محاضرات

في

الجبر الخطي

إعداد

دكتور/ سعد شرقاوي

قسم الرياضيات –كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

٢٠٢٢/٢٠٢٣م

الباب الأول

أنظمة المعادلات الخطية

Systems of linear equations

مفهوم المعادلة الخطية: المعادلة $a_1x + a_2y = b$ تُسمى معادلة خطية في (مجهولين) متغيرين x, y .

وبشكل أعم تُعرف المعادلة الخطية في عدد n من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ بأنها معادلة على الصورة :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \qquad (1)$$

حيث $a_1, a_2, ..., a_n, b$ ثوابت حقيقية.

ملاحظة: نلاحظ أن المعادلة الخطية لا تشتمل على أي حواصل ضرب أو جذور للمتغيرات، ولا تظهر كدلائل لدوال مثلثية أو لوغاريتمية أو أسية.

أمثلة: المعادلات الآتية:

$$x + 3y = 7 \ , \ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \ , \ y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$$

معادلات خطية.

بينما المعادلات الآتية:

$$x + 3y^2 = 7 \ , \ y - \sin x = 0 \ , \ \sqrt{x} + 2y + xz = 0$$

ليست خطية.

حل المعادلة الخطية: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ هو متتابعة من n من الأعداد $s_1, s_2, ..., s_n$ تحقق المعادلة عند إجراء التعويض:

$$x_1 = s_1 \, , x_2 = s_2 \, , ..., x_n = s_n \, .$$

تُسمى الفئة المكونة من كل حلول المعادلة الخطية بفئة الحل لها .

وتُسمى أي مجموعة منتهية من معادلات خطية في المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ نظام مجموعة المعادلات الخطية System of Linear Equations

وتُسمى متتابعة الأعداد $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ حل للنظام إذا كان التعويض $x_1 = s_1 , x_2 = s_2 , ..., x_n = s_n$ يحقق كل معادلة في هذا النظام.

ويُسمى نظام المعادلات الخطية الذي ليس له أي حل **نظام متناقضاً(غير متآلف)** أما إذا وُجد للنظام حل واحد على الأقل فيسمى **نظاما متآلفاً** (**أو متسق**) **consistent** .

فمثلاً النظام: $3x - 6y = 1 \ , \ 2x - 4y = 5$ غير متآلف ومن ثم فليس له حل (حيث لا توجد قيم للمتغيرين x, y تحقق المعادلات في آن واحد).

وكذلك النظام: $x - 2y + 3z = 2 \ , \ 2x + 3y - 2z = 5 \ , \ 4x - y + 4z = 1$ غير متآلف ومن ثم فليس له حل.

أما النظام: $x + y = 1 \ , \ x + 8y = 1$ فهو نظام متآلف وله الحل $x = 1 \ , y = 0$

وكذلك النظام: $x + y + 2z = 9 \ , \ 2x + 4y - 3z = 1 \ , \ 3x + 6y - 5z = 0$ نظام متآلف وله الحل $x = 1 \ , y = 2 \ , z = 3$

وأي نظام اختياري لعدد m من المعادلات الخطية في n من المتغيرات يُكتب في الصورة:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (2) \\
..... \quad ..... \quad ..... \quad ..... \quad & ..... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

حيث المتغيرات هي $x_1, x_2, ..., x_n$ ، وأن $a_{ij} , b_i \ , 1 \le i \le m \ , \ 1 \le j \le n$ تدل على ثوابت معلومة لدينا .

ويُمكن التعبير عن نظام مجموعة المعادلات(2) في الصورة المصفوفية:

$$AX = B \qquad (3)$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \ , \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

المصفوفة A تُسمى **مصفوفة المعاملات coefficient matrix** المناظرة لنظام المعادلات الخطية(2) ، والمصفوفة $(A : B)$ وتُكتب:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

تُسمى **المصفوفة الممتدة augmented matrix** المناظرة لنظام المعادلات الخطية(2)

مثال: مصفوفة المعاملات والمصفوفة الممتدة لنظام المعادلات:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

تكون هي على الترتيب:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

ملاحظة:عند بناء المصفوفة الممتدة لمجموعة المعادلات الخطية يجب كتابة المتغيرات بنفس الترتيب في كل معادلة.

وفيما يلي سنبحث طرق الحل لنظام مجموعة المعادلات الخطية $AX = B$:

١ – طريقة المحددات: تُنسب هذه الطريقة إلى **كرامر Krammer** وهذه الطريقة تصلح فقط عندما يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد المتغيرات وتكون مصفوفة المعاملات A المناظرة للنظام $AX = B$ غير مفردة (أي محددها لا يساوي الصفر) ويكون للنظام حل وحيد في الصورة:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \; , \; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \; , \; \dots , x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

حيث إن A_j هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بالتعويض بالمصفوفة العمودية B بدلا من العمود j في المصفوفة A .

وكحالة خاصة إذا كانت المصفوفة $|A| \neq 0$, $B = (0)$ فإن الحل الوحيد للمعادلة $AX = B$ يكون هو الحل الصفري $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

مثال: بطريقة المحددات أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + z = 4$$
$$x + y + 2z = 4$$

الحل: واضح أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل ومصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

وعلى ذلك حل مجموعة المعادلات يُعطى من العلاقة:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} \; , \; y = \frac{|A_2|}{|A|} \; , z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

حيث:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \,,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \,,\ |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore\ x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1,\ \ y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1\,,\ z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$$

وعلى ذلك فإن فئة (مجموعة) الحل للمعادلات تكون $\{1,1,1\}$.

٢- طريقة المعكوس الضربي: وهذه الطريقة أيضاً تصلح فقط عندما يكون عدد المعادلات مســـاوياً لعدد المتغيرات وتكون مصفوفة المعاملات A المناظرة للنظام $AX = B$ قابلة للانعكاس ويكون للنظام حل وحيد في الصورة $X = A^{-1}B$

والمعكوس الضربي للمصفوفة A يُحسب كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{(\widetilde{A})^t}{|A|}\,.$$

حيث $adjA$ هي المصفوفة القرين $adjugate$ للمصفوفة A وهي تساوي مدور مصفوفة المعاملات المرافقة $co-factors(a_{ij}) = (\Delta_{ij})$ لعناصر المصفوفة A .

مثال: بطريقة المعكوس الضربي أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + z = 4$$
$$x + y + 2z = 4$$

الحل: الشكل المصفوفي المناظر لمجموعة المعادلات يكون $AX = B$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

وحيث إن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

وإذاً يكون للمعادلة المصفوفية $AX = B$ حل وحيد هو $X = A^{-1}B$.

نوجد الآن المصفوفة A^{-1} كما يلي:

نحسب عناصر مصفوفة المعاملات المرافقة للمصفوفة A وهي $\widetilde{A} = (\Delta_{ij})$

كما يلي:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\therefore \widetilde{A} = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ adjA = \widetilde{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ومن ثم يكون:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

وعلى ذلك فإن مجموعة الحل للمعادلات تكون $\{1,1,1\}$.

٣- طريقة الاختزال بالحذف The Reduction Method:

تُنسب هذه الطريقة إلى **جاوس-جوردان Gauss-Jordan** وهذه الطريقة تصلح في جميع الأحوال لإيجاد الحل لأي نظام متآلف من المعادلات الخطية ، وتتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام إلى ما يُسمى بالشكل الصفي المتدرج المختزل Reduced Row-Echelon Form وذلك بإجراء مجموعة من العمليات (أو الخطوات) على صفوف المصفوفة الممتدة وهذه العمليات تُسمى بالعمليات الأولية وهي:

(١) ضرب صفا بأكمله في ثابت غير صفري.

(٢) إبدال صفين.

(٣) إضافة مضاعف صف لصف آخر.

ثم بعد الاختزال وبالنظر إلى المصفوفة المختزلة الأخيرة يمكن الحصول على الحل بمجرد النظر (كما سيتضح فيما بعد في الأمثلة).

ولكي تكون المصفوفة في الشكل الصفي المتدرج المختزل يجب أن تتوافر لها الخواص التالية:

(١) إذا لم يكن الصف في المصفوفة مكونا بكامله من أصفار ، يكون الواحد هو العنصر الأول غير الصفري في الصف (يُسمى هذا العنصر بالواحد المتقدم).

(٢) إذا وُجدت أي صفوف مكونة بكاملها من أصفار لتجمع معا في قاع (أسفل) المصفوفة .

(٣) في أي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار يوجد الواحد المتقدم في الصف الأسفل على يمين الواحد المتقدم في الصف الأعلى.

(٤) يكون بالعمود المحتوى على الواحد المتقدم أصفار في كل مكان عدا هذا العنصر .

✓ **تمرين فصلي**: حدد أي من المصفوفات الآتية في الشكل الصفي المتدرج المختزل؟

$$\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&7\\0&0&1&-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&7\\0&1&6&2\\0&0&1&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&2&6&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

✓ ملاحظات:

(١) فكرة اختزال المصفوفة مبنية على أساس جعل المصفوفة تحتوي على أكبر عدد ممكن من الأصفار، ويُفضل اختزال المصفوفة بطريقة منظمة توفيرا للوقت والجهد.

(٢) عدد الآحاد المتقدمة في القطر الرئيسي للمصفوفة المختزلة يساوي رتبة المصفوفة الأصلية.

✓ وفيما يلي ملخص لتنفيذ طريقة الاختزال:

أولاً: بجعل أول عنصر غير صفري في الصف الأول واحد صحيح ، ثم نجعل ما تحته أصفارا ، وهكذا في الصفوف التالية على الترتيب.

ثانياً: نجعل ما فوق الآحاد المتقدمة أصفارا على الترتيب.

✓ **أمثلة:**

مثال(١): اختزل المصفوفة الآتية إلى الشكل الصفي المتدرج المختزل.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/7)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✓ **<u>تمرين فصلي</u>**: تحقق من صحة ما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 26 & 10 \\ 2 & -7 & 30 & 9 \\ 3 & -12 & 43 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>مثال(٢)</u>: اختزل المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>الحل</u>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2=r_1]{r_1=r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/2)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/2)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{5r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -23/2 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(23/2)r_3+r_1]{(7/2)r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

مثال(٣):بطريقة الاختزال بالحذف أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x+y+2z=9$$
$$2x+4y-3z=1$$
$$3x+6y-5z=0$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&9\\2&4&-3&1\\3&6&-5&0\end{pmatrix}\underset{-3r_1+r_3}{\xrightarrow{-2r_1+r_2}}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&2&-7&-17\\0&3&-11&-27\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/2)r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&1&-7/2&-17/2\\0&3&-11&-27\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&1&-7/2&-17/2\\0&0&-1/2&-3/2\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&1&-7/2&-17/2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&11/2&35/2\\0&1&-7/2&-17/2\\0&0&1&3\end{pmatrix}\underset{(-11/2)r_3+r_1}{\xrightarrow{(7/2)r_3+r_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}.$$

وبالنظر إلى المصفوفة المُختزلة الأخيرة نلاحظ أن العمود الأول فيها يناظر معاملات x والعمود الثاني يناظر معاملات y ، والعمود الثالث يناظر معاملات z .

وبالتالي فإن المعادلات المناظرة للمصفوفة المختزلة الأخيرة تكون:

$x=1$,
$y=2$,
$z=3$.

وعلى ذلك فإن فئة الحل لمجموعة المعادلات تكون $\{(x,y,z)=(1,2,3)\}$.

مثال(٤): ابحث حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x_1+3x_2-2x_3+2x_5=0$$
$$2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6=-1$$
$$5x_3+10x_4+15x_6=5$$
$$2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6=6$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\2&6&-5&-2&4&-3&-1\\0&0&5&10&0&15&5\\2&6&0&8&4&18&6\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_4]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&-1&-2&0&-3&-1\\0&0&5&10&0&15&5\\0&0&4&8&0&18&6\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&5&10&0&15&5\\0&0&4&8&0&18&6\end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_2+r_4]{-5r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&6&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4=r_3]{r_3=r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&6&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/6)r_3}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&1&1/3\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&0&4&2&6&2\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&1&1/3\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-6r_3+r_1]{-3r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&3&0&4&2&0&0\\0&0&1&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1/3\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{aligned}x_1+3x_2+4x_4+2x_5&=0\\x_3+2x_4&=0\\x_6&=1/3\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}x_1&=-3x_2-4x_4-2x_5\ ,\\x_3&=-2x_4\ ,\\x_6&=1/3\end{aligned}$$

واضح أنه يمكن تعيين x_3 بدلالة x_4 وتعيين x_1 بدلالة x_2,x_4,x_5 (المتغيرات الحرة) ، ويمكن التعويض عن هذه المتغيرات الحرة بأي قيم اختيارية ، وعلى ذلك يكون للمعادلات عدد لانهائي من الحلول.

المعادلات الخطية المتجانسة Homogeneous Linear Equations:

مجموعة المعادلات الخطية تسمى متجانسة إذا كانت الحدود الثابتة أصفار أي أن المجموعة تكون في الصورة:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots & \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

وهذه المعادلات الخطية المتجانسة تكون دائماً متآلفة لأن

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

هو دائما حل لها ويُسمى هذا الحل بالحل الصفري (الحل التافه) ، وإذا وُجدت حلول أخرى فتُسمى هذه الحلول بالحلول غير الصفرية.

وحيث إن أي مجموعة من المعادلات الخطية المتجانسة يجب أن تكون متآلفة ، فلذلك يُوجد لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة إما حل وحيد وهو الحل الصفري أو عدد لا نهائي من الحلول.

وتوُجد حالة واحدة يتأكد عندها وجود حل خلاف الحل الصفري لنظام المعادلات المتجانسة – بالتحديد – عندما تكون مصفـــوفة المعاملات المناظرة للنظام غير قابلة للانعكاس (أي محددها متلاشي)

أو عندما يحوي النظام عدد من المجاهيل أكثر من عدد المعادلات.

✓ **أمثلة:**

مثال(١):بطريقة الاختزال أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

$$x+2y-3z=0$$
$$3x-y+5z=0$$
$$4x+y-2z=0$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\3&-1&5&0\\4&1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_1+r_3]{-3r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&-7&14&0\\0&-7&10&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1/7)r_2}\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&1&-2&0\\0&-7&10&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&1&-2&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1/4)r_3}\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3+r_1]{2r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

وبالتالي فإن المعادلات المناظرة للمصفوفة المختزلة الأخيرة تكون:

$$x=0\ ,$$
$$y=0\ ,$$
$$z=0$$

وعلى ذلك يكون لمجموعة المعادلات حل وحيد هو الحل الصفري.

مثال(٢): بطريقة الاختزال ابحث حل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

$$x+3y-2z=0$$
$$x-8y+8z=0$$
$$3x-2y+4z=0$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ 1 & -8 & 8 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -11 & 10 & 0\\ 0 & -11 & 10 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -11 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1/11)r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -10/11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-3r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 8/11 & 0\\ 0 & 1 & -10/11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{matrix}x+(8/11)z=0\\ y-(10/11)z=0\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}x=-(8/11)z\\ y=(10/11)z\end{matrix}$$

واضح أنه يمكن تعيين كلا من x, y بدلالة z (المتغير الحر) ،

باختيار $z=0$ نحصل على الحل الصفري ،

وباختيار $z=11$ تكون $x=-8, y=10$ (حل خلاف الحل الصفري) ، وباختيار قيمة أخرى للمتغير z نحصل على حل أخر خلاف الحل الصفري ، وهكذا ...

ومن ثم يكون للمعادلات أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

مثال(٣): بطريقة الاختزال ابحث حل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

$$2x_1+2x_2-x_3+x_5=0$$
$$-x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5=0$$
$$x_1+x_2-2x_3-x_5=0$$
$$x_3+x_4+x_5=0$$

الحل:

نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)r_2]{r_1=r_3\,,\,r_3=r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_3]{-r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/3)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3+r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_4+r_2]{2r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2=r_3\,,\,r_3=r_2]{r_2=r_4\,,\,r_4=r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & x_1+x_2+x_5=0 & & x_1=-x_2-x_5 \\ \therefore\ & x_3+x_5=0 & \Rightarrow\ & x_3=-x_5 \\ & x_4=0 & & x_4=0 \end{aligned}$$

واضح أنه يمكن تعيين x_3 بدلالة x_5 وتعيين x_1 بدلالة x_2, x_5 (المتغيرات الحرة)، ومن ثم يكون للمعادلات أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

✓ **تمرين فصلي**: تحقق من أن مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 0$$

يكون لها أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

تمارين

١. تحقق من أن مجموعة المعادلات الخطية الآتية يكون لها حل غير الحل الصفري:

$$2x - y + 3z = 0$$
$$4x + 5y - z = 0$$
$$x + 3y - 2z = 0$$

٢. تحقق من أن فئة الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

تكون هي $\{\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$.

٣. تحقق من أن فئة الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + y + z = 2$$
$$2x + y + z = 3$$
$$3x + 2y - 5z = 5$$

تكون هي $\{1,1,0\}$.

٤. تحقق من أن مجموعة المعادلات الخطية الآتية يكون لها عدد لا نهائي من الحلول:

$$x + y + z = 3$$
$$2x + 3y + 4z = 9$$
$$3x + 4y + 5z = 12$$

٥. تحقق من أن حل مجموعة المعادلات الخطية:

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

يكون هو $x_1 = -1, x_2 = 0.6, x_3 = 0.4$.

٦. ابحث الحل لكل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x-2y+3z&=2\\ 2x+3y-2z&=5\\ 4x-y+4z&=1 \end{aligned} \quad ,$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=3\\ 2x+3y+8z&=4\\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned} \quad ,$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=1 \end{aligned}$$

الباب الثاني

الفضاءات المتجهة Vector Spaces

في هذا الباب سنتناول بمشيئة الله دراسة: الفضاء النوني ، والحقل ، والفضاء الخطي والفضاء الجزئي ، ومفهوم التركيبة الخطية والارتباط والاستقلال الخطي ، ومفهوم الأساس والبعد للفضاءات المتجهة ، وبالتالي سنقسم هذا الباب إلى خمسة فصول:

١- فضاء الإحداثيات النوني R^n:

تعريف(١): الثلاثي المرتب (x_1, x_2, x_3) يمكن النظر إليه كنقطة الفضاء R^3 وفي هذه الحالة تكون x_1, x_2, x_3 هي إحداثياتها ، ويمكن النظر إليه كمتجه وفى هذه الحالة تكون x_1, x_2, x_3 هي مركباته .

وعموماً القوس النوني المرتب $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ordered n-tuple

يمكن أن يُنظر إليه كتعميم للنقطة أو كتعميم للمتجه ويكون الاختلاف جبريا غير ذي أهميه. تُسمى مجموعة الأقواس النونية المرتبة **الفضاء النوني** ويُرمز لها بالرمز R^n .

تعريف(٢): إذا كان $u, v \in R^n$ حيث

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) , \; v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

فإن المجموع $u+v$ يُعرف كما يلي:

$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n).$$

وإذا كان k أي عدد قياسي فإننا نعرف ku كما يلي:

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n).$$

تُسمى عمليتا الجمع والضرب في عدد قياسي في هذا التعريف بالعمليتين القياسيتين على الفضاء النوني R^n .

ونعرف المتجه الصفري في R^n بأنه المتجه $0 = (0,0, \ldots, 0)$

وإذا كان $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ أي متجه في R^n فإن معكوس u بالنسبة للجمع يُرمز له بالرمز $-u$ ويكون $-u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

ونعرف الفرق:

$$u-v = u+(-v) = (u_1,u_2, ...,u_n)+(-v_1,-v_2 , ...,-v_n)$$
$$= (u_1-v_1,u_2-v_2, ...,u_n-v_n) \quad \forall\ u,v\in R^n$$

نظرية(١): إذا كانت

$$u = (u_1,u_2, ...,u_n),\ v = (v_1,v_2 , ...,v_n),\ w = (w_1,w_2, ...,w_n)$$

ثلاث متجهات في R^n وكان k_1, k_2 عددين قياسيين فإن الخواص الآتية تكون صحيحة:

(1) $u+v = v+u.$
(2) $u+(v+w) = (u+v)+w.$
(3) $\exists\ 0\in R^n$; $u+0 = 0+u = u.$
(4) $\exists -u \in R^n$; $u+(-u) = 0.$
(5) $k_1(u+v) = k_1u+k_1v.$
(6) $(k_1+k_2)u = k_1u+k_2u.$
(7) $(k_1k_2)u = k_1(k_2u) = k_2(k_1u).$
(8) $1u = u.$

الإثبات: يترك للطالب.

ملاحظة: تمكننا هذه النظرية من التعامل مع متجهات الفضاء النوني R^n بدون التعبير عن المتجهات بدلالة المركبات، بنفس الطريقة التي نتعامل بها مع الأعداد الحقيقية .

فمثلا لحل معادلة المتجهات $x+u=v$ بالنسبة إلى x يمكننا إضافة $(-u)$ إلى كل من الطرفين كما يلي:

$$(x+u)+(-u) = v+(-u)$$
$$\therefore\ x+(u-u) = v-u$$
$$\therefore\ x+0 = v-u$$
$$\therefore\ x = v-u$$

تعريف(٣): إذا كان $u=(u_1, u_2, \dots , u_n), v=(v_1, v_2 , \dots , v_n)$ متجهين في الفضاء النوني R^n فإن **حاصل الضرب القياسي Scalar product** أو **حاصل الضرب الداخلي Inner product للمتجهين u,v** يُعرف كما يلي:

$$u.v = u_1v_1+u_2v_2+ \dots +u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

ويكون حاصل الضرب القياسي عبارة عن عدد وليس متجه .

نظرية(٢): إذا كان u,v,w ثلاث متجهات في R^n وكان c أي عدد قياسي فإن:

(1) $u.v = v.u$
(2) $(u+v).w = u.w+v.w$
(3) $(cu).v = u.(cv) = c\,(u.v)$
(4) $u.u \geq 0 , u.u = 0 \Leftrightarrow u=0$

الإثبات:

(1) let $u = (u_1,u_2, \dots ,u_n) , v = (v_1,v_2 , \dots ,v_n)$

$$\therefore u.v = \sum_{j=1}^{n} u_jv_j = \sum_{j=1}^{n} v_ju_j = v.u$$

(2) let $u = (u_1,u_2, \dots ,u_n), v = (v_1,v_2 , \dots ,v_n), w = (w_1,w_2 , \dots ,w_n)$

$$\therefore (u+v).w = \sum_{j=1}^{n} (u_j+v_j)w_j = \sum_{j=1}^{n} (u_jw_j + v_jw_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_jw_j + \sum_{j=1}^{n} v_jw_j = u.w +v.w$$

(3) $cu = (cu_1,cu_2 , \dots,cu_n)$

$$\begin{aligned}\therefore \underline{(cu).v} &= (cu_1)v_1+(cu_2) v_2+ \dots +(cu_n)v_n \\ &= u_1(cv_1)+u_2(cv_2)+ \dots +u_n(cv_n)= \underline{u.(cv)} \\ &= c\,(u_1v_1)+c(u_2v_2)+ \dots +c(u_nv_n) \\ &= c\,(u_1v_1+u_2v_2+ \dots +u_nv_n) = \underline{c(u.v)}\end{aligned}$$

(4) $u.u = (u_1)^2+(u_2)^2+ \dots +(u_n)^2$ (*)

فإننا نلاحظ أنه إذا كان أحد الإحداثيات(وليكن u_i) من u لا يساوى الصفر فإنه يوجد الحد $u^2_i\neq 0$ أي أن $u^2_i>0$ وفي حاصل الضرب القياسي(*)كل حد يكون أكبر من أو يساوي الصفر فإنه ينتج أن $u.u\geq 0$ والمتساوية تتحقق إذا وإذا فقط كان:

$u_1= u_2 = \dots = u_n = 0$

أي إذا وإذا فقط كان $u=0$.

ملاحظة: النظرية السابقة تسمح لنا بإجراء العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الداخلي (القياسي) في الفضاء النوني R^n بنفس الطريقة تماماً والتي تُجرى بها العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الحسابي العادي .

فمثلا إذا كانت $u,v \in R^n$ فإن:

$$\begin{aligned}(3u+2v).(4u+v) &= (3u).(4u+v) + (2v).(4u+v)\\ &= (3u).(4u) + (3u).(v) +(2v).(4u) + (2v).(v)\\ &= 12(u.u) + 3(u.v) + 8(v.u) + 2(v.v)\\ &= 12(u.u) +11(u.v) + 2(v.v).\end{aligned}$$

وحاصل الضرب القياسي للمتجه مع نفسه $u.u$ يُرمز له بالرمز u^2

وينتج من ذلك صحة العبارتين الآتيتين:

(1) $(u+v)^2 = u^2+2u.v+v^2$

(2) $(u-v)^2 = u^2-2u.v+v^2$

تعريف(٤): يُقال أن المتجهين $u,v\in R^n$ **متعامدان Orthogonal** إذا كان حاصل ضربهما القياسي متلاشياً أي $u.v=0$

مثال: المتجهين $u=(2,1,-4/3), v=(1,2,3)$ في الفضاء الثلاثي R^3 متعامدان حيث:

$u.v = (2)(1)+(1)(2)+(-4/3)(3) = 2+2-4 = 0.$

ومتجهات الوحدة في الفضاء النوني R^n وهي:

$E_1 = (1,0,0, \dots,0), E_2 = (0,1,0, \dots,0), \dots, E_n =(0,0,0, \dots,1)$

تكون متعامدة مثنى مثنى أي أن $E_i.E_j = 0 \quad \forall i\neq j$

تعريف(٥): المركبة u_i من المتجه u تُعطى من العلاقة $u_i = u.E_i$

وهى ناتجة من حاصل الضرب القياسي للمتجه u مع متجه الوحدة E_i في اتجاه i

تعريف(٦): المعيار Norm أو الطول Length للمتجه u في الفضاء النوني R^n

يُعرف كما يلي:

$$||u|| = (u.u)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2})^{1/2}$$

ويكون:

$$||u|| = ||-u|| \ , \ ||u||^2 = u^2 \ , \ ||cu|| = |c| \ ||u|| \ ; \ c \text{ scalar.}$$

تعريف(٧): المسافة distance بين المتجهين $u,v\in R^n$ تعرف كما يلي:

$$d(u,v) = ||u-v|| = (\,(u-v).(u-v)\,)^{1/2} = (\,\sum_{i=1}^{n} (u_i-v_i)^2\,)^{1/2}$$

نظرية(٣): لأي $u,v\in R^n$ يتحقق:

(1) $||u+v||^2 = ||\,u-v||^2 \Leftrightarrow u.v = 0.$

(2) $||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2 \;\text{ if }\; u.v = 0.$

الإثبات:

$$\begin{aligned}
(1)\quad ||u+v||^2 = ||u-v||^2 &\Leftrightarrow (u+v).(u+v) = (u-v).(u-v)\\
&\Leftrightarrow (u+v)^2 = (u-v)^2\\
&\Leftrightarrow u^2+2u.v+v^2 = u^2-2u.v+v^2\\
&\Leftrightarrow 4\,u.v = 0\\
&\Leftrightarrow u.v = 0\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\quad ||u+v||^2 &= (u+v).(u+v)\\
&= u.u + u.v + v.u + v.v\\
&= ||u||^2 + 2(u.v) + ||v||^2\\
&= ||u||^2 + ||v||^2 \;\text{ if }\; u.v = 0.
\end{aligned}$$

ملاحظات ونتائج:

(١) لأي $u \in R^n$ يكون $u/||u|| = E$ حيث E متجه الوحدة في اتجاه u.

(٢) يُقال أن المتجهين غير الصفريين u,v في اتجاهين متضادين in the opposite direction إذا وُجد عدد قياسي $c<0$ بشرط أن $cu=v$ أو $cv=u$ ويُقال أنهما في نفس الاتجاه in the same direction إذا وُجد عدد قياسي $c>0$ بشرط أن $cu=v$ أو $cv=u$.

(٣) إذا كان $(u-p).v = 0$ فإن p تُسمى مسقط المتجه u فوق المتجه v .

(٤) المقدار $(u.v)/||v||^2$ يُسمى مركبة u فوق v (component u over v).

نظرية(٤): متباينة كوشي– شفارتز Cauchy–Schwartz Inequality:

$|u.v| \le \|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in R^n$

الإثبات:

إذا كانت $u = 0$ فإن $\|u\| = 0$ وأن $u.v = 0$ وإذاً المتباينة تتحقق ،

وكذلك إذا كانت $v = 0$ فإن $\|v\| = 0$ وأن $u.v = 0$ وإذاً المتباينة أيضا تتحقق.

أما إذا كان كلا من u, v لا يساوي الصفر فسنثبت صحة المتباينة كما يلي:

$|u.v| = |u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n| \le |u_1v_1| + |u_2v_2| + \ldots + |u_nv_n|.$

وحيث إن لأي عددين حقيقين x, y يكون:

$0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow 2xy \le x^2 + y^2 \quad (*).$

وباعتبار $y = \frac{|v_i|}{\|v\|}$, $x = \frac{|u_i|}{\|u\|}$ لأي i وبالتعويض في (*) يكون:

$$2[\frac{|u_i|}{\|u\|}\frac{|v_i|}{\|v\|}] \le \frac{|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{|v_i|^2}{\|v\|^2} \Rightarrow 2[\frac{\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|}{\|u\|\|v\|}] \le \frac{\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2}{\|v\|^2}$$

$$\Rightarrow 2[\frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}] \le \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 2 \Rightarrow \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|} \le 1$$

$\therefore |u.v| \le \|u\|\|v\|.$

نظرية(٥): متباينة المثلث Triangle Inequality:

$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in R^n$

الإثبات:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= (u+v).(u+v) = u.u + 2(u.v) + v.v \\ &= \|u\|^2 + 2(u.v) + \|v\|^2 \\ &\le \|u\|^2 + 2|u.v| + \|v\|^2\end{aligned}$$

وباستخدام متباينة كوشي – شفارتز نحصل على:

$\|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

$\therefore \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|.$

ملاحظة: ننهي هذا الجزء من الفصـــل الحالي بملاحظة أنه يمكن استخدام المصفوفة:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

بدلاً من القوس النوني $u = (u_1,u_2, \ldots,u_n)$ ليدل على المتجهات في R^n

ويبرر ذلك أن عمليتي الجمع والضرب في عدد قياسي على المصفوفات وهي كما يلي:

$$u+v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}, \quad ku = k\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{pmatrix}$$

تُعطى نفس النتائج مثل عمليات جمع وضرب المتجهات وهي كما يلي:

$u+v = (u_1,u_2, \ldots ,u_n) + (v_1,v_2, \ldots ,v_n) = (u_1+v_1, \ldots ,u_n+v_n)$,
$ku = k(u_1,u_2, \ldots ,u_n) = (ku_1, ku_2, \ldots , ku_n)$.

ويكون الفرق الوحيد هو أن النتائج تكتب رأسية في حالة منهما وأفقية في الحالة الأخرى وإننا سوف نستخدم كلا الرمزين من حين إلى آخر .

تماريـــــن

١- إذا كان $u,v,w\in R^4$ حيث:

$u = (3,0,1,2),\ v = (-1,2,7,-3),\ w = (2,0,1,1)$

فاحسب قيمة ما يلي:

(1) $\|u+v\|$　　(2) $\|u\|+\|v\|$　　(3) $\|-2u\|+2\|u\|$

(4) $\|3u-5v+w\|$　　(5) $(1/\|w\|)w$　　(6) $\|(1/\|w\|)w\|$

٢- إذا كان $u,v,w\in R^n$ وكانت u عمودية على كلا من v,w

فاثبت أن u تكون عمودية على أي متجه في الصورة $rv+sw$

حيث r,s أعداد قياسية .

٣- إذا كان $u,v,w\in R^n$ وكان $u.v = u.w$ حيث $u \neq 0$

فاثبت أن $v = w$

٤- إذا كان $u,v\in R^n$ كمصفوفتين من النوع $nx1$ فتحقق من أن:

$(u.v) = u^T v$

٥- إذا عُرفت المسافة بين المتجهين u,v في الفضاء R^n بالعلاقة:

$d(u,v) = \|u-v\|$

فلأي $u,v,w\in R^n$ تحقق من أن:

(1) $d(u,v) \geq 0$　　(2) $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

(3) $d(u,v) = d(v,u)$　　(4) $d(u,w) \leq d(u,v)+d(v,w)$

٦- لأي متجهين $u,v\in R^n$ أثبت أن:

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$

٧- لأي متجهين $u,v\in R^n$ أثبت أن:

$u.v = (1/4)\ \|u+v\|^2 - (1/4)\ \|u-v\|^2 .$

٢-الحقل Field:

تعريف(١): أي مجموعة K مشتملة على الأقل على عنصرين تكون **حقــل** أو **مجــال** Field إذا عرفنا بوضوح لأي عنصرين اختياريين $x,y\in K$ عمليتي الجمع والــضرب على K .

أي يكون $x+y\in K$, $xy\in K$ ومن ثم تتحقق لأي $x,y,z\in K$ الخواص الآتية:

(A1) $x+y = y+x$.
(A2) $(x+y)+z = x+(y+z)$.
(A3) $\exists\ 0\in K$; $x+0 = 0+x = x$.
(A4) $\forall x\in K\ \exists\ (-x)\in K$; $x +(-x) = (-x)+ x = 0$.
(M1) $xy = yx$.
(M2) $(xy)z = x(yz)$.
(M3) $\exists\ 0 \neq e\in K$; $ex = xe = x$.
(M4) $\forall 0 \neq x\in K\ \exists\ x^{-1}\in K$; $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.
(D) $(x+y)z = xz +yz$, $x(y+z) = xy +xz$.

من هذا التعريف نرى أن (A1),(M1) تحقق خاصية التبادل Commutative للجمع والضرب على الترتيب ، وكذلك (A2),(M2) تحقق خاصية التجميع (الدمج) Associative للجمع والضرب على الترتيب ، ومن (A3)،(A4) ينتج لنا إمكانية الطرح ومن (M3),(M4) ينتج لنا إمكانية القسمة ، وأما (D) فتُسمى بخاصية التوزيع Distributive وفيما يلي بعض الأمثلة المختصرة التي سوف توضح لنا إمكانية أو عدم إمكانية تعريف الحقل والتي سوف نطبق عليها عمليات الجمع والضرب المذكورة في التعريف السابق.

أمثلة:

١- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $N=\{1,2,3, ...\}$ لا تكون حقل لأنه من التعريف السابق نجد أن الخصائص (A1),(A2),(M1),(M2),(D) جميعها محققة ولكن (A3),(A4), (M4) غير محققة.

٢- مجموعة الأعداد الصحيحة $Z=\{0,\pm1,\pm2,...\}$ لا تكون حقل حيث أن الخاصية (M4) لا تتحقق .

٣- مجموعة الأعداد الكسرية $Q = \{x:x = p/q \; ; p,q\in Z,q\neq 0 \}$

تكون حقل حيث جمع وضرب الأعداد الكسرية يُعرف كما يلي:

$$p_1/q_1+p_2/q_2 = (p_1q_2+p_2q_1)/q_1q_2 ,$$
$$(p_1/q_1)(p_2/q_2) = (p_1p_2)/(q_1q_2).$$

وتتحقق جميع شروط وخصائص الحقل.

٤- مجموعة الأعداد النسبية تكون حقل ، وكذلك كلا من مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد المركبة تكون حقل حيث تتحقق جميع شروط وخصائص الحقل.

نظرية(١): باعتبار K حقل.

(١) إذا كان $x,y\in K$ فإن المعادلة $x+z=y$ يكون لها حل وحيد $z\in K$ على الصورة $z= y+(-x)$ ويُكتب $z=y-x$.

(٢) إذا كان $x,y\in K$ وأن $x\neq 0$ فإن المعادلة $xz =y$ يكون لها حل وحيد $z\in K$ على الصورة $z=x^{-1}y$ ويُكتب $z= y/x$.

(٣) إذا كانت $x ,y\in K$ فإن العلاقات الآتية تكون محققة:

(1) $x0 = 0x = 0$
(2) $(-x)y = -(xy)$
(3) $(-x)(-y) = xy$
(4) $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0.$

الإثبات:

(١) لكي يكون عنصر الحقل $z = y+(-x)$ حل للمعادلة $x+z = y$ يجب أن يحققها:

$$\begin{aligned} L.H.S &= x+z = x+(y+(-x)) = x+((-x)+y) = [x+(-x)]+y \\ &= 0+y = y = R.H.S. \end{aligned}$$

ولإثبات أن هذا الحل وحيد نفرض أن z' حل آخر للمعادلة (أي أن $x+z'=y$)

وسنثبت أن $z' = z$ كما يلي:

$$z' = z'+0 = z'+(x+(-x)) = (z'+x)+(-x) = (x+z')+(-x)$$
$$= y+(-x) = z.$$

وإذاً الحل وحيد .

(**٢**) بنفس الطريقة السابقة واضح أن عنصر الحقل $z = x^{-1}y$ هو حل للمعادلة $xz = y$ لأنه يحققها:

$$L.H.S = xz = x(x^{-1}y) = (x\,x^{-1})y = ey = y = R.H.S.$$

ولإثبات أن هذا الحل وحيد نفرض أن z' حل آخر للمعادلة (أي أن $xz'= y$)

وسنثبت أن $z' = z$ كما يلي:

$$z' = ez' = (x^{-1}x)z' = x^{-1}(xz') = x^{-1}y = z.$$

وإذاً الحل وحيد .

(**٣**)

(1) $x0 = x(0+0) \Rightarrow x0 = x0+x0$

بإضافة $(-x)0$ للطرفين ينتج أن:

$$(x0)+(-x0) = (x0+x0)+(-x)0$$
$$\Rightarrow [x+(-x)]0 = x0+[(x0)+(-x0)]$$
$$\Rightarrow 0 = x0+[x+(-x)]0$$
$$\Rightarrow 0 = x0+0$$
$$\Rightarrow 0 = x0.$$

وبالمثل يمكن إثبات $0x = 0$.

(2) $xy+(-x)y = [x+(-x)]y$
$= 0y$
$= 0$ from (1)
$\therefore (-x)y = -(xy).$

(3) $(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[(-y)x] = -[-(yx)] = yx = xy$ **.**

وذلك باستخدام (M1), (2) .

(4) let $xy=0,\ x \neq 0$
$\therefore 0 = x^{-1}0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = ey = y.$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن $x = 0$ إذا كانت $xy=0,\ y\neq 0$.

تعريف(٢): نعرف الجمع والضرب لأكثر من عنصرين من عناصر الحقل K كما يلي:

ليكن $n \in N$, $x_1, x_2, ..., x_n \in IK$ فإن:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{1} x_j = x_1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + ... + x_n = (\sum_{j=1}^{n-1} x_j) + x_n \quad ; \; n \neq 1$$

$$(2) \quad \prod_{j=1}^{1} x_j = x_1 \quad , \quad \prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 x_2 ... x_n = (\prod_{j=1}^{n-1} x_j) x_n \quad ; \; n \neq 1$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{0} x_j = 0 \quad , \quad \prod_{j=1}^{0} x_j = e$$

تعريف(٣): المجموع $\sum_{j=1}^{n} x_j$ حيث $x_j = x$ يُسمى **التعدد** من x (multiple of x)

ويُكتب $\sum_{j=1}^{n} x_j = \underbrace{x + x + ... + x}_{n \; times} = nx$ وحاصل الضرب $\prod_{j=1}^{n} x_j$ حيث $x_j = x$

يُسمى **القوة** من x (power of x) ويُكتب $\prod_{j=1}^{n} x_j = \underbrace{xx...x}_{n \; times} = x^n$

تمرين: إذا كان m, n عددين طبيعيين وكان x, y عنصرين لأي حقل فتحقق من أن:

(1) $mx + nx = (m+n)x.$

(2) $m(nx) = (mn)x.$

(3) $nx + ny = n(x+y).$

(4) $x^m x^n = x^{m+n}.$

(5) $(x^m)^n = x^{mn}.$

(6) $x^n y^n = (xy)^n.$

٣- الفضاء المتجه والفضاء الجزئي Vector Space & Subspace:

تعريف(١):(مفهوم الفضاء الخطي)

ليكن K أي حقل اختياري. تُسمى المجموعة غير الخالية V بـــ **الفضاء الاتجاهي** (أو **الفضاء المتجه** أو **الفضاء الخطي**) **فوق الحقل K**

Vector (Linear) Space over K.

إذا عرفنا عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية.

أي أنه إذا كانت $u,v,w\in V,\lambda,\mu\in K$ فإن الشرطين الآتيين يتحققان:

(1) $u+v\in V$ (2) $\lambda u\in V$

بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

(VA1) $u+v = v+u$.
(VA2) $u+(v+w) = (u+v)+w$.
(VA3) $\exists\ 0\in V\ ;\ u+0 = 0+u = u$.
(VA4) $\forall\ u\in V\ \exists\ (-u)\in V\ ;\ u+(-u) = (-u)+u = 0$.
(VM1) $\lambda\,(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
(VM2) $1u = u\ ;\ 1\in K$.
(VD1) $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v$.
(VD2) $(\lambda+\mu)u = \lambda u+\mu u$.

الخصائص (VA1-VA4) تُسمى قواعد الجمع ،

والخاصيتين (VM1,VM2) تُسميان بقاعدتي الضرب ،

وأما الخاصيتين (VD1,VD2) فتُسميان بقاعدتي التوزيع .

إذا كان الحقل K= R فإن الفضاء المتجه V يُسمى بالفضاء المتجه فوق R وعناصر الحقل K تُسمى القيم الحقيقية أو القيم القياسية Scalars .

وقد يكون من الضروري في بعض التطبيقات أن نتداول فضاءات خطية بحيث تكـــون القيم القياســـية أعداد مركبة بدلا من الأعداد الحقيقية ، مثل هذه الفضاءات تُـــسمى بالفضاءات المتجهة المركبة ، وفي هذا المقرر سنتناول بصفة خاصة الفضاءات المتجهـــة التي عناصرها حقيقية.

ويجدر بنا أن ننبه إلى أنه في تعريف الفضاءات المتجهة لا يوجـــد تخـــصيص لطبيعـــة المتجهات أو للعمليتين . فأي نوع من الأشياء مهما كانت يمكن أن تصلح كمتجهات وكل ما هو مطلوب أن تحقق فروض الفضاء المتجه ، والأمثلة الآتية توضح ذلك .

ملاحظات:

(١) إذا كان u,v أي متجهين في أي فضاء متجه اختياري V فإننا نكتب $-v$ بدلاً من $(-1)v$ ونكتب أيضاً $u-v$ بدلاً من $u+(-1)v$

(٢) إذا كان $V=\{0\}$ أي أن V تحتوي فقط على العنصر 0 فإن جميع شروط وخصائص الفضاء الخطي تتحقق على V مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياســية ، ومن ثم فإن $V=\{0\}$ تكون فضاء خطي ، يُسمى هذا الفضاء المتجه بالفضاء للمتجه الصفري.

أمثلة:

١– الفضاء النوني R^n يكون فضاء متجه مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفتين على R^n حيث تتحقق شروط وخصائص الفضاء المتجه.

٢– مجموعة كل المصفوفات من النوع $m\times n$ ذات العناصر الحقيقية مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية للمصفوفات تكون فضاء متجه .

المصفوفة الصفرية من النوع $m\times n$ تكون هي المتجه الصفري 0 . وإذا كان المتجه u هو المصفوفة A من النوع $m\times n$ فإن المصفوفة A- تكون هي المتجه u- وتتحقق باقي الخصائص من نظريات المصفوفات.

يُرمز لهذا الفضاء المتجه بالرمز $M_{m\times n}(R)$ أو بالرمز $M_{mn}(R)$.

٣– إذا كانت V هي المجموعة المكونة من كل الدوال الحقيقة المعرفة على R وكانت $f(x),g(x)$ أي دالتين وكان k أي عدد حقيقي فإننا نعرف دالة المجموع $f+g$ وحاصل الضرب kf كما يلي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ (kf)(x)=kf(x).$$

فإن V تكون فضاءاً متجهاً بالنسبة لهاتين العمليتين ، ويكون المتجه الصفري لهذا الفضاء هو الدالة الثابتة الصفرية ، أي هو الدالة التي يكون رسمها البياني هو المستقيم الأفقي المار بنقطة الأصل ، ويمكن التحقق من باقي الخصائص بسهولة .

٤– إذا كانت V هي مجموعة كل النقاط التي تقع على المستوى الذي يمر بنقطة الأصل في الفضاء R^3 فإن V تكون فضاءا متجها بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية للمتجهات في الفضاء R^3 كما يتضح فيما يلي:

المستوى الذي يمر بنقطة الأصل تكون معادلته على الصورة:

$$Ax+By+Cz = 0 \quad ; A,B,C \text{ constants.}$$
$$\therefore V=\{(x,y,z):Ax+By+Cz=0\}$$

وبفرض أن $u=(u_1,u_2,u_3),v=(u_1,u_2,u_3)\in V$ فيكون:

$$Au_1+Bu_2+Cu_3 = 0\ ,$$
$$Av_1+Bv_2+Cv_3 = 0$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على:

$$A(u_1+v_1)+B(u_2+v_2)+C(u_3+v_3) = 0.$$

أي أن $ku\in V$.

وبفرض أن k عدد قياسي فيكون $ku = (ku_1, ku_2,ku_3)$ وإذاً يكون:

$$A(ku_1)+B(ku_2)+C(ku_3) = k(Au_1+Bu_2+Cu_3) = k0 = 0$$

أي أن $ku\in V$. ومن المثال الأول علمنا أن الفضاء النوني R^n يكون فضاء متجه ومن ثم يكون الفضاء الثلاثي R^3 أيضاً فضاء متجه، وعلى ذلك فإن الخصائص (VA1),(VA2),(VM1),(VM2),(VD1),(VD2) تكون جميعها محققة على V (حيث أنها مجموعة جزئية من R^3)

فيتبقى التحقق من صحة الخاصيتين (VA3),(VA4) كما يلي:

بضرب المعادلة $Au_1+Bu_2+Cu_3 = 0$ في 0 نحصل على:

$$A(0u_1)+B(0u_2)+C(0u_3) = A(0)+B(0)+C(0) = 0$$

وإذاً $V\in(0,0,0) = 0$ وهذا يحقق الخاصية (VA3) .

وبضرب $Au_1+Bu_2+Cu_3 = 0$ في 1- نحصل على:

$$A(-u_1)+B(-u_2)+C(-u_3) = 0$$

وإذاً $V\in(-u_1,-u_2,-u_3) = -u$ وهذا يحقق الخاصية (VA4) .

٥– إذا كانت $V=\{ (x,y):x\geq 0,y\geq 0\}$ هي مجموعة النقاط (x,y) في الفضاء R^2 التي تقع في الربع الأول معرف عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية كما يلي:

(1) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)$

(2) $k(x,y) = (kx,ky)$

فإن المجموعة V لا تكون فضاءاً متجهاً لأن $u=(1,1)$ تقع في V بينما $-u=(-1,-1)$ لا تقع في V وبذلك فإن الخاصية (VA4) لا تتحقق .

٦– لتكن V مجموعة كل الثلاثيات المرتبة من الأعداد الحقيقية (x,y,z) معرف عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية كما يلي:

(1) $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

(2) $k(x,y,z) = (kx,y,z)$

فمن الواضح أن شرطي الفضاء الخطي (2),(1) محققان، وكذلك خصائص الجمع (VA1),(VA2),(VA3),(VA4) تكون جميعها محققة ، ويتبقى التحقق من صحة الخصائص (VM1),(VM2),(VD1),(VD2) كما يلي:

Let $u,v\in V$; $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$,and let λ,μ scalars

- $\lambda(\mu u) = \lambda(\mu(x_1,y_1,z_1)) = \lambda(\mu x_1,y_1,z_1) = ((\lambda\mu)x_1,y_1,z_1)$,
  $(\lambda\mu)u = (\lambda\mu)(x_1,y_1,z_1) = ((\lambda\mu)x_1,y_1,z_1)$.

$\therefore \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.

ومن ثم تكون الخاصية (VM1) محققة.

- $1u = 1(x_1,y_1,z_1) = (1x_1,y_1,z_1) = (x_1,y_1,z_1) = u$.

ومن ثم تكون الخاصية (VM2) محققة.

- $$\begin{aligned}\lambda(u+v) &= \lambda[(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)] \\ &= \lambda(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \\ &= (\lambda(x_1+x_2),y_1+y_2,z_1+z_2) \\ &= (\lambda x_1+\lambda x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \\ &= (\lambda x_1,y_1,z_1)+(\lambda x_2,y_2,z_2) \\ &= \lambda(x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2) = \lambda u+\lambda v.\end{aligned}$$

ومن ثم تكون الخاصية (VD1) محققة.

- $(\lambda+\mu)u = (\lambda+\mu)(x_1,y_1,z_1) = ((\lambda+\mu)x_1,y_1,z_1)$,
$$\begin{aligned}\lambda u+\mu u &= \lambda(x_1,y_1,z_1)+\mu(x_1,y_1,z_1) = (\lambda x_1,y_1,z_1)+(\mu x_1,y_1,z_1) \\ &= ((\lambda+\mu)x_1,2y_1,2z_1).\end{aligned}$$

$\therefore\ (\lambda+\mu)u \neq \lambda u+\mu u$.

ومن ثم تكون الخاصية (VD2) غير محققة. وعلى ذلك V لا تكون فضاء خطي.

٧- إذا كانت $V=\{(x,y):x,y\in R\}$ معرف عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية كما يلي:

(1) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)$
(2) $k(x,y) = (k^2x,k^2y)$

فحدد ما إذا كانت V فضاء خطي أم لا (مع ذِكر السبب)؟ .

الحل: يُترك للطالب.

نظرية(١): ليكن V فضاء متجه ، $u\in V$ وليكن k عدد قياسي فإن:

(1) $0u = 0$.
(2) $k0 = 0$.
(3) $(-1)u = -u$.
(4) $ku = 0 \Rightarrow u = 0 \vee k = 0$.

الإثبات:

(1) $0u = (0+0)u = 0u+0u$

وبإضافة 0u- إلى الطرفين يكون:

$$\begin{aligned}0u+(-0u) &= [0u+0u]+(-0u) \\ &= 0u + [0u+(-0u)]\end{aligned}$$
$$\therefore\quad 0 = 0u+0 = 0u.$$

إثبات آخر للعلاقة (1):

$0 = u+(-u) = 1u+(-1)u = [1+(-1)]u = 0u.$

(2) $k0 = k(u+(-u)) = ku+k(-u) = ku+(-k)u = (k+(-k))u = 0u = 0.$

(3) $u+(-1)u = 1u+(-1)u = [1+(-1)]u = 0u = 0.$

$\therefore\ (-1)u = -u.$

(4) let $ku = 0\ ,\ k \neq 0.$

وسنثبت أن $u = 0$ كما يلي:

$0 = (1/k)0 = (1/k)(ku) = [(1/k)k]u = 1u = u.$

let $ku = 0\ ,\ u \neq 0.$

وسنثبت أن $k = 0$ كما يلي:

$ku = 0\ ,\ 0u = 0 \Rightarrow k = 0.$

تعريف(٢):(مفهوم الفضاء الجزئي)

إذا كانت V فضاء خطي فإن المجموعة الجزئية غير الخالية W من V تُسمى فضاء جزئي من الفضاء V (Subspace of V) إذا كانت W تحقق شروط وخصائص الفضاء المتجه بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفتين على V .

ولكل فضاء متجه V على الأقل فضاءان جزئيان هما الفضاء V نفسه والفضاء المتجه الصفري $\{0\}$ واللذان يسميان الفضاءين الجزئيين غير الفعليين Trivial Subspaces وأي فضاء جزئي أخر (إن وُجد) من V يُسمى فضاء جزئي فعلي من V
Non-trivial Subspace of V.

نظرية(٢): المجموعة الجزئية غير الخالية W من V تكون فضاء جزئي من الفضاء V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(1) $u+v \in W \quad \forall u,v \in W$,
(2) $ku \in W \quad \forall u \in W$, k scalar.

الإثبات:

(أولاً) نفرض أن W فضاء جزئي منV وسنثبت صحة الشرطين (2),(1):

حيث إن W فضاء جزئي من V فإن W تحقق شروط وخصائص الفضاء المتجه بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفتين علىV ومن ثم يتحقق الشرطان(2),(1).

(ثانياً) نفرض تحقق الشرطان (2),(1) وسنثبت أن W فضاء جزئي منV :

الشرطان (2),(1) المحققان هما الشرطان الأساسيان للفضاء المتجه والخصائص (VA1,VA2,VM1,VM2,VD1,VD2) تتحقق على V (لأنه فضاء متجه) وكل عنصر من عناصر W هو عنصر من عناصر V (لأن W مجموعة جزئية من V) فتكون هذه الخصائص أيضاً محققة على W

يتبقى التحقق من صحة الخاصيتين (VA3,VA4) على W من الشرط $ku \in W$ (2)

put $k=0 \Rightarrow 0u=0 \in W$
i.e. $\exists\ 0 \in W$; $o+u=u+0=u\ \forall\ u \in W$,

put $k=-1 \Rightarrow (-1)u=-u\in W$
i.e. $\forall\ u\in W\ \exists\ -u\in W\ ;\ (-u)+u=u+(-u)=0.$

وإذاً الخاصيتين(VA3,VA4) تتحققان على W

وعلى ذلك تكون W فضاء جزئي منV.

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

أمثلة:

١– إذا كانت $W=\{w\in R^3 : w.u=0\ ,u\in R^3\}$ فإن W تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 (وضح ذلك؟).

الحل: واضح أن $W\subset R^3$ وسنتحقق من صحة الشرطين:

(1) $u+v\in W\quad \forall u,v\in W,$
(2) $ku\in W\quad \forall u\in W$, k scalar.

كما يلي:

(1) let $w_1,w_2\in W,\ u\in R^3$
$\therefore\ w_1.u = 0\ ,\ w_2.u = 0 \Rightarrow w_1.u + w_2.u = 0$
$\Rightarrow (w_1+w_2).u = 0$
$\Rightarrow w_1+w_2\in W.$

(2) let $w\in W,\ u\in R^3$, k scalar
$\therefore\ w.u = 0 \Rightarrow k(w.u) = 0$
$\Rightarrow (kw).u = 0$
$\Rightarrow kw\in W.$

وإذاً W فضاء جزئي من R^3 .

٢– إذا كانت $W=\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a,b\in R\}$ فإن W تكون فضاء جزئي من فضاء المصفوفات $M_{2\times 2}(R)$ (وضح ذلك؟).

الحل: واضح أن $W\subset M_{2\times 2}(R)$ وسنتحقق من صحة الشرطين (1),(2) كما يلي:

(1) let $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}\in W$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & a \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

(2) let $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in W$, k scalar

$$\therefore k\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ka \\ kb & 0 \end{pmatrix} \in W$$

وإذاً W فضاء جزئي من الفضاء $M_{2\times2}(R)$.

٣– إذا كانت $W = \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} : a,b \in R\}$ فإن W لا تكون فضاء جزئي من فضاء المصفوفات $M_{2\times2}(R)$ (وضح ذلك؟).

الحل: يُترك للطالب.

٤– إذا كانت $W = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in R\}$ فإن W تكون فضاء جزئي من الفضاء $M_{2\times3}(R)$ (وضح ذلك؟).

الحل: يُترك للطالب.

٥– إذا كانت

$W_1 = \{(a,b,c) \in R^3 : b = a + c\}$,
$W_2 = \{(a,b,c) \in R^3 : b = a + c + 1\}$.

فتحقق من أن W_1 تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 بينما W_2 لا تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 .

الحل: واضح أن $W_1 \subset R^3, W_2 \subset R^3$

(1) let $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2) \in W_1 \Rightarrow b_1 = a_1 + c_1, b_2 = a_2 + c_2$

$\therefore (a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \in W_1$;
$b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)$.

(2) let $(a,b,c) \in W_1$, k scalar $\Rightarrow b = a + c$

$\therefore k(a,b,c) = (ka,kb,kc) \in W_1$; $kb = ka + kc$

وإذاً W_1 تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 .

$(1,4,2), (1,3,1) \in W_2$ but $(1,4,2)+(1,3,1)=(2,7,3) \notin W_2$

وإذاً W_2 لا تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 .

٦- إذا كانت $W=\{(a,b,c)\in R^3 : b=2a\}$

فحدد ما إذا كانت W فضاء جزئي من الفضاء R^3 أم لا (مع ذِكر السبب)؟

الحل: يُترك للطالب.

٧- إذا كانت W هي مجموعة حلول نظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$

حيث A مصفوفة من النوع $m\times n$ فإن W تكون فضاء جزئي من الفضاء النوني R^n

يُسمى هذا الفضاء الجزئي بالفضاء الصفري للمصفوفة A

Null Space of a Matrix A.

ويُرمز له بالرمز $N(A)$.

وفيما يلي سنبحث كيفية إيجاد الفضاء الصفري لأي مصفوفة:

- الفضاء الصفري للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ نحصل عليه باختزال المصفوفة

الممتدة المناظرة لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{matrix} x_1-x_3=0, \\ x_2+x_3=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=x_3, \\ x_2=-x_3 \end{matrix}$$

$$\therefore N(A)=\{(x_1,x_2,x_3)=x_3(1,-1,1) : x_3\in R\}.$$

- والفضاء الصفري للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ نحصل عليه باختزال المصفوفة

الممتدة المناظرة لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/2)r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1=0,\ x_2=0$$

$$\therefore N(A)=\{(0,0)\}=\{0\}.$$

- والفضاء الصفري للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\3&1&1\end{pmatrix}$ نحصل عليه باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\3&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{array}{l}x_1+x_3=0,\\x_2-2x_3=0\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}x_1=-x_3,\\x_2=2x_3\end{array}$$

$$\therefore\ N(A)=\{(x_1,x_2,x_3)=x_3(-1,2,1):x_3\in R\}.$$

تمرين: أوجد الفضاء الصفري لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\3&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&3\\7&2&3\end{pmatrix}$$

الحل: يُترك للطالب.

تمارين

١- اعطِ مثال عددي يوضح أن كلا من المجموعات التالية مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعطَيتين لا تكون فضاء خطي.

(1) $V=\{(x,y)\in R^2 : x=2\}$,
$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, $k(x,y)=(kx,ky)$.

(2) $V=\{(x,y,z) : x,y,z\in R\}$,
$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_2,y_1+y_2,z_2)$, $k(x,y,z)=(kx,ky,kz)$.

٢- فيما يلي المجموعة V معرف عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعطَيتين. حدد ما إذا كانت V تمثل فضاء خطي أم لا؟

(واذكر جميع الفروض التي لا تتحقق بالنسبة للمجموعات التي لا تكون فضاء خطي).

(1) $V=\{(x,y) : x,y\in R\}$,
$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, $k(x,y)=(2kx,2ky)$.

(2) $V=\{(x,0) : x\in R\}$,
$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$, $k(x,0)=(kx,0)$.

(3) $V=\{(x,y) : x,y\in R\}$,
$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, $k(x,y)=(0,0)$.

(4) $V=\{(x,y,z) : x,y,z\in R\}$,
$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$,
$k(x,y,z)=(0,0,0)$.

(5) $V=\{(x,y,z) : x,y,z\in R\}$,
$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$,
$k(x,y,z)=(kx,y,z)$.

(6) $V=\{(x,y,z) : x,y,z\in R\}$,
$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_2,y_1+y_2,z_2)$,
$k(x,y,z)=(kx,ky,kz)$.

(7) $V=\{(x,y,z) : x,y,z\in R\}$,
$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$,
$k(x,y,z)=(kx,1,kz)$.

(8) $V=\{(0,0,z) : z\in R\}$,
$(0,0,z_1)+(0,0,z_2)=(0,0,z_1+z_2)$, $k(0,0,z)=(0,0,kz)$.

٣- إذا علمت أن المجموعة الجزئية غير الخالية W من الفضاء الخطي V تكون فضاءاً جزئياً من V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $u+v\in W\ \forall u,v\in W$, (ii) $ku\in W\ \forall u\in W, k\ scalar$.

فحدد أي من المجموعات الآتية تكون فضاءاً جزئياً من الفضاء R^3

(1) $W=\{(a,0,0):a\in R\}$.

(2) $W=\{(a,1,1):a\in R\}$.

(3) $W=\{(a,b,c)\in R^3:b=2a\}$.

(4) $W=\{(a,b,c)\in R^3:b=a^2\}$.

(5) $W=\{(a,b,c)\in R^3:a\geq 0\}$.

٤- إذا علمت أن المجموعة الجزئية غير الخالية W من الفضاء الخطي V تكون فضاءاً جزئياً من V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $u+v\in W\ \forall u,v\in W$, (ii) $ku\in W\ \forall u\in W, k\ scalar$.

فحدد أي من المجموعات الآتية تكون فضاءاً جزئياً من فضاء المصفوفات $M_{2\times 2}(R)$

(1) $W=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}:a,b,c,d\in R\ ,a+d=0\}$.

(2) $W=\{A\in M_{2\times 2}(R):A=A^T\}$.

(3) $W=\{A\in M_{2\times 2}(R):|A|=0\}$.

٥- إذا علمت أن المجموعة الجزئية غير الخالية W من الفضاء الخطي V تكون فضاءاً جزئياً من V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $u+v\in W\ \forall u,v\in W$, (ii) $ku\in W\ \forall u\in W, k\ scalar$.

فحدد أي من المجموعات الآتية تكون فضاءاً جزئياً من الفضاء R^4

(1) $W=\{(a,b,c,d)\in R^4:a-b=2\}$.

(2) $W=\{(a,b,c,d)\in R^4:c=a+2b, d=a-3b\}$.

(3) $W=\{(a,b,c,d)\in R^4:a=0, b=-d\}$.

(4) $W=\{(a,b,c,d)\in R^4:a=b=0\}$.

(5) $W=\{(a,b,c,d)\in R^4:a=1, b=0, c+d=1\}$.

٦- أوجد الفضاء الصفري لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

٧- إذا كان W_1, W_2 فضاءين جزئيين من الفضاء R^n فتحقق من أن مجموعة التقاطع $W_1 \cap W_2$ تكون أيضا فضاء جزئي من الفضاء R^n .

الإجابة:

1- (1) $(2,0)+(2,1)=(4,1)\notin V$

(2) $[(1,2,3)+(3,4,5)=(3,6,5)]\neq[(1,6,3)=(3,4,5)+(1,2,3)]$

2- (1) (VM1),(VM2) ×

(2) ✓

(3) (VM2) ×

(4) (VM2) ×

(5) (VD2) ×

(6) (VA1),(VA3),(VA4),(VD2) ×

(7) (VM2),(VD1),(VD2) ×

(8) ✓

3- (1) ✓

(2) × [e.g.(1,1,1),(-1,1,1)∈W, but (1,1,1)+(-1,1,1) = (0,2,2)∉W].

(3) ✓

(4) × [e.g. (1,1,2), (-1,1,3)∈W, but (1,1,2)+(-1,1,3) = (0,2,5)∉W].

(5) × [e.g. k = -1, (1,-2,-3)∈W, but (-1)(1,-2,-3) = (-1,2,3)∉W].

4- (1) ✓

(2) ✓

$A,B\in W, k\ scalar \Rightarrow A=A^T, B=B^T \Rightarrow A+B=A^T+B^T=(A+B)^T$

$\therefore A+B\in W,\ kA=kA^T=(kA)^T \quad \therefore kA\in W.$

(3) × [e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W\ but \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\notin W$].

5- (1) × (2) ✓ (3) ✓ (4) ✓ (5) ×

٤- الارتباط الخطى والاستقلال الخطى:

Linear Dependence and Linear Independence:

تعريف(١):(مفهوم التركيبة الخطية Linear Combination)

يُقال أن المتجه v تركيبة خطية من المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ في الفضاء الخطي (المتجه) V إذا أمكن إيجاد أعداد قياسية $c_1, c_2, ..., c_n$ عندما يكون:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i .$$

وتُسمى هذه التركيبة تركيبة خطية غير تافهة إذا كانت المعاملات $c_1, c_2, ..., c_n$ ليست جميعها أصفارا.

أمثلة:

١- عبر عن المتجه $(-2,2) \in R^2$ كتركيبة خطية من المتجهات $(-1,1), (2,4), (0,1)$

الحل:

let $(-2,2) = c_1(-1,1) + c_2(2,4) + c_3(0,1)$; c_1, c_2, c_3 *scalars.*

$$\therefore \begin{aligned} -2 &= -c_1 + 2c_2 , \\ 2 &= c_1 + 4c_2 + c_3 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2, c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/6)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{aligned} c_1 + (1/3)c_3 &= 2 \\ c_2 + (1/6)c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 2 - (1/3)c_3 \\ c_2 &= -(1/6)c_3 \end{aligned}$$

put $c_3 = 3 \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = -(1/2)$

$\therefore\ (-2,2) = (-1,1) + (-1/2)(2,4) + 3(0,1).$

٢- تحقق من أن المتجه $w_1 = (9,2,7)$ يكون تركيبة خطية من المتجهات:

$u = (1,2,-1) \;, v = (6,4,2)$

بينما المتجه $w_2 = (4,-1,8)$ لا يكون تركيبة خطية منهما.

الحل:

let $w_1 = c_1 u + c_2 v \;;\; c_1, c_2$ *scalars.*

$$\therefore (9,2,7) = c_1(1,2,-1) + c_2(6,4,2)$$

$$\begin{aligned} 9 &= c_1 + 6c_2 \,, \\ \therefore 2 &= 2c_1 + 4c_2 \,, \\ 7 &= -c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \underset{r_1+r_3}{\xrightarrow{-2r_1+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/8)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \underset{-6r_2+r_1}{\xrightarrow{-8r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\therefore\; c_1 = -3 \;,\; c_2 = 2 \quad , \;\therefore\; w_1 = -3u + 2v.$

let $w_2 = c_1 u + c_2 v \;;\; c_1, c_2$ *scalars.*

$$\therefore (4,-1,8) = c_1(1,2,-1) + c_2(6,4,2)$$

$$\begin{aligned} 4 &= c_1 + 6c_2 \,, \\ \therefore -1 &= 2c_1 + 4c_2 \,, \\ 8 &= -c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \underset{r_1+r_3}{\xrightarrow{-2r_1+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

$\therefore\; c_1 + 6c_2 = 4 \;,\; 8c_2 = 9 \;,\; 8c_2 = 12$

وواضح أنه لا توجد قيمة لـــ c_2 تحقق هذه المعادلات في آن واحد ، ومن ثم فإن مجموعة المعادلات السابقة غير متآلفة ولذلك ليس لها حل وبالتالي لا يمكن إيجاد c_1, c_2 بحيث يكون $w_2 = c_1 u + c_2 v$ وإذاً w_2 لا يكون تركيبة خطية من u, v .

٣- تحقق من أن المتجه $v=(2,1,5,-5)$ يكون تركيبة خطية من المتجهات:

$u_1=(1,2,1,-1)\ ,\ u_2=(1,0,2,-3)\ ,\ u_3=(1,1,0,-2)$

الحل:

let $v=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3$; c_1,c_2,c_3 *scalars.*

$\therefore (2,1,5,-5)=c_1(1,2,1,-1)+c_2(1,0,2,-3)+c_3(1,1,0,-2)$

$$\therefore \begin{aligned} 2&=c_1+c_2+c_3\ ,\\ 1&=2c_1+c_3\ ,\\ 5&=c_1+2c_2\ ,\\ -5&=-c_1-3c_2-2c_3. \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 5\\ -1 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ c_1=1\ ,\ c_2=2\ ,\ c_3=-1$$

$\therefore v=u_1+2u_2-u_3.$

٤- عبر عن الدالة $f(x)=2x^2-6x+3$ حيث $x\in[2,5]$ كتركيبة خطية من الدوال:

$f_1(x)=x^2\ ,\ f_2(x)=2x-1\ ,\ f_3(x)=\sin x.$

الحل:

let $f=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3$; c_1,c_2,c_3 *scalars.*

$\therefore 2x^2-6x+3=c_1x^2+c_2(2x-1)+c_3\sin x.$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نقارن معاملات قوى x في الطرفين فنحصل على:

$$\therefore \begin{aligned} 2&=c_1\ ,\\ -6&=2c_2\ ,\\ 3&=-c_2+c_3\sin x. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1&=2,\\ c_2&=-3,\\ c_3&=0. \end{aligned}$$

$\therefore\ f=2f_1-3f_2+0f_3.$

تمرين: عبر عن المتجه $v = (1,-2,5)$ كتركيبة خطية من المتجهات:

$u_1 = (1,1,1)\ ,\ u_2 = (1,2,3)\ ,\ u_3 = (2,-1,1).$

الحل: يُترك للطالب.

تعريف(٢):(مفهوم فضاء العمود للمصفوفة **Column Space of a Matrix**)

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن الفضاء الجزئي من الفضاء R^m والمتكون

من مجموعة المتجهات $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ بحيث يكون لنظام المعادلات $AX = B$ حل

يُسمى فضاء العمود للمصفوفة A ويُرمز له بالرمز $C(A)$.

تعريف مكافئ: فضاء العمود للمصفوفة A هو الفضاء المتكون من كل التركيبات الخطية من متجهات أعمدة المصفوفة A .

ولإيجاد متجهات فضاء العمود للمصفوفة A ولتكن هذه المتجهات هي $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام $AX = B$ حتى نحصل على علاقة تربط مركبات B وبعضها البعض ، ولذلك فضاء العمود للمصفوفة يوصف بدلالة مركبات متجهاته.

أمثلة:

١- صِف فضاء العمود لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل: لإيجاد فضاء العمود للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\2&1\end{pmatrix}$ نختزل المصفوفة الممتدة:

$$\begin{pmatrix}2&1&b_1\\0&1&b_2\\2&1&b_3\end{pmatrix}$$

كما يلي:

$$\begin{pmatrix}2&1&b_1\\0&1&b_2\\2&1&b_3\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/2)r_1}\begin{pmatrix}1&1/2&b_1/2\\0&1&b_2\\2&1&b_3\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&1/2&b_1/2\\0&1&b_2\\0&0&b_3-b_1\end{pmatrix}$$

وإذاً فضاء العمود للمصفوفة A يكون عبارة عن كل المتجهات $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

والتي يتحقق لها الشرط $b_3=b_1$ أي أن: $C(A)=\{(b_1,b_2,b_3)\in R^3 : b_3=b_1\}$.

- وبالمثل لإيجاد فضاء العمود للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-4&-8&4\end{pmatrix}$

نختزل المصفوفة الممتدة:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&b_1\\2&4&-2&b_2\\-4&-8&4&b_3\end{pmatrix}\xrightarrow[4r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&0&0&b_3+4b_1\end{pmatrix}$$

$$\therefore C(A)=\{(b_1,b_2,b_3)\in R^3 : b_2=2b_1, b_3=-4b_1\}.$$

- ووصف فضاء العمود للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\3&3&1\end{pmatrix}$ (يُترك للطالب)؟.

٢– تحقق من أن المتجه $(-3,12,12)$ يقع في فضاء العمود للمصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

الحل: لكي يقع (يكون) المتجه $(-3,12,12)$ في فضاء العمود للمصفوفة المعطاه يجب أن يكون تركيبة خطية من متجهات أعمدها ، ومن ثم يجب أن توجد أعداد قياسية c_1, c_2, c_3 ليست جميعها أصفاراً عندما يكون:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -3 = -c_1 + c_3 \\ 12 = 3c_1 + 2c_2 \\ 12 = c_1 + 4c_2 + 2c_3 \end{array}$$

ولإيجاد c_1, c_2, c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 12 \\ 1 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{array}{l} c_1 = 2, \\ c_2 = 3, \\ c_3 = -1 \end{array}$$

وعلى ذلك يكون المتجه $(-3,12,12)$ تركيبة خطية من متجهات أعمدة المصفوفة ومن ثم يقع في فضاء العمود لها.

٣– صِف فضاء العمود للمصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. ثم حد أي من المتجهات $(-1,2,4), (1,2,3), (2,5,1), (-1,0,2)$ يقع في فضاء العمود لهذه المصفوفة وأيها لا يقع؟

الحل: نوجد فضاء العمود للمصفوفة وذلك باختزال المصفوفة الممتدة:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & b_1 \\ 3 & 4 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b_1 \\ 3 & 4 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b_1 \\ 0 & 4 & 3 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 4 & 3 & b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b_1 \\ 0 & 4 & 3 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \end{pmatrix}, \therefore C(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \in R^3 : b_3 = b_2 - 2b_1\}.$$

ومن ثم:

$$(-1,2,4) \in C(A) \; ; \; 4 = 2 - (2)(-1), \; (1,2,3) \notin C(A) \; ; \; 3 \neq 2 - (2)(1),$$
$$(2,5,1) \in C(A) \; ; \; 1 = 5 - (2)(2), \qquad (-1,0,2) \notin C(A) \; ; \; 3 \neq 0 - (2)(-1)$$

تعريف(٣):(مفهوم الفضاء المُنشأ)

يُقال أن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ تنشئ أو تولد الفضاء الخطي V إذا كان كل متجه من متجهات V يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من هذه المتجهات. وفي هذه الحالة يُقال أن الفضاء V مُنشأ أو مُولد بالمتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ ويُكتب $V = \{\{v_1, v_2, ..., v_n\}\}$.

أمثلة:

١- متجهات الوحدة $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ تولد أو تنشئ الفضاء R^2 حيث إن أي متجه اختياري من R^2 وليكن (x, y) يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من المتجهات e_1, e_2:

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$$

وكذلك المتجهات $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ تنشئ الفضاء R^3

وعموماً متجهات الوحدة:

$$e_1 = (1,0,0,...,0,0), e_2 = (0,1,0,...,0,0), \; ... \; , e_n = (0,0,0,...,0,1)$$

تنشئ الفضاء R^n.

٢- حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S = \{v_1, v_2\}$ حيث $v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,0,2)$ تنشئ الفضاء R^3 أم لا؟ .

الحل:

ليكن $(x, y, z) \in R^3$ متجه اختياري.

والآن سنتأكد ما إذا كان هذا المتجه الاختياري تركيبة خطية من متجهات S أم لا:

let $(x, y, z) = c_1(1,2,1) + c_2(1,0,2) \; ; \; c_1, c_2 \;\; scalars.$

$$\begin{aligned} & x = c_1 + c_2 \, , \\ \therefore \;\; & y = 2c_1 , \\ & z = c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&1&x\\2&0&y\\1&2&z\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&x\\0&-2&y-2x\\0&1&z-x\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3=r_2]{r_2=r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&z-x\\0&-2&y-2x\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&z-x\\0&0&-4x+y+2z\end{pmatrix}.$$

وواضح أنه ليس كل متجه $(x,y,z)\in R^3$ يكون تركيبة خطية من متجهات S وإنما فقط المتجهات التي يتحقق لها الشرط: $-4x+y+2z=0$

فمثلاً المتجه $(1,2,3)\in R^3$ لا يكون تركيبة خطية من متجهات S (تحقق من ذلك؟)

وعليه فإن مجموعة المتجهات S لا تنشئ الفضاء R^3 .

٣– حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$

حيث $v_1=(1,1,2)\,,v_2=(1,0,2)\,,v_3=(1,1,0)$ تنشئ الفضاء R^3 أم لا؟ .

الحل: لكي تنشئ S الفضاء R^3 يجب أن يكون أي متجه اختياري $(x,y,z)\in R^3$ تركيبة خطية من متجهات S ومن ثم توجد أعداد قياسية c_1,c_2,c_3 ليست كلها أصفاراً عندما يكون: $(x,y,z)=c_1(1,1,2)+c_2(1,0,2)+c_3(1,1,0)$

$$\begin{aligned}&x=c_1+c_2+c_3\ ,\\ \therefore\ &y=c_1+c_3\ ,\\ &z=2c_1+2c_2\end{aligned}$$

ولكي توجد c_1,c_2,c_3 يجب أن تكون مجموعة المعادلات السابقة متآلفة ، وشرط ذلك هو أن مصفوفة المعاملات المناظرة لها تكون قابلة للانعكاس (أي محددها لا يساوي الصفر) ونبحث تحقيق هذا الشرط بحساب قيمة محدد مصفوفة المعاملات كما يلي:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\2&2&-2\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&-2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

وإذاً مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس وعليه فإن S تنشئ الفضاء R^3 .

ملاحظة: مصفوفة المعاملات المناظرة لمجموعة المعادلات في المثال السابق هي المصفوفة التي أعمدتها متجهات المجموعة S.

٤- حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$

حيث $v_1=(1,1,2)\,,v_2=(1,0,1)\,,v_3=(2,1,3)$ تنشئ الفضاء R^3 أم لا؟ .

الحل: بنفس الطريقة كما في المثال السابق نجد أن مصفوفة المعاملات المناظرة غير قابلة للانعكاس وعليه فإن S لا تنشئ الفضاء R^3 (تحقق من ذلك؟).

٥- أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ فضاء الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} x_1-3x_2+x_3&=0\\ 2x_1-6x_2+2x_3&=0\\ x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

الحل: نوجد فضاء الحل لمجموعة المعادلات المعطاه وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix}1&-3&1&0\\2&-6&2&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{?}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\therefore\quad \begin{aligned}x_1&=-4x_3\,,\\x_2&=-x_3\end{aligned}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x_3\\-x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

واضح أن المتجه الاختياري $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ من فضاء الحل يكون تركيبة خطية من المتجهين $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ وإذاً مجموعة المتجهات $\{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ تنشئ فضاء الحل للمعادلات.

٦- أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^4 تنشئ فضاء الحل لمجموعة المعادلات الخطية:

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

الحل: نوجد فضاء الحل لمجموعة المعادلات المعطاه باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 - x_4 , \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4 \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ 3x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ تنشئ فضاء الحل لمجموعة المعادلات.

٧- أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ الفضاء الصفري للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل: نوجد الفضاء الصفري للمصفوفة A وذلك بحل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة $AX = 0$ كما يلي:

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3$$

$$\therefore N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ تنشئ $N(A)$.

تعريف(٤):(مفهوم فضاء الصف للمصفوفة Row Space of a Matrix)

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن الفضاء الجزئي من الفضاء R^n والمنشأ بواسطة متجهات صفوف المصفوفة A يُسمى فضاء الصف للمصفوفة A ويُرمز له بالرمز $R(A)$.

تعريف مكافئ: فضاء الصف للمصفوفة A هو الفضاء المتكون من كل التركيبات الخطية من متجهات صفوف المصفوفة A .

ولإيجاد مجموعة المتجهات التي تنشئ فضاء الصف للمصفوفة A نختزلها لتصبح في الصورة المثلثية العليا (وليس بالضرورة لتصبح في الشكل الصفي المتدرج المختزل) فتكون متجهات الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة هي المتجهات التي تنشئ $R(A)$.

مثال: أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ فضاء الصف للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

الحل: نختزل المصفوفة A كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-7r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وإذاً مجموعة المتجهين $\{(1,2,-1),(0,-6,5)\}$ تنشئ $R(A)$.

ملاحظة: متجه أي صف من صفوف المصفوفة A يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من متجهات المجموعة التي تنشئ $R(A)$ والعكس صحيح (بمعنى أن كل متجه من متجهات المجموعة التي تنشئ $R(A)$ يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من متجهات صفوف المصفوفة A).

✓ في المثال السابق تحقق من أن كل متجه من متجهات المجموعة التي تنشئ $R(A)$ يكون تركيبة خطية من متجهات صفوف المصفوفة A .

تمرين: أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ فضاء الصف للمصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

تعريف(٥):(مفهوم الارتباط والاستقلال الخطي)

يُقال أن مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ معتمدة أو مرتبطة خطياً في الفضاء المتجه V إذا وُجدت أعداد قياسية $c_1,c_2,...,c_n$ ليست جميعها (كلها) أصفاراً عندما يكون $c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=0$.

وخلاف ذلك يُقال أن S مستقلة خطياً (أي إذا وُجدت أعداد قياسية $c_1,c_2,...,c_n$ جميعها أصفاراً وفقط عندما يكون $c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=0$).

أمثلة:

١ – حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ مرتبطة أم مستقلة خطيا في الفضاء R^4 حيث $v_1=(2,-1,0,3),v_2=(1,2,5,-1),v_3=(7,-1,5,8)$.

الحل: بفرض $c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$ حيث c_1,c_2,c_3 *scalars*

$$\therefore c_1(2,-1,0,3)+c_2(1,2,5,-1)+c_3(7,-1,5,8)=0$$

$$\therefore \begin{aligned} 2c_1+c_2+7c_3&=0,\\ -c_1+2c_2-c_3&=0,\\ 5c_2+5c_3&=0,\\ 3c_1-c_2+8c_3&=0.\end{aligned}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 5 & 0\\ 3 & -1 & 8 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \therefore\ c_1=-3c_3\ ,\ c_2=-c_3$$

واضح أن لمجموعة المعادلات السابقة أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

فمثلاً باختيار $c_3=1$ يكون $c_1=-3\ ,\ c_2=-1$ وإذاً S مرتبطة خطيا.

٢– حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ مرتبطة أم مستقلة خطيا في الفضاء R^4 حيث $v_1=(1,0,1,2)\,,v_2=(0,1,1,2)\,,v_3=(1,1,1,3)$.

الحل:

$$\text{let } c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0\ ;\ c_1,c_2,c_3\ \ scalars.$$

$$\therefore c_1(1,0,1,2)+c_2(0,1,1,2)+c_3(1,1,1,3)=0$$

$$\therefore \begin{array}{l} c_1+c_3=0, \\ c_2+c_3=0, \\ c_1+c_2+c_3=0, \\ 2c_1+2c_2+3c_3=0. \end{array}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 2&2&3&0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ c_1=c_2=c_3=0$$

وإذاً S مستقلة خطيا.

٣– ابحث ارتباط أو استقلال مجموعة متجهات كثيرات الحدود $S=\{p_1,p_2,p_3\}$ في فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 2 في المتغير x حيث:

$$p_1(x)=1-x\,,\,p_2(x)=5+3x-2x^2\,,\,p_3(x)=1+3x-x^2$$

الحل:

$$\text{let } c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3=0\ ;\ c_1,c_2,c_3\ \ scalars.$$

$$\therefore c_1(1-x)+c_2(5+3x-2x^2)+c_3(1+3x-x^2)=0$$

وبمقارنة معاملات قوى x في الطرفين نحصل على:

$$\begin{array}{l} -2c_2-c_3=0, \\ -c_1+3c_2+3c_3=0, \\ c_1+5c_2+c_3=0. \end{array}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ c_1 = (3/2)c_3\ ,\ c_2 = (-1/2)\,c_3$

put $c_3 = 2 \Rightarrow c_1 = 3\ ,\ c_2 = -1$

وإذاً S مرتبطة خطيا.

٤- ابحث ارتباط أو استقلال مجموعة متجهات الدوال $S = \{e^t, e^{2t}\}$ في فضاء الدوال في المتغير t .

<u>الحل</u>:

let $c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0\ ;\ c_1, c_2\ \ scalars.$ (1)

وبالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على:

$$c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} = 0 \qquad (2)$$

وبطرح(1) من(2) نحصل على:

$$c_2 e^{2t} = 0 \Rightarrow c_2 = 0\ ; e^{2t} \neq 0$$

وبالتعويض في(1) نحصل على: $c_1 = 0$

وإذاً S مستقلة خطيا.

<u>تمرين</u>: ابحث ارتباط أو استقلال كلا من متجهات الدوال الآتية في فضاء الدوال في المتغير x :

(i) $\{1, x, x^2\}$ (ii) $\{1, \sin x, \cos x\}$

✓ **نظرية**: لتكن $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مجموعة من المتجهات غير الصفرية في الفضاء المتجه V فإن S تكون مرتبطة خطياً إذا وإذا فقط كانت إحدى متجهاها تركيبة خطية من باقي المتجهات في S.

البرهان:

(أولاً) نفرض أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S وسنثبت أن S تكون مرتبطة خطياً:

$$\text{let } v_j=c_1v_1+c_2v_2+...+c_{j-1}v_{j-1}+c_{j+1}v_{j+1}+...+c_nv_n$$

$$\therefore c_1v_1+c_2v_2+...+c_{j-1}v_{j-1}+(-1)v_j+c_{j+1}v_{j+1}+...+c_nv_n=0$$

واضح أن أحد الأعداد القياسية (وهو معامل v_j) لا يساوي الصفر (أي وُجدت أعداد قياسية ليست جميعها أصفارا) وإذاً S مرتبطة خطياً وهو المطلوب إثباته.

(ثانياً) نفرض أن S مرتبطة خطياً وسنثبت أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S:

حيث إن S مرتبطة خطياً فتوجد أعداد قياسية $c_1,c_2,...,c_n$ ليست جميعها أصفارا عندما يكون:

$$c_1v_1+c_2v_2+...+c_{j-1}v_{j-1}+c_jv_j+c_{j+1}v_{j+1}+...+c_nv_n=0$$

$$\therefore -c_jv_j=c_1v_1+c_2v_2+...+c_{j-1}v_{j-1}+c_{j+1}v_{j+1}+...+c_nv_n$$

وباعتبار $c_j\neq 0$

$$\therefore v_j=(\frac{c_1}{-c_j})v_1+(\frac{c_2}{-c_j})v_2+...+(\frac{c_{j-1}}{-c_j})v_{j-1}+(\frac{c_{j+1}}{-c_j})v_{j+1}+...+(\frac{c_n}{-c_j})v_n$$

أي أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S وهو المطلوب إثباته.

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

مثال: باستخدام النظرية السابقة حدد ما إذا كانت مجموعة المصفوفات $S=\{M_1,M_2,M_3\}$ مرتبطة أم مستقلة خطياً في فضاء المصفوفات $M_{2\times 2}(R)$ حيث:

$$M_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$$

الحل: واضح أن $M_3=M_1+M_2$ أي أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S وطبقاً للنظرية فإن S تكون مرتبطة خطياً.

تمرين: ابحث ارتباط أو استقلال مجموعة المصفوفات $S=\{M_1,M_2,M_3\}$ في فضاء المصفوفات $M_{2\times 2}(R)$ حيث:

$$M_1=\begin{pmatrix}2&-1\\4&6\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}3&2\\8&3\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}-5&-8\\-16&4\end{pmatrix}.$$

نتيجة: التركيبات الخطية من مجموعة متجهات مستقلة خطياً في أي فضاء متجه تكون وحيدة.

البرهان: لتكن $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مجموعة من متجهات مستقلة خطياً في الفضاء المتجه V ولتكن $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i=0$, $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i=0$ تركيبتين خطيتين من متجهات S

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} c_i v_i=\sum_{i=1}^{n} k_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i v_i-\sum_{i=1}^{n} k_i v_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(c_i-k_i)v_i=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(c_i-k_i)=0.$$

حيث S مستقلة خطياً ومن ثم يكون $c_i=k_i \ \forall i=1,2,...,n.$

أي أن التركيبات الخطية من مجموعة متجهات مســـتقلة خطياً في أي فضاء متجه تكون وحيدة.

تماريـــــن

١- حدد ما إذا كان المتجه (0,1) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-1,1)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٢- حدد ما إذا كان المتجه (2,3,5) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,1,-5)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٣- حدد ما إذا كان المتجه (2,5,1) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,2,4)$, $v_2 = (-2,3,-1)$, $v_3 = (3,-2,4)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٤- حدد ما إذا كان المتجه (3,2,1) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (5,-1,2)$, $v_3 = (4,2,3)$, $v_4 = (-13,5,-4)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٥- عبر عن المتجه (1,0,0,0) كتركيبة خطية من المتجهات:

$v_1=(-1,1,1,1)$, $v_2=(1,-1,1,1)$, $v_3=(1,1,-1,1)$, $v_4=(1,1,1,-1)$

٦- عبر عما يلي كتركيبة خطية من كثيرات الحدود:

$P_1 = 2+t+4t^2$, $P_2 = 1-t+3t^2$, $P_3 = 3+2t+5t^2$.

(1) $5 + 9t + 5t^2$.

(2) $2 + 6t^2$.

(3) $2 + 2t + 3t^2$.

٧- حدد أي مما يلي يكون تركيبة خطية من المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} , \; C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1- $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.   2- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.   3- $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$.

٨- صِف فضاء العمود لكل من المصفوفات الآتية:

1- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. 2- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

٩- حدد ما إذا كان المتجه (3,9,12) يقع في فضاء العمود للمصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

١٠- حدد أي المجموعات التالية من المتجهات تنشئ الفضاء R^2 .

(1) {(1,2) , (-1,1)} .
(2) {(0,0) , (1,1) , (-2,-2)} .
(3) {(1,3) , (2,-3) , (0,2)} .

١١- حدد أي المجموعات التالية من المتجهات تنشئ الفضاء R^3 .

(1) {(1,-1,2), (0,1,1), (-3,-2,1)} .
(2) {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)} .
(3) {(5,0,0), (-1,2,0)} .

١٢- حدد أي من المجموعات التالية من المتجهات تنشئ الفضاء R^4 .

(1) {(1,0,0,0) , (1,1,0,0) , (1,1,1,0) , (1,1,1,1)} .
(2) {(0,1,1,0) , (1,1,1,1) , (-1,1,-1,1) , (1,2,3,4)} .
(3) {(1,1,0,0) , (1,2,-1,1) , (0,0,1,1) , (2,1,2,1)} .

١٣- حدد ما إذا كانت كثيرات الحدود التالية تنشئ فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي2 في المتغير t .

$p_1 = 1 + 2t - t^2$, $p_2 = 3 + t^2$,
$p_3 = 5 + 4t - t^2$, $p_4 = 2 + 2t - 2t^2$.

١٤- أوجد مجموعة المتجهات التي تنشئ الفضاء الصفري لكل من المصفوفات الآتية:

1- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. 2- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 3- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. 5- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

١٥- حدد أي من المجموعات التالية من المتجهات في الفضاء R^3 تكون مرتبطة خطياً وأيها تكون مستقلة خطيا.

(1) {(2,-1,4) , (3,6,2) , (2,10,-4)} .
(2) {(3,1,1) , (2,-1,5) , (4,0,-3)} .
(3) {(1,3,3) , (0,1,4) , (5,6,3) , (7,2,-1)} .

١٦- حدد أي من المجموعات التالية من المتجهات في الفضاء R^4 تكون مرتبطة خطياً وأيها تكون مستقلة خطيا ، وفي حالة ما إذا كانت مرتبطة خطياً اكتب إحداها في صورة تركيبة خطية من باقي المتجهات.

(1) {(4,4,0,0) , (0,0,6,6) , (-5,0,5,5)} .
(2) {(1,2,1,-2) , (0,-2,-2,0) , (0,2,3,1) , (3,0,-3,6)} .
(3) {(1,0,3,1) , (-1,1,0,1) , (2,3,0,0) , (1,1,6,3)} .

١٧- أثبت أنه إذا كانت مجموعة المتجهات $\{v_1,v_2,v_3\}$ مستقلة خطياً في الفضاء المتجه V فإن كل من مجموعة المتجهات الآتية:

(1) $\{2v_1 , v_1+v_2 , -v_1+v_2\}$.
(2) $\{v_1+v_2 , v_2+v_3 , v_3+v_1\}$.
(2) $\{v_1 , v_1+v_2 , v_1+v_2+v_3\}$.

تكون أيضاً مستقلة خطياً .

١٨- حدد أي من مجموعتي المصفوفات الآتية تكون مستقلة خطياً:

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}.$

(2) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$

٥- الأساس والبعد Basis and Dimension:

تعريف(١): إذا كانت $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات في الفضاء المتجه V فإن S تُسمى أساس للفضاء V إذا تحقق الشرطان:

(١) S تنشئ V ،

(٢) S تكون مستقلة خطياً ،

وعدد متجهات الأساس يساوي بُعد الفضاء V ويُكتب $\dim V$.

أمثلة:

١- مجموعة متجهات الوحدة في الفضاء الخطي تكون أساس له حيث إنها تنشئ الفضاء وتكون مستقلة خطياً .

يُسمى هذا الأساس بـــ**الأساس المعتاد** أو **الأساس الاعتيادي** Standard Basis

٢- مجموعة المتجهات $S_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ حيث:

$$v_1=(1,2,1), v_2=(2,9,0), v_3=(3,3,4)$$

تكون أساس للفضاء R^3

بينما مجموعة المتجهات $S_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ حيث:

$$v_1=(1,1,2), v_2=(1,0,1), v_3=(2,1,3)$$

لا تكون أساس للفضاء R^3 (تحقق من ذلك؟).

الحل: لكي تكون S_1 أساس للفضاء R^3 يجب أن تنشئ R^3 وتكون مستقلة خطياً ويكفى في مثل هذه الحالة بأن نتحقق من أن المصفوفة التي أعمدتها هي متجهات S_1 تكون قابلة للانعكاس (غير مفردة أي محددها لا يساوي الصفر) ، وعلى ذلك فإن المصفوفة التي أعمدتها هي متجهات S_1 تكون:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{pmatrix}, |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&9&-5\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

وإذاً A قابلة للانعكاس ومن ثم فإن S_1 تكون أساس للفضاء R^3.

والمصفوفة التي أعمدتها هي متجهات S_2 تكون:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&3\end{pmatrix},\ |A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

وإذاً A غير قابلة للانعكاس ومن ثم فإن S_2 لا تكون أساس للفضاء R^3.

٣– تحقق من أن مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ حيث:

$$v_1=(1,0,1,0),v_2=(0,1,-1,2),v_3=(0,2,2,1),v_4=(1,0,0,1)$$

تكون أساس للفضاء R^4.

الحل: المصفوفة التي أعمدتها هي متجهات S تكون:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&2&0\\1&-1&2&0\\0&2&1&1\end{pmatrix},$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&2&0\\1&-1&2&0\\0&2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&2&0\\2&1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1&2\\1&-1&2\\0&2&1\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$$

وإذاً A قابلة للانعكاس ومن ثم فإن S تكون أساس للفضاء R^4.

٤– تحقق من أن مجموعة المصفوفات $S=\{M_1,M_2,M_3,M_4\}$ حيث:

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},M_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},M_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},M_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

تكون أساس لفضاء المصفوفات $M_{2\times2}(R)$.

الحل: (أولاً) نتحقق من أن S تنشئ الفضاء $M_{2\times2}(R)$:

let $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{2\times2}(R)$, k_1,k_2,k_3,k_4 *scalars* ,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = a,\ k_2 = b,\ k_3 = c\ ,\ k_4 = d.$$

وإذاً توجد أعداد قياسية k_1, k_2, k_3, k_4 ليست جميعها أصفاراً عندها يكون أي متجه (مصفوفة) اختياري $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$ تركيبة خطية من متجهات S وعليه فإن S تنشئ الفضاء $M_{2\times 2}(R)$.

(ثانياً) نتحقق من أن S مستقلة خطياً:

$$\text{let } \ k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 + k_4 M_4 = 0 \ ; \ k_1, k_2, k_3, k_4 \ scalars$$

$$\therefore \ k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

وإذاً S مستقلة خطياً.

من أولاً وثانياً تكون S أساس للفضاء $M_{2\times 2}(R)$.

نظرية: إذا كانت مجموعة المتجهات $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساس للفضاء المتجه V فإن كل متجه في V يمكن التعبير عنه بطريقة واحدة وواحدة فقط كتركيبة خطية من متجهات المجموعة S.

البرهان:

$$\text{let } \ u \in V, c_1, c_2, ..., c_n, k_1, k_2, ..., k_n \ \ scalars\ ,$$
$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n \qquad (1),$$
$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n \qquad (2)$$

وبطرح (2) من (1) نحصل على:

$$0 = (c_1 - k_1) v_1 + (c_2 - k_2) v_2 + ... + (c_n - k_n) v_n$$

وحيث إن S مستقلة خطياً (لأنها أساس لـــ V) فيكون:

$$(c_1 - k_1) = (c_2 - k_2) = ... = (c_n - k_n) = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = k_1,\ c_2 = k_2, ...,\ c_n = k_n.$$

وإذاً الصورتين(2),(1) متطابقتين وهو المطلوب.

ملاحظات ونتائج:

(١) متجهات الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المُختزلة للمصفوفة A تكون أساس لفضاء الصف $R(A)$.

(٢) متجهات الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المُختزلة لمدور المصفوفة A تكون أساس لفضاء العمود $C(A)$.

(٣) بُعد فضاء الصف $R(A)$ يساوي بُعد فضاء العمود $C(A)$ يساوي رتبة المصفوفة A .

أمثلة:

١- أوجد أساس وبُعد فضاء الصف للمصفوفة $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

الحل: نختزل المصفوفة A كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4r_1+r_3]{2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/3)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[5r_2+r_3]{(-3/2)r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\{(1,0,-1/2),(0,1,0)\}$ تكون أساس لـــ$R(A)$ وبُعده يساوي 2

٢– أوجد أساس وبُعد فضاء العمود للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\3&2&5&1\\0&4&4&-4\end{pmatrix}$

الحل: نختزل مدور المصفوفة A كما يلي:

$$A^T=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&4\\1&5&4\\1&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_4]{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&4\\0&2&4\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/2)r_2}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&2\\0&2&4\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_2+r_1]{-2r_2+r_3,\,2r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&0&-6\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\{(1,0,-6),(0,1,2)\}$ تكون أساس لـــ $C(A)$ وبُعده يساوي 2

✓ **أمثلة متنوعة على الأساس والبُعد:**

١– أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تكون أساس للفضاء الصفري للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\3&1&5\end{pmatrix}$

الحل: نوجد الفضاء الصفري للمصفوفة A باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام $AX=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\2&1&3&0\\3&1&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{array}{l}x_1+2x_3=0,\\ x_2-x_3=0\end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}x_1=-2x_3,\\ x_2=x_3\end{array}$$

$$\therefore N(A)=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\},\ \text{let } c_1,c_2\ scalars$$

$$\therefore\ c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0\Rightarrow c_1=c_2=0$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ تكون أساس لـــ $N(A)$.

٢- حدد أساس وبُعد فضاء الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
$$4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0$$

الحل: نوجد فضاء الحل لمجموعة المعادلات المعطاه وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{array}{l} x_1 = -x_3 , \\ x_2 = x_3 \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \text{ let } c_1, c_2 \textit{ scalars} ,$$

$$\therefore c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$ تكون أساس لفضاء الحل لمجموعة المعادلات وبُعده يساوي 2 .

٣- حدد أساس وبُعد فضاء الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

الحل: نوجد فضاء الحل لمجموعة المعادلات المعطاه وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (تحقق من ذلك؟)

$$\begin{aligned} & x_1+x_2+x_5=0, && x_1=-x_2-x_5\,, \\ \therefore\ & x_3+x_5=0, \qquad \Rightarrow && x_3=-x_5\,, \\ & x_4=0 && x_4=0 \end{aligned}$$

put $x_2=s, x_5=t\ ; s,t\in R$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$, let c_1, c_2 *scalars* ,

$$\therefore c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow\ c_1=c_2=0$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\{(-1,1,0,0,0),(-1,0,-1,0,1)\}$ تكون أساس لفضاء الحل لمجموعة المعادلات وبُعده يساوي 2 .

٤– حدد أساس وبُعد الفضاء الجزئي المُنشأ من مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ حيث:

$$v_1 = (1,-2,0,0,3) \quad , v_2 = (2,-5,-3,-2,6) ,$$
$$v_3 = (0,5,15,10,0) \ , \ v_4 = (2,6,18,8,6)$$

الحل: الفضاء المُنشأ من هذه المتجهات يكون هو فضاء الصف للمصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

وباختزال هذه المصفوفة تؤول إلى الصورة الصفية المتدرجة الآتية:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(تحقق من ذلك؟).

ومتجهات الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة وهي:

$$(1,-2,0,0,3) \ , \ (0,1,3,2,0) \ , \ (0,0,1,1,0)$$

تكون أساسا لفضاء الصف ، ومن ثم تكون أساساً للفضاء المُنشأ من مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ وبُعده يساوي 3 .

تمارين

١- وضح أي من المجموعات التالية من المتجهات تكون أساساً للفضاء R^3 ؟

وعبر عن المتجه (2,1,3) كتركيبة خطية من كل مجموعة من المتجهات التي تكون أساس:

(1) $\{(4,2,1), (2,6,-5), (1,-2,3)\}$.
(2) $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$.
(3) $\{(1,2,2), (2,1,3), (0,0,0)\}$.

٢- وضح أي من المجموعات التالية من المتجهات تكون أساساً للفضاء R^4 ؟

وعبر عن المتجه (1,-5,6,9) كتركيبة خطية من كل مجموعة تكون أساس:

(1) $\{(1,-1,2,3), (1,1,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0)\}$.
(2) $\{(1,1,0,2), (0,1,-2,-1), (1,1,-3,-3), (3,2,-1,2)\}$.
(3) $\{(3,-1,2,0), (0,-2,3,-5), (-1,1,-2,3)\}$.

٣- وضح أي من المجموعات التالية تكون أساسا لفضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي2 في المتغير x ؟

(1) $\{1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$.
(2) $\{4+6x+x^2, -1+4x+2x^2, 5+2x-x^2\}$.
(3) $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$.

٤- تحقق من أن المجموعة التي عناصرها المصفوفات التالية تكون أساساً للفضاء $M_{2\times2}(R)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

٥- إذا كانت $\{v_1,v_2,v_3\}$ أساساً للفضاء المتجه V

فتحقق من أن $\{u_1,u_2,u_3\}$ تكون أيضاً أساسا للفضاء المتجه V حيث:

(1) $u_1 = v_1+v_2$, $u_2 = v_2+v_3$, $u_3 = 2v_3$.
(2) $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1+v_2$, $u_3 = v_1+v_2+v_3$.

٦- أوجد الأساس والبعد لفضاء الحل لكل مجموعة من المعادلات الخطية الآتية:

(1)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0. \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0. \\ x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 2x_4 &= 0. \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0. \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

٧- أوجد أساس فضاء الصف لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

٨- أوجد أساس فضاء العمود وكذلك مرتبة المصفوفة لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

٩- أوجد أساس الفضاءات الجزئية من R^4 المُنشأ من المتجهات:

(1) (1,1,-4,-3) , (1,0,1,-1) , (1,-1,6,1).
(2) (-1,1,-2,0) , (1,-1,2,0) , (3,0,0,1).
(3) (1,1,0,0) , (0,0,1,1) , (-1,0,0,1) , (0,-1,0,1).

١٠- أوجد أبعاد الفضاءات الجزئية من R^3 المُنشأة من المتجهات:

(1) (1,1, -1) , (1,2,-1) , (0,1,0).
(2) (1,-1,2) , (2,1,-2) , (4,-1,2) , (-1,3,-6).
(3) (1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1) , (1,1,1).

الباب الثالث

التحويلات الخطية Linear Transformations

في هذا الباب سنتناول دراسة دوال المتجهات ذات القيم الاتجاهية لمتغير متجه أي الدوال التي يكون فيها كلا من المتغير المستقل والمتغير التابع عبارة عن متجه ، وهي ما يُسمى بالتحويلات الخطية ، ولها تطبيقات هامة كثيرة في أفرع العلوم الطبيعية.

تعريف(١):(مفهوم التحويل الخطي)

ليكن V,W فضاءين متجهين ولتكن $T:V\to W$ دالة (أو راسم) فإن T تُسمى تحويل خطي إذا تحقق الشرطان:

$$\begin{array}{l}(1)\ T(u+v)=T(u)+T(v)\ ,\\ (2)\ T(ku)=kT(u).\end{array}\quad \forall u,v\in V, k\ scalar.$$

وإذا كان $V=W$ فإن التحويل التحويل الخطي T يُسمى مؤثر خطي فوق V
Linear Operator over V .

أمثلة:

١ – الدالة $T:R^2\to R^3 ; T(x,y)=(x,x+y,x-y)$ تكون تحويل خطي (وضح ذلك؟).

الحل: $let\ u,v\in R^2, k\ scalar\ ; u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)$

$$\begin{aligned}\therefore T(u+v)&=T(x_1+x_2,y_1+y_2)\\ &=(x_1+x_2,(x_1+x_2)+(y_1+y_2),(x_1+x_2)-(y_1+y_2))\\ &=(x_1,x_1+y_1,x_1-y_1)+(x_2,x_2+y_2,x_2-y_2)\\ &=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)\\ &=T(u)+T(v)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(ku)&=T(kx_1,ky_1)\\ &=(kx_1,kx_1+ky_1,kx_1-ky_1)\\ &=k(x_1,x_1+y_1,x_1-y_1)\\ &=kT(x_1,y_1)\\ &=kT(u).\end{aligned}$$

وإذاً T تحويل خطي.

٢- تحقق من أن الدالة $T:R^2\to R^2 ; T(x,y)=(2x+3y,-x)$ تكون مؤثر خطي

الحل: $let\ u,v\in R^2, k\ scalar\ ; u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)$

$$\begin{aligned}\therefore T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2)\\ &= (2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2), -(x_1+x_2))\\ &= (2x_1+3y_1,-x_1)+(2x_2+3y_2,-x_2)\\ &= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)\\ &= T(u)+T(v)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(ku) &= T(kx_1,ky_1)\\ &= (2kx_1+3ky_1,-kx_1)\\ &= k(2x_1+3y_1,-x_1)\\ &= kT(x_1,y_1)\\ &= kT(u).\end{aligned}$$

وإذاً T مؤثر خطي فوق R^2.

٣- حدد ما إذا كانت الدالة $T:R^2\to R^2 ; T(x,y)=(xy,y)$ تحويل خطي أم لا؟

الحل: $let\ u,v\in R^2, k\ scalar\ ; u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)$,

$$\begin{aligned}T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2)\\ &= ((x_1+x_2)(y_1+y_2), y_1+y_2)\\ &= (x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2, y_1+y_2)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(u)+T(v) &= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)\\ &= (x_1y_1,y_1)+(x_2y_2,y_2)\\ &= (x_1y_1+x_2y_2, y_1+y_2).\end{aligned}$$

$$\therefore T(u+v)\neq T(u)+T(v)$$

وإذاً T لا تكون تحويل خطي.

تمرين: حدد أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي وأيها لا تكون(مع ذِكر السبب)؟

(1) $T:R^2\to R^2 ; T(x,y)=(x+2y,3x).$

(2) $T:R^2\to R^2 ; T(x,y)=(x+y+1,x-y+1).$

(3) $T:R^2\to R^2 ; T(x,y)=(x+y,x-y).$

(4) $T:R^3\to R^2 ; T(x,y,z)=(x,y).$

(5) $T:R^3\to R^3 ; T(x,y,z)=(x+1,2y,z).$

نتيجة: إذا كان $T:V \to W$ تحويل خطي فإن:

$$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_nT(v_n).$$
$$\forall\, v_1, v_2, \dots, v_n \in V,\ c_1, c_2, \dots, c_n \ \ scalars.$$

تعريف(٢):(**مفهوم المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي**)

The Standard Matrix of Linear Transformation:

ليكن $T:R^n \to R^m$ تحويل خطي وليكن $e_1, e_2, \dots, e_n$ هو الأساس المعتاد للفضاء R^n (مجال التحويل T). فإن المصفوفة من النوع $m \times n$ والتي عمودها j هو المتجه $T(e_j)$ حيث $j = 1,2,\dots,n$ تُسمى المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T .

(وعموما فإن المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:V \to W$ هي المصفوفة التي أعمدتها عبارة عن صور متجهات الأساس المعتاد للفضاء المتجه V).

أمثلة:

١– أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي:

$T:R^3 \to R \ ;T(x,y,z) = x - y + 3z$

الحل: الأساس المعتاد للفضاء R^3 هو $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ ويكون:

$T(e_1) = T(1,0,0) = 1$,
$T(e_2) = T(0,1,0) = -1$,
$T(e_3) = T(0,0,1) = 3$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

٢– أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي:

$T:R^2 \to R^3 \ ;T(x,y) = (x + y, 3y, 2x - y)$

الحل: الأساس المعتاد للفضاء R^2 هو $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ ويكون:

$T(e_1) = T(1,0) = (1,0,2)$,
$T(e_2) = T(0,1) = (1,3,-1)$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

٣- أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي:

$T : R^3 \to R^4 \;\; ; T(x,y,z) = (x+y, x-y, z, x)$

الحل: الأساس المعتاد للفضاء R^3 هو $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ ويكون:

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,1,0,1)$,

$T(e_2) = T(0,1,0) = (1,-1,0,0)$,

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,1,0)$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

تعريف(٣):(**التحويل الخطي الأحادي** 1-1 Linear Transformation)

التحويل الخطي $T : V \to W$ يُسمى تحويل خطي أحادي إذا تحقق الشرط:

$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v \;\; \forall u, v \in V.$

(بمعنى أن كل متجهين مختلفين في المجال يكون لهما صورتين مختلفتين في المجال المقابل).

أمثلة:

١- التحويل الخطي $T : R^2 \to R^2 \;\; ; T(x,y) = (x+y, x-y)$ يكون أحادي (وضح ذلك؟).

الحل:

Let $u, v \in R^2 \;\; ; u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) &\Rightarrow T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) \\ &\Rightarrow (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &\Rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \; , \; x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \; , \; 2y_1 = 2y_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \; , \; y_1 = y_2 \\ &\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ &\Rightarrow u = v \end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

٢– حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T : R^3 \to R^2 \;\; ; T(x,y,z) = (x,y)$ أحادي أم لا (مع ذِكر السبب؟).

الحل:

$$(1,2,3),(1,2,4) \in R^3 \;\; , T(1,2,3) = T(1,2,4) = (1,2)$$

أي أنه ليس لكل متجهين مختلفين في المجال R^3 صورتين مختلفتين في المجال المقابل R^2

وإذاً T ليس أحادي.

٣– حدد ما إذا كان التحويل الخطي:

$$T : R^2 \to R^3 \;\; ; T(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$$

أحادي أم لا (مع ذِكر السبب؟).

الحل:

$$\text{Let } u,v \in R^2 \;\; ; u = (x_1,y_1), v = (x_2,y_2) \;\; ,$$

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) &\Rightarrow T(x_1,y_1) = T(x_2,y_2) \\ &\Rightarrow (x_1+y_1,\, x_1-y_1,\, x_1+2y_1) = (x_2+y_2,\, x_2-y_2,\, x_2+2y_2) \\ &\Rightarrow x_1+y_1 = x_2+y_2 \;\; , x_1-y_1 = x_2-y_2 \;\; , x_1+2y_1 = x_2+2y_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \;\; , y_1 = y_2 \\ &\Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \\ &\Rightarrow u = v \end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

تعريف(٤):(نواة التحويل الخطي Kernel of Linear Transformation)

نواة التحويل الخطي $T:V\to W$ هي عبارة عن المجموعة الجزئية من الفضاء المتجه V والتي تتكون من كل المتجهات $u\in V$ بحيث يكون $T(u)=0$ ويُرمز لنواة التحويل الخطي T بالرمز $\ker T$ (أي $\ker T=\{u\in V:T(u)=0_W\}\subset V$).

وإذا كانت A هي المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T فإن نواة التحويل T تكون هي الفضاء الصفري للمصفوفة المعتادة A (أي $\ker T=N(A)$).

أمثلة:

١- أوجد $\ker T$ للتحويل الخطي $T:R^2\to R^2\;;T(x,y)=(x+y,x-y)$

الحل:

$$\ker T=\{(x,y)\in R^2:T(x,y)=0\}$$
$$\therefore T(x,y)=(x+y,x-y)=(0,0)$$
$$\Rightarrow x+y=0,x-y=0$$
$$\Rightarrow x=0,y=0$$
$$\therefore \ker T=\{(0,0)\}=\{0\}.$$

٢- أوجد $\ker T$ للتحويل الخطي $T:R^3\to R^2\;;T(x,y,z)=(x,y)$

الحل:

$$\ker T=\{(x,y,z)\in R^3:T(x,y,z)=0\}$$
$$\therefore T(x,y,z)=(x,y)=(0,0)$$
$$\Rightarrow x=0,y=0,z=s\;;s\in R$$
$$\therefore \ker T=\{(0,0,s):s\in R\}.$$

٣- أوجد $\ker T$ للتحويل الخطي $T:R^4\to R^2\;;T(x,y,z,w)=(x+y,z+w)$

الحل:

$$\ker T=\{(x,y,z,w)\in R^4:T(x,y,z,w)=0\}$$
$$\therefore T(x,y,z,w)=(x+y,z+w)=(0,0)$$
$$\Rightarrow x+y=0,z+w=0$$
$$\Rightarrow x=-y,z=-w$$
$$put\;\;y=s,w=t\;\;;s,t\in R$$
$$\therefore \ker T=\{(-s,s,-t,t):s,t\in R\}.$$

نظرية(١): نواة التحويل الخطي $T:V\to W$ تكون فضاء جزئي من الفضاء V .

البرهان: $\ker T=\{u\in V:T(u)=0_W\}\subset V$ يتبقى التحقق من شرطي الفضاء الجزئي:

(1) Let $u,v\in\ker T\Rightarrow T(u)=T(v)=0$,

$T(u+v)=T(u)+T(v)=0+0=0.$

$\therefore u+v\in\ker T.$

(2) Let $u\in\ker T, k\ scalar\Rightarrow T(u)=0$,

$T(ku)=kT(u)=k0=0.$

$\therefore ku\in\ker T.$

وإذاً $\ker T$ تكون فضاء جزئي من الفضاء V .

نظرية(٢): التحويل الخطي $T:V\to W$ يكون أحادياً إذا وإذا فقط كان $\ker T=\{0\}$

البرهان:

(أولاً) نفرض أن $\ker T=\{0\}$ وسنثبت أن T أحادي:

Let $u,v\in V, T(u)=T(v)$

$\therefore T(u)-T(v)=0$

$\Rightarrow T(u-v)=0$

$\Rightarrow u-v\in\ker T=\{0\}$

$\Rightarrow\ u-v=0$

$\Rightarrow u=v.$

وإذاً T أحادي.

(ثانياً) نفرض أن T أحادي وسنثبت أن $\ker T=\{0\}$:

Let $u\in\ker T$,

$\therefore T(u)=0, T(0)=0$

$\Rightarrow T(u)=T(0)$

$\Rightarrow u=0\ \ ; T\ is\ 1-1$

$\therefore \ker T=\{0\}.$

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

نظرية(٣): ليكن $T:V\to W$ تحويل خطي بحيث $\ker T=\{0\}$

فإذا كانت $v_1,v_2,...,v_n$ متجهات مستقلة خطياً في الفضاء المتجه V

فإن المتجهات $T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)$ تكون أيضاً مستقلة خطياً في الفضاء المتجه W.

البرهان: Let $c_1,c_2,...,c_n$ *scalars* ,

$$c_1T(v_1)+c_2T(v_2)+...+c_nT(v_n)=0$$
$$\Rightarrow T(c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n)=0$$
$$\Rightarrow (c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n)\in\ker T=\{0\}$$
$$\Rightarrow c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=0$$
$$\Rightarrow c_1=c_2=...=c_n=0.$$

(حيث $v_1,v_2,...,v_n$ مستقلة خطياً).

وإذاً $T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)$ تكون مستقلة خطياً في W .

تمرين: لكل من الدوال الآتية:

(1) $T:R^2\to R^2\ ;T(x,y)=(x+y,y).$

(2) $T:R^2\to R^3\ ;T(x,y)=(x+y,y,x-y).$

(3) $T:R^3\to R^2\ ;T(x,y,z)=(x,y).$

(أ) تحقق من أن T تكون تحويل خطي.

(ب) تحقق من أن $\ker T=N(A)$ حيث A هي المصفوفة المعتادة للتحويل T.

(ج) هل T أحادي (واذكر السبب)؟.

تعريف(٥):(التحويل الخطي الفوقي Onto Linear Transformation)

ليكن $T:V\to W$ تحويل خطي فإن مجموعة كل المتجهات من الفضاء W والتي تكون صوراً – بتأثير التحويل T – لمتجه واحد على الأقل من متجهات الفضاء V

تُسمى مدى أو صورة التحويل T (Range or Image of T) ويُرمز لها $\operatorname{Im}T$

(أي $\operatorname{Im}T=\{w\in W:\exists v\in V, T(v)=w\}\subset W$).

وإذا كان لكل متجه w في المجال المقابل W يوجد أصل v في المجال V بحيث $T(v)=w$

(أي أن $\operatorname{Im}T=W$ مدى التحويل يساوي المجال المقابل للتحويل)

فإن التحويل الخطي T يُسمى تحويل خطي فوقي.

أمثلة:

١– تحقق من أن التحويل الخطي $T:R^2\to R^2\ ;T(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1-x_2)$

يكون فوقي.

الحل:

نفرض المتجه (y_1,y_2) في الفضاء R^2 (المجال المقابل) ونبحث إيجاد المتجه (x_1,x_2)

في الفضاء R^2 (المجال) بحيث يكون $T(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ أي أن:

$$(x_1+x_2,x_1-x_2)=(y_1,y_2)$$

$$\therefore \begin{aligned} x_1+x_2&=y_1\\ x_1-x_2&=y_2\end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&1&y_1\\1&-1&y_2\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&y_1\\0&-2&y_2-y_1\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1/2)r_2}\begin{pmatrix}1&1&y_1\\0&1&(-1/2)(y_2-y_1)\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&(1/2)(y_2+y_1)\\0&1&(-1/2)(y_2-y_1)\end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{aligned} x_1&=(1/2)(y_2+y_1),\\ x_2&=(-1/2)(y_2-y_1).\end{aligned}$$

ومن ثم يكون لكل متجه في المجال المقابل أصل في المجال ،

وعلى ذلك يكون T تحويل فوقي.

٢- هل التحويل الخطي $T:R^2 \to R^3\ ;T(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,2x_1+x_2,3x_1+3x_2)$ فوقي (اذكر السبب)؟.

الحل:

نفرض المتجه (y_1,y_2,y_3) في الفضاء R^3 (المجال المقابل للتحويل) ،

ونبحث إيجاد المتجه (x_1,x_2) في الفضاء R^2 (مجال التحويل)

بحيث يكون $T(x_1,x_2)=(y_1,y_2,y_3)$ أي أن:

$$(x_1+2x_2,2x_1+x_2,3x_1+3x_2)=(y_1,y_2,y_3)$$

$$\begin{aligned} & x_1+2x_2=y_1 \\ \therefore\ & 2x_1+x_2=y_2 \\ & 3x_1+3x_2=y_3 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 2 & 1 & y_2 \\ 3 & 3 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 0 & -3 & y_2-2y_1 \\ 0 & -3 & y_3-3y_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 0 & -3 & y_2-2y_1 \\ 0 & 0 & y_3-y_2-y_1 \end{pmatrix}.$$

ومن ثم يكون لمجموعة المعادلات الخطية حل فقط إذا كان $0=y_3-y_2-y_1$

أي يوجد فقط للمتجهات (y_1,y_2,y_3) التي لها $y_3=y_2+y_1$ في المجال المقابل أصل (x_1,x_2) في المجال ، وعلى ذلك T لا يكون تحويل فوقي.

٣– تحقق من أن التحويل الخطي

$T : R^3 \to R^3 \; ; T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_3)$.

يكون فوقي.

<u>الحل</u>: لإثبات أن T تحويل فوقي:

نفرض المتجه (y_1, y_2, y_3) في الفضاء R^3 (المجال المقابل للتحويل)

ونبحث إيجاد المتجه (x_1, x_2, x_3) في R^3 (مجال التحويل)

بحيث يكون $T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ أي أن:

$$(x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 = y_1 \\ \therefore\ & x_2 + x_3 = y_2 \\ & x_3 = y_3 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_3 + r_1]{-r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y_1 + y_2 - y_3 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & x_1 = y_1 + y_2 - y_3 , \\ \therefore\ & x_2 = y_2 - y_3 , \\ & x_3 = y_3 . \end{aligned}$$

ومن ثم يكون لكل متجه في المجال المقابل أصل في المجال ،

وعلى ذلك يكون T تحويل فوقي.

٤– حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T:R^3 \to R^3$ المُعرف بالعلاقة:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x_1+x_3 \\ x_1+x_2+2x_3 \\ 2x_1+x_2+3x_3 \end{pmatrix}.$$

فوقي أم لا (مع ذِكر السبب)؟.

<u>الحل:</u>

✓ لتحديد ما إذا كان T تحويل فوقي أم لا:

نفرض المتجه (y_1,y_2,y_3) في الفضاء R^3 (المجال المقابل للتحويل)

ونبحث إيجاد المتجه (x_1,x_2,x_3) في R^3 (مجال التحويل)

بحيث يكون $T(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)$ أي أن:

$$(x_1+x_3,\ x_1+x_2+2x_3, 2x_1+x_2+3x_3)=(y_1,y_2,y_3)$$

$$\begin{aligned} & x_1 + \qquad x_3 = y_1 \\ \therefore\quad & x_1+x_2+2x_3=y_2 \\ & 2x_1+x_2+3x_3=y_3 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & 2 & y_2 \\ 2 & 1 & 3 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2-y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-y_2-y_1 \end{pmatrix}.$$

ومن ثم يكون لمجموعة المعادلات الخطية حل فقط إذا كان $y_3-y_2-y_1=0$

أي يوجد فقط للمتجهات (y_1,y_2,y_3) في المجال المقابل التي لها $y_3=y_2+y_1$

أصل (x_1,x_2,x_3) في المجال ، وعلى ذلك T لا يكون تحويل فوقي.

نظرية(١): مدي التحويل الخطي $T:V\to W$ يكون فضاءاً جزئياً من الفضاء W

البرهان:

$$\operatorname{Im}T=\{w\in W:\exists\, v\in V, T(v)=w\}\subset W$$

يتبقى التحقق من شرطي الفضاء الجزئي:

(1) Let $w_1,w_2\in \operatorname{Im}T \Rightarrow \exists\, v_1,v_2\in V, T(v_1)=w_1, T(v_2)=w_2$,
$\therefore w_1+w_2=T(v_1)+T(v_2)=T(v_1+v_2)\in \operatorname{Im}T.$

(2) Let $w\in \operatorname{Im}T, k\ scalar \Rightarrow \exists\, v\in V, T(v)=w$,
$\therefore kw=kT(v)=T(kv)\in \operatorname{Im}T.$

وإذاً $\operatorname{Im}T$ تكون فضاء جزئي من الفضاء W .

نظرية(٢): للتحويل الخطي $T:V\to W$ يتحقق:

$$\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)=\dim V.$$

بُعد نواة التحويل $\dim(\ker T)$ يُسمى صفرية التحويل T *Nullity of T*

وبُعد مدى التحويل $\dim(\operatorname{Im}T)$ يُسمى رتبة التحويل T *Rank of T* .

البرهان:

إذا كان $T=0$ (التحويل الصفري) فإن $0(v)=0_W\ \forall v\in V$

ويكون $\operatorname{Im}T=\{0\}, \ker T=V$ ومن ثم يكون:

$$\dim(\ker T)=\dim V \Rightarrow \dim(\ker T)+0=\dim V$$
$$\Rightarrow \dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)=\dim V.$$

وهو المطلوب.

أما إذا كان $T\neq 0$ (تحويل غير الصفري) وليكن $\dim V=n, \dim(\ker T)=k$

فيوجد حالتان:

(الحالة الأولى) إذا كان $n=k$ فيتحقق المطلوب عندما يكون $\dim(\operatorname{Im}T)=0$:

$$\dim V=\dim(\ker T)\Rightarrow V=\ker T\Rightarrow \operatorname{Im}T=\{0\}\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}T)=0.$$

(الحالة الثانية) إذا كان $n>k$ فيتحقق المطلوب عندما يكون $\dim(\operatorname{Im}T)=n-k$:

بمعنى أنه يوجد عدد $n-k$ من المتجهات في الفضاء W تكون أساس لـــ $\operatorname{Im}T$.

لذلك نفرض أن مجموعة المتجهات $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ تكون أساس لـــ $\ker T$

وأن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ تكون أساس للفضاء V

وسنثبت أن مجموعة المتجهات $S = \{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), ..., T(v_n)\}$ تكون أساس لـــ $\operatorname{Im} T$ كما يلي:

أولاً: نثبت أن S تنشئ $\operatorname{Im} T$:

Let $w = T(v) \in \operatorname{Im} T \; ; v \in V$,

$\therefore v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + ... + c_n v_n$

$$\therefore w = T(v) = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + ... + c_n v_n)$$
$$= c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + ... + c_k T(v_k) + c_{k+1} T(v_{k+1}) + ... + c_n T(v_n)$$

وحيث إن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ أساس لنواة التحويل فهي تقع فيها فيكون:

$T(v_1) = T(v_2) = ... = T(v_k) = 0$

$\therefore w = c_{k+1} T(v_{k+1}) + c_{k+2} T(v_{k+2}) + ... + c_n T(v_n).$

وإذاً S تنشئ $\operatorname{Im} T$.

ثانياً: نثبت أن S مستقلة خطياً :

Let $c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n$ *scalars* , $c_{k+1} T(v_{k+1}) + c_{k+2} T(v_{k+2}) + ... + c_n T(v_n) = 0$

$\therefore T(c_{k+1} v_{k+1} + c_{k+2} v_{k+2} + ... + c_n v_n) = 0$

$\Rightarrow (c_{k+1} v_{k+1} + c_{k+2} v_{k+2} + ... + c_n v_n) \in \ker T.$

وبالتالي يمكن كتابة هذا المتجه الذي ينتمي إلى $\ker T$ كتركيبة خطية من متجهات أساس $\ker T$ كما يلي:

$c_{k+1} v_{k+1} + c_{k+2} v_{k+2} + ... + c_n v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \; ; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ *scalars.*

$\therefore \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k + (-c_{k+1}) v_{k+1} + (-c_{k+2}) v_{k+2} + ... + (-c_n) v_n = 0$

وحيث إن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ أساس للفضاء V فيكون:

$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = c_{k+1} = c_{k+2} = ... = c_n = 0.$

وإذاً S مستقلة خطياً.

من أولاً وثانياً يكون $\dim(\operatorname{Im} T) = n - k$ وهو المطلوب.

تمرين(١): حقق النظرية السابقة للتحويل الخطي $T: R^3 \to R^3$ المُعرف بالعلاقة:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

الحل: نوجد $\dim(\ker T), \dim(\operatorname{Im} T)$:

✓ لإيجاد $\dim(\ker T)$ فإننا نبحث إيجاد كل المتجهات (x_1, x_2, x_3) في المجال R^3 بحيث يكون $T(x_1, x_2, x_3) = 0$ وهذا يعنى إيجاد حل مجموعة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore x_1 = -x_3 \,,\; x_2 = -x_3 \;,$$

$$\therefore \ker T = \{x_3(-1,-1,1) : x_3 \in R\}.$$

ومن ثم يكون المتجه $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو الأساس لنواة التحويل T ويكون $\dim(\ker T) = 1$.

✓ ولإيجاد $\dim(\operatorname{Im} T)$:

نختزل المصفوفة التي صفوفها هي صور متجهات الأساس المعتاد لمجال التحويل T كما يلي:

$$T(1,0,0) = (1,1,2),\; T(0,1,0) = (0,1,1),\; T(0,0,1) = (1,2,3).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

فتكون مجموعة متجهات الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة الأخيرة

وهي $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ أساس لمدى التحويل T ومن ثم يكون $\dim(\operatorname{Im} T)=2$.

$$\therefore \dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im} T)=1+2=3=\dim R^3.$$

تمرين(٢): حقق النظرية السابقة للتحويل الخطي:

$$T:R^2\to R^2\ ;T(x,y)=(3x-y,4x+2y).$$

الحل: يُترك للطالب.

✓ (**ملاحظات ونتائج**) إذا كان $T:V\to W$ تحويل خطي فإن:

(١) نواة التحويل T تكون هي الفضاء الصفري للمصفوفة المعتادة للتحويل T أي $\ker T=N(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T.

(٢) مدى التحويل T يكون هو فضاء العمود للمصفوفة المعتادة للتحويل T أي $\operatorname{Im} T=C(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T.

(٣) إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ أساس للفضاء V وعلمنا صور متجهات الأساس S وهي $T(v_1),T(v_2),\ldots,T(v_n)$ فإن صورة أي متجه $u\in V$ تُعطى بدلالة هذه الصور بالعلاقة:

$$T(u)=\sum_{i=1}^{n}c_iT(v_i)\ ;u=\sum_{i=1}^{n}c_iv_i$$

(٤) مجموع كلا من صفرية التحويل T ورتبة التحويل T يكون مساوياً لبُعد مجال التحويل T (أي $\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im} T)=\dim V$).

(٥) إذا كان التحويل T أحادي التناظر (أي أحادي وفوقي في نفس الوقت) فيُقال أن التحويل T قابل للانعكاس *invertable* ويُسمى T تشاكل خطي.

أمثلة:

١– إذا كان $T:R^3\to R^2$ تحويل خطي وكانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ أساس للفضاء R^3 حيث $v_1=(1,1,1),v_2=(1,1,0),v_3=(1,0,0)$ وكان:

$T(v_1)=(1,0),\,T(v_2)=(2,-1),\,T(v_3)=(4,3).$

فاوجد $T(2,-3,5)$ ؟.

الحل: حيث إن S أساس للفضاء R^3 فيمكن كتابة المتجه $(2,-3,5)$ كتركيبة خطية من متجهات S كما يلي:

$$(2,-3,5)=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3\ \ ;c_1,c_2,c_3\ \ scalars.$$

$$\therefore (2,-3,5)=c_1(1,1,1)+c_2(1,1,0)+c_3(1,0,0)$$

$$\begin{aligned} 2&=c_1+c_2+c_3\ , & & c_1=5\ ,\\ \therefore -3&=c_1+c_2\ , &\Rightarrow\ & c_2=-8\ ,\\ 5&=c_1 & & c_3=5 \end{aligned}$$

$$\therefore (2,-3,5)=5v_1-8v_2+5v_3$$

$$\begin{aligned}\therefore T(2,-3,5)&=5T(v_1)-8T(v_2)+5T(v_3)\\ &=5(1,0)-8(2,-1)+5(4,3)\\ &=(9,23).\end{aligned}$$

٢– إذا كان $T:R^2\to R^2\ ;T(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)$ تحويل خطي.

فتحقق من أن $\ker T=N(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T

وحدد ما إذا كان T تشاكل خطي أم لا (مع ذِكر السبب)؟.

الحل:

(أولاً) نوجد $\ker T$:

$$T(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)=0\Rightarrow x_1+x_2=0,x_2=0\Rightarrow x_1=0,x_2=0$$

$$\therefore \ker T=\{0\}.$$

(ثانياً) نوجد المصفوفة المعتادة للتحويل:

الأساس المعتاد للفضاء R^2 هو $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ ويكون:

$$T(e_1)=T(1,0)=(1+0,0)=(1,0)\ ,$$

$$T(e_2)=T(0,1)=(0+1,1)=(1,1).$$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ثالثاً) نوجد $N(A)$ وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام $AX = 0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore x_1 = x_2 = 0$$

$$\therefore N(A) = \{0\}.$$

وإذاً $\ker T = N(A) = \{0\}$ وهو المطلوب.

ولكي يكون التحويل T تشاكل خطي يجب أن يكون أحادي التناظر:

(١) بفرض $u, v \in R^2 \; ; u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) &\Rightarrow T(u_1, u_2) = T(v_1, v_2) \\ &\Rightarrow (u_1 + u_2, u_2) = (v_1 + v_2, v_2) \\ &\Rightarrow u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \, , \, u_2 = v_2 \\ &\Rightarrow u_1 = v_1 \, , \, u_2 = v_2 \\ &\Rightarrow (u_1, u_2) = (v_1, v_2) \\ &\Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

(٢) ولتحديد ما إذا كان التحويل فوقي أم لا:

نفرض المتجه (y_1, y_2) في الفضاء R^2 (المجال المقابل) ونبحث إيجاد المتجه (x_1, x_2) في الفضاء R^2 (المجال) بحيث يكون $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ أي أن:

$$(x_1 + x_2, x_2) = (y_1, y_2)$$

$$\therefore \begin{matrix} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = y_1 - y_2 \, , \, x_2 = y_2 .$$

ومن ثم يكون لكل متجه في المجال المقابل أصل في المجال، وعلى ذلك يكون T تحويل فوقي. من (١) ، (٢) يكون T تشاكل خطي.

✓ طريقة أخرى لتحديد ما إذا كان التحويل فوقي أم لا:

$$\because \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim R^2$$

$$\therefore \quad 0 \quad + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim R^2 \Rightarrow \operatorname{Im} T = R^2.$$

أي أن مدى التحويل T يساوي المجال المقابل للتحويل T وإذاً T فوقي.

٣– إذا كان $T : R^2 \to R^3 \; ; T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$ تحويل خطي.

فتحقق من أن $\ker T = N(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T

وهل T تشاكل خطي (اذكر السبب)؟.

الحل:

(أولاً) نوجد $\ker T$:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\therefore \ker T = \{0\}.$$

(ثانياً) نوجد المصفوفة المعتادة للتحويل:

الأساس المعتاد للفضاء R^2 هو $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ ويكون:

$$T(e_1) = T(1,0) = (1+0, 1-0, 1+2(0)) = (1,1,1) \; ,$$

$$T(e_2) = T(0,1) = (0+1, 0-1, 0+2(1)) = (1,-1,2).$$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(ثالثاً) نوجد $N(A)$ وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام $AX = 0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_2+r_1]{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1 = x_2 = 0 \quad \therefore N(A) = \{0\}.$$

وإذاً $\ker T = N(A) = \{0\}$ وهو المطلوب.

ولكي يكون التحويل T تشاكل خطي يجب أن يكون أحادي التناظر:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \text{let } u,v\in R^2\ ;u=(u_1,u_2),v=(v_1,v_2)\ ,\\
&T(u)=T(v)\Rightarrow T(u_1,u_2)=T(v_1,v_2)\\
&\qquad\Rightarrow (u_1+u_2,u_1-u_2,u_1+2u_2)=(v_1+v_2,v_1-v_2,v_1+2v_2)\\
&\qquad\Rightarrow u_1+u_2=v_1+v_2\ ,\ u_1-u_2=v_1-v_2\ ,\ u_1+2u_2=v_1+2v_2\\
&\qquad\Rightarrow u_1=v_1\ ,\ u_2=v_2\\
&\qquad\Rightarrow (u_1,u_2)=(v_1,v_2)\\
&\qquad\Rightarrow u=v.
\end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

$$\begin{aligned}
&(2)\ \because \dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)=\dim R^2\\
&\quad\therefore\qquad 0\qquad +\dim(\operatorname{Im}T)=\dim R^2\Rightarrow \operatorname{Im}T=R^2\neq R^3.
\end{aligned}$$

أي أن مدى التحويل T لا يساوي المجال المقابل للتحويل T وإذاً T ليس فوقي.

ومن ثم لا يكون T تشاكل خطي.

تعريف(٦):(المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي)

إذا كان $T:V\to W$ تحويل خطي وكانت مجموعة المتجهات $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أساس للفضاء V ومجموعة المتجهات $\{w_1,w_2,...,w_m\}$ أساس للفضاء W. فإن صورة كلا من متجهات أساس الفضاء V تكون تركيبة خطية من متجهات أساس الفضاء W أي أن:

$$\begin{aligned}
&T(v_1)=c_{11}w_1+c_{12}w_2+...+c_{1m}w_m\\
&T(v_2)=c_{21}w_1+c_{22}w_2+...+c_{2m}w_m\\
&\ .....\ \ .....\ \ .....\ \ .....\ \ .....\\
&T(v_n)=c_{n1}w_1+c_{n2}w_2+...+c_{nm}w_m
\end{aligned}$$

ومصفوفة المعاملات المناظرة لمجموعة المعادلات السابقة تكون:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & c_{1m}\\ c_{21} & c_{22} & ..... & c_{2m}\\ ..... & ..... & ..... & .....\\ c_{n1} & c_{n2} & ..... & n_{nm}\end{pmatrix}$$

مدور هذه المصفوفة يُسمى **المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي** T بالنسبة للأساسين $\{v_1,v_2,...,v_n\},\{w_1,w_2,...,w_m\}$ للفضاءين V,W على الترتيب.

مثال: إذا كانت المجموعتان $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\{(1,1),(0,2)\}$ أساســين للفضاءين R^3, R^2 على الترتيب. فاوجد المصفوفة المساعدة بالنسبة لهذين الأساسين لكل من التحويلات الخطية الآتية:

$$(1)\ T: R^3 \to R^2; T(x,y,z) = (x+y, 3z).$$
$$(2)\ T: R^3 \to R^2; T(x,y,z) = (x-y, y-z).$$

الحل:

$$(1)\ T: R^3 \to R^2; T(x,y,z) = (x+y, 3z).$$
$$\therefore T(1,0,0) = (1+0, 3(0)) = (1,0) = c_{11}(1,1) + c_{12}(0,2)\ ,$$
$$\therefore 1 = c_{11}\ ,\ 0 = c_{11} + 2c_{12} \Rightarrow c_{11} = 1,\ c_{12} = -1/2.$$
$$\therefore T(0,1,0) = (0+1, 3(0)) = (1,0) = c_{21}(1,1) + c_{22}(0,2)\ ,$$
$$\therefore 1 = c_{21}\ ,\ 0 = c_{21} + 2c_{22} \Rightarrow c_{21} = 1,\ c_{22} = -1/2.$$
$$\therefore T(0,0,1) = (0+0, 3(1)) = (0,3) = c_{31}(1,1) + c_{32}(0,2)\ ,$$
$$\therefore 0 = c_{31}\ ,\ 3 = c_{31} + 2c_{32} \Rightarrow c_{31} = 0,\ c_{32} = 3/2.$$

وإذاً المصفوفة المساعدة للتحويل تكون:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

- بالمثل نوجد المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي:

$$(2)\ T: R^3 \to R^2; T(x,y,z) = (x-y, y-z).$$

فتكون $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ (تحقق من ذلك؟).

تمارين

١- إذا كانت $T : R^2 \to R^2$ فوضح أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي وأيها لا تكون؟.

(1) $T(x,y) = (2x,y)$.
(2) $T(x,y) = (x^2,y)$.
(3) $T(x,y) = (0,y)$.
(4) $T(x,y) = (x,y+1)$.
(5) $T(x,y) = (2x+y,x-y)$.
(6) $T(x,y) = (y,y)$.

٢- ليكن $T : R^3 \to R^2$ فحدد أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي؟.

(1) $T(x,y,z) = (0,0)$.
(2) $T(x,y,z) = (x,x+y+z)$.
(3) $T(x,y,z) = (3x+y,3y-4z)$.
(4) $T(x,y,z) = (1,1)$.

٣- إذا كانت $T : R^2 \to R^3$ حيث $T(x,y) = (x+y,3y,2x-y)$ فتحقق من أن T يكون تحويل خطي.

٤- إذا كانت $T : R^2 \to R^3$ فحدد أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي؟.

(1) $T(x,y) = (x,y,2x)$.
(2) $T(x,y) = (x,0,y)$.
(3) $T(x,y) = (x,y^2,y)$.
(4) $T(x,y) = (x,0,0)$.
(5) $T(x,y) = (xy,0,0)$.
(6) $T(x,y) = (0,x,y)$.

٥- أي مما يأتي يكون تحويلاً خطياً وأيها لا يكون (مع ذِكر السبب):

(1) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{pmatrix}.$ (2) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x-z \end{pmatrix}.$

(3) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2+x \\ y-y^2 \end{pmatrix}.$ (4) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x^2 \\ 2z \end{pmatrix}.$

(5) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+z \end{pmatrix}.$ (6) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ 2x+3 \end{pmatrix}.$

٦- أي مما يأتي يكون تحويلاً خطياً ، ومن ثم أوجد المصفوفة المعتادة له

(1) $T: R^3 \to R^2$; $T(x,y,z)= (y,x)$.
(2) $T: R^2 \to R^2$; $T(x,y)= (y,xy)$.
(3) $T: R \to R^3$; $T(x)= (x,0,1)$.
(4) $T: R^2 \to R$; $T(x,y)= 2x+3y$.

٧- أوجد المصفوفة المعتادة لكل التحويلات الخطية الآتية:

(1) $T: R^3 \to R^2$; $T(x,y,z) = (2x+y,y-z)$.
(2) $T: R^4 \to R$; $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+2x_2-x_3+5x_4$.
(3) $T: R^2 \to R^4$; $T(x_1,x_2) = (0,x_2,x_1,x_1+x_2)$.

٨- أوجد المصفوفة المعتادة لكل من التحويلات الآتية:

(1) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}.$

(2) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+2x_2+x_3 \\ x_1+5x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

(3) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7x_1+2x_2-x_3+x_4 \\ x_2+x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$

٩- لتكن $v_1,v_2,..,v_n$ متجهات في الفضاء المتجه V

فتحقق من أن الراسم $T : R^n \to V$ المعرف بالعلاقة:

$$T(x_1,x_2,...,x_n) = x_1v_1+x_2v_2+...+x_nv_n$$

يكون تحويلاً خطياً.

١٠- إذا كان $T : R^3 \to R^2$ تحويلاً خطياً وكان:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

أوجد $T\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$.

١١- إذا كان $T : R^2 \to R^2$ تحويلاً خطياً وكان:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

أوجد $T\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$.

١٢- إذا كانت $T: R^2 \to R^3$ معرف بالعلاقة: $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\x+y\\y\end{pmatrix}$.

(أ) أوجد $\ker T$.

(ب) هل T تحويل أحادي ؟ .

(ج) هل T تحويل فوقي ؟ .

١٣- إذا كانت $T : R^4 \to R^3$ معرف بالعلاقة: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z+w \\ x+z \end{pmatrix}$.

(أ) أوجد أساس نواة T.

(ب) أوجد أساس مدى T.

(ج) هل T تحويل فوقي ؟ .

١٤- أوجد أساس نواة التحويل وكذلك مدى التحويل ، لكل من التحويلات الخطية الآتية:

(أ) $T : R^5 \to R^4$ المعرف بالعلاقة:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

(ب) $T : R^3 \to R^3$ المعرف بالعلاقة:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}.$$

(ج) $T : R^4 \to R^4$ المعرف بالعلاقة:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

١٥- إذا كانت $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\{(1,1),(0,2)\}$ أساسين للفضاءين R^3 , R^2 على الترتيب . فأوجد المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي $T : R^3 \to R^2$ بالنسبة لهذين الأساسين على الترتيب حيث:

(1) $T(x,y,z) = (x+y, 3z)$.

(2) $T(x,y,z) = (x-y, y-z)$.

١٦- إذا كان $T : R^3 \to R^2$ تحويل خطي معرف بالعلاقة:

$$T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1+2x_2 , x_2-2x_3) .$$

وكانت $\{(1,0,1),(1,2,1),(0,1,2)\}$ أساس للفضاء R^3

وكانت $\{(1,2),(4,0)\}$ أساس للفضاء R^2

فأوجد المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي بالنسبة لهذين الأساسين.

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}$$

ولكن

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt},$$
$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}$$
$$(2)\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dt},$$
$$x\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\frac{dz}{dx} + x^2\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$= 2\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}$$
$$(3)x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}$$

وبالتعويض عن (2) ، (3) تتحول المعادلة (1) الى الصورة

$$\phi(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ...) = 0$$

وهى معادلة خالية من t ويمكن حلها كما سبق

<u>مثال(2) :-</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الأتية

$$(x^2 + y^2)(y - xy') + x^2y^2y'' = 0$$

<u>الحل :-</u> بالقسمة على x^3 نجد أن

$$(1 + \frac{y^2}{x^2})(\frac{y}{x} - y')\frac{y^2}{x^2} - xy'' = 0$$

بوضع

$$y = zx, \ x = e^t$$

تتحول المعادلة التفاضلية الى الصورة

$$(1+z^{2})(z-z-\frac{dz}{dt})+z^{2}(\frac{d^{2}z}{dt^{2}}+\frac{dz}{dt})=0$$

$$-\frac{dz}{dt}-z^{2}\frac{dz}{dt}+z^{2}\frac{d^{2}z}{dt^{2}}+z^{2}\frac{dz}{dt}=0$$

$$z^{2}\frac{d^{2}z}{dt^{2}}=\frac{dz}{dt}$$

بوضع

$$\frac{dz}{dt}=p \quad , \frac{d^{2}z}{dt^{2}}=p\frac{dp}{dz}$$

$$z^{2}p\frac{dp}{dt}=p$$

$$\{dp=\{\frac{dz}{z^{2}}$$

$$p=\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{a}=\frac{z-a}{az}$$

$$\{\frac{az\,dz}{z-a}=\{dt$$

$$t.\ln b=a\{[1+\frac{a}{z-a}]dz$$

$$=az+a^{2}\ln(z-a)$$

$$\mathrm{t}=\mathrm{az}+\mathrm{a}^{2}\mathrm{ln}(\mathrm{z}-\mathrm{a})+\mathrm{lnb}$$

$$\mathrm{lnx}=\mathrm{a}\frac{y}{x}+a^{2}\ln(\frac{y}{x}-a)+\ln b$$

$$x=b(\frac{y}{x}-a)^{a^{2}}e^{a\frac{y}{x}}$$

وهو الحل العام

<u>رابعاً: الطرف الأيسر للمعادلة</u>

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',\mathrm{y}'',.....,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هو عبارة عن مشتقة لمقدار تفاضلي ما من الرتبة $(n-1)$ وليكن مثلاً:

$$\phi=\phi(\mathrm{c},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',.....,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هنا يمكن كتابة المعادلة $\frac{d\phi}{dx}=0$ ومنها $\phi=c$

مثال(1) : حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' + y'^2 = 0$$

الحل : هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$d(yy') = 0$$

ومنها يكون

$$yy' = c$$

$$y^2 = c_1 x + c_2$$

ملحوظة : أحيانا للحصول على دالة مشتقتها تساوى الطرف الأيسر للمعادلة فإن ذلك لا يتحقق إلا بعد ضرب طرفي المعادلة في دالة ما .

مثال(2) : حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' = y'^2$$

الحل : بالقسمة على yy' نحصل على

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$$

$$\{\frac{y''}{y'} = \{\frac{y'}{y}$$

$$\ln y' = \ln y + \ln c$$

$$y' = yc$$

$$\frac{dy}{dx} = yc$$

$$\frac{dy}{y} = cdx$$

$$\ln y = cx + c_1$$

$$y = e^{cx + c_1} = c_1 e^{cx}$$

وهو الحل العام

مثال (3) :- حل المعادلة التفاضلية

$$y\acute{y}''' = 2y''^2$$

الحل : بالقسمة على $y\acute{y}''$ نحصل على

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}$$

$$\{\frac{y'''}{y''} = 2\{\frac{y''}{y'}$$

$$\ln y'' = 2\ln y' + \ln c$$

$$y'' = cy'^2$$

وبوضع $y' = p$

$$\frac{dp}{dx} = cp^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = cdx \Rightarrow -\frac{1}{p} = cx + c_1$$

$$p = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$y = \frac{1}{c}\ln(cx + c_1) + c_2$$

وهو الحل العام

<u>تمارين (2)</u>

1- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية بحلها بالنسبة إلى $p = \frac{dy}{dx}, p$

$$(i)\, y^2p^2 - 3xyp + 2x^2 = 0$$

$$(ii)\, p^2 - (xy + 2x)p + 2x^2y = 0$$

$$(iii)\, p^2 - p - 6 = 0$$

$$(iv)\, p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$$

$$(v)\, p^2 - 2\cos x - 1 = 0$$

$$(vi)\, x + yp^2 = p(1 + xy)$$

2- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في x:

$(i)\, x = 4p + 4p^3$

$(ii)\, p^2 - 2xp + 1 = 0$

$(iii)\, 2y + p^2 + 2p = 2x(p+1)$

$(iv)\, p = \tan(x - \frac{p}{1+p^2})$

$(v)\, p^3 - p(y+3) + x = 0$

3- أوجد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في y :

$(i)\ \mathrm{y = xp^2 + p}$

$(ii)\ \mathrm{y = x + p^3}$

$(iii)\ \mathrm{p^2 + p = e}$

$(iv)\ \mathrm{y = p \sin p + \cos p}$

$(v)\ \mathrm{y = p \tan p + \log \cos p}$

$\mathrm{(vi)\ e}^{p-y} = \mathrm{p^2 - 1}$

4- أوجد الحل العام والحل المفرد لمعادلة كليروت التفاضلية لكل من المعادلات الآتية :

$(i)\ \mathrm{y = xp + p^2}$

$(ii)\ \mathrm{y = xp + p^3}$

$(iii)\, y = xp + \cos p$

$(iv)\ \mathrm{y} = x\ \mathrm{p} + \sqrt{a^2 p^2 + b^2}$

$(v)\ \mathrm{p = \log(xp - y)}$

$\mathrm{(vi)\ \cosh xp \cosh y = \sinh px \sinh y + p}$

$\mathrm{(vii)\ y = xp} + \frac{p}{p+1}$

$(viii)\, y = xp + \sqrt{p^2 - 1}$

$(ix)\, y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$

$(x)\, y = xp + \sqrt{p^2+1} - p\log(p + \sqrt{p^2+1})$

5- أوجد المميز c للمعادلات التفاضلية الأتية وبين المنحنيات التي يمثلها الحل الشاذ (أن وجد)

$$(i)(x^2-1)p^2-2xyp-x^2=0$$
$$(ii)2y^2p^2+2xyp+x^2+y^2-1=0$$
$$(iii)p^2(x^2-1)-(y^2-1)=0$$

6- أوجد المميز p للمعادلات التفاضلية الأتية وبين المنحنيات التي يمثلها مبينا الحل الشاذ (أن وجد) ثم أوجد الحل العام

$$(i)\ yp^2-2xp+y=0$$
$$(ii)3xp^2-6yp+x+2y=0$$
$$(iii)4xp^2-(3x-1)^2=0$$
$$(iv)\ p^2+2px^2-4x^2y=0$$

7- حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من y

$$(i)2xy'y''=y'^2-1$$
$$(ii)x^2y''=y'^2$$
$$(iii)y''^2+y'=xy''$$
$$(iv)y''\operatorname{cosec}x=1$$
$$(v)x(a-x)y''+2(1-x)y'=1$$
$$(vi)y^{(n)}-2y^{(n-1)}=e^x$$

8- حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من x

$$(i)yy''=y'^2$$
$$(ii)y'^2-(3y-2y')y''=0$$
$$(iii)\ yy''+1=y'^2$$
$$(iv)y''+y'^2=1$$
$$(v)2yy''=y'^2$$
$$(vi)\ yy''=y'^2-y'^3$$
$$(vii)\ yy''+y'^2+2ay^2=0$$

9- حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الأتية :

$$(i)xy''-xy'+y=0$$
$$(ii)x^2y''-xy'+5y=0$$
$$(iii)2x^2yy''+y^2=x^2y'^2$$
$$(iv)(2yy''-y'^2)x^2+y^2=0$$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا

درسنا في الباب الأول كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي وفي هذا الباب سوف ندرس كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات الأعلى و المعادلات التي سوف ندرسها هي

(i) معادلات قابلة للحل في p (ii) معادلات قابلة للحل في x

(iii) معادلات قابلة للحل في y

1- المعادلات القابلة للحل في p

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا هي :-

$$(1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + L_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + L_{n-1}\frac{dy}{dx} + L_n = 0$$

حيث أن $L_0, L_1, \ldots\ldots, L_n$ دوال في x, y

نفرض أن $p = \dfrac{dy}{dx}$ بالتالى المعادلة (1) تصبح علي الصورة .

$$L_0P^n + L_1P^{n-1} + L_2P^{n-2} + \ldots + L_{n-1}P + L_n = 0$$

الطرف الأيسر لهذه المعادلة عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n

فاذا أمكن حلها بالنسبة إلي p علي الصورة .

$$(p - m_1)(p - m_2)\ldots\ldots(p - m_n) = 0$$

حيث $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ دوال في x, y

وهذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي .

$$p = m_1, \mathrm{p} = m_2, \ldots\ldots, \mathrm{p} = m_n$$

$i.e.$

$$\frac{dy}{dx} = m_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \frac{dy}{dx} = m_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \ldots\ldots, \frac{dy}{dx} = m_n(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

حلول هذه المعادلات يمكن فرضها علي الصورة

$$f(x,y,c_1)=0 \quad , \quad f_2(x,y,c_2)=0,....,f_n(x,y,c_n)=0$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$(3) f_1(x,y,c_1)f_2(x,y,c_2)....f_n(x,y,c_n)=0$$

المعادلة (3) تمثل مجموعات من المنحنيات

$$f_1(x,y,c_1)=0, f_2(x,y,c_2)=0,....,f_n(x,y,c_n)=0$$

إذا استبدلنا $c_1,c_2,...,c_n$ بالثابت الاختياري c ورسمنا المنحنيات

$$f_1(x,y,c)=0, f_2(x,y,c)=0,....,f_n(x,y,c)=0$$

وجعلنا c تتغير من $-\infty$ إلي $+\infty$ فإننا نحصل علي نفس المنحنيات .

الحل العام للمعادلة (1) هو :-

$$f_1(x,y,c)f_2(x,y,c)....f_n(x,y,c)=0$$

وهو يحتوي علي ثابت اختياري واحد لآن المعادلة من الرتبة الأولي .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$(\frac{dy}{dx})^2-2\frac{dy}{dx}\cosh x+1=0$$

الحل :- بوضع $\frac{dy}{dx}=p$

$$p^2-p(e^x+\bar{e}^x)+e^x\bar{e}^x=0$$

$$(p-e^x)(p-\bar{e}^x)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=e^x , \frac{dy}{dx}=\bar{e}^x$$

$$y=e^x+c \quad , y=\bar{e}^x+c$$

الأصل التام للمعادلة هو

$$(y-e^x-c)(y+\bar{e}^x-c)=0$$

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$p^2-(x+y)p+xy=0 \qquad \left(p=\frac{dy}{dx}\right) \text{ حيث}$$

الحل :- بالتحليل

$$(p-x)(p-y)=0$$

$$p=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x$$

$$y=\frac{1}{2}x^2+c_1$$

$$p=y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y$$

$$y=c_2e^x$$

$\therefore$ الحل العام هو :

$$(y-\frac{1}{2}x^2-c)(y-ce^x)=0$$

2-2 المعادلات القابلة للحل في x

المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x تأخذ الصورة

$$(1)x=f(y,p) \qquad \left(p=\frac{dy}{dx}\right) \text{ حيث}$$

وبمفاضلة المعادلة (1) بالنسبة إلي y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية في المتغيرين $y\,,p$ فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2)y=\psi(p,c)$$

فإنه بالتعويض عن y في المعادلة (1) نحصل علي

$$x=f(p,c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3),(2) وإذا لم يمكن حذف p من المعادلتين فإن المعادلتين(3),(2) تسمي بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1):- حل المعادلة التفاضلية

$$x - y = 2ap - ap^2$$

الحل :

$$(1) x = y + 2ap - ap^2$$

بالتفاضل بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{1}{p} = 1 + (2a - 2ap)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p}(1-p) = 2a(1-p)\frac{dp}{dy}$$

$$dy = 2ap\,dp$$

$$(2) y = ap^2 + c$$

وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3) x = 2ap + c$$

فلاخط أنه يمكن حذف p من المعادلتين (2) ، (3) وذلك كما يلي

$$p^2 = \frac{y-c}{a} \quad , \quad p = \frac{x-c}{2a}$$

$$\frac{(x-a)}{4a^2} = \frac{y-c}{a}$$

$$(x-c)^2 = 4a(y-c)$$

وهي مجموعة من القطاعات المكافئة

مثال (2):- حل المعادلة التفاضلية

حيث $p = \frac{dy}{dx}$

$$x = yp - p^2$$

الحل :- بالتفاضل بالنسبة إلي y

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy}(y - 2p) = \frac{1}{p} - p$$

$$(y - 2p) = (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp}$$

$$(\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} - y = -2p$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}y = \frac{2p^2}{1-p^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي . العامل المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{p}{p^2-1}dp} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2-1}dp}$$

$$= e^{\ln\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$

$$\frac{d}{dp}(y\sqrt{p^2-1}) = \frac{-2p}{1-p^2}\sqrt{p^2-1} = \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp + c$$

ولإيجاد هذا التكامل نستخدم التعويض

$$p = \cosh\theta \qquad dp = \sinh\theta d\theta$$

$$\int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp = \int \frac{2\cosh\theta}{\sinh\theta} \ . \ \sinh\theta d\theta = \int 2\cosh^2\theta d\theta$$

$$= \int (1+\cosh 2\theta)d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$$

$$= \theta + \sinh\theta \ \cosh\theta$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \theta + \sinh\theta\cosh\theta + c$$

$$= \cosh^{-1} p + p\sqrt{p^2-1} + c$$

$$(1) y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \ (\cosh^{-1} p + c)$$

بالتعويض عن y في المعادلة الأصلية نحصل على التالى

$$x = yp - p^2$$

$$= p^2 + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) - p^2$$

$$(2) = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c)$$

المعادلتان (2)،(1) تمثلان الحل البارا متري للمعادلة التفاضلية .

2 -3 المعادلات التفاضلية القابلة للحل في y

المعادلات القابلة للحل في y يمكن كتابتها علي الصورة .

$$(1)y' = f\ (x\ ,p)$$

بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل على

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \ \frac{\partial p}{\partial x}$$

و هذه معادلة تفاضلية في $x\ ,p$ فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2)x = \phi(p,c)$$

فأنه بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3)y = \psi(p,c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3)،(2) و إذا تغدر الحذف تسمي المعادلتين (3)،(2) بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$(1)y = p + p^3$$

الحل :-

بالتفاضل بالنسبة إلي x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} + 3p^2 \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}(1+3p^2)$$

$$\int dx = \int \frac{1+3p^2}{p} dp + c$$

$$(2)x = \ln p + \frac{3}{2}p^2 + c$$

المعادلتين (2)،(1) تمثل المعادلات البارا مترية للحل .

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$(1)y = xp^2 + p$$

الحل : بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$p(1-p) = (2xp+1)\frac{dp}{dx}$$

الحد الأوسط حلها عند الضرب بالتعويض عنها

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{1}{p(1-p)}$$

و هذه معادلة خطية .

العامل المكامل لها

$$\mu = e^{\int -\frac{2dp}{1-p}} = e^{2\ln(1-p)} = (1-p)^2$$

$$\frac{d}{dp}[x(1-p)^2] = \frac{1-p}{p}$$

وبالتكامل نحصل علي

$$x(1-p)^2 = \int \frac{1-p}{p} dp + c$$

$$x(1-p)^2 = \ln p - p + c$$

$$(2) x = \frac{\ln p - p + c}{(1-p)^2} + p$$

بالتعويض من (2) عن قيم x في (1) نحصل علي

$$y = \frac{\mathrm{p}^2 \ln p - p^3 + p^2 c}{(1-p)^2} + p$$

$$(3) y = \frac{\mathrm{p}^2 \ln p - p^3 + p^2 c + p(1-p)^2}{(1-p)^2}$$

و المعادلتين (2) ، (3) تمثلان الحل العام في الصورة البارا مترية .

4-2 معادلة كليروت

معادلة كليروت تكون على الصورة

$$(1) \quad y = px + f(p)$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ بالتفاضل بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

اما $\frac{dp}{dx}=0$ ومنها $p=c$ وبالتعويض فى (1) عن p نحصل على

$$(2)y=cx+f(c)$$

وهى مجموعة معادلة مجموعة من المستويات

واما $x+f'(p)=0$ ومنها

$$(3)x=-f'(p)$$

وبالتعويض في (1) عن x نحصل على

$$(4)y=-f'(p)\mathrm{p}+\mathrm{f}(\mathrm{p})$$

بحذف p من (4) ، (3) نحصل على علاقة بين (x,y) على الصورة

$$(5)\ \phi(x,y)=0$$

المعادلة (5) تمثل حل أخر للمعادلة (1) وتكون المعادلتين (4) ، (3) هما المعادلتان البارامتريتان لهذا الحل .

العلاقة (5) لا تحتوى على ثابت اختياري فهى حل خاص وعلى العموم لا يستنتج هذا الحل من الحل العام بوضع قيمة خاصة للثابتان .

الحل الخاص (5) هو "حل شاذ " أو حل "مفرد" والمعادلة (2) تمثل الحل العام وهى معادلة مجموعة من المستقيمات ذات البارامتر c.

لإيجاد معادلة "الغلاف" لهذه المجموعة نفاضل (2) جزئيا بالنسبة إلى c

$$y=cx+f(c)$$

$$o=x+f'(c)$$

$$\mathrm{x}=-f'(c)$$

أي أن طريقة إيجاد الحل المفرد هي نفس طريقة إيجاد الغلاف .

مثال(1) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية الأتية :

$$(1)\; y = xp + ap(1-p)$$

الحل : -

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (a-2ap)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + a - 2ap) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام للمعادلة هو

$$y = cx + ac - ac^2$$

أو

$$(2) x + a - 2ap = 0$$

بحذف (p) من المعادلتين (1) ، (2) نجد أن

$$y = \frac{(x+a)^2}{4a}$$

أي أن

$$(x-a)^2 = 4ay$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف مجموعة المستقيمات الممثلة بالحل العام .

مثال (2) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

الحل : بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{dp}{dx}$$

بذلك يكون

$$[x + \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}]\frac{dp}{dx} = 0$$

منها يكون اما $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$

بالتالى الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$(2)\ \mathrm{y} = \mathrm{xc} + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

وهى تمثل مجموعة من المستقيمات.

أو

$$(3) x = -\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}$$

بالتعويض من (3) في (1) عن قيمة x نجد أن

$$(4) y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}$$

المعادلتين (3) ، (4) هما المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد وبحذف p بين (3) ، (4) نحصل علي المعادلة الكارتيزية للحل المفرد من (3) نجد أن

$$p^2 = (-\frac{a}{x})^{2/3}$$

$$y = -xp^3$$

$$y^{2/3} = (-x)^{2/3} p^2 = (-x)^{2/3}[(-\frac{a}{x})^{2/3} - 1]$$

$$y^{2/3} = a^{2/3} - (-x)^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

وهو الحل المفرد للمعادلة التفاضلية وهو غلاف مجموعة المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

<u>مثال (3) :-</u> أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$$

<u>الحل :</u> نكتب المعادلة على الصورة

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y = p$$

$$\sin(\mathrm{px} - \mathrm{y}) = \mathrm{p}$$

$$\mathrm{px} - \mathrm{y} = \sin^{-1} p$$

$$(1) y = xp - \sin^{-1} p$$

وهذه صورة معادلة كليروت .

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}] = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام هو

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$p = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$y = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2-1} - sx^{-1}x$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف المستقيمات .

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

معادلة أويلر الخطية هي معادلة من الشكل

$$(a_0x^nD^n + a_1x^{n-1}D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}xD + a_n)y = \varphi$$

حيث $a_0, a_1, \ldots\ldots, an$ ثوابت حقيقية φ دالة في المتغير x ، $D \equiv \frac{d}{dx}$
أما معادلة لجندر الخطية فهي من الشكل

$$\{a_0(\mathrm{a}x+b)^nD^n + a_1(ax+b)^{n-1}D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}(ax+b)D + a_n\}y = \varphi$$

يمكـن اختـزال هـاتين المعـادلتين إلـى معـادلتين خطيتـين بمعاملات ثابتة عن طريق تحويلات مناسبة للمتغير المستقل

لحل معادلة اويلر الخطية نستخدم التعويض التالى

$$x = e^t,\ \frac{dx}{dt} = e^t,\ \frac{dt}{dx} = e^{-t} = \frac{1}{x}$$

فإذا أستخدمنا المؤثر D_1 ليدل على $\frac{d}{dt}$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xDy = D_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \Rightarrow x^2D^2y = (D_1^2 - D_1)y = D_1(D_1 - 1)y$$

وبالمثل يمكن أثبات أن

$$x^3D^3y = D_1(D_1-1)(D_1-2)y \quad ,$$

......

$$x^rD^ry = D_1(D_1-1)(D_1-2)\ldots\ldots\ldots(D_1-r+1)y$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نرى أنها تتحول إلى معادلة خطية ذوات معاملات ثابتة فيها المتغير المستقل لهو

t

<u>مثال(١) :</u>

حل المعادلة

$$(x^3D^3+3x^2D^2+xD+8)y = 32x^2$$

<u>الحل :</u>

نضع

$$x = e^t \quad , \quad t = \ln x \quad , \quad D_1 \equiv \frac{d}{dt}$$

$$x^3D^3 = D_1(D_1-1)(D_1-2) \; , \; x^2D^2 = D_1(D_1-1) \quad , \quad xD = D_1$$

$$\{D_1(D_1-1)(D_1-2)+3D_1(D_1-1)+D_1+8\}y = 32e^{2t}$$

$$(D_1^3+8)\,y = 32e^{2t}$$

المعادلة المساعدة هي

$$m^3+8=0, \quad (m+2)(m^2-2m+4)=0$$

$$m_1 = -2 \quad , \; m_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

$$m_1 = -2 \quad , \; m_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}\; i$$

الحل المكمل هو

$$y_c = c_1^{-2t} + e^t (c_2 \cos\sqrt{3}\ t + c_3 \sin\sqrt{3}\ t)$$

الحل الخاص :

$$y_p = \frac{1}{D^3+8}\{32e^{2t}\} = \frac{32}{8+8}e^{2t} = 2e^{2t}$$

اذا الحل العام لمعادلة اويلر هو

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-2t} + e^t (c_2 \cos\sqrt{3}t + c_3 \sin\sqrt{3}t) + 2e^{2t}$$

$$y = \frac{c_1}{x^2} + x\,\{c_2 \cos(\sqrt{3}\ln x) + c_3 \sin(\sqrt{3}\ln x)\} + 2\mathrm{x}^2$$

<u>مثال (٢) :</u>
حل المعادلة

$$(\mathrm{x}^2\mathrm{D}^2 - \mathrm{xD} + 4)\,\mathrm{y} = \cos\ln x + x\ \sin\ln x$$

<u>الحل :</u>
نفرض أن

$$x = e^t,\ D_1 \equiv \frac{d}{dt},\ \ xD = D_1\ ,\ \ x^2D^2 = D_1(D_1 - 1)$$

المعادلة تصبح

$$\{D_1(D_1 - 1) - \mathrm{D}_1 + 4\}y = \cos t + e^t \sin t$$
$$(D_1^2 - 2D_1 + 4)y = \cos t + e^t \sin t$$

المعادلة المساعدة هي

$$m^2 - 2m + 4 = 0$$
$$m_{1,2} = \frac{3 + \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\ i$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$1 \pm \sqrt{3}\ i$$

الحل المكمل هو

$$y_c = e^t (c_1 \cos\sqrt{3}\ t + c_2 \sin\sqrt{3}\ t)$$

التكامل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{D_1^2-2D_1+4}\{\cos t\}+\frac{1}{D_1^2-2D_1+4}\{e^t\sin t\}$$

$$=\frac{1}{3-2D_1}\{\cos t\}+e^t\frac{1}{D_1^2+3}\{\sin t\}=\frac{3+2D_1}{9-4D_1^2}\{\cos t\}+e^t\frac{1}{-1+3}\sin t$$

$$=\frac{1}{13}(3\cos t-2\sin \mathrm{t})\,\mathrm{t}\,\frac{1}{2}c^t\sin t$$

الحل العام هو

$$y=y_c+y_p$$

$$=e^t(c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t)+\frac{1}{13}(3\cos t-2\sin t)+\frac{1}{2}e^t\sin t$$

$$y=x\{c_1\cos(\sqrt{3}\ \ln x)+c_2\sin(\sqrt{3}\ \ln x)\}+\frac{1}{13}\{3\cos(\ln x)-2\sin(\ln x)\}$$

$$+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)$$

نفرض ان $ax+b=e^t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt}\Rightarrow(ax+b)Dy=aD_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$(ax+b)^2D^2y=a^2(D_1^2-D_1)\,\mathrm{y}=\mathrm{a}^2\mathrm{D}_1(\mathrm{D}_1-1)\,\mathrm{y}$$

......

$$(\mathrm{ax}+\mathrm{b})^rD^ry=a^rD_1(D_1-1)(D_1-2).....(D_1-r+1)y$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نرى انها تتحول إلى معادلة خطية ذات معاملات ثابتة.

مثال(٣)

حل المعادلة

$$\{(3x+2)^2D^2+3(3x+2)D-36\}y=3x^2+4x+1$$

الحل :

نفرض أن

$$D_1\equiv\frac{d}{dt}\quad ,3x+2=e^t$$

$$(3x+2)^2D^2=9D_1(D_1-1),(3\mathrm{x}+2)\,\mathrm{D}=3\,\mathrm{D}_1$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن

$$\{9D_1(D_1-1)+9D_1-36\}y=\frac{1}{3}(9x^2+12+3)=\frac{1}{3}(e^{2t}-1)$$

$$(\mathrm{D}_1^2-4)\,\mathrm{y}=\frac{1}{27}(e^{2t}-1)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة :

المعادلة المساعدة هي

$$m^2-4=0\Rightarrow(m-2)(m+2)=0\Rightarrow m_1=2,m_2=-2$$

الحل المكمل هو

$$y_c=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$$

الحل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{D_1^2-4}\{e^{2t}\}-\frac{1}{D_1^2-4}\{e^{(0)t}\}\right]$$

$$F(D)=D_1^2-4\ ,\ F(2)=0\ ,\ F'(D)=2D_1\ ,\ F'(2)=4$$

$$y_p=\frac{1}{27}(\frac{t}{4}e^{2t}+\frac{1}{4})=\frac{1}{108}(te^{2t}+1)$$

الحل العام هو

$$y=y_c+y_p=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+\frac{1}{108}(te^{2t}+1)$$

$$y=c_1(3x+2)^2+c_2(3x+2)^{-2}+\frac{1}{108}[(3x+2)^2\ln(3x+2)+1]$$

هذه الطريقة تمكننا من أيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$L_0y^{(n)}+L_1y^{(n-1)}+...+L_{n-1}y^1+L_ny=\varphi.............(1)$$

حيث $L_0,L_1,.....,L_n,\varphi$ دوال للمتغير x

إذا علم حلول المعادلة المختزلة

$$L_0y^{(n)}+L_1y^{(n-1)}+...+L_{n-1}y'+L_ny=0$$

نفرض أن الحل العام للمعادلة المختزلة هو

$$y=c_1y_1+c_2y_2+......+c_ny_n$$

حيث $c_1,c_2,......,c_n$ ثوابت اختيارية $y_1,y_2,......,y_n$ حلول مستقلة خطية للمعادلة المختزلة .

نفرض أن الحل العام للمعادلة الأصلية (١) هو

$$y=z_1y_1+z_2y_2+......+z_ny_n$$

حيث $z_1,z_2,......,z_n$ دوال للمتغير x مطلوب أيجادها .

$$y'=z_1y_1'+z_2y_2'+......+z_ny_n'+(z_1'y_1+z_2'y_2+......+z_n'y_n)$$

نضع

$$z_1'y_1+z_2'y_2+......+z_n'y_n=0.................(1)$$

$$y''=z_1y_1''+z_2y_2''+......+z_ny_n''+(z_1'y_1'+z_2'y_2'+......+z_n'y_n')$$

نضع

$$z_1'y_1'+z_2'y_2'+......+z_n'y_n'=0................(2)$$

$$y^{(3)}=z_1y_1^{(3)}+z_2y_2^{(3)}+......+z_ny_n^{(3)}+(z_1'y_1''+z_2'y_2''+......+z_n'y_n'')$$

نضع

$$z_1'y_1+z_2'y_2+......+z_n'y_n=0.................(1)$$

$$y''=z_1y_1''+z_2y_2''+......+z_ny_n''+(z_1'y_1'+z_2'y_2'+......+z_n'y_n')$$

نضع

$$z_1'y_1'+z_2'y_2'+......+z_n'y_n'=0................(2)$$

$$y^{(3)}=z_1y_1^{(3)}+z_2y_2^{(3)}+......+z_ny_n^{(3)}+(z_1'y_1''+z_2'y_2''+......+z_n'y_n'')$$

نضع

$$z_1'y_1''+z_2'y_2''+......+z_n'y_n''=0.................(3)$$

اذا

$$y^{(n-1)}=z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+......+z_ny_n^{(n-1)}$$
$$+(z_1'y_1^{(n-2)}+z_2'y_2^{(n-2)}+......+z_n'y_n^{(n-2)})$$

نضع

$$z_1'y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+......+z_n'y_n^{(n-2)}=0....................(n-1)$$

$$y^{(n)}=z_1y_1^{(n)}+z_2y_2^{(n)}+......+z_ny_n^{(n)}+z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+......+z_n'y_n^{(n-1)}$$

بالتعويض عن قيم $y^{(n)},\mathrm{y}^{(n-1)},......,y'',y',y$ في المعادلة الأصلية

$$L_0(z_1y_1^{(n)}+z_2y_2^{(n)}+...+z_ny_n^{(n)})+L_0(z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+...+z_n'y_n^{(n-1)})$$
$$+L_1(z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+...+z_ny_n^{(n-1)})+L_2(z_1y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+...+z_ny_n^{(n-2)})$$
$$+....$$
$$+L_{n-1}(z_1y_1'+z_2y_2'+...+z_ny_n')+L_n(z_1y_1+z_2y_2+...+z_ny_n)=\varphi$$
$$L_0(z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+...+z_n'y_n^{(n-1)})+\mathrm{z}_1F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_1$$
$$+\mathrm{z}_2F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_2+......+\mathrm{z}_nF(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_n=\varphi$$

ولكن $y_1, y_2, ..., y_n$ حلول للمعادلة المختزلة

$$F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_1 = 0 \;,\quad F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_2 = 0 \;,....., F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_n = 0$$

$$z_1' y_1^{(n-1)} + z_2' y_2^{(n-1)} + ... + z_n' y_n^{(n-1)} = \frac{1}{L_0}\varphi(x) ....(n)$$

للمعادلات $(1), (2), ..., (n-1), (n)$ تكون مجموعه من المعادلات الجبرية الآنية الخطية غير البسيطة التي تربط n من الدوال $z_1', z_2', ..., z_n'$ بحل هذه المجموعة من المعادلات والتكامل نحصل على الدوال $z_1, z_2, ..., z_n$

<u>مثال (١) :</u>

حل المعادلة التفاضلية

$$y'' + y = \tan x \,.............(1)$$

<u>الحل :</u>

الحلان المستقلان خطياً للمعادلة المختزلة المناظرة هما

$$y_1 = \cos x \;\;,\;\; y_2 = \sin x$$

ويكون الحل العام للمعادلة المختزلة هو

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان

نكتب الحل العام للمعادلة (١) في الصورة

$$y = z_1(x) y_1 + z_2(x) y_2 = z_1(x)\cos x + z_2(x)\sin x \,.......(2)$$

وبما أن

$$y' = z_1 \sin x + z_2 \cos x + (z_1' \cos x + z_2' \sin x)$$

إذن نضع الشرط

$$z_1' \cos x + z_2' \sin x = 0 ....(3)$$

وعلى ذلك يكون

$$y' = -z_1 \sin x + z_2 \cos x$$

ومنها ينتج أن

$$y'' = -z_1 \cos x + z_2 \sin x - z_1^1 \sin x + z_2' \cos x$$

وبالتعويض عن y, y'' في المعادلة الأصلية (١) نجد أن

$$-z_1' \sin x + z_2' \cos x = \tan x ....(4)$$

وبحل المعادلتين (٣) (٤) ينتج أن

$$z_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$z_2' = \sin x$$

ومنها يكون

$$z_1 = \int (\cos x - \sec x) dx = \sin x - \ln |\sec x + \tan x| + b_1$$

$$z_2 = -\cos x + b_2$$

حيث b_1, b_2 ثابتان اختياريان .

وإذن من (٢) ينتج أن الحل العام للمعادلة (١) هو

$$y = (\sin x - \ln |\sec x + \tan x| + b_1) \cos x + (-\cos x + b_2) \sin x$$

$$= b_1 \cos x + b_2 \sin x - \cos x \ \ln |\sec x + \tan x|$$

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية

$$(L_0D^n + L_1D^{n-1} + ... + L_{n-1}D + L_n)y = \varphi............(1)$$

حيث $L_0, L_1, ..., L_n, \varphi$ دوال للمتغير x

المعادلة السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = \varphi$$

حيث $F(D)$ كثيرة حدود في D ذات معاملات متغيرة .

نفرض أن $y = y_1$ حل خاص للمعادلة المختزلة $F(D)y = 0$

لإيجاد الحل العام للمعادلة (١)

نفرض أنه $y = zy_1$ حيث z دالة للمتغير x

باستخدام صيغة ليبنز

$$y^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} {}^{r}c_k z^{(k)} y_1^{(r-k)}$$

وبالتعويض عن $y^{(r)}$ حيث $r = 0,1,2,.....,n$ في المعادلة (١)

ولكن y_1 حل خاص للمعادلة المختزلة

$$L_0 y_1^{(n)} + L_1 y_1^{(n-1)} + ... + L_n y_1 = 0$$

المعادلة (1) تصبح

$$L_0 \sum_{k=1}^{n} {}^{n}c_k z^{(k)} y_1^{(n-k)} + L_1 \sum_{k=1}^{n-1} {}^{n-1}c_k z^{(k)} y_1^{(n-1-k)} + ... = \varphi............(3)$$

نفرض أنه $z' = u$

المعادلة (٣) تكون

$$L_0 \sum_{k=1}^{n} {}^{n}c_k u^{(k-1)} y_1^{(n-k)} + L_1 \sum_{k=1}^{n-1} {}^{n-1}c_k u^{(k-1)} y_1^{(n-k-1)} + ... = \varphi$$

ويمكن وضع المعادلة الاخيرة على الصورة:

$$(\bar{L}_0 D^{n-1} + \bar{L}_1 D^{n-2} + ... + \bar{L}_n)u = \bar{\varphi}$$

حيث $\bar{L}_0, \bar{L}_1, ..., \bar{L}_n, \bar{\varphi}$ دوال للمتغير x

وهذه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة من الرتبة $(n-1)$ في المتغير u حيث $u = z'$

أي أن التعويض $y = zy_1$ أوجد معادلة تفاضلية من رتبة تقل بمقدار الواحد عن المعادلة الأصلية .

مثال (١):

حل المعادلة

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = (x-2)e^{2x}$$

الحل :

واضح أن $y = e^x$ حل للمعادلة المختزلة لأن

$$L.H.S = xe^x - 2(x+1)e^x + (x+2)e^x = e^x(x - 2x - 2 + x + 2) = 0$$
$$= R.H.S$$

نفرض أن الحل العام على الصورة

$$y = e^x z$$

حيث z دالة في المتغير x

$$y' = e^x(z' + z)$$
$$y'' = e^x(z'' + 2z' + z)$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية

$$xe^{x}(z''+2z'+z)-2(x+1)e^{x}(z'+z)+(x+2)e^{x}z=(x-2)e^{2x}$$
$$xz''+(2x-2x+2)z'+(x-2x-2+x-2)z=(x-2)e^{x}$$
$$xz''-2z'=(x-2)e^{x}$$

بوضع $z'=u$ نجد ان المعادلة السابقة تتحول الي

$$u'-\frac{2}{x}u=(1-\frac{2}{x})e^{x}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في u عاملها المكامل

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^{2}}$$

يكون حلها

$$z'=e^{x}+c_1x^{2}$$
$$z=\int e^{x}dx+c_1\int x^{2}dx+c_2$$
$$=e^{x}+\frac{c_1x^{3}}{3}+c_2$$

ويكون الحل العام هو

$$y=e^{x}z=e^{x}(e^{x}+c_1^{1}x^{3}+c_2)$$
$$=e^{2x}+e^{x}(c_1^{1}x^{3}+c_2)$$