطى بالعلاقة

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\varphi$$

$$= \varphi(x_2,y_2) - \varphi(x_1,y_1) \qquad (12)$$

بوجه خاص إذا كانت (11) صحيحة و C كان المنحنى مقفلاً أي أن $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ فإن

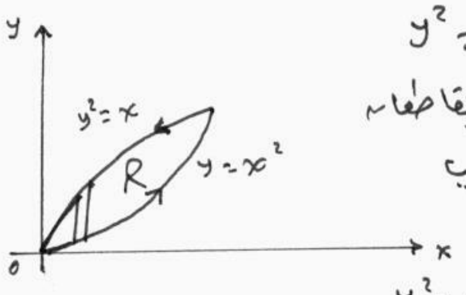
$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

مثال (٤): - حقق نظرية جرين في المستوى للمقدار

$$I = \oint_C (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

حيث C منحنى مقفل بسيط يحد المنطقة المحدودة بالمنحنيين

$$y^2 = x \quad , \quad y = x^2$$



الحل: - المنحنيين السابقين (في مستوى واحد) يتقاطعان في النقطتين (0,0) ، (1,1). بالاتجاه الموجب لاجتياز المنحنى C (انظر الشكل المقابل) يكون على طول المنحنى $y = x^2$ ثم على طول المنحنى $x = y^2$.

على طول المنحنى $y = x^2$ يكون

$$I_1 = \int_0^1 (2x^3 - x^2)\,dx + (x + x^4).2x\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx = 7/6$$

على طول المنحنى $x = y^2$ يكون

$$I_2 = \int_{y=1}^{0} [2y^3 - y^4]\,2y\,dy + (2y)^3 dy$$

$$= -\int_0^1 (4y^4 - 2y^5 + 2y^7)\,dy = -17/15$$

إذن التكامل الخطي المطلوب

$$I = I_1 + I_2 = 1/30$$

من ناحية أخرى

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R (1-2x)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy\,dx$$

$$= 1/30$$

وبذلك تكون نظرية جرين متحققة.

برهان النظرية (١) :

نفرض أن $P(x,y)$, $Q(x,y)$ دالتان متصلتان ولهما مشتقات جزئية متصلة عند كل نقطة من المنطقة البسيطة الترابط R المحدودة بالمنحنى C .

الكفاية

= نفرض أن $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ فإنه من نظرية جرين

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

الضرورية

= نفرض أن $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ حول كل مسار مقفل C في المنطقة R وبحيث أن $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ عند نقطة ما في R يوجد فإننا سنفترض أن $P_y - Q_x > 0$ عند النقطة (x_0,y_0) .

من الفرض بأن P_y , Q_x دوال متصلة في المنطقة R بحيث أنه يوجد منطقة ما R_1 تحتوي النقطة (x_0,y_0) كنقطة داخلية حيث $P_y - Q_x > 0$.

إذا كانت Γ هي حدود المنطقة R_1 فإنه من نظرية جرين يكون

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{R_1} (Q_x - P_y)\,dx\,dy > 0$$

تخالف الفرض بأن $\oint P\,dx + Q\,dy = 0$ لكل المنحنيات المقفلة في المنطقة R أي أن $Q_x - P_y$ لا يمكن أن يكون سالب .

بالمثل يمكن إثبات أن $Q_x - P_y$ لا يمكن أن يكون موجب .

$$\therefore \quad P_y = Q_x .$$

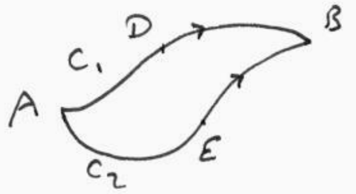
نتيجة :-

= بفرض أن Q , P معرفة كما في نظرية (١) فإن الشرط الضروري والكافي للمقدار $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ مستقل عن المسار في المنطقة R الواصل بين النقطتين A, B هو $P_y = Q_x$ تطابقياً في R .

البرهان :-

(١) الكفاية :-

إذا كانت $P_y = Q_x$



كما في البرهان بين

$$I = \int_{ADBEA} P\,dx + Q\,dy = 0$$

انظر الشكل المقابل

$$\because \int_{ADB} = -\int_{BEA} = \int_{AEB}$$

$$\therefore I = \int_{ADB} P\,dx + Q\,dy + \int_{AEB} P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$\therefore \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

∴ التكامل مستقل عن المسار.

(٢) الضرورية :-

إذا كان التكامل مستقلا عن المسار فإن

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}$$

$$\therefore \int_{ADB} = \int_{AEB} = -\int_{BEA}$$

$$\therefore \int_{ADBEA} = \int_{AEB} + \int_{BEA} = 0$$

أي أن التكامل على أي مسار مغلق في المنطقة R يساوي الصفر

ومن نظرية جرين يكون

$$0 = \int_{ADBEA} P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

$$\therefore Q_x = P_y$$

النتائج من نظرية (١) تميل للتعميم إلى التكاملات الخطية في الفراغ. لذا يكون

نظرية (٢) :.

= الشرط الضروري والكافي للمقدار $\int A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$ أن يكون مستقلاً عن المسار C الواصل بين أي نقطتين في المنطقة R^C هو أنه في المنطقة R يكون

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial y} \qquad (14)$$

حيث من المفترض أن هذه المشتقات الجزئية متصلة في المنطقة R.

النتائج تميل للتعبير عنها باختصار بدلالة المتجهات. إذا كان

$$\vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

التكامل الخطي تميل كتابته في الصورة $\int_C \vec{A} \cdot dr$ والشرط (14) يكافئ $\nabla \wedge \vec{A} = 0$.

حيث $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$.

إذا كان $\vec{A}$ يمثل مجال القوة $\vec{F}$ التي تؤثر على جسم ، النتيجة تكافئ العبارة أن مقدار الشغل المبذول في تحريك الجسم من نقطة إلى أخرى لا يعتمد على المسار الواصل بين النقطتين إذا وإذا فقط كان $\nabla \wedge \vec{F} = 0$. مثل مجال القوة هذا يسمى غالباً بقائياً أو احتفاظياً أو قوة محافظة.

الشرط (14) [أو الشرط المكافئ $\nabla \wedge \vec{A} = 0$] هو أيضاً الشرط أن يكون المقدار $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$ أو $\vec{A} \cdot dr$ تفاضلة تامة لدالة $\varphi(x, y, z)$ متصلة أي

$$d\varphi = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

إذا كانت (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) هي النقط النهائية للمنحنى C فإن قيمة التكامل الخطي تعطى بالعلاقة

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} d\varphi$$

$$= \varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1) \qquad (15)$$

بوجه خاص إذا كان المنحنى C مقفل وكان $\nabla \wedge \vec{A} = 0$ فإن

$$\oint_C \vec{A} \cdot dr = 0 \qquad (16)$$

مثال (٦) :- أثبت أن $I = \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy$

مستقلا عن المسار الواصل بين $(3,4), (1,2)$

ثم أوجد قيمة هذا التكامل.

الحل :- بوضع

$$P = 6xy^2 - y^3 \ , \quad Q = 6x^2y - 3xy^2$$

فيتضح أن

$$P_y = 12xy - 3y^2 = Q_x = 12xy - 3y^2$$

∴ التكامل مستقل عن المسار الواصل بين النقطتين $(3,4)$, $(1,2)$.

ولأن التكامل مستقل عن المسار، فيمكن حساب قيمته عن أي مسار يربط النقطتين $(1,2)$ و $(3,4)$. نعتبر المسار عبارة عن خط مستقيم واصل من $(1,2)$ إلى $(3,2)$ وخط مستقيم آخر يربط $(3,2)$ بـ $(3,4)$

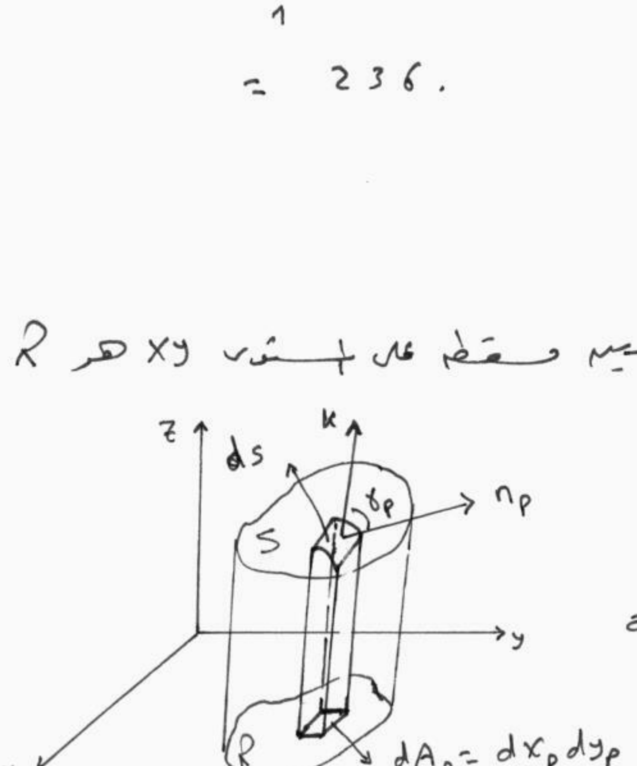
$$\therefore \ I = \int_1^3 (24x - 8)\,dx + \int_2^4 (54y - 9y^2)\,dy$$

$$= 236.$$

التكاملات السطحية

نفرض S سطحا ذا جانبين مسقطه على المستوى xy هو R

كما بالشكل المقابل.



نفرض أن معادلة السطح هي

$$z = f(x,y)$$

حيث f دالة وحيدة القيمة ومتصلة عند كل قيم x, y من المنطقة R.

قسم المنطقة R إلى n من المناطق الجزئية مساحة كل منها ΔA_p حيث $p=1,2,\dots,n$. اقم عموداً رأسياً على كل من هذه المناطق الصغيرة لتقطع السطح S في مساحة قدرها ΔS_p .
لنفرض أن $\varphi(x,y,z)$ دالة متصلة ووحيدة القيمة عند كل النقط في السطح S .
كوّن المجموع

$$\sum_{p=1}^{n} \varphi(\xi_p,\eta_p,\zeta_p)\,\Delta S_p \qquad (17)$$

حيث (ξ_p,η_p,ζ_p) نقطة ما تتوسط المساحة السطحية ΔS_p . إذا كانت نهاية هذا المجموع عندما $n\to\infty$ (بحيث $\Delta S_p\to 0$ عندئذ) توجد فإن النهاية الناتجة تسمى التكامل السطحي للدالة $\varphi(x,y,z)$ فوق السطح S ويعتبر المقدار

$$\iint_S \varphi(x,y,z)\,dS \qquad (18)$$

لدينا $\Delta S_p = |\sec\gamma_p|\,\Delta A_p$ تقريبياً ، عندما تكون γ_p هي الزاوية بين الخط العمودي على المساحة S والاتجاه الموجب لمحور z فإن نهاية المجموع (17) يمكن كتابتها في الصورة

$$\iint_R \varphi(x,y,z)\,|\sec\gamma|\,dA \qquad (19)$$

الكمية $|\sec\gamma|$ تعطى بالعلاقة

$$|\sec\gamma| = \frac{1}{|n_p\cdot k|} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \qquad (20)$$

ثم بفرض أن $z=f(x,y)$ لها مشتقات متصلة في R فإن (19) تأخذ الصورة

$$\iint_R \varphi(x,y,z)\,\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\;dA \qquad (21)$$

إذا كانت معادلة السطح S هي $F(x,y,z)=0$ فإن (21) تأخذ الصورة

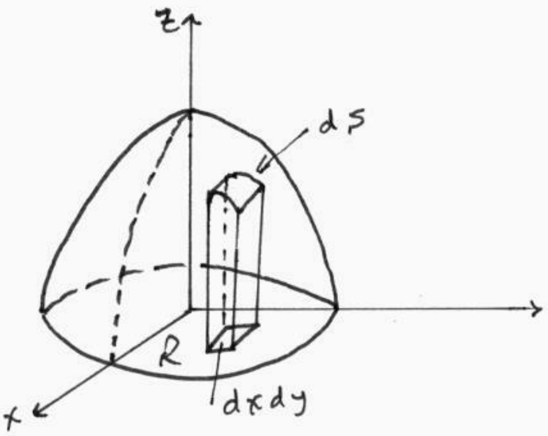
$$\iint_R \varphi(x,y,z)\,\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\;dA \qquad (22)$$

تعريف :-
إذا كانت γ هي الزاوية بين العمودي على السطح S عند أي نقطة (x,y,z) والاتجاه الموجب لمحور z أثبت أن

$$|\sec\gamma| = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}$$

حسبما إذا كانت معادلة السطح S هي $z=f(x,y)$ أو $F(x,y,z)=0$.

مثال (٧) :- أوجد قيمة $\iint_S U(x,y,z)\,ds$ حيث S هو السطح للجسم المكافئ $z=2-(x^2+y^2)$ فوق المستوى xy ، والمقدار $U(x,y,z)$ مساوياً :
(i) 1 (ii) x^2+y^2 (iii) $3z$.
اعط تفسيراً فيزيائياً لكل حالة .



الحل :- التكامل المطلوب هو

$$I = \iint_R U(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\;dx\,dy \quad (1)$$

حيث R هي مسقط السطح S على المستوى $z=0$. تعرف R بـ

$$x^2+y^2=2 \;,\; z=0$$

$$\therefore z_x=-2x \;,\; z_y=-2y$$

$$\therefore I = \iint_R U(x,y,z)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\;dx\,dy$$

(i) إذا كانت $U=1$ فإن

$$I = \iint_R \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\;dx\,dy$$

ولإيجاد قيمة هذا التكامل نحول إلى الإحداثيات القطبية (r,θ)

$$\therefore I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\;r\,dr\,d\theta = 13\pi/3$$

فيزيائياً يمثل هذا مساحة السطح S . أو كتلة السطح S بفرض وحدة الكثافة .

(ii) إذا كانت $u(x,y,z) = x^2+y^2$ فإن

$$I = \iint_R (x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\,dy$$

بالإحداثيات القطبية

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+4r^2}\, dr\,d\theta = \frac{149\pi}{30}$$

وهذا يمثل فيزيائياً عزم القصور الذاتي للسطح S حول محور z بفرض وحدة الكثافة أو يمثل كتلة السطح S الذي كثافته لمساحة تساوي x^2+y^2 .

(iii) إذا كانت $u(x,y,z) = 3z$ فإن

$$I = \iint_R 3z\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\,dy$$

$$= \iint_R 3(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\,dy$$

باستخدام الإحداثيات القطبية يكون

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 3(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \frac{111\pi}{10}$$

وهذا يمثل فيزيائياً كتلة السطح S الذي كثافة وحدة المساحات منه تساوي $3z$.

نظرية التباعد :-

نفرض أن S هو سطح مقفل محدود المنطقة بحجم V . نختار العمودي على السطح للخارج كعمود موجب . ولنفرض أن α, β, γ هي الزوايا التي يصنعها هذا العمود مع الاتجاه الموجب للمحاور ox, oy, oz على الترتيب . حينئذ إذا كانت A_1, A_2, A_3 مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة من المنطقة داخل السطح وعليه فإن

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV =$$
$$= \iint_S \left(A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta + A_3 \cos\gamma \right) dS \quad (1)$$

ويمكن كتابتها بالصورة

$$\iiint_V \left(A_{1x} + A_{2y} + A_{3z} \right) dV = \iint_S A_1\, dy\, dz + A_2\, dx\, dz + A_3\, dx\, dy \quad (2)$$

وفي الصورة المتجهة : إذا كان

$$\vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad , \quad n = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$$

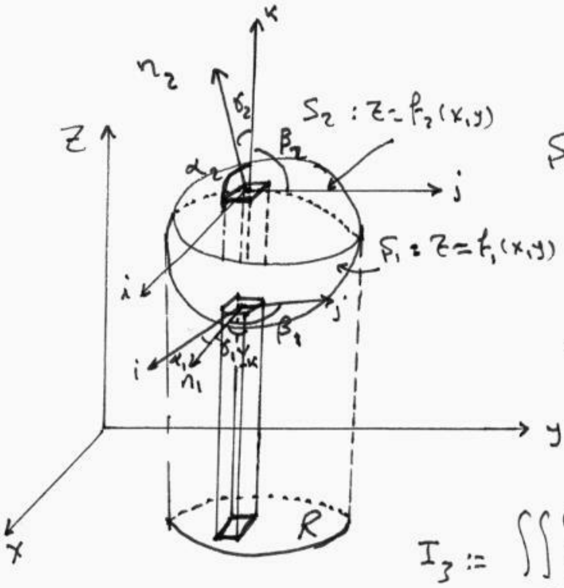
فإن

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \iint_S \vec{A} \cdot n\, dS \quad (3)$$

وتسمى هذه النظرية بنظرية التباعد أو نظرية جرين في الفراغ : وتنص على أن التكامل السطحي للمركبة العمودية للمتجه $\vec{A}$ المأخوذ على السطح المقفل S يساوي تكامل التباعد للمتجه $\vec{A}$ المأخوذ على الحجم V المحصور داخل السطح

البرهان :-

نفرض أن S سطح مقفل بحيث أن أي خط مستقيم موازٍ لمحاور الإحداثيات يقطع S على الأكثر في نقطتين . ولنفرض أن



معادلة الجزء السفلى S_1 والجزء العلوي S_2 هما

$$z = f_1(x,y)\ ,\quad z = f_2(x,y)$$

على الترتيب. لنشير لمسقط السطح على المستوى xy بالمنطقة R. كما بالشكل المقابل. لنعتبر أن

$$I_3 := \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dV = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dz\, dy\, dx$$

$$I_3 = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dz \right] dy\, dx$$

$$= \iint_R \left\{ A_3(x,y,f_2(x,y)) - A_3(x,y,f_1(x,y)) \right\} dy\, dx$$

لنصف السطح العلوي S_2 يكون

$$dy\, dx = \cos\gamma_2\, dS = K\cdot n_2\, dS$$

وللنصف السفلي S_2 يكون

$$dy\, dx = -K\cdot n_1\, dS$$

$$\therefore \iint_R A_3(x,y,f_2(x,y))\, dy\, dx = \iint_{S_2} A_3\, K\cdot n_2\, dS$$

$$\iint_R A_3(x,y,f_1(x,y))\, dy\, dx = -\iint_{S_1} A_3\, K\cdot n_1\, dS$$

$$\therefore \iint_R \left\{ A_3(x,y,f_2(x,y)) - A_3(x,y,f_1(x,y)) \right\} dy\, dx =$$

$$= \iint_{S_2} A_3\, K\cdot n_2\, dS + \iint_{S_1} A_3\, K\cdot n_1\, dS$$

$$= \iint_S A_3\, K\cdot n\, dS$$

$$\therefore \iiint_V A_{3z}\, dV = \iint_S A_3 k \cdot n\, dS$$

بالمثل نستطيع إثبات أن

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x}\, dV = \iint_S A_1 i \cdot n\, dS ,$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y}\, dV = \iint_S A_2 j \cdot n\, dS$$

بجمع الثلاث تكاملات الحجمية السابقة نحصل

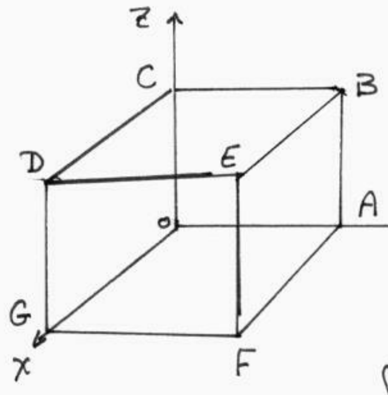
$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \iint_S \vec{A} \cdot n\, dS$$

مثال (٨) :- حقق نظرية التباعد إذا علم أن

$$\vec{A} = (2x - z) i + x^2 y j - x z^2 k$$

مأخوذ حول المنطقة المحدودة بالمقادير: $z=0, z=1, x=0, x=1, y=0, y=1$

الحل :-



نحسب أولاً قيمة $\iint_S \vec{A} \cdot n\, dS$

حيث S هي مساحة المكعب في (٦ أوجه) المقابل.

على الوجه $DEFG$ ، $x = 1,\ n = i$

$$\therefore \iint_{DEFG} \vec{A} \cdot n\, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{(2 - z) i + j - z^2 k\} \cdot i\, dy\, dz$$

$$= 3/2$$

على الوجه $ABCo$: $x = 0,\ n = -i$

$$\therefore \iint_{ABCo} \vec{A} \cdot n\, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-z i) \cdot (-i)\, dy\, dz$$

$$= 1/2$$

على الوجه $ABEF$: $n = j \quad , \quad y = 1$

$$\therefore \iint_{ABEF} \vec{A} \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{ (2x - z) i + x^2 j - xz k \} \cdot j \, dx \, dz$$

$$= 1/3$$

على الوجه $oGDC$ $\quad n = -j \quad , \quad y = 0$

$$\therefore \iint_{oGDC} \vec{A} \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{ (2x - z) i \quad x z^2 k \} \cdot (-j) \, dx \, dy$$

$$= 0$$

على الوجه $BCDE$ يكون $\quad n = k \quad , \quad z = 1$

$$\therefore \iint_{BCDE} \vec{A} \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{ (2x - 1) i + x^2 y j - x k \} \cdot k \, dx \, dy$$

$$= -1/2$$

على الوجه $AFGo \quad , \quad n = -k \quad , \quad z = 0$

$$\therefore \iint_{AFGo} \vec{A} \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^1 \{ 2x i - x^2 y j \} \cdot (-k) \, dx \, dy$$

$$= 0$$

بالجمع

$$\therefore \iint_S \vec{A} \cdot n \, ds = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 - 1/2 + 0 = 11/6$$

$$\because \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} \, dv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - 2xz) \, dx \, dy \, dz = \frac{11}{6}$$

$\therefore$ نظرية التباعد تتحقق .

نظرية استوكس

نفرض أن S سطحاً ذا جانبين مفتوحاً ومحدود بالمنحني C المقفل البسيط لنعتبر المتجه العمودي على السطح S موجبة إذا كان له أحد جانبين وسالب إذا كان في الجانب الآخر. اختيار الجانب الموجب من السطح S اختياريا ويكون من الواجب أن نقرر ذلك مقدما. نسمي اتجاه المنحني C موجبة إذا كان شخصاً ملاحظاً يمشي على حدود السطح S ورأسه متجه في اتجاه العمود الموجب فإن السطح يقع على يساره. حينئذ إذا كانت A_1, A_2, A_3 وحيدة القيمة ومتصلة ولها مشتقات تفاضلية جزئية متصلة في المنطقة التي تحتوي السطح S في الفراغ. فإن

$$\int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma \right\} dS$$

في صورة متجهة يمكن القول بأن

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

حيث $\vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ ، $\vec{n} = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$

يسمى هذه النظرية بنظرية استوكس وتنص على أن التكامل الخطي للمركبة المماسية للمتجه $\vec{A}$ المأخوذ حول المنحني C المقفل البسيط مساوياً للتكامل السطحي للمركبة العمودية للالتفاف $\vec{A}$ ($\nabla\times\vec{A}$) المأخوذ فوق السطح S المحدد بالمنحني C.

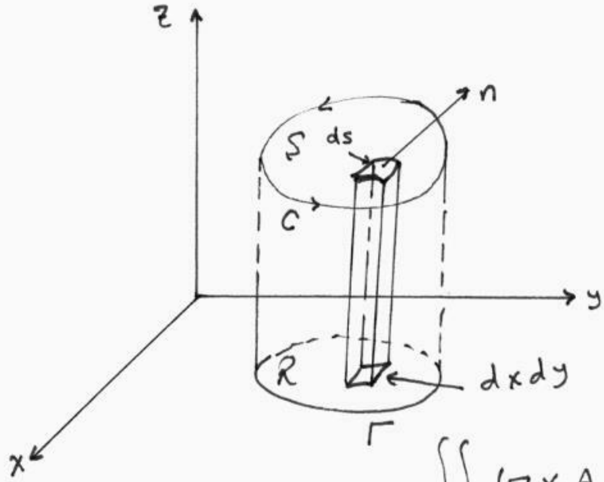
برهان نظرية استوكس :

نفرض S هو سطح بحيث يكون مسقطه على كل من المستويات xy, xz, yz هو منطقة محدودة بالمنحنيات مقفلة بسيطة.

نفرض أن السطح S يمكن وصفه بإحدى المعادلات الآتية

$$z = f(x,y) \quad \text{or} \quad y = h(x,z) \quad \text{or} \quad x = g(y,z)$$

حيث f, h, g دوال تفاضلية متصلة ووحيدة القيمة .



سنثبت أولاً أن

$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot n \, ds = \oint_C \vec{A} \cdot dr$$

حيث C هي حدود السطح S

نعتبر أولاً :

$$\iint_S (\nabla \times A_1 i) \cdot n \, ds$$

$$\therefore \nabla \times A_1 i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z} j - \frac{\partial A_1}{\partial y} k ,$$

$$\therefore \iint_S (\nabla \times A_1 i) \cdot n \, ds = \iint_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} n \cdot j - \frac{\partial A_1}{\partial y} n \cdot k \right) ds \quad (1)$$

إذا كانت معادلة السطح $z = f(x,y)$ فإن متجه موضع أي نقطة على السطح S يكون

$$\vec{r} = x i + y j + z k = x i + y j + f(x,y) k$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = j + \frac{\partial z}{\partial y} k = j + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

وتكون المتجهة $\partial \vec{r} / \partial y$ هو متجه مماس للسطح S

$$\therefore n \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 0$$

بالتعويض عن $\partial \vec{r} / \partial y$ يكون

$$\therefore n \cdot j + \frac{\partial z}{\partial y} n \cdot k = 0$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$\iint_S (\nabla \times A_1 i) \cdot n \, ds = - \iint_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) n \cdot k \, dS$$

إذا كانت R هو مسقط السطح S على المستوى xy فإن

$$n \cdot k \, dS = dx \, dy$$

$$\therefore \iint_S (\nabla \times A_1 i) \cdot n \, dS = -\iint_R \frac{\partial A_1}{\partial y} \, dx \, dy$$

ومن نظرية جرين يكون التكامل الأخير مساويا $\oint A_1 \, dx$ حيث Γ هو حدود المنطقة R . بما أنه عند كل نقطة (x, y) على المنحنى Γ تكون قيمة $A_1(x, y, f(x,y))$ هي نفسها قيمة $A_1(x, y, z)$ عند كل نقطة (x, y, z) للمنحنى C فإن

$$\oint_\Gamma A_1 \, dx = \oint_C A_1 \, dx$$

$$\therefore \iint_S (\nabla \times A_1 i) \cdot n \, dS = \oint_C A_1 \, dx$$

بالمثل بالإسقاط على مستويات الإحداثيات الأخرى xz, yz يكون

$$\iint_S (\nabla \times A_2 j) \cdot n \, dS = \oint_C A_2 \, dy$$

و

$$\iint_S (\nabla \times A_3 k) \cdot n \, dS = \oint_C A_3 \, dz$$

بالجمع يكون

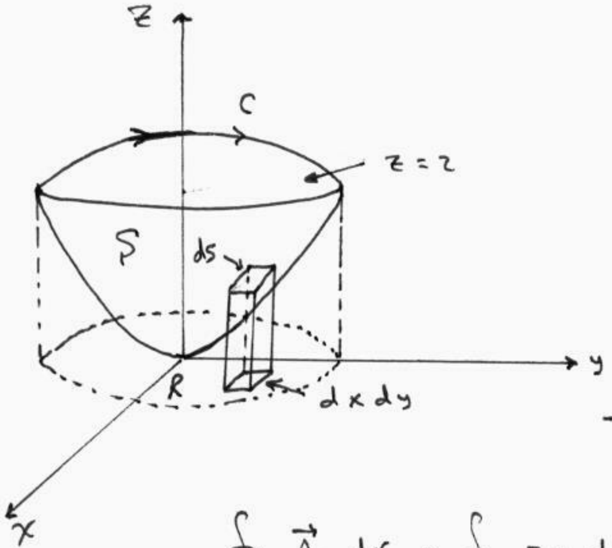
$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot n \, dS = \oint_C \vec{A} \cdot dr$$

النظرية تكون أيضاً صحيحة للسطوح التي ربما لا تتحقق لها الشروط السابقة. لأننا سنفترض في مثل هذه الحالات أن السطح يمكن تقسيمه جزئياً إلى السطوح $S_1, \ldots, S_k$ بحدود $C_1, \ldots, C_k$ بحيث تتحقق لكل منها الشروط المذكورة في النظرية. حينئذ تكون نظرية استوكس صالحة لكل من هذه السطوح $S_1, \ldots, S_k$. بجمع هذه التكاملات السطحية نحصل على النتيجة للسطح الكلي.

مثال (٩) :- حقق نظرية استوكس للمتجه

$$\vec{A} = 3y\,i - xz\,j + yz^2\,k$$

حيث S هو السطح للجسم المكافئ $2z = x^2+y^2$ المحدود بالمستوى $z=2$ المنحنى C هو حدوده.



الحل :-

المنحنى C المحدد للسطح S هو دائرة معادلتيها هما

$$z = 2, \quad x^2+y^2=4$$

والمعادلات البارامترية لها هي

$$z=2, \quad x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t$$

حيث $0 \le t \le 2\pi$.

$$\oint_C \vec{A}\cdot dr = \oint_C 3y\,dx - xz\,dy + yz^2\,dz$$

$$= \int_{2\pi}^{0} 3(2\sin t)(-2\sin t)\,dt - (2\cos t)(2)(2\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (12\sin^2 t + 8\cos^2 t)\,dt = 20\pi.$$

أيضاً

$$\nabla\times\vec{A} = (-z^2+x)\,i - (3+z)\,k$$

$$n = \frac{\nabla(x^2+y^2-2z)}{|\nabla(x^2+y^2-2z)|} = \frac{x\,i + y\,j - k}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\therefore \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot n\,dS = \iint_R (\nabla\times\vec{A})\cdot n\,\frac{dx\,dy}{|n\cdot k|}$$

$$= \iint_R (xz^2 + x^2 + z + 3)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} \left\{(r\cos\theta)(r^4/2) + r^2\cos^2\theta + r^2/2 + 3\right\} r\,dr\,d\theta = 20\pi$$

تمارين

(١) إذا كانت $\vec{A} = (3x^2 - 6yz)i + (2y + 3xz)j + (1 - 4xyz^2)k$

أوجد قيمة $\int_C \vec{A} \cdot dr$ من (٠,٠,٠) إلى (١,١,١) للمسارات C الآتية:

(i) $x = t \;,\; y = t^2 \;,\; z = t^3$

(ii) الخط المستقيم من النقطة (٠,٠,٠) إلى النقطة (١,٠,٠) ثم بعد ذلك إلى النقطة (١,١,٠) ثم إلى النقطة (١,١,١)

(iii) الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (٠,٠,٠), (١,١,١)

(٢) أوجد مساحة القطع الناقص $x = a\cos\theta \,,\; y = b\sin\theta$

(٣) أوجد قيمة

$$\oint_C (x^2 y \cos x + 2xy\sin x - y^2 x)\,dx + (x^2 \sin x - 2y\, e^y)\,dy$$

حول الدويري المغلق C :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

(٤) أوجد المساحة السطحية لنصف الكرة لنصف قطرها a المقطوعة باسطوانة قطرها نصف قطر الكرة .

(٥) أوجد قيمة $\iint_S r \cdot n \, dS$ حيث S هو سطح مقفل .

(٦) احسب قيمة $\iint_S xz^2\,dy\,dz + (x^2 y - z^2)\,dz\,dx + (2xy + y^2 z)\,dx\,dy$

حيث S هو السطح الداخلي لمنطقة نصف كروية محدودة بما يأتي :

$$z = a \quad , \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

(i) بنظرية التباعد (نظرية جرين في الفراغ)

(ii) بطريقة مباشرة .

(٧) باستخدام $F = \dfrac{-yi + xj}{x^2 + y^2}$ أحسب

(i) $\nabla \times F$ (ii) $\oint F \cdot dr$ حول أي مسار مقفل

الباب الثالث

دوال جاما و بيتا

دالة جاما :-

تعرف دالة جاما بالتكامل

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx \qquad (1)$$

حيث $n>0$ وذلك ليكون التكامل تقارب .
من التعريف (1) يمكن الحصول على علاقات تكرارية هامة لدالة جاما مثل

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \quad , \quad \Gamma(1) = 1 \qquad (2)$$

فالمقدار $\Gamma(n)$ يمكن تعيينه لجميع قيم $n>0$. وعندما تكون n عدد صحيح موجب

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad n = 1,2,\dots \qquad (3)$$

لإثبات العلاقتين (2) , (3) : من (1)

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^M x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left\{ -x^n e^{-x} \Big|_0^M + n\int_0^M x^{n-1} e^{-x}\, dx \right\}$$

$$= n\,\Gamma(n) \qquad \text{for any } n>0$$

لقيمة $n=1$ نجد أن

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 - e^{-\infty} = 1$$

منها نحصل على النتيجة

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\,\Gamma(1) = n!$$

أمثلة

$$\Gamma(2) = 1! \quad , \quad \Gamma(6) = 5! = 120$$

$$\Gamma(5)/\Gamma(3) = 4!/2! = 12 .$$

من المفيد أيضاً استخدام التعريف (1) لإيجاد قيمة $\Gamma(n)$ لقيم n الكسرية وستلعب $\Gamma(1/2)$ دوراً رئيسياً في ذلك. وهذه القيمة $\Gamma(1/2)$ تحسب مباشرة من (1) كالتالي:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\, dx$$

بوضع $x = t^2$ نجد أن

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1} e^{-t^2} . 2t\, dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

$$= \sqrt{\pi} \qquad (4)$$

باستخدام هذه النتيجة نستطيع حساب قيمة $\Gamma(n)$ لأي كسر موجب n. فمثلاً

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma(1/2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{5}{2}\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi} .$$

العلاقة التكرارية (2) تستخدم لتعريف دالة جاما لقيم n السالبة أي لتعريف $\Gamma(n)$ للقيم $n<0$. وذلك بإعادة كتابة (2) على الصورة

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad (5)$$

فمثلاً :

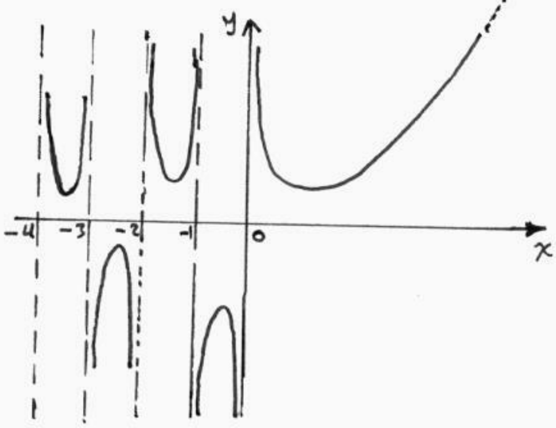
$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi} .$$

$$\Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \frac{4}{3}\Gamma(1/2) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} .$$

$$\Gamma(-5/2) = \frac{\Gamma(-3/2)}{-5/2} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi} .$$

الجدول التالي يعطي قيم $\Gamma(n)$ لبعض قيم n الكسرية العشرية ومن المقابل رسم بياني لقيم $\Gamma(n)$ تقابل قيم n الموجبة والسالبة.

n	$\Gamma(n)$
1.00	1.0000
1.10	0.9514
1.20	0.9182
1.30	0.8975
1.40	0.8873
1.50	0.8862
1.60	0.8935
1.70	0.9086
1.80	0.9314
1.90	0.9618
2.00	I.0000



مثال :- احسب قيمة التكامل

$$I = \int_0^\infty x^{5.2} e^{-x^2} dx$$

بوضع $x^2 = t$ نجد أن

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2.1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(3.1) = \frac{2.1}{2}\Gamma(2.1)$$

$$= \frac{(2.1)(1.1)}{2}\Gamma(1.1) = \frac{(2.1)(1.1)}{2}(0.9514)$$

من الجدول نجد أن $\Gamma(1.1) = 0.9514$.

بالأمثلة التالية سنوضح أن تكاملات معينة تحل حسابياً باستخدام دالة جاما.

أمثلة احسب قيم التكاملات الآتية

(i) $\int_0^1 \sqrt{\{\log_e(\frac{1}{x})\}}\, dx$

(ii) $\int_0^\infty \sqrt{y}\, \exp\{-y^3\}\, dy$

(iii) $\int_0^\infty 3^{-4z^2} dz$

(iv) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\ln t}}$

(v) $\int_0^{\pi/2} (\tan^3\theta + \tan^5\theta)\, e^{-\tan^2\theta} d\theta$

الحل :-

(i) بوضع $x = e^{-t}$ نحصل على

$$I := \int_0^1 \sqrt{\left\{\log_e\left(\frac{1}{x}\right)\right\}}\,dx = \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t}\,dt$$

$$= \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(ii) نفرض أن $y^3 = t$

$$\therefore \int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y^3}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\,dt = \frac{1}{3}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

(iii) نفرض أن $+4z^2 \ln 3 = x$

$$\therefore \quad z = \sqrt{\frac{x}{4\ln 3}}$$

$$\therefore \int_0^\infty 3^{-4z^2}\,dz = \int_0^\infty e^{-4z^2 \ln 3}\,dz = \int_0^\infty e^{-x}\cdot\frac{x^{-1/2}}{2\sqrt{4\ln 3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\ln 3}}.$$

(iv)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\ln t}} = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

(v) بوضع $\tan^2\theta = x$ نجد أن

$$I = \int_0^{\pi/2} (\tan^3\theta + \tan^5\theta)\, e^{-\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \tan^3\theta\,(1+\tan^2\theta)\, e^{-\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}.$$

صيغة استرلنج التقريبية :-

من الصيغة (1) نجد أن

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

بفرض أن $t = x + \tau\sqrt{x}$ يكون

$$dt = \sqrt{x}\, d\tau$$

$$\therefore \Gamma(x+1) = \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} (x+\tau\sqrt{x})^x e^{-(x+\tau\sqrt{x})} \cdot \sqrt{x}\, d\tau$$

منه

$$\frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x} x^{x+1/2}} = \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\tau\sqrt{x}} \left(1+\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)^x d\tau$$

$$= \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} \exp\left\{-\tau\sqrt{x} + x\log\left(1+\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)\right\} d\tau$$

$$\because \log\left(1+\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\tau}{\sqrt{x}} - \frac{\tau^2}{2x} + \cdots$$

$$\therefore \frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x} x^{x+1/2}} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left\{-\tau\sqrt{x} + x\left(\frac{\tau}{\sqrt{x}} - \frac{\tau^2}{2x} + \cdots\right)\right\} d\tau$$

$$+ \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \exp\left\{-\tau\sqrt{x} + x\log\left(1+\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)\right\} d\tau$$

لقيم x الكبيرة بدرجة كافية يكون

$$\Gamma(x+1) \simeq e^{-x} x^{x+1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+1/2} \qquad (6)$$

وهذه تعطى تقريب للدالة $\Gamma(x+1)$ لقيم x الكبيرة .

بوضع $x = n$ في (6) . وعلمنا بأن $\Gamma(n+1) = n!$ نجد أن

$$n! \simeq \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

وتسمى هذه الصيغة التقريبية بصيغة استرلنج .

دالة بيتا :-

تعرف دالة بيتا $B(m,n)$ بالصيغة :

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx \qquad (1)$$

التي تتقارب عندما $m>0,\ n>0$.

والدالة $B(m,n)$ دالة متصلة وهي متماثلة بالنسبة إلى m ، n أي أن :

$$B(m,n) = B(n,m)$$

لإثبات ذلك نضع $1-x = u$ في (1) فنجد أن

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = -\int_1^0 u^{n-1}(1-u)^{m-1}\, du$$

$$= \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1}\, du = B(n,m).$$

كذلك يمكن التعبير عن $B(m,n)$ بالصورة

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta \qquad (2)$$

لإثبات ذلك ، نفرض أن $x = \sin^2\theta$

$$\therefore B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2}\theta \cos^{2n-2}\theta \cdot \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta.$$

من الصيغة (٢) يمكن اشتقاق بعض العلاقات التكرارية لدالة بيتا.
من (٢) بالتكامل بالتجزيء نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta = \frac{n-1}{m+n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-3}\theta \, d\theta$$

ومنه ينتج أن

$$B(m,n) = 2\,\frac{n-1}{m+n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-3}\theta \, d\theta$$

$$= 2\,\frac{n-1}{m+n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-3}\theta \, d\theta$$

$$= 2\,\frac{(n-1)(m-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-3}\theta \cos^{2m-3}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}\, B(m-1,n-1) \qquad (3)$$

عندما تكون m,n أعداد صحيحة موجبة فإن تكرار هذه العملية يؤدي إلى

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}\, B(1,1)$$

حيث

$$B(1,1) = 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = 1$$

بالمثل يمكن إثبات أن

$$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \pi .$$

العلاقة بين دالة بيتا وجاما :-

الآن سنشتق العلاقة اللازمة

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad (5)$$

لنربط دالة بيتا $B(m,n)$ بدالة جاما $\Gamma(x)$. لاشتقاق هذه العلاقة نعتبر

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt \ , \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty s^{n-1} e^{-s} ds$$

$$\therefore \ \Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt \int_0^\infty s^{n-1} e^{-s} ds$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{m-1} s^{n-1} e^{-(t+s)} ds\, dt$$

حيث هذا التكامل المضاعف (المزدوج) مأخوذ على كل الربع الموجب من المستوى st .

لنفرض أن $s = v^2$, $t = u^2$. وبتغيير الى الاحداثيات (u,v) حيث

$$ds\,dt = \left(\frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} \right) du\, dv$$

$$= 4uv\, du\, dv$$

$$\therefore \ \Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2m-1} v^{2n-1} e^{-(u^2+v^2)} du\, dv.$$

باستخدام الاحداثيات القطبية (r,θ) ، وذلك بفرض أن

$$u = r\cos\theta \ , \quad v = r\sin\theta$$

$$\therefore \ \Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r^{2m+2n-1} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\, e^{-r^2} dr\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^\infty r^{2m+2n-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\, d\theta$$

$$= \left\{ \int_0^\infty y^{m+n-1} e^{-y} dy \right\} B(m,n)$$

$$= \Gamma(m+n)\, B(m,n)$$

ومنه تنتج العلاقة (5) .

سنقدم الآن بعض الامثلة التي توضح أهمية هذه العلاقة .

أمثلة :-

(١) أثبت أنه لكل $0 < n < 1$ يكون

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) \qquad (6)$$

الحل :-

نفرض أن $\frac{x}{1+x} = y$

$$\therefore \quad x = y/(1-y) \quad , \quad dx = dy/(1-y)^2$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{-n}\cdot(1-y)^{-2}\,dy$$

$$= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{-(n+2)}\,dy$$

$$= B(n, 1-n) = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n).$$

(٢) أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$

الحل :-

نفرض أن $x = y^4$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{-3/4}}{1+x}\,dx$$

من نتيجة المثال (١) نجد أن

$$I = \frac{1}{4}\,\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

وذلك باستخدام قاعدة الاستنساخ :

$$2^{2n-1}\,\Gamma(n)\,\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2n) \qquad (7)$$

وبصورة عامة يكون لكل $m \geq 2$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{m})\,\Gamma(x+\tfrac{2}{m})\cdots\Gamma(x+\tfrac{m-1}{m})$$

$$= m^{1/2-mx}\,(2\pi)^{(m-1)/2}\,\Gamma(mx) \qquad (8)$$

قاعدتا الاستنساخ (8)، (7) يمكن اثباتها بالاستنتاج الرياضي ويترك هذا للقارئ.

(٣) احسب قيمة التكامل

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

الحل :-

نضع $x^4 = u$

$$\therefore I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{u^{-3/4}}{\sqrt{1-u}}\, du = \frac{1}{4} B\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(1/2)}{4\,\Gamma(3/4)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(1/4)}{4\,\Gamma(3/4)} .$$

(٤) أحسب قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\; d\theta$$

الحل :-

نفرض أن $t = \sin^2\theta$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^{-1/4}}{\sqrt{1-t}}\, dt = \frac{1}{2} B\left(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$= 2\sqrt{\pi}\;\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} .$$

تكاملات ديريشلت

إذا كانت V ترمز للمنطقة المقفلة بالسطح المغلق

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{p} + \left(\frac{y}{b}\right)^{q} + \left(\frac{z}{c}\right)^{r} = 1$$

لقيم x, y, z الموجبة. فإن

$$\iiint_V x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\, dx\, dy\, dz = \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}}{pqr} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{p})\Gamma(\frac{\beta}{q})\Gamma(\frac{\gamma}{r})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r})} \quad (9)$$

لجميع القيم الموجبة α, β, γ.

تكاملات من هذا النوع تسمى تكاملات ديريشلت وهي غالبا مفيدة في إيجاد قيمة التكاملات المتعددة.

مثال:- أوجد كتلة المنطقة داخل الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ إذا كانت الكثافة الحجمية $\sigma = x^2 y^2 z^2$

الحل:-

الكتلة المطلوبة تساوي $I = 8 \iiint_V x^2 y^2 z^2\, dx\, dy\, dz$

حيث V هي المنطقة المحصورة داخل الكرة $x^2+y^2+z^2 = a^2$ والمحدودة بمستويات الاحداثيات الموجبة.

من تكامل ديريشلت (9) نفرض أن $a=b=c$, $p=q=r=2$,

$\alpha = \beta = \gamma = 3$

$$\therefore I = 8 \cdot \frac{a^3 \cdot a^3 \cdot a^3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2})} = \frac{4\pi a^9}{945}.$$

والآن سنثبت الصيغة التكاملية (9) وذلك بإجراء التكامل المكرر

$$I := \int_0^a \int_0^{b\sqrt[q]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^p}} \int_0^{c\sqrt[r]{1-\left(\frac{y}{b}\right)^q-\left(\frac{x}{a}\right)^p}} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\, dz\, dy\, dx$$

$$= \frac{c^\gamma}{\gamma} \int_0^a \int_0^{b\sqrt[q]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^p}} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^q-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]^{\gamma/r} dy\, dx$$

بفرض أن $1-\left(\frac{y}{b}\right)^q-\left(\frac{x}{a}\right)^p = \tau$ يكون

$$I = \frac{c^\gamma b^\beta}{\gamma q} \int_0^a \int_0^{1-\left(\frac{x}{a}\right)^p} x^{\alpha-1} \tau^{\gamma/r} \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^p-\tau\right]^{\beta/q-1} d\tau\, dx$$

بوضع $\dfrac{\tau}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^p} = t$ ينتج أن

$$I = \frac{c^\gamma b^\beta}{\gamma q} \int_0^a \int_0^1 x^{\alpha-1} \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]^{\beta/q+\gamma/r} \times$$

$$\times\ t^{\gamma/r} [1-t]^{\beta/q-1}\, dt\, dx$$

$$= \frac{c^\gamma b^\beta}{\cancel{\gamma}\, q} B\left(\frac{\gamma}{r}+1, \frac{\beta}{q}\right) \int_0^a x^{\alpha-1} \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} dx$$

$$= \frac{c^\gamma b^\beta}{r q} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \int_0^a x^{\alpha-1} \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} dx$$

$$= \frac{c^\gamma b^\beta}{r q} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \cdot \frac{a^\alpha}{p} \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{p}-1} (1-t)^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} dt$$

$$= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{p q r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)}.$$

تمارين

(١) أوجد قيمة كلا مما يأتي :-

(1) $\Gamma(6)/2\Gamma(3)$. (2) $\Gamma(5/2)/\Gamma(1/2)$.

(3) $\Gamma(3)\Gamma(2.5)/\Gamma(5.5)$. (4) $6\Gamma(8/3)/5\Gamma(2/3)$.

(٢) احسب قيمة كل تكامل

(1) $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}\,dx$ (2) $\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx$

(٣) اثبت أن

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$$

حيث n عدد صحيح موجب ، $m > -1$.

(٤) عين قيمة كل من التكاملات الآتية

$$\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}\,dy\,,\quad \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx\,,\quad \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,d\theta\,,\quad \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^5\theta\,d\theta\,,\quad \int_0^{\pi}\cos^4\theta\,d\theta.$$

(٥) وضح أن

(i) $$\int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{6\sqrt{2\pi}}.$$

(ii) $$\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}} = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{4\sqrt{\pi}}.$$

(٦) اثبت صيغة التضاعف

$$2^{2n-1}\,\Gamma(n)\,\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2n).$$

(٧) بوضع $y = x$ من العلاقة

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du,$$

بيِّن أن

$$\frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right)^{x-1} t^{-1/2}\,dt$$

$$= 2^{1-2x}\,\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(x+1/2)}$$

ثم استخدام علاقة التضاعف :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+1/2) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\;\Gamma(2x)$$

لإثبات أن

$$\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4) = \pi\sqrt{2}.$$

(٨) إثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}\,dt = B(m,n) \quad ; \quad m,n>0$$

ومن ثم اثبت أن

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\;dx = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

(٩) وضح أن (i) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sech}^8 x\,dx = 16/35$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{3}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, (iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$

(١٠) إثبت أن

$$\iint_R x^{2/3}\,y^{2/5}\,dx\,dy = \frac{a^{46/15}\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{38}{15}\right)}$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحصورة داخل الدائرة

$$x^2+y^2=a^2.$$

الباب الرابع

متسلسلات فورير وتطبيقاتها
Fourier Series and Applications

مقدمة :-

كثيراً ما نحتاج لإيجاد حل مسألة حدية boundary value problem إلى فك دالة في صورة متسلسلة تكون تقاربية في فترة معطاة. فإذا كانت هذه الدالة متصلة وتفاضلية لصورة لانهائية فإنه يمكن فك هذه الدالة في صورة متسلسلات تيلور وماكلورين اللانهائية Taylor and Maclaurin Expansions.

حيث أنه في بعض الأحيان يكون للدالة المطلوب ايجاد مفكوكها عدد من نقط عدم الاتصال في فترة تعريفها وبذلك تكون غير قابلة للتفاضل عند هذه النقط. في مثل هذه الحالات نلجأ إلى فك الدالة في صورة متسلسلة مثلثية Trigonometric Series

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$$

$$+ \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos rx + b_r \sin rx, \quad (1)$$

حيث r عدد صحيح و b_r ، a_r ، a_0 مقادير ثابتة.

لأن كل حد في المتسلسلة (1) يحتوي على واحدة من الدوال المثلثية $\cos$ ، $\sin$ وهي دوال دورية الحد أي أن

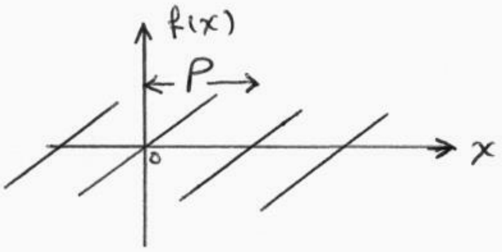
$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi k); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

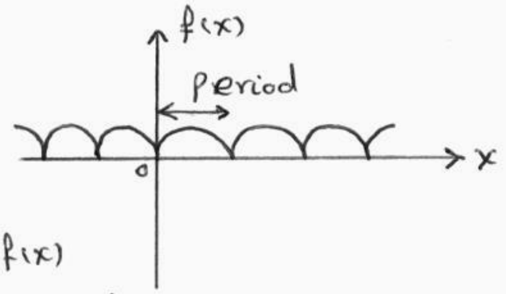
$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

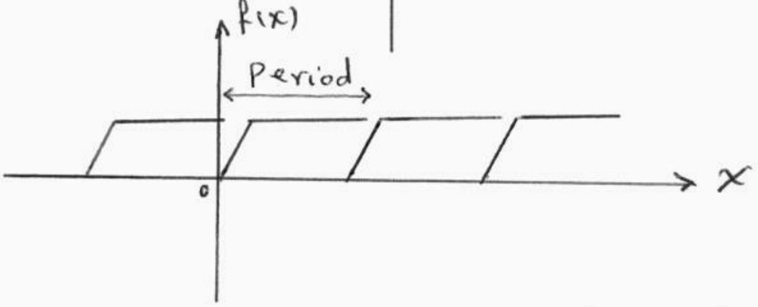
وبالتالي فإننا لتمثيل دالة على صورة المتسلسلة (1) لابد أن تكون هذه الدالة دورية. كما يتضح أن (1) تمثل دالة دورية ومقدار دورتها 2π. لذلك سنعتبر في مناقشتنا لهذا الموضوع أن x تنتمي إلى فترة طولها 2π. مثال

$$-\pi < x \le \pi .$$

الأشكال البيانية التالية توضح بعض أمثلة للدوال الدورية







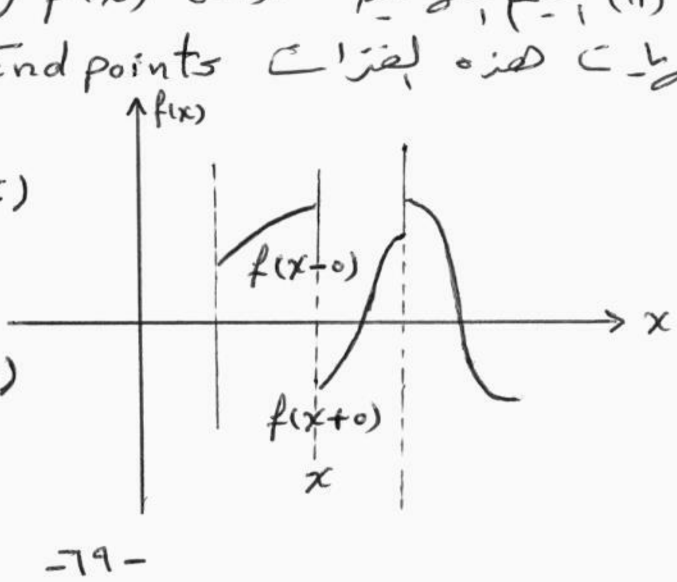
الدوال المتصلة بشكل متقطع Piecewise Continuous Functions

الدالة $f(x)$ تسمى متصلة بصورة متقطعة في فترة ما $a \le x \le b$ إذا كان من (1) الفترة $a \le x \le b$ مقسمة إلى عدد محدود من الفترات الجزئية بحيث تكون $f(x)$ دالة متصلة في أي من هذه الفترات ،

(ii) القيم النهائية للدالة $f(x)$ (limits of $f(x)$) عند مرور x بنهايات هذه الفترات End points تكون محدودة كما بالشكل

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x-\varepsilon)$$

$$f(x+0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x+\varepsilon)$$



بطريقة أخرى يمكن تعريف الدالة متقطعة الاتصال بأنها الدالة التي لها عدد محدود من نقط عدم الاتصال من النوع المحدود.

Definition of Fourier Series تعريف متسلسلة فورير

نعتبر الدالة $f(x)$ معرفة اختيارياً في الفترة

$$-\pi < x \le \pi \quad (2)$$

إذا كانت الثوابت a_0 , a_r , b_r في (1) معرفة على الصورة

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad (3)$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx, \quad (r = 1,2,3,\ldots), \quad (4)$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\, dx, \quad (r = 1,2,3,\ldots), \quad (5)$$

فإن المتسلسلة الناتجة تسمى متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ وتسمى المعاملات a_0 , a_r , b_r المعاملات فورير.
مجموع متسلسلة فورير لا يساوي بالضرورة الدالة المستنتجة منها والشروط الواجب توافرها لكي يكون مجموع متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ تتقارب إلى $f(x)$ بالمعنى

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r \cos rx + b_r \sin rx) \quad (6)$$

تعتمد على صورة الدالة $f(x)$. وهذا ما توضحه النظرية التالية

نظرية (1) : "شروط ديرشليت "Dirichlet's Conditions

نفرض أن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $-\pi < x \le \pi$ ويمكن امتدادها لقيم x خارج هذه الفترة بالعلاقة الدورية:

$$f(x + 2\pi k) = f(x), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

فإنه إذا كانت $f(x)$ دالة وحيدة القيمة ومتصلة عدا عند عدد محدود من نقط الفترة $-\pi \leq x \leq \pi$ ولها عدد محدود من القيم العظمى والصغرى النسبية على هذه الفترة، فإن متسلسلة فورير تتقارب إلى $f(x)$ عند جميع نقط إتصال الدالة $f(x)$ أما إذا كانت $x = x_0$ نقطة انفصال محدود للدالة $f(x)$ فإن متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ تتقارب عند هذه النقطة إلى القيمة

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \{ f(x_0+\varepsilon) + f(x_0-\varepsilon) \} \qquad (7)$$

التي تمثل متوسط قيمتي الدالة $f(x)$ عند مرور x بالنقطة x_0 من ناحية اليمين واليسار.

لتوضيح ما تقدم (7) نعتبر الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & -\pi < x < 0 \\ 1 ; & 0 < x < \pi \end{cases}$$

لها تكون $x_0 = 0$ نقطة إنفصال محدود وبالتالي

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \{ f(x_0+\varepsilon) + f(x_0-\varepsilon) \}$$

$$= \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2} \qquad (8)$$

معاملات فورير Fourier Coefficients

سوف نحقق الآن صيغ معاملات فورير a_0 , a_r , b_r المعطاة بالعلاقات (5) ، (4) ، (3) . لإنجاز ذلك فإننا نستخدم بعض المتطابقات التكاملية المعروفة :

للأعداد الصحيحة r, s والصفرية فمنها يكون

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \cos sx \, dx = \begin{cases} 0 ; & r \neq s \\ 2\pi ; & r = s = 0 \\ \pi ; & r = s \neq 0 \end{cases} \qquad (9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \sin sx \, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad r \neq s \\ 0 & ; \quad r = s = 0 \\ \pi & ; \quad r = s > 0 \end{cases} \qquad (10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad r > 0 \\ 2\pi & ; \quad r = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \, dx = 0 \quad , \text{ for all } r \qquad (12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \cos sx \, dx = 0, \text{ for all } r, s. \qquad (13)$$

والآن بضرب طرفي (6):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[a_r \cos rx + b_r \sin rx \right] , \qquad (14)$$

في $\cos sx$ والتكامل من $x = -\pi$ إلى $x = \pi$ يكون

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos sx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \, dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos rx + b_r \sin rx \right] dx$$

بتغيير ترتيب التكامل والمجموع في هذه المعادلة والتكامل حداً حداً نحصل على:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos sx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \, dx + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \cos sx \, dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} b_r \int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \cos sx \, dx$$

باستخدام المتطابقات (13) - (9) نجد أنه :

(i) إذا $s = 0$ يكون

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi \quad \text{or} \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (15)$$

(ii) $s \neq 0$ يكون

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos sx\,dx = a_s\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx\cos sx\,dx$$

$$= \pi a_s \qquad (16)$$

التي تعطي (4).

لإيجاد المعاملات b_r نضرب (14) في $\sin sx$ ونكامل من $x = -\pi$ إلى $x = \pi$ ونستخدم المتطابقات (13) - (9) يكون

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin sx\,dx = b_s\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 sx\,dx = \pi b_s \qquad (17)$$

ومنها نستنتج (5).

من الملاحظ أن معاملات فورير a_r, a_0 المعطاة بالعلاقات (3),(4) يمكن التعبير عنها بالصورة الجامعة :

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx$$

لجميع قيم $r = 0, 1, 2, \ldots$.

عند حساب معاملات فورير بالطريقة السابقة افترضنا أن الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $-\pi < x \leq \pi$.

إذا كان للدالة $f(x)$ نقطة عدم اتصال عندما $x = x_0$ فإن معاملات فورير لهذه الدالة تحسب بجمع تكاملات الأجزاء المتصلة من الدالة $f(x)$. على سبيل المثال a_r تحسب كما يلي

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x_0} f(x)\cos rx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx, \qquad (18)$$

أخيراً: إذا كانت $f(x)$ إما زوجية أو فردية لقيم x في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ فإن معاملات فورير تتبسط في ضوء صحة خواص التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية:

(أ) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية:

$$f(-x) = f(x)$$

فإن

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad (19)$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx, \qquad (20)$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx = 0, \ \forall\, r, \qquad (21)$$

هذا يعني أنه إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن متسلسلة فورير لها تؤول إلى متسلسلة لدوال جيب التمام Cosine.

(ب) إذا كانت $f(x)$ دالة فردية:

$$f(-x) = -f(x)$$

فإن

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx = 0 \ ; \ r = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (22)$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (23)$$

أي أن متسلسلة فورير للدوال الفردية هي متسلسلة لدوال الجيب Sine.

Fourier Expansions مفكوكات فورير

مثال (1) :- أوجد متسلسلة فورير التي تمثل الدالة الدورية

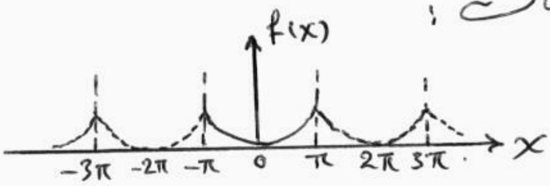
$$f(x) = x^2 \; ; \quad -\pi \le x \le \pi .$$

الحل :-

أولاً نعتبر الامتداد الدوري للدالة $f(x)$ بفرض صحة العلاقة

$$f(x + 2\pi K) = f(x) \; ; \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

انظر الشكل التالي :



وحيث أن $f(x) = x^2$ دالة زوجية في الفترة $-\pi \le x \le \pi$

فإن

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2 , \qquad (24)$$

لجميع $r = 1, 2, \ldots$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos rx\,dx \qquad (25)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{x^2 \sin rx}{r}\Big|_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{r}\int_0^{\pi} x \sin rx\,dx \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{2x\cos rx}{r^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{r^2}\int_0^{\pi} \cos rx\,dx \right\}$$

$$= \frac{4\cos r\pi}{r^2} = \frac{4}{r^2}(-1)^r \qquad (26)$$

$$b_r = 0 \quad \text{for all } r. \qquad (27)$$

وبالتالي فإن

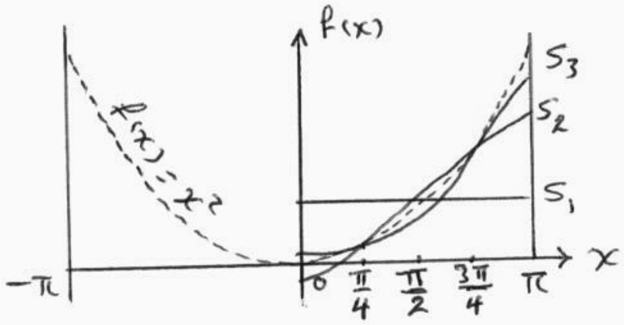
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\cos rx}{r^2} . \qquad (28)$$

تقارب المجموع في (28) إلى x^2 يمكن توضيحه بيانياً برسم عدد من المجاميع الجزئية:

$$S_1 = \frac{\pi^2}{3}, \quad S_2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x,$$

$$S_3 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x.$$

نجد أن



وحيث أن $f(x)$ متصلة لجميع نقاط الفترة $-\pi \le x \le \pi$ فإن (28) صحيحة دائماً داخل هذه الفترة. خارج هذه الفترة فإن المجموع في (28) [وهو دوري لقيم x] لا يتقارب إلى x^2.

بعض المتسلسلات اللانهائية يمكن حساب مجموعها باستخدام مفكوك فورير لدالة مناسبة. فمثلاً، بوضع $x = \pm\pi$ في (28) نجد أن

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4}{r^2}$$

أي أن

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad (29)$$

بالمثل، عندما $x = 0$ نجد أن

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad (30)$$

مثال (٢): - أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & ; \quad -\pi \le x < 0 \\ \cos x & ; \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

الحل: -

واضح أن هذه الدالة دورية لذا فهي تحقق شروط النظرية (١).
كما أنها دالة فردية لقيم x في الفترة $-\pi \le x \le \pi$
ولها نقطة انفصال محدود عندما $x = 0$. ومن ثم فإن

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx = 0$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\cos rx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos x\cos rx\,dx\right\}$$

$$= 0 \quad \text{for all } r$$

بينما

$$b_r = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\sin rx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos x\sin rx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(r+1)x}{r+1} + \frac{\cos(r-1)x}{r-1}\right]_{-\pi}^{0}$$

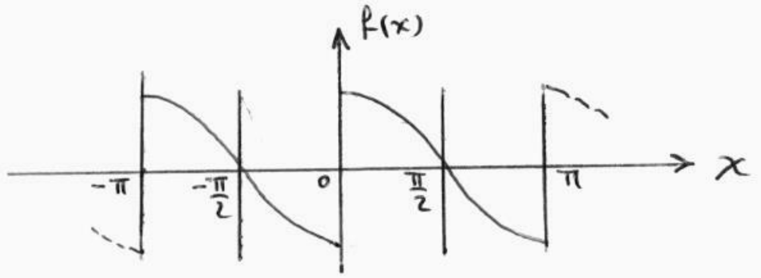
$$-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(r+1)x}{r+1} + \frac{\cos(r-1)x}{r-1}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{r+1}}{r+1} + \frac{1-(-1)^{r-1}}{r-1}\right]$$

ومنه يتضح أن

$$b_r = \begin{cases} 0 & ; \quad r = 1, 3, 5, \ldots \\ \frac{4}{\pi}\left(\frac{r}{r^2-1}\right) & ; \quad r = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

وبالتالي نحصل على متسلسلة فورير المطلوبة وهي:



$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\sin 2x + \frac{2}{3\cdot 5}\sin 4x + \frac{3}{5\cdot 7}\sin 6x + \cdots\right)$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r}{4r^2-1}\sin 2rx \qquad (31)$$

هذه المتسلسلة تتقارب إلى $f(x)$ لجميع قيم x في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ التي عندها $f(x)$ متصلة.

وكما هو واضح من الشكل أعلاه أن $x=0$ هي نقطة عدم اتصال للدالة $f(x)$ في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ لذلك فإن المتسلسلة (31) تتقارب عند $x_0=0$ إلى القيمة

$$\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to 0}\{f(x_0+\varepsilon) + f(x_0-\varepsilon)\}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to 0}\{\cos\varepsilon - \cos(-\varepsilon)\} = 0.$$

كما في المثال السابق يمكننا إيجاد مجموع متسلسلة عددية باستخدام (31) لاختيار مناسب للنقطة x داخل فترة التقارب $-\pi \le x \le \pi$.
فبوضع $x = \frac{\pi}{4}$ نحصل على

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r}{4r^2-1}(-1)^{r+1}$$

ومنه

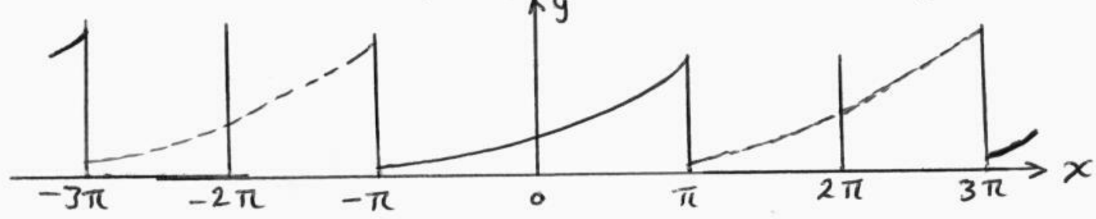
$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{3}{5\cdot 7} + \frac{5}{9\cdot 11} + - \cdots . \qquad (32)$$

مثال (٢) :- أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x) = e^{x}$
في الفترة $-\pi < x < \pi$.

الحل :-

كما في المثال الأول نعتبر أولاً الامتداد الدوري للدالة خارج الفترة المعطاة وذلك بفرض [كما هو موضح بالشكل التالي]

$$e^{x} = e^{x+2\pi k} \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



واضح أن انفصال من النوع المحدود يقع عندما $x = \pm\pi$.

بحساب معاملات فورير نجد أن

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\,dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cos rx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^r}{1+r^2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right),$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\sin rx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^{r+1} r}{1+r^2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right).$$

وبالتالي لقيم $-\pi < x < \pi$ يكون

$$e^{x} = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^r\cos rx}{1+r^2} + \frac{(-1)^{r+1} r\sin rx}{1+r^2}\right]\right\}. \quad (33)$$

عند نقاط الانفصال المحدود $x = \pm \pi$ ، تتقارب المتسلسلة (33)
إلى القيمة

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ e^{\pi+\varepsilon} + e^{-\pi-\varepsilon} \right\} = \cosh \pi$$

وبالتالي يكون

$$\cosh \pi = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2r}}{1+r^2} + \frac{1}{2} \right\}$$

أي أن

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1+r^2} = \frac{\pi}{2} \coth \pi - \frac{1}{2} . \qquad (34)$$

متسلسلات لنصف المدى (جا أو جتا)

Cosine and Sine Series

في بعض الأحيان يكون المطلوب إيجاد متسلسلة فورير لدالة ما $f(x)$ في الفترة $0 \le x \le \pi$. ويمكن إجراء ذلك باستخدام متسلسلة إما لحدود جا أو جتا ، حسبما يكون المطلوب.

أولاً : متسلسلة جيوب التمام Cosine Series

لنفرض أن $f(x)$ دالة معرفة في الفترة الاختيارية $0 \le x \le \pi$.
ونعرف الدالة $F(x)$ على النحو التالي

$$\left.\begin{aligned} F(x) &\equiv f(x) , \quad 0 \le x \le \pi , \\ F(x) &\equiv f(-x) , \quad -\pi \le x \le 0 , \\ F(x+2\pi K) &= F(x) . \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

وبذلك تكون الدالة $F(x)$ زوجية ودورية لقيم x في الفترة
$-\pi \le x \le \pi$. ومن ثم تكون متسلسلة فورير لهذه الدالة
على الصورة

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_r \cos rx + \cdots$$

حيث وباستخدام (35) ،

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad (36)$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos rx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos rx\,dx \qquad (37)$$

لقيم $r = 1, 2, 3, \ldots$.

وبذلك يكون لقيم $0 \le x \le \pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos rx .$$

مثال (4) أوجد متسلسلة فورير بدوال جيب التمام Fourier Cosine series
للدالة $f(x) = \sin x$ في الفترة $0 < x < \pi$

الحل :-

متسلسلة فورير التي تتكون من حدود جتا وحدها تحصل عليها فقط
للدوال الزوجية كما لذلك نعرف الدالة

$$F(x) = \begin{cases} \sin x , & 0 < x < \pi \\ -\sin x , & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

فتكون $F(x)$ دالة زوجية ودورية في الفترة $-\pi < x < \pi$
كما يوضح الشكل التالي . وبذلك يكون

$$b_r = 0 \quad \text{for all } r$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos rx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sin(r+1)x + \sin(1-\ )x\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(r+1)\pi}{r+1} + \frac{\cos(r-1)\pi - 1}{r-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos r\pi}{r+1} - \frac{1+\cos r\pi}{r-1}\right\}$$

$$= -\frac{2\left(1+(-1)^r\right)}{\pi(r^2-1)} \quad ; \quad r \neq 1$$

ولكن عندما $r=1$ يكون

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_0^{\pi} = 0$$

وبالتالي فإنه في الفترة $0<x<\pi$ يكون

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^r}{r^2-1}\cos rx$$

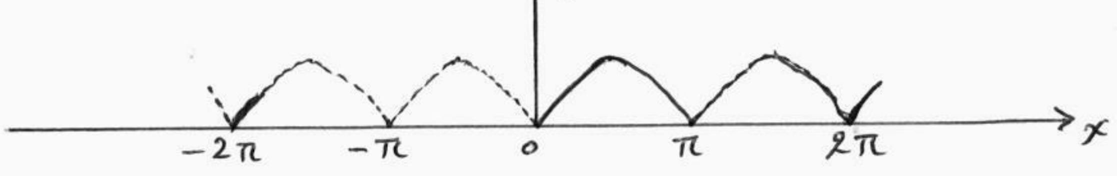
$$= \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2} - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4r^2-1}\cos 2rx\right\} \qquad (38)$$

وبوضع $x=\frac{\pi}{2}$ نجد أن

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4r^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

أو

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \qquad (39)$$



ثانياً :- متسلسلة الجيب   Sine Series

لنفرض الآن أن الدالة $F(x)$ معرفة على النحو التالي :

$$\left.\begin{aligned} F(x) &\equiv f(x) , \quad 0 \le x \le \pi \\ F(x) &\equiv -f(-x) , \quad -\pi \le x \le 0 \\ F(x+2\pi k) &= F(x) \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

مما سبق يتضح أن الدالة $F(x)$ فردية ودورية في الفترة $-\pi \le x \le \pi$. وبالتالي فإن متسلسلة فورير لها تكون

$$F(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_r \sin rx + \cdots$$

حيث

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \sin rx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin rx \, dx$$

لجميع $r = 1, 2, 3, \ldots$.

وعليه فإن في الفترة $0 \le x \le \pi$ يكون

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \sin rx .$$

مثال (٥) :- أوجد متسلسلة فورير بدوال الجيب Fourier sine series للدالة $f(x) = x^2$ في الفترة $0 \le x < \pi$.

الحل :-

لإيجاد مفكوك x^2 في الفترة $0 \le x < \pi$ على الصورة

$$x^2 = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_r \sin rx + \cdots$$

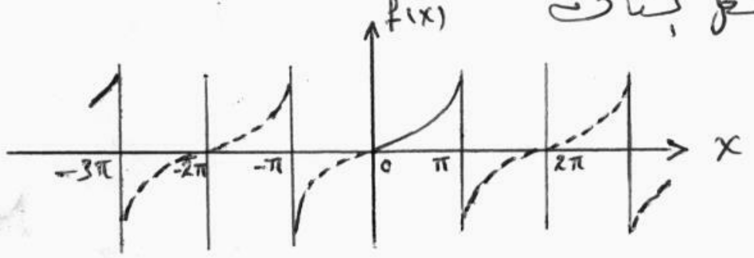
لابد أن نوجد الامتداد الدوري للدالة $f(x) = x^2$ بحيث نحصل على الدالة الفردية $F(x)$:

$$F(x) = x^2 \; ; \quad 0 \le x < \pi ,$$

$$F(x) = -x^2 , \quad -\pi < x \le 0 ,$$

$$F(x + 2\pi k) = F(x) ,$$

كما بالشكل التالي



وبذلك تكون

$$b_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin rx \, dx , \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{2\pi (-1)^{r+1}}{r} + \frac{4}{\pi r^3} \{ (-1)^r - 1 \}$$

ومنه نجد أنه في الفترة $0 \le x < \pi$ يكون

$$x^2 = \frac{2}{\pi} \Big\{ \left(\frac{\pi^2}{1} - \frac{4}{1^3} \right) \sin x - \frac{\pi^2}{2} \sin 2x$$
$$+ \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{3^3} \right) \sin 3x - \frac{\pi^2}{4} \sin 4x + \cdots \Big\} . \quad (41)$$

Change of Interval تغيير المدى

بدلاً من ايجاد مفكوك دالة في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ يكون من أحياناً كثيرة المطلوب هو ايجاد ذلك المفكوك في فترة طولها $2l$ أي لقيم x بحيث $-l \le x \le l$ حيث l عدد حقيقي.

لنفرض أن $f(x)$ دالة متقطعة الاتصال في الفترة $-l \le x \le l$ ومعرفة خارج هذه الفترة بالعلاقة الدورية:

$$f(x + 2lk) = f(x) ,$$

للعدد الصحيح k.

لإيجاد معاملات فورير لهذه الدالة نتبع الآتي:
بالتعويض

$$z = \pi x / l$$

نجد أن

$$f(x) = f\left(\frac{l z}{\pi}\right) = F(z)$$

حيث $F(z)$ تكون دالة دورية في z وطول دورتها 2π.
وبالتالي في الفترة $-\pi \le z \le \pi$ يكون

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \{a_r \cos rz + b_r \sin rz\}$$

حيث

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos rz\, dz \;; \quad r = 0,1,2,\ldots$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin rz\, dz, \quad r = 1,2,3,\ldots$$

أخيراً بالتعويض عن $z = \pi x / l$ نحصل على

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{a_r \cos \frac{\pi r}{l} x + b_r \sin \frac{\pi r}{l} x\right\}, \quad (42)$$

حيث

$$a_r = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi r}{l} x\, dx, \qquad (43)$$

$$r = 0,1,2,\ldots$$

$$b_r = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi r}{l} x\, dx, \qquad (44)$$

$$r = 1,2,3,\ldots$$

بنفس الطريقة يمكن ايجاد معاملات الدالة $f(x)$ المعرفة على نصف الفترة $0 \le x \le l$.

مثال (٦) أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x) = x$ في الفترة $-1 < x < 1$.

الحل :- من العلاقات (43) ، (44) نجد أن

$$a_r = \int_{-1}^{1} x \cos \pi r x \, dx = 0 \quad , \quad r = 0, 1, 2, \ldots ,$$

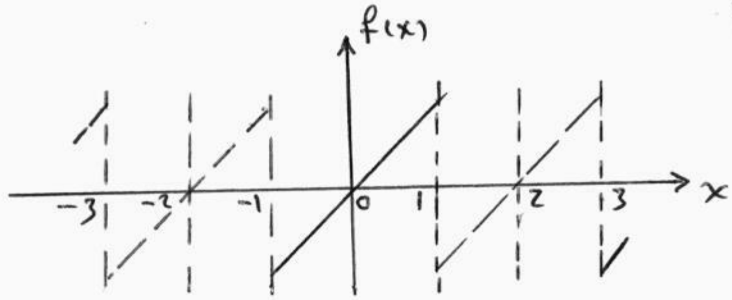
$$b_r = \int_{-1}^{1} x \sin \pi r x \, dx$$

$$= -\frac{2}{\pi r} (-1)^r \quad , \quad r = 1, 2, 3, \ldots .$$

وبذلك يكون لقيم $-1 < x < 1$

$$x = -\frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} \sin \pi r x . \qquad (45)$$

عند اعتبار الامتداد الدوري للدالة $f(x) = x$ خارج الفترة $-1 < x < 1$ باستعمال علاقة الدورية :
$$f(x) = f(x + 2K) \quad , \quad K = 0, \pm 1, \ldots$$
نجد أن انفصالات محدودة تظهر عندما $x = \pm 1$ كما يوضح الشكل التالي :



وبالتالي فإنه عند $x_0 = \pm 1$ تتقارب المتسلسلة (45) إلى

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \{ f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0 - \varepsilon) \} = \frac{1}{2} \{ 1 + (-1) \} = 0 .$$

تفاضل وتكامل متسلسلة فورير

Differentiation and Integration of a Fourier Series

سنوضح هنا وبدون برهان نظرية هامة للتكامل حد - حد لمتسلسلة فورير .

نظرية (٦) :-

متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ تكامل دائماً أي تكامل حد-حد لتعطي متسلسلة جديدة تتقارب الى تكامل الدالة $f(x)$.

بعبارة آخرى :

إذا كانت في الفترة $-\pi < x \leq \pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx)$$

وكانت $-\pi < x_1 < x_2 \leq \pi$ فإن

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{1}{2} a_0 (x_2 - x_1) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_r \cos rx + b_r \sin rx)\,dx \quad (46)$$

حيث b_r ، a_r ، a_0 معرفة بالعلاقات (5) ، (4) ، (3) على الترتيب.

على سبيل المثال كانت لقيم $-\pi < x < \pi$

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

$$= -2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\sin rx}{r} . \quad (47)$$

بالتكامل حد-حد من 0 إلى x نحصل على

$$\frac{x^2}{2} = -2\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \cdots\right]_0^x$$

$$= 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\cos rx}{r^2} + 2\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

من (30) نعلم أن

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

وبذلك يكون

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\cos rx}{r^2} \qquad (48)$$

وهذه النتيجة سبق الحصول عليها لمتسلسلة فورير (28) للدالة $f(x)=x^2$.

بصورة عامة فان عملية تكامل متسلسلة فورير لدالة حد - حد لا تعطي متسلسلة فورير لتكامل هذه الدالة ويرجع ذلك لظهور الحد $\frac{1}{2}a_0(x_2-x_1)$ عند التكامل .

على العكس مما سبق فان المتسلسلة الناتجة بتفاضل متسلسلة فورير لدالة ما $f(x)$ لا تتقارب دائماً الى $f'(x)$. فمثلاً اذا كان في الفترة $-\pi<x<\pi$

$$x=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right)$$

فان

$$1\neq 2(\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cdots) \qquad (49)$$

بل على العكس فان المتسلسلة في (49) تكون متباعدة لأن

$$\lim_{r\to\infty}\cos rx\neq 0 \quad \text{for all } x .$$

النظرية التالية تعطي الشروط التي عندها تتقارب مشتقة متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ الى $f'(x)$ وتكون متسلسلة فورير جديدة .

نظرية (٢) :

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $-\pi<x<\pi$ وتحقق العلاقة $f(x+2\pi K)=f(x)$ حيث K عدد صحيح . فان تفاضل متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ تعطي متسلسلة

فورييه للدالة $f'(x)$ طالما تحقق شروط ديريشلت
(انظر نظرية (1)) للدالة $f'(x)$.
لبرهان هذه النظرية نفترض أنه في الفترة $-\pi < x \le \pi$

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r \cos rx + b_r \sin rx \right),$$

حيث b_r ، a_r ، a_0 معرفة بالعلاقات (5) ، (4) ، (3) على الترتيب.
لنفترض الآن أن

$$f'(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\alpha_r \cos rx + \beta_r \sin rx \right)$$

وبالتالي فإنه طبقاً لشروط نظرية (1) يكون

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left\{ f(\pi) - f(-\pi) \right\}$$

$$= 0$$

لأن $f(\pi) = f(-\pi)$ ؛

$$\alpha_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos rx\, dx$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin rx\, dx$$

$$= r b_r \quad , \quad r = 1, 2, 3, \ldots ,$$

$$\beta_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin rx\, dx$$

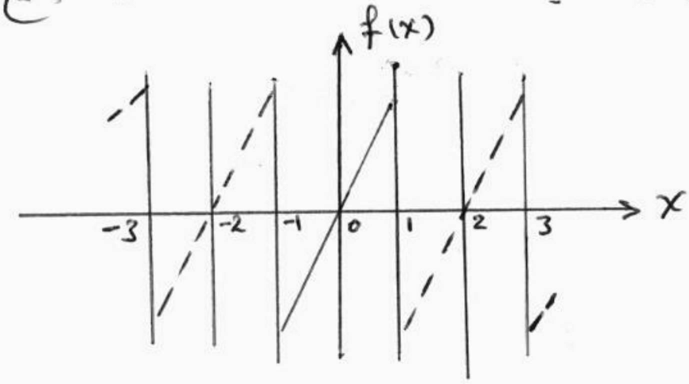
$$= -r a_r \quad , \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

وبالتالي يكون

$$f'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} r \left(b_r \cos rx - a_r \sin rx \right), \qquad (50)$$

وهذه المتسلسلة يمكن الحصول عليها بتفاضل متسلسلة فورير للدالة $f(x)$.

طبقاً لهذه النظرية نجد أنه للدالة $f(x) = x^2$ المتصلة لجميع قيم x (مع الأخذ في الاعتبار امتدادها الدوري) يؤدي تفاضل متسلسلة فورير لها إلى متسلسلة فورير للدالة $f'(x) = 2x$. بينما للدالة $f(x) = x$ لا تتحقق نتائج النظرية لأن الدالة $f(x) = x$ غير متصلة [باعتبار امتدادها الدوري] لجميع قيم x كما هو واضح بالشكل.



أمثلة عامة

[1] ارسم شكلاً تخطيطياً موضحاً الامتداد الدوري ونقط الانفصال المحدود لكل من الدوال الآتية:

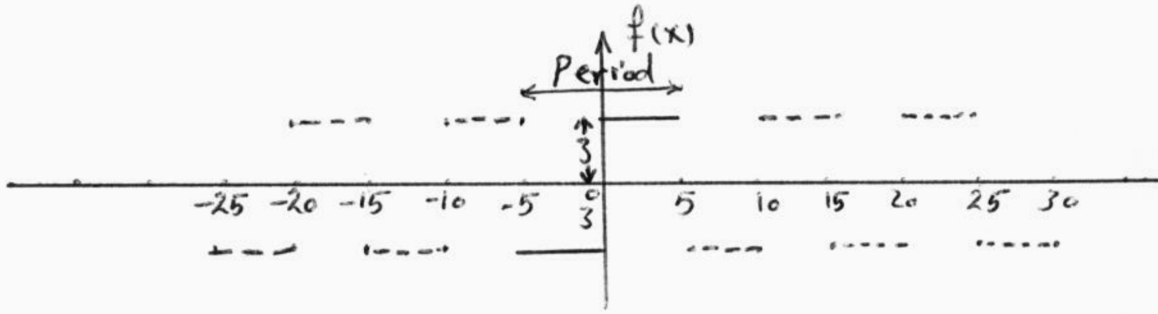
(1) $$f(x) = \begin{cases} 3 & ; \ 0 < x < 5 \\ -3 & ; \ -5 < x < 0 \end{cases}$$

(2) $$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \ 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; \ \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(3) $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le x < 2 \\ 1 & ; \ 2 \le x < 4 \\ 0 & ; \ 4 \le x < 6 \end{cases}$$

الحل :-

(١)

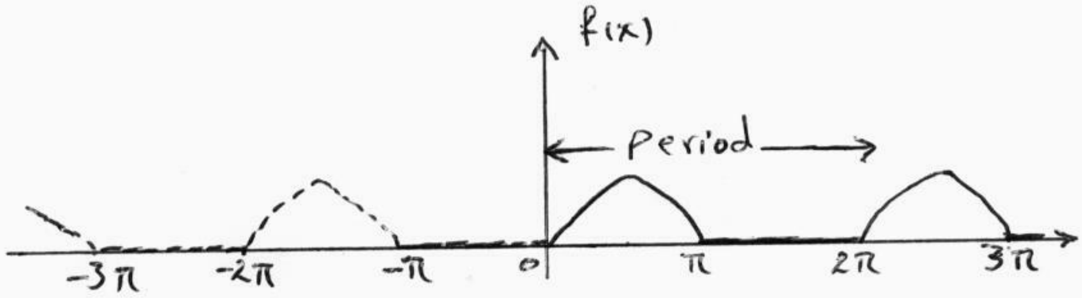


واضح أن $f(x)$ غير معرفة عند $x = 0, \pm 5, \pm 10, \dots$ هذه القيم تمثل نقط الانفصال المحدود للدالة $f(x)$. لجميع قيم x يكون

$$f(x+2lk) = f(x)$$

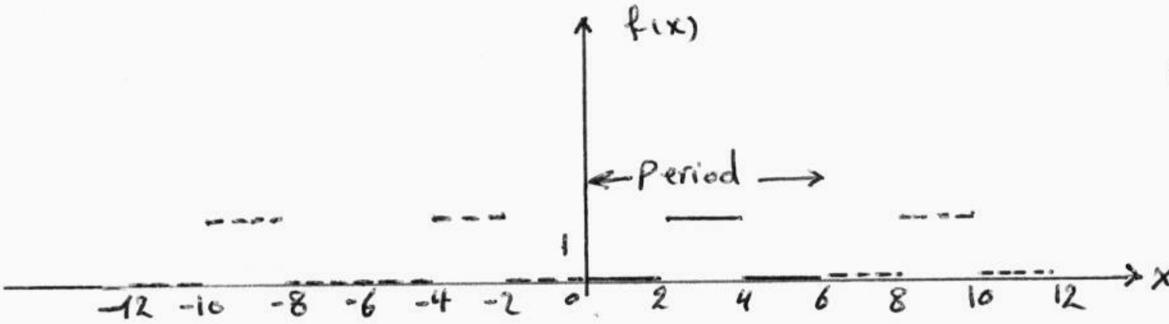
حيث $2l = 10$ هي دورة الدالة $f(x)$.

(٢)



الدالة $f(x)$ معرفة لجميع قيم x وهي دالة دورية ودورتها 2π

(٣)



واضح أن دورة الدالة $f(x)$ تساوي 6.

للدالة نقط انفصال محدود عند ما $x = \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \dots$.

$\boxed{٣}$ اثبت أن

(1) $$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi}{L}x\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \begin{cases} 0\ ; & m \neq n \\ L\ ; & m = n \neq 0 \end{cases}$$

(2) $$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0 \quad \forall\ m, n$$

الحل :-

(1) نعلم أنه إذا كانت $\alpha \neq \beta$ يكون

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right\},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right\}$$

كما أنه لجميع $m \neq n$ نعلم أن

$$\int_{-L}^{L}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi}{L}x \pm \cos\frac{(m+n)\pi}{L}x\right\}dx = 0$$

بينما إذا كانت $n = m \neq 0$ فإن

$$\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{1+\cos\frac{2n\pi}{L}x\right\}dx$$

$$= L ,$$

$$\int_{-L}^{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{1-\cos\frac{2n\pi}{L}x\right\}dx$$

$$= L$$

ويلاحظ أنه إذا كانت $m = n = 0$ فإن التكاملات السابقة تساوي $2L$.

(2) بما أنه إذا كانت $\alpha \neq \beta$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right\}$$

ومنه يكون

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\sin\frac{(m-n)\pi x}{L} + \sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx$$

$$= 0$$

وعندما $m = n$ يكون

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin 2\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

النتائج السابقة تظل صحيحة عند استبدال نهايتي التكامل $L, -L$ بالمقدارين $c+2L$ و c على الترتيب.

$\boxed{٢}$ أوجد متسلسلة فورير المناظرة للدالة

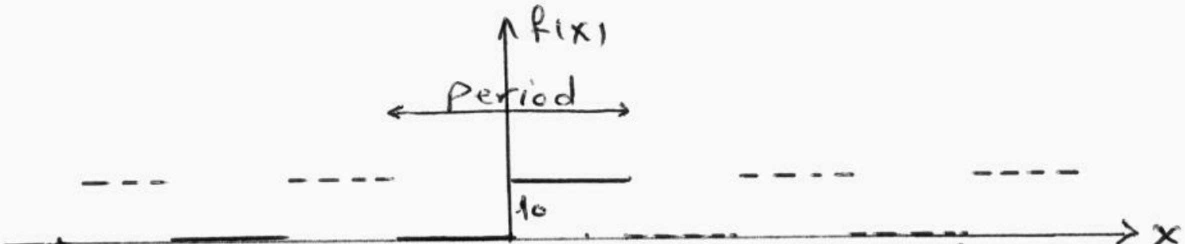
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 10 & 0 < x < 5 \end{cases}$$

ثم وضح كيف يمكن تعريف هذه الدالة بحيث تتقارب إليها متسلسلة فورير عند النقط $x = 0, \pm 5$.

الحل :-

لإيجاد متسلسلة فورير المناظرة لهذه الدالة نعتبر الامتداد الدوري لها والذي يوضحه الشكل التالي حيث يتضح أن للدالة $f(x)$ انفصال محدود عند

$$x = 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots$$



والآن نوجد معاملات فورير

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \frac{10}{5}\int_{0}^{5} dx = 10$$

$$a_r = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{r\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{10}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{r\pi x}{5}\,dx = \frac{10}{r\pi}\sin\frac{r\pi x}{5}\Big|_0^5$$

$$= 0 \quad , \quad r = 1, 2, \ldots ,$$

$$b_r = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{r\pi}{5}x\,dx$$

$$= \frac{10}{5}\int_{0}^{5}\sin\frac{r\pi}{5}x\,dx = \frac{10(1-\cos r\pi)}{r\pi},$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots .$$

ومن ثمّ نحصل لقيم $0 < x < 5$

$$f(x) = 5 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{10(1-\cos r\pi)}{r\pi}\sin\frac{r\pi x}{5}$$

$$= 5 + \frac{20}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

وهذه المتسلسلة تتقارب إلى $f(x)$ عند جميع نقط اتصال الدالة $f(x)$. أما عند نقط الانفصال المحدود للدالة وهي $x_0 = 0, \pm 5$ فإن المتسلسلة تتقارب إلى القيمة

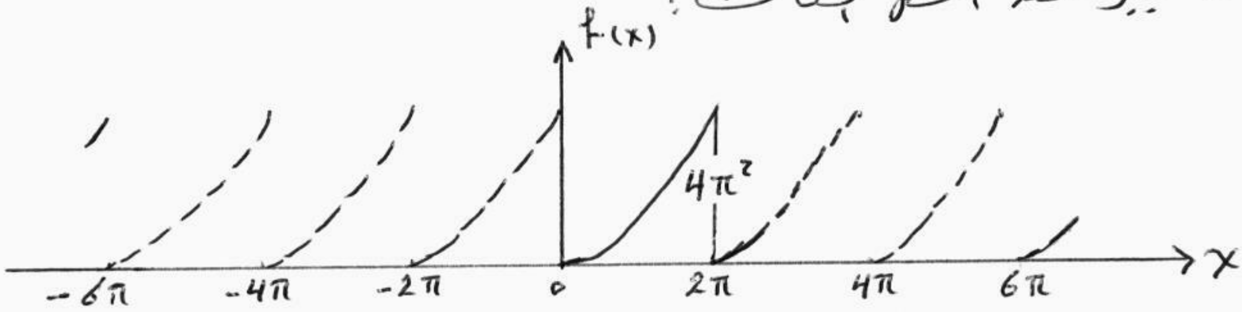
$$\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\{f(x_0+\varepsilon) + f(x_0-\varepsilon)\} = \frac{10+0}{2} = 5$$

ولذلك يمكن تعريف الدالة $f(x)$ على النحو التالي حتى تتقارب إليه متسلسلة فورير المناظرة عند جميع قيم x في الفترة $-5 \le x \le 5$

$$f(x) = \begin{cases} 5 & ; \quad x = -5 \\ 0 & ; \quad -5 < x < 0 \\ 5 & ; \quad x = 0 \\ 10 & ; \quad 0 < x < 5 \\ 5 & ; \quad x = 5 \end{cases}$$

[٤] أوجد مفكوك فورير للدالة $f(x) = x^2$ إذا كانت
$0 < x < 2\pi$

الحل :-
كما هو معتاد نعتبر الامتداد الدوري للدالة $f(x) = x^2$ وذلك
كما يعبر عنه الشكل التالي :



يتضح أن لجميع قيم x تكون $f(x)$ [باعتبار امتدادها الدوري]
دالة دورية ودورتها $2L = 2\pi$. ولكن لها نقط انفصال
محدودة مثل $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$
وعليه فإن معاملات فورير تكون

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{8\pi^2}{3}.$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos rx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos rx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{x^2\frac{\sin rx}{r} + 2x\frac{\cos rx}{r^2} - 2\frac{\sin rx}{r^3}\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{r^2}, \qquad r = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin rx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin rx\,dx$$

$$= -\frac{4\pi}{r} \quad , \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

وبذلك يكون لقيم $0 < x < 2\pi$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{r^2} \cos rx - \frac{4\pi}{r} \sin rx \right\}$$

وحيث أن للدالة انفصال محدود عند $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$
فإن المتسلسلة السابقة تتقارب عند النقطة $x = 2\pi$ مثلاً إلى
القيمة $2\pi^2$ وليست إلى $4\pi^2$. أي أن

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4}{r^2}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

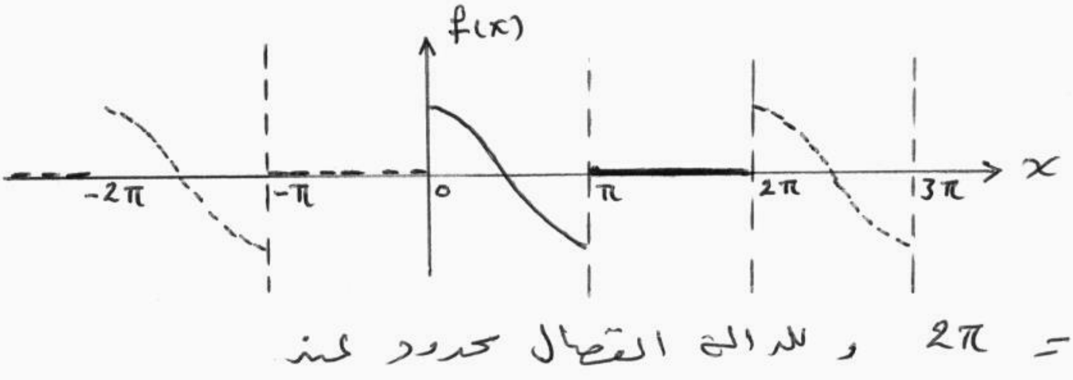
$\boxed{5}$ ارسم شكلاً تخطيطياً للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 < x < \pi \\ 0 & ; \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

يوضح انفصال الدالة ودوريتها . ثم أوجد متسلسلة فورير المناظرة
لها ومنها اثبت أن

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r r}{4r^2 - 1} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

الحل :-



الدورة $= 2\pi$ وللدالة انفصال محدود عند
$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

معاملات فورير للدالة $f(x)$ هي

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos rx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \cos rx\,dx \qquad (r = 2, 3, 4, \dots)$$

$$= 0$$

$$،\ a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin rx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin rx\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sin(r+1)x + \sin(r-1)x\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1+(-1)^r}{r+1} + \frac{1+(-1)^r}{r-1}\right\}$$

$$= \frac{\left[1+(-1)^r\right]r}{\pi(r^2-1)}$$

وبذلك تكون متسلسلة فورير للدالة المعطاة في الفترة $0 < x < \pi$ على الصورة

$$\cos x = 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left[1+(-1)^r\right]r}{\pi(r^2-1)} \sin rx$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{4r^2-1} \sin 2rx$$

وحيث أن الدالة متصلة عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فإن

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r}{4r^2-1}$$

أي أن

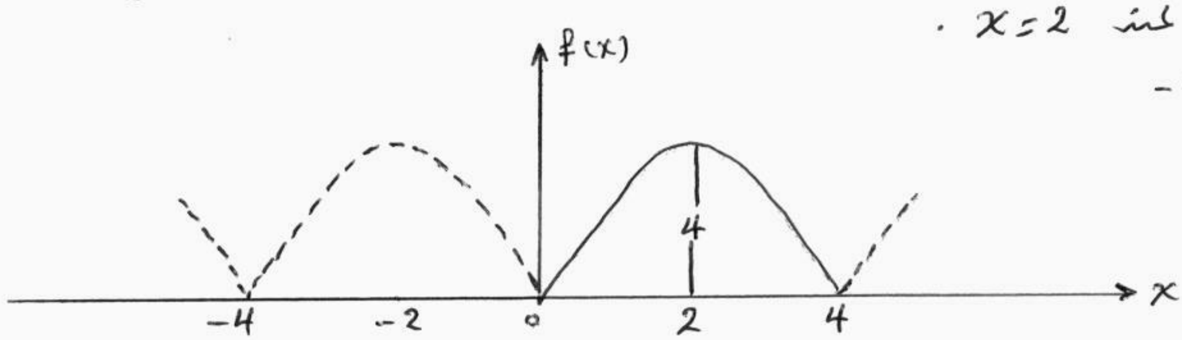
$$\frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r}{4r^2-1} .$$

[6] بين هندسياً الامتداد الدوري للدالة الآتية وادرس اتصالها

$$f(x) = x(4-x) \quad , \quad 0 < x < 4$$

ثم أوجد متسلسلة فورير المناظرة ، وأوجد مجموع المتسلسلة عند $x=2$.

الحل :-



واضح من الشكل أن الدالة

$$f(x) = x(4-x)$$

متصلة لجميع قيم x ودورية ودورتها تساوي 4

ولإيجاد متسلسلة فورير لهذه الدالة $f(x)$ نحسب المعاملات a_0, a_r, b_r حيث

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x(4-x)\,dx$$

$$= \frac{16}{3} ,$$

$$a_r = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{r\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 x(4-x)\cos\frac{r\pi x}{2}\,dx$$

$$= 2\left\{\frac{2}{r\pi}x\sin\frac{r\pi}{2}x + \frac{4}{r^2\pi^2}\cos\frac{r\pi}{2}x\right\}_{x=0}^{4}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{r\pi}x^2\sin\frac{r\pi}{2}x + \frac{8}{r^2\pi^2}x\cos\frac{r\pi}{2}x - \frac{16}{r^3\pi^3}\sin\frac{r\pi}{2}x\right\}_{x=0}^{4}$$

$$= -\frac{16}{r^2\pi^2} \quad , \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_r = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{r\pi}{2}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 x(4-x)\sin\frac{r\pi}{2}x\,dx$$

$$= 2\left\{-\frac{2}{r\pi}x\cos\frac{r\pi}{2}x + \frac{4}{r^2\pi^2}\sin\frac{r\pi}{2}x\right\}_0^4$$

$$-\frac{1}{2}\left\{-\frac{2}{r\pi}x^2\cos\frac{r\pi}{2}x + \frac{8}{r^2\pi^2}x\sin\frac{r\pi}{2}x + \frac{16}{r^3\pi^3}\cos\frac{r\pi}{2}x\right\}_0^4$$

$$= 0 \quad \text{for all } r = 1, 2, 3, \ldots$$

عندئذ تكون متسلسلة فورير $0 < x < 4$ هي

$$x(4-x) = \frac{8}{3} - \frac{16}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\cos\frac{r\pi}{2}x$$

وحيث أن الدالة $f(x) = x(4-x)$ متصلة لجميع قيم x فإن

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}}{r^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad (x = 2).$$

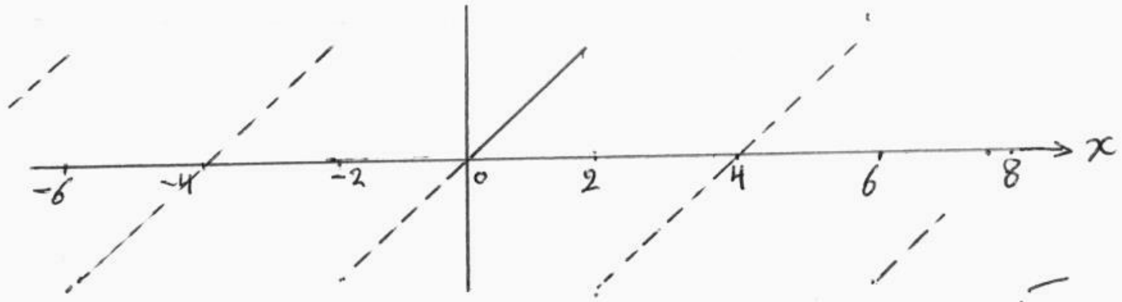
$\boxed{7}$ للدالة

$$f(x) = x \quad , \quad 0 < x < 2$$

أوجد (ا) متسلسلة فورير لدوال الجيب

(ب) متسلسلة فورير لدوال جيب التمام

الحل :- (١) بتوسيع التعريف المعطى للدالة على الفترة $-2 < x < 2$
واعتبار الامتداد الدوري لها لجميع قيم x، كما هو واضح بالشكل



بذلك نحصل على تعريف دالة فردية دورية ودورتها 4 لجميع قيم x.
ولذلك يكون

$$a_r = 0 \quad \text{for all } r = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_r = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \sin\frac{r\pi}{2}x\, dx = \int_{0}^{2} x \sin\frac{r\pi}{2}x\, dx$$

$$= \left\{ -\frac{2}{r\pi} x \cos\frac{r\pi}{2}x + \frac{4}{r^2\pi^2}\sin\frac{r\pi}{2}x \right\}_{x=0}^{2}$$

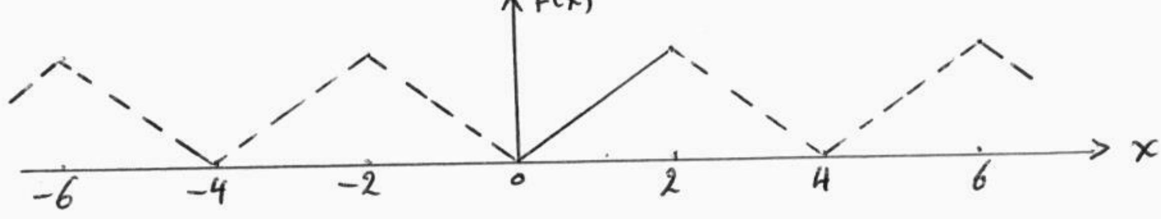
$$= \frac{-4}{r\pi}\cos r\pi = \frac{4}{r\pi}(-1)^{r+1}.$$

إذن لقيم $0 < x < 2$ يكون

$$x = \frac{4}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}}{r}\sin\frac{r\pi}{2}x$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}x - \cdots\right)$$

(٢) بتوسيع تعريف الدالة على الفترة $0 \le x \le 4$
واعتبار الامتداد الدوري لها كما بالشكل



نحصل بذلك على دالة زوجية دورية ودورتها 4 :

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x < 2 \\ -x & , 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

ومن ثم يكون

$$b_r = 0 \quad \text{for all} \quad r = 1, 2, 3, \ldots ,$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = 2 ,$$

$$a_r = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{r\pi}{2}x\,dx = \int_0^2 x\cos\frac{r\pi}{2}x\,dx$$

$$= \left\{\frac{2}{r\pi}x\sin\frac{r\pi}{2}x + \frac{4}{r^2\pi^2}\cos\frac{r\pi}{2}x\right\}_{x=0}^{2}$$

$$= \frac{4}{r^2\pi^2}(\cos r\pi - 1) \quad , \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

إذن في الفترة $0 \le x \le 2$ يكون

$$x = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{4}{r^2\pi^2}(\cos r\pi - 1)\cos\frac{r\pi}{2}x$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2}\cos\frac{(2r+1)\pi}{2}x$$

عندما $x = 0$ يكون

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

$\boxed{8}$ نفرض أن متسلسلة فورير المناظرة للدالة $f(x)$ تتقارب انتظاماً إلى $f(x)$ في الفترة $-L < x < L$. اثبت أن

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\{a_r^2 + b_r^2\} . \quad (51)$$

هذه المتطابقة تسمى "متطابقة بارسيفال" Parseval's Identity

البرهان :- إذا كانت في الفترة $-L < x < L$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r \cos\frac{r\pi x}{L} + b_r \sin\frac{r\pi x}{L}\right)$$

فاننا بالضرب في $f(x)$ والتكامل من $-L$ الى L نحصل على

$$\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx + \sum_{r=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\left\{a_r \cos\frac{r\pi x}{L} + b_r \sin\frac{r\pi x}{L}\right\}dx$$

$$= \frac{a_0^2}{2}L + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{r\pi}{L}x\,dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} b_r \int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{r\pi x}{L}\,dx$$

$$= \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\{a_r^2 + b_r^2\}\right]L$$

حيث استعملنا النتائج

$$a_r = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{r\pi x}{L}\,dx, \quad b_r = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{r\pi x}{L}\,dx$$

التي تعرف معاملات فورير للدالة $f(x)$.

النتيجة المطلوبة تنتج بالقسمة على L.

$\boxed{9}$ اكتب متطابقة بارسيفال المناظرة لمتسلسلة جيوب التمام للدالة

$$f(x) = x \quad , \quad 0 < x < 2$$

ثم أوجد مجموع المسلسلة

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{r^4} + \cdots$$

الحل :- من المثال $\boxed{7}$ نعلم أن

$L = 2,\ a_0 = 2,\ a_r = \dfrac{4}{r^2\pi^2}(\cos r\pi - 1)\ ;\ r \neq 0$

$b_r = 0$, for all r.

حينئذ تكون متطابقة بارسيفال على الصورة

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2\,dx$$

$$= \frac{(2)^2}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{16}{r^4\pi^4}(\cos r\pi - 1)^2$$

أي أن

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right)$$

ومنه

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}.$$

الآن نفرض أن

$$S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

نجد أن

$$S = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right)$$

ومنه يكون

$$\frac{15}{16}S = \frac{\pi^4}{96}$$

أو

$$S = \pi^4/90.$$

$\boxed{10}$ إذا كانت

$$f(x) = \cos\alpha x \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$$

حيث $\alpha \ne 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ اثبت صحة ما يلي

(1) $$\frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^r}{\alpha^2 - r^2}\cos rx\right),$$

(2) $$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots,$$

(3) $$\sin x = x\prod_{r=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right).$$

الحل :- لأن الدالة المعطاة دالة زوجية يكون

$$b_r = 0 \quad \text{for all } r$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha x \cos rx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\cos(\alpha-r)x + \cos(\alpha+r)x\} dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-r)\pi}{\alpha-r} + \frac{\sin(\alpha+r)\pi}{\alpha+r}\right]$$

$$= \frac{2\alpha \sin\alpha\pi \cos r\pi}{\pi(\alpha^2-r^2)} \quad , r = 1,2,3,\dots$$

$$a_0 = \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$$

إذن في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ يكون

$$\cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos r\pi}{\alpha^2-r^2}\cos rx$$

ومنه ينتج المطلوب الأول :

$$\frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\alpha^2-r^2}\cos rx\right)$$

ومنه ينتج أن

$$\pi\cot\alpha\pi - \frac{1}{\alpha} = 2\alpha\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-r^2} \quad , \quad (x=\pi)$$

وهذه نتيجة هامة لأنها تمثل مفكوك ظل التمام إلى كسور جزئية
وبتكامل هذه النتيجة بالنسبة إلى α من $\alpha=0$ إلى $\alpha=x$ نحصل على

$$\int_0^{x}\left(\pi\cot\alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right)d\alpha = \sum_{r=1}^{\infty}\ln(\alpha^2-r^2)\Big|_0^{x}$$

$$\ln \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}\Big|_0^{x} = \sum_{r=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)$$

وحيث أن

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} = 1$$

فإن

$$\ln \frac{\sin x\pi}{\pi x} = \lim_{r\to\infty} \ln\left[\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\right]$$

وبذلك يكون

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\cdots$$

وباستبدال x بالمقدار x/π نحصل على

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots$$

$$= x \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right).$$

كما أنه باعتبار $x=\frac{1}{2}$ يمكن أن نحصل على

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{4r^2-1}{4r^2} = \prod_{r=1}^{\infty}\left(\frac{2r-1}{2r}\right)\left(\frac{2r+1}{2r}\right)$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}$$

تمارين

١- ارسم شكلاً تخطيطياً لكل من الدوال الآتية توضح به اتصال الدالة ودورتها ، ثم أوجد متسلسلة فورير المناظرة

(a) $f(x) = \begin{cases} -x &, -4 \le x \le 0 \\ x &; 0 \le x \le 4 \end{cases}$, (b) $f(x) = \begin{cases} 8 &; 0 < x < 2 \\ -8 &; 2 < x < 4 \end{cases}$

(c) $f(x) = 4x \;, \; 0 < x < 10$, (d) $f(x) = \begin{cases} 2x &, 0 \le x < 3 \\ 0 &, -3 < x < 0 \end{cases}$

الجواب

(b) نقط الانفصال هي $x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$

$$\frac{16}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r-1} \sin \frac{(2r-1)\pi x}{2}$$

(a) الدالة متصلة لجميع قيم x ،

$$2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^2} \cos \frac{(2r-1)\pi x}{4}$$

(c) نقط الانفصال هي $x = 0, \pm 10, \pm 20, \ldots$

$$20 - \frac{40}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin \frac{r\pi x}{5}$$

(d) $x = \pm 3, \pm 9, \pm 15, \ldots$

$$\frac{3}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{6((-1)^r - 1)}{r^2\pi^2} \cos \frac{r\pi x}{3} - \frac{6(-1)^r}{r\pi} \sin \frac{r\pi x}{3} \right\}$$

٢- اثبت أنه عند $0 \le x \le \pi$

(1) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos 2rx}{r^2}$

(2) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin(2r-1)x}{(2r-1)^3}$

٣) اثبت أنه يمكن فك الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & ; \ 0 < x < 4 \\ x-6 & ; \ 4 < x < 8 \end{cases}$$

على الصورة

$$\frac{16}{\pi^2}\left\{ \cos\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{4} + \cdots \right\}$$

٤- أوجد مفكوك

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ 0 < x < 4 \\ 8-x & , \ 4 < x < 8 \end{cases}$$

على صورة متسلسلة

(١) جا (٢) جتا

واكتب متطابقة باستغلال المناظرة لكل حالة.

٥- اكتب متطابقات باستغلال المناظرة للمتسلسلات في المسألة (٢) ومنها اثبت أنه

$$\text{(i)} \ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} = \frac{\pi^2}{90}, \quad \text{(ii)} \ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

٦- وضح أنه عند $-\pi < x < \pi$

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots \right)$$

واثبت أنه بالتكامل يكون

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots \right).$$

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^2} - \cdots \right).$$

٧- في الفترة $0 \le x \le \pi$ أوجد مفكوك فورير للدالة

$f(x) = x(\pi - x)$

ومن ثم اثبت بالتفاضل أن

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right).$$

٨- أكتب متطابقة بارسيفال للدالة
$$f(x) = \sin x \,, \quad 0 < x < \pi$$
ثم اثبت أن
$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$
٩- اذا كانت $-\pi < x < \pi$ ، $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ اثبت أن

(i) $$\frac{\pi}{2} \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha \pi} = \frac{\sin x}{1^2 - \alpha^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - \alpha^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - \alpha^2} - \cdots$$

(ii) $$\frac{\pi}{2} \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha \pi} = \frac{\sin x}{1^2 + \alpha^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 + \alpha^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 + \alpha^2} - \cdots$$

(iii) $$\frac{\pi}{2} \frac{\cosh \alpha x}{\sinh \alpha \pi} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha \cos x}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{\alpha \cos 2x}{\alpha^2 + 2} - \cdots$$

١٠- جد متسلسلة فورير للدالة
$$f(x) = \cos \alpha x \,, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$
حيث $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ اثبت أن
$$\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots$$
١١- اذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} -1 \,; & -\pi < x < 0 \\ 0 \,; & x = 0 \\ +1 \,; & 0 < x < \pi \end{cases}$$
بين أنه في الفترة $-\pi < x < \pi$
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right)$$
واكتب متطابقة بارسيفال المناظرة.

١٢- إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

أوجد متسلسلة فورير ثم اثبت أن

$$\text{(i)} \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right)$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh \pi} - 1\right).$$

١٣- بين أنه في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ تكون متسلسلة فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1+(x/\pi) & ; -\pi \le x \le 0 \\ 1-(x/\pi) & ; 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

هي

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right).$$

ومنه إثبت أن

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^2} = \pi^2/8$$

١٤- إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < \pi/2 \\ 0 & ; x = \pi/2 \\ -1 & ; \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

بين أن

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots\right)$$

ثم أوجد مجموع المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^2}.$$

١٥- اذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x \le \pi/3 \\ \pi/3 & ; \pi/3 \le x \le 2\pi/3 \\ \pi - x & ; 2\pi/3 \le x \le \pi \end{cases}$$

بين أنه لقيم $0 \le x \le \pi$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \sin\frac{r\pi}{3} \sin rx$$

ثم أوجد المجموع $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} \sin^2\frac{r\pi}{3}$.

١٦- اذا كانت لقيم $-1 \le x \le 1$ تعرف الدالة $y(x)$ كما يلي

$$y = \begin{cases} 1/2\varepsilon & ; -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0 & ; -1 \le x < -\varepsilon , \ \varepsilon < x \le 1 \end{cases}$$

اثبت أنه في الفترة $-1 \le x \le 1$

$$y = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin r\pi\varepsilon}{r\pi\varepsilon} \cos r\pi x$$

تكاملات فورير
Fourier Integrals

تكامل فورير Fourier Integral

نفرض أن الدالة $f(x)$ تحقق الشروط الآتية

1) الدالة $f(x)$ تحقق شروط ديرشلت في الفترة محدودة $(-L, L)$:

- $f(x)$ معرفة ووحيدة القيمة ما عدا عند عدد محدود من النقط في الفترة $(-L, L)$ يكون لها انفصال محدود أي أن

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

وكلاهما محدودة عند نقطة الانفصال x_0.

- $f(x)$ تكون دورية خارج الفترة $(-L, L)$ بدورة $2L$

- $f(x)$, $f'(x)$ متصلتين بشكل متقطع في الفترة $(-L, L)$ أي أن أي منهما عبارة عن عدد محدود من المنحنيات.

2) التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

تقاربي. أي أن $f(x)$ قابلة للتكامل في الفترة $(-\infty, \infty)$.

عندئذ يكون ما يسمى بتكامل فورير كالتالي:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x\}\, d\alpha, \quad (1)$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx \\ B(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

النتيجة (1) صالحة إذا كانت x نقطة اتصال للدالة $f(x)$

إذا كانت x نقطة عدم اتصال [انفصال محدود] فإن $f(x)$ من (1) تستبدل بالصيغة

$$\frac{1}{2}\left\{ f(x+0) + f(x-0) \right\}$$

بصورة مكافئة فإن (1) يمكن كتابتها على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt\,d\alpha \qquad (3)$$

كذلك

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha(t-x)}\,dt\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt\,d\alpha \qquad (4)$$

حيث يكون مفهوماً أنه إذا كانت $f(x)$ غير متصلة عند x فإن الطرف الأيسر من (4), (3) تستبدل بالمقدار

$$\frac{1}{2}\left\{ f(x+0) + f(x-0) \right\}$$

النتيجة السابقة يمكن تبسيطها إذا كانت $f(x)$ إما دالة زوجية أو فردية فيكون لدينا على الترتيب

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha x\left\{\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right\}d\alpha . \qquad (5)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\alpha x\left\{\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right\}d\alpha . \qquad (6)$$

من (4) إذا فرضنا أن

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt, \qquad (7)$$

ينتج أن

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha, \qquad (8)$$

الدالة $F(\alpha)$ تسمى تحويل فورير Fourier Transform
للدالة $f(x)$ و يكتب :

$$F(\alpha) = \mathcal{F}[f(x)]$$

اما الدالة $f(x)$ فتكون تحويل فورير العكسي Inverse Fourier trans.
للدالة $F(\alpha)$ و يكتب :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)]$$

اذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن (5) تعطي زوج التحويلات

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \alpha t \, dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \qquad (9)$$

و نسمي $F_c(\alpha)$, $f(x)$ تحويلات جتا - فورير لكل واحد
Fourier Cosine transform.

اذا كانت $f(x)$ دالة فردية فإن (6) تعطي زوج التحويلات

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \alpha t \, dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha \qquad (10)$$

و نسمي $F_s(\alpha)$, $f(x)$ تحويلات جا - فورير لكل واحد
Fourier_ Sine transform.

مثال (1) أوجد تحويل فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & |x| < a \\ 0 , & |x| > a \end{cases}$$

ثم ارسم شكلا تخطيطيا للدالة $f(x)$ وتحويل فورير لها
عند $a = 3$.

الحل :- تحويل فورير للدالة $f(x)$ هو

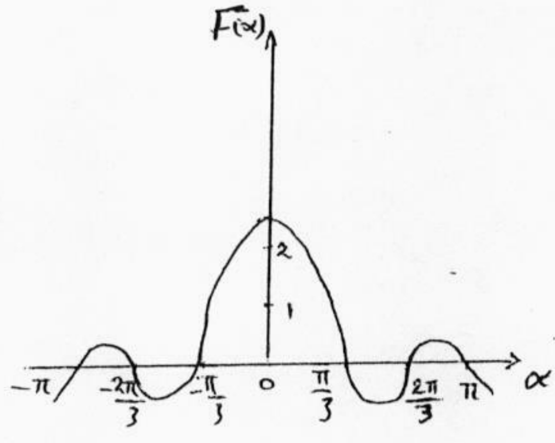
$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt$$

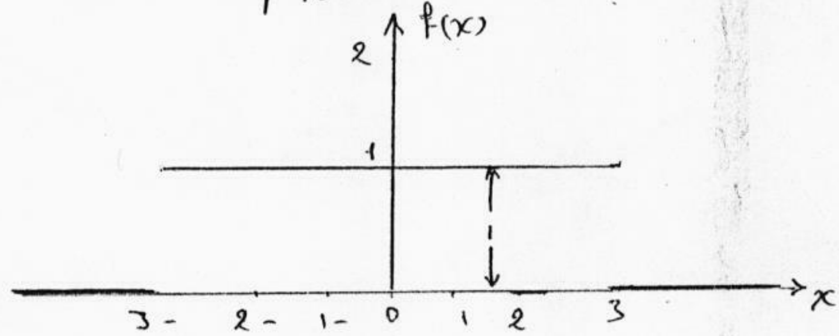
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{i\alpha t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{i\alpha t}}{i\alpha} \right|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a}}{i\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

يلاحظ أن

$$F(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a.$$





مثال (5) :- استخدم نتيجة المثال السابق لإيجاد قيمة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha$$

ومنه استنتج قيمة المقدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

الحل :- من المثال السابق وبتحويل فورير العكسي نجد أن

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

التكامل السابق يكون مساوياً للمقدار

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}\,d\alpha-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$$

لأن الدالة $\frac{\sin\alpha a\sin\alpha x}{\alpha}$ دالة فردية في α فإن التكامل الثاني

من المقدار السابق يساوي الصفر. وبذلك يكون

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}\,d\alpha=\begin{cases}\pi & ; \ |x|<a\\ 0 & ; \ |x|>a\end{cases}$$

والآن عند $x=0$ و $a=1$ يكون

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\pi$$

ومنه

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

حيث أن التكامل زوجي.

مثال (٢) أوجد تحويل فورير للدالة

$$f(x)=\begin{cases}k & , \ 0<x<a\\ 0 & , \ \text{otherwise}\end{cases}$$

حيث k, a مقادير ثابتة.

الحل:

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a}k\,e^{i\alpha x}\,dx=\frac{k\,(e^{i\alpha a}-1)}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$$

مثال (٤) أوجد التحويل فورييه للدالة

$$f(x) = e^{-ax^2} \; ; \quad a > 0$$

الحل :-

$$F(\alpha) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + i\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x - \frac{i\alpha}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{i\alpha}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\alpha^2/4a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x - \frac{i\alpha}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

الآن بفرض

$$\sqrt{a}\,x - \frac{i\alpha}{2\sqrt{a}} = t$$

ومنها نجد أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x - \frac{i\alpha}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

وبذلك يكون

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\alpha^2/4a^2}.$$

مثال (٥) أوجد تحويل فورييه جيب تمام للدالة $0 < x < \infty$

$$f(x) = e^{-x}$$

الحل :-

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos\alpha x\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-x}}{1+\alpha^2} \left\{ -\cos\alpha x + \alpha \sin\alpha x \right\}_{x=0}^{\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{2/\pi}}{1+\alpha^2}$$

تحويلات فورير للمشتقات التفاضلية

Fourier Transforms of Derivatives

نفرض أن $f(x)$ دالة متصلة وتكاملية مطلقاً لجميع قيم x
ولكن تكون $f'(x)$ متصلة بشكل متقطع (متصلة لجميع قيم x
ما عدا عند عدد محدود من النقط x) إذا أيضاً نفرض أن

$$f(x) \to 0 \quad \text{as} \quad x \to \infty .$$

بتحقيق الشروط السابقة يكون

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\alpha\, \mathcal{F}[f(x)] \qquad (11)$$

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\alpha^2\, \mathcal{F}[f(x)] \qquad (12)$$

كذلك

$$\mathcal{F}_c[f'(x)] = \alpha\, \mathcal{F}_s[f(x)] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0) \qquad (13)$$

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = -\alpha^2\, \mathcal{F}_c[f(x)] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0) \qquad (14)$$

$$\mathcal{F}_s[f'(x)] = -\alpha\, \mathcal{F}_c[f(x)] \qquad (15)$$

$$\mathcal{F}_s[f''(x)] = -\alpha^2\, \mathcal{F}_s[f(x)] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \alpha f(0) \qquad (16)$$

هذه الصيغ يمكن إثباتها بسهولة من التعريفات (10), (9), (7).
كذلك يمكن إثبات أن

$$\mathcal{F}[a f(x) + b g(x)] = a\, \mathcal{F}[f] + b\, \mathcal{F}[g] \qquad (17)$$

حيث a, b ثوابت.

مثال (٦): أوجد تحويل فورير للدالة

$$f(x) = e^{-kx} \quad ; \quad x > 0,\ k > 0.$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$e^{-kx} = \int_0^\infty \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\}\, d\alpha$$

حيث أن

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kt}\cos\alpha t\, dt$$

بالتكامل بالتجزئ

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{k e^{-kt}}{k^2+\alpha^2}\left(-\frac{\alpha}{k}\sin\alpha t + \cos\alpha t\right)\right\}_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{2k/\pi}{k^2+\alpha^2}, \qquad k>0,$$

كذلك

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kt}\sin\alpha t\, dt$$

$$= \frac{2\alpha/\pi}{k^2+\alpha^2}, \qquad k>0.$$

ومن ذلك نجد أن

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{k^2+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2k} e^{-kx}, \qquad (18)$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{k^2+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \qquad (20)$$

لتكاملات (19), (20) ليسميان بتكاملات لابلاس

كذلك نجد أن

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+k^2}\, d\alpha$$

مثال (٧) أوجد تحويل جيتا-فورير ، جا-فورير للدالة

$$f(x) = e^{-ax} \quad , \quad a > 0$$

الحل :-

بالتفاضل نجد أن

$$(e^{-ax})'' = a^2 e^{-ax}$$

أي أن $f''(x) = a^2 f(x)$

من (16)، (14) نحصل على

$$a^2 \mathcal{F}_c[f] = \mathcal{F}_c[f''] = -\alpha^2 \mathcal{F}_c[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a$$

$$\therefore \mathcal{F}_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\alpha^2} \quad , \quad a > 0 .$$

كذلك

$$a^2 \mathcal{F}_s[f] = \mathcal{F}_s[f''] = -\alpha^2 \mathcal{F}_s[f] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \alpha$$

$$\therefore \mathcal{F}_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2} \quad , \quad a > 0 .$$

مثال (٨) أوجد تحويل فورير للدالة

$$f(x) = x e^{-x^2}$$

الحل :-

$$\mathcal{F}[x e^{-x^2}] = \mathcal{F}[-\tfrac{1}{2}(e^{-x^2})']$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{F}[(e^{-x^2})']$$

$$= -\frac{i\alpha}{2}\mathcal{F}[e^{-x^2}]$$

من مثال (٤) نجد أن

$$\mathcal{F}[x e^{-x^2}] = -\frac{i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\alpha^2/4} .$$

متطابقات بارسيفال لتكاملات فورير

Parseval's Identities for Fourier Integrals

إذا كانت $F_c(\alpha)$ ، $G_c(\alpha)$ هما تحويلا جتا-فورير للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ على الترتيب ، أي أن

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx$$

$$G_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(x) \cos \alpha x \, dx$$

فإن

$$\int_0^\infty F_c(\alpha)\, G_c(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty f(t)\, g(s) \cos \alpha t \cos \alpha s \, dt\, ds$$

$$= \int_0^\infty g(s)\, ds \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha s \, d\alpha \int_0^\infty f(t) \cos \alpha t \, dt \right)$$

$$= \int_0^\infty g(s)\, f(s)\, ds$$

وذلك لأن

$$f(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \alpha t \, dt \right\} \cos \alpha s \, d\alpha$$

وعليه نحصل على القول

$$\int_0^\infty F_c(\alpha)\, G_c(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx \qquad (21)$$

بالمثل يمكن إثبات ما يلي

$$\int_0^\infty F_s(\alpha)\, G_s(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx \qquad (22)$$

في حالة خاصة عندما $f(x) = g(x)$ فإن (22) , (21) تصبحان

$$\int_0^\infty \{F_c(\alpha)\}^2 \, d\alpha = \int_0^\infty \{f(x)\}^2 \, dx \qquad (23)$$

$$\int_0^\infty \{F_s(\alpha)\}^2 \, d\alpha = \int_0^\infty \{f(x)\}^2 \, dx \qquad (24)$$

كذلك إذا كانت

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt$$

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{i\alpha s}\, ds$$

فإن

$$F(\alpha)\,\overline{G(\alpha)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, ds\, e^{-i\alpha s} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt$$

بالتكامل بالنسبة إلى α نجد أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\overline{G(\alpha)}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, ds \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha s} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt\, d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, ds \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha s} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt \right] d\alpha \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, ds \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha s}\, F(\alpha)\, d\alpha \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, f(s)\, ds$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\overline{G(\alpha)}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \qquad (25)$$

مثال (٩) حقق متطابقة بارسيفال لتكاملات فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| < a \\ 0 & ; \quad |x| > a \end{cases}$$

الحل: نعلم أن تحويل فورير لهذه الدالة هو

$$\bar{F}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}$$

يجب أن نوضح أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{F}(\alpha)\}^2 d\alpha$$

وحيث أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx = \int_{-a}^{a} 1^2 dx = 2a$$

بينما

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(\alpha)\}^2 d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha a}{\alpha^2} d\alpha$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha a}{\alpha^2} d\alpha$$

ولكننا نعلم أن

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}$$

سوف نثبت ذلك لاحقاً.

من ذلك نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{F}(\alpha)\}^2 d\alpha = 2a$$

وهو ما يحقق المطلوب.

نظرية اللف Convolution Theorem

اذا عرفنا اللف الذي يرمز له بالرمز $f*g$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ بأنه

$$f*g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt \qquad (26)$$

حينئذ يكون لدينا

$$\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g] \qquad (27)$$

لإثبات ذلك يجب فقط أن نوضح أنه اذا كانت

$$F(\alpha) = \mathcal{F}[f(x)],\quad G(\alpha) = \mathcal{F}[g(x)]$$

فإنه

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,G(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

بالتعويض عن $G(\alpha)$, $F(\alpha)$ في الطرف الأيسر نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\,d\alpha\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(s)\,e^{i\alpha s}\,e^{i\alpha t}\,dt\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-t)}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,e^{i\alpha s}\,ds\right]d\alpha\right\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-t)}\,G(\alpha)\,d\alpha\right\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

نضرب الطرفين في $1/\sqrt{2\pi}$ نحصل على

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)\,G(\alpha)] = (f*g)(x)$$

أي

$$\mathcal{F}[f*g] = F(\alpha)\,G(\alpha) = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]$$

Table I. "Special Fourier Cosine Transforms"

	$f(x)$	$\mathcal{F}_c[f](\alpha)$		$f(x)$	$\mathcal{F}_c[f](\alpha)$
1	$\begin{cases} 1 ; & 0<x<a \\ 0 ; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a\alpha}{\alpha}$	10	$\frac{\sin ax}{x}$; $a>0$	$\begin{cases} \pi/2 ; & \alpha<a \\ \pi/4 ; & \alpha=a \\ 0 ; & \alpha>a \end{cases}$
2	x^{a-1}, $0<a<1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\Gamma(a)}{\alpha^a} \cos\frac{a\alpha}{2}$	11	$\cos ax^2$; $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\alpha^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
3	$x^{-1/2}$	$1/\sqrt{\alpha}$	12	$\sin ax^2$, $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\alpha^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
4	x^{-n} ; $0<n<1$	$\frac{\sqrt{\pi}\ \alpha^{n-1} \sec\frac{n\pi}{2}}{\Gamma(n) \sin n\pi}$	13	$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tan^{-1}\frac{2}{\alpha^2}$
5	e^{-ax} ; $a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{a}{a^2+\alpha^2}$	14	$\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+c^2}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{-c\alpha} - e^{-b\alpha}}{\pi\alpha}$
6	$x^n e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{n!}{(a^2+\alpha^2)^{n+1}} \times \mathrm{Re}[a+i\alpha]^{n+1}$	15	$\frac{\cosh(\sqrt{\pi}\, x/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}\, x)}$	$\frac{\cosh(\sqrt{\pi}\, \alpha/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}\, x)}$
7	$x^{n-1} e^{-bx}$	$\frac{\Gamma(n) \cos(n \tan^{-1}\frac{\alpha}{b})}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ (\alpha^2+b^2)^{n/2}}$	16	$\mathrm{sech}(bx)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{1}{b}\ \mathrm{sech}\frac{\pi\alpha}{2b}$
8	e^{-ax^2}, $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\alpha^2/4a}$	17	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{\pi e^{-a\alpha}}{2a}$
	$e^{-x^2/2}$	$e^{-\alpha^2/2}$			
9	$\begin{cases} \cos x ; & 0<x<a \\ 0 ; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-\alpha)}{1-\alpha} + \frac{\sin a(1+\alpha)}{1+\alpha}\right]$	18	$\frac{e^{-b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{2} \cos\left(2b\sqrt{\alpha} + \frac{\pi}{4}\right)$ or $\sqrt{2} \sin\left(2b\sqrt{\alpha} - \frac{\pi}{4}\right)$

Table II. "Special Fourier Sine Transforms"

	$f(x)$	$\mathcal{F}_s[f](\alpha)$		$f(x)$	$\mathcal{F}_s[f](\alpha)$
1	$\begin{cases} 1; & 0<x<a \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos a\alpha}{\alpha}$	12	$\begin{cases} \sin x; & 0<x<a \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-\alpha)}{1-\alpha} - \frac{\sin a(1+\alpha)}{1+\alpha}\right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{\alpha}$	13	$\frac{\sin bx}{x};\ b>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left(\frac{\alpha+b}{\alpha-b}\right)$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{\alpha}$	14	$\frac{\sin bx}{x^2};\ b>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases} \alpha; & \alpha<b \\ b; & \alpha>b \end{cases}$
4	$x^{a-1};\ 0<a<1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma(a)}{\alpha^a}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$	15	$\frac{\cos bx}{x};\ b>0$	$\sqrt{2\pi}\begin{cases} 0; & \alpha<b \\ 1/4; & \alpha=b \\ 1/2; & \alpha>b \end{cases}$
5	x^{-1}	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	16	$x^{-n};\ 0<n<2$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\alpha^{n-1}\sec\frac{n\pi}{2}}{\Gamma(n)}$
6	$\frac{x}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-a\alpha}$	17	$\tan^{-1}\frac{x}{b}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-b\alpha}}{\alpha}$
7	$e^{-ax};\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+a^2}$	18	$\sec bx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{b}\tanh\frac{\pi\alpha}{2b}$
8	$\frac{e^{-ax}}{x},\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{\alpha}{a}$	19	$\tan^{-1}\frac{2b}{x},\ b>0$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{\sinh b\alpha}{\alpha}\,e^{-b\alpha}$
9	$x^n e^{-ax};\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{n!}{[\alpha^2+a^2]^{n+1}}\,\mathrm{Im}\,(a+i\alpha)^{n+1}$			
10	$x^{n-1}e^{-ax};\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\Gamma(n)\sin\left(n\tan^{-1}\frac{\alpha}{a}\right)\right\}/(\alpha^2+a^2)^{n/2}$			
11	$x\,e^{-ax^2};\ a>0$	$\frac{\alpha}{(2a)^{3/2}}\,e^{-\alpha^2/4a}$	20	$\frac{1}{e^{2x}-1}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\pi}{4}\coth\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2\alpha}\right]$

Table III. Special Fourier Transforms

	$f(x)$	$\mathcal{F}[f](\alpha)$		$f(x)$	$\mathcal{F}[f](\alpha)$
1	$\begin{cases} 1\,; & -b<x<b \\ 0\,; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin b\alpha}{\alpha}$	10	$\begin{cases} e^{-x}\,; & x\geq 0 \\ -e^{-x}\,; & x<0 \end{cases}$	$-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$
2	$\begin{cases} 1\,; & b<x<c \\ 0\,; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{-ib\alpha}-e^{-ic\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$	11	$e^{-ax^2}\,;\ a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-\alpha^2/4a}$
3	$\frac{1}{x^2+a^2}\,;\ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a\alpha}}{a}$	12	$f^{(n)}(x)$	$i^n\alpha^n\mathcal{F}[f]$
4	$\frac{x}{x^2+a^2}\,;\ a>0$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,i\,e^{-a\alpha}$	13	$x^n f(x)$	$i^n\frac{d^n}{d\alpha^n}\mathcal{F}[f]$
5	$\begin{cases} x\,; & 0<x<b \\ 2x-a\,; & b<x<2b \\ 0\,; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{-1+2e^{ib\alpha}-e^{-2ib\alpha}}{\sqrt{2\pi}\,\alpha^2}$	14	$f(bx)\,e^{itx}$	$\frac{1}{b}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\alpha-t}{b}\right)$
6	$\begin{cases} e^{-ax}\,; & x>0 \\ & (a>0) \\ 0\,; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(a+i\alpha)}$	15	$f(x)\,e^{iax}$	$\mathcal{F}[f](\alpha-a)$
7	$\begin{cases} e^{ax}\,; & b<x<c \\ 0\,; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-i\alpha)c}-e^{(a-i\alpha)b}}{\sqrt{2\pi}\,(a-i\alpha)}$	16	$f(x-a)$	$e^{-i\alpha a}\,\mathcal{F}[f(x)]$
8	$\begin{cases} e^{iax}\,; & b<x<c \\ 0\,; & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{ib(a-\alpha)}-e^{ic(a-\alpha)}}{a-\alpha}.$			
9	$\frac{\sin ax}{x}\,;\ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;\ \lvert\alpha\rvert<a$ S $\ 0\,;\ \lvert\alpha\rvert>a.$			

أمثلة عامة

[1] حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = \begin{cases} 1-\alpha , & 0\le \alpha \le 1 \\ 0 , & \alpha > 1 \end{cases}$$

الحل :-

نفرض أن

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx$$

نجد أن

$$F(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; 1-\alpha \;; & 0\le\alpha\le 1 \\ 0 \;; & \alpha>1 \end{cases}$$

حينئذ يكون

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \\ &= \frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2} . \end{aligned}$$

[2] استخدم المسألة (1) لنوضح أن

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2} \qquad (28)$$

الحل : من المسألة السابقة نعلم أن

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\cos\alpha x\,dx = \begin{cases} 1-\alpha , & 0\le\alpha\le 1 \\ 0 , & \alpha>1 \end{cases}$$

عندما $\alpha \to 0$ نجد أن

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

وحيث أن

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

ينتج أن

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 x/2}{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du .$$

[٢] اثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{(1-\cos x)^2}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{6}$$

الحل :-

سبق أن علمنا أن

$$F(\alpha) = \mathcal{F}_c\left\{\frac{2(1-\cos x)}{\pi\, x^2}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-\alpha) \quad ; \quad 0 \le \alpha \le 1$$

وبتطبيق متطابقة بارسيفال (23) ينتج أن

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(1-\cos x)^2}{x^4}\,dx = \int_0^\infty \{F(\alpha)\}^2\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-\alpha)^2\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{3\pi}$$

ومنه ينتج أن

$$\int_0^\infty \frac{(1-\cos x)^2}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{6}$$

[٤] وضح أن

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x \geq 0$$

الحل :- بوضع $f(x) = e^{-x}$ يكون

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha x \, d\alpha \int_0^\infty \cos \alpha t \, e^{-t}\, dt$$

وحيث أن :

$$\int_0^\infty e^{-t} \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

حينئذ يكون

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha$$

ومنه ينتج أن

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-x} \qquad (29)$$

[٥] بين أن

(i) $$\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^L \frac{\sin \alpha t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

(ii) $$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-L}^0 \frac{\sin \alpha t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

الحل :-

(i) بفرض $\alpha t = x$ يكون

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^L \frac{\sin \alpha t}{t}\, dt = \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\alpha L} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

(ii) بفرض $\alpha t = -x$ نجد أن

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-L}^0 \frac{\sin \alpha t}{t}\, dt = \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\alpha L} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

[٦] حل المعادلة $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ تحت الشروط

$$u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1 \ ; & 0 < x < 1 \\ 0 \ ; & x \geq 1 \end{cases}$$

الحل: من المناسب هنا استخدام تحويل جا-فورير لأن
(i) x متغير محدود حيث $0 < x < 1$
(ii) $u(0,t) = 0$

نفرض أن $\tilde{u}(\alpha) = \mathcal{F}_s[u]$ نجد أن

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\alpha^2 \tilde{u}(\alpha,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \alpha\, \tilde{u}(0,t)$$

$$= -\alpha^2 \tilde{u}(\alpha,t)$$

$$\tilde{u}(\alpha,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x,0) \sin \alpha x \, dx$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, (1 - \cos\alpha)$$

ومن ذلك نحصل على

$$\tilde{u}(\alpha,t) = C e^{-\alpha^2 t}$$

حيث

$$C = \tilde{u}(\alpha,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, (1 - \cos\alpha)$$

وبالتالي فإن

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 - \cos\alpha) e^{-\alpha^2 t} \sin \alpha x \, d\alpha$$

هى حل المعادلة التفاضلية $u_t = u_{xx}$ تحت تأثير الشروط المعطاة.

[٧] اثبت أن $\mathcal{F}[e^{-x^2/2}] = e^{-\alpha^2/2}$

لأن $e^{-x^2/2}$ دالة زوجية فإن تحويل فورييه لها هو

$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}] = \sqrt{2/\pi}\int_0^\infty e^{-x^2/2}\cos x\alpha \, dx$$

بفرض أن $x = \sqrt{2}\,u$ يكون

$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\cos(\alpha\sqrt{2}\,u)\,du$$

والآن لإيجاد قيمة التكامل

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u^2}\cos\alpha\sqrt{2}\,u \, du$$

نتبع الآتي ،
بالتفاضل بالنسبة إلى α ، نحصل على

$$\frac{dI}{d\alpha} = \sqrt{2}\int_0^\infty -u\, e^{-u^2}\sin\alpha\sqrt{2}\,u \, du$$

بالتكامل بالتجزئ نجد أن

$$\frac{dI}{d\alpha} = \sqrt{2}\left\{ \frac{1}{2}e^{-u^2}\sin\alpha\sqrt{2}\,u\Big|_0^\infty - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-u^2}\cos\alpha\sqrt{2}\,u\,du \right\}$$

$$= -\alpha\, I(\alpha)$$

وبالتالي فإن

$$I(\alpha) = c\, e^{-\alpha^2/2}$$

حيث c ثابت اختياري ، ولتحديد قيمته من العلاقة

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

نجد أن

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2/2}$$

وبالتالي نحصل على

$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}] = e^{-\alpha^2/2}.$$

⑧ حقق نظرية اللف للدالتين

$$f(x) = x, \qquad g(x) = e^{-x^2}$$

الحل:-

بما أن

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, f(x-t)\, dt$$

فإن دالة اللف للدالتين f, g تعرف بالآتي

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(x-t)\, dt$$

ولأن الدالة te^{-t^2} دالة فردية فإن

$$(f*g)(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = x\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= x/\sqrt{2}.$$

الآن يجب أن نوضح أن

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]\} = (f*g)(x)$$

وحيث أن

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\, \mathcal{F}[f](\alpha)\, \mathcal{F}[g](\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} e^{i\alpha s} ds \right\} \mathcal{F}[f](\alpha) d\alpha$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-s)} \mathcal{F}[f](\alpha) d\alpha \right\} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f]\}(x-s) ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(x-s) ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} (x-s) ds = x/\sqrt{2}$$

$$= (f * g)(x).$$

$\boxed{9}$ حل المعادلة التكاملية

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(t) r(x-t) dt$$

حيث $g(x), r(x)$ دوال معلومة

الحل: نفرض أن

$$\mathcal{F}[y] = Y(\alpha), \quad \mathcal{F}[g] = G(\alpha), \quad \mathcal{F}[r] = R(\alpha)$$

بتطبيق تحويل فورير تؤول المعادلة التكاملية إلى المعادلة

$$Y(\alpha) = G(\alpha) + Y(\alpha) R(\alpha) \sqrt{2\pi}$$

حيث استخدمت نظرية الالتفاف، بذلك ينتج

$$Y(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{1 - \sqrt{2\pi} R(\alpha)}.$$

$$\therefore \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\alpha)}{1 - \sqrt{2\pi} R(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

تمارين

١- أوجد تحويل فورير للدوال

(1) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$, (2) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & ; x < 0 \\ 0 & ; x > 0 \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; |x| \geq 1 \end{cases}$, (4) $f(x) = \begin{cases} 1 & ; 1 < x < 3 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$, (6) $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 9 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$

٢- أوجد تحويل فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & ; |x| \leq \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

ثم عين نهاية التحويل عندما $\varepsilon \to 0^+$.

٣- أوجد تحويل فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

واحسب قيمة

$$\int_0^\infty \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cos\frac{x}{2}\, dx$$

ثم اثبت أن [متطابقة بارسيفال]

$$\int_0^\infty \frac{(x\cos x - \sin x)^2}{x^3}\, dx = \frac{\pi}{15}$$

٤- أوجد تحويل جا فورير و جتا فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

ثم اثبت أن

$$\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2 dx = \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

٥- اثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-x} \;;\; x>0$$

هل العلاقة صحيحة عندما $x=0$.

٦- أوجد $y(x)$ بحيث

$$\int_0^\infty y(x) \sin xt \, dx = \begin{cases} 1 \;; & 0 \le t < 1 \\ 1/2 \;; & 1 \le t < 2 \\ 0 \;; & t \ge 2 \end{cases}$$

٧- حل المعادلة

$$u_t = 2u_{xx} \;,\; u(x,0) = e^{-x} \;;\; x>0$$
$$u(0,t) = 0 .$$

٨- اثبت أن

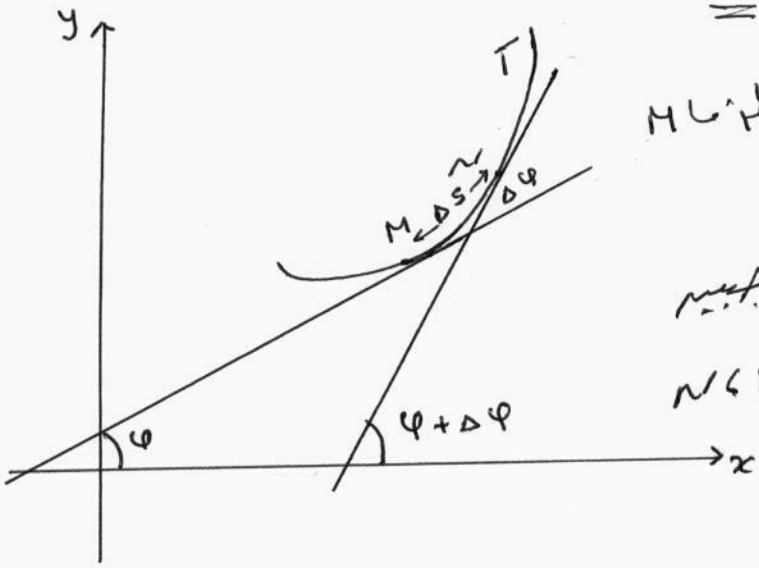
$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha$$

حل المعادلة

$$u_t = u_{xx} \;;\; u_x(0,t) = 0 ,\; u(x,0) = \begin{cases} x \;; & 0 \le x \le 1 \\ 0 \;; & x > 1 \end{cases}$$

الانحناء (أو التقوس) لمنحنٍ في المستوى

The Curvature of a plane curve.



الانحناء K لمنحنٍ ما Γ عند نقطة ما M عليه هو النهاية للنسبة بين

1) الزاوية بين الاتجاهين الموجبين للمماسين عند النقطتين N ، M على المنحنى

2) طول القوس $\Delta S = \overset{\frown}{MN}$

عندما $N \to M$. انظر الشكل السابق. أي أن

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \qquad (1)$$

وبالتالي فالانحناء K هو معدل تغير φ بالنسبة إلى s حيث φ هي زاوية ميل المماس عند M على الاتجاه الموجب لمحور x ، و s عنصر طول القوس من المنحنى Γ ابتداءً من M.

نصف قطر الانحناء R (radius of curvature) يُعرف بالصيغة

$$R = \frac{1}{|K|} \qquad (2)$$

فمثلاً للدائرة يكون $K = \frac{1}{a}$ حيث a نصف قطر الدائرة وللخط المستقيم فإن $K = 0$. فيما يلي بعض الصيغ التي تستخدم في حساب الانحناء لمنحنٍ مستوٍ.

(١) إذا كانت معادلة المنحنى على الصورة $y = f(x)$ فإن

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

(٢) إذا كان المنحنى معرف بارامترياً بالمعادلات

$$x = f(t), \quad y = g(t) \qquad a \le t \le b \qquad (4)$$

فإن

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \qquad (5)$$

حيث

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

(٣) إذا كانت معادلة المنحنى في الصورة القطبية $r = f(\theta)$ فإن

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \qquad (6)$$

حيث

$$r' = \frac{dr}{d\theta}, \quad r'' = \frac{d^2r}{d\theta^2}.$$

<u>دائرة الانحناء circle of curvature</u>

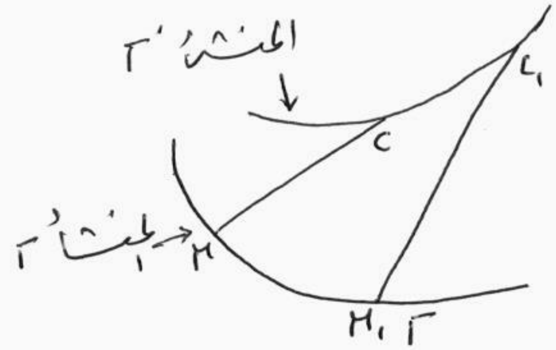
دائرة الانحناء لمنحنى ما نقطة M عليه هي الوضع النهائي للدائرة التي تمر بالنقطة M ونقطتين اخريتين P, Q على المنحنى عندما $P \to M$ و $Q \to M$. ونصف قطر دائرة الانحناء عند M يساوي نصف قطر الانحناء R عند M ويقع مركز دائرة الانحناء على العمودي على المنحنى عند M (العمودي مأخوذ في اتجاه التقعر للمنحنى) واحداثيات المركز هي

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \quad , \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \qquad (7)$$

حيث (x,y) احداثيات نقطة الانحناء M.

تعريف :- إذا كان Γ منحنى في المستوى فإن المحل الهندسي لمراكز الانحناء للمنحنى Γ يسمى المنشور the evolute للمنحنى Γ وعندئذ يسمى Γ بالمنشأ the involute

ملاحظة :- العمودي على المنشأ يكون مماساً للمنشور



مثال (1) :- أوجد معادلة المنشور للقطع المكافئ

$$y = x^2$$

الحل :- مركز الانحناء للقطع المكافئ هو

$$\alpha = -4x^3 \quad , \quad \beta = \frac{1+6x^2}{2}$$

بحذف البارامتر x من المعادلتين نحصل على

$$\beta = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{-\alpha}{4}\right)^{2/3} = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{2/3}$$

بالرموز المعتادة فإن المعادلة المطلوبة هي

$$y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}$$

رؤوس (قمم) منحنى Vertices

تعريف :- رأس (أو قمة) منحنى هو نقطة على المنحنى والتي عندها يكون الانحناء للمنحنى له قيمة عظمى أو صغرى.

ملاحظة :- رؤوس منحنى هي نقاط القيم القصوى لنصف قطر انحناء R حيث

$$R = \frac{1}{|k|}$$

مثال (٢): أوجد رأس منحنى الكاتينة $y = a\cosh\frac{x}{a}$ حيث $0 < a$

الحل: حيث إن $y' = \sinh\frac{x}{a}$, $y'' = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}$ فإن

الانحناء لمنحنى الكاتينة هو

$$K = \frac{1}{a\cosh^2\frac{x}{a}}$$

وعندئذ يكون نصف قطر الانحناء

$$R = a\cosh^2\frac{x}{a}$$

ومنها

$$\frac{dR}{dx} = 2\cosh\frac{x}{a}\sinh\frac{x}{a}$$

$$= \sinh\frac{2x}{a}$$

ومن ذلك النقطة الحرجة للدالة R (ومن ثم K) هي $x = 0$

وحسابنا R'' عند $x = 0$ نجد أن

$$R''(0) = \frac{2}{a}\cosh\frac{2x}{a}\Big|_{x=0} = \frac{2}{a} > 0$$

أي أن $R(0)$ قيمة صغرى (أو $K(0)$ قيمة عظمى)

وبالتالي فإن رأس منحنى الكاتينة عند النقطة $(0, a)$.

تمارين: (١) أوجد انحناء دائرة نصف قطرها a إذا كان

(أ) المعادلات البارامترية للدائرة

$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \mathbb{R}$

(ب) المعادلة القطبية للدائرة $r = a$

(جـ) المعادلة الديكارتية للدائرة $x^2 + y^2 = a^2$

(٢) أوجد نصف قطر الانحناء للحلزون $r = e^{\theta}$

(٣) أوجد النقاط على المنحنى $y = \ln x$ التي عندها يكون الانحناء أكبر ما يمكن

٤) أوجد مركز الانحناء للمنحنى

$$x = \cos\theta + \theta\sin\theta, \quad y = \sin\theta - \theta\cos\theta$$

٥) أوجد معادلة دائرة الانحناء عند النقطة (1,1) للمنحنى

$$2xy + x + y = 4$$

٦) أوجد الانحناء للمنحنى $y = a\cosh\frac{x}{a}$

٧) أوجد الانحناء للمنحنى

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

٨) أوجد الانحناء للمنحنى

$$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$$

٩) أوجد نصف قطر الانحناء للمنحنى $r^2\cos 2\theta = a^2$

١٠) أوجد النقاط على المنحنى التالي والتي عندها يكون نصف قطر الانحناء أكبر ما يمكن

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$$

١١) أوجد النقاط على المنحنى $y = e^x$ التي عندها يكون الانحناء أكبر ما يمكن.

١٢) أوجد مركز الانحناء للقطع الناقص $x = a\cos t, y = b\sin t$

١٣) أوجد النقاط على المنحنى $y = x + 3x^2 + x^3$ التي عندها يكون نصف قطر الانحناء لانهائياً.

جبر مجرد 1

لطلاب الفرقة الثانية تربية عام رياضيات

المحتويات الصفحة

الفصل الأول

مقدمة (مفاهيم وتعاريف أساسية)

نظرية المجموعات Set Theory

المجموعة الخالية:

هى مجموعة لاتحتوى على أى عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ.

المجموعة الشاملة:

هى المجموعة التى تحوى جميع العناصر التى تملك الخاصية p ويرمز لها بالرمز U أو هى المجموعة التى تحوى كل المجموعات تحت الدراسة.

العلاقات على المجموعات:

علاقة الإنتماء:

إذا كان x عنصر من المجموعة A فإننا نقول أن x ينتمى إلى A ونعبر عن ذلك بالعبارة $x \in A$. وإذ لم يكن x عنصرا من المجموعة A فإننا نكتب $x \notin A$.

علاقة الإحتواء:

إذا كانت A , B مجموعتين فإننا نقول عن A أنها محتواه فى B أو أن B تحوى A ، أو أن A مجموعة جزئية من B ، إذا

كان كل عنصر من A هو عنصر من B ونعبر عن ذلك رياضيا:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$.

ونقول أن المجموعة A غير محتواه فى المجموعة B أو أن A ليست مجموعة جزئية من المجموعة B إذا وجد عنصر على الأقل من A لا ينتمى إلى المجموعة B ونعبر عن ذلك بالعبارة:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A; x \notin B$$.

تساوى مجموعتين:

نقول عن المجموعتين A , B أنهما متساويتان إذا تحقق الشرط التالى: $B \subseteq A$, $A \subseteq B$ ونكتب $A = B$.

قوة المجموعة: *Power of a set*

تعرف قوة المجموعة A بأنها مجموعة كل المجموعات الجزئية من A ونرمز لها بالرمز $P(A)$. ونعبر عن ذلك رياضيا :

$$P(A) = \{F : F \subseteq A\}$$.

رتبة المجموعة:

تعرف رتبة المجموعة A بأنها عدد عناصر المجموعة A ونرمز لها بالرمز $|A|$ او $O(A)$. فإذا كان عدد عناصر A هو $n\ (n < \infty)$ قلنا أن المجموعة A منتهية ونكتب $|A| = n$ أما

إذا كان عدد عناصر A غير نهائى قلنا أن المجموعة A غير منتهية ونكتب $|A| = \infty$.

العمليات على الجموعات:

الإتحاد:

نعرف إتحاد مجموعتين B, A بأنه مجموعة العناصر التى تنتمى إلى A أو B ونرمز له بالرمز $A \cup B$. أى أن :

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

التقاطع:

نعرف تقاطع مجموعتين B, A بأنه مجموعة العناصر التى تنتمى إلى A و B ونرمز له بالرمز $A \cap B$. أى أن :

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

الفرق:

نعرف فرق المجموعة B عن المجموعة A ويرمز له بالرمز $A - B$ بأنه مجموعة العناصر التى تنتمى إلى A ولا تنتمى إلى B. أى أن : $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

الفرق المتماثل:

نعرف الفرق المتماثل للمجموعتين B, A ويرمزله بالرمز $A \triangle B$ بأنه مجموعة العناصر التى تنتمى إلى A فقط أو تنتمى

إلى B فقط. أى أن: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

التجزئة:

لتكن X مجموعة ما و $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من الجموعة X. تسمى هذه العائلة تجزئة للمجموعة X إذا حققت الشرطين التاليين :

(1) $A_i \cap A_j = \phi, \forall i \neq j$.

(2) $\bigcup_{i\in I} A_i = X$.

ضرب المجموعات Product of sets

لتكن B, A مجموعتين غير خاليتين، نسمى الثنائية (x, y) زوجا مرتبا حيث $y\in B, x\in A$ ونسمى مجموعة كل الثنائيات من الشكل (x, y) حيث $y\in B, x\in A$ الضرب الديكارتى للمجموعتين B, A. ونرمز له بالرمز $A\times B$. ويكون :

$$A\times B=\{(x,y):x\in A, y\in B\}$$

ملاحظات :

إذا كانت $A=B$ فإننا نرمز لحاصل الضرب $A\times A$ بالرمز

$$A^2=\{(x,y):x,y\in A\}$$

بشكل عام : إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n$ عائلة منتهية من المجموعات فإننا نرمز للضرب الديكارتى لهذه المجموعات بالرمز $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ويعرف بالشكل :

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in A_i\}$$

وإذا كانت $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ فإننا نرمز لحاصل الضرب لهذه المجموعات بالرمز A^n ويكون :

$$A^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in A\}$$

العلاقات Relations

تعريف (1.1.1): تسمى كل مجموعة جزئية R من حاصل الضرب $A \times B$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B.
ونلاحظ أن عناصر العلاقة R هى أزواج مرتبة (a,b) حيث $a \in A, b \in B$. إذا كان $(a,b) \in A \times B$ فإننا نكتب ذلك بالشكل aRb ونقرأ ذلك كما يلى : العنصر a مرتبط بالعنصر b بالعلاقة R. وإذا كانت $A = B$ فإن العلاقة R تسمى علاقة فى A.

علاقة التكافؤ:

نقول أن R تشكل علاقة تكافؤ إذا حققت الخواص التالية:

عاكسة – متماثلة – ناقلة . نرمز لعلاقة التكافؤ عادة بالرمز $\Leftrightarrow$ أو بالرمز $\sim$.

صفوف التكافؤ:

لتكن $\sim$ علاقة تكافؤ على A وليكن $x \in A$ ، نسمى مجموعة العناصر في A والمرتبطة مع x بعلاقة التكافؤ $\sim$ بصف تكافؤ العنصر x ونرمز عادة لصف التكافؤ بالرمز $\overline{x}$ أو بالرمز $[x]$. ويكون : $[x]=\{y \in A : y \sim x\}$ كما نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز $A/\sim$ وتسمى مجموعة القسمة للمجموعة A على علاقة التكافؤ $\sim$.

الرواسم Mappings

تعريف (2.1.1): لتكن R علاقة من A إلى B. نقول عن R أنها راسم إذا كان كل عنصر X من A يرتبط بعنصر واحد فقط y من B.

فإذا كان f راسما من A إلى B فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $f : A \to B$. وتكتب $y = f(x)$.

نسمى A نطاق الراسم f أو مجال الراسم f، ونسمى B النطاق المصاحب أو المجال المقابل للراسم f.

أنواع الرواسم:

الراسم الشامل: ليكن f راسما من A إلى B . نقول أن f راسم شامل إذا كان كل عنصر من B هو صورة لعنصر واحد على الأقل من A. ونعبر عن ذلك رياضيا بالعبارة التالية :

$$\forall y \in B \Rightarrow \exists x \in A; y = f(x) .$$

الراسم المتباين: ليكن f راسما من A إلى B . نقول أن f راسم متباين إذا كان كل عنصر من B هو صورة لعنصرعلى الأكثر من A. ونعبر عن ذلك رياضيا بالعبارة التالية :

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

وبتعبير آخر f راسم متباين إذا تحقق الشرط:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

والعبارة الثانية هى ألأكثر إستخداما.

الراسم التقابل: ليكن f راسما من A إلى B. يقال أن f راسماً تقابلاً إذا كان كل عنصر من B هو صورة لعنصر واحد من A.

وينتج من هذا التعريف ان f راسم تقابل إذا كان شاملا ومتباينا .

<u>الراسم التطابق</u>: ليكن f راسما من A إلى A ، نعرف الراسم التطابق بأنه الرسم المعرف بالشكل:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = x$$

ويرمز له بالرمز I.

<u>الراسم الثابت</u>: ليكن f راسما من A إلى B وليكن $b \in B$. يعرف الراسم الثابت بأنه الراسم المعرف بالشكل:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = b.$$

<u>تركيب الرواسم</u>: ليكن لدينا الراسمان $f : A \to B$ و $g : B \to D$. لنأخذ العنصر $x \in A$ فتكون $y = f(x) \in B$ ، وبما أن g راسما من B إلى D فإن للعنصر y صورة فى D وهى $z = g(y)$. إذن لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $z \in D$ بحيث: $z = g(y) = g(f(x))$

تسمى هذه العملية تركيب الراسمين g , f ونرمز له بالرمز $g \circ f$ ، أى أن : $g \circ f : A \to D$ معرف بالقاعدة:

$$\forall x \in A \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)).$$

العمليات الثنائية

تعريف (1.2.1): لتكن A مجموعة غير خالية. يسمى كل راسم $f:A\times A\to A$ عملية ثنائية على A ونرمز عادة للعملية الثنائية بدلا من $f, g, \ldots$ بالرموز $*, \tau, \circ, \ldots$.

تعريف (2.2.1): بفرض أن Gمجموعة غير خالية وأن العملية * هي عملية ثنائية عليها فإن الزوج المرتب $(G,*)$يُسمي نظاماً جبرياً أو بنية جبرية ذو عملية واحدة (نظام ثنائي) وبفرض أن G مُعرَف عليها عمليتان ثنائيتان $*,\circ$ فإن الثلاثي المرتب $(G,*,\circ)$ يُسمي نظاماً جبرياً ذو عمليتين ثنائيتين (نظام ثلاثي).

المقصود بالنظام الجبري عند ذكرِه هو أن المجموعة مغلقة علي العمليات الثنائية المعرفة عليها في النظام الجبري.

مثال (1.2.1):

من العمليات الثنائية المهمة هى العمليات الأربع وهى الجمع +، والفرق - ، والضرب $\times$ والقسمة $\div$ على المجموعات العددية $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ومن الأنظمة الثنائية:

$$(\mathbb{Z},\times), (\mathbb{Z},+), (\mathbb{Z},-)\ (\mathbb{N},\times), (\mathbb{N},+)$$

$$(\mathbb{Q}^*,\times), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{Q},-), (\mathbb{Q},\div)$$

$(\mathbb{R}^*,\times), (\mathbb{R},+), (\mathbb{R},-), (\mathbb{R}^*,\div)$

$(\mathbb{C}^*,\times), (\mathbb{C},+), (\mathbb{C},-), (\mathbb{C}^*,\div)$

ولكن لو أخذنا مثلا عملية الفرق – على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ لوجدنا أن هذة العملية ليست عملية ثنائية، ولنأخذ كمثال $2,5\in\mathbb{N}$ فإن $2-5=-3\notin\mathbb{N}$. إذن $(\mathbb{N},-)$ ليست نظاما ثنائيا.

تمرين : بين أن الأنظمة التالية ليست أنظمة ثنائية:

$(\mathbb{C},\div), (\mathbb{R},\div), (\mathbb{Q},\div), (\mathbb{Z},\div), (\mathbb{N},\div)$.

تعريف (3.2.1): ليكن $(A,*)$ نظاما ثنائيا. نقول أن العملية الثنائية $*$ عملية إبدالية إذا تحقق الشرط التالى:

$$\forall x,y\in A \Rightarrow x*y=y*x$$

تعريف (4.2.1): ليكن $(A,*)$ نظاما ثنائيا. نقول أن العملية الثنائية $*$ عملية تجميعية (دامجة) او تنسيقية إذا تحقق الشرط التالى:

$$\forall x,y,z\in A \Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z).$$

وعند ذلك يمكن الإستغناء عن الأقواس ونكتب: $x*y*z$.

تعريف (5.2.1): ليكن $(A,*)$ نظاما ثنائيا. إذا وجد العنصر $e_1\in A$ الذى يحقق الشرط: $\forall x\in A\Rightarrow x*e_1=x$ فإننا

نقول أن e_1 عنصر محايد أيمن (من اليمين) بالنسبة للعملية الثنائية $*$. إذا وجد العنصر $e_2 \in A$ الذى يحقق الشرط: $\forall x \in A \Rightarrow e_2 * x = x$ فإننا نقول أن e_2 عنصر محايد أيسر (من اليسار) بالنسبة للعملية الثنائية $*$. إذا وجد العنصر $e \in A$ الذى يحقق الشرط:

$$\forall x \in A \Rightarrow x * e = e * x = x$$

فإننا نقول أن e عنصر محايد بالنسبة للعملية الثنائية $*$. وهذا يعنى أن العنصر المحايد هو عنصر محايد إيمن وعنصر محايد ايسر.

<u>تعريف (6.2.1):</u> ليكن $(A,*)$ نظاما ثنائيا . إذا كان $e_1 \in A$ عنصر محايد ايمن بالنسبة للعملية $*$، نقول أن العنصر $x_1 \in A$ أنه معكوس ايمن للعنصر $x \in A$ إذا حقق الشرط : $x * x_1 = e_1$. إذا كان $e_2 \in A$ عنصر محايد ايسربالنسبة للعملية $*$، نقول أن العنصر $x_2 \in A$ أنه معكوس ايسر للعنصر $x \in A$ إذا حقق الشرط : $x_2 * x = e_2$. إذا كان $e \in A$ عنصر محايد بالنسبة للعملية $*$، نقول أن العنصر $y \in A$ أنه معكوس إيمن للعنصر

$x \in A$ إذا حقق الشرط: $x*y = y*x = e$. ونرمز عادة لمعكوس العنصر x بالرمز x^{-1}.

<u>تمرين</u> أي من العمليات التالية تكون عملية ثنائية علي المجموعة S فيما يلي

a) $S = \mathbb{Z}, a*b = a + b^2,$

b) $S = \mathbb{Z}, a*b = a^2 b^3,$

c) $S = \mathbb{R}, a*b = \dfrac{a}{a^2 + b^2},$

d) $S = \mathbb{Z}, a*b = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b},$

e) $S = \mathbb{Z}, a*b = a + b - ab,$

f) $S = \mathbb{R}, a*b = b$

g) $S = \{-4, -2, 1, 2, 3\}, a*b = |b|,$

h) $S = \{1, 2, 3, 6, 18\}, a*b = ab.$

الفصل الثاني

الزمـــــرة

مفهوم الزمرة

تعريف (1.1.2):

ليكن $(A,*)$ نظاما ثنائيا. نقول أن النظام شبه زمرة إذا حقق الخاصية التجميعية.

مثال (1.1.2):

النظام الثنائى $(\mathbb{N},+)$ يحقق الخاصية التجميعية فهو شبه زمرة ولكنه لا يوجد به عنصرا محايدا وهو الصفر .

مثال (2.1.2):

النظام الثنائى $(2\mathbb{Z},\times)$ حيث $2\mathbb{Z}$ ترمز لمجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية هو شبه زمرة فهو يحقق الخاصية التجميعية ولكن ليس به عنصرا محايدا بالنسبة للضرب وهو الواحد.

تعريف (2.1.2):

ليكن $(A,*)$ نظاما ثنائيا. نقول أن النظام منوئيد $(monoid)$ إذا حقق الخاصية التجميعية وكان به عنصرا محايدا.

وهناك أمثلة على المونوئيد منها:

مثال (3.1.2):

لتكن K *مجموعة كل الرواسم من المجموعة* A *إلى نفسها* *ولنأخذ عملية تركيب* الرواسم $\circ$ على عناصر الجموعة K. فإن $(K,\circ)$ مونوئيد.

الحل :

1- عملية تركيب الرواسم على المجموعة K هى عملية ثنائية لأن المجال والمجال المقابل هو المجموعة A نفسها.

2- وجدنا فى فصل الرواسم أن تركيب الرواسم هى عملية تجميعية.

3- العنصر المحايد بالنسبة لتركيب الرواسم هو الراسم المطابق I، وقد وجدنا أن $I\circ f=f\circ I=f$.

مثال (4.1.2):

لتكن M_n هى مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة n، ولتكن $*$ هى عملية ضرب المصفوفات. أن $(M_n,*)$ مونوئيد.

الحل:

أن عملية ضرب المصفوفات المربعة هى عملية ثنائية لأن ضرب

مصفوفتين مربعتين من الرتبة n هى مصفوفة مربعة من الرتبة n . ثم إن ضرب المصفوفات عملية تجميعية وممصفوفة الوحدة من الرتبة n هى العنصر المحايد بالنسبة لضرب المصفوفات .

<u>تعريف الزمــــرة</u>

يوجد أكثر من تعريف للزمرة ولكن كلها متكافئة وسندرج بعضاً منها

<u>تعريف (3.1.2):</u>

ليكن $(A,*)$ نظاما ثنائيا. يقال عن النظام أنه زمرة إذا حقق الشروط التالية :

1- الخاصية التجميعية. أى أنه :

$$\forall x,y,z \in A \Rightarrow (x*y)*z = x*(y*z)$$

2- يوجد فى A عنصرا محايدا بالنسبة للعملية $*$. أى أنه :

$$(\exists e \in A); \forall x \in A \Rightarrow x*e = e*x = x$$

3- لكل عنصر فى A يوجد له معكوس فى A . أى أنه :

$$(\forall x \in A)\exists x^{-1} \in A : x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$$

وإذا كانت العملية $*$ إبدالية قلنا أن الزمرة إبدالية .

التعريف التالي هو نفس التعريف السابق بالإضافة الي شرط الاغلاق والذي هو ضمنياً موجود في تعريف النظام الجبري ولكن بعض المراجع احياناً تُعرف الزمرة كما يلي

تعريف (4.1.2):

بفرض أن G مجموعة غير خالية وأن العمـلية $*$عمـلية ثنائية فإنه يُقال أن المجموعة G تمثل زمرة مع العملية $*$ إذا تحققت الشروط التالية:-

1- العملية $*$عملية ثنائية علي المجموعة G أو بمعني آخر المجموعة G مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية $*$أي أن

$$a*b\in G,\qquad \forall a,b\in G$$

2- العملية الثنائية $*$ دامجة أي أن

$$a*(b*c)=(a*b)*c,\qquad \forall a,b\in G$$

3- وجود عنصر محايد بالنسبة للعملية $*$ أي أنه يوجد $e\in G$بحيث

$$a*e=e*a=a,\qquad \forall a\in G$$

4- وجود معكوس لكل عنصر $a\in G$بالنسبة للعملية $*$ أي أنه يوجد $a'\in G$بحيث

$$a*a'=a'*a=e$$

النظام الجبري$(G,*)$ يُسمي زمرة ابدالية أو آبلية إذا حقق بالإضافة الي الشروط السابقة شرط الابدال.

أمثلـــــــة متنـــــوعة على الزمرة

من الأمثلة المهمة للزمر:

1- الأنظمة الثنائية العددية:

$(C^{*},*),(C,+),(R^{*},\times),(R,+),(Q^{*},\times),(Q,+),(Z,+)$.

مثلا النظام الثنائي $(Z,+)$ هو زمرة إبدالية حيث أن الجمع هو عملية إبدالية ومعكوس أى عنصر $x \in Z$ هو العنصر $-x \in Z$.

2- أن المجموعات العددية مع عملية الفرق لا تشكل زمرة لأنه لا يوجد عنصر محايد بالنسبة لعملية الفرق وكذلك عملية الفرق ليست عملية تجميعية.

ايضاً ندرس هذه الامثلة:

<u>مثال (5.1.2):-</u>

هل المجموعة $G=\left\{g=a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ مع عملية الضرب العادية تكون زمرة ابدالية؟

<u>الحل :-</u> نلاحظ ما يلي

1- عملية الضرب العادية عملية ثنائية علي G لأن

$$\forall g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}\ ,\ g_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$$

$$\because\ g_1 \cdot g_2 = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$

Where $\quad a = a_1a_2 + 2b_1b_2, b = a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$

$$\therefore\ g_1 \cdot g_2 \in G$$

2- عملية الضرب عملية دامجة و ابدالية

3- وجود العنصر المحايد هنا وهو الواحد ويكون علي الصورة

$$1 = 1 + 0\sqrt{2}$$

4- لا يوجد معكوس لأي عنصر من عناصر G بخلاف العنصر

$$1 + 0\sqrt{2}$$

مما سبق يتضح أن G لا تكون زمرة مع عملية الضرب العادية

<u>مثال (6.1.2):-</u>

المجموعة $G = \{1, -1, i, -i\}$ مع عملية الضرب العادية تكون زمرة ابدالية لأن

1- عملية الضرب العادية عملية ثنائية علي G كما يتضح من الجدول التالي

$\bullet$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

2- نلاحظ من الجدول أن عملية الضرب عملية دامجة و ابدالية.

3- وجود العنصر المحايد وهو الواحد.

4- وجود المعكوس لكل عنصر من عناصر G، فنلاحظ أن كلاً من العنصرين 1 و-1 معكوس لنفسه، والعنصرين i و$-i$ كل منهما معكوس للأخر.

مثال (7.1.2):-

لتكن $X \neq \varnothing$، هل المجموعة $P(X)$ تكون زمرة مع

(I) عملية الأتحاد $\cup$، (II) عملية التقاطع، (III) عملية الفرق المتماثل

الحل

(I) من تعريف $P(X)$ ومن خصائص عملية الأتحاد نجد أن

$$1-\forall A,B \in P(X) \Rightarrow (A\cup B) \in P(X)$$

أي أن $P(X)$ مغلقة علي عملية الاتحاد

$$2-\forall A,B,C \in P(X) \Rightarrow A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

أي أن عملية الاتحاد عملية دامجة

3- تحتوي علي محايد عملية الاتحاد $P(X)$ أي أن

$$\exists \varnothing \in P(X) \text{ such that, } \varnothing \cup A = A = A \cup \varnothing,\ \forall A \in P(X)$$

4- لكل $\varnothing \neq A \in P(X)$ لا يمكن ايجاد $B \in P(X)$ تحقق أن $A\cup B = \varnothing$

مما سبق يتضح أن $P(X)$ لا تكون زمرة مع عملية الاتحاد.

(II) من تعريف $P(X)$ ومن خصائص عملية التقاطع نجد أن

$$1-\forall A,B\in P(X)\Rightarrow (A\cap B)\in P(X)$$

أي أن $P(X)$ مغلقة علي عملية التقاطع

$$2-\forall A,B,C\in P(X)\Rightarrow A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

أي أن عملية التقاطع عملية دامجة

$$3-\exists X\in P(X)\ \text{such that},\ X\cap A=A=A\cap X\ ,\ \forall A\in P(X)$$

أي أن $P(X)$ تحتوي علي محايد عملية التقاطع

4- لكل $X\neq A\in P(X)$ لا يمكن ايجاد $B\in P(X)$ تحقق أن $A\cap B=X$

مما سبق يتضح أن $P(X)$ لا تكون زمرة مع عملية التقاطع.

(III)من تعريف $P(X)$ ومن خصائص عملية الفرق التناظري (المتماثل) Δ نجد أنعملية الفرق التناظري عملية ثنائية علي $P(X)$ كما أنها دامجة و ابدالية، تحتويعلي العنصر المحايد وهو $\varnothing$، كما أن معكوس اي عنصر هو نفسه كما يتضح من العلاقة

$$A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

مثال (8.1.2):-

برهن أن المجموعة $G=\{m_1,m_2,m_3,m_4\}$حيث

$$m_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},m_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},m_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},m_4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

تكون زمرة ابدالية مع عملية ضرب المصفوفات؟

$\Leftarrow$بتكوين جدول تحصيل (أو ضرب) العناصر

$\bullet$	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4
m_2	m_2	m_1	m_4	m_3
m_3	m_3	m_4	m_2	m_1
m_4	m_4	m_3	m_1	m_2

يتضح أن G تكون زمرة ابدالية مع عملية ضرب المصفوفات.

مثال (9.1.2):-

برهن أن المجموعة $G=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc\neq 0\}$

مع عملية ضرب المصفوفات تكون زمرة غيرابدالية؟

أولاً شرط الأغلاق

بفرض أن $m_1=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix},m_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\in G$

$$\therefore a_1d_1-b_1c_1\neq 0,a_2d_2-b_2c_2\neq 0$$

والآن نحاول اثبات أن حاصل الضرب

$$m_1m_2=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2&a_1b_2+b_1d_2\\c_1a_2+d_1c_2&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$$

عنصرفي المجموعة G ولذلك نفرض أن المصفوفة m_1m_2 مصفوفة شاذة فيكون

$$(a_1a_2+b_1c_2)(c_1b_2+d_1d_2)-(c_1a_2+d_1c_2)(a_1b_2+b_1d_2)=0$$
$$\Rightarrow a_1d_1a_2d_2-b_1c_1a_2d_2+b_1c_1b_2c_2-a_1d_1b_2c_2=0$$
$$\Rightarrow a_2d_2(a_1d_1-b_1c_1)-b_2c_2(a_1d_1-b_1c_1)=0$$
$$\Rightarrow (a_2d_2-b_2c_2)(a_1d_1-b_1c_1)=0$$
$$\Rightarrow (a_2d_2-b_2c_2)=0 \quad \vee \quad (a_1d_1-b_1c_1)=0$$

وهذا تناقض سببه الفرض الخاطئ بأن المصفوفة m_1m_2 مصفوفة شاذة، وهذا يعني أن المصفوفة m_1m_2 مصفوفة غير شاذة تنتمي إلي G

ثانياً شرط الدمج

عملية ضرب المصفوفات عملية دامجة

ثالثاً العنصر المحايد

تحتوي المجموعة G علي محايد عملية ضرب المصفوفات وهومصفوفة الوحدة $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

رابعاً معكوس العنصر

تحتوي G معكوس كل عنصر من عناصرها بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات حيث معكوس العنصر $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G$ هو

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

خامساً شرط الابدال

عملية ضرب المصفوفات عملية غير ابدالية

<u>مثال (10.1.2):-</u>

بفرض أن $S=\mathbb{R}-\{0,1\}$ و $G=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}$ هي مجموعة من الرواسم من S الي S و المُعرفة كالتالي: لكل $x\in S$

$$g_0(x)=x,\ \ g_1(x)=\frac{1}{1-x},\ \ g_2(x)=\frac{x-1}{x},$$
$$g_3(x)=\frac{1}{x},\ g_4(x)=1-x,\ g_5(x)=\frac{x}{x-1}$$

اثبت أن $(G,\circ)$ زمرة غير ابدالية حيث $\circ$ هي عملية تحصيل الرواسم؟

الحل:- بتكوين جدول تحصيل العناصر (جدول كمايلي) يتضح لنا أن

$\circ$	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
g_0	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
g_1	g_1	g_2	g_0	g_5	g_3	g_4
g_2	g_2	g_0	g_1	g_4	g_5	g_3
g_3	g_3	g_4	g_5	g_0	g_1	g_2
g_4	g_4	g_5	g_3	g_2	g_0	g_1
g_5	g_5	g_3	g_4	g_1	g_2	g_0

$\Leftarrow G$ مغلقة علي العملية $\circ$

$\Leftarrow$ العملية $\circ$ عملية دامجة

$\Leftarrow G$ تحتوي علي العنصر المحايد علي العملية$\circ$

$\Leftarrow$ كل عنصرفي G له معكوس كما هو مبين في الجدول السابق

$\Leftarrow$ عملية التحصيل $\circ$ عملبة غير ابدالية فمثلاً

$$g_1 \circ g_3 = g_5 \neq g_4 = g_3 \circ g_1$$

<u>نظرية (1.1.2):-</u> (حل المعادلات الخطية في الزمر)

بفرض أن $(G,*)$ زمرة وكان $a,b \in G$ فإنه يوجد عنصر وحيد $x \in G$ بحيث يكون $a*x=b$ كما يوجد عنصر وحيد $y \in G$ بحيث يكون $y*a=b$.

<u>البرهـــــــان</u>

من الواضح أن $x=a^{-1}*b$ هو حل للمعادلة $a*x=b$ حيث

$$a*x=a*(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$$

وهذا يثبت وجود حل علي الاقل للمعادلة $a*x=b$ ولاثبات الوحدانية نفرض أن x' هو حل آخر للمعادلة $a*x=b$ أي أن $a*x'=b$

$$\therefore \quad x'=e*x'=(a^{-1}*a)*x'$$
$$=a^{-1}*(a*x')=a^{-1}*b$$

ولذا فإن $x = a^{-1} * b$ هو الحل الوحيد للمعادلة $a * x = b$ وبطريقة مماثلة يمكن اثبات أن $y = b * a^{-1}$ هو الحل الوحيد للمعادلة $y * a = b$.

نظرية (2.1.2):- (قوانين الحذف)

بفرض أن $(G,*)$ زمرة وكان $a,b,c \in G$ بحيث يكون $a * b = a * c$ أو $b * a = c * a$ فإن $b = c$.

البرهـــــان

بفرض أن a^{-1} و معكوس العنصر $a \in G$ فإن

$$\Rightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$
$$\Rightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$$
$$\Rightarrow e * b = e * c \quad \Rightarrow b = c$$

نظرية (3.1.2):-

بفرض أن $(G,*)$ زمرة فإن

$$i) \quad (a^{-1})^{-1} = a, \quad \forall a \in G$$
$$ii) \quad (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}, \quad \forall a,b \in G$$

البرهـــــان

i) حيث أن $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ فإن العنصر a هو معكوس العنصر $a^{-1} \in G$ أي أن $(a^{-1})^{-1} = a$

ii) إثبات هذه الجزئية يتطلب منا إثبات التالي

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=e, \quad (b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=e$$

(أي اثبات أن العنصر $b^{-1}*a^{-1}$ هو معكوس العنصر $a*b$)

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=(a*(b*b^{-1})*a^{-1})$$
$$=a*e*a^{-1}=a*a^{-1}=e$$

بالمثل يمكن اثبات أن $(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=e$

ملحوظة:-

من النظرية السابقة يمكننا ملاحظة التالي

i) $G^{-1}=\{a^{-1}: \ a\in G\}=G$

ii) $(a_1*a_2*\cdots*a_{n-1}*a_n)^{-1}=a_n^{-1}*a_{n-1}^{-1}*\cdots*a_2^{-1}*a_1^{-1}$

ماذا يحدث عندما $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n=a$ ؟

رتبة عنصر في الزمرة

بفرض أن $(G,*)$ زمرة لها عنصر محايد e، $a\in G$ فإنرتبة العنصر a هي أصغر عدد صحيح موجب k، إن وجد، بحيث يكون $a^k=e$، ونرمز لرتبة العنصر بالرمز $o(a)=k$ أو $|a|=k$،

أما إذا لم يوجد العدد k فإننا نقول أن العنصر a عنصر لانهائي الرتبة.

مثال (14.1.2) (متروك للطالب)

اوجد رتبة كل عنصر من عناصرالمجموعة $G=\{1,-1,i,-i\}$ بالنسبة لعملية الضرب العادية؟

نظرية (4.1.2):-

بفرض أن $(G,*)$ زمرة فإنها تكون زمرة ابدالية إذا وفقط اذا كان

$$(a*b)^2=a^2*b^2, \qquad \forall a,b\in G$$

البرهـــــــان

أولاً نفرض أن $(G,*)$ زمرة ابدالية

$$\begin{aligned}\Rightarrow (a*b)^2 &= (a*b)*(a*b)=(a*(b*a)*b)\\ &=(a*(a*b)*b)=(a*a)*(b*b)\\ &=a^2*b^2\end{aligned}$$

ثانياً نفرض تحقق الشرط المُعطَي

$$\begin{aligned}\because (a*b)^2=a^2*b^2 &\Rightarrow (a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)\\ &\Rightarrow a*((b*a)*b)=a*((a*b)*b)\end{aligned}$$

وحيث أن الزمرة تحقق قانون الحذف فإن

$$\begin{aligned}\therefore ((b*a)*b)=((a*b)*b) &\Rightarrow (b*a)*b=(a*b)*b\\ &\Rightarrow (b*a)=(a*b)\end{aligned}$$

وبذلك تكون الزمرة $(G,*)$ زمرة ابدالية

نظرية (5.1.2):-

بفرض أن $(G,*)$ زمرة فإنها تكون زمرة ابدالية إذا وفقط اذا كان

$$(a*b)^{-1}=a^{-1}*b^{-1}, \qquad \forall a,b\in G$$

البرهـــــــان

أولاً نفرض أن $(G,*)$ زمرة ابدالية

$$\therefore (a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}=a^{-1}*b^{-1}$$

ثانياً نفرض تحقق الشرط المُعطي

$$\therefore a*b=(a^{-1})^{-1}*(b^{-1})^{-1}=(b^{-1}*a^{-1})^{-1}$$
$$=(b^{-1})^{-1}*(a^{-1})^{-1}=b*a$$

نظرية (6.1.2):-

بفرض أن $(G,*)$ زمرة فإذا كان $a^2=e$ لكل $a\in G$ فإن الزمرة $(G,*)$ تكون زمرة ابدالية

البرهـــــــان

$$\because a^2=e \Rightarrow a*a=e \Rightarrow a^{-1}=a$$

أي أن كل عنصر هو معكوس نفسه بالنسبة الي العملية $*$

$$\therefore a*b=(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}=b*a$$

وبالتالي فإن الزمرة $(G,*)$ تكون زمرة ابدالية.

تمارين (2-1)

1- أدرس النظام الجبري مع العملية الثنائية المعطى في كلٍ مما يلي ؟

(a)- $G=(\mathbb{Z},*)$ حيث $a*b=a-b;\ \forall\ a,b\in\mathbb{Z}$

(b)- $G=(\mathbb{Q},*)$ حيث $a*b=\dfrac{ab}{3};\ \forall\ a,b\in\mathbb{Q}$

(c)- $G=(\mathbb{Q},*)$ حيث $a*b=ab+a-b;\ \forall\ a,b\in\mathbb{Q}$

(d)- $G=(\mathbb{Q},*)$ حيث $a*b=ab+2;\ \forall\ a,b\in\mathbb{Q}$

(e)- $G=(\mathbb{Z},*)$ حيث $a*b=a+b+2;\ \forall\ a,b\in\mathbb{Z}$

(f)- $G=(\mathbb{R}-\{-1\},*)$ حيث $a*b=a+b+ab;\ \forall\ a,b\in\mathbb{R}-\{-1\}$

(g)- $G=(K,*)$ حيث $K=\{x\in\mathbb{R}:x>1\}$ و $a*b=ab-a-b+2;\forall a,b\in K$

(i) - $G=(\mathbb{C},+)$ حيث $\mathbb{C}$ هي مجموعة الأعداد المركبة و $+$ هي عملية الجمع العادية

(j)- $G=(\mathbb{C}^*,\cdot)$ حيث $\mathbb{C}^*$ هي مجموعة الأعداد المركبة ما عدا الصفر و $\cdot$ هي عملية الضربالعادية

2- بين أيٍ من المجموعات التالية تمثل زمرة مع عملية ضرب المصفوفات؟

(a)- $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc=1\right\}$

(b)- $H=\left\{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: m\in\mathbb{R}-\{0\}\right\}$

(c)- $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq 0\right\}$

3- لتكن $G=\mathbb{R}-\{2\}$ و $*$ عملية ثنائية مُعرفة كما يلي $a*b=ab-2a-2b+6;\ \forall a,b\in G$ ، برهن أن $(G,*)$ زمرة ابدالية

4- ليكن $(G,*)$ نظاماً جبرياً حيث $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و

$$(a,b)*(c,d)=(ac,b+d);\ \ \forall(a,b),(c,d)\in G$$

اثبت أن (a) $(G,*)$-زمرة إبدالية

(b) G- تحتوي علي عنصر واحد فقط من الرتبة الثانية.

(c) G- لا تحتوي علي أية عناصر من الرتبة الثالثة

5- ليكن $(G,*)$ نظاماً رياضياً حيث $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و

$$(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d);\ \ \forall(a,b),(c,d)\in G$$

اثبت أن $(G,*)$ زمرة تحتوي علي عدد لانهائي من العناصر من الرتبة الثانية؟ هل تحتوي G علي أية عناصر من الرتبة الثالثة؟

6- لتكن $(G,*)$ زمرة ابدالية و $a,b\in G$ برهن أن

$$(a*b)^n=a^n*b^n\ ;\ \ n\in\mathbb{Z}$$

7- لتكن $(G,*)$ زمرة و $a,b\in G$ برهن أن

(a)- $(a*b)^n=a*(b*a)^{n-1}*b$, (b)- $o(a)=o(a^{-1})$

(c)- $o(a*b)=o(b*a)$, (d)- $o(a)=o(b^{-1}*a*b)=o(b*a*b^{-1})$

<u>الزمرة الجزئية</u>

بفرض أن $(G,*)$ زمرة $\varnothing \neq H \subseteq G$ فإن $(H,*)$ تسمي زمرة جزئية من $(G,*)$ إذا كانت $(H,*)$ زمرة ونرمزلها بالرمز $H \leq G$.

<u>نظرية (1.2.2):-</u>

المجموعة الغير خالية H من الزمرة $(G,*)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ إذا كان وكان فقط

1) $\forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$, 2) $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

<u>البرهـــــــان</u>

$(\Leftarrow)$ بفرض أن $H \leq G$ فإن هذا يقتضي تحقق الشرطين (1)و(2)

$(\Rightarrow)$ نفرض تحقق الشرطين المُعطيين (1)و(2) و بالتالي لكي نثبت أن $H \leq G$ يتطلب منا اثبات وجود العنصر المحايد

من الشرط (2) $\quad \forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

ومن الشرط (1) $\quad \forall a,a^{-1} \in H \Rightarrow a*a^{-1}=e \in H$

<u>نظرية (2.2.2):-</u>

المجموعة الغير خالية H من الزمرة $(G,*)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ إذا كان وكان فقط

$$\forall a,b \in H \Rightarrow a*b^{-1} \in H$$

<u>البرهـــــــان</u>

$(\Leftarrow)$ بفرض أن $H \leq G$ فإن هذا يقتضي

$$\forall a,b \in H \Rightarrow a,b^{-1} \in H \Rightarrow a*b^{-1} \in H$$

$(\Rightarrow)$ بفرض تحقق الشرط المُعطئ ولإثبات أن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ فإننا سوف نثبت تحقق الشرطين المذكورين بنظرية (1.2.2)

- $\forall a \in H \Rightarrow a*a^{-1} = e \in H$
- $\forall a \in H \Rightarrow a,e \in H \Rightarrow e*a^{-1} = a^{-1} \in H$
- Let $a,b \in H \Rightarrow a,b^{-1} \in H$

$$\Rightarrow a*(b^{-1})^{-1} = a*b \in H$$

ومن النظرية السابقة نجد أن $H \leq G$.

<u>ملحوظة :-</u> أي زمرة $(G,*)$ يكون لها زمرتان جزئيتان تسميان زمرتان جزئيتان تافهتان وهما $(G,*)$، $(\{e\},*)$.

<u>مثال (1.2.2):-</u>

بفرض أن $H=\{mk: m\in\mathbb{Z}\};\ k\in\mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ والمكونة من المضاعفات الصحيحة للعدد k فإثبت أن $(H,+)$ من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$.

الحل

بفرض أن $a,b\in H$ فإنه يوجد عددان صحيحان m,n بحيث يكون

$$a=kn, b=km \Rightarrow a+b=kn+km=k(n+m)\in H,$$
$$\Rightarrow -\mathrm{a}=-(kn)=(-k)n\in H$$

وبالتالي فإن $(H,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$.

نظرية(3.2.2):-

بفرض أن $(G,*)$ زمرة وأن $(H_1,*)$و$(H_2,*)$ زمرتان جزئيتان من الزمرة $(G,*)$ فإن :

1) $H_1\cap H_2$ يكون وزمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

2) $H_1\cup H_2$ ليس بالضرورة أن تكون زمرة جزئية من$(G,*)$

البرهـــــــان

حيث أن H_1,H_2 زمرتان جزئيتان فإن

$$e \in H_1 \wedge e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 \bigcap H_2 \Rightarrow H_1 \bigcap H_2 \neq \varnothing$$

بفرض أن $a,b \in H_1 \bigcap H_2$ فإن $a,b \in H_1 \wedge a,b \in H_2$ وحيث أن H_1, H_2 زمرتان جزئيتان من الزمرة $(G,*)$ فإن

$$\Rightarrow a*b^{-1} \in H_1 \wedge a*b^{-1} \in H_2$$
$$\Rightarrow a*b^{-1} \in H_1 \bigcap H_2$$

وبالتالي فإن $H_1 \bigcap H_2$ يكون زمرة جزئية من $(G,*)$.

2- لاثبات أن $H_1 \bigcup H_2$ ليس بالضرورة أن تكون زمرة جزئية من $(G,*)$ نعطي المثال التالي:

إذا كانت

$$H_1 = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}, H_2 = \{0, \pm 5, \pm 10, \ldots\}$$

فإن $(H_1,+)$و $(H_2,+)$ زمرتان جزئيتان من $(\mathbb{Z},+)$ ولكن

$$H_1 \bigcup H_2 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 5, \pm 10, \ldots\}$$

ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ لأن $3,5 \in H_1 \bigcup H_2$ ولكن

$$3+5=8 \notin H_1 \bigcup H_2$$

مركز الزمرة

تعريف(1.3.2):-

بفرض أن $(G,*)$ زمرة، فإن مركز هذه الزمرة ويرمز له بالرمز $Z(G)$ هو مجموعة كل عناصر G التي تحقق قانون الإبدال مع جميع عناصر G أي أن

$$Z(G)=\{z\in G : z*x=x*z\ ,\ \forall x\in G\}$$

ويتضح لنا أنه إذا كانت $(G,*)$ ابدالية فإن $Z(G)=G$

نظرية (1.3.2):-

مركز أي زمرة هو زمرة جزئية منها.

البرهــــــــان

بفرض أن $(G,*)$ زمرة، وأن $Z(G)$ هو مركزها ونحاول اثبات أن $Z(G)\leq G$ ولاثبات ذلك نثبت أولاً $Z(G)\neq\varnothing$ وذلك لأن

$$\forall a\in G\Rightarrow e*a=a*e=a\Rightarrow e\in Z(G)\Rightarrow Z(G)\neq\varnothing$$

ثانياً بفرض أن $a,b\in Z(G)$ ونحاول اثبات أن

$$a*b^{-1}\in Z(G)$$

لكل عنصر $x\in G$ نجد أن

$$\begin{aligned}(a*b^{-1})*x &= (a*b^{-1})*x*e \\ &= (a*b^{-1})*x*(b*b^{-1}) \\ &= a*(b^{-1}*x*b)*b^{-1} \\ &= a*(b^{-1}*b*x)*b^{-1} \\ &= a*(e*x)*b^{-1} \\ &= a*x*b^{-1} \\ &= x*(a*b^{-1})\end{aligned}$$

وبالتالي يكون $a*b^{-1}\in Z(G)$ ومنها $(Z(G),*)$ تكون زمرة جزئية من $(G,*)$

تمارين (2-2)

1- لتكن $(G,*)$ زمرة و $a\in G$ برهن أن

$H=\{g\in G : a*g=g*a\}$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

2- لتكن $(G,*)$زمرة ابدالية لها العنصر المحايد e و $n\in\mathbb{Z}$ برهن أن $H=\{g\in G : g^n=e\}$ زمرة جزئية منها .

3- لتكن $(G,*)$ زمرة ابدالية، $n\in\mathbb{Z}$ ،برهن أن $H=\{g^n : g\in G\}$ زمرة جزئية منها.

4- لتكن $(G,*)$زمرة و $H_1\le G,\ H_2\le G$ برهن أن

$$H_1 \cup H_2 \le G \Leftrightarrow H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1$$

5- لتكن $(G,*)$ **زمرة ابدالية و** $H \le G, K \le G$ **برهن أن**

$$H * K = \{a * b : a \in H, b \in K\} \le G$$

6- أثبت أنه إذا كانت $(H,*)$ **زمرةجزئية من الزمرة** $(G,*)$ **فإن العلاقة** R **المعرفة كالتالي** $(a,b) \in R \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H, \ \forall a,b \in H$

تكون علاقة تكافؤ علي H

<u>الزمرة الدائرية Cyclic group</u>

<u>تعريف (1.4.2):-</u>

بفرض أن $(G,*)$ زمرة، فإنها تُسمي زمرة دورانية أو دائرية إذا وجد عنصر $a \in G$ بحيث يحقق أن

$$\forall\ x \in G \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ \text{such that}\quad x = a^n$$

العنصر $a \in G$ يسمي العنصر المولد للزمرة $(G,*)$ و نرمز لهذه الزمرة بالرمز $G = \langle a \rangle$.

<u>ملحوظات:-</u>

⇐ الرمز a^n يعني ارتباط العنصر a مع نفسه بواسطة العملية * عدد n من المرات.

⇐ رتبة العنصر $a \in G$ هي رتبة الزمرة الجزئية من الزمر G والمولَدة بالعنصر $a \in G$.

<u>مثال (1,4,2):-</u>

الزمرة $G = \{1, -1, i, -i\}$ مع عملية الضرب العادية هي زمرة دورانية مولدة بواسطة العنصر i لأن

$$1 = (i)^4, -1 = (i)^2, -i = (i)^3$$

كما أنه يمكن توليدها بالعنصر $-i$ لأن

$$1 = (-i)^4, -1 = (-i)^2, i = (-i)^3$$

<u>مثال (2,4,2):-</u>

الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ هي زمرة دورانية (لمــاذا؟)

نظرية (1,4,2):-

كل زمرة جزئية من زمرة دورانية تكون دورانية.

البرهـــــــان

نفرض أن $(G,*)$ زمرة دورانية مولدة بواسطة العنصر $a \in G$ وأن $(H,*)$ زمرة جزئية منها والمطلوب اثبات أن $(H,*)$زمرة دورانية.

$\Leftarrow$ إذا كانت $H=\{e\}$ فإن $H=\langle e \rangle$ أي أنها زمرة دورانية، لذلك نفرض أن $H \neq \{e\}$ وبالتالي فإنه يوجد علي الأقل عنصر $e \neq x \in H$ ولكن

$$x \in H \Rightarrow x \in G \Rightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{Z} \quad s.t. \quad x = a^{\alpha}$$

وحيث أن $(H,*)$ زمرة جزئية فإن

$$x \in H \Rightarrow x^{-1} = (a^{\alpha})^{-1} = a^{-\alpha} \in H$$

لذلك نفرض أن m هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق أن $a^m \in H$. وسوف نثبت أن العنصر $g = a^m$ هو العنصر المولد للزمرة الجزئية H، وحيث أن $a^m \in H$ فإن $\langle a^m \rangle \subseteq H$

والآن ليكن $h \in H \Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} : h = a^k$ و من خوارزمية القسمة نجد ان $k = mq + r$ حيث $0 \leq r < m$ وبالتالي يكون

$$a^k = a^{mq+r} = a^{mq} * a^r = \left(a^m\right)^q * a^r$$

$$\Rightarrow a^r = a^k * \left(a^m\right)^{-q} \in H$$

ولكن m هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق أن $a^m \in H$
وبالتالي يجب أن يكون $r = 0$ أي أن

$$h = a^k = a^{mq} = \left(a^m\right)^q \in \left\langle a^m \right\rangle \Rightarrow H \subseteq \left\langle a^m \right\rangle$$

$$\therefore H = \left\langle a^m \right\rangle$$

<u>مثال (3,4,2):-</u>

أوجد كل الزمر الجزئية الممكنة من زمرة دورانية من الرتبة 30؟

<u>الحل</u>

نفرض أن $G = \left\langle a \right\rangle = \{\mathrm{e}, a, a^2, a^3, \ldots, a^{29}\}$

تمارين (3-2)

1- برهن أن كل زمرة دائرية تكون ابدالية

2- برهن أن كل زمرة تحتوي علي أربعة عناصر مختلفة تكون ابدالية

3- برهن أن الزمرة $(\mathbb{Q}, +)$ ليست دائرية

4- برهن أن الزمرة $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ليست دائرية

الفصل الثالث

انـــــواع الزمــــــــــر

في هذا الفصل سوف نتطرق لدراسة بعض أنواع الزمر مثل:-

1- زمرة التباديل

2- زمرة الأشكال الهندسية

3- زمرة الأعداد الصحيحة المتطابقة بمقياس

4- الزمرة القياسية (أو الطبيعية)

5- زمرةخارج القسمة

زمرة التباديل

1.3 الزمرة التناظرية (زمرة التباديل)

تعريف (1.1.3) : مجموعة التناظر

إذا كانت $X = \{ a_1 , a_2, \cdots ,a_n \}$ وكان $f : X \to X$ راسماً إحادياً وفوقياً عندئذ يسمى الراسم f تبديلة والمجموعة التي عناصرها كل التبديلات (التباديل) المختلفة لعناصر X تسمى مجموعة التناظر من الدرجة n ويرمز إليها بالرمز S_n وعدد عناصرها يساوي $n!$. وإذا كانت p تبديلة على عناصر X فإننا سوف نرمز إلى التبديلة p بالرمز

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & \cdots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

مثال (1.1.3) :

إذا كانت X هي مجموعة الأعداد الصحيحة وكان $p : X \to X$ راسم معرف كمايلي :

$$p(x) = x + 5 \quad \forall \quad x \in X$$

أثبت أن الراسم يمثل تبديلة .

الحل :

1- بفرض أن $p(a) = p(b)$ حيث $a,b \in X$ فيكون لدينا :

$$a + 5 = b + 5$$

$$a = b$$

إذا الراسم p أحادي .

2- بفرض أن $y = p(x)$ إذن $y = x + 5$ وبالتالي $x = y - 5$ وحيث أنه لكل $y \in X$ نجد أن $x = y - 5 \in X$ إذن الراسم p فوقي .

من 1 و 2 نستنتج أن الراسم p يمثل تبديلة .

نفرض أن المجموعة X هي :

$$X = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$$

ونفرض أن p تبديلة لعناصر هذه المجموعة بحيث أن :

$$p : x \to p(x)$$

فإن التبديلة p تكتب هكذا :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & & p(n) \end{pmatrix}$$

فمثلاً إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$ فإن

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

تمثل تبديلة لعناصر المجموعة X ، وتبديل ترتيب الأعمدة في التبديلة لايغيرها أي أن التبديلة السابقة يمكن كتابتها على أي من الصور المتكافئة الآتية :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

تعريف (2.1.3) :

إذا كانت p, q تبديلتين لعناصر المجموعة $X = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ فإننا نعرف حاصل ضرب التبديلتين p, q بأنه عملية تحصيل للراسمين p, q ، ويرمز لذلك بالرمز $p \circ q$ أو pq .

ملاحظات :

1- عملية تحصيل التباديل ليست إبدالية لأن عملية تحصيل الرواسم ليست إبدالية .

2- عملية ضرب (تحصيل) تبديلتين تبدأ من جهة اليمين لأنها عملية تحصيل للرواسم.

3- العنصر المحايد e لعملية ضرب التباديل يكون على الصورة
. $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$

4- معكوس التبديلة $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ هو التبديلة

$p^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ وذلك لأن :

$$pp^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=e$$

مثال (2.1.3) :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

لاحظ في المثال السابق أن عملية ضرب التباديل ليست إبدالية . أي أن

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

نظرية (1.1.3) :

إذا كانت S_n هي مجموعة كل التباديل على n من العناصر فإن S_n تكون زمرة بالنسبة إلى ضرب التباديل .

البرهان :

1- حيث أن S_n هي مجموعة كل التباديل المعرفة على مجموعة X حيث X تحتوي على n من العناصر ومن تعريف ضرب التباديل نجد أن ضرب أي تبديلتين في S_n ينتج تبديلة أخرى معرفة على X إذن المجموعة المعطاة مغلقة بالنسبة إلى ضرب التباديل .

2- حيث أن S_n هي مجموعة كل التباديل المعرفة على المجموعة X أي أن S_n هي كل رواسم التناظر الأحادي من المجموعة X إلى نفسها ، وحيث أن

تحصيل الرواسم عملية دامجة (نظرية) ومن تعريف ضرب التباديل نجد أنه عملية تحصيل رواسم إذن ضرب التباديل عملية دامجة على S_n أي أن :

$$(p\circ q)\circ w = p\circ(q\circ w) \qquad \forall \qquad p,q,w\in S_n$$

3- حيث أن S_n هي مجموعة كل التباديل المعرفة على المجموعة X إذا $e\in S_n$ حيث $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ تبديلة الوحدة . أي أن المجموعة S_n تحتوي على العنصر المحايد .

4- نفرض أن $p\in S_n$ أي تبديلة أي أن $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$ حيث

$$p(i)=a_i \quad , \quad a_i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

فنجد أن $p^{-1}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\in S_n$ معكوس التبديلة p ، أي أنه يوجد معكوس لكل عنصر في S_n بالنسبة لعملية ضرب التباديل .

من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن $(S_n,\circ)$ تكون زمرة .

هذه الزمرة تسمى زمرة التباديل permutation group أو الزمرة التناظرية من الدرجة n ويرمز لها بالرمز S_n وهي ليست إبدالية .

2.3 بعض خواص التباديل الأساسية

تعريف (1.2.3) :

التبديلة $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ تُكتب على الصورة $P=(123\cdots n)$ وتسمى تبديلة دائرية طولها n .

ملاحظات :

1- يمكن كتابة التبديلة الدائرية $P=(123\cdots n)$ على أي من الصور المتكافئة الآتية :

$$P=(123\cdots n)=(234\cdots n1)=(345\cdots n12)=\cdots$$

2- التبديلة (1234) تعني أن صورة 1 هي 2 ، وصورة 2 هي 3 ، وصورة 3 هي 4 ، وصورة 4 هي 1 .

3- $(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$

تعريف (2.2.3) :

إذا لم يكن هناك عناصر مشتركة بين تبديلتين قيل أنهما تبديلتين غير متداخلتين أو أنهما دورتان غير متداخلتين أو أنهما دورتان متخالفتان .

مثال (1.2.3) :

التبديلة $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ تكتب على الصورة $p = (13)(245)$ وهذه الصورة تحتوي على دورتين غير متداخلتين .

وللحصول على هذه الصورة نتبع مايلي :

نبدأ بالعنصر الأول وهو 1 ثم نبحث عن صورته والتي هي 3 ثم نأخذ العنصر 3 ونبحث عن صورته فنجد أنها 1 أي أننا رجعنا إلى العنصرالذي بدأنا به إذن (13) تمثل دورة ثم نأخذ عنصر لم يظر في الدورة (13) وليكن 2 ونبحث عن صورته والتي هي 4 ثم نبحث عن صورة 4 فنجد أنها 5 ثم نبحث عن صورة 5 فنجد أنها 2 وهذا هو العنصر الذي بدأنا به إذن (245) يمثل دورة ، إذن يمكننا كتابة التبديلة p على صورة دورتين غير متداخلتين ، أي أن :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (13)(245)$$

ملاحظات :

1- أي تبديلة يمكن كتابتها على صورة دورات متخالفة (غير متداخلة).

2- التبديلة $p=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ يمكن كتابتها على الصورة $(1)(23)$ أو على صورة أبسط وهي (23) ويكون مفهوماً أن صورة العنصر المحذوف هو نفسه.

3- التبديلة $p=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ تكتب على الصورة $e=(1)(2)(3)$

4- أي تبديلة يمكن كتابتها على الصورة الدائرية مع اسقاط العناصر التي صورتها هي نفسها .

مثال(2.2.3) :

أكتب عناصر كل من S_1 , S_2 , S_3

الحل :

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$S_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$S_3=\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

ويمكن كتابة التبديلات السابقة على صورة تبديلات دائرية كما يلي :

$$S_1=\{e\}$$
$$S_2=\{e,(12)\}$$
$$S_3=\{e\ ,\ (12)\ ,\ (13)\ ,\ (23)\ ,\ (123)\ ,\ (132)\}$$

حيث e العنصر المحايد .

مثال (3.2.3) :

أوجد $|S_4|$

الحل :

$$|S_4| = (4)(3)(2)(1) = 24$$

مثال (4.2.3):

أثبت أن $(S_3, \circ)$ زمرة غير إبدالية حيث " $\circ$ " هي عملية تحصيل الرواسم.

الحل:

$$S_3 = \{e\ ,\ (12)\ ,\ (13)\ ,\ (23)\ ,\ (123)\ ,\ (132)\}$$

$\circ$	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
I	I	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	I	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	I	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	I	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	I
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	I	(123)

جدول $(S_3, \circ)$

من الجدول السابق نجد أن :

1- العملية $\circ$ مغلقة على المجموعة S_3 .

2- العملية $\circ$ دامجة لأن عملية تحصيل الرواسم دامجة (نظرية) أي أن :

$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3) \quad \forall \quad f_1, f_2, f_3 \in S_3$$

3- يوجد عنصر محايد في S_3 بالنسبة للعملية $\circ$ وهو I .

4- حيث أن :

I	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)	العنصر
I	(12)	(13)	(23)	(132)	(132)	معكوسه

إذن يوجد معكوس لكل عنصر في S_3 بالنسبة للعملية $\circ$.

من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن $(S_3 , \circ)$ زمرة .

وحيث أن :

$$(12)\circ(13) = (132) \quad \wedge \quad (13)\circ(12) = (123)$$

إذا $(12)\circ(13) \neq (13)\circ(12)$ أي أن الزمرة $(S_3 , \circ)$ ليست إبدالية .

تعريف (3.2.3):

التبديلة الدائرية التي تحتوي على عنصرين فقط تسمى تبديلة موضع.

فمثلاً $(38) , (35) , (12)$ تباديل موضع .

نظرية (1.2.3) :

أي تبديلة دائرية يمكن كتابتها على صورة حاصل ضرب تباديل موضع.

البرهان :

$$(1234\cdots n) = (1n)\cdots(14)(13)(12)$$

وبصورة عامة فإن :

$$(a_1a_2a_3a_4\cdots a_n) = (a_1a_n)\cdots(a_1a_4)(a_1a_3)(a_1a_2)$$

مثال (5.2.3) :

أكتب التباديل الآتية على صورة حاصل ضرب تباديل موضع :

$$(123) , (1234) , (24)(567)$$

الحل :

$$(123) = (13)(12)$$

$$(1234) = (14)(13)(12)$$

$$(24)(567) = (24)(57)(56)$$

ملاحظات:

1- توجد عدة طرق لكتابة التبديلة الدائرية على صورة تبديلة موضع ، فمثلاً :

$$(123) = (13)(12)$$

وأيضاً $$(123) = (132)(132) = (12)(13)(12)(13)$$

2- حيث أن أي تبديلة يمكن كتابتها على صورة حاصل ضرب تباديل دائرية وأن أي تبديلة دائرية يمكن كتابتها على صورة حاصل ضرب تباديل موضع فإنه يمكن كتابة أي تبديلة على صورة حاصل ضرب تباديل موضع.

3- تبديلة الوحدة هي تبديلة زوجية لأنه يمكن أن نكتبها على الصورة :

$$e = (rs)(rs)$$

4- معكوس أي تبديلة زوجية هو تبديلة زوجية .

5- معكوس أي تبديلة فردية هو تبديلة فردية .

6- معكوس تبديلة الموضع هو نفسها .

3.3 التباديل الزوجية والتباديل الفردية والزمرة التبادلية

تعريف (1.3.3) :

تسمى التبديلة زوجية إذا كان عدد تباديل الموضع التي يمكن أن تكتب بها التبديلة زوجياً ، وتسمى التبديلة فردية إذا كان عدد تباديل الموضع التي يمكن أن تكتب بها التبديلة فردياً.

نظرية (1.3.3) :

التباديل الزوجية في زمرة التناظرية S_n تكون زمرة بالنسبة إلى ضرب التباديل ، ويرمز لها بالرمز A_n.

البرهان :

1- حيث أن حاصل ضرب أي تبديلتين زوجيتين هو تبديلة زوجية إذن مجموعة التباديل الزوجية A_n مغلقة بالنسبة لعملية ضرب التباديل .

2- عملية ضرب التباديل عملية دامجة ، لأنها تحصيل رواسم .

3- يوجد عنصر محايد $e \in A_n$ وذلك لأن تبديلة الوحدة زوجية .

4- حيث أن معكوس التبديلة الزوجية هو تبديلة زوجية إذن معكوس أي عنصر في A_n موجود في A_n .

من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن المجموعة A_n تكون زمرة مع عملية ضرب التباديل.

تعريف (2.3.3) :

مجموعة التباديل الزوجية في الزمرة التناظرية S_n تسمى الزمرة التبادلية ويرمز لها بالرمز A_n وتسمى الزمرة التبادلية .

ملحوظة :

نصف عدد التباديل في الزمرة S_n يكون زوجياً ، ونصفها الآخر فردياً ، ولذلك فإن $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

مثال (1.3.3) :

أكتب عناصر S_4 ثم أكتب عناصر A_4 و A_3 .

الحل :

$$S_4 = \left\{ \begin{matrix} e & (12) & (123) & (12)(34) & (1234) \\ & (13) & (132) & (13)(24) & (1243) \\ & (14) & (124) & (14)(23) & (1324) \\ & (23) & (142) & & (1342) \\ & (24) & (134) & & (1423) \\ & (34) & (143) & & (1432) \\ & & (234) & & \\ & & (243) & & \end{matrix} \right\}$$

$$A_4 = \left\{ \begin{matrix} e, \\ (123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243), \\ (12)(34),(13)(24),(14)(23) \end{matrix} \right\}$$

$$A_3 = \{e, (123), (132)\}$$

4.3 أمثلة متنوعة وتطبيقات

مثال (1.4.3) :

أوجد جميع الزمر الجزئية للزمرة A_4 .

الحل :

$$A_4 = \begin{Bmatrix} e, \\ (123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(143), \\ (12)(34),(13)(24),(14)(23) \end{Bmatrix}$$

حيث أن $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$ وباستخدام نظرية لاجرانج نستنتج أنه إذا كانت H زمرة جزئية من A_4 فإن $|H| \mid |G|$ وعليه فإنه لو كان يوجد زمرة جزئية من الزمرة A_4 لكانت رتبتها قاسم من قواسم العدد 12 ، وحيث أن قواسم العدد 12 هي 12 , 6 , 4 , 3 , 2 , 1 إذن يمكن أن تُوجد زمرة جزئية (وقد لا توجد) لأي من القواسم 2,3,4,6 وواضح أنه لابد أن توجد زمرة جزئية من الرتبة 1 والتي هي $H_1 = \{e\}$ وأيضاً توجد زمرة جزئية من الرتبة 12 والتي هي $H_2 = A_4$ أما بقية القواسم والتي هي 6 , 4 , 3 , 2 فقد تناظر هذه القواسم زمر جزئية وقد لا تناظرها زمر جزئية من الزمرة A_4 وذلك يتضح مما يلي :

<u>الزمر الجزئية من الرتبة 2 في الزمرة A_4 :</u>

$$H_3 = \{e \ , \ (12)(34)\}$$

$$H_4 = \{e \ , \ (13)(24)\}$$

$$H_5 = \{e \ , \ (14)(23)\}$$

سوف نثبت أن $H_3 \le A_4$ وذلك كما يلي :

.	e	$(12)(34)$
e	e	$(12)(34)$
$(12)(34)$	$(12)(34)$	e

جدول $(H_3 , .)$

من جدول $(H_3 , .)$ نجد أن :

1- عملية ضرب (تحصيل) التباديل مغلقة على المجموعة H_3 .

2- يوجد عنصر محايد $e \in H_3$.

3- حيث أن :

العنصر	e	$(12)(34)$
معكوسه	e	$(12)(34)$

إذن يوجد معكوس لكل عنصر في H_3 بالنسبة لعملية ضرب التباديل .

من 1 و 2 و 3 نجد أن $H_3 \le A_4$

وبالمثل يمكن إثبات أن H_4 , H_5 زمرتان جزئيتان من A_4 ، (تمرين للطالب)

<u>الزمر الجزئية من الرتبة 3 في الزمرة A_4 :</u>

$$H_6 = \{e , (123) , (132)\}$$

$$H_7 = \{e , (124) , (142)\}$$

$$H_8 = \{e , (134) , (143)\}$$

$$H_9 = \{e , (234) , (243)\}$$

سوف نثبت أن $H_6 \le A_4$ وذلك كما يلي :

$.$	e	(123)	(132)
e	e	(123)	(132)
(123)	(123)	(132)	e
(132)	(132)	e	(123)

جدول $(H_6 , .)$

من جدول $(H_6 , .)$ نجد أن :

1- عملية ضرب (تحصيل) التباديل مغلقة على المجموعة H_6 .

2- يوجد عنصر محايد $e \in H_6$.

3- حيث أن :

العنصر	e	(123)	(132)
معكوسه	e	(132)	(123)

إذن يوجد معكوس لكل عنصر في H_6 بالنسبة لعملية ضرب التباديل .

من 1 و 2 و 3 نجد أن $H_6 \leq A_4$

وبالمثل يمكن إثبات أن H_7 , H_8, H_9 زمر جزئية من A_4 ، (تمرين للطالب)

الزمر الجزئية من الرتبة 4 في الزمرة A_4 :

$$H_{10} = \{e \ , (12)(34) \ , (13)(24) \ , (14)(23)\}$$

سوف نترك إثبات أن $H_{10} \leq A_4$ تمرين للطالب .

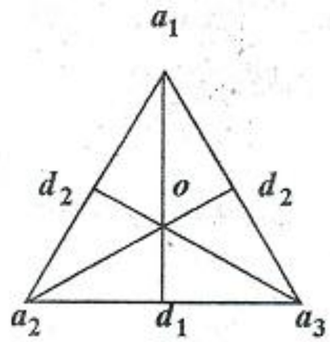
الزمر الجزئية من الرتبة 6 في الزمرة A_4 :

لايوجد وهذا يعني أن عكس نظرية لاجرانج غير صحيح لأن الزمرة A_4 العدد 6 يقسم رتبتها ولكن لا يوجد زمرة جزئية رتبتها 6 في الزمرة A_4 ، وسوف نبرهن ذلك فيما بعد .

5.3 الزمر وعلاقتها ببعض الأشكال الهندسية المنتظمة

تعريف (1.5.3) : مجموعة تماثلات المثلث المتساوي الأضلاع

بفرض أن $a_1a_2a_3$ مثلث متساوي الأضلاع كما في الشكل الآتي :



ولتكن $D_3=\{r_1\ ,\ r_2\ ,\ r_3\ ,f_1\ ,f_2\ ,f_3\}$ مجموعة تماثلات المثلث المتساوي الأضلاع حيث r_1 دوران المثلث حول مركزه o بزاوية قياسها $120°$ عكس عقارب الساعة ، و r_2 دوران المثلث حول مركزه o بزاوية قياسها $240°$ عكس عقارب الساعة ، و r_3 دوران المثلث حول مركزه o بزاوية قياسها $360°$ عكس عقارب الساعة ، أما $f_1\ ,f_2\ ,f_3$ فهي إنعكاسات المثلث $a_1a_2a_3$ حول المستقيمات $a_1d_1\ ,\ a_2d_2\ ,\ a_3d_3$ على الترتيب وبذلك نحصل على المجموعة D_3 التبديلات الآتية :

$$D_3=\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_1 & a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_3 & a_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_2 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_1 & a_3\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

ثم نضع 1 بدلاً من a_1 ، 2 بدلاً من a_2 ، 3 بدلاً من a_3 ، فنحصل على :

$$D_3=\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

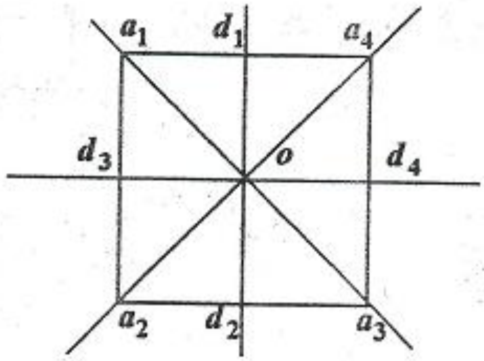
إذن $D_3 = \{e \ , (12) \ , (13) \ , (23) \ , (123) \ , (132)\}$

ويمكن إثبات أن $S_3 \cong D_3$ ، أي أن مجموعة تماثلات المثلث المتساوي الأضلاع D_3 تكون زمرة غير إبدالية مع ضرب التباديل (تحصيل التباديل)، وعدد عناصر D_3 يساوي $3 \times 2 = 6$ ، أي عدد أضلاع المثلث ضرب العدد 2

وكما فعلنا في المثال السابق يمكن إيجاد مجموعة تماثلات المربع والتي يرمز لها بالرمز D_4 كما يلي :

مثال (2.5.3) : مجموعة تماثلات المربع

بفرض أن $a_1a_2a_3a_4$ مربع كما في الشكل الآتي :



ولتكن $D_4 = \{r_1 \ , r_2 \ , r_3 \ , r_4 \ f_1 \ , f_2 \ , f_3 \ , f_4 \ \}$ مجموعة تماثلات المربع حيث r_1 دوران المربع حول مركزه o بزاوية قياسها 90° عكس عقارب الساعة ، و r_2 دوران المربع حول مركزه o بزاوية قياسها 180° عكس عقارب الساعة ، و r_3 دوران المربع حول مركزه o بزاوية قياسها 270° عكس عقارب الساعة ، و r_4 دوران المربع حول مركزه o بزاوية قياسها 360° عكس عقارب الساعة ، أما $f_1 \ , f_2 \ , f_3 , f_4$ فهي إنعكاسات المربع $a_1a_2a_3a_4$ حول المستقيمات $d_1d_2 \ , d_3d_4 \ , a_1a_3 , \ a_2a_4$ على الترتيب وبذلك نحصل على مجموعة التبديلات D_4 الآتية :

$D_4 = \{e\ ,\ (1234)\ ,\ (13)(24)\ ,\ (1432)\ ,\ (14)(23)\ ,\ (12)(34)\ ,\ (13)\ ,\ (24)\}$

ويمكن إثبات أن D_4 زمرة غير إبدالية مع ضرب التبديلات (تمرين للطالب)، والحقيقة أن مجموعة تماثلات المربع D_4 تكون زمرة جزئية غير إبدالية مع ضرب التباديل (تحصيل التباديل) من الزمرة S_4، وعدد عناصر D_4 يساوي $4\times2=8$ ، أي عدد أضلاع المربع ضرب العدد 2 .

مثال (3.5.3) :

أوجد مجموعة تماثلات المخمس المنتظم D_5 ثم أثبت أن D_5 تكون زمرة غير إبدالية مع عملية ضرب التبديلات .

الحل : (تمرين للطالب)

مثال (4.5.3) :

أوجد مجموعة تماثلات المسدس المنتظم D_6 ثم أثبت أن D_6 تكون زمرة غير إبدالية مع عملية ضرب التبديلات .

الحل : (تمرين للطالب)

تمارين (3-1)

1- برهن أن $(S_3,\circ)$ زمرة غير ابدالية حيث $\circ$هي عملية تحصيل التبديلات ثم أوجد جميع الزمر الجزئية منها ؟

2-لتكن $\alpha,\beta\in S_4$ حيث $\alpha=\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix},\beta\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ أوجد كلٍ مما يلي

$$\alpha\circ\beta,\ \beta\circ\alpha,\ \alpha^{-1},\ \beta^{-1},\ \alpha^{-1}\circ\beta^{-1}, \beta^{-1}\circ\alpha^{-1}\ ,\ (\alpha\circ\beta)^{-1},\ \ (\beta\circ\alpha)^{-1},$$
$$ord(\alpha),\ ord(\beta)$$

3- في S_5 حدد أي من التبديلات التالية زوجية و أيها فردية

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix},\ \delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\end{pmatrix}$$

زمرة الائتلاف أوالتطابق بمقياس

تعريف (1.2.3):-

بفرض أن n عدد صحيح ثابت، وكان $a,b\in\mathbb{Z}$ فإننا نقول أن العددين a,b مؤتلفــان أو متطـابقان بمقيـــاس n (a congruent to b modulo n) إذا وفقط إذا كان $a-b$ يقبل القسمة علي n ونعبرعن ذلك في الصورة $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ فمثلاً $5\equiv 33(\mathrm{mod}\ 7)$ ، $40\not\equiv 25(\mathrm{mod}\ 7)$

نظرية (2.2.3):-

علاقة الإئتلاف بمقياس n هي علاقة تكافؤعلي $\mathbb{Z}$.

البرهـــــــــان

لكي نثبت أن علاقة الإئتلاف بمقياس هي علاقة تكافؤ لابد من اثبات أنها علاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة.

$\Leftarrow$ نلاحظ أن $a-a$ يقبل القسمة علي n و بالتالي فإن $a\equiv a(\mathrm{mod}\ n)$ لكل $a\in\mathbb{Z}$ وهذا يثبت أن العلاقة عاكسة.

$\Leftarrow$ بفرض أن $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ وهذا معناه أن $a-b$ يقبل القسمةعلي n وعلي ذلك فإن $b-a$ يقبل القسمة علي n أي أن $b\equiv a(\mathrm{mod}\ n)$ و هذا يثبت أن العلاقة متماثلة.

$\Leftarrow$ بفرض أن $b \equiv c(\mathrm{mod}\, n)$, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ فإن ذلك يعني

$$a-b=k_1 n\ ,\quad b-c=k_2 n \quad , k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (a-b)+(b-c)=k_1 n+k_2 n=(k_1+k_2)n$$

$$\Rightarrow a-c=kn\ ; k=k_1+k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv c(\mathrm{mod}\, n)$$

وهذا يثبت أن العلاقة ناقلةومن ثمَ فهي علاقة تكافؤ

<u>نظرية (3.2.3):-</u>

بفرض أن n عدد صحيح موجب، وأن $a,b,c \in \mathbb{Z}$ فإن

(1) إذا كان $c \equiv d(\mathrm{mod}\, n)$, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ فإن

$$(a+c) \equiv (b+d)(\mathrm{mod}\, n)$$

(2) إذا كان $c \equiv d(\mathrm{mod}\, n)$, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ فإن

$$(ac) \equiv (bd)(\mathrm{mod}\, n)$$

(3) إذا كان $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ فإن

$$(ac) \equiv (bc)(\mathrm{mod}\, n), c \in \mathbb{Z}$$

(4) إذا كان $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ فإن

$$a^m \equiv b^m(\mathrm{mod}\, n), \quad m \in \mathbb{N}$$

<u>البرهـــــــان</u>

(1) حيث أن $c \equiv d(\mathrm{mod}\, n)$, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ فإن

$a-b=k_1n\ ,\quad c-d=k_2n\quad ;k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (a-b)+(c-d)=k_1n+k_2n=(k_1+k_2)n$

$\Rightarrow (a+c)-(b+d)=kn\ ;\ k=k_1+k_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (a+c)\equiv(b+d)(\mathrm{mod}\,n)$

(2) حيث أن $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)\ ,\ c\equiv d(\mathrm{mod}\,n)$ فإن

$a-b=k_1n\ ,\quad c-d=k_2n\quad ;k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (a-b)c=ck_1n\ ,\ (c-d)b=bk_2n$

$\Rightarrow (ac-bc)+(bc-bd)=ck_1n+bk_2n=(ck_1+bk_2)n$

$\Rightarrow (ac)-(bd)=kn\ ;\ k=ck_1+bk_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow ac\equiv bd(\mathrm{mod}\,n)$

(3) إذا كان $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$ فإن $a-b=kn\quad ;k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (a-b)c=ckn\ \Rightarrow ac-bc=ckn$

$\Rightarrow ac\equiv bc(\mathrm{mod}\,n)$

(4) إذا كان $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$ فإننا سوف نثبت هذه الخاصية بإستخدام الأستنتاج الرياضي

⇐ في حالة $m=1$ فإن $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$ أي أن العلاقة صحيحة

⇐ نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $m=k$ أي نفرض أن

$$a^k\equiv b^k(\mathrm{mod}\,n),$$

⇐ نحاول اثبات صحة هذه العلاقة عندما $m=k+1$ أي اثبات أن

$$a^{k+1}\equiv b^{k+1}(\mathrm{mod}\,n),$$

حيث أن $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$ و $a^k\equiv b^k(\mathrm{mod}\,n)$ ومن الخاصية (2) نجد أن $a^{k+1}\equiv b^{k+1}(\mathrm{mod}\,n),$

ملحوظة:- عكس الفقرة الثالثة من النظرية السابقة غير صحيح علي وجه العموم فمثلاً نجد أن $12 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 6)$ وهذا يؤدي إلي $3.4 \equiv 3.2(\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow 4 \not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$

تعريف (4.2.3):-

بفرض أن $a \in \mathbb{Z}$ فإن فصل الائتلاف للعنصر a يُعرَّف علي انه مجموعة كل الأعداد الصحيحة التي تأتلف مع العدد a بمقياس n ويرمز له بالرمز $[a]$ فيكون

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a(\mathrm{mod}\, n)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x - a = kn,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x = a + kn,\ k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

مثال (5.2.3):-

أوجد كل فصول الائتلاف بمقياس3

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 0 + 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$
$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 1 + 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$
$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2 + 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$
$$[3] = [1],\ [4] = [1],\ [5] = [2],\ [6] = [1], \ldots$$

إذن مجموعة كل فصول الائتلاف بمقياس3 هي $\{[0],[1],[2]\}$

ونلاحظ من هذا المثال أن $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$ كما أن $[0] \cap [1] \cap [2] = \varnothing$.

نظرية (6.2.3):-

بفرض أن n عدد صحيح موجب $\mathbb{Z}_n$ هي مجموعة كل فصول الائتلاف بمقياس n أي أن $\mathbb{Z}_n = \{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$ فإن

$$(1)\ \ [a]\neq\varnothing,\quad \forall a\in\mathbb{Z},\ \ (2)\ \ b\in[a]\Rightarrow[a]=[b],\quad \forall a,b\in\mathbb{Z}$$

$$(3)\ \ [a]\bigcap[b]\neq\varnothing\Rightarrow[a]=[b],\quad \forall a,b\in\mathbb{Z}$$

$$(4)\ \ \mathbb{Z}=\bigcup\{[a]:a\in\mathbb{Z}\}$$

البرهـــــــــان

1) نعلم أنه لكل $a\in\mathbb{Z}$ يكون $a\equiv a(\text{mod } n)$ وعلي ذلك فإن $a\in[a]$ و $a\in\mathbb{Z}$ أي أن $[a]\neq\varnothing$.

2) إذا كانت $b\in[a]$ فإن $b\equiv a(\text{mod } n)$ و بالتالي فإن

$$a\equiv b(\text{mod } n)\ \Rightarrow a\in[b]$$

$$b\in[\text{a}]\Rightarrow a\in[b]\ \Rightarrow a\equiv b(\text{mod } n)$$

والآن سوف نبرهن أن $[\text{a}]=[b]$

نفرض أن $x\in[a]$ فيكون $x\equiv a(\text{mod}\,n), a\equiv b(\text{mod}\,n)$

وحيث أن علاقة الائتلاف علاقة ناقلة فإن

$$x\equiv b(\text{mod}\,n)\Rightarrow x\in[b]\Rightarrow[a]\subseteq[b]$$

بنفس الطريقة يمكن اثبات أن $[\text{b}]\subseteq[\text{a}]$ و بالتالي $[a]=[b]$

3) بفرض أن $[a]\bigcap[b]\neq\varnothing$ فإنه يوجد علي الأقل $x\in[a]\bigcap[b]$

$$\Rightarrow x\in[a]\wedge x\in[b]$$

$$\Rightarrow x\equiv a(\text{mod}\,n)\wedge x\equiv b(\text{mod}\,n)$$

و حيث أن علاقة الائتلاف علاقة متماثلة فإن

$$a\equiv x(\text{mod}\,n)\wedge x\equiv b(\text{mod}\,n)$$

$$\Rightarrow a\equiv b(\text{mod}\,n)\Rightarrow[a]=[b]$$

4) وحيث أنه لكل $a\in\mathbb{Z}$ يكون $[a]\subseteq\mathbb{Z}$ فإن

$$\bigcup\{[a]:a\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{Z}$$

كما أنه لكل $a\in\mathbb{Z}$ يوجد فصل ائتلاف $[a]$ بحيث يكون $a\in[a]$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \bigcup\{[a]:a \in \mathbb{Z}\}$$

تعريف (7.2.3):-

عملية الجمع بمقياس n يرمز لها بالرمز $\oplus_n$ و تعرف علي $\mathbb{Z}_n$

بالعلاقة $$[a] \oplus_n [b] = [a+b], \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$$

تمرين:- برهن أن $\mathbb{Z}_n$ تكون مع العملية الثنائية $\oplus_n$ زمرة ابدالية؟

مثال (8.2.3):-

كون جدول لزمرة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}_5, \oplus_5)$ ثم أوجد أصغر عدد صحيح موجب x يحقق المعادلة المٌعطاة في كلٍ مما يلي

$1)\ [x] \oplus_5 [17] = [4]^{-1}, \quad 2)\ [x]^{-1} \oplus_5 [11] = [13]^{-1},$

$3)\ [x+4] \oplus_5 [10]^{-1} = [23]$

الحل

$\oplus_5$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

والآن نوجد قيمة x التي تحقق المعادلات المعطاة

1) حيث أن $[17]=[2]$ ، $[4]^{-1}=[1]$ فإن

$$[x] \oplus_5 [17] = [4]^{-1} \Leftrightarrow [x] \oplus_5 [2] = [1] \Rightarrow x = 4$$

وهذه هي أقل قيمة غير سالبة لــ x

2) حيث أن $[2] = [3]^{-1} = [13]^{-1}$,$[11] = [1]$ فإن

$$[x]^{-1} \oplus_5 [11] = [13]^{-1} \Leftrightarrow [x]^{-1} \oplus_5 [1] = [2]$$

و بوضع $[x]^{-1} = [y]$ فإن

$$[y] \oplus_5 [1] = [2] \Rightarrow [y+1] = [2] \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow [x]^{-1} = [1] \Rightarrow x = 4$$

3) حيث أن $[3] = [23]$,$[0] = [0]^{-1} = [10]^{-1}$ فإن

$$[x+4] \oplus_5 [10]^{-1} = [23] \Leftrightarrow [x+4] \oplus_5 [0] = [3]$$

$$\Rightarrow [x+4] = [3] \Rightarrow x = 4$$

تعريف (9.2.3):-

عملية الضرب بمقياس n يرمز لها بالرمز $\otimes_n$ و تعرف علي $\mathbb{Z}_n$

بالعلاقة $$[a] \otimes_n [b] = [ab], \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

مثال (10.2.3):-

كون جدول النظام الجبري $(\mathbb{Z}_5, \otimes_5)$ ثم بين أنه لا يكون زمرة

الحل

$\otimes_5$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]

[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

نلاحظ من الجدول أن النظام $(\mathbb{Z}_5,\otimes_5)$ لا يكون زمرة لعدم وجود معكوس للعنصر $[0]$

مثال (11.2.3):-

كون جدول لزمرة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}^*_5,\otimes_5)$ حيث $\mathbb{Z}^*_5=\mathbb{Z}_5-\{[0]\}$ ثم أوجد أصغر عدد صحيح موجب x يحقق المعادلة المُعطاة في كلٍ مما يلي

$$1)\ [x]\otimes_5[3]=[2],\quad 2)\ [x]^{-1}\otimes_5[8]=[6],$$

$$3)\ [x]\otimes_5[9]^{-1}=[3]$$

الحل

$\otimes_5$	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]

والآن نوجد قيمة x التي تحقق المعادلات المعطاة

1) نلاحظ من الجدول أن $x=4$ لأن $[x]\otimes_5[3]=[2]$

2) من الجدول نجد أن $[8]=[3],\ [6]=[1]$ و بالتالي

$$[x]^{-1}\otimes_5[8]=[6]\Leftrightarrow[x]^{-1}\otimes_5[3]=[1]\Rightarrow[x]^{-1}=[2]$$

و بالتالي فإن $x = 3$

3) بطريقة مماثلة نجد أن $x = 2$.

تمارين (3-2)

1- كون جدول النظام $(\mathbb{Z}^*_4, \otimes_4)$ ثم بين أنه لا يمثل زمرة ؟

2 - كون جدول النظام $(\mathbb{Z}^*_9, \otimes_9)$ ثم بين أنه لا يمثل زمرة ؟

3- أوجد جميع الزمر الجزئية من الزمر التالية

(a)- $(\mathbb{Z}_8, \oplus_8)$ (b)- $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$ (c)- $(\mathbb{Z}_{24}, \oplus_{24})$ (d)- $(\mathbb{Z}_{36}, \oplus_{36})$

4- كون جدول لزمرة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ثم أوجد أصغر عدد صحيح موجب x يحقق المعادلة المٌعطاة في كلٍ مما يلي

1) $[9] \oplus_6 [x] = [2]$,

2) $[x]^{-1} \oplus_6 [2]^{-1} = [0]$,

3) $[7]^{-1} \oplus_6 [x]^{-1} = [3]$

5- كون جدول لزمرة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}^*_7, \otimes_7)$ثم أوجد أصغر عدد صحيح موجب x يحقق المعادلة المٌعطاة في كلٍ مما يلي

1) $[x] \otimes_7 [23] = [26]^{-1}$,

2) $[17]^{-1} \otimes_7 [x]^{-1} = [20]$,

3) $[x+9] \otimes_7 [10]^{-1} = [20]^{-1}$

6- برهن أن $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n)$ زمرة دورانية

الزمـرة القيـاسية Normal Group

المجموعات المرافقة Cosets

تعريف (1.1.3.3):-

بفرض أن $(G,*)$ زمرة و $(H,*)$ زمرة جزئية منها و $a \in G$ فإن

1- تُعرف المجموعة المرافقة اليُمني لـ H في G والتي تحتوي العنصر a علي أنها المجموعة $H*a = \{h*a : h \in H\}$

2- تُعرف المجموعة المرافقة اليسرى لـ H في G والتي تحتوي العنصر a علي أنها المجموعة $a*H = \{a*h : h \in H\}$

● في كلتا الحالتين العنصر a يسمى ممثلاً للمجموعة المرافقة.

ملحوظات:-

1- $a*H = H = H*a, \quad \forall a \in H$

2- لكل $a \in G$ يكون $a = a*e \in a*H, \ a = e*a \in H*a$

3- إذا كانت $(G,*)$ زمرة ابدالية فإن

$a*H = H*a, \quad \forall a \in G$

4- إذا كان $a*H = H*a, \quad \forall a \in G$ فإن هذا لا يعني بالضرورة أن $(G,*)$ زمرة ابدالية.

مثال (2.1.3.3):-

أوجد جميع المجموعات المرافقة اليُمني والمرافقة اليُسرى للزمرة الجزئية $H=\{\mathrm{e},(1\quad 2)\}$ الزمرة S_3.

الحل حيث أن

$$S_3=\{e,(1\quad 2),(1\quad 3),(2\quad 3),(1\quad 2\quad 3),(1\quad 3\quad 2)\}$$

فإن المجموعات المرافقة اليسرى لــ H هي

$$e\circ H=H=\{\mathrm{e},(1\quad 2)\}=(1\quad 2)\circ H$$

$$(1\quad 3)\circ H=\{(1\quad 3),(1\quad 2\quad 3)\}=(1\quad 2\quad 3)\circ H$$

$$(2\quad 3)\circ H=\{(2\quad 3),(1\quad 3\quad 2)\}=(1\quad 3\quad 2)\circ H$$

أما المجموعات المرافقة اليُمنى لــ H فهي

$$H\circ e=H=\{\mathrm{e},(1\quad 2)\}=H\circ(1\quad 2)$$

$$H\circ(1\quad 3)=\{(1\quad 3),(1\quad 3\quad 2)\}=H\circ(1\quad 3\quad 2)$$

$$H\circ(2\quad 3)=\{(2\quad 3),(1\quad 2\quad 3)\}=H\circ(1\quad 2\quad 3)$$

مثال (3.1.3.3):-

أوجد جميع المجموعات المرافقة اليُمني والمرافقة اليُسرى للزمرة الجزئية $K=(3\mathbb{Z},+)$ من الزمرة $G=(\mathbb{Z},+)$.

الحل

حيث أن عملية الجمع ابدالية فإنه يتحقق $m+K=K+m,\ \ \forall m\in\mathbb{Z}$

وبالتالي فإن المجموعات المرافقة اليُسرى (واليُمنى) لـK هي

$0+K=\mathbb{Z}$ و $1+K=1+3\mathbb{Z}$ و $2+K=2+3\mathbb{Z}$

تعريف (4.1.3.3):-

بفرض أن A,B مجموعتان جزئيتان من الزمرة $(G,*)$ فإننا نعرف حاصل الضرب بالمعادلة $A*B=\{a*b : a\in A, b\in B\}$.

نظرية (5.1.3.3):-

حاصل الضرب لزمرتين جزئتين H_1,H_2 من الزمرة $(G,*)$ يرمز له بالرمز H_1*H_2 يكون زمرة جزئية من $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان $H_1*H_2=H_2*H_1$

البرهـــــــان

$(\Leftarrow)$ نفرض أن $(H_1*H_2,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وبالتالي يتحقق أن

$$\because H_1*H_2=(H_1*H_2)^{-1}=H_2^{-1}*H_1^{-1}=H_2*H_1$$
$$\Rightarrow H_1*H_2=H_2*H_1$$

وذلك لأن لأي زمرة جزئية H يكون $H=H^{-1}$.

$(\Rightarrow)$ نفرض أن $H_1*H_2=H_2*H_1$ ونحاول اثبات أن $(H_1*H_2,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ لذلك نفرض أن $x_1,x_2\in H_1*H_2$ وبالتالي فإن $x_1=a_1*b_1,\ x_2=a_2*b_2$ حيث $a_1,a_2\in H_1,\ b_1,b_2\in H_2$

$$\begin{aligned} x_1 * x_2^{-1} &= (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)^{-1} \\ &= (a_1 * b_1) * (b_2^{-1} * a_2^{-1}) = a_1 * (b_1 * b_2^{-1}) * a_2^{-1} \\ &= a_1 * (b) * a_2^{-1};\ \ b = b_1 * b_2^{-1} \in H_2 \\ &= (a_1 * b) * a_2^{-1} = (b * a_1) * a_2^{-1} \\ &= b * (a_1 * a_2^{-1}) = b * a;\ a = a_1 * a_2^{-1} \in H_1 \\ &\Rightarrow x_1 * x_2^{-1} \in H_1 * H_2 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $(H_1 * H_2, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

نظرية (6.1.3.3):-

أي مجموعتين مرافقتين إما أن يكونا متساويتين أو غير متقاطعتين.

البرهـــــان

نفرض أن $H * a$ و $H * b$ مجموعتان مرافقتان ومتقاطعتان أي أن $(H * a) \bigcap (H * b) \neq \varnothing$ أي يوجد علي الأقل عنصر g بحيث $g \in (H * a) \bigcap (H * b)$ وبالتالي

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g \in (H * a) \wedge g \in (H * b) \\ &\Rightarrow g = h_1 * a \wedge g = h_2 * b; h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 \\ &\Rightarrow a = h_1^{-1} * g = h_1^{-1} * (h_2 * b) \\ &\qquad = (h_1^{-1} * h_2) * b = h * b;\ h = h_1^{-1} * h_2 \in H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H * a &= \{h * a : h \in H\} \\ &= \{h * h_3 * b : h_3 \in H\} \\ &= \{h_4 * b : h_4 \in H\} = H * b \end{aligned}$$

الزمرة القياسية

تعريف (1.2.3.3):-

إذا كانت $(G,*)$ زمرة و $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ فإن $(H,*)$ تُسمي زمرة قياسية أو طبيعية في $(G,*)$ إذا حققت أحد الشروط التالية:

$$1)\ \ g*H = H*g\ ,\quad \forall g\in G$$

$$2)\ \ g^{-1}*h*g\in H,\quad \forall h\in H,\ g\in G$$

وسوف نرمز للزمرة القياسية بالرمز $H \lhd G$.

ملحوظات :-

1- إذا كانت $(G,*)$ زمرة ابدالية فإن كل زمرة جزئية منها تكون زمرة قياسية والعكس غير صحيح دائماً.

2- كل زمرة $(G,*)$ تحتوي علي زمرتين قياسيتين تافهتين هما $(G,*)$ و $(\{e\},*)$.

مثال (2.2.3.3):-

في المثال (2.1.3.3) نجد أن

$$H\circ(1\ \ 3)=\{(1\ \ 3),(1\ \ 3\ \ 2)\}\neq\{(1\ \ 3),(1\ \ 2\ \ 3)\}=(1\ \ 3)\circ H$$

و من ثمَ فإن الزمرة الجزئية $H=\{\mathrm{e},(1\ \ 2)\}$ ليست زمرة قياسية من الزمرة S_3 أي أن $H \ntriangleleft S_3$

$\Leftarrow$ بينما في المثال (3.1.3.3) نجد أن الزمرة الجزئية $K=(3\mathbb{Z},+)$ هي زمرة قياسية من الزمرة $G=(\mathbb{Z},+)$.

نظرية (3.2.3.3):-

مركز أي زمرة $(G,*)$ هو زمرة جزئية قياسية منها.

البرهـــــــان

سبق أن أثبتنا أن مركز أي زمرة $(G,*)$ هو زمرة جزئية منها، لذا يتبقى لنا اثبات أن مركز الزمرة هو زمرة قياسية.

$$Z(G)=\{x\in G : x*a=a*x,\ \forall a\in G\}$$

بفرض أن لكل $a\in G$ فإنه لأي $x\in Z(G)$

$$a*x*a^{-1}=x*a*a^{-1}=x*e=x\in Z(G)$$

$$i.e.\quad a*x*a^{-1}\in Z(G),\ \forall x\in Z(G), a\in G$$

وبالتالي فإن $Z(G)$ زمرة جزئية قياسية من الزمرة $(G,*)$.

تمارين (3-3)

1-في كلٍ مما يلي أوجد كل المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية H

(a) - $H=\{e,(2\quad 3)\}$ في الزمرة $(S_3,\circ)$

(b) - $H=(4\mathbb{Z},+)$ في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$

(c) - $H=(4\mathbb{Z},+)$ في الزمرة $(2\mathbb{Z},+)$

(d) - $H=\{[0],[3],[6]\}$ في الزمرة $(\mathbb{Z}_9,\oplus_9)$

(e) - $H=\langle(1\quad 3)\rangle$ في الزمرة $(S_3,\circ)$

2- لتكن $(G,*)$ زمرة و $a\in G,\ H\le G$ برهن أن

$$N(H)=\{a*h*a^{-1}: h\in H\}$$

زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

3- لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية قياسية من الزمرة $(G,*)$ و $K\le G$ بحيث $H\subseteq K$ برهن أن $H\lhd K$.

4- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H\lhd G$, $K\lhd G$ برهن أن $H\cap K\lhd G$

5- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H\lhd G$, $K\lhd G$ برهن أن $H*K\lhd G$

6- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H\le G$, $a,b\in G$ فبرهن أن $a*H=b*H$ إذا وفقط إذا كان $(b^{-1}*a)\in H$.

7- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H\le G$, $a,b\in G$ فبرهن أن $H*a=H*b$ إذا وفقط إذا كان $(a*b^{-1})\in H$.

زمــرة القسـمة Quotient Group

تعريف (1.4.3):-

إذا كانت $(G,*)$ زمرة و $H \le G$ و كانت

$$G/H = \{a * H : a \in G\}$$

هي مجموعة كل المجموعات المرافقة اليسرى لـ H في G و نريد أن نعرف عملية ثنائية علي G/H بحيث نحصل علي زمرة. و التعريف المتوقع للعملية الثنائية هو

$$(a*H)*(b*H) = (a*b)*H, \qquad \forall a,b \in G$$

و لكن يجب علينا أن نتأكد من أن هذه العملية مُعرَفة تعريفاً جيداً ونقصد بالتعريف الجيد أنه إذا كان

$$a*H, b*H, c*H, d*H \in G/H$$

بحيث $a*H = c*H, b*H = d*H$ فإن

$$(a*H)*(b*H) = (c*H)*(d*H)$$

$$\Rightarrow (a*b)*H = (c*d)*H$$

و لكن للأسف نجد أن هذا ليس صحيحاً لجميع الزمر الجزئية H في G. فعلي سبيل المثال نجد أن من المثال (2.1.3.3)

$$(1\quad 3)\circ H = \{(1\quad 3), (1\quad 2\quad 3)\} = (1\quad 2\quad 3)\circ H$$

كذلك

$$(2\quad 3)\circ H = \{(2\quad 3), (1\quad 3\quad 2)\} = (1\quad 3\quad 2)\circ H$$

ولكن

$$((1\quad 3)\circ(2\quad 3))\circ H = (1\quad 2\quad 3)\circ H$$

$$\neq ((1\quad 3\quad 2)\circ(1\quad 2\quad 3))\circ H = H$$

و للخروج من هذه المشكلة، لابد من البحث عن شروط مناسبة نقيد بها الزمرة الجزئية H لنحصل علي زمرة G/H و هذا الشرط تقدمهُ النظرية التالية:

نظرية (2.4.3):-

إذا كانت $(G,*)$ زمرة و $H \le G$ فإن

$$(a*H)*(b*H)=(a*b)*H, \qquad \forall a,b\in G$$

تكون عملية ثنائية علي G/H إذا كانت $H \lhd G$.

البرهان

نفرض أن $H \lhd G$ أي أن $(\ a*H=H*a\ ,\quad \forall a\in G)$

وهذا يعني أنه إذا كان $h_1 \in H$; $a*h_1 \in a*H$ فإنه يوجد $h_2 \in H$ بحيث $a*h_1=h_2*a$.

والآن سوف نثبت أن هذه العملية مُعرَفة تعريفاً جيداً لذا نفرض أن $a,b,c,d\in G$ حيث $a*H=c*H$ و $b*H=d*H$ ونبرهن أن

$$(a*b)*H=(c*d)*H$$

$$\begin{aligned}
&\because a*H=c*H \text{ و } b*H=d*H\\
&\Rightarrow \exists\, h_1,h_2\in H : a=c*h_1 , b=d*h_2\\
&\Rightarrow (a*b)*H=((c*h_1)*(d*h_2))*H\\
&\qquad\qquad =((c*(h_1*d)*h_2))*H\\
&\qquad\qquad =((c*(d*l)*h_2))*H\ ;\ l\in H,\ \ H\lhd G\\
&\qquad\qquad =((c*d)*(l*h_2))*H\\
&\qquad\qquad =((c*d)*\alpha)*H=(c*d)*H;\ \ \alpha=l*h_2\in H
\end{aligned}$$

نظرية (3.4.3):-

إذا كانت $(G,*)$ زمرة و $H \lhd G$ فإن

$$G/H = \{a*H : a \in G\}$$

تكون زمرة مع عملية ضرب المجموعات المرافقة اليسرى المُعرفة بالصورة $\forall a,b \in G$ $\quad (a*H)*(b*H) = (a*b)*H,$

البرهــــان

بفرض أن $X,Y,Z \in G/H$ فإنه يوجد $a,b,c \in G$ بحيث

$$X = a*H, Y = b*H, Z = c*H$$

أولاً شرط الأغلاق

$$X*Y = (a*H)*(b*H) = (a*b)*H \in G/H$$

ثانياً شرط الدمج

$$\begin{aligned} X*(Y*Z) &= (a*H)*((b*H)*(c*H)) \\ &= (a*H)*(b*c)*H = (a*(b*c))*H \\ &= ((a*b)*c)*H = ((a*b)*H)*(c*H) \\ &= ((a*H)*(b*H))*(c*H) = (X*Y)*Z \end{aligned}$$

ثالثاً العنصر المحايد

بفرض أن $e_1 = b*H$ هو العنصر المحايد فيكون لكل

$$a*H \in G/H$$

$$\begin{aligned} &(a*H)*(b*H) = (a*H) \\ &\Rightarrow (a*b)*H = a*H \\ &\Rightarrow \exists\, h \in H : a*b = a*h \Rightarrow b = h \\ &\therefore e_1 = b*H = h*H = H = e*H \in G/H \end{aligned}$$

رابعاً العنصر المعكوس

معكوس العنصر $a*H \in G/H$ هو العنصر $a^{-1}*H \in G/H$

حيث

$$\left(a^{-1}*H\right)*\left(a*H\right)=\left(a^{-1}*a\right)*H=e*H=H$$

$$\left(a*H\right)*\left(a^{-1}*H\right)=\left(a*a^{-1}\right)*H=e*H=H$$

إذن المجموعة G/H تكون مع عملية ضرب المجموعات المرافقة زمرة تُسمَى زمرة خارج القسمة (أو زمرة العامل *Factor* *Group*) للزمرة G (علي) مقياس H.

مثال (4.4.3):-(يترك للطالب)

لتكن $G=\mathbb{Z}$ و $H=n\mathbb{Z}$ اوجد G/H

تمارين (3-4)

1- لتكن $(G,*)$ زمرة دائرية فبرهن أنه لكل $H \triangleleft G$ تكون G/H دائرية .

2- لتكن $(G,*)$ زمرة ابدالية فبرهن أنه لكل $H \triangleleft G$ تكون G/H ابدالية.

3- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H \triangleleft G$ فبرهن أن G/H زمرة ابدالية إذا وفقط إذا كان

$$a^{-1}*b^{-1}*a*b \in H;\quad \forall a,b \in H$$

الفصل الرابع

التشاكل والتماثل بين الزمر

التشاكل بين الزمر

تعريف (1.1.4):-

بفرض أن $(G,*)$ و $(G',\circ)$ زمرتان فإن الراسم

$$\varphi:(G,*)\to(G',\circ)$$

يُسمَى تشاكل ***Homomorphism*** من الزمرة $(G,*)$ إلي الزمرة $(G',\circ)$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\varphi(a*b)=\varphi(a)\circ\varphi(b),\quad \forall a,b\in G$$

وفي هذه الحالة نقول أن الزمرتين $(G,*)$ و $(G',\circ)$ متشاكلتان.

مثال (2.1.4):-

بفرض أن $(\mathbb{R},+)$ و $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ زمرتان حيث $+$, $\cdot$ هما عمليتي الجمع والضرب العاديتين فإن الراسم $\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^+,\cdot)$ والمُعرَف بالعلاقة $\varphi(x)=e^x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ يكون تشاكلاً لأن لكل $a,b\in\mathbb{R}$ $\varphi(a+b)=e^{a+b}=e^a\cdot e^b=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$

مثال (3.1.4):-

بفرض أن $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ و $(\mathbb{R},+)$ زمرتان حيث $+$, $\cdot$ هما عمليتي الجمع والضرب العاديتين فإن الراسم $\varphi:(\mathbb{R}^+,\cdot)\to(\mathbb{R},+)$

والمُعرَف بالعلاقة $\varphi(x)=\log(x), \ \forall x\in\mathbb{R}^+$

يكون تشاكلاً لأنلكل $a,b\in\mathbb{R}^+$

$$\varphi(a\cdot b)=\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)=\varphi(a)+\varphi(b)$$

مثال (4.1.4):-

بفرض أن $(\mathbb{Z},+)$ و $(\mathbb{Z}_n,\oplus_n)$ زمرتان حيث $+$, $\oplus_n$ هما عملية الجمع العادية وعملية الجمع بمقياس n إن الراسم $\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z}_n,\oplus_n)$ والمُعرَف كالتالي

$$\varphi(x)=[x], \ \forall x\in\mathbb{Z}$$

يكون تشاكلاً لأن لكل $a,b\in\mathbb{Z}$

$$\varphi(a+b)=[a+b]=[a]\oplus_n[b]=\varphi(a)\oplus_n\varphi(b)$$

قبل أن نستعرض بعض الخواص الأساسية للتشاكلات يلزمنا التعريف التالي:

تعريف (5.1.4):-

بفرض أن $(G,*)$ و $(G',\circ)$ زمرتان حيث $\varphi:(G,*)\to(G',\circ)$ هي دالة تشاكل فإن

1- المجموعة $\{\varphi(a):a\in G\}$ تُسمَى مدى دالة التشاكل و يرمزلها بالرمز $Rang(\varphi)$.

2- المجموعة $\{a \in G : \varphi(a) = e'\}$ حيث e' هو محايد الزمرة $(G',\circ)$ تُسمَى نواة دالة التشاكل و يرمزلها بالرمز $Ker(\varphi)$.

نظرية (6.1.4):-

بفرض أن $(G,*)$ و $(G',\circ)$ زمرتان حيث $\varphi:(G,*)\to(G',\circ)$ هي دالة تشاكل فإن:

1) $\varphi(e) = e'$

حيث e هو محايد الزمرة $(G,*)$ و e' هو محايد الزمرة $(G',\circ)$.

2) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}, \quad \forall a \in G$

البرهــــان

$$1) \because \varphi(a) = \varphi(a*e) = \varphi(a)\circ\varphi(e),$$

$$\because \varphi(a) = \varphi(a)\circ e'$$

$$\therefore \varphi(a)\circ e' = \varphi(a)\circ\varphi(e)$$

$$\Rightarrow \varphi(e) = e'$$

$$2) \forall a \in G, \quad a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$$

$$\therefore e' = \varphi(e) = \varphi(a*a^{-1}) = \varphi(a)\circ\varphi(a^{-1})$$

بالمثل $e' = \varphi(e) = \varphi(a^{-1}*a) = \varphi(a^{-1})\circ\varphi(a)$

وبالتالي فإن $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}, \quad \forall a \in G$

نظرية (7.1.4):-

بفرض أن $\varphi:(G,*)\to(G',\circ)$ هو دالة تشاكل من الزمرة $(G,*)$ إلي الزمرة $(G',\circ)$ فإن:

1) $\left(Rang(\varphi),\circ\right)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(G',\circ)$.

2) $\left(Ker(\varphi),*\right)$ تكون زمرة جزئية قياسية من الزمرة $(G,*)$.

البرهـــــان

1) بفرض أن $x,y \in Rang(\varphi)$ فإنه يوجد $a,b \in G$ بحيث

$$x=\varphi(a)\ , \qquad y=\varphi(b)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ x\circ y^{-1} &= \varphi(a)\circ\varphi(b)^{-1}\\ &=\varphi(a)\circ\varphi(b^{-1})\\ &=\varphi(a*b^{-1})\end{aligned}$$

وحيث أن $a*b^{-1}\in G$ فإن $x\circ y^{-1}\in Rang(\varphi)$.

2) بفرض أن $x,y\in Ker(\varphi)$ فإن

$$\varphi(x)=e'\ , \qquad \varphi(y)=e'$$

$$\begin{aligned}\therefore \varphi(x*y^{-1}) &= \varphi(x)\circ\varphi(y^{-1})\\ &=\varphi(x)\circ(\varphi(y))^{-1}\\ &=e'\circ(e')^{-1}=e'\circ e'=e'\\ &\Rightarrow x*y^{-1}\in Ker(\varphi)\end{aligned}$$

وهذا يثبت أن $(Ker(\varphi),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

والآن نثبت أن $Ker(\varphi)\lhd G$، لذلك نفرض أن

$$a\in Ker(\varphi)\ ,\ g\in G$$

$$\therefore\ \varphi(g^{-1}*a*g)=\varphi(g^{-1})\circ\varphi(a)\circ\varphi(g)$$
$$=\varphi(g)^{-1}\circ\varphi(a)\circ\varphi(g)$$
$$=\varphi(g)^{-1}\circ e'\circ\varphi(g)=\varphi(g)^{-1}\circ\varphi(g)=e'$$
$$\Rightarrow g^{-1}*a*g\in Ker(\varphi)$$

وهذا يثبت أن $(Ker(\varphi),*)$ زمرة قياسية و بالتالي زمرة جزئية قياسية من الزمرة $(G,*)$.

تمارين (1-4)

1-إذا كانت φ دالة تشاكل من الزمرة $(G,*)$ إلي نفسها معرفة كالتالي:

$$\varphi(x)=x^2,\quad \forall x\in G$$

فبرهن أن $(G,*)$ زمرة ابدالية؟

2- بفرض أن $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ زمرة، هل الراسم $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ و المُعرَف بالمعادلة: $\varphi(x)=x^2,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^+$ **يكون تشاكل؟**

3- بفرض أن $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ زمرة، هل الراسم $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ و المُعرَف كالتالي: $\varphi(x)=2^x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^+$ **يكون تشاكل؟**

4- بفرض أن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة، هل الراسم $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ والمُعرَف كالتالي:

$$\varphi(x)=x+1,\ \ \forall x\in\mathbb{Z}$$

يكون تشاكل؟

5- إذا كانت φ دالة تشاكل من الزمرة $(G,*)$إلي $(G',\circ)$ فبرهن أن:-

- إذا كانت $H \lhd G'$ فإن $\varphi^{-1}(H) \lhd G$.
- إذا كانت $K \lhd G'$، وكان $\varphi(G) = G'$ فإن $\varphi(K) \lhd G'$.
- إذا كان $a \in G$ و $o(a) = n$ فإن $o(\varphi(a)) \mid n$.
- $Ker(\varphi) = \{e\}$ إذا و فقط إذا كان φ راسم أحادي.

التماثل بين الزمر

تعريف (1.2.4):-

بفرض أن $(G,*)$ و $(G',\circ)$ زمرتان فإن الراسم

$$\varphi : (G,*) \to (G',\circ)$$

يُسمَى تماثل ***Isomorphism*** من الزمرة $(G,*)$ إلي الزمرة $(G',\circ)$ إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$1)\ \varphi(a*b) = \varphi(a)\circ\varphi(b), \quad \forall a,b \in G$$
$$2)\ \varphi \text{ is one}-\text{to}-\text{one correspondence.}$$

وفي هذه الحالة نقول أن الزمرتين $(G,*)$و $(G',\circ)$ متماثلتان ونعبر عن ذلك بالرمز $(G,*) \cong (G',\circ)$.

مثال (2.2.4):-

لقد بينا في المثال (2.1.4) أن الراسم $\varphi : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^{+},\cdot)$ والمُعرَف بالقاعدة: $\varphi(x) = e^{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$، يكون تشاكلاً و الآن الراسم φ

- أحادي (متباين) لأن لكل $x, y \in \mathbb{R}$ يكون

$$\text{If} \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y$$

- فوقي (شامل) لأن

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists x = \ln y \in \mathbb{R} \quad s.t.\ \varphi(x) = \varphi(\ln y) = e^{\ln y} = y$$

و من ثَمَ فإن $(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$.

مثال (2.2.4):-

لقد بينا في المثال (3.1.4) أن الراسم $\varphi : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ والمُعرَف بالقاعدة: $\varphi(x) = \log(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^*$ ، يكون تشاكلاً و يمكن بسهولة اثبات أنه راسم تناظر أحادي (تقابل) و من ثم فإنه يكون تماثلاً.

نظرية (3.2.4):-

علاقة التماثل $\cong$ بين الزمر تكون علاقة تكافؤ.

البرهـــــان

$\Leftarrow$ علاقة التماثل $\cong$ علاقة عاكسة لأن

لأي زمرة $(G,*)$ يوجد راسم التطابق $id_G : (G,*) \to (G,*)$

و هو راسم تناظر أحادي وتشاكل لأن

$$id_G(a*b) = a*b = id_G(a)*id_G(b)$$

$$\therefore \ G \cong G$$

$\Leftarrow$ علاقة التماثل $\cong$ علاقة متماثلة لأنه إذا كانت الزمرة $(G,*)$ متماثلة مع الزمرة $(G',\circ)$ أي أن $G \cong G'$ فإنه يوجد راسم تناظر

أحادي وتشاكل $\varphi:(G,*)\to(G',\circ)$ وهنا نلاحظ أن الراسم العكسي $\varphi^{-1}:(G',\circ)\to(G,*)$ هو راسم تناظرأحادي وتشاكل لأن

$$\forall x,y\in G'\ \exists a,b\in G:\varphi(a)=x\ ,\varphi(b)=y$$

$$\begin{aligned}\therefore \varphi^{-1}(x\circ y) &= \varphi^{-1}[\varphi(a)\circ\varphi(b)]\\ &=\varphi^{-1}[\varphi(a*b)]=a*b\\ &=\varphi^{-1}(x)*\varphi^{-1}(y)\\ &\Rightarrow G'\cong G\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ علاقة التماثل $\cong$ علاقة ناقلة لأنه إذا كانت الزمرة $(G,*)$ متماثلة مع الزمرة $(G',\circ)$ أي أن $G\cong G'$ و كانت $(G',\circ)$ متماثلة مع الزمرة $(G'',\bullet)$ أي أن $G'\cong G''$ فإنه يوجد راسمان تناظر أحادي وتشاكل $\varphi:(G,*)\to(G',\circ)$ و $\psi:(G',\circ)\to(G'',\bullet)$ وهنا نلاحظ أن الراسم المركب $\psi\circ\varphi:(G,*)\to(G'',\bullet)$ هو راسم تناظرأحادي وتشاكل لأن

$$\forall x,y\in G\ \exists a,b\in G:\varphi(a)=x\ ,\varphi(b)=y$$

$$\begin{aligned}\therefore (\psi\circ\varphi)(x*y) &= \psi[\varphi(x)\circ\varphi(y)]\\ &=\psi[\varphi(x)]\bullet\psi[\varphi(y)]\\ &=(\psi\circ\varphi)(x)\bullet(\psi\circ\varphi)(y)\\ &\Rightarrow G\cong G''\end{aligned}$$

ما سبق يثبت أن علاقة التماثل $\cong$ بين الزمر تكون علاقة تكافؤ.

ملحوظة:ـ لكي نثبت أن زمرتين $(G,*)$و $(G',\circ)$ متماثلتان نتبع

الخطوات التالية :

1) نعرف راسم $\varphi:(G,*)\to(G',\circ)$

2) نبرهن أن هذا الراسم تماثل (أي تشاكل وتناظر أحادي)

نظرية (4.2.4):-

أي زمرة دورانية $(G,*)$ ذات رتبة منتهية n تكون متماثلة مع زمرة الأعداد الصحيحة المتطابقة بمقياس n أي $(\mathbb{Z}_n,\oplus_n)$.

البرهـــــان

نفرض أن $(G,*)$ زمرة دورانية ذات رتبة منتهية n مولدة بالعنصر $a\in G$ فيكون

$$G=\langle a\rangle=\left\{e,a,a^2,\ldots,a^{n-1}\right\}$$

لذلك نعرف الراسم $\varphi:(G,*)\to(\mathbb{Z}_n,\oplus_n)$ كالتالي:

$$\varphi(a^k)=[k],\quad \forall a^k\in G$$

والآن نبين أن هذا الراسم هو تناظر أحادي و تشاكل

φ راسم أحادي لأن

$$\varphi(a^{k_1})=\varphi(a^{k_2})\Rightarrow[k_1]=[k_2]$$

$$\therefore k_1\equiv k_2\left(\operatorname{mod} n\right)\Rightarrow k_1=k_2+kn,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore a^{k_1}=a^{k_2+kn}=\left(a^{k_2}\right)\left(a^{kn}\right)=\left(a^{k_2}\right)\left(a^{k}\right)^n=a^{k_2}.e=a^{k_2}$$

φ راسم فوقي لأن لكل عنصر $[k]\in\mathbb{Z}$ يوجد عنصر $a^k\in G$

بحيث يكون $\varphi(a^k)=[k]$

$\Leftarrow$ الراسم φ تشاكل لأن

$$\varphi(a^{k_1}*a^{k_2})=\varphi(a^{k_1+k_2})=[k_1+k_2]$$
$$=[k_1]\oplus_n[k_2]=\varphi(a^{k_1})\oplus_n(a^{k_2})$$

مما سبق نجد أن $(G,*)\cong(\mathbb{Z}_n,\oplus_n)$.

<u>نظرية (5.2.4):-</u>

أي زمرة دورانية $(G,*)$ غير منتهية تكون متماثلة مع زمرة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},+)$.

<u>البرهـــــان</u>

نفرض أن $(G,*)$ زمرة دورانية غير منتهية مولدة بالعنصر $a\in G$ فيكون

$$G=\langle a\rangle=\{e,a,a^2,a^3,\dots\}$$

نعرف الراسم $\varphi:(G,*)\to(\mathbb{Z},+)$ كالتالي:

$$\varphi(a^k)=k,\quad \forall a^k\in G$$

والآن نبين أن هذا الراسم هو تناظر أحادي و تشاكل

φ راسم أحادي لأن

$$\varphi(a^{k_1})=\varphi(a^{k_2})\Rightarrow k_1=k_2\Rightarrow a^{k_1}=a^{k_2}$$

φ راسم فوقي لأن لكل عنصر $k\in\mathbb{Z}$ يوجد عنصر $a^k\in G$ بحيث يكون $\varphi(a^k)=k$

الراسم φ تشاكل لأن

$$\varphi(a^{k_1} * a^{k_2}) = \varphi(a^{k_1+k_2}) = k_1 + k_2$$
$$= \varphi(a^{k_1}) + (a^{k_2})$$

مما سبق نجد أن $(G,*) \cong (\mathbb{Z},+)$.

<u>ملحوظة:-</u>

إذا أمعنا النظر في معنى العبارة "الزمرتان $(G,*)$ و $(G',\circ)$ متماثلتان" لوجدنا أن الزمرة G' هي نفس الزمرة G ما عدا في تسمية عناصر كلٍ منها، أي أن الزمرتين $(G,*)$ و $(G',\circ)$ تتمتعان بنفس الصفات الزمرية (البناء الجبري)، ولذا لكي تكون الزمرتان غير متماثلتين يكفي أن نجد صفة واحدة تتمتع بها إحدى الزمرتين ولا تتمتع بها الزمرة الأخرى.

<u>مثال (6.2.4):-</u>

برهن أن الزمرتين $(\mathbb{Z},+)$ و $(Q,+)$ غير متماثلتين.

<u>الحل</u>

لقد بينا في المثال (3.3.2) أن الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ زمرة دورانية والتمرين (3.3.2) يُبين أن الزمرة $(Q,+)$ غير دورانية، ومن ثمَ فإن $(\mathbb{Z},+) \ncong (Q,+)$.

<u>مثال (6.2.4):-</u>

برهن أن الزمرتين $(\mathbb{Z},+)$ و $(Q^*,\cdot)$ حيث $Q^* = Q-\{0\}$ غير متماثلتين.

الحل

طريقة أولي

نلاحظ أن رتبة أي عنصر في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ ما عدا العنصر المحايد تكون لا نهائية بينما في الزمرة $(Q^*,\cdot)$ نجد أنه يوجد عنصر(-1) بخلاف العنصرالمحايد (1) تكون رتبته منتهية حيث $(-1)^2 = 1$ و بالتالي فإن $(\mathbb{Z},+) \ncong (Q^*,\cdot)$.

طريقة ثانية

نفرض العكس أي نفرض أن $(\mathbb{Z},+) \cong (Q^*,\cdot)$ و عليه يوجد راسم تناظر أحادي و تشاكل $\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(Q^*,\cdot)$ هذا يؤدي إلي أن العنصر $-1\in Q$ هو صورة لعنصر ما في $\mathbb{Z}$ وليكنx، أي أن $\varphi(x) = -1$

$$\therefore \varphi(2x)=\varphi(x+x)=\varphi(x)\cdot\varphi(x)=(-1)\cdot(-1)=1$$

وحيث أن $\varphi(e)=e'$ أي أن صورة محايد الزمرة $(\mathbb{Z},+)$هي محايد الزمرة $(Q^*,\cdot)$، وحيث أن العنصر المحايد في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ هو $e=0$ بينما العنصر المحايد في الزمرة $(Q^*,\cdot)$ هو $e'=1$، أي أن $\varphi(0)=1$ و لكن $\varphi(2x)=0$ وهذا يتطلب أن $x=0$ وهذا يؤدي بنا إلي تناقض حيث $\varphi(0)=1$ و

$\varphi(0) = -1$، وهذا التناقض سببه الفرض الخاطئ بإن $(Q^*,\cdot) \cong (\mathbb{Z},+)$ وعليه يكون $(Q^*,\cdot) \ncong (\mathbb{Z},+)$.

طريقة ثالثة

لقد بينا في المثال (3.3.2) أن الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ زمرة دورانية والتمرين (4.3.2) يُبين أن الزمرة $(Q^*,\cdot)$ غير دورانية، ومن ثمَ فإن $(Q^*,\cdot) \ncong (\mathbb{Z},+)$.

تمارين (4-2)

1- إذا كانت φ دالة تماثل من الزمرة $(G,*)$ إلي $(G',\circ)$ فبرهن أن:-

- **الزمرة $(G,*)$ تكون ابدالية إذا وفقط إذا كانت الزمرة $(G',\circ)$ ابدالية.**
- **الزمرة $(G,*)$ تكون دورانية إذا وفقط إذا كانت الزمرة $(G',\circ)$ دورانية.**
- **لكل $a \in G$ يكون $o(a) = o(\varphi(a))$.**

2- عين جميع التشاكلات من $(\mathbb{Z}_6,\oplus_6)$ إلي $(\mathbb{Z}_4,\oplus_4)$.

3- عين جميع التشاكلات من $(\mathbb{Z}_4,\oplus_4)$ إلي $(\mathbb{Z}_{10},\oplus_{10})$.

4- عين جميع التشاكلات من $(\mathbb{Z}_5,\oplus_5)$ إلي $(\mathbb{Z}_{10},\oplus_{10})$.

5- بفرض أن $(G,*)$ زمرة، $a \in G$ فبرهن أن الراسم

$$\varphi : G \to G$$

المُعرف بالعلاقة $\varphi(x) = a^{-1} * x * a, \quad \forall x \in G$ **يكون تماثل ؟**

الفصل الخامس

الحلقات والحقول

في الفصول السابقة تعرضنا لدراسة الأنظمة الجبرية ذات العملية الثنائية الواحدة و من الآن فصاعداً سوف نتطرق لدراسة الأنظمة الجبرية ذات العمليتين الثنائيتين مثل الحلقة، المنطقة الصحيحة والحقل.

تعاريف أساسية

تعريف (1.1.5):- (الحلقة The ring)

بفرض أن $R \neq \varnothing$، فإن النظام الجبري (الرياضي) $(R,*,\circ)$ يُسمى حلقة **Ring** إذا حقق الشروط التالية:-

- $(R,*)$ زمرة ابدالية
- العملية $\circ$ تُحقق قانون الدمج، أي أن

$$a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c, \qquad \forall a,b,c\in R$$

- العملية $\circ$ توزيعية علي العملية *، أي أن لكل $a,b,c\in R$

$$1)\, a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$$

تحقق (قانون التوزيع اليساري)

(قانون التوزيع اليميني)

$$2)\,(a*b)\circ c=(a\circ c)*(b\circ c)$$

ملحوظات:-

1- بالقول أن $(R,*,\circ)$ نظام جبري نعني أن المجموعة R مغلقة علي كُلٍ من العمليتين $\circ$, * .

2- الحلقة $(R,*,\circ)$ تسمى حلقة ابدالية إذا حققت شرط الابدال بالنسبة للعملية $\circ$ أي أن $a\circ b=b\circ a, \qquad \forall a,b\in R$

3- يُقال عن الحلقة $(R,*,\circ)$ أنها ذات عنصر محايد إذا وجد عنصر $e_2\in R$ بحيث أن $a\circ e_2=a=e_2\circ a, \qquad \forall a\in R$

تعريف (2.1.5):- (المنطقة الصحيحة *The integral domain*)

بفرض أن $R \neq \varnothing$، فإن النظام الجبري $(R,*,\circ)$ يُسمى منطقة صحيحة إذا حقق الشروط التالية:-

1) $(R,*,\circ)$ حلقة ابدالية ذات عنصر محايد

2) قانون الحذف مُحقق بالنسبة للعملية $\circ$ أي أن لكل $a,b,c \in R$ يتحقق أن

$$a \circ c = b \circ c,\ c \neq 0 \Rightarrow a = b$$

تعريف (3.1.5):- (الحقل *The field*)

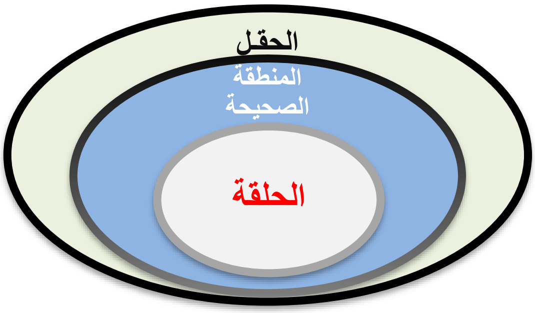
بفرض أن $F \neq \varnothing$، فإن النظام الجبري $(F,*,\circ)$ يُسمى حقل إذا حقق الشروط التالية:-

1) $(F,*,\circ)$ منطقة صحيحة

2) كل عنصر $a \in F$ حيث $a \neq e_1$ (e_1 هوالعنصر المحايد للعملية $*$) يكون له معكوس بالنسبة للعملية $\circ$ وليكن $a^{-1} \in F$ فيكون $a^{-1} \circ a = e_2 = a \circ a^{-1}$ حيث e_2 هوالعنصر المحايد للعملية $\circ$.

ملحوظات:-

1- الشكل التالي يوضح العلاقة بين المفاهيم السابقة



2- يمكن إعادة تعريف الحقل كما يلي

$\Leftarrow$ **(التعريف الثاني للحقل)**

بفرض أن $F \neq \emptyset$، فإن النظام الجبري $(F,*,\circ)$ يُسمى حقل إذا حقق الشروط التالية:-

1- $(F,*)$ زمرة ابدالية

2- $(F^*,\circ)$ زمرة ابدالية، حيث $F^* = F - \{e_1\}$ حيث e_1 هوالعنصر المحايد للعملية الثنائية $*$.

3- العملية $\circ$ توزيعية علي العملية $*$.

<u>أمثلة متنوعة</u>

<u>مثال (4.1.5):-</u>

كُلٍ من الأنظمة الجبرية التالية تكون حلقة ومنطقة صحيحة وحقل.

$$(\mathbb{C},+,.),(\mathbb{R},+,.),(Q,+,.)$$

<u>مثال (5.1.5):-</u>

بفرض أن $*,\circ$ عمليتان مُعرفتان علي $\mathbb{Z}$ حيث:

$$a*b = a+b-1, \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$$

$$a \circ b = a + b - ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

برهن أن النظام $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ حلقة ابدالية بمحايد.

الحــل

1) أولاً نبرهن أن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة ابدالية

$\Leftarrow$ $\mathbb{Z}$ مُغلقة عل العملية $*$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a * b = a + b - 1 \in \mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$ العملية $*$ دامجة

$$\begin{aligned} \text{Let} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}; \Rightarrow a * (b * c) &= a * (b + c - 1) \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= (a + b - 1) + c - 1 \\ &= (a * b) + c - 1 = (a * b) * c \end{aligned}$$

$\Leftarrow$تحتوي $\mathbb{Z}$ علي محايد العملية $*$ وهو العنصر 1 لأن

$$a * 1 = a + 1 - 1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$تحتوي $\mathbb{Z}$ على معكوس كل عنصر بها حيث لكل $a \in \mathbb{Z}$

يوجد $a^{-1} = (2 - a) \in \mathbb{Z}$ و يحقق

$$a * a^{-1} = a * (2 - a) = a + (2 - a) - 1 = 1$$

$\Leftarrow$العملية $*$ ابدالية

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$$

2) ثانياً نبرهن أن $(\mathbb{Z}, \circ)$ شبه زمرة ابدالية بمحايد

$\Leftarrow$ $\mathbb{Z}$ مُغلقة عل العملية $\circ$

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a * b = a + b - ab \in \mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$ العملية $\circ$ دامجة لكل $a,b,c \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - bc)$$
$$= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$$
$$= a + b + c - bc - ab - ac + abc$$

كذلك

$$(a \circ b) \circ c = (a + b - ab) \circ c$$
$$= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c$$
$$= a + b - ab + c - ac - bc + abc$$
$$= a \circ (b + c - bc) = (a \circ b) \circ c$$

$\Leftarrow$ العملية $\circ$ ابدالية

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \circ b = a + b - ab = b + a - ba = b * a$$

$\Leftarrow$ تحتوي $\mathbb{Z}$ علي محايد العملية $\circ$ وهوالعنصر 0 لأن

$$a \circ 0 = a + 0 - a0 = a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

ثالثاً نبرهن أن العملية $\circ$ توزيعية علي العملية * حيث ان لكل $a,b,c \in \mathbb{Z}$ يكون

$$\begin{aligned} a\circ(b*c) &= a\circ(b+c-1) \\ &= a+(b+c-1)-a(b+c-1) \\ &= a+b+c-1-ab-ac+a \\ &= (a+b-ab)+(a+c-ac)-1 \\ &= (a\circ b)+(a\circ c)-1=(a\circ b)*(a\circ c) \end{aligned}$$

أي أن العملية$\circ$توزيعية من الجهة اليسرى علي العملية $*$، أيضاً يمكـن اثبات أن $\circ$ توزيعية من الجهة اليُمنى علي العملية $*$

$\Leftarrow$ علي ما تقدم يكون النظام $(\mathbb{Z},*,\circ)$ حلقة ابدالية بمحايد.

<u>مثال (6.1.5):-</u>

هل أن النظام $(\mathbb{S},+,\cdot)$ حلقة حيث

$$\mathbb{S}=\left\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

$+$ **,** **.** هما عمليتي الجمع و الضرب الأعتياديتان؟

الحــــــل

3) أولاً نبرهن ما إذا كانت $(\mathbb{S},+)$ زمرة ابدالية أم لا

$\Leftarrow$ $\mathbb{S}$ مُغلقة علي العملية $+$ لأن

$$\begin{aligned} \forall s_1,s_2\in\mathbb{S}\Rightarrow s_1 &= a_1+b_1\sqrt{2},s_2 \\ &= a_2+b_2\sqrt{2}\ \ ,a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\therefore s_1+s_2=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right)\sqrt{2}$$

$$\therefore s_1+s_2\in\mathbb{S}$$

$\Leftarrow$العملية $+$ دامجة وابدالية

$\Leftarrow$تحتوي $\mathbb{S}$ علي محايد العملية $+$ وهوالعدد 0 لأن

$$0=0+0\sqrt{2}\in\mathbb{S}$$

$\Leftarrow$تحتوي $\mathbb{S}$ علي معكوس كل عنصر بها بالنسبة للعملية $+$، حيث

$$\forall\ s\in\mathbb{S}\Rightarrow s=a+b\sqrt{2};\quad a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow -a,-b\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow s=-a-b\sqrt{2}\in\mathbb{S}$$

4) ثانياً ندرس النظام $(\mathbb{S},\cdot)$

$\Leftarrow$ $\mathbb{S}$ مُغلقة علي العملية $\cdot$

$\Leftarrow$العملية $\cdot$ دامجة وابدالية

$\Leftarrow$تحتوي$\mathbb{S}$ علي محايد العملية $\cdot$ وهوالعدد 1 لأن

$$1=1+0\sqrt{2}\in\mathbb{S}$$

$\Leftarrow$العملية$\cdot$ توزيعية علي العملية $+$

علي ما تقدم يكون النظام $\left(\mathbb{S},+,\cdot\right)$ حلقة ابدالية بمحايد.

مثال (7.1.5):-

برهن أن النظام $\left(\mathbb{S},+,\cdot\right)$ حقل حيث

$$\mathbb{S}=\left\{a+b\sqrt{2}:a,b\in Q\right\}$$

$+$ **,** **.** هما عمليتي الجمع و الضرب المعتادتين؟

الحـــــــل

وفقاً للتعريف الثاني للحقل وللمثال السابق لكي نثبت أن النظام المُعطى يمثل حقل يتبقي لنا اثبات أن كل $0 \neq s \in \mathbb{S}$ له معكوس بالنسبة للعملية·

بفرض أن العنصر $b = b_1 + b_2\sqrt{2}$ هو معكوس العنصر $0 \neq s = a_1 + a_2\sqrt{2} \in \mathbb{S}$ فيكون

$$\Rightarrow s \cdot b = \left(a_1 + a_2\sqrt{2}\right)\cdot\left(b_1 + b_2\sqrt{2}\right) = 1 + 0\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(a_1b_1 + 2a_2b_2\right) + \left(a_2b_1 + a_1b_2\sqrt{2}\right) = 1 + 0\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a_1b_1 + 2a_2b_2 = 1 \quad \wedge \quad a_2b_1 + a_1b_2 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة للمجاهيل b_2 و b_1 نجد أن

$$b_1 = \frac{-a_1}{2a_2^2 - a_1^2}\ ,\ b_2 = \frac{a_2}{2a_2^2 - a_1^2}$$

إذن معكوس العنصر $0 \neq s = a_1 + a_2\sqrt{2} \in \mathbb{S}$ هو العنصر

$$b = \left(\frac{-a_1}{2a_2^2 - a_1^2}\right) + \left(\frac{a_2}{2a_2^2 - a_1^2}\right)\sqrt{2} \in \mathbb{S}$$

و هذا يُثبِت أن النظام $\left(\mathbb{S}, +, \cdot\right)$ حقل.

مثال (8.1.5):-

بفرض أن $*, \circ$ عمليتان مُعرفتان علي $\mathbb{Z}$ حيث:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a * b = ab, \quad a \circ b = a + b.$$

برهن أن النظام $\left(\mathbb{Z}, *, \circ\right)$ لا يمثل حلقة.

الحــل

$\Leftarrow$ $\mathbb{Z}$ مُغلقة عل العملية $*$

$\Leftarrow$ العملية $*$ دامجة

$\Leftarrow$ تحتوي $\mathbb{Z}$ علي محايد العملية $*$ وهوالعنصر 1 لأن

$\Leftarrow$ لا تحتوي $\mathbb{Z}$ علي معكوس كل عنصر بها لأن لكل $a \in \mathbb{Z}$ نفرض جدلاً أنه يوجد له معكوس وليكن $b \in \mathbb{Z}$ وعلي ذلك فإن

$$a * b = b * a = 1 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$$

مما سبق يتضح أن $(\mathbb{Z},*)$ ليست زمرة ومن ثم فإن النظام $(\mathbb{Z},*,\circ)$ لا يمثل حلقة.

<u>مثال (9.1.5):-</u>

إذا كانت $5\mathbb{Z} = \{5m : m \in \mathbb{Z}\}$، برهن أن النظام $(5\mathbb{Z},+,.)$ يكون حلقة ولا يكون منطقة صحيحة حيث $+$, $.$ هما عمليتي الجمع والضربالمعتادتين؟

الحــل

أولاً نبرهن ما إذا كانت $(5\mathbb{Z},+)$ زمرة ابدالية

$\Leftarrow$ $5\mathbb{Z}$مُغلقة علي العملية $+$ لأنه بفرض أن $5m, 5n \in 5\mathbb{Z}$ فإن $5m + 5n = 5(m+n) \in 5\mathbb{Z}$

$\Leftarrow$ عملية الجمع دامجة

$\Leftarrow$ تحتوي $5\mathbb{Z}$ علي محايد العملية $+$ وهو العنصر 0

$\Leftarrow$ تحتوي $5\mathbb{Z}$ علي معكوس كل عنصر بها حيث معكوس العنصر $5a \in 5\mathbb{Z}$ هو $5(-a) \in 5\mathbb{Z}$

$\Leftarrow$ عملية الجمع ابدالية

مما سبق يتضح لنا أن النظام $(5\mathbb{Z},+)$ زمرة ابدالية

5) ثانياً نبرهن أن $(5\mathbb{Z},\cdot)$ شبه زمرة ابدالية

$\Leftarrow$ $5\mathbb{Z}$ مُغلقة علي عملية الضرب

$$\forall 5a,5b\in 5\mathbb{Z}\Rightarrow 5a\cdot 5b=5(5a\cdot b)\in 5\mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$ عملية الضرب دامجة و ابدالية

$\Leftarrow$ الآن نبرهن أن العملية $\cdot$ توزيعية علي العملية $+$

لكل $x=5a,\ y=5b,\ z=5c\in 5\mathbb{Z}$ نجد أن

$$\begin{aligned}x.(y+z)&=5a.(5b+5c)=(5a\cdot 5b)+(5a\cdot 5c)\\&=(x\cdot y)+(x\cdot z)\\(x\cdot y)\cdot z&=(5a+5b)\cdot 5c=(5a\cdot 5c)+(5b\cdot 5c)\\&=(x\cdot z)+(y\cdot z)\end{aligned}$$

مما سبق يتضح لنا أن النظام $(5\mathbb{Z},+,.)$ حلقة ابدالية.

$\Leftarrow$ الآن نبرهن أن النظام $(5\mathbb{Z},+,.)$ لا يكون منطقة صحيحة.

بفرض أن e هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب فيكون

$$\forall 5n\in 5\mathbb{Z}\Rightarrow 5n\cdot e=5n$$

هذه المعادلة تتحقق عندما $e=1$ ولكن $1\notin 5\mathbb{Z}$ أي أن المجموعة $5\mathbb{Z}$ لا تحتوي علي محايد عملية الضرب وبالتالي فإن النظام $(5\mathbb{Z},+,.)$ لا يكون منطقة صحيحة.

مثال (10.1.5):-

برهن أن النظام $(\mathbb{Z}_5, \oplus_5, \otimes_5)$ يكون حقل؟

الحـــــــل

بتكوين جدولي الجمع والضرب بمقياس 5 كالتالي

$\oplus_5$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

$\otimes_5$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

نلاحظ من هذين الجدولين أن:

- **النظام $(\mathbb{Z}_5,\oplus_5)$ زمرة ابدالية لأن**

1- من الجدول الأول نجد أن $\mathbb{Z}_5$ مغلقة علي العملية $\oplus_5$.

2- العملية $\oplus_5$ دامجة أي أن لكل $[a],[b],[c]\in\mathbb{Z}_5$ يتحقق أن $[a]\oplus_5([b]\oplus_5[c])=([a]\oplus_5[b])\oplus_5[c]$

3- العنصر $[0]\in\mathbb{Z}_5$ هو محايد العملية $\oplus_5$.

4- تحتوي $\mathbb{Z}_5$ علي معكوس كل عنصر بها بالنسبة للعملية $\oplus_5$، حيث معكوس العنصر $[a]\in\mathbb{Z}_5$ هو العنصر $[5-a]\in\mathbb{Z}_5$.

5- العملية $\oplus_5$ابدالية أي أن لكل $[a],[b]\in\mathbb{Z}_5$ يتحقق أن

$$[a]\oplus_5[b]=[b]\oplus_5[a]$$

- **النظام $(\mathbb{Z}_5^*,\otimes_5)$ زمرة ابدالية لأن**

1- من الجدول الأول نجد أن $\mathbb{Z}_5^*$ مغلقة علي العملية $\otimes_5$.

2- العملية $\otimes_5$ دامجة أي أن لكل $[a],[b],[c]\in\mathbb{Z}_5^*$ يتحقق أن

$$[a]\otimes_5([b]\otimes_5[c])=([a]\otimes_5[b])\otimes_5[c]$$

3- العنصر $[1]\in\mathbb{Z}_5^*$هو محايد العملية $\otimes_5$.

4- تحتوي $\mathbb{Z}_5^*$ علي معكوس كل عنصر بها بالنسبة للعملية $\otimes_5$،

معكوس العنصر $[a]\in\mathbb{Z}_5^*$ هو العنصر $[a]^{-1}\in\mathbb{Z}_5^*$ كالتالي

$$[1]^{-1}=[1],\quad [2]^{-1}=[3],\quad [3]^{-1}=[2],\quad [4]^{-1}=[4]$$

5- العملية $\otimes_5$ ابدالية أي أن لكل $[a],[b]\in\mathbb{Z}_5^*$ يتحقق أن

$$[a]\otimes_5[b]=[b]\otimes_5[a]$$

- **العملية $\otimes_5$ توزيعية علي العملية $\oplus_5$ لأن $[a],[b],[c]\in\mathbb{Z}$ يتحقق**

$$[a]\otimes_5\left([b]\oplus_5[c]\right)=\left([a]\otimes_5[b]\right)\oplus_5\left([a]\otimes_5[c]\right)$$
$$\left([a]\oplus_5[b]\right)\otimes_5[c]=\left([a]\otimes_5[c]\right)\oplus_5\left([b]\otimes_5[c]\right)$$

مما سبق يتضح لنا أن النظام $\left(\mathbb{Z}_5,\oplus_5,\otimes_5\right)$ يكون حقلاً.

<u>ملحوظات:-</u>

1- من الآن فصاعداً سوف نستبدل $*$ بـــ $+$ ونستبدل $\circ$ بـــ

- و لا نقصد بذلك عملية الجمع العادية أو الضرب العادية ما لم يُذكر ذلك صراحةً.

2- محايد النظام $(R,+)$ يُسمى المحايد الجمعي وسوف نرمز لهبالرمز 0 ولا نقصد به الصفر إلا إذا كانت العملية $+$ هي عملية الجمع العادية.

3- محايد النظام $(R,.)$ يُسمى المحايد الضربي وسوف نرمز له بالرمز 1 ولا نقصد به الواحد إلا إذا كانت العملية $\cdot$ هي عملية الضرب العادية.

نظرية (11.1.5):-

بفرض أن النظام $(R,+,\cdot)$ حلقة وكان $x^2 = x$ لكل $x \in R$ فإن $(R,+,\cdot)$ حلقة ابدالية، هذه الحلقة تسمى حلقة بوولية **Boolean ring**.

البرهـــــان

لكل $a \in R$ فإن $(a+a) \in R$ فيكون

$$(a+a)^2 = (a+a) \Rightarrow a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a$$
$$\Rightarrow a + a + a + a = a + a$$

ويترتب علي ذلك أن $a + a = 0 \Rightarrow a = -a$

أي أن كل عنصر في R هو المعكوس الجمعي لنفسه. ومن ناحية أُخرى ليكن $a,b \in R$ فإن $a^2 = a, \quad b^2 = b$ و أيضاً

$$(a+b)^2 = (a+b) \Rightarrow a^2 + ab + ba + b^2 = a + b$$
$$\Rightarrow a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow ab + ba = 0 \Rightarrow ab = -ba$$

ولكن $-ba = ba$ فينتج أن $ab = ba$

$\therefore$ الحلقة $(R,+,\cdot)$ حلقة ابدالية.

نظرية (12.1.5):-

بفرض أن النظام $(R,+,\cdot)$ حلقة ، فبرهن أن R تكون حلقة ابدالية

إذا وفقط إذا كان $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ \forall a,b \in R$

البرهـــــان

$(\Leftarrow)$ نفرض أن النظام $(R,+,\cdot)$ يكون حلقة ابدالية

أي أن $\forall a,b \in R \qquad ab = ba,$ ونحاول اثبات الشرط

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$نفرض أن الشرط محقق أي نفرض أن

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ \forall a,b \in R$$

ونحاول اثباتأنالنظام $(R,+,\cdot)$ حلقة ابدالية، بفرض أن $a,b \in R$

$$\therefore\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (a+b)(a+b) &= a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2\\ &\Rightarrow ba = ab\end{aligned}$$

وبالتالي فإن R ابدالية.

$\Leftarrow$ النظرية التالية تفسر لنا بعض العمليات الحسابية التي نجريها علي الأعداد بواسطة عمليتي الجمع والضرب العاديتين بإعتبار أن $-a$ هو المعكوس الجمعي لــ a.

نظرية (13.1.5):-

بفرض أن النظام $(R,+,\cdot)$ حلقة و $a,b,c\in R$ فإن

$i)\ \ a\cdot 0=0\cdot a=0$

$ii)\ -(a\cdot b)=a\cdot(-b)=(-a)\cdot b$

$iii)\ (-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

$iv)\ \ a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c,\quad (b-c)\cdot a=b\cdot a-c\cdot a$

البرهـــــان

i) نلاحظ أن $\quad a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0=a\cdot 0+0$

وذلك لأن $\cdot$ توزيعية علي العملية $+$، كما أن 0 هو المحايد الجمعي. و لكن $(R,+)$ زمرة و بالتالي تحقق قوانين الحذف

$\therefore\ a\cdot 0=0$

بالمثل

$0\cdot a+0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a=0+0\cdot a$

$\therefore\ 0\cdot a=0$

ii) من تعريف المعكوس الجمعي نجد أن

$b+(-b)=0,\quad \forall\, b\in R$

$\therefore\ a\cdot\big(b+(-b)\big)=a\cdot 0=0\Rightarrow a\cdot b+a\cdot(-b)=0$

وبإضافة $-\big(a\cdot b\big)$ لطرفي العلاقة الأخيرة نجد أن

$-\big(a\cdot b\big)=a\cdot(-b)$

و بالمثل يمكن اثبات أن $\quad -\big(a\cdot b\big)=(-a)\cdot b$

iii) هي نتيجة مباشرة من الفقرة الثانية حيث

$(-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)=(-a+a)\cdot(-b)=0\cdot(-b)=0$

$\Rightarrow (-a)\cdot(-b)=-(a\cdot(-b))=-(-(a\cdot b))$

و لكن معكوس معكوس عنصر ما هو العنصر نفسه لذا

$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$$

iv) نلاحظ أن

$$\begin{aligned} a\cdot(b-c) &= a\cdot[b+(-c)] = a\cdot b + a\cdot(-c) \\ &= a\cdot b + [-(a\cdot c)] = a\cdot b - a\cdot c \end{aligned}$$

و بنفس الطريقة يمكن أن نبرهن علي أن $(b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a$.

تمارين (5-1)

1– ادرس R عندما

a- $R=(\mathbb{R},*,\circ)$ حيث أن لكل $a,b\in\mathbb{R}$

$$a*b=a+b-2,\quad a\circ b=ab-2a-2b+6$$

b- $R=(Q,*,\circ)$ حيث أن لكل $a,b\in Q$

$$a*b=a+b+1,\quad a\circ b=ab-a-b+2$$

c)- R=$(Q\times Q,+,.)$، حيث أن لكل $(a,b),(c,d)\in Q^2$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ ,\ (a,b).(c,d)=(ad+bc,2ac+bd)$$

d)- R=$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,.)$، حيث أن لكل $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}^2$

$$(a,b)+(c,d)=(a+,b+d)\ ,\ (a,b).(c,d)=(ac,ad+bc)$$

2- بفرض أن النظام $(R,+,\cdot)$ حلقة ،فبرهن أن R تكون حلقة ابدالية إذا وفقط إذا كان

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,\ \forall a,b\in R$$

3- إذا كانت $F=\left(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}: a,b,c\in\mathbb{R}\right\},+,.\right)$ ، فاثبت أن F حقل.

الحلقات الجزئية *Subrings*

تعريف(1.2.5):-

بفرض أن النظام $(R,+,\cdot)$ حلقة، فإن المجموعة الغير خالية $S\subseteq R$ تسمى حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ ونكتب $S\leq R$ إذا كانت $(S,+,\cdot)$ حلقة.

ملحوظة:-

كل حلقة $(R,+,\cdot)$ لها علي الأقل حلقتان جزئيتان هما $(R,+,\cdot)$ و $(\{0\},+,\cdot)$ يُطلق عليهما الحلقات الجزئية التافهة.

مثـــال(2.2.5):-

1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Q,+,\cdot)$

2) $(Q,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R},+,\cdot)$

3) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{C},+,\cdot)$

و الآن الي النظرية التالية و التي تبين الشروط التي يجب توفرها في أي مجموعة جزئية غيرخالية لتكون حلقة جزئية.

<u>نظرية (3.2.5):-</u>

إذا كانت $(R,+,\cdot)$ ، $\varnothing \neq S \subseteq R$ فإن S حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إذا وفقط إذا كان

$$a-b \in S, \quad ab \in S, \quad \forall a,b \in S$$

<u>البرهـــــــان:-</u>

$(\Leftarrow)$إذا كانت $S \leq R$ فمن الواضح أن

$$a-b \in S, \quad ab \in S, \quad \forall a,b \in S$$

$(\Rightarrow)$نفرض تحقق الشرط

$$a-b \in S, \quad ab \in S, \quad \forall a,b \in S$$

ونحاول أثبات أن $(S,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$

<u>أولاً نثبت أن</u> $(S,+)$ **<u>زمرة ابدالية:</u>**

1) **<u>المحايد:</u>** لأن $S \neq \varnothing$ نفرض أنه يوجد $a \in S$ وبالتالي

$$0 = a-a \in S, \quad a+0 = 0+a = a$$

2) **<u>المعكوس:</u>** بفرض أن $a \in S$ فإن

$$-a = 0-a \in S$$

وبالتالي فإن معكوس العنصر $a \in S$ هو العنصر $-a \in S$

حيث $a+(-a)=(-a)+a=0$

3) **<u>الأغلاق:</u>** بفرض أن $a,b\in S$ فإن $a,-b\in S$ و بالتالي

فإن $a-(-b)=a+b\in S$

4) **<u>الدمج:</u>** لأن $S\subseteq R$ و $+$ عملية تجميعية علي R فإن لكل

$a,b,c\in S$ يتحقق أن $a+(b+c)=(a+b)+c$

5) **<u>الابدال:</u>** لأن $S\subseteq R$ و $+$ عملية ابدالية علي R فإن لكل

$a,b\in S$ يتحقق أن $a+b=b+a$

مما تقدم يتضح أن $(S,+)$ تكون زمرة ابدالية.

<u>ثانياً نثبت أن $(S,\cdot)$ شبه زمرة :</u>

1. **<u>الأغلاق:</u>** واضح من الشرط المُعطى أن S مغلقة علي عملية الضرب أي أن $ab\in S, \qquad \forall a,b\in S$

2. **<u>الدمج:</u>** لأن $S\subseteq R$ و $\cdot$ عملية تجميعية علي R فإن لكل

$a,b,c\in S$ يتحقق أن $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

<u>ثالثاً نثبت أن $\cdot$ توزيعية على العملية $+$:</u>

نظراً لأن $(R,+,\cdot)$ حلقة و $S\subseteq R$ فإنه لكل $a,b,c\in S$ يكون

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c),\ \ (a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$$

مـــا سبق يثبت أن $S\leq R$.

<u>مثـــال(4.2.5):-</u>

إذا كانت $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ و $n\in\mathbb{Z}$ فبرهن أن $S=(n\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة جزئية منها؟

الحـــــــــل

نلاحظ أن $\varnothing \neq n\mathbb{Z}$ لأن $0 = n(0) \in n\mathbb{Z}$ وبفرض أن $nr, ns \in n\mathbb{Z}$ فإن

$$\therefore \quad nr - ns = n(r-s) \in n\mathbb{Z}$$

$$also, \ (nr)(ns) = n(nrs) \in n\mathbb{Z}$$

وبالتالي فإن $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

ملحوظات:-

1) كل حلقة جزئية من حلقة ابدالية تكون ابدالية.

2) قد تكون R حلقة غير ابدالية بينما S حلقة جزئية ابدالية منها كما يوضح ذلك المثال التالي:

$\Leftarrow$ $R = (M_2(Q), +, .)$ حيث $M_2(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in Q \right\}$

تكون حلقة غير ابدالية، بينما $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية ابدالية منها حيث $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a,b \in Q \right\}$

3) إذا كانت R حلقة ذات عنصر محايد، $S \leq R$ فقد لا يكون لـ S عنصر محايد كما يوضح ذلك المثال التالي:

$\Leftarrow$ لتكن $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد 1 بينما $S = (2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة جزئية من R لا تملك عنصر محايد ضربي.

4) قد تكون S حلقة جزئية ذات عنصر محايد من حلقة R ، بينما لايكون للحلقة R عنصر محايد كما يوضح ذلك المثال التالي:

لتكن

$$S=\left(\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: x\in\mathbb{Z}\right\},+,.\right) \text{ ، } R=\left(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a\, b\in\mathbb{Z}\right\} + \right)$$

حيث $+$, $\cdot$ هما عمليتي جمع ضرب المصفوفات العاديتين، يمكن بسهولة ايضاح أن R حلقة لا تملك عنصر محايد بينما S حلقةجزئية من الحلقة R ذات عنصر محايد هو $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5)قد يكون العنصر المحايد لحلقة جزئية S من حلقة R مختلفاً عن العنصرالمحايد للحلقة الأصلية R كما يوضح ذلك المثال التالي:

$$S=\left(\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: x\in\mathbb{Z}\right\},+,.\right) \text{ ، } R=(M_2(\mathbb{Z}), +, .)$$

حيث$+$, $\cdot$ هما عمليتي جمع ضرب المصفوفات العاديتين، يمكن بسهولة ايضاح أن R حلقة تملك عنصر محايد هو $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن S حلقة جزئية من الحلقة R ذات عنصر محايد هو $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نظرية (5.2.5):-

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ حلقة وأن $(H_1,+,\cdot)$ و $(H_2,+,\cdot)$ حلقتان جزئيتان من الحلقة $(R,+,\cdot)$ فإن :

1) $H_1 \cap H_2$ يكون حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$

2) $H_1 \cup H_2$ ليس بالضرورة أن تكون حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$

البرهـــــــان

نلاحظ أن $0 \in H_1, 0 \in H_2$ فإن

$0 \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$ ،

بفرض أن $a,b \in H_1 \cap H_2$ فإن $a,b \in H_1 \wedge a,b \in H_2$ وحيث أن H_1, H_2 حلقتان جزئيتان من الحلقة $(R,+,\cdot)$ فإن

$$\Rightarrow a-b \in H_1 \wedge a-b \in H_2, \ \ also, \ ab \in H_1 \wedge ab \in H_2$$
$$\Rightarrow a-b \in H_1 \cap H_2, \ ab \in H_1 \cap H_2$$

و بالتالي فإن $H_1 \cap H_2$ يكون حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$.

2- لاثبات أن $H_1 \cup H_2$ ليس بالضرورة أن تكون حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$ نعطي المثال التالي

إذا كانت $H_1 = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}, H_2 = \{0, \pm 5, \pm 10, \ldots\}$

فإن $(H_1,+,\cdot)$ و $(H_2,+,\cdot)$ حلقتان جزئيتان من $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ولكن

$$H_1 \cup H_2 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 5, \pm 10, \ldots\}$$

ليست حلقة جزئية من $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ لأن $3,5 \in H_1 \cup H_2$ ولكن

$3-5=-2 \notin H_1 \bigcup H_2$

مركز الحلقة

تعريف(6.2.5):-

بفرض أن$(R,+,\cdot)$حلقة، فإن مركز هذه الحلقة ويرمز له بالرمز $Z(R)$ هو مجموعة كل عناصر R التي تحقق قانون الإبدال مع جميع عناصر R أي أن

$$Z(R)=\{z \in R : zx = xz, \ \forall x \in R\}$$

ويتضح لنا أنه إذا كانت $(R,+,\cdot)$ ابدالية فإن $Z(R)=R$

نظرية (7.2.5):-

مركز أي حلقة هو حلقة جزئية منها.

البرهـــــــان

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ حلقة ، وأن $Z(R)$ هو مركزها

ونحاول اثبات أن $Z(R) \leq R$ ولاثبات ذلك

نلاحظ أن $0 \in Z(R)$ حيث $a0=0a=0 \in R$ وبالتالي $Z(R) \neq \varnothing$. نفرض أن $a,b \in Z(R)$ ونحاول اثبات أن $a-b, ab \in Z(R)$ لكل عنصر $x \in R$ نجد أن

$$a\cdot x=x\cdot a,\quad b\cdot x=x\cdot b\Rightarrow a\cdot x-x\cdot a=b\cdot x-x\cdot b=0$$
$$\Rightarrow a\cdot x-b\cdot x=x\cdot a-x\cdot b$$
$$\Rightarrow (a-b)\cdot x=x\cdot(a-b)$$

$$(a\cdot b)*x=a\cdot(b\cdot x)$$
$$=a\cdot(x\cdot b)=(a\cdot x)\cdot b$$
$$=(x\cdot a)\cdot b=x\cdot(a\cdot b)$$
$$\Rightarrow a\cdot b\in Z(R)$$

وبالتالي يكون $a-b, a\cdot b\in Z(R)$ ومنها $(Z(R),+,\cdot)$ تكون حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$.

تمـــاريـن (1.5)

1- بين فيما إذا كانت S حلقة جزئية في R أم لا في كل حالة من الحالات الآتية ؟

(a)- $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، $S=\{15r:r\in\mathbb{Z}\}$

(b)- $R=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,.)$ ، $S=\{(a,0):a\in\mathbb{Z}\}$ **حيث**

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\quad,\quad (a,b).(c,d)=(a.c,b.d)$$

(c)- $R=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، $S=\{(a,a):a\in\mathbb{Z}\}$

(d)- $R=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، $S=\{(a,2b):a,b\in\mathbb{Z}\}$

(e)-

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{Z}\right\} \text{ ، } R=\left(M_2(\mathbb{Z}),+,\cdot\right)$$

(f)-

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: x\in\mathbb{R}\right\} \text{ ، } R=\left(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}: a,b,c\in\mathbb{R}\right\},+,\cdot\right)$$

(g)-

$$S=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}: x,y\in\mathbb{Z}\right\} \text{ ، } R=\left(\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}: a,b,c\in\mathbb{Z}\right\},+,\cdot\right)$$

(h)- $S=\{[0],[2],[4],[6],[8]\}$ ، $R=(\mathbb{Z}_{10},\oplus_{10},\otimes_{10})$

(i)- $$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{R}\right\} \text{ ، } R=\left(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$$

2-إذا كانت R حلقة ابدالية ، برهن أن $S\leq R$ حيث

$$S=\left\{x\in R: x^n=0,\ \text{for some } n\in\mathbb{Z}^+\right\}$$

2-إذا كانت R حلقة ابدالية و $p\in R$ برهن أن $S\leq R$ حيث

$$S=\{p\cdot r: r\in R\}$$

3-إذاكانت $(R,+,.)$ حلقة ابدالية و $a\in R$ برهن أن $S\leq R$ حيث

$$S=\{ra+na: r\in R,\ n\in\mathbb{Z}\}$$

4- إذاكانت $(R,+,.)$ حلقة ابدالية و $a\in R$ برهن أن $S\leq R$ حيث

$.S=\{x\in R: ax=0\}$

5-إذاكانت $(R,+,.)$ حلقة و $H_1\le R,\ H_2\le R$ فبرهن أن

$$H_1\cup H_2\le R \Leftrightarrow H_1\subseteq H_2 \vee H_2\subseteq H_1$$

الحقول الجزئية Subfields

تعريف(1.3.5):-

بفرض أن النظام $(F,+,\cdot)$ حقل، فإن المجموعة الغير خالية $E\subseteq F$ تسمى حقل جزئي من الحقل $(F,+,\cdot)$ إذا كان $(E,+,\cdot)$ حقل.

مثـــال(2.3.5):-

1) $(Q,+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$

2) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{C},+,\cdot)$

و الآن الي النظرية التالية و التي تبين الشروط الشروط التي يجب توفرها في أي مجموعة جزئية غيرخالية لتكون حقل جزئي.

نظرية (3.3.5):-

إذا كانت $(F,+,\cdot)$، $\varnothing\ne E\subseteq F$ فإن E حقل جزئي من الحقل $(F,+,\cdot)$ إذا وفقط إذا كان

$i)\ \ a-b\in E, \qquad \forall a,b\in E$

$ii)\ \ a\cdot b^{-1}\in E, \qquad \forall a,b\in E,\ b\neq 0$

<u>البرهـــــــان:-</u>

$(\Leftarrow)$إذا كان E حقل جزئي من الحقل $(F,+,\cdot)$ فمن الواضح تحقق الشرطين $i,\ ii$

$(\Rightarrow)$نفرض ان $F\supseteq E\neq\varnothing$ تحقق الشرطين $i,\ ii$

ونحاول أثبات أن $(E,+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(F,+,\cdot)$

<u>أولاً نثبت أن $(E,+)$ زمرة ابدالية:</u>

1) **<u>المحايد:</u>** لأن $E\neq\varnothing$ إذن يوجد $a\in E$ وبالتالي

$0=a-a\in E, \qquad a+0=0+a=a$

2) **<u>المعكوس:</u>** بفرض أن $a\in E$ فإن $-a=0-a\in E$

وبالتالي فإن معكوس العنصر $a\in E$هو العنصر $-a\in E$

حيث $a+(-a)=(-a)+a=0$

3) **<u>الأغلاق:</u>** بفرض أن $a,b\in E$فإن $a,-b\in E$و بالتالي

فإن $a-(-b)=a+b\in E$

4) **<u>الدمج:</u>** لأن $E\subseteq F$ و $+$ عملية تجميعية علي F فإن

لكل $a,b,c\in E$ يتحقق أن

$a+(b+c)=(a+b)+c$

5) **الابدال:** لأن $E \subseteq F$ و $+$ عملية ابدالية علي F فإن لكل $a,b \in E$ يتحقق أن $a+b=b+a$

مما تقدم يتضح أن $(E,+)$ تكون زمرة ابدالية.

ثانياً نثبت أن $(E^*,\cdot)$ زمرة ابدالية:

1) **المحايد:** لأن $E \neq \varnothing$ إذن يوجد $a \in E$ وبالتالي

$$1 = a \cdot a^{-1} \in E, \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

2) **المعكوس:** بفرض أن $a \in E,\ a \neq 0$ فإن

$$a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} \in E$$

وبالتالي فإن $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

3) **الأغلاق:** بفرض أن $a,b \in E$ فإن $a,b^{-1} \in E$ و بالتالي فإن

$$a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in E$$

4) **الدمج:** لأن $E \subseteq F$ و $\cdot$ عملية تجميعية علي F فإن لكل $a,b,c \in E$ يتحقق أن $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

5) **الابدال:** لأن $E \subseteq F$ و $\cdot$ عملية ابدالية علي F فإن لكل $a,b \in E$ يتحقق أن $a \cdot b = b \cdot a$

مما تقدم يتضح أن $(E^*,\cdot)$ تكون زمرة ابدالية.

ثالثاً نثبت أن $\cdot$ توزيعية علي العملية $+$:

نظراً لأن $(F,+,\cdot)$ حقل و $E \subseteq R$ فإنه لكل $a,b,c \in E$ يكون

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \ \ (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

مــا سـبق يثبت أن $(E,+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(F,+,\cdot)$

مثـــال(4.3.5):-

إذا كانت $E=Q\left(\sqrt{p}\right):=\left\{a+b\sqrt{p}:a,b\in Q\right\}$ و p عدد أولي فبرهن أن $S=(E,+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $F=(\mathbb{R},+,\cdot)$ حيث $+,\cdot$ هما عمليتي الجمع والضرب العاديتين؟

الحـــــــــل

$\Leftarrow$بفرض أن $x,y\in E$ إذن يوجد $a,b,c,d\in Q$ بحيث

$$x=a+b\sqrt{p}\quad,\quad y=c+d\sqrt{p}$$

إذن

$$\begin{aligned}x-y&=\left(a+b\sqrt{p}\right)-\left(c+d\sqrt{p}\right)\\&=\left(a-c\right)+\left(b-d\right)\sqrt{p}\end{aligned}$$

و حيث أن $\left(a-c\right),\left(b-d\right)\in Q$ فإن $x-y\in E$.

$\Leftarrow$بفرض أن $x,y\in E$ حيث $y\neq 0$ إذن يوجد $a,b,c,d\in Q$ بحيث

$$x=a+b\sqrt{p}\quad,\quad y=c+d\sqrt{p}$$

نحاول اثبات أن $x\cdot y^{-1}\in E$ ولكن هذا يتطلب أولاً معرفة المعكوس الضربي لـــ y لذلك نفرض أن العنصر $\alpha=b_1+b_2\sqrt{p}$ هو المعكوس الضربي لـــ y و بالتالي

$$\Rightarrow y\cdot\alpha=\left(c+d\sqrt{p}\right)\cdot\left(b_1+b_2\sqrt{p}\right)=1+0\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow\left(cb_1+pdb_2\right)+\left(db_1+cb_2\sqrt{p}\right)=1+0\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow cb_1+pdb_2=1 \quad\wedge\quad db_1+cb_2=0$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة لـ b_2 و b_1 نجد أن

$$b_1=\frac{-c}{pd^2-c^2}\ ,\ b_2=\frac{d}{pd^2-c^2}$$

و حيث أن $b_1,b_2\in Q$ (تحقق من ذلك)فإن المعكوس الضربي لــ y هو

$$y^{-1}=\left(\frac{-c}{pd^2-c^2}\right)+\left(\frac{d}{pd^2-c^2}\right)\sqrt{p}=\frac{\left(-c+d\sqrt{p}\right)}{pd^2-c^2}$$

$$\therefore x\cdot y^{-1}=\left(a+b\sqrt{p}\right)\cdot\left(\frac{\left(-c+d\sqrt{p}\right)}{pd^2-c^2}\right)$$

$$=\frac{\left(a+b\sqrt{p}\right)\left(-c+d\sqrt{p}\right)}{pd^2-c^2}$$

$$=\frac{\left(-ac+pbd\right)\left(-cb\sqrt{p}+ad\sqrt{p}\right)}{pd^2-c^2}$$

$$=\left(\frac{-ac+pbd}{pd^2-c^2}\right)+\left(\frac{-cb+ad}{pd^2-c^2}\right)\sqrt{p}\in E$$

لذلك فإن $S=(E,+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $F=(\mathbb{R},+,\cdot)$

نظرية (5.3.5):-

بفرض أن $(F,+,\cdot)$ حقل وأن $(F_1,+,\cdot)$ و $(F_2,+,\cdot)$ حقلان جزئيان من الحقل $(F,+,\cdot)$ فإن :

1) $F_1 \bigcap F_2$ يكون حقلاً جزئياً من الحقل $(F,+,\cdot)$

2) $F_1 \bigcup F_2$ ليس بالضرورة أن يكون حقلاً جزئياً من $(F,+,\cdot)$

البرهـــــــان

1) نلاحظ أن $0 \in F_1, 0 \in F_2$ فإن

$0 \in F_1 \bigcap F_2 \Leftarrow \varnothing \neq F_1 \bigcap F_2$ ،

بفرض أن $a,b \in F_1 \bigcap F_2$ فإن $a,b \in F_1 \wedge a,b \in F_2$ وحيث أن H_1,H_2 حقلان جزئيان من الحقل $(F,+,\cdot)$ فإن

$$\Rightarrow a-b \in F_1 \wedge a-b \in F_2,$$
$$also,\ a\cdot b^{-1} \in F_1 \wedge a\cdot b^{-1} \in F_2,\ b \neq 0$$
$$\Rightarrow a-b \in F_1 \bigcap F_2,\ a\cdot b^{-1} \in F_1 \bigcap F_2$$

وبالتالي فإن $F_1 \bigcap F_2$ يكون حقلاً جزئياً من الحقل $(F,+,\cdot)$.

2- لاثبات أن $F_1 \bigcup F_2$ ليس بالضرورة أن يكون حقلاً جزئياً من $(F,+,\cdot)$ نعطي المثال التالي

من المثال السابق **(4.3.5)** واضح أن كلاً من $F_1 = Q\left(\sqrt{2}\right)$ و $F_2 = Q\left(\sqrt{3}\right)$ مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين يكون حقلاً جزئياً من الحقل $F = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ولكن $F_1 \bigcup F_2$ ليس حقلاً جزئياً من الحقل F لأن $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in F_1 \bigcup F_2$ بينما $\sqrt{2} - \sqrt{3} \notin F_1 \bigcup F_2$

الفصل السادس

التشاكل والتماثل بين الحلقات

التشاكل بين الحلقات

<u>تعريف (1.1.6):-</u>

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ و $(R',+',\cdot')$ حلقتان فإن الراسم

$$\varphi:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$$

يُسمَى تشاكل او راسم محافظ *Homomorphism* من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إلي الحلقة $(R',+',\cdot')$ إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) $\varphi(a+b)=\varphi(a)+'\varphi(b), \quad \forall a,b\in R$

2) $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot'\varphi(b), \quad \forall a,b\in R$

وفي هذه الحالة نقول أن الحلقتين $(R,+,\cdot)$ و$(R',+',\cdot')$ متشاكلتان.

<u>مثال (2.1.6):-</u>

بفرض أن $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ و $(Q,+,\cdot)$ حلقتان حيث $+$, $\cdot$ هما عمليتي الجمع والضرب العاديتين فإن الراسم $\varphi:(\mathbb{Z},+,\cdot)\to(Q,+,\cdot)$

والمُعرَف بالقاعدة $\varphi(x)=\dfrac{x}{1}$ لكل $x\in\mathbb{Z}$ يكون تشاكلاً لأن لكل $a,b\in\mathbb{Z}$ نجد

$$\varphi(a+b)=\frac{a+b}{1}=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\varphi(a)+\varphi(b)$$

$$\frac{a\cdot b}{\ } \quad \frac{a}{\ } \quad \frac{b}{\ }$$

مثال (3.1.6):-

بين ما إذا كان الراسم $\varphi:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_{10}$ والمُعرَف كالتالي:

$\varphi([x])=[5x],\quad \forall[x]\in\mathbb{Z}_5$ تشاكلاً حلقياً من الحلقة $(\mathbb{Z}_5,\oplus_5,\otimes_5)$ الي الحلقة $(\mathbb{Z}_{10},\oplus_{10},\otimes_{10})$؟

الحـــــل

نلاحظ أن الشرط الأول الوارد في تعريف التشاكل الحلقي غير محقق هنا فمثلاً

$$\varphi([3]\oplus_5[4])=\varphi([3+4])=\varphi([2])=[10]=[0]$$

بينما

$$\varphi([3])=[15]=[5],\quad \varphi([4])=[20]=[0]$$

$$\Rightarrow \varphi([3])\oplus_{10}\varphi([4])=[5]\oplus_{10}[0]=[5]$$

واضح أن $\varphi([3]\oplus_5[4])\neq\varphi([3])\oplus_{10}\varphi([4])$ ومن ثمَ فإن الراسم φ ليس تشاكل حلقي.

تمرين (4.1.6):-

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ حلقة حيث $+$, $\cdot$ هما عمليتي الجمع والضرب العاديتين، وأن $(R',+,\cdot)$ حلقة حيث

$R'=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}:a\in\mathbb{R}\right\}$ و$+$, $\cdot$ هما عمليتي جمع ضرب المصفوفات العاديتين فإن الراسم $\varphi:(R',+,\cdot)\to(R,+,\cdot)$

والمُعرَف بالمعالة $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$ يكون تشاكل حلقي (تحقق من ذلك؟)

$\Leftarrow$ قبل أن نستعرض بعض الخواص الأساسية للتشاكلات يلزمنا التعريف التالي:

<u>تعريف (5.1.6):-</u>

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ و $(R',+',\cdot')$ حلقتان وأن الراسم

$\varphi:(R,+,\cdot) \to (R',+',\cdot')$

هو دالة تشاكل فإن

1- المجموعة $\{\varphi(a) : a \in R\}$ تُسمَى مدى دالة التشاكل و يرمزلها بالرمز $Rang(\varphi)$.

2-المجموعة $\{a \in R : \varphi(a) = 0'\}$ حيث $0'$ هو المحايد الجمعي للحلقة $(R',+',\cdot')$ تُسمَى نواة دالة التشاكل و يرمزلها بالرمز $Ker(\varphi)$

<u>نظرية (6.1.4):-</u>

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ و $(R',+',\cdot')$ حلقتان حيث $\varphi:(R,+,\cdot) \to (R',+',\cdot')$ هي دالة تشاكل فإن:

1) $\varphi(0) = 0'$

حيث 0 هو المحايد الجمعي للحلقة $(R,+,\cdot)$ وحيث $0'$ هو المحايد الجمعي للحلقة $(R',+',\cdot')$.

2) $\varphi(-a) = -(\varphi(a)), \quad \forall a \in R$

البرهـــــان

$$1)\ \because \varphi(a)=\varphi(a+0)=\varphi(a)+'\varphi(0),$$

$$\because \varphi(a)=\varphi(a)+'0'$$

$$2)\quad \forall a\in R,\quad a+(-a)=(-a)+a=0$$

بالمثل

$$0'=\varphi(0)=\varphi((-a)+a)=\varphi(-a)+'\varphi(a)$$

وبالتالي فإن

$$\varphi(-a)=-(\varphi(a)),\qquad \forall a\in R$$

نظرية (7.1.6):-

بفرض أن $\varphi:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ هو دالة تشاكل من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إلي الحلقة $(R',+',\cdot')$ فإن:

1) $\left(Rang(\varphi),+',\cdot'\right)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(R',+',\cdot')$.

2) $\left(Ker(\varphi),+,\cdot\right)$ تكون زمرة جزئيةقياسية من الزمرة $(R,+,\cdot)$.

البرهـــــان

1) بفرض أن $x,y\in Rang(\varphi)$ فإنه يوجد $a,b\in R$ بحيث

$$x=\varphi(a)\ ,\qquad y=\varphi(b)$$

$$\therefore\ x+'(-y)=\varphi(a)+'(-\varphi(b))$$
$$=\varphi(a)+'\varphi(-b)$$

وحيث أن $a-b, a\cdot b\in R$ فإن $x+'(-y), x\cdot' y\in Rang(\varphi)$.

2) بفرض أن $x, y\in Ker(\varphi)$ فإن

$$\varphi(x)=0'\ ,\qquad \varphi(y)=0'$$
$$\therefore \varphi(x+(-y))=\varphi(x)+'\varphi(-y)$$
$$=\varphi(x)+'(-\varphi(y))$$

و بالتالي فإن $x+(-y), x\cdot y\in Ker(\varphi)$

وهذا يثبت أن $(Ker(\varphi),+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$.

تمارين (1-6)

1- لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة، هل الراسم φ من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إلي نفسها والمعرف بالمعالة $\varphi(x)=x^2, \quad \forall x\in R$ دالة تشاكل؟

2- إذا كانت φ دالة تشاكل من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إلي نفسها، فبرهن أن $(H,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ حيث

$$H=\{x\in R:\varphi(x)=x\}$$

3- بفرض أن $(R,+,\cdot)$ و $(R',+,\cdot)$ حلقتان، برهن أن الراسم $\varphi:(R,+,\cdot)\to(R',+,\cdot)$ والمُعرَف كالتالي:

$$\varphi(x)=0, \quad \forall x\in R$$

يكون تشاكل؟ وأن $Ker(\varphi)=R$ ؟

4- بفرض أن $(Q,+,\cdot)$ و $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقتان حيث $+$, $\cdot$ هما عمليتي الجمع والضرب العاديتين، برهن أن الراسم $\varphi:\mathbb{Z}\to Q$ والمُعرَف كالتالي: $\varphi(x)=x, \quad \forall x\in\mathbb{Z}$
يكون تشاكل؟ وأن $Ker(\varphi)=0$ ؟

5- إذا كانت φ دالة تشاكل من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إلي $(R',+',\cdot')$ فبرهن أن:-

- إذا كانت $H\le R'$ فإن $\varphi^{-1}(H)\le R$
- إذا كانت $K\le R$ فإن $\varphi(K)\le R'$

6- اثبت أن $\varphi:R\to S$ تشاكل حلقي، ثم أوجد $Ker(\varphi)$ عندما

a) $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، $S=(\mathbb{Z}_3,\oplus_3,\otimes_3)$ ،

$\varphi(x)=([x])^3$ لكل $x\in\mathbb{Z}$

b) $R=(\mathbb{Z}_9,\oplus_9,\otimes_9)$ ، $S=(\mathbb{Z}_{12},\oplus_{12},\otimes_{12})$ ،

$\varphi([x])=[4x]$ لكل $[x]\in\mathbb{Z}_9$

التماثل بين الحلقات

تعريف(1.2.6):-

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ و $(R',+',\cdot')$ حلقتان فإن الراسم

$\varphi:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$

يُسمَى تماثل $Isomorphism$ من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إلي الحلقة $(R',+',\cdot')$ إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) φ تشاكل حلقي

2) φ راسم تناظر أحادي

وفي هذه الحالة نقول أن الحلقتين $(R,+,\cdot)$ و $(R',+',\cdot')$ متماثلتان ونعبر عن ذلك بالرمز $(R,+,\cdot)\cong(R',+',\cdot')$ أو $R\cong R'$.

مثال (2.2.6):-

بفرض أن $(R,+,\cdot)$ حلقة لها عنصر المحايد الضربي1، بإستخدام عناصر R يمكننا تكوين الحلقة $(R',*,\circ)$ و مُعرف عليها العمليات $\circ$,$*$ كالتالي: لكل $a,b\in R$

$$a*b=a+b+1,\qquad a\circ b=a+b+ab$$

برهن أن $R\cong R'$؟

الحــــــل

أولاً نعرف راسم $\varphi:(R,+,\cdot)\to(R',*,\circ)$ بالقاعدة

$$\varphi(x)=x-1,\quad \forall\ x\in R$$

ونُبين أنه مُعرف تعريفاً جيداً

ليكن $a,b \in R$ حيث $a = b$ فإن $a-1 = b-1$ أي أن

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

ثانياً نُبين أن φ تشاكل حلقي

لكل $a,b \in R$ يكون

$$\varphi(a+b) = a+b-1 = (a-1)+(b-1)+1$$
$$= \varphi(a)+\varphi(b)+1 = \varphi(a)*\varphi(b)$$

كذلك

$$\varphi(a)\circ\varphi(b) = (a-1)\circ(b-1)$$
$$= (a-1)+(b-1)+(a-1)(b-1)$$
$$= (a-1)+(b-1)+ab-a-b+1$$

ثالثاً نُبين أن φ تناظر أحادي

- أحادي (متباين) لأن لكل $x,y \in R$ يكون

$$\text{If} \quad \varphi(x)=\varphi(y) \Rightarrow x-1 = y-1 \Rightarrow x = y$$

- فوقي (شامل) لأن

$$\forall y \in R' \Rightarrow \exists x = y+1 \in R \quad s.t.$$
$$\varphi(x) = \varphi(y+1) = (y+1)-1 = y$$

و من ثمَ فإن $R \cong R'$.

<u>نظرية (3.2.4):-</u>

إذا كانت φ دالة تشاكل من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إلي الحلقة $(R',*,\circ)$ فإن $Ker(\varphi)=\{0\}$ إذا و فقط إذا كان φ تماثل.

البرهــــــان

نظرية (4.2.6)

علاقة التماثل بين الحلقات تكون علاقة تكافؤ.

البرهــــــان

⇐علاقة التماثل $\cong$ علاقة عاكسة لأن لأي حلقة $(R,+,\cdot)$ يوجد راسم التطابق $\varphi:(R,+,\cdot)\to(R,+,\cdot)$ و هو راسم تناظر أحادي وتشاكل لأن

$$id_R(a+b)=a+b=id_R(a)+id_R(b)$$
$$id_R(a\cdot b)=a\cdot b=id_R(a)\cdot id_R(b)$$

⇐علاقة التماثل $\cong$ علاقة متماثلة لأن

إذا كانت الحلقة $(R,+,\cdot)$ متماثلة مع الحلقة $(R',+',\cdot')$ أي أن $R\cong R'$ فإنه يوجد راسم تناظر أحادي وتشاكل $\varphi:R\to R'$ وهنا نلاحظ أن الراسم العكسي $\varphi^{-1}:R'\to R$ هو راسم تناظرأحادي وتشاكل لأن

$$\forall x,y\in R'\ \exists a,b\in R:\varphi(a)=x\ ,\varphi(b)=y$$
$$\therefore\ \varphi^{-1}(x+'y)=\varphi^{-1}[\varphi(a)+'\varphi(b)]$$
$$=\varphi^{-1}[\varphi(a+b)]=a+b$$
$$=\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(y),$$
$$Also\quad \varphi^{-1}(x\cdot'y)=\varphi^{-1}[\varphi(a)\cdot'\varphi(b)]$$

$\Leftarrow$ علاقة التماثل $\cong$ علاقة ناقلة لأنه إذا كانت الحلقة $(R,+,\cdot)$ متماثلة مع الحلقة $(R',+',\cdot')$ أي أن $R\cong R'$ وكانت $(R',+',\cdot')$ متماثلة مع الحلقة $(R'',+'',\cdot'')$ أي أن $R'\cong R''$ فإنه يوجد راسمان تناظر أحادي وتشاكل $\varphi:R\to R'$ و $\psi:R'\to R''$ وهنا نلاحظ أن الراسم المُركَبْ $\psi\circ\varphi:R\to R''$ هو راسم تناظرأحادي وتشاكل لأن

$$\forall x,y\in G\ \exists a,b\in G:\varphi(a)=x\ ,\varphi(b)=y$$

$$\begin{aligned}\therefore(\psi\circ\varphi)(x+y)&=\psi[\varphi(x)+'\varphi(y)]\\&=\psi[\varphi(x)]+''\psi[\varphi(y)]\\&=(\psi\circ\varphi)(x)+''(\psi\circ\varphi)(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Also,}\quad(\psi\circ\varphi)(x\cdot y)&=\psi[\varphi(x)\cdot'\varphi(y)]\\&=\psi[\varphi(x)]\cdot''\psi[\varphi(y)]\\&=(\psi\circ\varphi)(x)\cdot''(\psi\circ\varphi)(y)\\&\Rightarrow R\cong R''\end{aligned}$$

ما سبق يثبت أن علاقة التماثل $\cong$ بين الحلقات تكون علاقة تكافؤ.

تمارين (2.6)

1- لتكن $(\mathbb{C},+,\cdot)$ هي حلقة الأعداد المركبة، بين أن الراسم φ من الحلقة $(\mathbb{C},+,\cdot)$ الي نفسها و المعرف كالتالي:

$$\varphi(x+iy)=x-iy,\quad\forall x+iy\in\mathbb{C}$$

يكون تماثل؟