South valley University

Faculty of science-Qena

Mathematics Department

الكلية: التربية بالغردقة

المقرر: تطبيقية (4)(ديناميكا الجسم الجاسئ+ ديناميكا الجسيم)

الفرقة: الثانية رياضيات - عام

الفصل الدراسي: الثاني

المحاضر: أ. د. جمال عبدالله أحمد حشودي

جامعة جنوب الوادي

كلية العلوم بقنا

اولاً: محاضرات في ديناميكا الجسم الجاسئ

الفـــهـــرس

الفصل الأول

كينامتيكا الجسم المتماسك

Kinematics of Rigid Body

كينماتِيكا الجسم الجاسئ

درست فيما سبق حركة الجسم المفرد دون اعتبارٍ لأبعاده بالنسبة للمسافة التي يقطعها. وقد دعِي ذلك الجسم جسيماً لأن حركته لا تتأثر بأبعاده والتي يمكن إهمالها. وعلى النقيض من ذلك نسمي كلّ جسمٍ تكون أبعاده ذات الدرجة نفسها والمسار الذي يرسمه جسماً جاسئاً. ويعرف الجسم الجاسئ في الميكانيكا بأنه الجسم الذي لا يتغير شكله الهندسي، وتظل المسافة بين عناصره (نقاطه) ثابتة. وإذا افترضنا أن الجسم الجاسئ مكون من عددٍ لا نهائي من الجسيمات، ويتحرك كل جسيم فيه بمسارٍ قد يكون مشابِهاً لمسارات الجسيمات الأخرى أو مختلفاً عنها، فإن لكل جسيم من هذه الجسيمات، وفي كل لحظة زمنية الخصائص الكينماتيكية المميزة. وقد تكون بعض هذه الخصائص مشتركة لكل جسيمات الجسم الجاسئ.

يتحدد تَموضع الجسم الجاسئ في الفراغ بالموضع المتوسط الذي تأخذه كل جسيماته المكونة له بالنسبة لإطار الإسناد المحدد. ولأن الجسم الجاسئ مكون من عددٍ هائلٍ من الجسيمات ، يأخذ تحديد الموضع المتوسط لجسيماته وبالتالي المعادلات التفاضلية لحركاتها أبعاداً كبيرة. ويستعاض عن هذه الطريقة بإيجاد موضع الجسيم المعين بالنسبة لجسيم آخر ذي تَموضعٍ معروف ، إذ تبقى المسافة بين الجسيمين ثابتة.

تقسم حركة الجسم الجاسئ الأساسية إلى الحركة الانتقالية والحركة الدورانية حول محور ثابت مضافاً إليهما الحركة المستوية كمجموع الحركتين السابقتين ، وهناك الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة، والحركة العامة وأخيراً الحركة المركبة. وسندرس هذه الحركات تباعاً بشيء من التفصيل

الهدف من الموضوع

يختص هذا الباب بدراسة كينامتيكا الجسم المتماسك أي الحصول علي السرعات والعجلات للنقاط (الجسيمات) المختلفة التي تكون الجسم المتماسك

الجسم المتماسك (الجسم الجاسئ أو الجسم الجامد Rigid Body):

هو الجسم الذي يتكون من عدد كبير جداً من الجسيمات الصغيرة والذى لا يحدث له تشوه أثناء حركته .

أو هو الجسم الذي يتكون من عدد كبير جداً من الجسيمات الصغيرة والذى تظل فيه المسافات بين هذه الجسيمات أثناء حركته ثابتة لا تتغير .

أنواع الحركة للجسم المتماسك

أنواع الحركة للجسم المتماسك ثلاث وهي

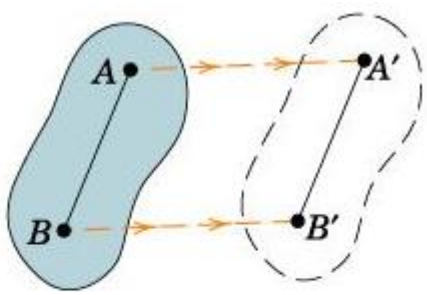
(1)- حركة انتقالية (2)- حركة دورانية (3)- حركة عامة

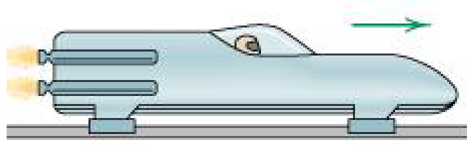
أولاً أنواع الحركة الانتقالية

وتنقسم الحركة الانتقالية الي: (1)- حركة انتقالية متوازية خطية (2)- حركة انتقالية متوازية منحنية

(1)- حركة انتقالية متوازية خطية (انتقال متوازي خطي)

أو (الحركة الانتقالية المستقيمة Rectilinear Translation)
ويحث هذا النوع من الحركة عندما ينتقل الجسم بكامل أجزائه من مكان إلى آخر بحيث ترسم نقاط الجسم في مسارات خطية مستقيمة متوازية ومتطابقة مع بعضها وتقطع مسافات متساوية اثناء حدوثها, وقد تكون هذه المسارات متوازية مع بعضها بشكل أفقي كما في حركة التزحلق على الجليد



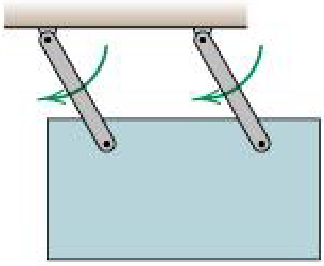


Rocket test sled

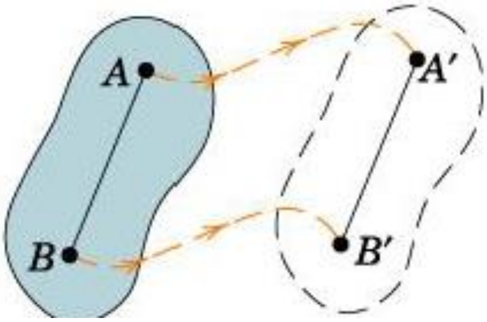
وفيه جميع نقاط الجسم ترسم أثناء الحركة مسارات عبارة عن خطوط مستقيمة

(2)- حركة انتقالية متوازية منحنية (انتقال متوازي منحني CurvilinearTranslation)

وفيه جميع نقاط الجسم ترسم أثناء الحركة مسارات عبارة عن منحنيات كما في الهبوط بالمظلات



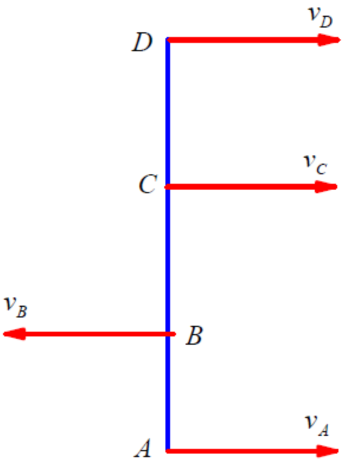
Parallel-link swinging plate



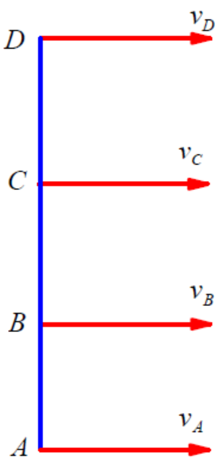
حساب السرعات والعجلات في الحركة الانتقالية

في الحركة الانتقالية تكون سرعة وعجلة جميع نقاط الجسم في أي لحظة متساوية مقداراً واتجاهاً. ففي الشكل المقابل والذى يمثل الحركة الانتقالية فإن

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \vec{V}_D = \vec{V}\,, \qquad \vec{f}_A = \vec{f}_B = \vec{f}_C = \vec{f}_D = \vec{f}$$



حركة ليست الانتقالية



حركة الانتقالية

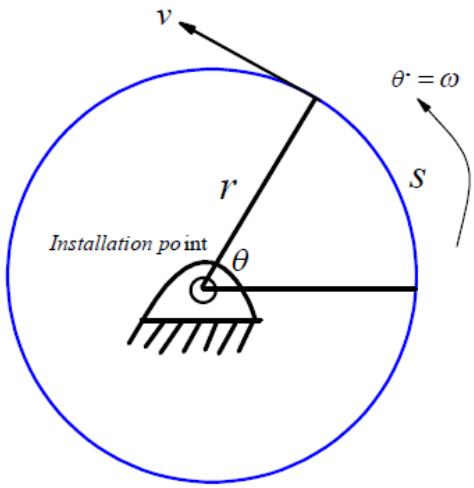
ثانياً الحركة الدورانية

الحركة الدورانية هي حركة التفاف الجسم حول مركزه. وهى تلك الحركة التي ترسم مساراتها خطوط منحنية أو دائرية أو على شكل دوائر أو على شكل قوس , وتحدث هذه الحركة في معظم الفعاليات الرياضية والتي يشترط لحدوثها محور للدوران سواء كانت حركة جزء من الجسم أو الجسم بأكمله , وتكون ومسارات حركة أجزاء الجسم عبارة عن دوائر تبعد بمقدار ثابت عن محور الدوران اثناء حركتها, وقد يكون المحور داخل الجسم كما في حركة الرفع وخفض الرجلين من الاستلقاء او خارج الجسم كما في حركة الدوران حول العقلة. في الحركة الدورانية جميع نقاط

الجسم ترسم أثناء الحركة دوائر متحدة المركز بنقطة الدوران أو محور الدوران. وقد يكون المركز (مركز الدوران) داخل أو خارج الجسم.

السرعات في الحركة الدورانية

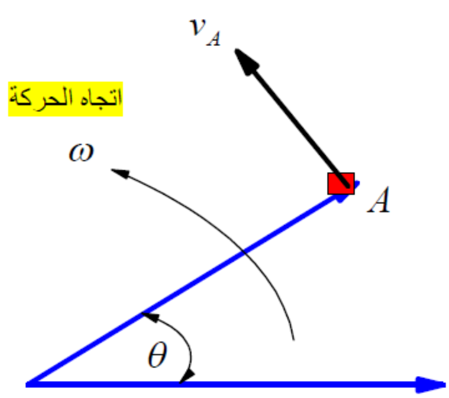
وفي دراستنا ومن الشكل المقابل وبفرض أنه لدينا جسم تحرك ازاحة دائرية مقدارها s صنعت هذه الإزاحة زاوية مقدارها θ عند مركز الحركة (دائرة نصف قطرها r) بذلك تعطي هذه الإزاحة بالصورة $s = r\theta$



وكانت الحركة بسرعة زاوية مقدارها $(\theta^{\bullet} = \omega)$. و يمكننا ايجاد السرعة الخطية المقابلة بالصورة

$$\frac{ds}{dt} = s^{\bullet} = v = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\theta^{\bullet} = r\omega$$

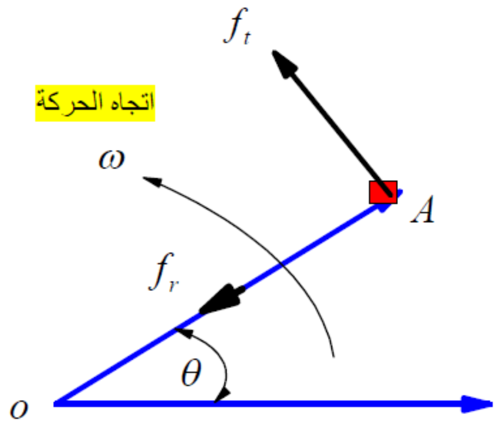
حيث $\frac{d\theta}{dt} = \theta^{\bullet} = \omega$ والتي تسمي بالسرعة الزاوية وتكون السرعة الخطية دائماً عمودية علي الخط الواصل بين نقطة التثبيت (مركز الحركة) ونقطة الدوران.



ويكون اتجاه السرعة الخطية (v) مع اتجاه السرعة الدورانية (ω) والعكس صحيح واذا لم يكون اتجاه السرعة الزاوية معروف فإنه يمكن فرضة كما ان (ω) تمثل سرعة الجسم الدورانية كله وليست السرعة الدورانية لنقطة علي الجسم

العجلات في الحركة الدورانية

في الحركة الدورانية سوف يكون للعجلة مركبتان احداهما في متجهة نحو نقطة التثبيت والأخرى في الاتجاه العمودي علي الاتجاه الأول



وتعطي مركبات العجلة بالصورة $f_r = r\omega^2$, $f_t = r\dot{\omega}$ Or $f_n = r\omega^2$

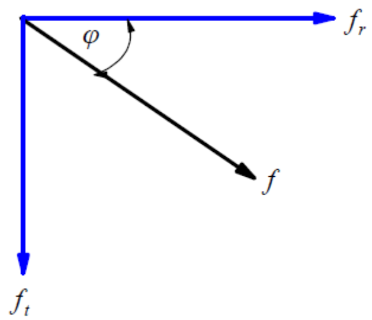
f_t هي العجلة في اتجاه المماس , $f_r = f_n$ العمودي علي المماس.

وتعطي قيمة العجلة (المحصلة) بالصورة

$$f = \sqrt{f_t^2 + f_r^2}$$

بينما يعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة

$$\tan\varphi = \frac{f_t}{f_r}$$



لاحظ أن الحركة الدورانية تكون منتظمة إذا كانت سرعة الدوران ثابتة، وإلا يقال عن تلك الحركة الدورانية أنها غير منتظمة لتغير سرعة الدوران. وعزم القوة هو الذي يسبب الحركة الدورانية.

لاحظ كذلك ان الدورة الواحدة لدوران للجسم (One complete revolution) تساوي 360^o وهي تساوي 2π زاوية نصف قطرية (radians)

حالات خاصة من الحركة الدورانية

(1)- في حالة الحركة الدورانية بسرعة دورانية ثابتة $(\omega = \text{Constant})$ عند ذلك يكون $\dfrac{d\omega}{dt} = 0$

اي ان السرعة لا تتغير مع الزمن

(2)- في حالة الحركة الدورانية بعجلة دورانية ثابتة $(\omega^{\bullet} = \text{Constant})$ عند ذلك يكون $\dfrac{d\omega}{dt} = C$

اي ان $\omega = Ct$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بسرعة زاوية منتظمة ويكون كذلك $(v = r\theta^{\bullet})$ منتظمة ايضاً حيث (r) ثابتة وعند ذلك يمكننا كتابة العلاقة بين قوانين الحركة في حالة الحركة الخطية ذات السرعة المنتظمة (العجلة الخطية الثابتة) والحركة الدورانية ذات العجلة الزاوية الثابتة علي النحو التالي

$$\upsilon = \upsilon_o + a_c\, t, \qquad \omega = \omega_o + \omega^{\bullet}\, t,$$

$$x = \upsilon_o\, t + \frac{1}{2} a_c\, t^2, \qquad \theta = \omega_o\, t + \frac{1}{2}\omega^{\bullet} t^2,$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2\, a_c\, x, \qquad \omega^2 = \omega_o^2 + 2\,\omega^{\bullet}\theta$$

ثالثاً الحركة المركبة (العامة) General Plane Motion = Translation + Rotation.

وهي تلك الحركة التي يتحرك فيها الجسم حول محرر مادي أو وهمي وفى نفس الوقت يتحرك المحور حركة انتقالية في خط مستقيم , وهي مزيج من الحركة الانتقالية والحركة الدائرية ,فقد يدور الجسم بأكمله حركة دائرية حول نفسه وفي نفس الوقت ينتقل حركة انتقالية كما في حركة القفز للغطس بالماء, وقد تحدث الحركة عندما يتحرك جزء من الجسم حركة دائرية الأمر الذي يؤدي الى حركته حركة انتقالية كما في حركة الركض وركوب الدراجات .

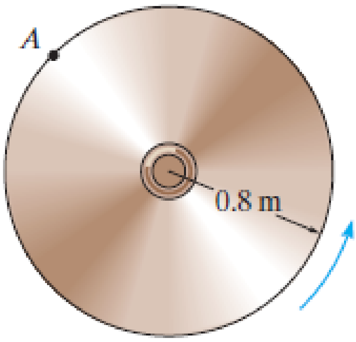
ولخطوات حل أي مسالة في هذا الجزء يمكن اتباع الخطوات التالية

(1)- اولاً تحديد عدد الأجسام ونوع حركة كل جسم
(2)- ثانياً البدء بدراسة السرعات . ونبدأ بدراسة حركة الجسم المعلوم له السرعة (خطية أو دورانية) ثم نحدد من ذلك السرعات للنقاط المشتركة
(3)- ثالثاً دراسة العجلات . ونبدأ بدراسة حركة الجسم المعلوم له العجلة (خطية أو دورانية) ثم نحدد من ذلك العجلات للنقاط المشتركة

لا حظ أن عدد لفات اي ترس تعطي من خارج قسمة الإزاحة الزاوية علي 2π أي أن

$$N=\frac{\theta}{2\pi}\,Roll$$

<u>مثال (1)</u>: السرعة الزاوية لقرص كما بالشكل المقابل تُعرف بالصورة $\omega=\left(5t^2+2\right)rad/\sec$ حيث t تقاس بالثانية. أوجد كل من السرعة والعجلة للنقطة A الواقعة علي محيط القرص وذلك عندما $t=0.5\sec$ ؟



الحـــــــــل

$$\omega=\left(5t^2+2\right)rad/\sec$$

السرعة الزاوية للقرص تعطي بالصورة

$$\omega^{\bullet}=\frac{d\omega}{dt}=\left(10t\right)rad/\sec^2$$

بينما سوف تعطي العجلة الزاوية للقرص بالصورة

وعند $t=0.5\sec$

$$\omega^{\bullet}=\left(10(0.5)\right)=5\,rad/\sec^2 \qquad ,\omega=\left(5(0.5)^2+2\right)=3.25\,rad/\sec$$

من العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية

$$v_A = (\omega)_{disk}(r)_{disk}$$

نجد أن

$$v_A = (3.25)(0.8) = 2.6\, m/\sec$$

ومن العلاقات

$$f_r = \omega^2 r, \qquad f_t = \omega^{\bullet} r$$

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{disk}(r)_{disk} = (3.25)^2(0.8m)) = (10.5625)(0.8) = 8.45\, m/\sec^2$$

$$f_{A_t} = (\omega^{\bullet})_{disk}(r\ )_{disk} = (5)(0.8m) = 4\, cm/\sec^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (A) من العلاقة

$$f_A = \sqrt{f_{A_t}^2 + f_{A_r}^2}$$

$$f_A = \sqrt{(8.45)^2 + (4)^2} = \sqrt{71.4025 + 16} =$$

$$\sqrt{87.4025} = 9.349\ m/\sec^2 = 9.35\ m/\sec^2$$

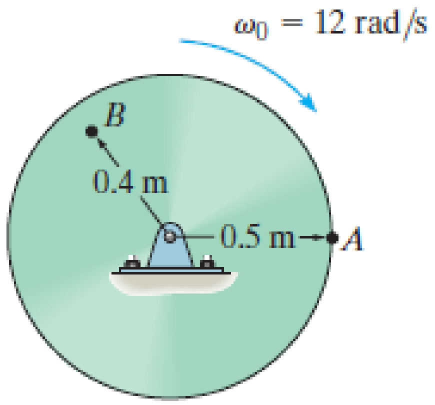
ويعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة

$$\tan\varphi = \frac{f_t}{f_r}$$

$$\tan\phi == \frac{f_{A_t}}{f_{A_r}} = \frac{4}{8.45} = 0.47337 \quad \rightarrow$$

$$\phi = \tan^{-1}(0.47337) \quad \rightarrow \quad \phi = 25^{O}.33'$$

<u>مثال (2):</u> العجلة الزاوية للقرص المعطي بالشكل المقابل تُعرف بالصورة $\omega^{\bullet} = \left(3t^2 + 12\right) rad/\sec^2$ حيث t تقاس بالثانية. إذا بدأ القرص الدوران بسرعة زاوية مقدارها $\omega_0 = 12\ rad/\sec$. أوجد مقدار كل من السرعة والعجلة للنقطتين A, B الواقعتين علي القرص وذلك عندما $t = 2\sec$ ؟



الحـــــــــــــل

حيث أن العجلة تعطي بالصورة

$$\omega^{\bullet} = \left(3t^2 + 12\right) rad/\sec^2$$

لذلك يمكن ايجاد السرعة الزاوية بالصورة

$$\omega = \int \omega^{\bullet}\, dt = \int \left(3t^2 + 12\right) dt$$

$$\omega = \left(\frac{3}{3}t^3 + 12t\right) + c_1$$

ومن الشروط الابتدائية وعند ونقطة البداية (i. e. $t = 0$) تعطي السرعة الزاوية بالصورة $\omega_0 = 12\ rad/\sec$ وبذلك فإن

$c_1 = 12$ وبذلك تعطي السرعة الزاوية بالصورة

$$\omega = \left\{ t^3 + 12t + 12 \right\} rad/\sec$$

وعندما $t = 2\sec$ فإن

$$\omega = \left\{ (2)^3 + 12(2) + 12 \right\} = 44\, rad/\sec, \qquad \omega^{\bullet} = \left(3(2)^2 + 12 \right) = 24\, rad/\sec^2$$

ومن المعلوم أن مركبات العجلة تعطي بالصورة

$$f_r = \omega^2 r, \qquad f_t = \omega^{\bullet} r$$

<u>وعند النقطة A</u> حيث $(r)_{disk} = 0.5m$ فإن

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{disk} (r)_{disk} = (44)^2 (0.5m)) = (1936)(0.5) = 968\ m/\sec^2$$

$$f_{A_t} = (\omega^{\bullet})_{disk} (r\ )_{disk} = (24)(0.5m) = 12\ \ m/\sec^2,$$

$$f_A = \sqrt{f_{A_t}^2 + f_{A_r}^2}$$

$$f_A = \sqrt{(12)^2 + (968)^2} = \sqrt{144 + 937024} =$$

$$\sqrt{937168} = 968.07\ m/\sec^2 = 968\ m/\sec^2$$

ويعطي الاتجاه للعجلة عند النقطة A بالصورة

$$\tan\varphi_A = \frac{f_t}{f_r}$$

$$\tan\phi_A == \frac{f_{A_t}}{f_{A_r}} = \frac{12}{968} = 0.1239 \quad \rightarrow$$

$$\phi_A = \tan^{-1}(0.1239) \quad \rightarrow \quad \phi_A = 0.71024'$$

<u>وعند النقطة B</u> وحيث أن $(r)_{disk} = 0.4m$ فإن

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{disk} (r)_{disk} = (44)^2 (0.4m)) = (1936)(0.4) = 774.4m/\sec^2$$

$$f_{A_t} = (\omega^{\bullet})_{disk}\,(r\ )_{disk} = (24)(0.4m) = 9.6\,m/\sec^2\,,$$

$$f_B = \sqrt{f_{B_t}^{\,2} + f_{B_r}^{\,2}}$$

ويعطي الاتجاه للعجلة عند النقطة B بالصورة

$$f_B = \sqrt{(9.6)^2 + (774.4)^2} = \sqrt{92.16 + 599695}$$

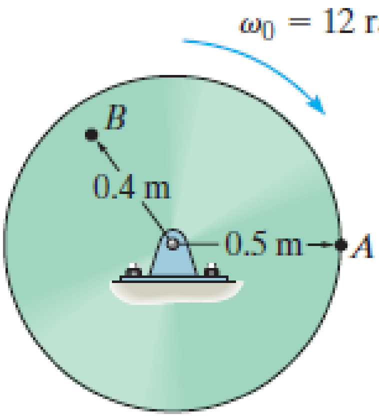
$$= \sqrt{599787} = 774.45\,m/\sec^2$$

$$\tan\varphi_B = \frac{f_{B_t}}{f_{B_r}}$$

$$\tan\phi_B = \frac{f_{B_t}}{f_{B_r}} = \frac{9.6}{774.4} = 0.1239 \quad \rightarrow$$

$$\phi_B = \tan^{-1}(0.1239) \quad \rightarrow \quad \phi_B = 0.71024'$$

<u>مثال (3):</u> إذا بدأ قرص الدوران بسرعة زاوية مقدارها $\omega_0 = 12\ rad/\sec$ ووقع تحت تأثير عجلة زاوية ثابتة مقدارها $\omega^{\bullet} = 20\ rad/\sec^2$ حيث t تقاس بالثانية. أوجد مقدار كل من السرعة والعجلة للنقطة A, B الواقعتين علي القرص وذلك عندما $t = 2\sec$ ؟



الحــــــــل

حيث ان القرص يقع تحت تأثير عجلة زاوية ثابتة مقدارها $\omega^{\bullet} = 20\ rad/\sec^2$. فإننا نستطيع القول بأن

$$\omega = \omega_o + \omega^{\bullet} t, \qquad \theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\omega^{\bullet} t^2, \qquad \omega^2 = \omega_o^2 + 2\,\omega^{\bullet}\theta$$

وحيث أن $\omega_0 = 12\ rad/\sec$ وعند $t = 2\sec$ فإننا نستطيع تحديد السرعة الزاوية بالصورة

$\omega = \omega_o + \omega^{\bullet} t$ $\omega = 52\ rad/\sec$ $\omega = (12) + (20)(2) \rightarrow$, we have

وعند النقطة A وحيث $(r)_{disk} = 0.5m$ فإن

$$v_A = (\omega)_{disk}(r)_{disk} \rightarrow \quad v_A = (52)_{disk}(0.5)_{disk} \rightarrow \quad v_A = 26\ m/\sec$$

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{disk}(r)_{disk} = (52)^2(0.5m)) = (1936)(0.4) = 1352\ \ m/\sec^2$$

$$f_{A_t} = (\omega^{\bullet})_{disk}(r\ )_{disk} = (20)(0.5m) = 10\ m/\sec^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (A) من العلاقة

$$f_A = \sqrt{f_{A_t}^{\,2} + f_{A_r}^{\,2}}$$

$$f_A = \sqrt{(10)^2 + (1352)^2} = 1352.04\ m/\sec^2$$

ويعطي الاتجاه للعجلة عند النقطة A بالصورة

$$\tan\varphi_A = \frac{f_t}{f_r}$$

$$\tan\phi_A == \frac{f_{A_t}}{f_{A_r}} = \frac{10}{1352.04} \rightarrow$$

$$\phi_A = \tan^{-1}(0.00739) \rightarrow \phi_A = 0.423778'$$

من العلاقة $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\,\omega^{\bullet}\theta$

يمكننا القول بأن

$$(52)^2 = (12)^2 + 2\,(20)\,\theta \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{2704-144}{40} = \frac{2560}{40} = \frac{256}{4} \quad \rightarrow \quad \theta = 64$$

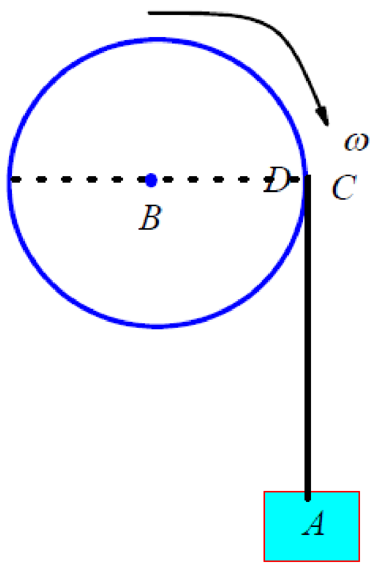
أي أنه بعد $t = 2\ \sec$ يصنع القرص عند وضعة الابتدائي زاوية مقدارها $\theta = 64\ rad$

ويكون القرص قد دار عدد من الدورات تعطي من

لفة $N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{64}{2\pi} = \frac{32}{\pi} \rightarrow N = 10.2$

أوجد مقدار كل من السرعة والعجلة للنقطة B؟.

<u>مثال (4):</u> تدور بكرة ملفوف علي محيطها خيط غير مرن في نهايته جسيم (A).
بحيث تدور البكرة حول محور ثابت (B) كما بالشكل. فإذا كان نصف قطر البكرة
هو $(0.6\,m)$ وعجلة جسيم (A) هي $(f_A = 2\,m/\sec^2)$ وسرعته الخطية هي $(v_A = 3\,m/\sec)$
أوجد السرعة الزاوية وكذلك العجلة الزاوية للبكرة وأوجد كذلك السرعة وكذلك العجلة
للنقطة (D) التي تقع علي محيط البكرة ؟



الحـــــــــل

اولاً: عدد الأجسام وهو جسمين وهما الخيط والبكرة

حيث يتحرك الخيط حركة خطية , بينما البكرة تتحرك حركة دورانية

ثانياً السرعات:

السرعة الخطية للخيط عند النقطة A هي $(v_A = 3m/\sec)$ وهي تمثل سرعة أي نقطة من نقاط الخيط

أي أننا يمكن القول أن

$(v_A = v_C = 3m/\sec)$

بدراسة حركة البكرة

وعند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(v_C)_{Rope} = (v_C)_{Roller}$$

أي أن

$$(v_C)_{Rope} = (v_C)_{Roller} = 3m/\sec$$

حيث $(v_C)_{Roller}$ تمثل سرعة النقطة (D) أي أن

$v_D = 3ml\sec$ و من العلاقة $v_D = \omega_B r$ يكون

$$3m/\sec = \omega_B (0.5m)$$

ومنها تكون السرعة الزاوية للبكرة بالصورة

$$\omega_B = 6\ rad/\sec$$

ثالثاً العجلات:

العجلة الخطية للخيط عند النقطة A هي $(f_A = 2m/\sec^2)$ وهي تمثل عجلة أي نقطة من نقاط الخيط

أي أننا يمكن القول أن

$(f_A = f_C = 2m/\sec^2)$

بدراسة حركة البكرة

وعند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(f_C)_{Rope}=(f_C)_{Roller}=f_{D_t}$$

أي أن

$$(f_C)_{Rope}=(f_{Ct})_{Roller}=f_{D_t}=2\,m/\sec^2$$

و من العلاقة

$$(f_{Ct})_{Roller}=f_{D_t}=\dot{\omega}_B\, r=2\,m/\sec^2=\dot{\omega}_B(0.5)$$

ومنها تكون العجلة الزاوية للبكرة بالصورة

$$\dot{\omega}_B=4\ rad/\sec^2$$

وتعطي المركبة القطرية للعجلة للنقطة (D) من العلاقة

$$f_{Dr}=\omega_B^2\, r=(6)^2(0.5)=18\,m/\sec^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (D) من العلاقة

$$f_D=\sqrt{f_{D_t}^2+f_{D_r}^2}$$

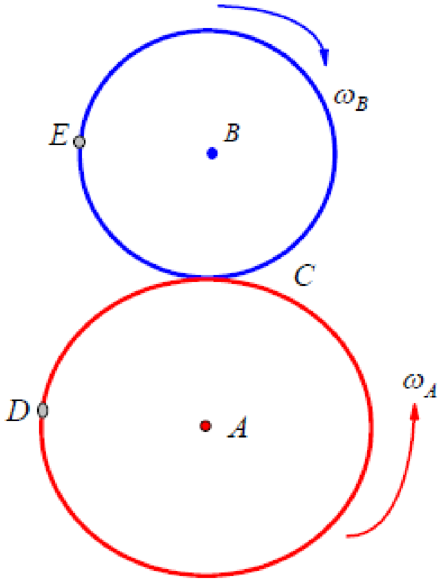
$$f_D=\sqrt{(18)^2+(2)^2}=\sqrt{324+4}=\sqrt{328}=18.11077\ m/\sec^2$$

ويعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة

$$\tan\varphi=\frac{f_t}{f_r}$$

$$\tan\varphi=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}\ \rightarrow\ \varphi=\tan^{-1}(\frac{1}{9})\ \rightarrow\ \varphi=6^O.34'$$

<u>مثال (5):</u> ترس (A) نصف قطره $(r_A=6\,cm)$, اخر (B) نصف قطره $(r_B=4\,cm)$ يدوران معاً كما بالشكل بحيث كانت في لحظة معينة السرعة الزاوية للترس (A) هي $(\omega_A=2\ rad/\sec)$ وكانت العجلة الزاوية للترس (B) هي $\dot{\omega}_B=6\ rad/\sec^2$. عين كل من سرعة وعجلة النقطة (D) التي تقع علي محيط الترس (A) وكذلك سرعة وعجلة النقطة (E) والتي تقع علي محيط الترس (B) مقدارا واتجاهاً؟



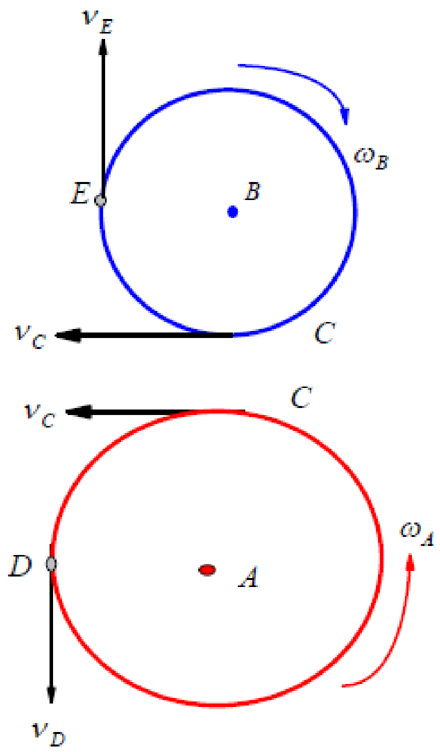
الحـــــــــل

اولاً: عدد الأجسام وهو جسمين وهما الترس (A) , الترس (B) حيث يتحرك كل منهما حركة دورانية

ثانياً السرعات:

بدراسة الترس (A) السرعة الزاوية للترس (A) وهي $(\omega_A = 2\ rad/\sec)$ و نصف قطره $(r_A = 6\,cm)$

ومن العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية نجد أن $v_D = \omega_A r_A$



بذلك يكون لدينا

$$v_D = (2\,rad/\sec)(6\,cm) = 12\,cm/\sec = 0.12\,m/\sec$$

<u>بدراسة نقطة التماس بين الترسين</u>

وعند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(v_C)_{Gear(A)} = (v_C)_{Gear(B)}$$

ومنها يكون

$$(\omega_A r_A)_{Gear(A)} = (\omega_B r_B)_{Gear(B)} \;\rightarrow\; (2)(6) = \omega_B (4)$$

$$\omega_B = 3\ rad/\sec$$

اي أن

مرة أخري ومن العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية نجد أن

$$v_E = \omega_B r_B$$

بذلك يكون لدينا

$$v_E = (3\,rad/\sec)(4\,cm) = 12\,cm/\sec = 0.12\,m/\sec$$

ثالثاً العجلات:

العجلة الزاوية للترس (B) هي $\dot{\omega}_B = 6\ rad/\sec^2$ و نصف قطره $(r_B = 4\,cm)$

ومن العلاقات

$$f_r = \omega^2 r, \qquad f_t = \dot{\omega}\, r$$

للترس (B) يكون لدينا

$$f_{E_r} = \omega_B^2\, r_B = (3)^2 (4\,cm) = 36\,cm/\sec^2 = 0.36\,m/\sec^2$$

$$f_{E_t} = \dot{\omega}_B\, r_B = (6)(4cm) = 24\,cm/\sec^2 = 0.24\,m/\sec^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (D) من العلاقة

$$f_E = \sqrt{f_{E_t}^2 + f_{E_r}^2}$$

$$f_E = \sqrt{(36)^2 + (24)^2} = \sqrt{1296 + 576}$$

$$= \sqrt{1872} = 43.266\ cm/\sec^2 = 0.43266\ m/\sec^2$$

ويعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة

$$\tan\varphi_E = \frac{f_{E_t}}{f_{E_r}}$$

$$\tan\varphi_E = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} = \ \varphi_E = \tan^{-1}\frac{2}{3} \quad \rightarrow \qquad \varphi_E = 33^o.7'$$

<u>بدراسة نقطة التماس بين الترسين مرة اخري</u>

وعند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(f_{C_t})_{Gear(A)} = (f_{C_t})_{Gear(B)}$$

ومنها يكون

$$(\omega^{\bullet}_A\, r_A)_{Gear(A)} = (\omega^{\bullet}_B\, r_B)_{Gear(B)} \;\rightarrow\; (\omega^{\bullet}_A)(6) = (6)(4)$$

$$\omega^{\bullet}_A = 4\ rad/\sec$$

اي أن

مرة أخري ومن العلاقات

$$f_r = \omega^2 r, \qquad f_t = \omega^{\bullet} r$$

للترس (A) يكون لدينا

$$f_{D_r} = \omega^2_A r_A = (2)^2 (6\,cm) = 24\,cm/\sec^2 = 0.24\,m/\sec^2$$

$$f_{D_t} = \omega^{\bullet}_A r_A = (4)(6cm) = 24\,cm/\sec^2 = 0.24\,m/\sec^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (D) من العلاقة

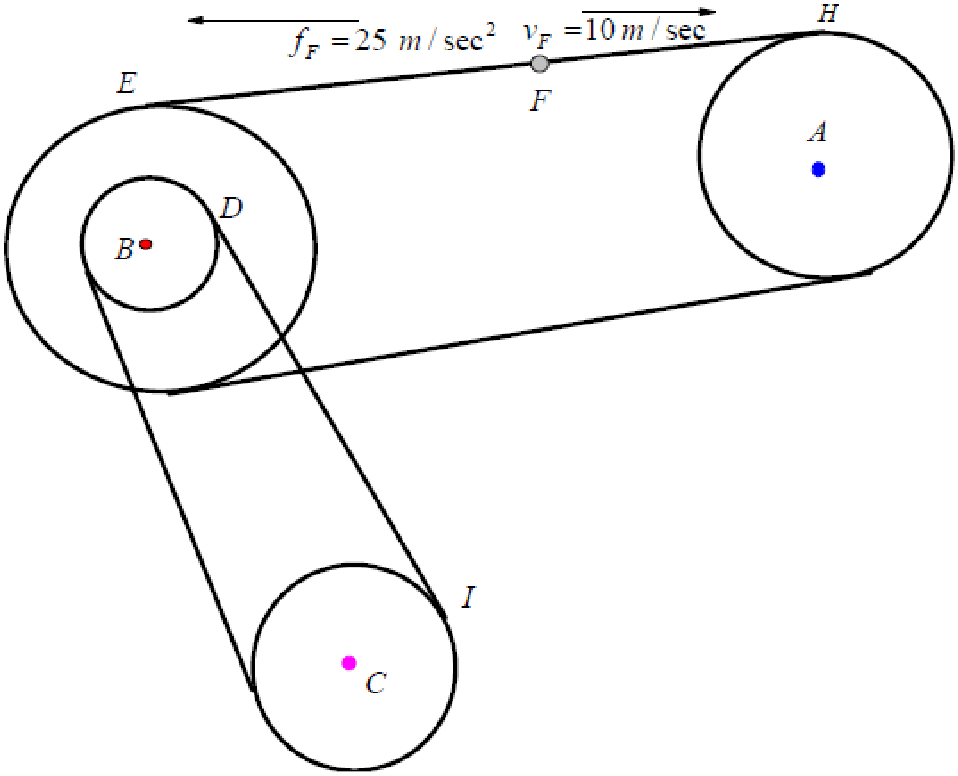
$$f_D = \sqrt{f^2_{D_t} + f^2_{D_r}}$$

$$f_D = \sqrt{(24)^2 + (24)^2} = 24\sqrt{2} = 33.94\ cm/\sec^2 = 0.3394\ m/\sec^2$$

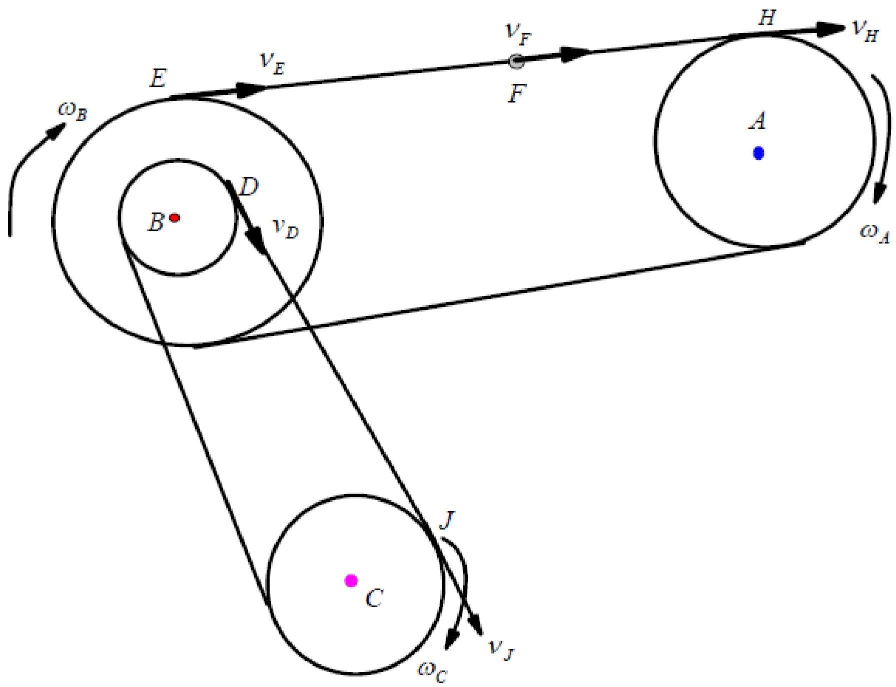
ويعطي اتجاه المحصلة بالصورة

$$\tan\varphi_D = \frac{24}{24} = 1 = \ \varphi_D = \tan^{-1}(1) \;\rightarrow\; \varphi_D = 45^o$$

<u>مثال (6):</u> يمر سير علي بكرة A نصف قطرها $10\,cm$ وبكرة اخري B نصف قطرها الخارجي $r_E = 20\,cm$ و نصف قطرها الداخلي $r_D = 8\,cm$ ويربط سير اخر بين الجزء الداخلي للبكرة B مع بكرة C نصف قطرها $r_C = 15\,cm$. عند لحظة ما كانت سرعة وعجلة النقطة F هي $v_F = 10\,m/\sec,\ \ f_F = 25\ m/\sec^2$ كما هو موضح بالشكل عين السرعات الزاوية والعجلات الزاوية لكل من البكرات A, B, C ؟



الحـــــــل



اولاً: عدد الأجسام وهو خمس جسيمات وهم السيرين DJ ,EFH , الثلاث تروس A, B, C

حيث نقاط السيرين DJ ,EFH تتحرك حركة انتقالية بينما الثلاث تروس A, B, C تتحرك حركة دورانية

ثانياً السرعات:

بدراسة حركة السير EFH (حركة انتقالية)

من الشكل واضح أن السرعة الانتقالية لنقاط هذا السير تعطي بالصورة

$$v_E = v_F = v_H = 10\ m/\sec$$

بدراسة البكرة (A) (حركة دورانية): السرعة الزاوية للبكرة (A) يمكن ايجادها من العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية حيث

$$v_H = \omega_A r_A$$

بذلك يكون لدينا

$$10 = \omega_A (10\,m) \;\rightarrow\; \omega_A = 1\ rad/\sec$$

بدراسة البكرة (B) (حركة دورانية): السرعة الزاوية للبكرة (B) يمكن ايجادها من العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية حيث $v_E = \omega_B r_E$

بذلك يكون لدينا

$$10 = \omega_B (20\,m) \;\rightarrow\; \omega_B = \frac{1}{2} = 0.5\ rad/\sec$$

وعند نقطة التماس (D) يمكننا القول أن

$$(v_D)_{\text{Roller}\,(B)} = \omega_B r_D$$

ومنها يكون

$$(v_D)_{\text{Roller}\,(B)} = 0.5(8) = 4\,m/\sec$$

$$(v_D)_{\text{Roller}\,(B)} = (v_D)_{\text{Rope}\,(DJ)} = 4\,m/\sec$$

اي أن

$$(v_D)_{\text{Rope}\,(DJ)} = (v_J)_{\text{Rope}\,(DJ)} = (v_J)_{\text{Roller}\,(C)} = 4\,m/\sec$$

اي أن

بدراسة البكرة (C) (حركة دورانية): السرعة الزاوية للبكرة (C) يمكن ايجادها من العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية حيث $v_J = \omega_C r_J$

بذلك يكون لدينا

$$4 = \omega_C (15\,m) \;\rightarrow\; (v_D)_{\text{Rope (DJ)}} = \frac{15}{4}\,rad/\sec$$

ثالثاً العجلات:

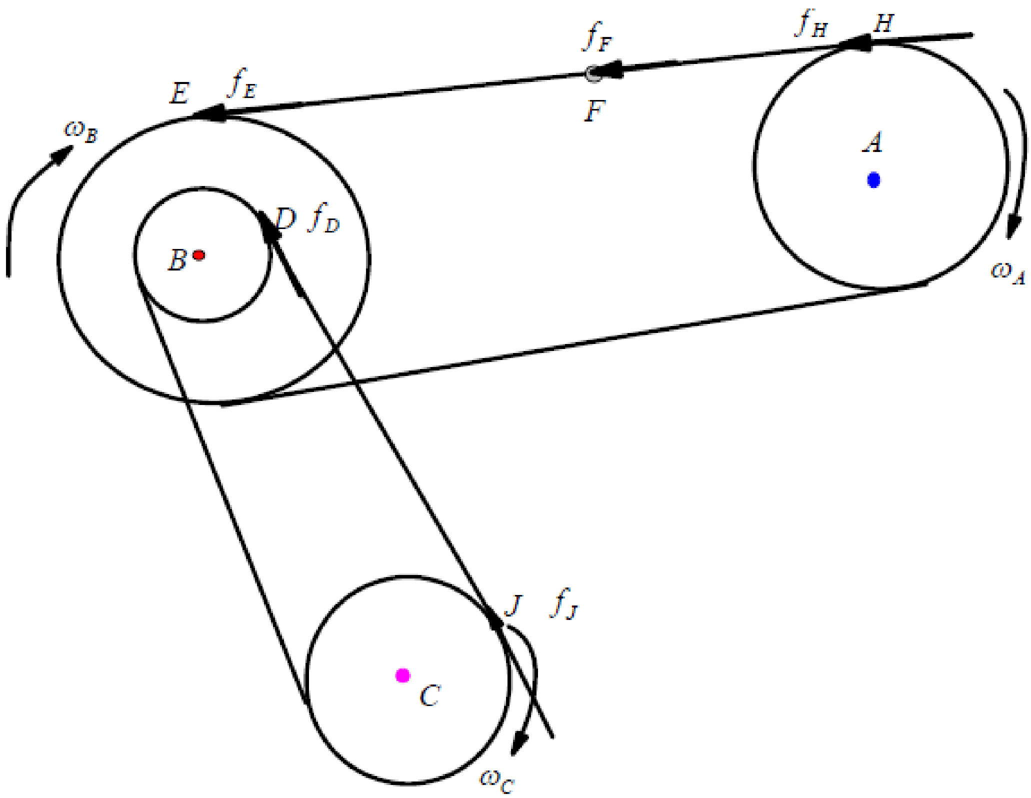
بدراسة حركة السير EFH (حركة انتقالية)

من الشكل واضح أن العجلة الانتقالية لنقاط هذا السير تعطي بالصورة

$$f_E = f_F = f_H = 25\,m/\sec^2$$

لاحظة انه عند أي نقطة تعطي العجلة بالصورة

$$f_t = \dot{\omega}\,r, \qquad f_n = f_r = \omega^2 r$$



عجلة البكرة (A) (حركة دورانية):

العجلة الزاوية للبكرة (A) يمكن ايجادها من العلاقة

$$f_H = f_{A_t} = \omega^{\bullet}_A r_{AH}$$

وبذلك تكون السرعة الزاوية بالصورة

$$25 = \omega^{\bullet}_A (10\,m) \rightarrow \quad \omega^{\bullet}_A = 2.5\ m/\sec^2$$

وتعطي المركب الأخرى للعجلة بالصورة

$$f_{A_r} = \omega_A^2 r_A = (1)^2 (10) = 10\,m/\sec^2$$

<u>عجلة البكرة (B) (حركة دورانية):</u>

العجلة الزاوية للبكرة (B) يمكن ايجادها من العلاقة

$f_E = f_{B_t} = \omega^{\bullet}_B r_{BE}$ وبذلك تكون السرعة الزاوية بالصورة

$25 = \omega^{\bullet}_B (20\,m) \rightarrow \quad \omega^{\bullet}_B = 1.25\,m/\sec^2$ وتعطي المركب الأخرى للعجلة بالصورة

$f_{B_r} = \omega_B^2 r_B = (0.5)^2 (20) = 5\,m/\sec^2$ <u>عجلة البكرة (C) (حركة دورانية):</u>

العجلة الزاوية للبكرة (C) يمكن ايجادها من العلاقة

$f_J = f_{C_t} = \omega^{\bullet}_C r_{CJ}$ وبذلك تكون السرعة الزاوية بالصورة

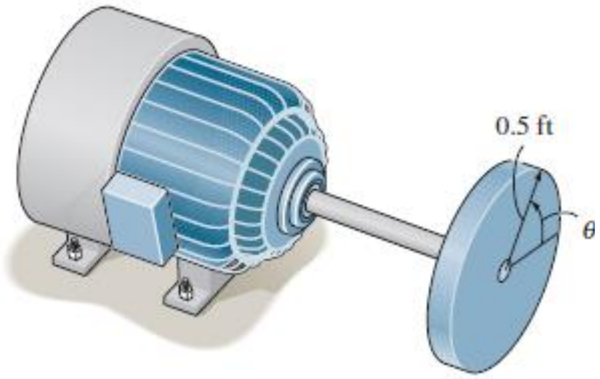
$$25 = \omega^{\bullet}_C (8\,m) \rightarrow \quad \omega^{\bullet}_C = 3.125\ m/\sec^2$$

وتعطي المركب الأخرى للعجلة بالصورة

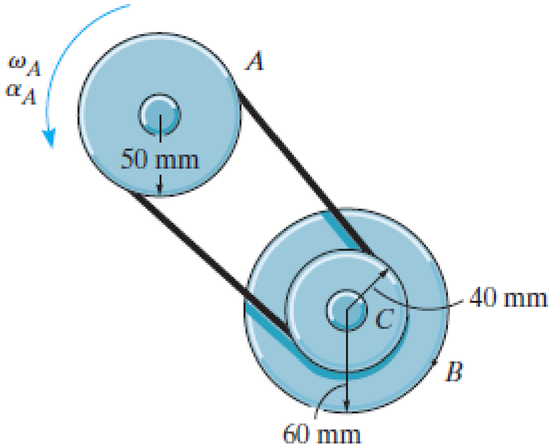
$$f_{C_r} = \omega_C^2 r_C = (\frac{15}{4})^2 (15) = 210.9375\,m/\sec^2$$

تمـــاريـن

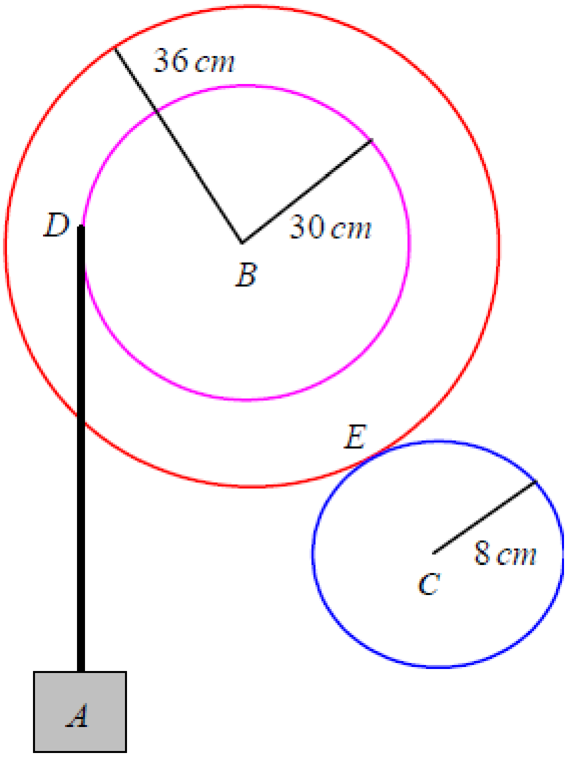
(1)- يتحرك قرص بواسطة موتور كما بالشكل اذا أعطيت الإزاحة الزاوية بالصورة $\theta = \left(20t + 4t^2\right) rad$ حيث t هو الزمن حدد عدد اللفات والسرعة الزاوية والعجلة الزاوية للقرص عندما. $t = 90\,s$



(2)- عند لحظة معينة كانت السرعة الزاوية لبكرة هي $\omega_A = 5\ rad/\sec$ و أعطيت العجلة بالصورة $\dot{\omega}_A = 6\,rad/\sec^2$ حدد قيم العجلة للنقطتين B, C وذلك اذا دارت النقطة A دورتين. حيث تحتوي البكرة C على محور داخلي ثابت على محورها الخارجي وينعطف معها.



(3)- اذا علمت ان اجزاء المجموعة المبينة بالشكل المقابل تتحرك بعجلة منتظمة وانها بدأت الحركة من السكون و انه عندما كانت $t = 4\sec$, كانت سرعة الجسيم A هي $4.8m/\sec$ عين سرعة وعجلة كل من الترس (B) و الترس C مقدارا واتجاهاً وعدد دورات كل منهم عند $t = 4\sec$؟



(4)- بكرة نصف قطرها $(0.3m)$ قابلة للدوران حول محورها (O) ملفوف علي محيطها خيط غير مرن في نهايته جسيم (A). بحيث تدور البكرة حول محور ثابت (O) كما بالشكل. اذا تحرك الجسيم (A) بسرعة $(V_A = 0.9m/\sec)$. وكانت عجلة النقطة (Q)تميل بزاوية (60^O) مع الأفقي. أوجد السرعة الزاوية وكذلك العجلة الزاوية للبكرة وأوجد كذلك السرعة الزاوية وكذلك العجلة الزاوية للنقطة (Q) التي تقع علي البكرة ؟

الفصـــل الـثـاني

عزم القصور الذاتي (العزم الثاني للكتلة)

The Moment of Inertia

(The second moment of mass)

يعرف عزم القصور الذاتي لجسيم كتله m منسوباً لنقطة أو محور أو مستوى بأنه حاصل ضرب الكتلة في مربع بعدها عن النقطة أو المحور أو المستوى. ويعبر عزم القصور الذاتي عن قيمة المقاومة التي يبديها الجسم عند محاولة انحناءه أو دورانه حول محور ما وهى قيمة موجبة دائماً (وتقاس ب $kg\,m^2$).

<u>ويعتمد عزم القصور الذاتي على</u>

1- كتلة الجسم   2- شكل وابعاد الجسم   3- مكان أو محور الدوران

<u>المعنى الفيزيائي لعزم القصور الذاتي</u>

نلاحظ من قانون نيوتن الثاني في التحريك الانتقالي $F = ma$ ومن نظيره في التحريك الدوراني $\tau = I\,\alpha$ أن هناك تشابه واضح بينهما. ففي الحركة الانتقالية نحتاج لقوة (سبب التحريك) لتغيير الحالة التحركية للجسم وإكسابه تسارعا (دليل التحريك) فيمانع الجسم هذا التغيير بحسب كتلته (ممانعة الحركة). أما في التحريك الدوراني فإن عزم القوة هو سبب التحريك والتسارع الزاوي دليلها بينما يمثل عزم القصور الذاتي ممانعتها. وسبب اهتمامنا بهذا التناظر هو أن نتوصل لفهم المعنى الفيزيائي لعزم القصور الذاتي. فإذا كانت الكتلة هي ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته التحركية الانتقالية، فإن عزم القصور الذاتي هو ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته التحركية الدورانية. إلا أن هناك فرق أساس بين الكميتين، ففي حين تبقى كتلة الجسم ثابتة كيفما تحرك، بمعنى أن ممانعته لا تتأثر بأي تغيير في حالته التحركية الانتقالية، إلا أن عزم القصور الذاتي يعتمد على طريقة دوران الجسم والمحور الذي يدور حوله. فيمكن لجسم أن يدور حول محور أول تحت تأثير عزم ما بسهولة، إلا أنه قد لا يدور بتاتا تحت تأثير نفس العزم حول محور آخر بسبب اختلاف عزم القصور الذاتي له بالنسبة لكل واحد منهما. ولذلك يجب تحديد عزم القصور الذاتي للجسم في كل مسألة بالنسبة للمحور الذي يدور حوله.

الجسم الكبير يحتاج قوة كبيرة لتحريكه وكذلك قوة كبيرة لإيقافه عن الحركة.

أولا- عزم القصور الذاتي للكتل

1- لجسيم كتلته dm يقع علي بعد a من محور L كما في شكل (1) و منسوبا لهذا المحور

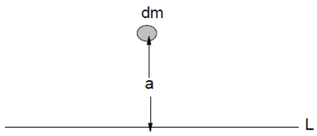


Fig. 1

يعرف عزم القصور الذاتي رياضياً (Moment of Inertia) بالصورة $I_{LL} = a^2\,dm$ اي أن عزم القصور الذاتي لكتله ما يساوى كتلة هذا الجسم مضروبة في مربع بعدة عن المحور.

بينما لعد n من الجسيمات كما في شكل (2)

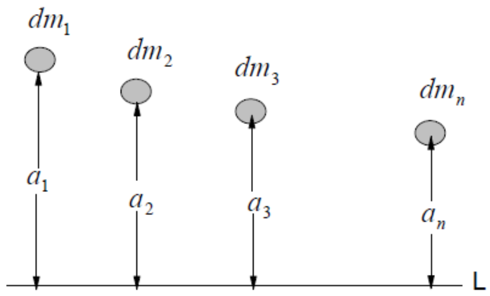


Fig. 2

يعرف عزم القصور الذاتي منسوبا لهذا المحور رياضياً بالصورة:

$$I_{LL} = a_1^2\,dm_1 + a_2^2\,dm_2 + a_3^2\,dm_3 + \dots\dots\dots\dots + a_n^2\,dm_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 dm_i$$

2- اذا كان الجسيم واقع في مستوى كما في شكل (3) يعطى عزم القصور الذاتي منسوبا الى المحاور المعطاة بالصورة:

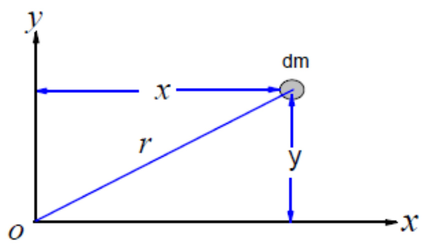


Fig. 3

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور $o\,x$ يعطى بالصورة $I_{xx} = y^2 dm,$

وعزم القصور الذاتي منسوباً للمحور $o\,y$ يعطى بالصورة $I_{yy} = x^2 dm,$

يعطى بالصورة o بينما عزم القصور الذاتي منسوباً للنقطة $I_O = r^2 dm = (x^2 + y^2)\,dm = I_{xx} + I_{yy}$

يسمى I_O عزم القصور القطبي Polar moment inertial (وهو عزم القصور الذاتي منسوباً لمحور عمودي على المستوى xoy وعند نقطة تقاطع المحورين $ox,\ oy$)

- اذا كان هناك مجموعة من الجسيمات واقعة في مستوى كما في شكل (4) يعطى عزم القصور الذاتي منسوبا الى المحاور المعطاة بالصورة:

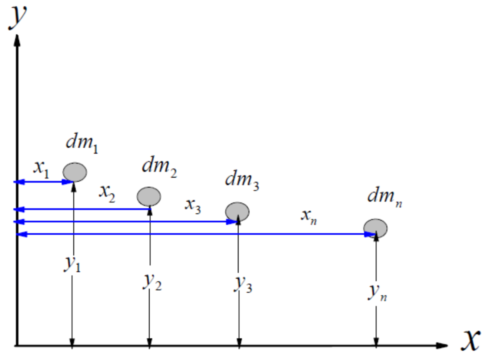


Fig. 4

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور ox يعطى بالصورة $$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\, dm_i$$

وعزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oy يعطى بالصورة $$I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, dm_i,$$

<u>نظرية المحاور المتوازية (Parallel axis theorem)</u>

بفرض انه لدينا جسم ما كما في الشكل المقابل كتلته m ومركز ثقلة هي النقطة (x_{cm}, y_{cm})

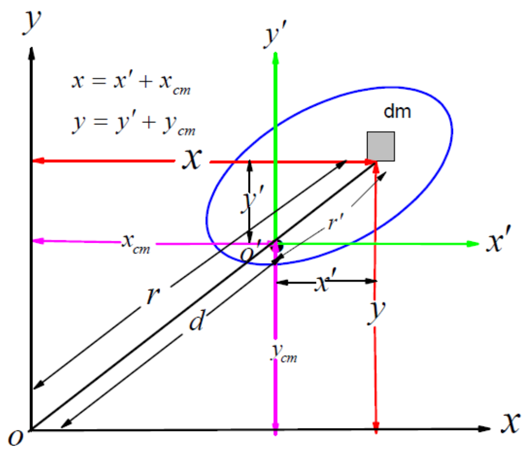


Fig. 7

بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للنقطة o هو (x, y) وبالنسبة لمركز الثقل cm هو (x', y'). بالنسبة للمحورين ox, oy والنقطة o يعطى عزم القصور الذاتي لكتلته dm على الترتيب بالصورة

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور $o\,x$ يعطى بالصورة $dI_{xx} = y^2 dm,$

عزم القصور الذاتي منسوباً $o\,y$ يعطى بالصورة $dI_{yy} = x^2 dm,$

بينما عزم القصور الذاتي منسوباً للنقطة o للمحور يعطى بالصورة

$$dI_O = r^2 dm = I_{xx} + I_{yy} = (x^2 + y^2)\,dm$$

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للنقطة (o)

$$I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \qquad (1)$$

ويعطى كذلك عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً لمركز ثقلة بالصورة

$$I_{cm} = \int r'^2 dm = \int (x'^2 + y'^2) dm \qquad (2)$$

لكن من الرسم واضح أن $x = x' + x_{cm}, \quad y = y' + y_{cm}$ وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

$$I_O = \int r^2 dm = \int \left\{ \left(x' + x_{cm} \right)^2 + \left(y' + y_{cm} \right)^2 \right\} dm$$

$$= \int \left\{ x'^2 + x_{cm}^2 + 2x'\,x_{cm} + y'^2 + y_{cm}^2 + 2y'\,y_{cm} \right\} dm$$

$$I_O = \underbrace{\int \left(x'^2 + y'^2 \right) dm}_{I_{cm}} + \int \underbrace{\left(x_{cm}^2 + y_{cm}^2 \right)}_{= d^2} dm + 2x_{cm} \int x'\,dm + 2y_{cm} \int y'\,dm$$

$$I_O = I_{cm} + \int d^2\, dm + 2x_{cm} \int x'\,dm + 2y_{cm} \int y'\,dm$$

$$I_O = I_{cm} + d^2 \int dm + 2x_{cm} \int x'\,dm + 2y_{cm} \int y'\,dm$$

$$I_O = I_{cm} + d^2\, m + 2x_{cm} \int x'\,dm + 2y_{cm} \int y'\,dm \qquad (3)$$

لكن من المعلوم بأن

$$\bar{x} = \frac{\int x'\,dm}{\int dm} \rightarrow \int x'\,dm = \bar{x}\int dm, \qquad \bar{y} = \frac{\int y'\,dm}{\int dm} \rightarrow \int y'\,dm = \bar{y}\int dm \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3)

$$I_O = I_{cm} + d^2\, m + 2x_{cm}\left\{\bar{x}\int dm\right\} + 2y_{cm}\left\{\bar{y}\int dm\right\}$$

$$I_O = I_{cm} + d^2\, m + 2x_{cm}\,\bar{x}\,m + 2y_{cm}\,\bar{y}\,m \qquad (5)$$

لكن $(\bar{x}, \bar{y})$ هو أحداثي بعد مركز الثقل عن مركز الثقل وهو يساوى الصفر. وبالتعويض في (5) نحصل

$$I_O = I_{cm} + m\,d^2 \qquad (6)$$

حيث I_O هو عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على المستوى xoy وعند نقطة تقاطع المحورين $o\,x,\ oy$. وكذلك $I_{cm}(I_G)$ هو عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على المستوى $x'o'y'$ وعند نقطة تقاطع المحورين $o'\,x',\ o'y'$.

وهكذا فإن عزم القصور الذاتي لجسم منسوب لمحور ما يساوي عزم القصور الذاتي لمحور يمر بمركز الكتلة مضافاً الية الكتلة في مربع البعد بين المحورين.

<u>نظرية االصفائح المستوية (Perpendicular axis theorem)</u>

بفرض انه لدينا صفيحة مستوية ما كما في الشكل المقابل كتلتها m و بأخذ عنصر dm فيكون عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين ox, oy والنقطة o على الترتيب بالصورة

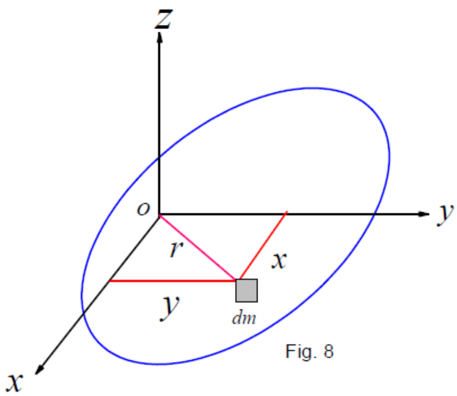


Fig. 8

$dI_{xx} = y^2\, dm,$ عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور $o\,x$ يعطى بالصورة

$dI_{yy} = x^2 dm,$ وعزم القصور الذاتي منسوباً للمحور $o\,y$ يعطى بالصورة

$dI_O = I_{xx} + I_{yy} = (x^2 + y^2)\, dm = r^2 dm$ بينما عزم القصور الذاتي منسوبا للنقطة o يعطى بالصورة

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للنقطة (o)

$$I_O = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int r^2 dm = r^2 \int dm = r^2 m \qquad (1)$$

حيث I_O يسمى عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على المستوى xoy وعند نقطة تقاطع المحورين $o\,x,\ oy$ والذى يمكن التعبير عنة بالصورة I_{zz} أي أن

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \qquad (2)$$

وهكذا فإن عزم القصور الذاتي لصفيحة مستوية منسوب لمحورين يقعان في مستوى الصفيحة بأنه يساوي عزم القصور الذاتي لمحور عمودي على مستوى الصفيحة عند نقطة تلاقى المحورين الواقعين في مستوى الصفيحة .

3- اذا كان الجسم واقع في الفراغ :

بفرض أنه لدينا جسيم كتلته m واقع في الفراغ كما بالشكل

فان عزم القصور الذاتي له يعطى على النحو التالي

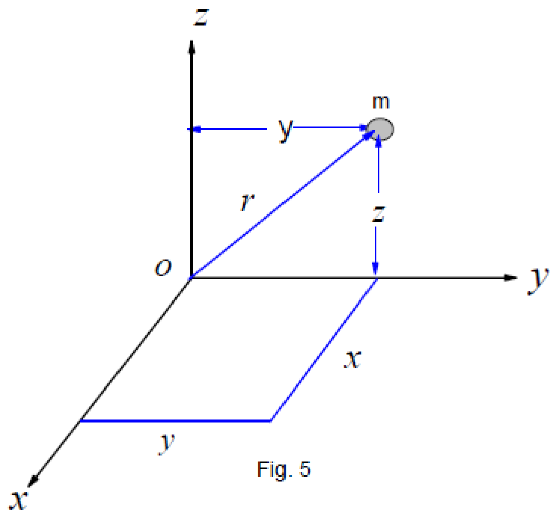


Fig. 5

عزم القصور الذاتي منسوباً لنقطة o بالصورة

$$I_o = m\,r^2 = m\,(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (1)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور ox بالصورة

$$I_{xx} = m(y^2 + z^2) \qquad (2)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oy بالصورة

$$I_{yy} = m(x^2 + z^2) \qquad (3)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oz بالصورة

$$I_{zz} = m(x^2 + y^2) \qquad (4)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمستوى xoy بالصورة

$$I_{xoy} = I_{z=0} = I_z = m z^2 \qquad (5)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمستوى xoz بالصورة

$$I_{xoz} = I_{y=0} = I_y = m y^2 \qquad (6)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمستوى yoz بالصورة

$$I_{yoz} = I_{x=0} = I_x = m x^2 \qquad (7)$$

ملاحظات على العلاقات السابقة

(1) من العلاقات (1) , (5-7)

$$I_o = m r^2 = m(x^2 + y^2 + z^2) = I_{xoy} + I_{xoz} + I_{yoz} \qquad (8)$$

أي أن عزم القصور الذاتي لجسم في الفراغ منسوبا لنقطة تلاقى المحاور الثلاثة المتعامدة (I_o) يساوى مجموع عزوم القصور الذاتي لهذا لجسم منسوباً للثلاثة المستويات المتعامدة والمتلاقية في النقطة o.

(2)- من العلاقات (1) , (2-4) واضح أن

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2m(x^2 + y^2 + z^2) = 2I_o \qquad (9)$$

أي أن عزم القصور الذاتي لجسم في الفراغ منسوبا لنقطة تلاقى المحاور الثلاثة المتعامدة (I_o) يساوى نصف مجموع عزوم القصور الذاتي لهذا لجسم منسوباً للثلاثة المحاور المتعامدة والمكونة لهذا الفراغ.

(3)- من العلاقات (2-7) واضح أن

$$I_{xx} = m(y^2 + z^2) = I_{xoy} + I_{xoz}$$
$$I_{yy} = m(x^2 + z^2) = I_{xoy} + I_{yoz} \qquad (10)$$
$$I_{zz} = m(x^2 + y^2) = I_{xoz} + I_{yoz}$$

أي أن عزم القصور الذاتي لجسم في الفراغ منسوبا لمحور من الثلاث المحاور المتعامدة والمتلاقية في نقطة واحدة يساوى (يكافئ) مجموع عزوم القصور الذاتي لهذا لجسم منسوباً لمستويين متعامدين على هذا المحور.

(4)- من العلاقات (1-7) واضح أن عزوم القصور الذاتي قيمة موجبة دائماً وتتوقف على كتلة الجسم وكذلك على بعد النقطة أو المحور أو المستوى الذى يتم حساب العزم حولهم.

(5) فيما سبق تم تعريف عزم القصور الذاتي لجسم بالصورة $I = ma^2$ عند ذلك الكمية

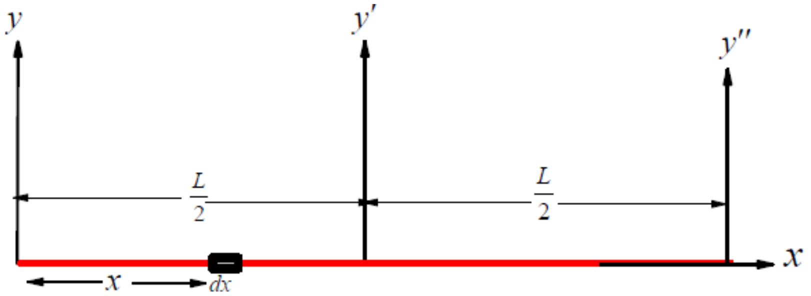
$a = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$ تعرف بنصف قطر القصور الذاتي.

مثال (1): أوجد عزم القصور الذاتي لعمود رفيع منتظم طوله L وكتلته m ؟

الحـــــــــل

بوضع العمود الرفيع منطبقاً على محور x كما بالشكل وبأخذ عنصر صغير طوله dx و على بعد x من المحور y و المنطبق على الطرف الأيسر للعمود وبفرض ان كثافة المادة المصنوع منها العمود هي ρ. فتعطى كتلته هذا العمود بالصورة $m = L\rho$ وكذلك يمكن إيجاد الكتلة بالصورة

$$dm = \rho\, dx \rightarrow m = \int_0^L \rho\, dx = \rho \int_0^L dx = \rho\, x\Big|_0^L \rightarrow m = \rho L$$



بالنسبة للمحور y يعطى عزم القصور الذاتي

$$I_{yy} = \int x^2 dm = \int_0^L x^2(\rho\, dx) = \frac{1}{3}\rho L^3 = \frac{1}{3}\rho L^3 \frac{m}{\rho L^3} = \frac{1}{3} m L^2 \qquad \therefore\ I_{yy} = \frac{1}{3} m L^2$$

بينما بالنسبة للمحور y' والذى يمر بمركز ثقل العمود (منتصف العمود) يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{yy}=I_{y'y'}+m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \to I_{y'y'}=\frac{1}{3}mL^2-\frac{1}{4}mL^2=\left(\frac{4-3}{12}\right)mL^2=\frac{1}{12}mL^2$$

$$\therefore\ I_{y'y'}=\frac{1}{12}mL^2$$

وبالنسبة للمحور y'' والذى يمر بالطرف الأخر للعمود يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{y''y''}=I_{y'y'}+m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \to I_{y''y''}=\frac{4}{12}mL^2 \quad \therefore\ I_{y''y''}=\frac{1}{3}mL^2$$

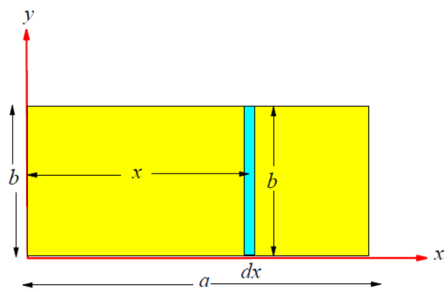
تمرين: أوجد عزم القصور الذاتي لعمود رفيع منتظم طوله L وكتلته m وذلك اذا كان مائلاً على محور الدوران ؟

مثال- (2): أوجد عزم القصور الذاتي لصفيحة على هيئة مستطيل منسوباً لمحور تمر بأركانه وكذلك محاور تمر بمركز ثقلة ؟

الحـــــــــل

بأخذ الصفيحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله b و عرضة dx وعلى بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفيحة هي ρ .
فتعطى كتلته الصفيحة بالصورة $m=ab\rho$ وكذلك يمكن

إيجاد الكتلة بالصور $dm=\rho bdx \to m=\int_0^a \rho bdx \to m=\rho ab$



بالنسبة للمحور y يعطى عزم القصور الذاتي $dI_{yy}=x^2dm=x^2(\rho bdx)$

$$I_{yy}=\rho b\int_0^a x^2\,dx=\rho b\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{ba^3}{3}\rho=\frac{ba^3}{3}\rho\frac{m}{m}=\frac{ba^3}{3}\rho\frac{m}{\rho ab}$$

$$\therefore\ I_{yy}=\frac{1}{3}ma^2$$

بينما بالنسبة للمحور y' والذى يمر بمركز ثقل العمود (منتصف العمود) يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{yy}=I_{y'y'}+m\left(\frac{1}{2}a\right)^2\rightarrow$$

$$\frac{1}{3}mL^2=I_{y'y'}+m\left(\frac{1}{2}a\right)^2\rightarrow I_{y'y'}=\frac{1}{3}ma^2-\frac{1}{4}ma^2=\left(\frac{4-3}{12}\right)ma^2=\frac{1}{12}ma^2$$

$$\therefore\ I_{y'y'}=\frac{1}{12}ma^2$$

وبالنسبة للمحورين x, x' يعطى عزم القصور الذاتي على الترتيب بالصورة

$$I_{xx}=\frac{1}{3}mb^2,\qquad I_{x'x'}=\frac{1}{12}mb^2$$

ويكون عزم القصور الذاتي لمحور عمودي على مستوى الصفيحة عند نقطة تلاقى المحورين ox,oy الواقعين في مستوى الصفيحة بالصورة (من نظرية الصفائح المستوية)

$$I_o=I_{xx}+I_{yy}=\frac{1}{3}mb^2+\frac{1}{3}ma^2=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$$

ويكون كذلك عزم القصور الذاتي لمحور عمودي على مستوى الصفيحة عند نقطة تلاقى المحورين ox',oy' الواقعين في مستوى الصفيحة بالصورة

$$I_{o'}=I_{x'x'}+I_{y'y'}=\frac{1}{12}mb^2+\frac{1}{12}ma^2=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$

ويمكن وصف عزم القصور الذاتي للمستطيل بالجدول الاتي

عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	الجسم : صفيحة على هيئة مستطيل أبعاده

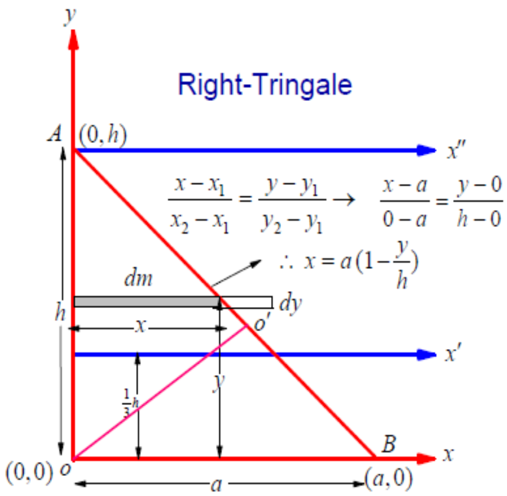
(a,b)			
منسوبا للمحور I_{xx}	$I_{xx}=\frac{1}{3}mb^2$	$I_{x'x'}=\frac{1}{12}mb^2$	$I_{x''x''}=\frac{1}{3}mb^2$
منسوبا للمحور I_{yy}	$I_{yy}=\frac{1}{3}ma^2$	$I_{y'y'}=\frac{1}{12}ma^2$	$I_{y''y''}=\frac{1}{3}ma^2$
منسوبا لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz}=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$	$I_{z'z'}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$	$I_{z''z''}=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$

مثال(3): أحسب عزم القصور الذاتي لصفيحة على هيئة مثلث (قائم الزاوية) حول المحاور المختلفة ومركز الثقل ؟

الحـــــــــل

بأخذ الصفيحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله x و سمكة dy و على بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفيحة هي ρ. فتعطى كتلته الصفيحة بالصورة $m=\frac{1}{2}ah\rho$. وكذلك يمكن إيجاد الكتلة بالصورة

$$dm=\rho\, y\, dx \rightarrow m=\rho\int_0^a y\, dx=\rho\int_0^a h(1-\frac{x}{a})\,dx=h\rho\left[x-\frac{x^2}{2h}\right]_0^a \rightarrow m=\frac{1}{2}ah\rho$$



و يعطى عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور x $\qquad dI_{xx}=y^2dm=y^2(\rho\, x\, dy)$

$$I_{xx}=\rho\int_0^h x\,y^2\,dy, where \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1 \;\rightarrow\; x=a\,(1-\frac{y}{h})$$

$$I_{xx}=\rho\int_0^h a\,(1-\frac{y}{h})\,y^2\,dy=\rho\,a\int_0^h (y^2-\frac{y^3}{h})\,dy=\rho\,a\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4h}\right]_0^h$$

$$I_{xx}=\rho\,a\left[\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4h}\right]=\frac{1}{12}\rho\,a\,h^3\,(4-3)=\frac{1}{12}\rho\,a\,h^3\,\frac{m}{\frac{1}{2}a\,h\rho}=\frac{1}{6}m\,h^2$$

$$\therefore\; I_{xx}=\frac{1}{6}m\,h^2$$

بالمثل يمكن اثبات أن

$$\therefore\; I_{yy}=\frac{1}{6}m\,a^2$$

بينما بالنسبة للمحور x' والذى يمر بمركز ثقل الصفيحة المثلثية يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{xx}=I_{x'x'}+m\left(\frac{1}{3}h\right)^2 \;\rightarrow\quad I_{x'x'}=\frac{1}{6}m\,h^2-\frac{1}{9}m\,h^2=\frac{1}{18}m\,h^2(3-2)=\frac{1}{18}m\,h^2$$

$$\therefore\quad I_{x'x'}=\frac{1}{18}m\,h^2$$

وبالنسبة للمحور x'' والذى يمر بالنقطة $(0,h)$ الصفيحة المثلثية يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{x''x''}=I_{x'x'}+m\left(\frac{2}{3}h\right)^2=\frac{1}{18}m\,h^2+\frac{4}{9}m\,h^2=\frac{1}{18}m\,h^2(1+8)=\frac{9}{18}m\,h^2$$

$$\therefore\quad I_{x''x''}=\frac{1}{2}m\,h^2$$

بالنسبة للمحور (AB) عزم القصور الذاتي يعطى بالصورة $\qquad I_{AB}=\frac{1}{6}m\,(oo')^2$

ومن المعلوم بأن مساحة المثلث المعطى يمكن حسابها بالصورة $\frac{1}{2}a\,h$ وكذلك تعطى بالصورة :

$\frac{1}{2}(oo')\,AB$ حيث $AB=\sqrt{(0-a)^2+(h-0)^2}=\sqrt{a^2+h^2}$

ومن هذه العلاقات يمكننا القول بأن

$$\frac{1}{2}a\,h=\frac{1}{2}(oo')\,AB=\frac{1}{2}(oo')\sqrt{a^2+h^2}\rightarrow oo'=\frac{a\,h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$.

وبذلك يعطى عزم القصور الذاتي بالصورة

$$I_{AB}=\frac{1}{6}m(oo')^2=\frac{a^2h^2}{6(a^2+h^2)}m$$

ويمكن وصف عزم القصور الذاتي للصفيحة المثلثية منسوبا الى المحاور المختلفة في الجدول التالي

الجسم : صفيحة على هيئة مثلث قاعدة a و ارتفاعه h	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل
منسوبا للمحور I_{xx}	$I_{xx}=\frac{1}{6}mh^2$	$I_{x'x'}=\frac{1}{18}mh^2$	$I_{x''x''}=\frac{1}{2}mh^2$
منسوبا للمحور I_{yy}	$I_{yy}=\frac{1}{6}ma^2$	$I_{y'y'}=\frac{1}{18}ma^2$	$I_{y''y''}=\frac{1}{2}ma^2$
منسوبا لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz}=\frac{1}{6}m(a^2+h^2)$	$I_{z'z'}=\frac{1}{18}m(a^2+h^2)$	$I_{z''z''}=\frac{1}{6}m(3a^2+h^2),\ I_{z''z''}=\frac{1}{6}m(a^2+3h^2)$

من الملاحظ ان عزم القصور الذاتي الكتلي لصفيحة على هيئة مثلث يتوقف على كل من كتلة الصفيحة المثلثية و ارتفاعها لذلك فهو لن يتغير اذا كانت الصفيحة قائمة أو حادة أو منفرجة الزاوية كما سوف نرى فيما يأتي:

(4)- أحسب عزم القصور الذاتي لصفيحة على هيئة مثلث حاد الزاوية ؟

الحـــــــــــــل

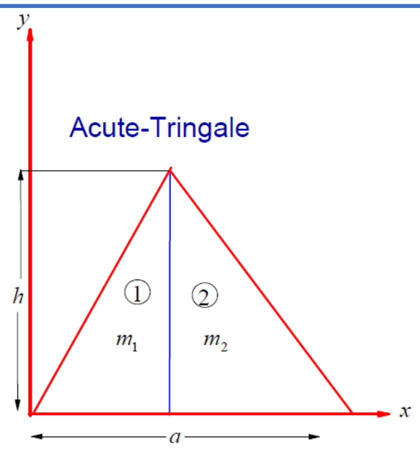
للمثلث الحاد الزاوية سوف نقسمه الى مثلثين قائمين الزاوية كما بالشكل

ويعطى عزم القصور الذاتي حول المحور x للمثلثين $(1, 2)$ على الترتيب بالصورة

$$(I_{xx})_1=\frac{1}{6}m_1h^2,\qquad (I_{xx})_2=\frac{1}{6}m_2h^2,$$

ويعطى بذلك عزم القصور الذاتي حول المحور X للمثلث الحاد بالصورة

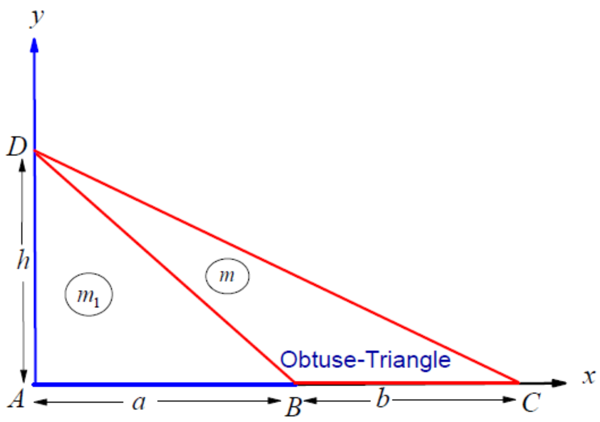
$$I_{xx}=(I_{xx})_1+(I_{xx})_2=\frac{1}{6}m_1h^2+\frac{1}{6}m_2h^2=\frac{1}{6}(m_1+m_2)h^2=\frac{1}{6}mh^2$$



مثال (5)- عزم القصور الذاتي لصفيحة على هيئة مثلث منفرج الزاوية ؟

للمثلث المنفرج الزاوية ABC سوف نضيف المثلث CBD القائم الزاوية عند D ليصبح لدينا مثلثين قائمين الزاوية كما بالشكل

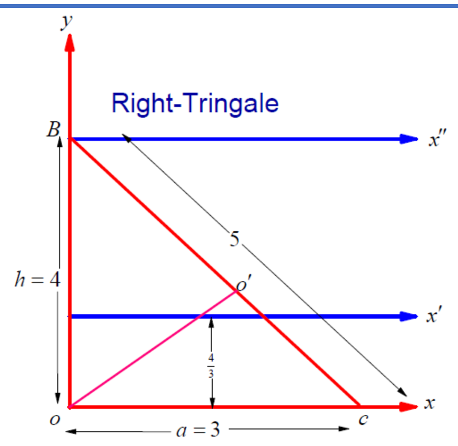
الحـــــــــل



ويعطى عزم القصور الذاتي حول المحور X للمثلث ABC بالصورة

$$(I_{xx})_{BCD} = (I_{xx})_{ACD} - (I_{xx})_{ABD} = \frac{1}{6}(m_1 + m)h^2 - \frac{1}{6}m_1 h^2 = \frac{1}{6}m h^2$$

مثال (6)- لصفيحة على هيئة مثلث معطى كما بالشكل أوجد عزم القصور الذاتي حول المحاور المختلفة ؟



الحــــــــــل

من المعلوم بأن $I_{xx}=\frac{1}{6}mh^2,\quad I_{yy}=\frac{1}{6}ma^2,\ I_{BC}=\frac{a^2h^2}{6(a^2+h^2)}m$

لذلك فإن $I_{xx}=\frac{1}{6}mh^2=\frac{1}{6}m(4)^2=\frac{16}{6}m=\frac{8}{3}m$

$$I_{yy}=\frac{1}{6}ma^2=\frac{1}{6}m(3)^2=\frac{9}{6}m=\frac{3}{2}m$$

$$I_{BC}=\frac{a^2h^2}{6(a^2+h^2)}m=\frac{(3)^2(4)^2}{6((3)^2+(4)^2)}m=\frac{(9)(16)}{6(9+16)}m=\frac{(9)(16)}{6(25)}m=\frac{24}{25}m$$

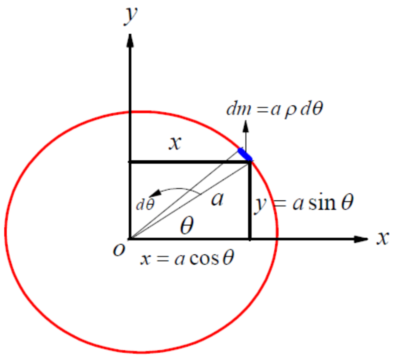
من الملاحظ أن $3<4<5$ وأن $I_{xx}=\frac{8}{3}m>I_{yy}=\frac{3}{2}m>I_{BC}=\frac{24}{25}m$

مثال(7): أحسب عزم القصور الذاتي لحلقة دائرية منتظمة (Circular Ring)؟

الحــــــــــل

بأخذ الحلقة الدائرية كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير كتلة dm ويبعد مسافة a من مركز الحلقة o حيث يقع كل من المحورين ox,oy في مستوى الحلقة عند o وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي لهذه الكتلة الصغيرة عند o يعطى بالصورة $dI_o=a^2dm$ وللحلقة كاملاً يعطى بالصورة

$$I_O=\int a^2\,dm=a^2\int_0^m dm\rightarrow\quad I_O=a^2m=I_{zz}$$



و من نظرية الصفائح المستوية $I_O = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ وكذلك كل I_{xx}, I_{yy} من متماثلين أي أن $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{xx} + I_{yy} = ma^2 \quad \rightarrow \qquad I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} m a^2$$

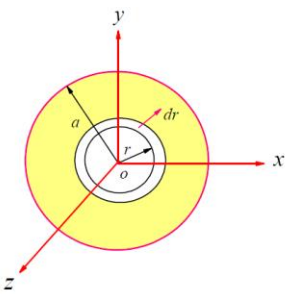
مثال(8): أحسب عزم القصور الذاتي لدائرة منتظمة (مساحة دائرية) ؟

الحـــــــــــــــــــــــل

بأخذ الدائرة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الحلقات ذات الكتلة dm ونصف القطر r و السمك dr وبفرض أن من مركز الدائرة هو o حيث يقع كل من المحورين ox, oy في مستوى الحلقة عند o و المحور oz هو والمحور العمودي على مستوى الصفيحة عند نقطة تلاقى المحورين ox, oy الواقعين في مستوى الصفيحة. ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة الصغير عند o بالصورة $dI_o = r^2 dm$ وللمساحة الدائرة كاملاً يعطى بالصورة $I_O = \int r^2\, dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة الدائرة الكلية

تعطى من $m = \pi a^2 \rho$ (المساحة مضروبة في الكثافة المصنوع منها مادة الدائرة) أو

$$dm = 2\pi r \rho\, dr \rightarrow \ m = 2\pi \rho \int_0^a r\, dr \ \rightarrow m = 2\pi \rho \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^a = \pi a^2 \rho$$



وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للدائرة كاملاً يعطى بالصورة

$$I_O = I_{zz} = \int r^2\, dm = \int r^2\,(2\pi\, r\rho\, dr) = 2\pi\rho\int_0^a r^3\, dr =$$

$$\left.\frac{2\pi\rho r^4}{4}\right|_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{2}\,\frac{m}{m} = \frac{\pi\rho a^4}{2}\,\frac{m}{\pi\, a^2\rho} \quad\rightarrow\quad I_o = \frac{1}{2}ma^2$$

و من نظرية الصفائح المستوية $I_O = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ وكذلك كل I_{xx}, I_{yy} متماثلين أي أن $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{2}m\,a^2 \quad\rightarrow\qquad\qquad I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}m\,a^2$$

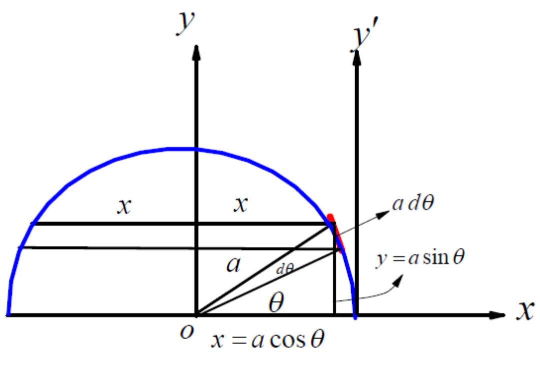
مثال(9): أحسب عزم القصور الذاتي لنصف دائرة منتظمة ؟

الحـــــــــــــل

بتقسيم نصف الدائرة الى شرائح صغيرة على شكل مستطيل وأخذ كتلة أحدهما والتي تعطى بالصورة $dm = 2x\rho\, dy$. يمكننا حساب عزم القصور الذاتي للدائرة كاملاً حول محور x يعطى بالصورة $dI_{xx} = y^2 dm$. وللدائرة كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dm = \int_0^a (a\sin\theta)^2 (2x\rho\, dy) = 2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\,(a\cos\theta)(a\cos\theta\, d\theta)$$

$$= 2a^4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = 2a^4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$



$$= 2a^4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 2\theta}{4}d\theta = \frac{2}{4}a^4\rho\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{2}{8}a^4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta = \frac{1}{4}a^4\rho\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}a^4\rho(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{8}a^4\rho\pi$$

$$I_{xx} = \frac{1}{8}a^4\rho\pi\frac{m}{m} = \frac{1}{8}a^4\rho\pi\frac{m}{\frac{1}{2}\pi a^2\rho} = \frac{1}{4}m a^2 \quad\rightarrow\quad I_{xx} = \frac{1}{4}m a^2 \qquad (1)$$

بالمثل عزم القصور الذاتي للدائرة كاملاً حول محور y يعطى بالصورة

$$I_{yy} = \frac{1}{4}m a^2 \qquad (2)$$

و من نظرية الصفائح المستوية $I_O = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

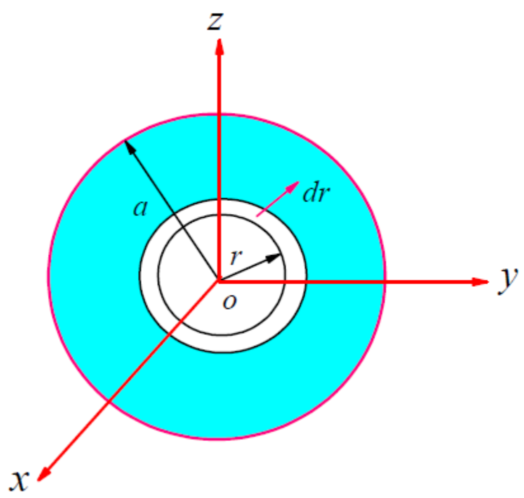
$$I_O = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{2}m a^2 \quad\rightarrow\quad I_O = I_{zz} = \frac{1}{2}m a^2 \qquad (3)$$

مثال(10): أحسب عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم؟

الحــــــــــــل

بأخذ القرص الدائري كما بالشكل المقابل ثم نقسم القرص الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحده من هذه الحلقات ذات الكتلة dm ونصف القطر r والسمك dr وبفرض أن من مركز القرص هو o حيث يقع كل من المحورين ox,oy في مستوى الحلقة عند o و المحور oz هو والمحور العمودي على مستوى القرص عند نقطة تلاقى المحورين ox,oy الواقعين في مستوى القرص. ويكون عزم القصور الذاتي لهذه للحلقة الصغير عند o بالصورة $dI_o = r^2 dm$ وللقرص كاملاً يعطى بالصورة $I_O = \int r^2\, dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة القرص الكلى تعطى من $m = \pi a^2 \rho \Delta z$ (أو محيط الحلقة مضروبة في الكثافة المصنوع منها مادة القرص) أو

$$dm = 2\pi r\rho\Delta z\, dr \rightarrow\; m = 2\pi\rho\Delta z\int_0^a r\, dr \;\rightarrow m = 2\pi\rho\Delta z\frac{r^2}{2}\Big|_0^a = \pi a^2\rho\Delta z$$



وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للقرص كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{zz}=\int r^2\,dm=\int r^2(2\pi r\rho\Delta z\,dr)=2\pi\rho\Delta z\int_0^a r^3\,dr=2\pi\rho\Delta z\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^a=\pi\rho\Delta z\frac{a^4}{2}$$

$$I_{zz}=\frac{\pi\rho a^4}{2}\frac{m}{m}=\frac{\pi\rho\Delta z\,a^4}{2}\frac{m}{\pi a^2\rho\Delta z}\quad\rightarrow\quad I_{zz}=\frac{1}{2}ma^2$$

و من نظرية المحاور المتوازية وبالنسبة للشكل المأخوذ لدينا $I_{z'z'}=I_{zz}+ma^2$ ومنها

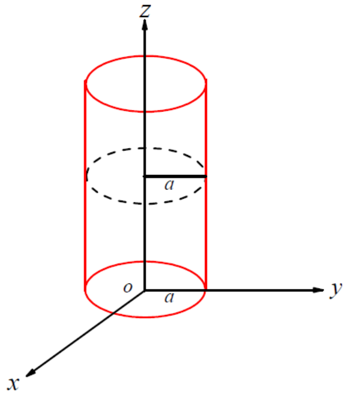
$$I_{z'z'}=\frac{1}{2}ma^2+ma^2\qquad\rightarrow\qquad I_{z'z'}=\frac{3}{2}ma^2$$

مثال(11)- أحسب عزم القصور الذاتي لأسطوانة مجوفة ؟

الحــــــــــل

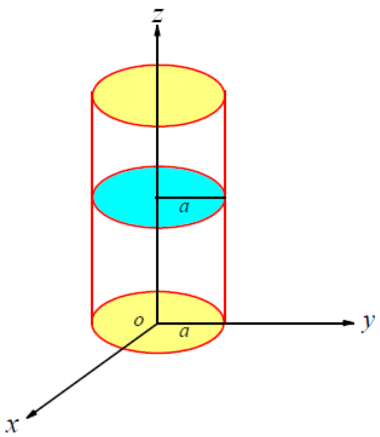
بأخذ الاسطوانة المجوفة كما بالشكل المقابل نقسمها الى عدد لانهائي من الحلقات الدائرية المنتظمة ونأخذ و احد من هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر a ويكون عزم القصور الذاتي لهذه للحلقة حول المحور oz بالصورة $dI_{zz}=a^2dm$ وللأسطوانة المجوفة كاملاً يعطى عزم القصور الذاتي بالصورة

$$I_{zz}=\int_0^m a^2\,dm=ma^2\quad\rightarrow\quad I_{zz}=ma^2$$



مثال(12)- أحسب عزم القصور الذاتي لأسطوانة مصمتة ؟

الحـــــــــــل



بأخذ الاسطوانة المصمتة كما بالشكل المقابل ونقسمها الى عدد لانهائي من الأقراص الدائرية المنتظمة ونأخذ واحد من هذه الأقراص ذو الكتلة dm ونصف القطر a.
ويكون عزم القصور الذاتي لهذه للقرص الصغير عند المحور oz بالصورة

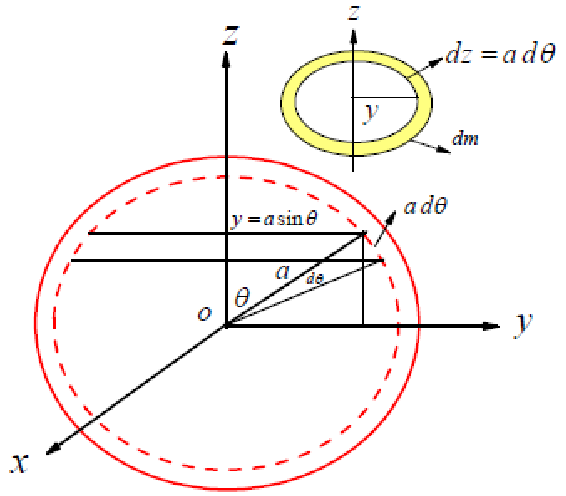
$$dI_{zz} = \frac{1}{2} a^2\, dm$$

وللأسطوانة كاملاً يعطى عزم القصور الذاتي بالصورة

$$I_{zz} = \int_0^m \frac{1}{2} a^2\, dm = \frac{1}{2} m a^2 \;\rightarrow\; I_{zz} = \frac{1}{2} m a^2$$

مثال(13): أحسب عزم القصور الذاتي لكرة مجوفة (Hollow Sphere) ؟

الحـــــــــــل



بأخذ الكرة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من وبفرض سمك هذه الحلقة يصنع زاوية والسمك dr هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر y $d\theta$ عند o. ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة حول المحور oz بالصورة $dI_{zz} = y^2 dm$

وللكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz} = \int y^2\, dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة الكرة الكلية

تعطى من $m = 4\pi a^2 \rho$ (مساحة سطح الكرة مضروبا في الكثافة) أو

$$dm = 2\pi\, y\,\rho\, dr = 2\pi(a\sin\theta)\,\rho\, a\,d\theta \rightarrow m = 2\pi\,\rho\, a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \rightarrow$$

$$m = -2\pi\,\rho\, a^2 \cos\theta \Big|_0^{\pi} = -2\pi\,\rho\, a^2\big(\cos(\pi) - \cos(0)\big) = 2\pi\,\rho\, a^2(1+1) = 4\pi\,\rho\, a^2$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للكرة كاملاً تعطى بالصورة

$$I_{zz} = \int y^2\, dm = 2\pi\,\rho\, a^4 \int_0^{\pi} (\sin)^2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi\,\rho\, a^4 \left[\int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta\right]$$

$$= 2\pi\,\rho\, a^4 \left[\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta - \int_0^{\pi} (\cos\theta)^2\, d(-\sin\theta)\right]$$

$$= 2\pi\,\rho\, a^4 \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}(\cos\theta)^3\right]_0^{\pi} = 2\pi\,\rho\, a^4 \left[-\cos(\pi) + \frac{1}{3}(\cos(\pi))^3 - \left\{-\cos(0) + \frac{1}{3}(\cos(0))^3\right\}\right]$$

$$= 2\pi\,\rho\, a^4 \left[1 + \frac{1}{3} - \left\{-1 + \frac{1}{3}\right\}\right] = 2\pi\,\rho\, a^4 \left[1 + \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = 2\pi\,\rho\, a^4 \left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3}\pi\,\rho\, a^4$$

$$I_{zz} = \frac{8}{3}\pi\,\rho\, a^4 \frac{m}{4\pi a^2 \rho} = \frac{2}{3} m a^2 \quad \text{Then} \quad I_{zz} = \frac{2}{3} m a^2$$

لاحظ أنه للكرة المجوفة يكون $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{3}ma^2$ وأيضا $I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}=2I_o$

لذلك فان $2I_o=\frac{2}{3}ma^2+\frac{2}{3}ma^2+\frac{2}{3}ma^2=\frac{6}{3}ma^2=2ma^2$

أي ان عزم القصور الذاتي للكرة المجوفة حول مركزها يكون بالصورة $I_o=ma^2$

و من نظرية المحاور المتوازية وبالنسبة للشكل المأخوذ يكون لدينا $I_{z'z'}=I_{zz}+ma^2$ ومنها

$$I_{z'z'}=\frac{2}{3}ma^2+ma^2 \rightarrow \quad I_{z'z'}=\frac{5}{3}ma^2$$

مثال(14) أحسب عزم القصور الذاتي لكرة مصمتة (Solid Sphere)؟

الحــــــــــل

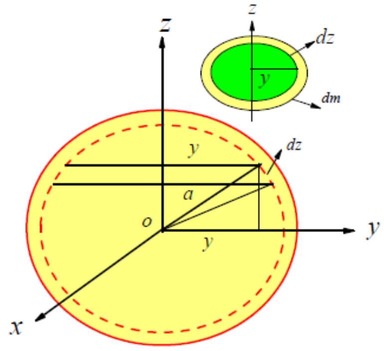
بأخذ الكرة المصمتة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الكرات المجوفة وبأخذ واحدة من هذه الكرات ذات الكتلة dm ونصف القطر r والسمك dr. ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الكرة حول المحور oz بالصورة $dI_{zz}=\frac{2}{3}(dm)r^2$.

وللكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz}=\int\frac{2}{3}(dm)r^2$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة الكرة الكلية تعطى من $m=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ (حجم الكرة مضروبا في الكثافة) أو بأخذ كتلة العنصر الصغير المختار (كرة مجوفة) والتي تكون بالصورة

$$dm=4\pi r^2\rho\, dr \rightarrow m=4\pi\rho\int_0^a r^2\, dr=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للكرة المصمتة كاملاً تعطى بالصورة

$$I_{zz}=\int\frac{2}{3}(dm)r^2=\int_0^a\frac{2}{3}\left(4\pi r^2\rho\, dr\right)r^2=\frac{8}{3}\pi\rho\int_0^a r^4\, dr=\frac{8}{3}\pi\rho\left.\frac{r^4}{5}\right|_0^a=\frac{8}{15}\pi\rho a^5$$



$$I_{zz} = \frac{8}{15}\pi\ \rho a^5 \frac{m}{m} = \frac{8}{15}\pi\ \rho a^5 \frac{m}{\frac{4}{3}\rho a^3} = \frac{2}{5} m a^2 \qquad \text{Then } I_{zz} = \frac{2}{5} m a^2$$

لاحظ أنه للكرة المصمتة يكون $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} m a^2$ وأيضا $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 I_o$

لذلك فان

$$2 I_o = \frac{2}{5} m a^2 + \frac{2}{5} m a^2 + \frac{2}{5} m a^2 = \frac{6}{5} m a^2 \rightarrow I_o = \frac{3}{5} m a^2$$

مثال(15): *أحسب عزم القصور الذاتي لنصف كرة مجوفة (Hollow Hemisphere)؟*

الحـــــــــل

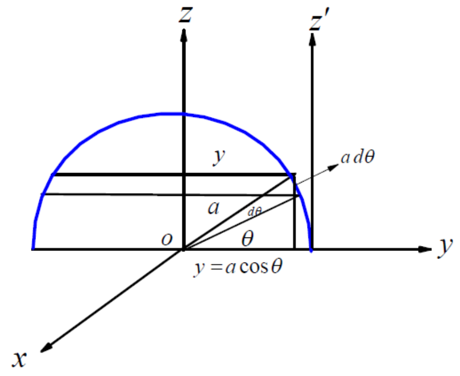
بأخذ نصف الكرة المجوفة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dr وبفرض سمك هذه الحلقة يصنع زاوية $d\theta$ عند o. ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة حول

المحور oz بالصورة $dI_{zz} = y^2 dm$. وللكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz} = \int y^2\, dm$ مع الأخذ

في الاعتبار بأن كتلة نصف الكرة المجوفة الكلية تعطى من $m = \frac{1}{2}(4\pi a^2 \rho) = 2\pi a^2 \rho$ (نصف مساحة سطح نصف الكرة مضروبا في الكثافة) والعنصر الصغير يعطى بالصورة

$$dm = 2\pi\, y\, \rho\, dr = 2\pi (a \cos\theta) \rho\, a\, d\theta$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي لنصف الكرة المجوفة كاملاً يعطى بالصورة



$$I_{zz} = \int y^2\,dm = \int y^2(2\pi\, y\,\rho\, dr) = \int (a\sin\theta)^2\, 2\pi(a\sin\theta)\,\rho\, a\,d\theta = 2\pi\,\rho\, a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^3\,d\theta$$

$$I_{zz} = 2\pi\,\rho\,a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2\,\sin\theta\,d\theta = 2\pi\,\rho\,a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-(\cos\theta)^2)\,\sin\theta\,d\theta\,,$$

Now let $t = \cos\theta \to \dfrac{dt}{d\theta} = -\sin\theta \to -\sin\theta\;d\theta = dt$. Then

$$I_{zz} = 2\pi\,\rho\,a^4\int_0^{1} (1-t^2)(-dt) = -2\pi\,\rho\,a^4(t-\frac{1}{3}t^3)\Big|_{-1}^{0} = -2\pi\,\rho\,a^4\left\{-1+\frac{1}{3}\right\}$$

$$= -2\pi\,\rho\,a^4\left\{-\frac{2}{3}\right\} = \frac{4}{3}\pi\,\rho\,a^4 = \frac{4}{3}\pi\,\rho\,a^4\,\frac{m}{2\pi\,a^2\,\rho} = \frac{2}{3}m\,a^2$$

أي أن $\boxed{I_{zz} = \frac{2}{3}m\,a^2}$

و من نظرية المحاور المتوازية وبالنسبة للشكل المأخوذ يكون لدينا $I_{z'z'} = I_{zz} + m\,a^2$ ومنها

$$I_{z'z'} = \frac{2}{3}m\,a^2 + m\,a^2 \to \quad I_{z'z'} = \frac{5}{3}m\,a^2$$

مثال(16): أحسب عزم القصور الذاتي لنصف كرة مصمتة (Solid Hemisphere)؟

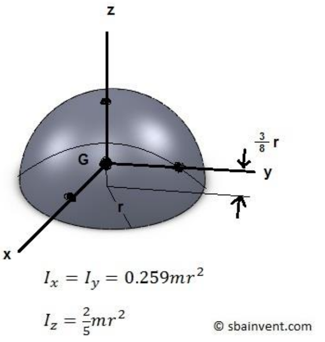
الحـــــــــل

بتقسيم نصف الكرة المصمتة الى عدد من أنصاف الكرات المجوفة وبأخذ واحدة من هذه الكرات ذات الكتلة dm ونصف القطر r والسمك dr ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الكرة حول المحور oz بالصورة $dI_{zz} = \frac{2}{3}(dm)\,r^2$ ولنصف الكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة

$$I_{zz}=\int\frac{2}{3}(dm)r^2$$

مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة نصف هذه الكرة الكلية تعطى من $m=\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (حجم الكرة مضروبا في الكثافة) أو بأخذ كتلة العنصر الصغير المختار (كرة مجوفة) والتي تكون بالصورة

$$dm=\frac{1}{2}\left(4\pi r^2\rho\,dr\right)=2\pi r^2\rho\,dr\rightarrow\ m=2\pi\rho\int_0^a r^2\,dr=\frac{2}{3}\pi a^3\rho$$



وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي لنصف الكرة المصمتة كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{zz}=\int\frac{2}{3}(dm)r^2=\int_0^a\frac{2}{3}\left(2\pi r^2\rho\,dr\right)r^2=\frac{4}{3}\pi\rho\int_0^a r^4\,dr=\frac{4}{3}\pi\rho\left.\frac{r^4}{5}\right|_0^a=\frac{4}{15}\pi\rho a^5$$

$$I_{zz}=\frac{4}{15}\pi\rho a^5\frac{m}{m}=\frac{4}{15}\pi\rho a^5\frac{m}{\frac{2}{3}\rho a^3}=\frac{2}{5}ma^2$$

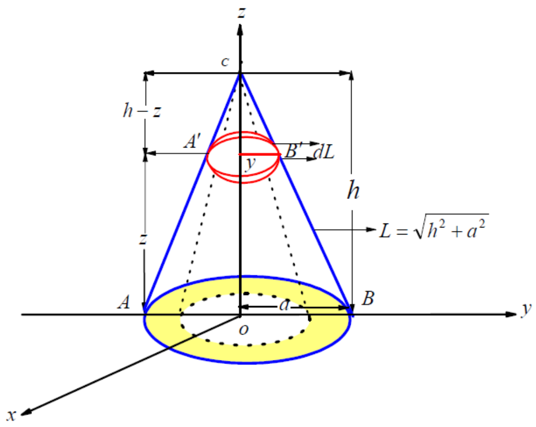
Then $I_{zz}=\frac{2}{5}ma^2$

مثال(17): أحسب عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم منتظم أجوف منسوبا لمحور ينصف رأسه وعمودي على قاعدة ؟

الحــــــــــل

بأخذ نصف المخروط المجوف كما بالشكل المقابل ثم نقسمه الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dL والذى

يقع على ارتفاع z من قاعدة المخروط ذات نصف القطر a.



لاحظ أنه من تشابه المثلثين $A'B'C$, ABC يكون لدينا

$$\frac{h-z}{h}=\frac{y}{a} \rightarrow y=\frac{a}{h}(h-z) \rightarrow z=\frac{h}{a}(a-y)$$

وعزم القصور الذاتي لهذه الحلقة حول المحور oz يعطى بالصورة $dI_{zz}=y^2 dm$ وللمخروط كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz}=\int y^2\, dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة المخروط المجوف الكلية تعطى من العلاقة $m=\pi\, a\, L\, \rho$ (المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم مضروبا في الكثافة = نصف محيط قاعدته × طول راسمه مضروبا في الكثافة) أو مأخوذة للعنصر المختار (حلقة ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dL)

$$dm=2\pi\, y\, \rho\, dL \rightarrow m=2\pi\, \rho \int_0^h y\, dL$$

لكن من المعلوم بأن طول القوس يعطى من العلاقة:

$$dL=\sqrt{(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dy=\sqrt{1+\left(-\frac{h}{a}\right)^2}\, dy=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+h^2}\, dy=\frac{L}{a}\, dy$$

وعلى ذلك فإن الكتلة الكلية للمخروط تعطى من

$$dm=2\pi\, \rho \int_0 y\, dL = 2\pi\, \rho \int_0^a y\frac{L}{a}dy = 2\pi\, \rho \frac{L}{a}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^a = 2\pi\, \rho \frac{L}{a}\frac{a^2}{2} \rightarrow m=\pi\, a\, L\, \rho$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للمخروط المجوف كاملاً يعطى بالصورة

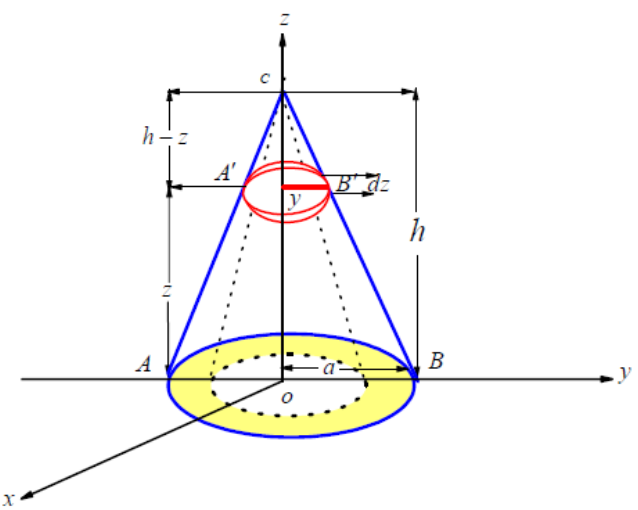
$$I_{zz}=\int_0^a y^2\,dm=\int_0^a y^2(2\pi\, y\,\rho\, dL)=2\pi\,\rho\int_0^a y^3\frac{L}{a}dy=2\pi\,\rho\frac{L}{a}\frac{y^4}{4}\Big|_0^a=2\pi\,\rho\frac{L}{a}\frac{a^4}{4}$$

$$=\pi\, L\rho\,\frac{a^3}{2}\quad=\pi\, L\rho\,\frac{a^3}{2}\,\frac{m}{m}=\pi\, L\rho\,\frac{a^3}{2}\;\frac{m}{\pi\, a\, L\,\rho}=\frac{1}{2}m\,a^2$$

أي أن $\quad I_{zz}=\frac{1}{2}m\,a^2$

مثال(18): *أحسب عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم منتظم مصمت؟*

الحـــــــــــل



بأخذ نصف المخروط المصمت كما بالشكل المقابل ثم نقسمه الى عدد من الأقراص الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الأقراص ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dz و الذى يقع ارتفاع z من قاعدة المخروط ذات نصف القطر a. لاحظ أنه من تشابه المثلثين $A'B'C$, ABC

يكون لدينا $\quad \frac{h-z}{h}=\frac{y}{a}\;\rightarrow\; y=\frac{a}{h}(h-z)\rightarrow\; z=\frac{h}{a}(a-y)$

وعزم القصور الذاتي لهذا القرص حول المحور oz يعطى بالصورة $dI_{zz}=\frac{1}{2}y^2dm$ وللمخروط

كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz}=\frac{1}{2}\int y^2\,dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة المخروط المصمت

الكلية تعطى من العلاقة $m=\frac{1}{3}\pi\, a^2 h\,\rho$ (حجم للمخروط الدائري القائم مضروبا في الكثافة = مساحة

القاعدة في ثلث الارتفاع) أو مأخوذة للعنصر المختار (القرص ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dz) وعلى ذلك فإن الكتلة الكلية للمخروط تعطى من

$$dm=\pi y^2 \rho\, dz \to m=\pi\rho\int_0^h\left(\frac{a}{h}(h-z)\right)^2 dz=\pi\rho\frac{a^2}{h^2}\int_0^h\left(h^2-2hz+z^2\right)dz$$

$$=\pi\rho\frac{a^2}{h^2}\left(h^2 z-2h\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=\pi\rho\frac{a^2}{h^2}\left(h^3-h^3+\frac{h^3}{3}\right)\to m=\frac{1}{3}\pi a^2 h\,\rho$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للمخروط المصمت حول محور oz كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{zz}=\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dm=\frac{1}{2}\int_0^h y^2\left(\pi y^2\rho\, dz\right)=\frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h y^4\,dz=\frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h\left(\frac{a}{h}(h-z)\right)^4 dz$$

$$=\frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{a}{h}\right)^4\int_0^h(h-z)^4\,dz=\frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{a}{h}\right)^4\frac{(h-z)^5}{-5}\Bigg|_0^h=\frac{1}{2}\pi\,\rho\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5}=\frac{1}{10}\pi\,\rho a^4 h\; I_{zz}=\frac{3}{10}m a^2$$

$$=\frac{1}{10}\pi\,\rho a^4 h\,\frac{m}{m}==\frac{1}{10}\pi\,\rho a^4 h\,\frac{m}{\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho}=\frac{3}{10}m a^2$$

أي أن

لاحظ ان عزم القصور الذاتي للمخروط المصمت حول o

$$I_o=\int_0^h z^2\,dm=\int_0^h z^2\left(\pi y^2\rho\, dz\right)=\pi\rho\int_0^h z^2 y^2\,dz=\pi\rho\int_0^h z^2\left(\frac{a}{h}(h-z)\right)^2 dz$$

$$=\pi\rho\left(\frac{a}{h}\right)^2\int_0^h\left(h^2 z^2-2hz^3+z^4\right)dz=\pi\rho\frac{a^2}{h^2}\left(h^2\frac{z^3}{3}-h\frac{z^4}{2}+\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^h$$

$$=\pi\rho\frac{a^2}{h^2}h^5\left(\frac{10-15+6}{30}\right)=\frac{1}{30}\pi\,\rho a^2 h^3=\frac{1}{30}\pi\,\rho a^2 h^3\,\frac{m}{\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho}=\frac{1}{10}m h^2$$

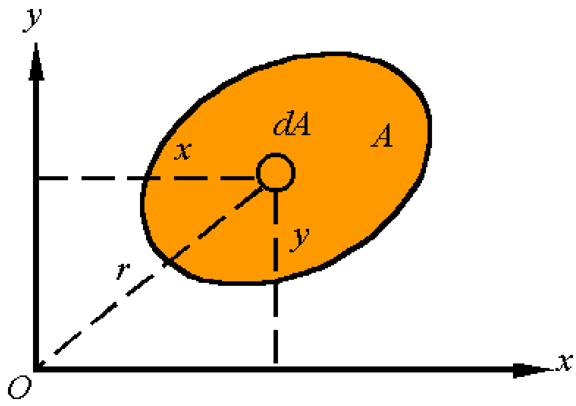
أي أن $I_o=\frac{1}{10}m h^2$

العزم الثاني للمســـــاحة

عزم القصور الذاتي للمساحة

Area Moment of Inertia (The Moment of Area)

للمساحة المعطاة بالشكل المبين يعطى العزم الثاني للمســـــاحة بالصورة



العزم الثاني للمساحة منسوباً للمحور $o\,x$ يعطى بالصورة $I_{xx} = y^2\,dA,$

و العزم الثاني للمساحة منسوباً للمحور $o\,y$ يعطى بالصورة $I_{yy} = x^2\,dA,$

بينما العزم الثاني للمساحة منسوباً للنقطة o يعطى بالصورة $I_O = r^2 dA = (x^2 + y^2)\,dA = I_{xx} + I_{yy}$

وتطبق نظرية المحاور المتوازية بالصورة $I_{xx} = I_{x'x'} + A\bar{y}^2, \quad I_{yy} = I_{y'y'} + A\bar{x}^2$

ويكون للصفيحة المستطيلة العزم الثاني بالصورة

الجسم : صفيحة على هيئة مستطيل أبعاده (a,b)	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل
منسوبا للمحور I_{xx}	$I_{xx} = \frac{1}{3}a\,b^3$	$I_{x'x'} = \frac{1}{12}a\,b^3$	$I_{x''x''} = \frac{1}{3}a\,b^3$
منسوبا للمحور I_{yy}	$I_{yy} = \frac{1}{3}ba^3$	$I_{y'y'} = \frac{1}{12}ba^3$	$I_{y''y''} = \frac{1}{3}ba^3$
منسوبا لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz} = \frac{1}{3}ab(a^2 + b^2)$	$I_{z'z'} = \frac{1}{12}ab(a^2 + b^2)$	$I_{z''z''} = \frac{1}{3}ab(a^2 + b^2)$

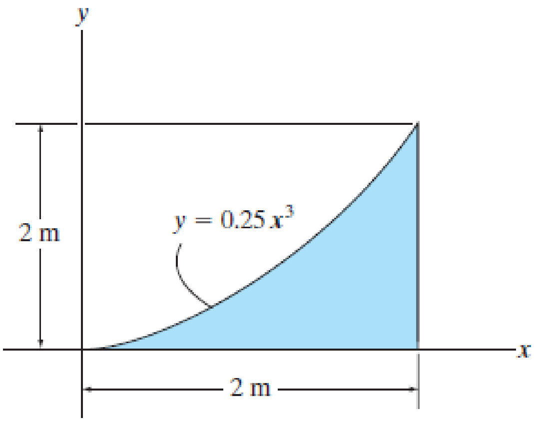
ويكون العزم الثاني للصفيحة المثلثية بالصورة

الجسم : صفيحة على هيئة مثلث قاعدة a و ارتفاعه h	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل
منسوبا للمحور I_{xx}	$I_{xx} = \frac{1}{12}\,a\,h^3$	$I_{x'x'} = \frac{1}{36}a\,h^3$	$I_{x''x''} = \frac{1}{4}\,a\,h^3$

I_{yy} منسوبا للمحور	$I_{yy}=\frac{1}{12}ha^3$	$I_{y'y'}=\frac{1}{36}ha^3$	$I_{y''y''}=\frac{1}{4}ha^3$
منسوبا لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz}=\frac{ah}{12}(a^2+h^2)$	$I_{z'z'}=\frac{ah}{36}(a^2+h^2)$	$I_{z''z''}=\frac{ah}{12}(a^2+3h^2)$, $I_{z''z''}=\frac{ah}{12}(3a^2+h^2)$

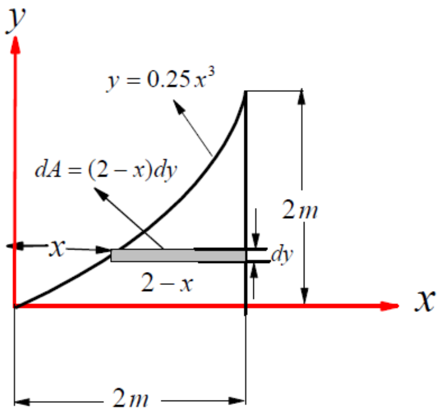
بالنسبة للعزم الثاني لمساحة دائرية يعطى بالصورة $I_{xx}=\frac{1}{4}(\pi a^2)a^2=\frac{\pi a^4}{4}$

مثال (19): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من المحورين ox, oy؟ .



الحــــــــل

<u>عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور x</u> بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(2-x)$ و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox و عند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA=(2-x)\,dy$.

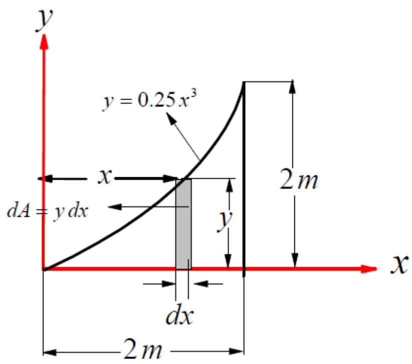


ويعطى العزم المساحي بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_0^2 y^2(2-x)dy = \int_0^2 y^2\left(2-(4y)^{\frac{1}{3}}\right)dy = \int_0^2\left(2y^2-(4)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{7}{3}}\right)dy$$

$$I_{xx} = \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{10}(4)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{10}{3}}\right)_0^2 = 0.533m^4$$

<u>عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور y</u> بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله y و عرضة dx وعلى بعد x من المحور oy وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = y\,dx$.

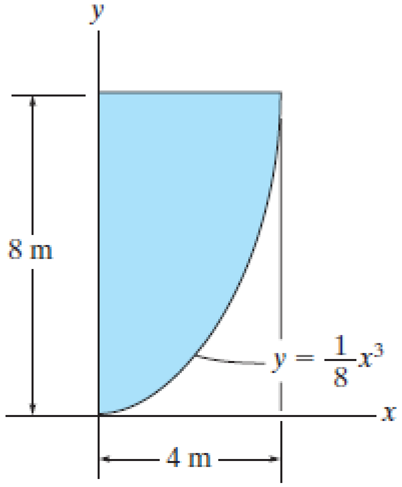


ويعطى بذلك العزم المساحي بالصورة

$$I_{yy} = \int x^2 dA = \int_0^2 x^2 y\,dx = \int_0^2 x^2(0.25)x^3\,dx = \int_0^2 (0.25)x^5\,dy = \frac{(2)^6}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3} = 2.67m^4$$

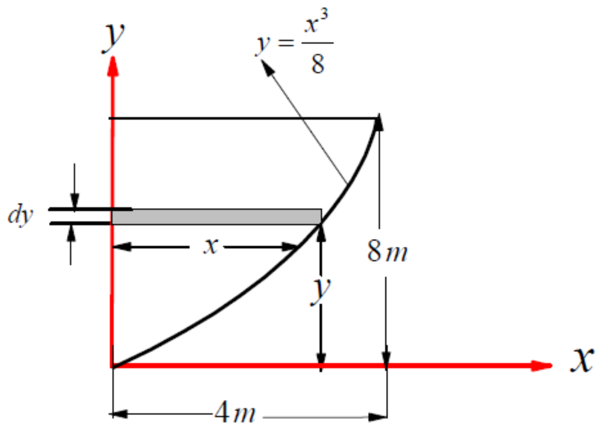
مثال (20): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من

. المحورين ox, oy؟



الحـــــــــــل

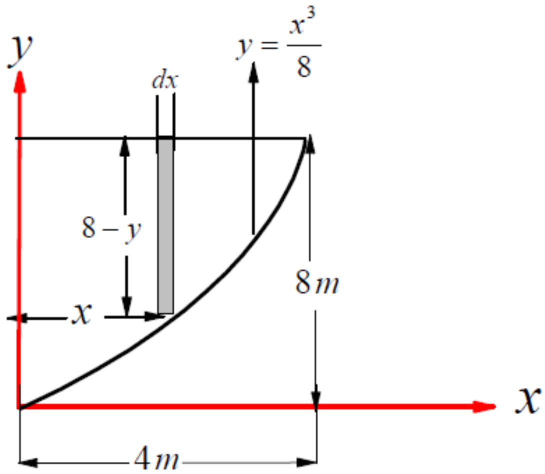
<u>عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور x</u> بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله (x) و عرضة dy و على بعد y من المحور ox و عند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (x)\,dy$.



ويعطى بذلك العزم المساحي بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_0^8 y^2 x\,dy = \int_0^8 y^2 (2) y^{\frac{1}{3}}\,dy = 2\int_0^8 y^{\frac{7}{3}}\,dy = 2\,\frac{3(8)^{\frac{10}{3}}}{10} = \frac{3}{5}(1024) = 614.4\,m^4$$

عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور y بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(8-y)$ و عرضة dx وعلى بعد x من المحور ox و عند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA=(8-y)\,dx$.

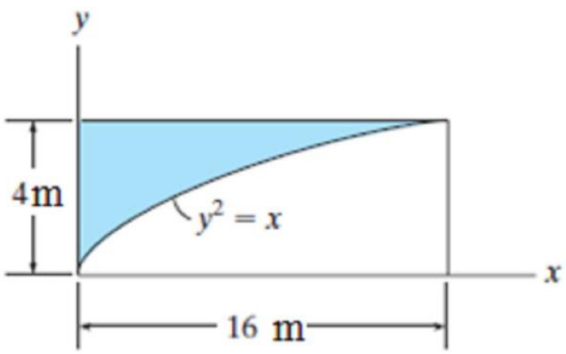


ويعطى العزم المساحي بالصورة

$$I_{yy}=\int x^2 dA=\int_0^4 x^2(8-y)dx=\int_0^4 x^2\left(8-\frac{x^3}{8}\right)dx=\int_0^4\left(8x^2-\frac{x^5}{8}\right)dx=$$

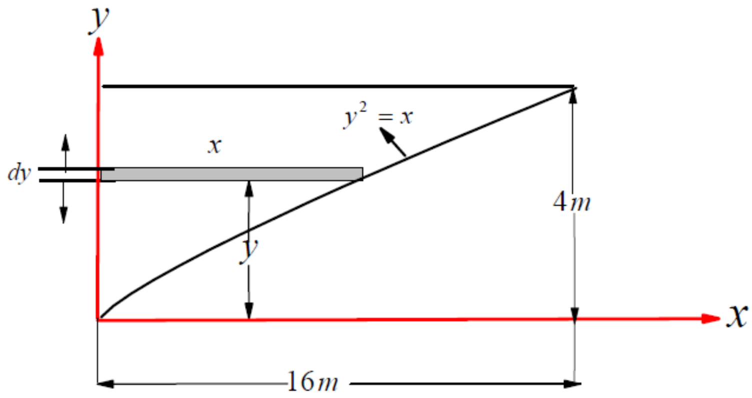
$$I_{yy}=\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{48}y^6\right)_0^4=\frac{8}{3}(4)^3-\frac{1}{48}(4)^6=170.666-85.333=85.4m^4$$

مثال (21): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من المحورين ox, oy؟ .



الحـــــــــل

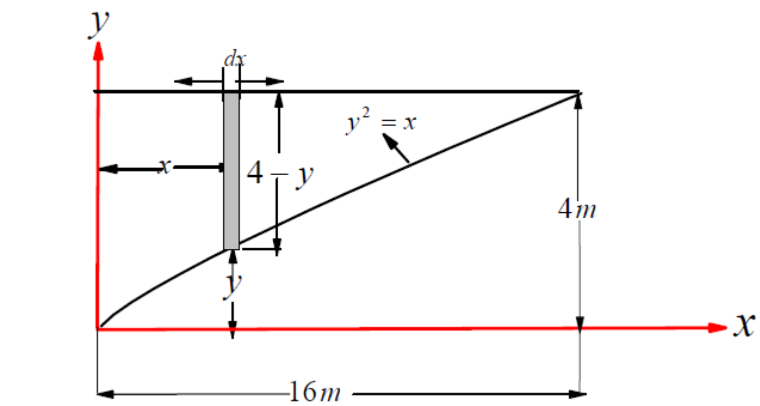
<u>عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور x</u> بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله (x) و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = x\,dy$.



ويعطى بذلك العزم المساحي بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_0^4 y^2 x\,dy = \int_0^4 y^2 (y)^2\,dy = \int_0^4 y^4\,dy = \frac{(4)^5}{5} = \frac{1024}{5} = 204.8\,m^4$$

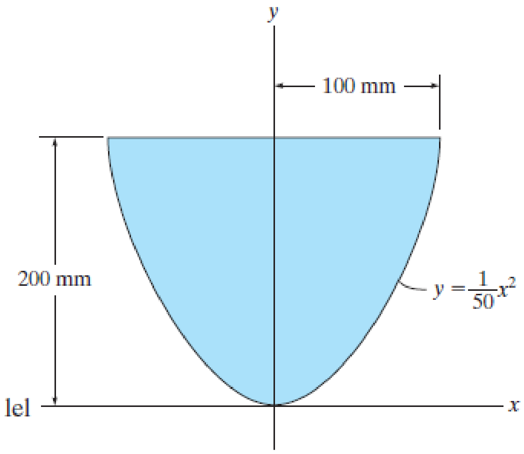
<u>عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور y</u> بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(4-y)$ و عرضة dy وعلى بعد x من المحور oy وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (4-y)\,dx$.



$$I_{yy} = \int x^2 dA = \int_0^{16} x^2 (4-y)\,dx = \int_0^{16} x^2\left(4-(x)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \int_0^{16}\left(4x^2-(x)^{\frac{5}{2}}\right)dx = \frac{4(16)^3}{3} - \frac{2(16)^{\frac{7}{2}}}{7}$$

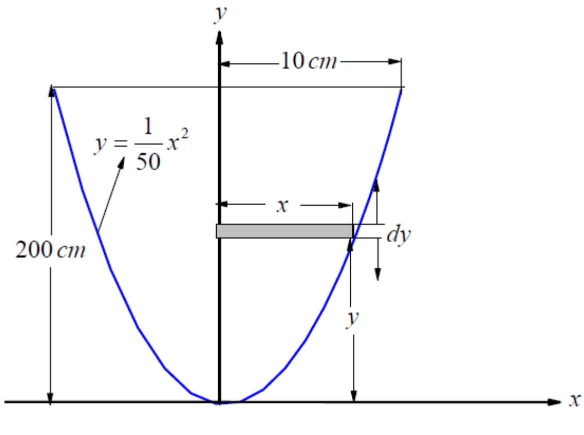
$$I_{yy} = 5461.333 - 4861.1428 = 780.2\,m^4$$

مثال (22): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من المحورين ox, oy؟ .



الحـــــــــل

عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور x بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله (x) و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = x\,dy$.



ويعطى بذلك العزم المساحي للكلى بالصورة

$$I_{xx} = 2\int y^2 dA = 2\int_0^{200} y^2 x\,dy = 2\int_0^{200} y^2 (50y)^{\frac{1}{2}}\,dy = 2(50)^{\frac{1}{2}}\int_0^{200} y^{\frac{5}{2}}\,dy = 2(50)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)_0^{200}$$

$$= 2(50)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{7}(200)^{\frac{7}{2}}\right) = 457\ 10^6\ mm^4$$

عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور y

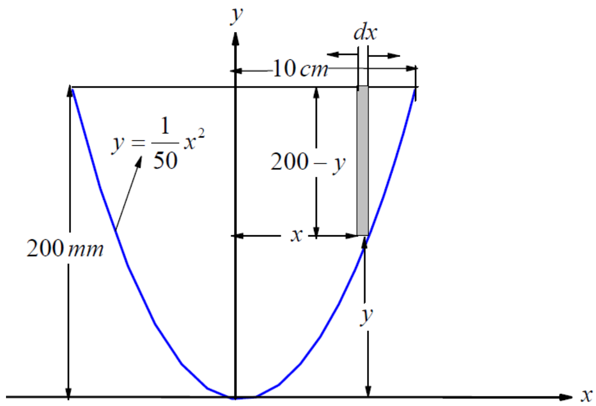
من الشكل المعطى واضح ان العنصر المأخوذ عبارة عن مستطيل أبعاده (x, dy) لذلك عزم القصور الذاتي له منسوبا لمحور y يعطى من $I_{yy} = \int \frac{1}{3} x^3 dy$ ويكون عزم القصور الذاتي للمساحة كاملاً منسوبا لمحور y بالصورة

$$I_{yy} = 2\int \frac{1}{3} x^3 dy = 2\int_0^{200} \frac{1}{3}(50y)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2(50)^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^{200} (y)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2(50)^{\frac{3}{2}}}{3}\frac{2(200)^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$= \frac{4}{15}(50)^{\frac{3}{2}}(200)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15}(50)^{\frac{2}{2}}(50)^{\frac{1}{2}}(200)^{\frac{4}{2}}(200)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{15}(50)(200)^2(50)^{\frac{1}{2}}(200)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{15}(50)(40000)(10000)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{15}(2000000)(100) = \frac{800}{15}(1000000) = 53.33\times 10^{16}\ mm^4$$

بطريقة اخرى عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور y بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(20-y)$ و عرضة dy وعلى بعد x من المحور oy وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (20-y)\,dx$.



$$I_{yy} = 2\int x^2 dA = 2\int_0^{100} x^2(200-y)dx = 2\int_0^{100} x^2\left(200-\frac{1}{50}x^2\right)dx = 2\int_0^{100}\left(200x^2-\frac{1}{50}x^4\right)dx$$

$$= 2\left(\frac{200}{3}x^3-\frac{1}{250}x^5\right)_0^{100} = 2\left(\frac{200}{3}10^6-\frac{1}{250}10^{10}\right) = 2\left(\frac{200}{3}-\frac{1000}{25}\right)10^6$$

$$== 2\,(66.6666-40)10^6 = 53.33\times 10^{16}\ mm^4$$

الفصـــل الثــــالث

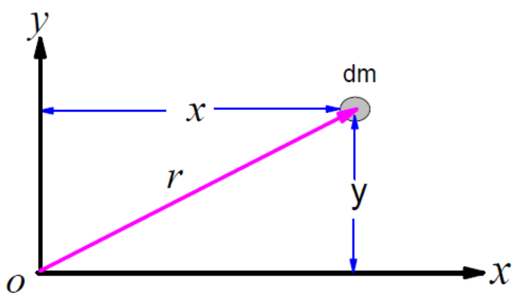
حاصل ضرب القصور الذاتي

The Product of Inertia

مقدمــــة:

حاصل ضرب القصور الذاتي للكتل

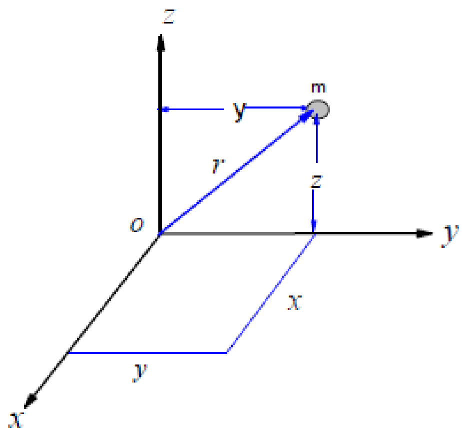
(1)- اذا كان الجسيم واقع في مستوى كما في الشكل المقابل يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا الى المحورين ox,oy يعطى بالصورة:



$$I_{xy} = x\,y\,dm \qquad (1)$$

لاحظ ان $I_{xy} = x\,y\,dm = I_{yx} = y\,x\,dm$

(2)- اذا كان الجسم واقع في الفراغ : بفرض أنه لدينا جسيم كتلته m واقع في الفراغ كما بالشكل:



فان حاصل ضرب القصور الذاتي للمحاور المختلفة يعطى على النحو التالي

يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا الى المحورين ox,oy يعطى بالصورة:

$$I_{xy} = x\,y\,dm \qquad (2)$$

ومنسوبا الى المحورين ox,oz يعطى بالصورة:

$$I_{xz} = x\,z\,dm \qquad (3)$$

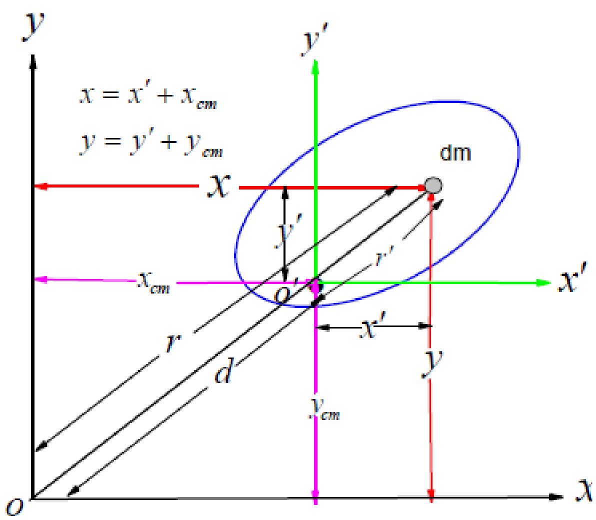
بينما منسوبا الى المحورين oy,oz يعطى بالصورة:

$$I_{yz} = y\,z\,dm \qquad (4)$$

<u>نظرية المحاور المتوازية لحاصل ضرب القصور الذاتي</u>

parallel-axis theorem for products of inertia

بفرض انه لدينا جسم ما كما في الشكل المقابل كتلته m ومركز ثقلة هي النقطة (x_{cm}, y_{cm})



بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للنقطة o هو (x, y) وبالنسبة لمركز الثقل cm هو (x', y'). بالنسبة للمحورين ox, oy يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي لكتلته dm بالصورة

$$I_{xy} = x\,y\,dm \qquad (1)$$

ويعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للجسم كله (m)

$$I_{xy} = \int x\,y\,dm \qquad (2)$$

لكن من الرسم واضح أن $x = x' + x_{cm}, \quad y = y' + y_{cm}$ وبالتعويض في العلاقة (2) نحصل على

$$I_{xy}=\int x\,y\,dm=\int\left\{\left(x'+x_{cm}\right)\left(y'+y_{cm}\right)\right\}dm=\int\left\{x'y'+x'y_{cm}+x_{cm}y'+x_{cm}\,y_{cm}\right\}dm$$

$$I_{xy}=\int x'y'dm+y_{cm}\int x'dm+x_{cm}\int y'dm+x_{cm}\,y_{cm}\int dm \qquad (3)$$

لكن من المعلوم بأن

$$\int x'y'dm=I_{x'y'},\quad x_{cm}\,y_{cm}\int dm=x_{cm}\,y_{cm}\,m,$$

$$\bar{x}=\frac{\int x'\,dm}{\int dm}\rightarrow\int x'\,dm=\bar{x}\int dm,\quad \bar{y}=\frac{\int y'\,dm}{\int dm}\rightarrow\int y'\,dm=\bar{y}\int dm \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل على

$$I_{xy}=I_{x'y'}+y_{cm}\,\bar{x}\int dm+x_{cm}\,\bar{y}\int dm+x_{cm}\,y_{cm}m$$

$$I_{xy}=I_{x'y'}+y_{cm}\,\bar{x}\,m+x_{cm}\,\bar{y}\,m+x_{cm}\,y_{cm}m \qquad (5)$$

لكن $(\bar{x},\bar{y})$ هو أحداثي بعد مركز الثقل عن مركز الثقل وهو يساوى الصفر. وبالتعويض في (5) نحصل

$$I_{xy}=I_{x'y'}+m\,x_{cm}\,y_{cm} \qquad (6)$$

حيث I_{xy} هو حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين $o\,x,\ oy$ بينما $I_{x'y'}$ هو حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين $o'x',\ o'y'$, $x_{cm}\,,y_{cm}$ هما بعد مركز الثقل عن المحورين $o\,x,\ oy$ على الترتيب.

ملاحظات على حاصل ضرب القصور الذاتي

(1)- حاصل ضرب القصور الذاتي عبارة عن حاصل ضرب إحداثيات مختلفة لذلك فهو يمكن ان يكون كمية موجبة أو سالبة

(2)- لحاصل ضرب القصور الذاتي يكون $I_{xy}=I_{yx},\ I_{yz}=I_{zy},\ I_{zx}=I_{xz}$

(3)- اذا تلاشى حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة لأى مستوين من مستويات الإحداثيات قيل أن محور تقاطع هذين المحورين هو محور أساسي (رئيس)

(4)- اذا كان الجسم عبارة عن صفيحة مستوية ولتكن تقع مثلاً في المستوى xy وتلاشى حاصل ضرب القصور الذاتي (أي أن $I_{xy}=0$) فيقال أن المحورين $ox,\ oy$ هما محورين أساسيين

(5)- أي محور تماثل في صفيحة مستوية يكون مع أي محور عمودي علية محورين أساسيين

(6)- ينعدم حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة للمحورين متعامدين وكان أحدهما أو كلاهما محور تماثل.

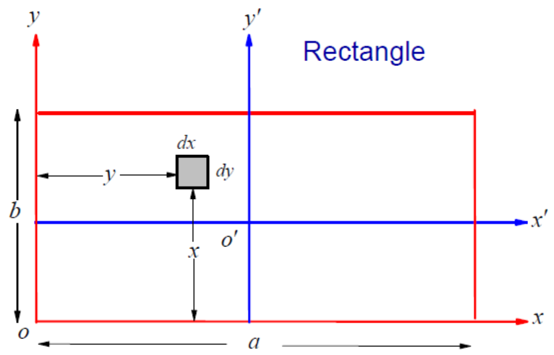
مثال (1): احسب حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة منتظمة على شكل مستطيل؟

الحـــــــــل

بأخذ الصفيحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله dx و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وعلى بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفيحة هي ρ. فتعطى كتلته هذا العنصر (dm) بالصورة $dm = \rho\, x\, dy$ وتكون الكتلة الكلية للصفيحة المثلثية بالصورة

$$dm = \rho\, dx\, dy \rightarrow m = \rho \int_0^b \int_0^a dx\, dy = \rho a \int_0^b dy = ab\rho \rightarrow\ m = a\, b\, \rho$$

ويمكن ايجاد الكتلة الكلية للصفيحة المثلثية مباشراً بالصورة ($m = a\, b\, \rho$) أي مساحة الصفيحة مضروبة في الكثافة.



بالنسبة لمحورين $ox,\ oy$ يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة $dI_{xy} = (dm)\, x\, y$.

وبالنسبة الصفيحة المربعة ككل يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي بالصورة

$$I_{xy} = \int\int x\, y\, (\rho\, dx\, dy) \rightarrow I_{xy} = \rho \int_0^b \int_0^a x\, y\, dx\, dy = \frac{a^2}{2}\frac{b^2}{2}\rho = \frac{a^2 b^2}{4}\rho\frac{m}{m}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{4}\rho\frac{m}{a b \rho} = \frac{1}{4} mab \qquad \rightarrow \qquad I_{xy} = \frac{1}{4} m\, a\, b$$

من نظرية المحاور المتوازية لحاصل ضرب القصور الذاتي يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للصفيحة المربعة بالنسبة لمحورين $ox',\ oy'$ من:

$$I_{xy}=I_{x'y'}+m\,x_{cm}\,y_{cm}\;\rightarrow\;\frac{1}{4}mab=I_{x'y'}+m(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}b)\rightarrow I_{x'y'}=\frac{1}{4}mab-\frac{1}{4}m\,ab=0\;I_{x'y'}=0$$

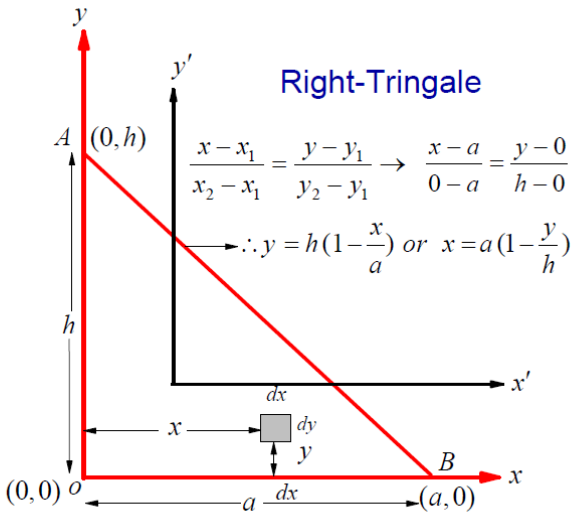
أي أن

مع ملاحظة أن كل من المحورين $ox',\ oy'$ هما محورين تماثل بالنسبة للصفيحة المربعة فيكون $I_{x'y'}=0$

مثال (2) : احسب حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة منتظمة على شكل المثلث؟

الحــــــــــل

بأخذ الصفيحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله dx و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وعلى بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفيحة هي ρ. فتعطى كتلته هذا العنصر(dm) بالصورة $dm=\rho\,x\,dy$ وتكون الكتلة الكلية للصفيحة المثلثية بالصورة



$$dm=\rho\;dx\,dy\rightarrow m=\rho\int_0^h\int_0^{a(1-\frac{y}{h})}dx\,dy=a\rho\left[h-\frac{h^2}{2h}\right]=\frac{1}{2}a\,h\,\rho$$

ويمكن ايجاد الكتلة الكلية للصفيحة المثلثية مباشراً بالصورة ($m=\frac{1}{2}a\,h\,\rho$) أي مساحة الصفيحة مضروبة في الكثافة. بالنسبة لمحورين $ox,\ oy$ يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة $dI_{xy}=(dm)\,x\,y$. وبالنسبة للمثلث كاملا يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي

بالصورة

$$I_{xy}=\int\int x\,y\,(\rho\,dx\,dy)\rightarrow I_{xy}=\rho\int_0^h\int_0^{a(1-\frac{y}{h})}x\,y\,dx\,dy=\frac{a^2}{2}\rho\int_0^h(1-\frac{y}{h})^2\,y\,dy$$

$$=\frac{a^2}{2h^2}\rho\int_0^h(h-y)^2\,y\,dy=\frac{a^2}{2h^2}\rho\int_0^h(h^2-2yh+y^2)\,y\,dy=\frac{a^2}{2h^2}\rho\int_0^h(yh^2-2y^2h+y^3)\,dy$$

$$=\frac{a^2}{2h^2}\rho\left[\frac{y^2h^2}{2}-\frac{2y^3}{3}h+\frac{y^4}{4}\right]_0^h=\frac{a^2}{2h^2}\rho\left[\frac{h^4}{2}-\frac{2h^4}{3}+\frac{h^4}{4}\right]=\frac{a^2h^4}{24h^2}\rho[6-8+3]=\frac{a^2h^4}{24h^2}\rho$$

$$=\frac{a^2h^2}{24}\rho\frac{m}{m}=\frac{a^2h^2}{24}\rho\frac{m}{\frac{1}{2}\rho ah}=\frac{1}{12}mah\quad\rightarrow\quad I_{xy}=\frac{1}{12}mah$$

لاحظ أن كل من المحورين $ox',\ oy'$ هما ليس محورين تماثل بالنسبة للصفيحة المثلثية فيكون $I_{x'y'}\neq 0$.

ومن نظرية المحاور المتوازية لحاصل ضرب القصور الذاتي يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة للمحورين $ox',\ oy'$ بالصورة

$$I_{xy}=I_{x'y'}+m\,x_{cm}\,y_{cm}\quad\rightarrow\quad\frac{1}{12}mah=I_{x'y'}+m(\frac{1}{3}a)(\frac{1}{3}h)$$

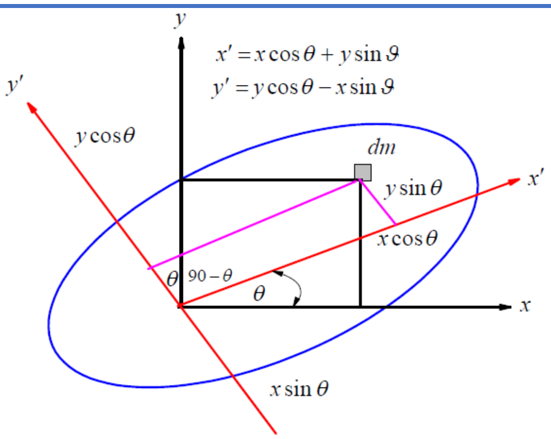
$$=I_{x'y'}=\frac{1}{12}mah-\frac{1}{9}mah=\frac{1}{72}(6-8)\rightarrow\ I_{x'y'}=-\frac{1}{36}mah$$

كذلك

$$I_{x''y''}=I_{x'y'}+m\,x_{cm}\,y_{cm}\quad\rightarrow\ I_{x''y''}=-\frac{1}{36}mah+m(\frac{2}{3}a)(\frac{-1}{3}h)$$

$$=I_{x'y'}=-\frac{1}{36}mah-\frac{2}{9}mah=\frac{1}{36}(-1-8)\,mah\rightarrow I_{x''y''}=\frac{-1}{4}mah$$

نظرية المحاور المائلة لعزم القصور الذاتي (Moments of Inertia about inclined axis)



بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للمحورين ox, oy هو (x, y) و بالنسبة للمحورين ox', oy' هو (x', y'). بالنسبة للمحور oy' يعطى عزم القصور الذاتي لكتلته dm بالصورة $dI_{x'x'} = (dm)\,y'^2$

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للمحور oy'

$$I_{x'x'} = \int y'^2\, dm \qquad (1)$$

لكن من الرسم واضح أن $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$ وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

$$I_{x'x'} = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\, dm = \int y^2 \cos^2\theta\, dm + \int x^2 \sin^2\theta\, dm - 2\int xy\cos\theta\sin\theta\, dm$$

$$I_{x'x'} = \cos^2\theta \int y^2\, dm + \sin^2\theta \int x^2\, dm - 2\cos\theta\sin\theta \int xy\, dm$$

$$I_{x'x'} = I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \qquad (2)$$

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للمحور ox'

$$I_{y'y'} = \int x'^2\, dm \qquad (3)$$

لكن من الرسم واضح أن $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ وبالتعويض في العلاقة (3) نحصل على

$$I_{y'y'} = \int (x\cos\theta + y\sin\theta)^2\, dm = \int x^2 \cos^2\theta\, dm + \int y^2 \sin^2\theta\, dm + 2\int xy\cos\theta\sin\theta\, dm$$

$$I_{y'y'} = \cos^2\theta \int x^2\, dm + \sin^2\theta \int y^2\, dm + 2\cos\theta\sin\theta \int xy\, dm$$

$$I_{y'y'} = I_{yy}\cos^2\theta + I_{xx}\sin^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad (4)$$

ويعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للمحورين $ox',\ oy'$

$$I_{x'y'} = \int x'y'\, dm \qquad (5)$$

لكن من الرسم واضح أن $x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = y\cos\theta - x\sin\theta$ وبالتعويض في العلاقة (5) نحصل على

$$I_{x'y'} = \int (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)dm$$
$$I_{x'y'} = \int x\,y\cos^2\theta\,dm - \int x^2 \sin\theta\cos\theta\,dm + \int y^2\,\cos\theta\,\sin\theta\,dm - \int x\,y\sin^2\theta\,dm$$
$$I_{x'y'} = \cos^2\theta \int x\,y\,dm - \sin\theta\cos\theta \int x^2\,dm + \sin\theta\cos\theta \int y^2 dm - \sin^2\theta \int x\,y\,dm$$
$$I_{x'y'} = \cos^2\theta\, I_{xy} - \cos\theta\sin\theta\, I_{yy} + \cos\theta\sin\theta\, I_{xx} - \sin^2\theta\, I_{xy}$$
$$I_{x'y'} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) I_{xy} + \sin\theta\,\cos\theta (I_{xx} - I_{yy})$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad (6)$$

اكبر قيمة للزاوية يمكن الحصول عليها بوضع $I_{x'y'} = 0$ ومن المعادلة (6) يمكن القول بأن

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \qquad (7)$$

Eq. (2)....... $I_{x'x'} = I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta - \sin 2\theta\, I_{xy}$

$$I_{x'x'} = I_{xx}\frac{1+\cos 2\theta}{2} + I_{yy}\frac{1-\cos 2\theta}{2} - \sin 2\theta\, I_{xy}$$

$$I_{x'x'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \qquad (8)$$

Eq. (4)....... $I_{y'y'} = I_{yy}\cos^2\theta + I_{xx}\sin^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$

$$I_{y'y'} = I_{yy}\frac{1+\cos 2\theta}{2} + I_{xx}\frac{1-\cos 2\theta}{2} + I_{xy}\sin 2\theta$$

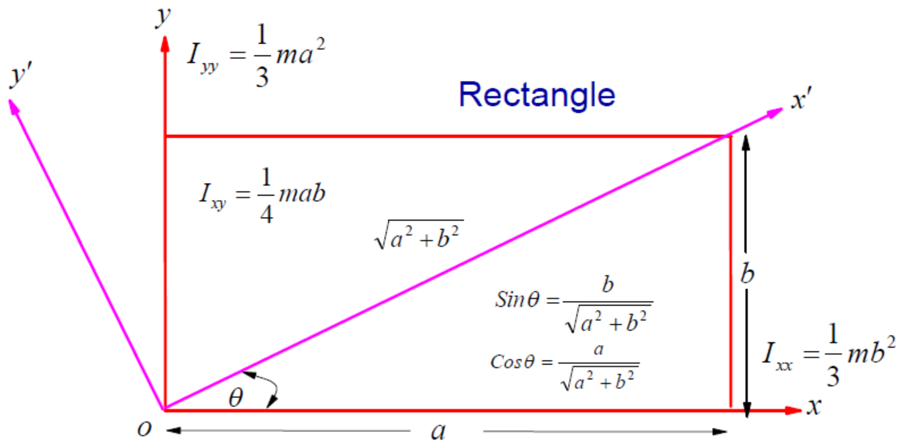
$$I_{y'y'} = \frac{I_{yy} + I_{xx}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{xx}}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad (9)$$

لاحظ أنه بجمع المعادلتين (2), (1) أو (9), (8) نحصل على

$$I_{x'x'} + I_{y'y'} = I_{xx} + I_{yy} \qquad (10)$$

مثال(3)- أحسب عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة منتظمة على شكل مستطيل منسوباً لأحد أقطاره ؟

الحـــــــل



عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي للصفيحة منسوباً للمحاور $o\,x', o\,y'$ على الترتيب يعطوا بالصورة

$$I_{x'x'} = I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta - I_{xy}\,\sin 2\theta \qquad (1)$$

$$I_{y'y'} = I_{yy}\cos^2\theta + I_{xx}\sin^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad (2)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad (3)$$

وحيث أن

$$I_{xx} = \frac{1}{3}mb^2, \qquad I_{yy} = \frac{1}{3}ma^2, \qquad I_{xy} = \frac{1}{4}mab \qquad (4)$$

ومن العلاقات (1-4) والرسم المعطى نحصل على

$$I_{x'x'} = I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta - I_{xy}\,\sin 2\theta$$

$$I_{x'x'} == \frac{1}{3}mb^2\cos^2\theta + \frac{1}{3}ma^2\sin^2\theta - \frac{1}{4}mab\,(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3}mb^2\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \frac{1}{3}ma^2\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 - \frac{2}{4}mab\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3}m\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{3}m\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{1}{2}m\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = m\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,\frac{1}{6}(2+2-3) = \frac{1}{6}m\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{6} m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \qquad (5)$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} \cos^2 \theta + I_{xx} \sin^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'y'} == \frac{1}{3} m a^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{3} m b^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{4} m ab \, (2 \sin\theta \cos\theta)$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{3} m a^2 \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{1}{3} m b^2 \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{2}{4} m ab \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{3} m \frac{a^4}{a^2 + b^2} + \frac{1}{3} m \frac{b^4}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{3} m \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{6(a^2 + b^2)} m \left(2a^4 + 3a^2 b^2 + 2b^4 \right) \qquad (6)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \left(I_{xx} - I_{yy} \right) \sin\theta \cos\theta + I_{xy} \left(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right)$$

$$I_{x'y'} = \left(\frac{1}{3} m b^2 - \frac{1}{3} m a^2 \right) \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) +$$

$$\frac{1}{4} m ab \left\{ \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right\}$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{3} m \left(b^2 - a^2 \right) \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) + \frac{1}{4} m ab \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right\} =$$

$$\frac{1}{12} m \left(b^2 - a^2 \right) \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) (4 - 3)$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{12} m \left(b^2 - a^2 \right) \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \qquad (7)$$

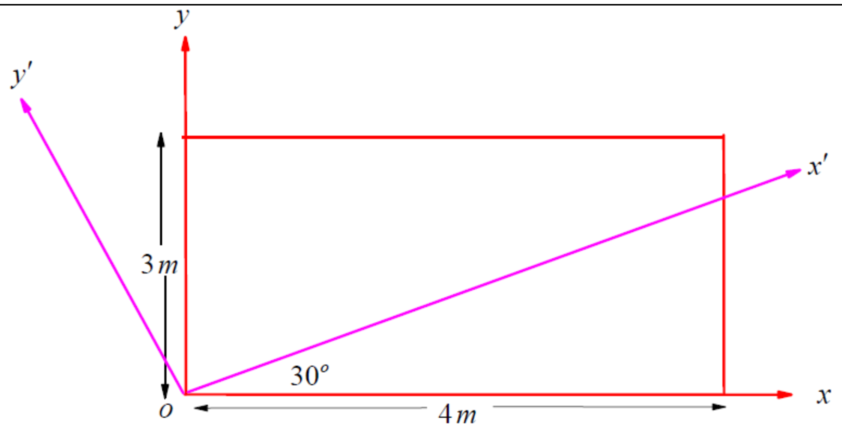
في حالة $\theta = 45^{O}$ يكون $a = 1, b = 1$ ويكون بذلك

$$I_{x'x'} = \frac{1}{6} m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \right) = \frac{1}{12} m,$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{6(a^2+b^2)} m \left(2\,a^4 + 3a^2b^2 + 2b^4 \right) = \frac{1}{6(2)} (7) m = \frac{7}{12} m, \qquad (8)$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{12} m \left(b^2 - a^2 \right) \left(\frac{ab}{a^2+b^2} \right) = 0$$

مثال:(4)- أحسب عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة منتظمة على شكل مستطيل منسوباً للمحاور $o\,x', o\,y'$ كما بالشكل ؟



بأخذ المحور ox' المراد حساب عزم القصور الذاتي منسوبا الية وبأخذ الزاوية $\theta = 30^o$ كما بالشكل ومن المعلوم بأن عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين $o\,x, o\,y$ وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي على الترتيب يعطوا بالصورة

$$I_{xx} = \frac{1}{3} m b^2 , \quad I_{yy} = \frac{1}{3} m a^2, \quad I_{xy} = \frac{1}{4} m a b \qquad (1)$$

وواضح أن عزم القصور الذاتي بالنسبة للقطر ox' يعطى بالصورة

$$I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2\theta + I_{yy} \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

ومن العلاقات (1) والرسم المعطى نحصل على

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3} m b^2 \cos^2\theta + \frac{1}{3} m a^2 \sin^2\theta - \frac{1}{4} m ab \sin 2\theta$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3} m (3)^2 \left(\cos 30^o \right)^2 + \frac{1}{3} m (4)^2 \left(\sin 30^o \right)^2 - \frac{1}{4} m (3)(4) \sin 60^o$$

$$I_{x'x'}=\frac{1}{3}m(3)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{3}m(4)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}m(3)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$I_{x'x'}=\frac{1}{3}m(9)\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}m(16)\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}m(3)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$I_{x'x'}=\frac{9}{4}m+\frac{4}{3}m-\frac{3\sqrt{3}}{2}m\rightarrow I_{x'x'}=\frac{1}{12}m\left(27+16-18\sqrt{3}\right)=\frac{43-18\sqrt{3}}{12}m$$

اذا كانت الزاوية $\theta=40^o$

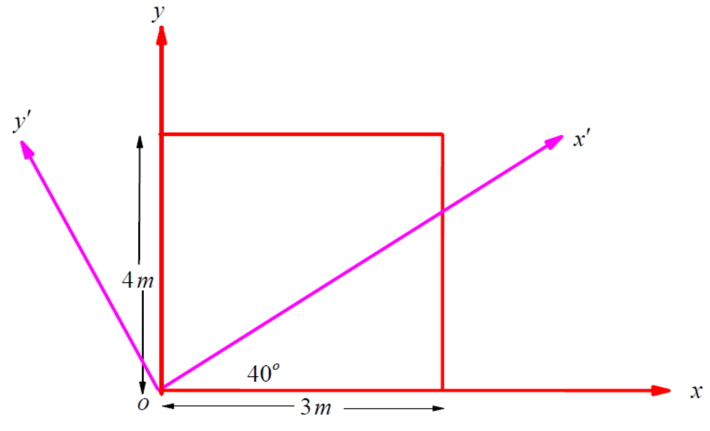
$$I_{x'x'}=\frac{1}{3}m(3)^2\left(\cos 40^o\right)^2+\frac{1}{3}m(4)^2\left(\sin 40^o\right)^2-\frac{1}{4}m(3)(4)\ \sin 80^o$$

$$I_{x'x'}=\frac{1}{3}m(9)(0.5868)+\frac{1}{3}m(12)(0.4131)-\frac{1}{4}m(3)(4)\ (0.6427)$$

$$I_{x'x'}=m(3)(0,5868)+m(4)(0.4131)-m(3)\ (0.6427)$$

$$I_{x'x'}=m[1.7604+1.6524-1.9281]=m[3.4128-1.9281]=1.4847m$$

مثال:(5)- أحسب عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة منتظمة على شكل مستطيل منسوباً للمحاور $o\,x', o\,y'$ كما بالشكل؟



الحـــــــل

بالنسبة للمحاور $o\,x', o\,y'$ يعطى

$$I_{x'x'}=I_{xx}\cos^2\theta+I_{yy}\sin^2\theta-I_{xy}\ \sin 2\theta \qquad (1)$$

$$I_{y'y'}=I_{yy}\cos^2\theta+I_{xx}\sin^2\theta+I_{xy}\sin 2\theta \qquad (2)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad (3)$$

ومن المعلوم بأن عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين $o\,x,\ o\,y$ وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي على الترتيب يعطوا بالصورة

$$I_{xx} = \frac{1}{3}mb^2 = \frac{16}{3}m, \quad I_{yy} = \frac{1}{3}ma^2 = \frac{9}{3}m = 3m, \quad I_{xy} = \frac{1}{4}mab = 3m \qquad (4)$$

كذلك

$$\begin{aligned}&(\sin 40)^2 = (0.643)^2 = 0.4132, \qquad (\cos 40)^2 = (0.766)^2 = 5868,\\ &\sin 2(40) = 0.9848, \qquad \cos 2(40) = 0.1736.\end{aligned} \qquad (5)$$

وبالتعويض في المعادلات (1-3) نحصل على

$$I_{x'x'} = \left[\frac{16}{3}(0.5868) + 3(0.4132) - 3(0.9848)\right]m = 1.4148m$$

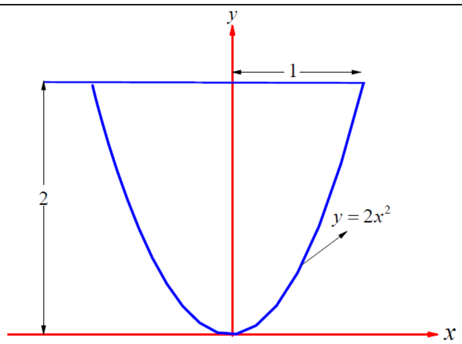
$$I_{y'y'} = \left[3(0.5868) + \frac{16}{3}(0.4132) + 3(0.9848)\right]m = 6.9185m$$

$$I_{x'y'} = \frac{\frac{16}{3}m - 3m}{2}(0.9848) + 3m(0.1736) = \frac{16m - 9m}{6}(0.9848) + 3m(0.1736)$$

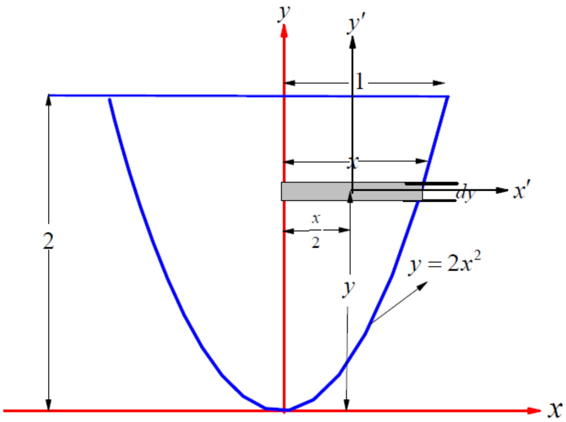
$$= \left[\frac{7}{6}(0.9848) + 3(0.1736)\right]m = [(1.67)(0.9848) + 3(0.1736)]m = 1.6698m$$

Then $I_{x'x'} = 1.4148m, \qquad I_{y'y'} = 6.9185m, \qquad I_{x'y'} = 1.6698m \qquad (6)$

مثال:(6)- أحسب حاصل ضرب القصور الذاتي I_{xy} لصفيحة على هيئة نصف قطع مكافئ و المحدد بالصورة $x = 0,\ y = 2m$ ؟



الحـــــــل



بأخذ الصفيحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله x و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفيحة هي ρ. فتعطى كتلته هذا العنصر (dm) بالصورة $dm = \rho\, x\, dy$ وتكون الكتلة الكلية للصفيحة المثلثية بالصورة

$$dm = \rho\, x\, dy \rightarrow m = \rho \int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\rho}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} [y]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \rightarrow \; m = \frac{4}{3}\, \rho$$

بالنسبة لمحورين $ox,\ oy$ يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + dm\, x_{cm}\, y_{cm}$$

وحيث أن $o'x',\ o'y'$ محوري تماثل بالنسبة للعنصر المختار فإن $dI_{x'y'} = 0$ يعطى بذلك حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة $dI_{xy} = dm\, x_{cm}\, y_{cm}$. وبالنسبة للصفيحة ككل يكون

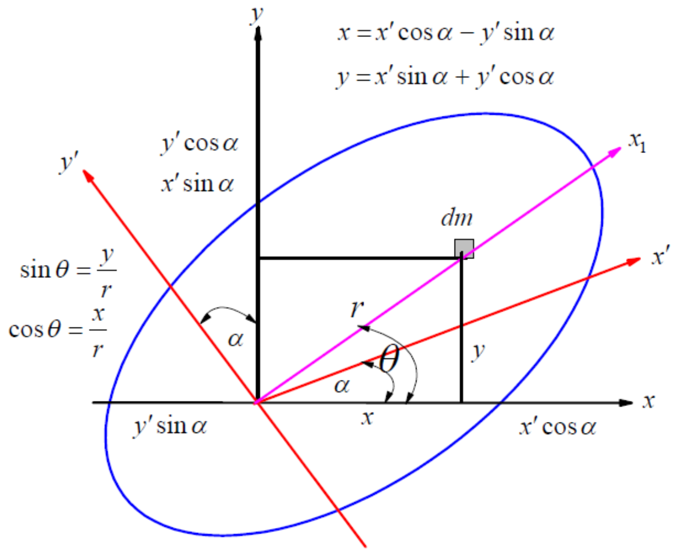
$$I_{xy} = \int dm\, x_{cm}\, y_{cm} = \int (\rho\, x\, dy)(\frac{1}{2} x)\, y = \frac{1}{2}\rho \int_0^2 x^2\, y\, dy = \frac{1}{2}\rho \int_0^2 \frac{y}{2}\, y\, dy = \frac{1}{4}\rho \int_0^2 y^2\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\rho \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\rho \frac{8}{3} = \frac{8}{12}\rho = \frac{2}{3}\rho = \frac{2}{3}\rho\, \frac{m}{m} = \frac{2}{3}\rho\, \frac{m}{\frac{4}{3}\rho} = \frac{1}{2} m \quad \rightarrow \quad I_{xy} = \frac{1}{2} m$$

قطع ناقص القصور الذاتي Ellipsoid of inertia

باعتبار جسم متماسك موضوع في المستوى واختيار المحاور المتعامدة كما بالشكل. بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للمحورين ox,oy هو (x,y) و بالنسبة للمحور ox_1 يعطى عزم القصور الذاتي لكتلته dm بالصورة

$$I_{x_1x_1} = I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \qquad (1)$$



ومن الرسم واضح ان $\sin\theta = \dfrac{y}{r}, \cos\theta = \dfrac{x}{r}$ وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

$$I_{x_1x_1} = I_{xx}\frac{x^2}{r^2} + I_{yy}\frac{y^2}{r^2} - 2I_{xy}\frac{xy}{r^2}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} - 2xyI_{xy} \qquad (2)$$

و بأخذ المحورين ox',oy' بحيث أن كل منهم يصنع الزاوية α مع المحورين ox,oy على الترتيب بذلك يكون لدينا

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

وبالتعويض في العلاقة (2) نحصل على

$$I_{x_1x_1}r^2 = (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 I_{xx} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 I_{yy} - 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)I_{xy}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = \left(x'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha + y'^2\sin^2\alpha\right)I_{xx} + \left(x'^2\sin^2\alpha + x'y'\sin\alpha\cos\alpha + y'^2\cos^2\alpha\right)I_{yy} - 2\left(x'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'\cos^2\alpha - x'y'\sin^2\alpha - y'^2\cos\alpha\sin\alpha\right)I_{xy}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2\underbrace{\left\{I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\sin^2\alpha - 2I_{xy}\cos\alpha\sin\alpha\right\}}_{I_{x'x'}} +$$

$$y'^2\underbrace{\left\{I_{yy}\cos^2\alpha + I_{xx}\sin^2\alpha + 2I_{xy}\cos\alpha\sin\alpha\right\}}_{I_{y'y'}} -$$

$$2x'y'\left\{\left(I_{xx} - I_{yy}\right)\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} + \underbrace{\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}_{\cos 2\alpha}I_{xy}\right\}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2I_{x'x'} + y'^2I_{y'y'} - 2x'y'\underbrace{\left\{\left(I_{xx} - I_{yy}\right)\frac{1}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha\right\}}_{I_{x'y'}}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2I_{x'x'} + y'^2I_{y'y'} - 2x'y'I_{x'y'}$$

في حالة المحاور الرئيسية $I_{x'y'} = 0$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2I_{x'x'} + y'^2I_{y'y'} \rightarrow \frac{x'^2}{\frac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{x'x'}}} + \frac{y'^2}{\frac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{y'y'}}} = 1$$

بوضع $b^2 = \dfrac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{y'y'}}$, $a^2 = \dfrac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{x'x'}}$ حيث $I_{x_1x_1},\ I_{x'x'},\ I_{y_1y_1},\ I_{y'y'}, r^2$ هي قيم ثابتة وبذلك

يكون لدينا $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ وهى معادلة قطع ناقص

الأن باختيار $b^2 = \dfrac{ma^2b^2}{I_{y'y'}}$, $a^2 = \dfrac{ma^2b^2}{I_{x'x'}}$ $\rightarrow$ $I_{x_1x_1}r^2 = ma^2b^2$

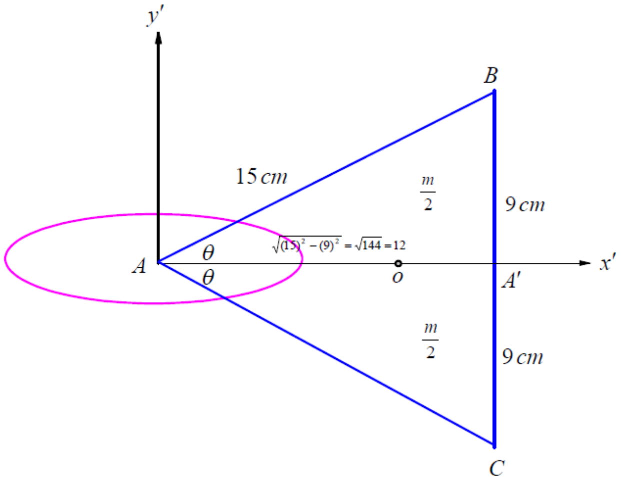
ومنهم يكون $b^2 = \dfrac{I_{x'x'}}{m}$, $a^2 = \dfrac{I_{y'y'}}{m}$

مثال:(8) صفيحة مثلثية ABC متساوية الساقين فيها $AB = AC = 15cm,\quad Bc = 18cm$
اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A تم استنتج منه عزم القصور الذاتي

حول المحور AC ؟

الحـــــــــــــــــل

بأخذ الصفيحة المثلثية ABC كما بالشكل بحيث يكون ox', oy' محاور تماثل لذلك سوف نحسب لصفيحة كل من عزم القصور الذاتي حول ox' وحاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين ox', oy' ومع ملاحظة أن المحورين ox', oy' هما محورين تماثل فيكون $I_{x'y'} = 0$ للصفيحة (أو يمكننا حساب حاصل ضرب القصور الذاتي للجزء العلوى من الصفيحة منسوبا للمحورين ox', oy' فيكون $I_{x'y'} = \frac{1}{12}\frac{m}{2}(12)(9)$ ويكون للجزء السفلى بالصورة $I_{x'y'} = \frac{1}{12}\frac{m}{2}(12)(-9)$ ويكون المجموع لهم $I_{x'y'} = 0$) وتعطى بذلك معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A بالصورة



$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$a^2 = \frac{I_{y'y'}}{m}, \qquad b^2 = \frac{I_{x'x'}}{m} \qquad (2)$$

حيث

$$I_{x'x'} = 2\left[\frac{1}{6}(\frac{m}{2})(9)^2\right] = (81)\frac{m}{6} = \frac{27}{2}m \qquad (3)$$

$$I_{BC} = \frac{1}{6}m(12)^2 = 24m \qquad (4)$$

$$I_o = I_{BC} - m(\frac{1}{3}AA')^2 = 24m - (\frac{12}{3})^2 m = 24m - 16m = 8m \qquad (5)$$

$$(6) \qquad I_{y'y'} = I_o + m(\frac{2}{3}AA')^2 = 8m + (\frac{24}{3})^2 m = 8m + 64m = 72m$$

من المعادلات السابقة (3-6) والمعادلة (2)

$$a^2 = = \frac{I_{y'y'}}{m} = \frac{72m}{m} = 72, \qquad b^2 = \frac{I_{x'x'}}{m} = \frac{(27/2)m}{m} = \frac{27}{2} \qquad (7)$$

وفى المعادلة (1) تصبح معادلة قطع ناقص القصور بالصورة

$$\frac{x'^2}{72} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \qquad (8)$$

ومن الشكل المعطى

$$\tan\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \to \quad y' = \frac{3}{4}x' \qquad (9)$$

وبالتعويض من (9) في (8)

$$\frac{x'^2}{72} + \frac{(\frac{3}{4}x')^2}{\frac{27}{2}} = 1 \to \frac{x'^2}{72} + \frac{\frac{9}{16}x'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \to \frac{x'^2}{72} + \frac{x'^2}{24} = 1$$

$$x'^2(1+3) = 72 \to x'^2 = 18 \qquad (10)$$

وبالتعويض من (10) في (8) نحصل على

$$\frac{x'^2}{72} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \to \frac{18}{72} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \to \frac{1}{4} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \to y'^2 = \frac{27}{2}\left\{1 - \frac{1}{4}\right\} = \frac{27}{8}(3)$$

$$\to y'^2 = \frac{81}{8} \qquad (11)$$

$$r^2 = x'^2 + y'^2 = 18 + \frac{81}{8} = \frac{144+81}{8} = \frac{225}{8} == \frac{(25)\,(9)}{8} \qquad (12)$$

من العلاقة $I_{x_1x_1} r^2 = m a^2 b^2$ يمكننا ايجاد العزم حول المحور AC بالصورة

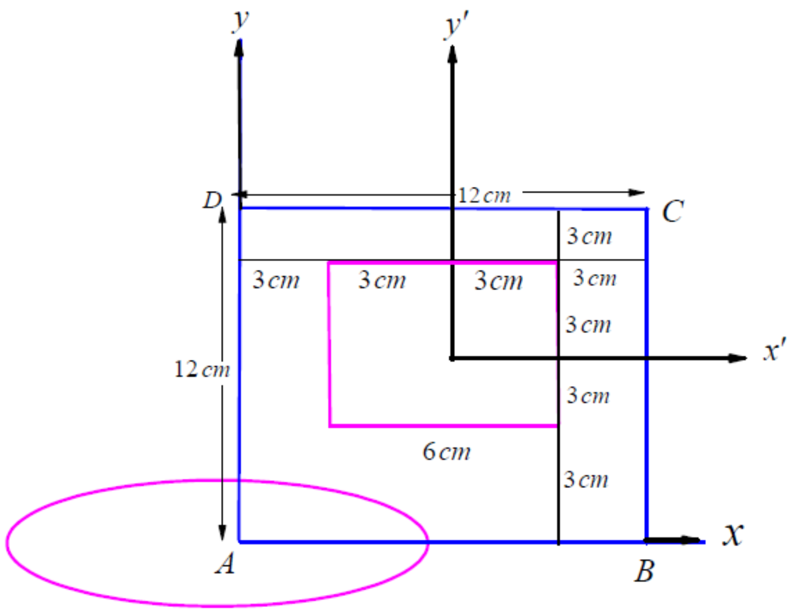
$$I_{AC}\,r^2 = m a^2 b^2 \;\rightarrow I_{AC} = \frac{m a^2 b^2}{r^2} = \frac{m(72)(\frac{27}{2})}{\frac{225}{8}} = \frac{m(72)(27)(4)}{225} = \frac{7776}{225} m \qquad I_{AC} = 34.56$$

(13)

مثال (9) : صفيحة مربعة $ABCD$ طول ضلعها $12cm$ أزيل منها جزء على هيئة مربع طول ضلعه $6cm$ وينطبق مركزة على مركز الصفيحة الأصلية و اضلاعه توازى أضلاع المربع الأصلي اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي الدائري عند A ثم استنتج منه عزم القصور الذاتي حول المحور AB ؟

الحـــــــــــــل

بأخذ الصفيحة المربعة $ABCD$ كما بالشكل بحيث يكون ox', oy' محورين تماثل. لذلك سوف نحسب لصفيحة كل من عزم القصور الذاتي حول ox وحاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين ox, oy وبالنسبة للصفيحة المربعة كما هو معروف $I_{xy} = 0$ و تعطى معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A بالصورة



$$(1)\;\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(2)\; a^2 = \frac{I_{yy}}{m}, \qquad b^2 = \frac{I_{xx}}{m}$$

بفرض أن كثافة المادة المصنوع منها الصفيحة هي ρ . وبفرض أن كتلته الصفيحة الكلية هي m_1 والتي تعطى من $m_1 = (12)(12)\rho = 144\rho$ وأن كتلته الصفيحة المنزوعة هي m_2 وهي تعطى من $m_2 = 36\rho$. فتكون كتلته الجزء المراد دراسته هي

$$.\, m = m_1 - m_2 = 144\rho - 36\rho = 108\rho$$

لاحظ انه لا إيجاد عزم القصور حول المحو x للجزء المراد دراسته يجب علينا ايجاد عزم القصور الذاتي للكتلة الأساسية ثم طرح عزم القصور الذاتي للجزء المنزوع وذلك بعد إيجاد هذا العزم حول المحور ox . ولإجاد عزم القصور الذاتي للجزء المنزوع نحسب عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور يمر بالمركز والذى يعطى من

$$(3)\; I_{x'x'} = \frac{1}{12} m_2 (6)^2 = 3m_2$$

ويكون عزم القصور الذاتي للجزء المنزوع حول المحور x بالصورة

$$(4)\; (I_{xx})_{m_2} = I_{x'x'} + m_2 (6)^2 = 3m_2 + 36m_2 = 39\, m_2$$

بينما يعطى عزم القصور الذاتي للكتلة الأساسية حول المحور x بالصورة

$$(5)\; (I_{xx})_{m_1} = \frac{1}{3} m_1 (12)^2 = 48m_1$$

ويعطى عزم القصور حول المحو x للجزء المراد دراسته بالصورة

$$(I_{xx})_m = (I_{xx})_{m_1} - (I_{xx})_{m_2} = 48m_1 - 39m_2 = 48(144\rho) - 39(36\rho) =$$

$$\rho(6912 - 1404) = 5508\rho$$

$$(I_{xx})_m = 5508\rho \frac{m}{m} = 5508\rho\, \frac{m}{108\rho} = \frac{5508}{108} m = 51m \qquad (6)$$

وبالمثل يمكن اثبات أن

$$(7)\; (I_{yy})_m = 51m$$

من المعادلات السابقة (3-6) والمعادلة (2)

$$(8)\; a^2 = = \frac{I_{yy}}{m} = \frac{51m}{m} = 51, \qquad b^2 = \frac{I_{xx}}{m} = \frac{51m}{m} = 51$$

وفى المعادلة (1) تصبح معادلة قطع ناقص القصور بالصورة

$$(9)\; \frac{x^2}{51} + \frac{y^2}{51} = 1 \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 51$$

كما هو واضح من المعادلة (9) فهي تمثل معادلة دائرة وهى تسمي بذلك معادلة قطع ناقص القصور الدائري.

من العلاقة $I_{x_1x_1}\, r^2 = m a^2 b^2$ يمكننا ايجاد العزم حول المحور AB بالصورة

$$(10)\; I_{AB}\, r^2 = m a^2 b^2 \;\; \rightarrow I_{AB} = \frac{m a^2 b^2}{r^2}$$

وواضح أن نقطة تقاطع AB مع القطع هي $(\sqrt{51},0)$ أي أن $r^2 = x^2 + y^2 = 51$

ويكون بذلك العزم حول المحور AB بالصورة $I_{AB} = \dfrac{m(51)(51)}{51} = 51m$

وواضح أن I_{AB} يتساوى مع $I_{xx} = I_{yy}$.

الفصل الرابع

كيناتيكا الجسم المتماسك

مقدمة:

الحركة الدورانية

كما سبق و أن عرفنا أن الحركة الدورانية حركه مهمه جدا في الفيزياء وفي حياتنا اليومية والحركة الدائرية هي حاله خاصه من الحركة الدورانية . ويمكن تعريف الحركة الدورانية بأنها حركة جسيم ذات ابعاد حول محور معين يمر داخل الجسيم مثل حركة عجله حول محور ثابت وحركة او دوران ملف المحرك الكهربائي ودوران الارض حول محورها . اما حركة عجلة السيارة فهي مزيج من الحركة الدورانية والحركة الانتقالية. وتكون الحركة دورانية منتظمة إذا كانت سرعة الدوران ثابتة وإلا فهي حركة دورانية غير منتظمة لتغير سرعة الدوران .

سنناقش في هذا الفصل سلوك الجسم الجاسئ عند الدوران والإنتقال . حيث تنقسم حركة الجسم الجاسئ العامة الي حركة انتقالية واخري دورانبة. إن ما سنناقشه هنا لا يختلف عما تعلمته في دراستك السابقة، إذ تعرف الحركة الدورانية لجسم ما (بأنها حركة جسم ذي أبعاد حول محور معين

يمر داخل الجسم) أو الحركة التي تصطف فيها جميع جزيئاته اي مسارات دائرية تقع مراكزها على خط مستقيم ثابت يسمى محور الدوران، مثل حركة عجلة الدراجة حول محورها، ولكي تكون حركة الجسم دورانية منتظمة، يجب أن يكون كل من المعدل الزمني للحركة ومحور الدوران ثابتا ، أما إذا تغير هذا المعدل أو حص تغير في اتجاه محور الدوران فتكون عندئذٍ الحركة الدورانية غير منتظمة.

دوران حول محور ثابت

الحركة الدورانية أو حركة الاستدارة هي حركة التفاف حول مركز الجسم نفسه، بخلاف الحركة الدائرية التي يحافظ فيها الجسم على مسافة ثابتة من مركز يقع خارجه. وتكون الحركة دورانية منتظمة إذا كانت سرعة الدوران ثابتة، وإلا يقال عن تلك الحركة الدورانية أنها غير منتظمة لتغير سرعة الدوران. وعزم القوة هو الذي يسبب الحركة الدورانية

قانون نيوتن الثاني وعزم القصور الذاتي للحركة الدورانية:
Torque and Newton's Second Law

اذا دار جسم كتله m حول محيط دائرة نصف قطرها r فتكون محصلة القوي المماسية لمحيط الدائرة هي

$$F_t = m\,a_t \quad \rightarrow \quad F_t\ r = m\,r\,a_t \qquad (1)$$

حيث a_t هي العجلة المماسية للدائرة

لكن من المعروف بأن

$$(2)\ a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\omega) = r\frac{d\,\omega}{dt} = r\,\alpha$$

حيث ω هي السرعة الزاوية وأن $\frac{d\,\omega}{dt} = \alpha$ هي العجلة الزاوية . وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3)\ F_t\ r = m\,r\,a_t = m\,r\,(r\,\alpha) = \left(m\,r^2\right)\alpha$$

حيث ان المقدار $\left(m\,r^2\right)$ هو عزم القصور الذاتي الدوراني للجسم ويرمز له بالرمز $I_o = m\,r^2$ وان المقدار $F_t\ r$ هو عزم القوة حول مركز الدائرة التي يتحرك عليها الجسيم ويرمز له بالرمز $F_t\ r = M_o$ اي يمكننا صياغة المعادلة بالصورة

$$(4)\ I_o\,\alpha = M_o \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d}\left(I_o\,\omega\right) = M_o$$

وتعتبر المعادلة (4) بمثابة قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية والذي ينص على إن عزم القوة المسلط على جسم حول محور الدوران يساوي عزم القصور الذاتي الدوراني للجسم حول نفس المحور مضروبا في العجلة الزاوية

مثال(1): عمود رفيع منتظم كتلته m وطولة L يمكنه الدوران في مستوي راسي حول احد طرفيه اذا بداء العمود حركته من السكون عندما كان أفقيا أثبت ان رد الفعل الأفقي عند نقطة التثبيت يكون أكبر ما يمكن عندما يميل العمود على الراسي بزاوية $\frac{\pi}{4}$ وان رد الفعل الراسي عند ذلك يساوى $\frac{11}{8}mg$؟

الحـــــــــــل

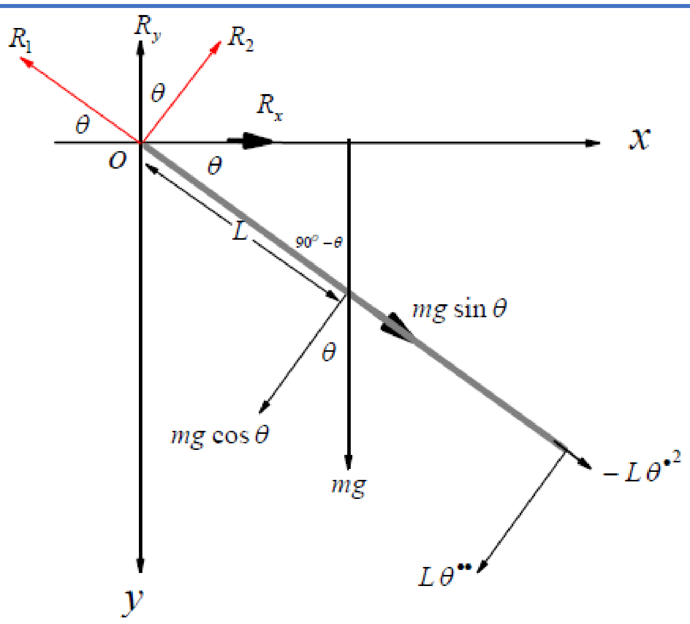
بأخذ العمود كما بالشكل المقابل حيث كتلته m وطوله $2L$ ويدور حول النقطة o في المستوى الرأسي ox,oy والقوى تأثر عليه كما بالشكل حيث R_1,R_2 هما مركبتي رد الفعل عند نقطة التعليق احدهما في اتجاه العمود والاخرى في الاتجاه العمودي علية. وبفرض ان العمود يدور بزاوية θ فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة $\dot{\theta},\ \ddot{\theta}$.

<u>أولا معادلات الحركة الخطية</u>

معادلات الحركة الخطية للعمود هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه الدوران والعمودي. وهذه المعادلات يمكن صياغتها بالصورة

$$(1)\, m(-L\dot{\theta}^2) = mg\sin\theta - R_1 \quad \rightarrow \quad mL\dot{\theta}^2 = R_1 - mg\sin\theta$$

$$(2)\, mL\ddot{\theta} = mg\cos\theta - R_2$$



ثانياً معادلة الحركة الدورانية

معادلة الحركة الدورانية حول مركز الدوران (o) يمكن ايجادها من معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز دوران العمود والتي تساوي مجموع عزوم القوي الخارجية المؤثرة على العمود حول مركز دوران العمود والتي يمكن صياغتها بالصورة.

$$(3)\ \frac{d}{dt}\left(I_O\,\theta^{\bullet}\right)=M_o \;\rightarrow\; I_O\,\theta^{\bullet\bullet}=M_o$$

يمكن كتابة المعادلة (3) بالصورة

$$(4)\ \frac{1}{3}m(2L)^2\theta^{\bullet\bullet}=(mg\cos\theta)\ (L)\rightarrow \qquad \theta^{\bullet\bullet}=\frac{3g}{4L}\cos\theta$$

$$\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta}=\frac{3g}{4L}\cos\theta \;\rightarrow\; \int\theta^{\bullet}d\theta^{\bullet}=\frac{3g}{4L}\int\cos\theta\ d\theta \;\rightarrow\; \frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=\frac{3g}{4L}\sin\theta+c_1$$

من الشروط الابتدائية - عندما $\theta^{\bullet}=0$ فإن $\theta=0$ وبذلك يكون $c_1=0$ و عند ذلك نحصل على

$$(5)\qquad \theta^{\bullet 2}=\frac{3g}{2L}\sin\theta$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (1) نحصل على

$$mL\left(\frac{3g}{2L}\sin\theta\right)=R_1-mg\sin\theta \rightarrow \quad R_1=mL\left(\frac{3g}{2L}\sin\theta\right)+mg\sin\theta$$

$$R_1=\frac{5}{2}mg\ \sin\theta \qquad (6)$$

بالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (2) نحصل على

$$mL\left(\frac{3g}{4L}\cos\theta\right)=mg\cos\theta-R_2 \quad \rightarrow \quad R_2=mg\cos\theta-\frac{3}{4}mg\cos\theta$$

$$R_2=\frac{1}{4}mg\cos\theta$$

(7)

ولإيجاد كل من رد الفعل الأفقي والرأسي من الشكل المُعطى نحصل على

$$R_x=R_2\sin\theta-R_1\cos\theta \qquad (8)$$

$$R_y=R_1\sin\theta+R_2\cos\theta \qquad (9)$$

وبالتعويض من (6), (7)

$$R_x=(\frac{1}{4}mg\cos\theta)\sin\theta-(\frac{5}{2}mg\ \sin\theta)\ \cos\theta \rightarrow \quad R_x=-\frac{9}{4}mg\ \sin\theta\ \cos\theta$$

$$(10)\ \ R_x=-\frac{9}{8}mg\ \sin 2\theta$$

$$R_y=(\frac{5}{2}mg\ \sin\theta)\sin\theta+(\frac{1}{4}mg\cos\theta)\cos\theta \quad \rightarrow \quad R_y=\frac{5}{2}mg\ \sin^2\theta+\frac{1}{4}mg\cos^2\theta$$

$$(11)\ \ R_y=\left(\frac{5}{2}\sin^2\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta\right)mg$$

يكون رد الفعل الأفقي أكبركما يمكن عندما تكون $\sin 2\theta=1$ أي أن $2\theta=\frac{\pi}{2}$ ومنها

$\theta=\frac{\pi}{4}$ وبالتعويض في المعادلة (11) نجد أن

$$R_y=\left(\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)mg \qquad \rightarrow \qquad R_y=\frac{11}{8}mg$$

<u>التدحرج والانزلاق</u>

اذا تحرك جسم خشن على اخر خشن فهناك نوعان من الحركة

(1)- حركة تدحرجيه انزلاقية : وفيها تكون قوة الاحتكاك نهائية وتساوي حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي وهي تكون غير كافية لمنع الانزلاق.

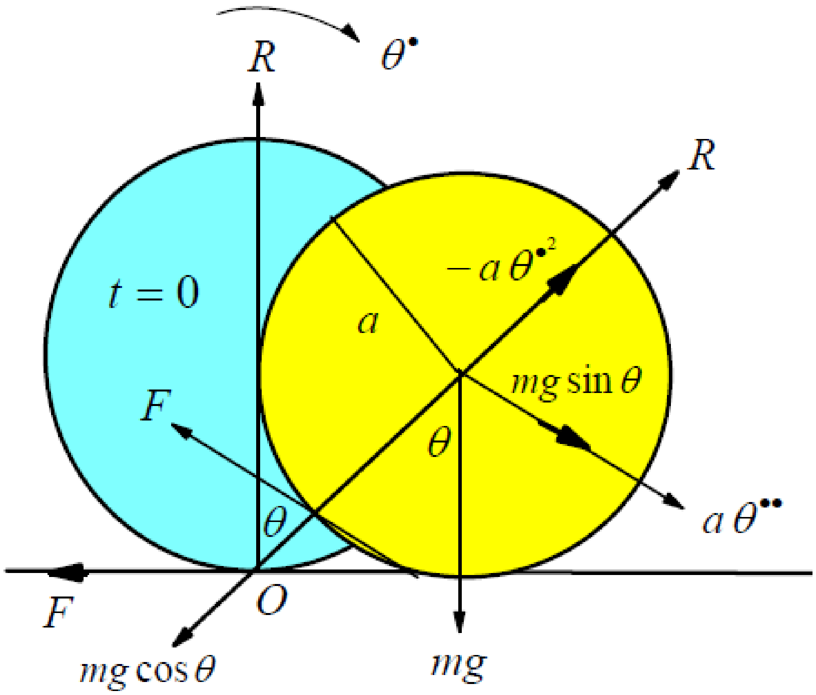
(2)- حركة تدحرجيه بحتة : وفيها تكون قوة الاحتكاك غير نهائية وتكون اقل من حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي وتكون كافية لمنع الانزلاق.

ولتعين نوع الحركة نحسب سرعة نقطة التماس عند بداية الحركة . فإذا كانت سرعة نقطة التماس عند بداية الحركة تساوي صفر كان هناك احتمال أن تبدا الحركة بدحرجة بحتة وذلك اذا كانت قوة الاحتكاك كافية الي ذلك وتكون أقل من حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي. اما إذا كانت سرعة نقطة التماس عند بداية الحركة لا تساوي صفر فإن الحركة تبدأ بانزلاق وعند ذلك فإن قوة الاحتكاك تساوي حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي وفى الاتجاه المضاد لسرعة نقطة التماس.

مثال(2): قرص دائري كتلة (m) يدور حول محور أفقي مار بنقطة (O) على محيطة وعمودي على مستواه, اذا بدأ القرص حركته من السكون عندما كان القطر المار بالنقطة (O) راسياً الى أعلى. أثبت أن ردى الفعل في اتجاهي نصف القطر المار بالنقطة (O) والعمودي علية يعطيان بالصورة $\frac{mg}{3}(7\cos\theta-4),\ \frac{mg}{3}\sin\theta,$ حيث θ هي الزاوية التي يدور بها القرص؟

الحــــــــل

بأخذ القرص كما بالشكل المقابل حيث كتلة m ونصف قطره a ويدور حول النقطة o في المستوى الرأسي ox,oy والقوى تأثر عليه كما بالشكل. حيث R,F هما مركبتي رد الفعل و الإحتكاك عند نقطة الدوران احدهما في الاتجاه نحو المركز والاخرى في الاتجاه العمودي علية أي في اتجاه المماس للقرص. وبفرض ان القرص قدر دار بزاوية θ عند أي لحظة زمنية t أي ان قطرة قد دار بزاوية θ حيث oA هو القطر عند بداية الحركة فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة $\dot{\theta},\ \ddot{\theta}$.



أو لا معادلات الحركة الإنتقالية

معادلات الحركة الإنتقالية للقرص هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه المماس والعمودي علية و هذه المعادلات يمكن صياغتها بالصورة

$$(1) - m\,a\,\theta^{\bullet 2} = R - mg\cos\theta$$

$$(2)\; m\,a\,\theta^{\bullet\bullet} = mg\sin\theta - F$$

ثانياَ معادلة الحركة الدورانية : تكون معادلة الحركة الدورانية حول مركز دوران الدوران o والتي تنص على ان معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز دوران القرص تساوي مجموع عزوم القوي الخارجية المؤثرة على القرص حول مركز دوران القرص والتي يمكن صياغتها بالصورة

$$(3)\; \frac{d}{dt}\left(I_O\,\theta^{\bullet}\right) = M_o \;\rightarrow\; I_O\,\theta^{\bullet\bullet} = M_o$$

$$\frac{3}{2} m\,a^2\theta^{\bullet\bullet} = (mg\,\sin\theta)\;(a) \rightarrow \quad (4) \quad \theta^{\bullet\bullet} = \frac{2}{3}\frac{g}{a}\sin\theta$$

ومنها

و هذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة

$$\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta}=\frac{2}{3}\frac{g}{a}\sin\theta \rightarrow \int\theta^{\bullet}d\theta^{\bullet}=\frac{2}{3}\frac{g}{a}\int \sin\theta\, d\theta \rightarrow \frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{2}{3}\frac{g}{a}\cos\theta+c_1$$

من الشروط الابتدائية - عندما $\theta^{\bullet}=0$ فإن $\theta=0$ وبذلك يكون $c_1=\frac{2}{3}\frac{g}{a}$ وعند ذلك نحصل على

$$\theta^{\bullet 2}=\frac{4}{3}\frac{g}{a}(1-\cos\theta) \qquad (5)$$

بالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (2) نحصل على

$$(6)\; ma\left(\frac{2}{3}\frac{g}{a}\sin\theta\right)=mg\sin\theta-F \quad \rightarrow \quad F=\frac{1}{3}\frac{mg}{a}\sin\theta$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (1) نحصل على

$$(7)\; ma\left(\frac{4}{3}\frac{g}{a}(1-\cos\theta)\right)=mg\cos\theta-R \quad \rightarrow \quad R=\frac{mg}{3}(7\cos\theta-4)$$

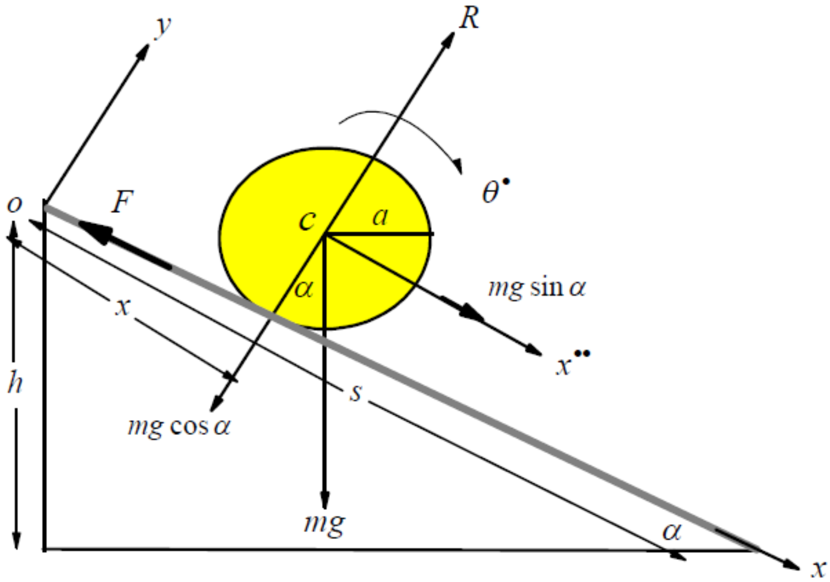
واضح أن كل من ردي الفعل تأخذ قيماً موجبة وعلى ذلك فإن الاتجاهات المختارة في بداية الحل هي اتجاهات صحيحة.

مثال(3): ادرس حركة جسيم كتلة (m) يتدحرج بدون انزلاق إلى أسفل مستوى خشن يميل علي المستوى على الأفقي بزاوية (α). أوجد أقل قيمة لمعامل الاحتكاك بين الجسم والمستوي حتى لا يحدث انزلاق؟

الحـــــــــل

بأخذ المحور ox في اتجاه المستوي إلي أسفل و المحور oy عمودي على المحور ox , وبفرض أن o هي نقطة الأصل كما بالشكل المقابل وبفرض أن كتلة الجسم هي m وأن الجسم على بعد x من نقطة الأصل و أن مركز كتلة الجسم له الإحداثي (x, a) وبفرض ان القوى المؤثرة على الجسم كما بالشكل حيث R هو رد الفعل وبفرض ان F هى قوة الاحتكاك وهى غير معلومة الاتجاة لان الحركة سوف تكون انزلاقية وتكون سرعة نقطة التماس مساوية للصفر وتكون قوة الاحتكاك لم تصل بعد الي قوة الاحتكاك النهائى وعلى ذلك تم اختيار قوة الاحتكاك كما بالشكل:

وبفرض ان سرعة وعجلة مركز ثقل الجسم تعطيان بالصورة $\vec{a}=(a_x, a_y)$, $\vec{v}=(v_x, v_y)$ حيث
لهذا الجسم يكون $\vec{a}=(x^{\bullet\bullet}, 0)$, $\vec{v}=(x^{\bullet},0)$



<u>أولا معادلات الحركة الخطية</u>

بكتابة معادلات الحركة الخطية للجسم والتي هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه المحورين فيكونوا بالصورة

$$(1)\, m\,x^{\bullet\bullet} = mg\,\sin\alpha - F$$

$$(2)\, m(0) = R - mg\,\cos\alpha$$

<u>ثانياً معادلة الحركة الدورانية</u>

بفرض ان الجسم قد تدحرج بزاوية θ فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة $\theta^{\bullet\bullet}$, $\theta^{\bullet}$.
وتكون معادلة الحركة الدورانية حول مركز الثقل c والتي تنص على ان معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز ثقل الجسم تساوي مجموع عزوم القوي الخارجية المؤثرة على الجسم حول مركز ثقل الجسم والتي يمكن صياغتها بالصورة

$$(3)\, \frac{d}{dt}\left(I_c\,\theta^{\bullet}\right) = M_c \quad \rightarrow \quad I_c\,\theta^{\bullet\bullet} = M_c$$

حيث I_c هو عزم القصور الذاتي للجسم منسوبا لمحور عمودي على مستوى الحركة (عمودي على مستوى الجسم) ويمر بمركز الثقل ونلاحظ أن عزوم القوى موجبة لآنها في نفس اتجاه $\theta^{\bullet}$ وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة الحركة الدورانية بالصورة

$$F = \frac{I_c}{a}\ddot{\theta} \qquad (4)\ I_c\,\ddot{\theta} = (F)\ (a) \rightarrow$$

وبالتعويض من (4) في (1) يكون لدينا

$$(5)\ m\ddot{x} = mg\ \sin\alpha - \frac{I_c}{a}\ddot{\theta}$$

وشرط تدحرج الجسم بدون انزلاق (pure rolling) هو ان سرعة نقطة التماس كنقطة من الجسم تساوى سرعتها كنقطة من المستوى وحيث ان المستوي ساكن فتكون سرعة نقطه التماس له مساوية للصفر أي أن $\dot{x} = a\dot{\theta}$ وعليه يكون $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$ وبالتعويض في المعادلة (5) عن قيمة $\ddot{\theta}$ نحصل على

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{I_c}{a^2}\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{I_c}{ma^2}\ddot{x} = g\sin\alpha$$

$$(6)\ \ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{ma^2}} \quad \rightarrow \quad a\ddot{\theta} = \ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{ma^2}}$$

وواضح من المعادلة (6) ان عجلة الجسم ثابتة لذلك يمكن ايجاد سرعته من العلاقة

$$v^2 = v_0^2 + 2\ddot{x}x$$

وعند ونهاية المستوي المائل تعطي السرعة بالصورة

$$v^2 = 0 + 2\left(\frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{ma^2}}\right)s \quad \rightarrow \quad v^2 = 2\left(\frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{ma^2}}\right)\frac{h}{\sin\alpha} \rightarrow \quad v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_c}{ma^2}}$$

$$(7)\ v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_c}{ma^2}}}$$

وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$(8)\ F = \frac{I_c}{a}\,\frac{1}{a}\left(\frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{ma^2}}\right) \rightarrow F = \left(\frac{I_c}{ma^2 + I_c}\right)mg\sin\alpha \quad or \quad F = \frac{1}{\frac{ma^2}{I_c} + 1}\,mg\sin\alpha$$

ولكي لا يحدث انزلاق للجسم فيجب ان لا تصل قوة الاحتكاك F الى قيمتها النهائية μR أي يجب أن يتحقق الشرط $F < \mu R$ وبالتعويض من المعادلتين (2, 8) نحصل على

$$F < \mu R \quad \rightarrow \mu > \frac{F}{R} \quad \rightarrow \quad \mu > \frac{\left(\frac{I_c}{m a^2 + I_c}\right) m g \sin\alpha}{mg \cos\alpha}$$

$$(9) \; \mu > \left(\frac{I_c}{m a^2 + I_c}\right) \tan\alpha$$

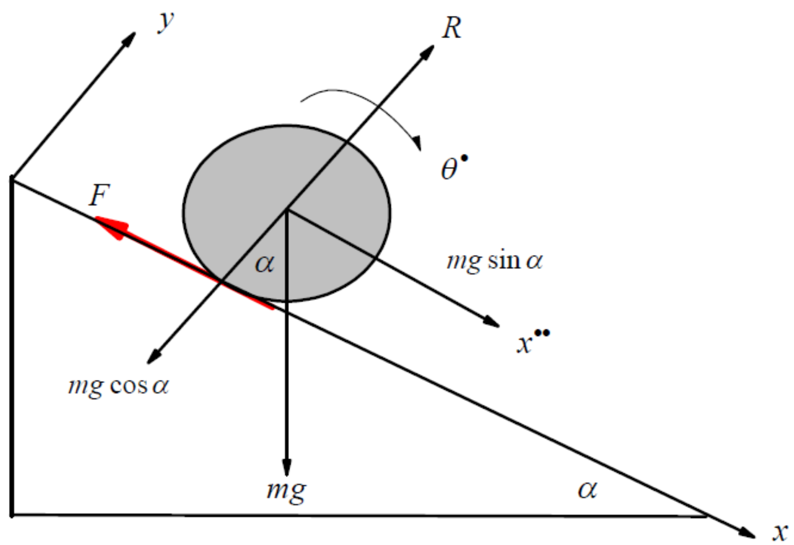
ولكى يحدث الانزلاق يجب ان تكون اقل قيمة لمعامل الاحتكاك على المستوى هي

$$\mu = \left(\frac{I_c}{m a^2 + I_c}\right) \tan\alpha$$

مثال(4): تتدحرج كرة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها a لأسفل مستوى خشن يميل علي المستوى علي الأفقي بزاوية (α). أوجد أقل قيمة لمعامل الاحتكاك بين الكرة والمستوي حتى لا يحدث انزلاق ؟

الحـــــــــل

بأخذ الكرة كما بالشكل المقابل حيث كتلها m ونصف قطرها a وتدور وتنتقل في المستوى ox,oy والقوى تأثر عليه كما بالشكل



أولا معادلات الحركة الخطية

$$(1)\, m\ddot{x} = mg\ \sin\alpha - F$$

$$(2)\, m(0) = R - mg\ \cos\alpha$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

$$(3)\, \frac{d}{dt}\left(I_c\,\dot{\theta}\right) = M_c \quad \rightarrow \quad I_c\,\ddot{\theta} = M_c$$

والتي يمكن كتابها بالصورة

$$(4)\, \frac{2}{5} m a^2 \ddot{\theta} = (F)\ (a) \rightarrow \qquad F = \frac{2}{5} m a \ddot{\theta}$$

وشرط تدحرج الكرة بدون انزلاق هو ان يكون سرعة نقطة التماس تساوى الصفر وحيث أن $x = a\theta$ ومنها $\dot{x} = a\dot{\theta}$ وعليه يكون $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$ وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على $F = \frac{2}{5} m\, \ddot{x}$ وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{2}{5} m\, \ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{2}{5}\ \ddot{x} = g\sin\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{7}{5}\ \ddot{x} = g\sin\alpha$$

$$(5)\ \ddot{x} = \frac{5}{7}\ g\sin\alpha$$

ويكون كذلك

$$(6)\ \ddot{x} = a\ddot{\theta} = \frac{5}{7}\ g\sin\alpha$$

وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$(7)\, F = \frac{2}{5} m a \ddot{\theta} = \frac{2}{5} m \left(\frac{5}{7}\ g\sin\alpha\right) \quad \rightarrow \quad F = \frac{2}{7} m g \sin\alpha$$

ولكي لا يحدث انزلاق فيجب ان لا تصل قوة الاحتكاك F الى قيمتها النهائية μR أي يجب أن يتحقق الشرط $F < \mu R$ وبالتعويض من المعادلتين (2, 7) نحصل على

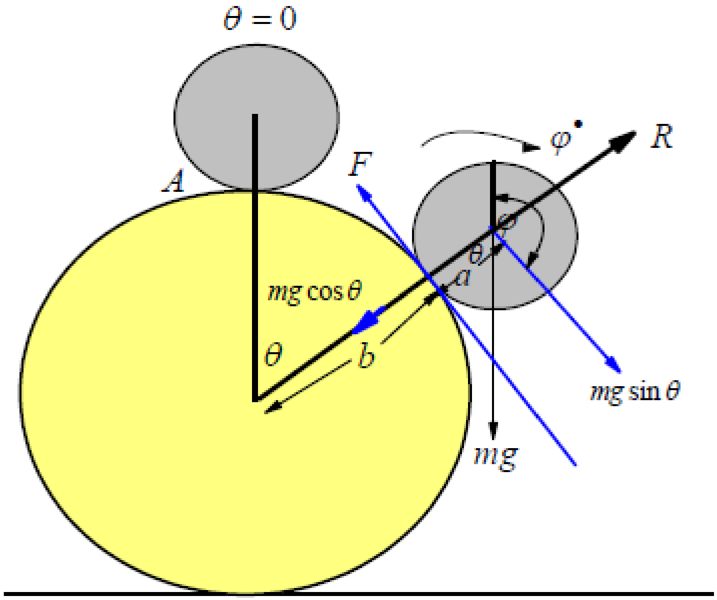
$$F < \mu R \quad \rightarrow \mu > \frac{F}{R} \quad \rightarrow \quad \mu > \frac{\frac{2}{7} m g \sin\alpha}{mg\ \cos\alpha} \quad \rightarrow \quad \mu > \frac{2}{7}\ \tan\alpha$$

ولكى يحدث الانزلاق يجب ان تكون اقل قيمة لمعامل الاحتكاك على المستوى هي $\mu = \frac{2}{7}\ \tan\alpha$

مثال(5): تتدحرج كرة مصممته كتلها (m) ونصف قطره (b) علي كرة مصممتة قطرها (a) مثبتة محورها رأسي. إذا بدأت الكرة العليا حركتها من أعلى نقطة من الكرة العليا أوجد الزاوية التي تترك عندها الكرة العليا الكرة السفلي وسرعتها عند هذه اللحظة ؟

الحـــــــــل

بأخذ موضع اختياري للكرة بالشكل المقابل حيث أن كتلة الكرة هي m ونصف قطرها a. وبفرض ان القوى المؤثرة على الكرة كما بالشكل حيث R هو رد الفعل وبفرض ان F هى قوة الاحتكاك وهى غير معلومة الاتجاة لان الحركة سوف تكون انزلاقية وتكون سرعة نقطة التماس مساوية للصفر وتكون قوة الاحتكاك لم تصل بعد الي قوة الاحتكاك النهائى وعلى ذلك تم وضع قوة الاحتكاك كما بالشكل .



$\vec{v} = (v_r, v_\theta) = (r^{\bullet}, r\theta^{\bullet})$ $\qquad$ $\vec{a} = (a_r, a_\theta) = (r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2}, r\theta^{\bullet\bullet} + 2r^{\bullet}\theta^{\bullet})$ $\qquad$ <u>لاحظ أن</u>

<u>اولا معادلات الحركة الانتقالية</u>

بكتابة معادلات الحركة الانتقالية للكرة العليا والتي هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه المحورين فيكونوا بالصورة

معادلة الحركة الانتقالية في اتجاه تزايد نصف القطر تكون بالصورة

$$(1)-m(a+b)\dot{\theta}^{2}=R-mg\cos\theta$$

معادلة الحركة الانتقالية في الاتجاه العمودي على تزايد θ تكون بالصورة

$$(2)\ m(a+b)\ddot{\theta}=mg\sin\theta-F$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

بفرض ان الكرة العليا قد تدحرجت بزاوية φ فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة $\dot{\varphi},\ \ddot{\varphi}$. وتكون معادلة الحركة الدورانية حول مركز الثقل c والتي تنص على ان معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز ثقل الكرة العليا تساوي مجموع عزوم القوي الخارجية المؤثرة على الكرة العليا حول مركز الكرة العليا والتي يمكن صياغتها بالصورة

$$(3)\ \frac{d}{dt}\left(I_c\dot{\varphi}\right)=M_c\ \rightarrow\ I_c\ddot{\varphi}=M_c$$

حيث I_c هو عزم القصور الذاتي الكرة العليا منسوبا لمحور عمودي على مستوى الحركة (عمودي على مستوى الكرة) ويمر بمركز الثقل ونلاحظ أن عزوم القوى موجبة لآنها في نفس اتجاه $\ddot{\varphi}$ وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة الحركة الدورانية بالصورة

$$(4)\ \frac{2}{5}ma^{2}\ddot{\varphi}=(F)\ (a)\rightarrow\qquad F=\frac{2}{5}ma\ddot{\varphi}$$

وشرط تدحرج الكرة بدون انزلاق هو ان يكون $(a+b)\theta=a\varphi$ ومنها يكون $(a+b)\dot{\theta}=a\dot{\varphi}$ وعليه يكون

$$(5)\ (a+b)\ddot{\theta}=a\ddot{\varphi}\ \rightarrow\ \ddot{\varphi}=\frac{a+b}{a}\ddot{\theta}$$

وبالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (4) عن قيمة $\ddot{\varphi}$ نحصل على

$$(6)\ F=\frac{2}{5}m(a+b)\ \ddot{\theta}$$

وبالتعويض من المعادلتين (5),(4) في المعادلة (2) نحصل على

$$m(a+b)\ \ddot{\theta}=mg\sin\theta-\frac{2}{5}m(a+b)\ \ddot{\theta}\ \rightarrow\ \frac{7}{5}m(a+b)\ \ddot{\theta}=mg\sin\theta$$

$$(7)\ \ddot{\theta}=\frac{5}{7(a+b)}g\sin\theta$$

$$\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta}=\frac{5}{7(a+b)}g\ \sin\theta \ \rightarrow \int\theta^{\bullet}d\theta^{\bullet}=\frac{5}{7(a+b)}g\int\sin\theta\, d\theta$$

$$(8)\ \frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{5}{7(a+b)}g\ \cos\theta+c_1$$

وعندما $\theta=0$ فإن $\theta^{\bullet}=0$ ومن المعادلة (8) يكون $c_1=\frac{5}{7(a+b)}g$ وبالتعويض في المعادلة (8) مرة اخرى نحصل علي

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{5}{7(a+b)}g\ \cos\theta+\frac{5}{7(a+b)}g=\frac{5}{7(a+b)}g\,(1-\cos\theta)$$

$$(9)\ \theta^{\bullet 2}=\frac{10\,g}{7(a+b)}(1-\cos\theta) \quad \rightarrow \quad \theta^{\bullet 2}(a+b)=\frac{10g}{7}(1-\cos\theta)$$

وبالتعويض من المعادلة (9) في المعادلة (1) نحصل على

$$-m\left(\frac{10}{7}g\,(1-\cos\theta)\right)=R-mg\ \cos\theta$$

$$(10)\ R=mg\ \cos\theta-\frac{10}{7}mg\,(1-\cos\theta) \quad \rightarrow \quad R=\frac{17}{7}mg\ \cos\theta-\frac{10}{7}mg$$

و عندما تترك الكرة العليا الكرة السفلى يتلاشى رد الفعل ويكون عند ذلك من المعادلة (10)

$$\frac{17}{7}mg\ \cos\theta-\frac{10}{7}mg=0 \quad \rightarrow \quad \frac{17}{7}mg\ \cos\theta=\frac{10}{7}mg \quad \rightarrow \quad 17\cos\theta=10$$

$$(11)\ \cos\theta=\frac{10}{17} \quad \rightarrow \quad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{10}{17}\right) \quad \rightarrow \quad \theta=53.968^{O}$$

وفى هذه الحالة تكون θ أكبر ما يمكن أي أن $\theta=\theta_{\max}$. وسرعة الكرة عند هذه النقطة تعطى من العلاقة

$$\text{v}=r\,\theta^{\bullet}=(a+b)\sqrt{\frac{10\,g}{7(a+b)}(1-\cos\theta)}=\sqrt{\frac{10\,g}{7}(a+b)(1-\cos\theta)}$$

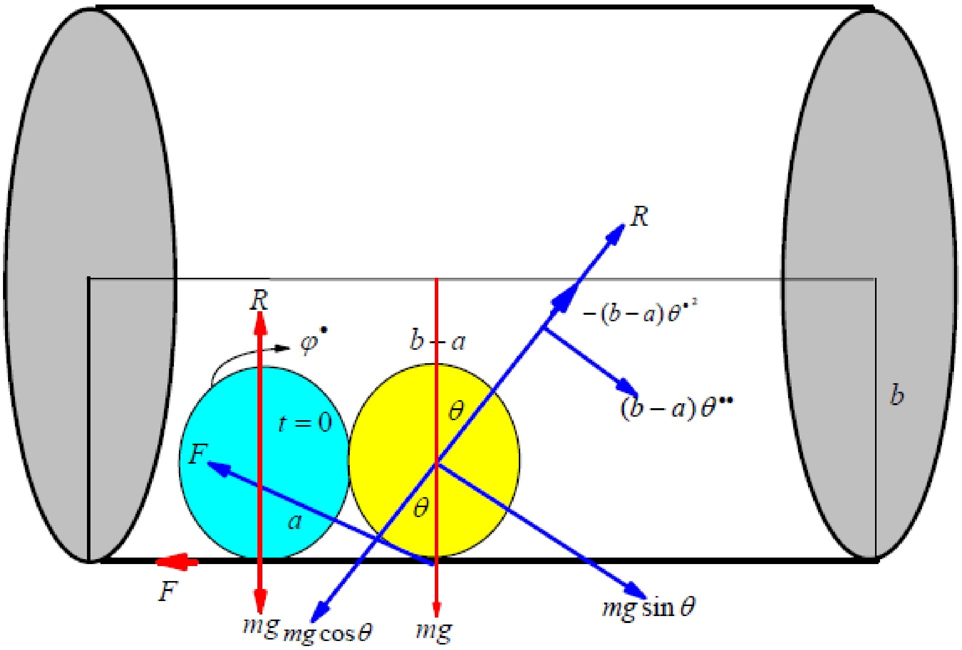
وتكون عند هذه النقطة $\theta=\theta_{\max}$ وبذلك تصبح قيمة السرعة

$$(12)\rightarrow \text{v}=\sqrt{\frac{10\,g}{17}(a+b)}\quad \text{v}=\sqrt{\frac{10\,g}{7}(a+b)(1-\frac{10}{17})}=\sqrt{\frac{10\,g}{7}(a+b)(\frac{17-10}{17})}$$

مثال6: كرة مصمتة نصف قطرها a بدأت التدحرج البحث علي السطح الداخلي لإسطوانة جوفاء مثبتة نصف قطرها b ومحورها أفقي وكانت سرعة مركز الكرة عندما تكون في أسفل موضع هي

v_0 . فإذا كان الإحتكاك بين الكرة والإسطوانة كاف لمنع الإنزاق فأثبت أن الشرط اللازم لكي تعمل الكرة دورات كاملة داخل الإسطوانة هو $v_0^2 > \frac{27}{7}(b-a)g$ ؟

الحـــــــل



اولاً معادلات الحركة الإنتقالية

معادلة الحركة الإنتقالية لمركز الكرة المتحركة (الكرة العليا) : معدل التغير في كمية الإنتقالية لمركز الكرة يساوي القوة الموثرة علي الكرة في اتجاة عجلة الكرة

معادلة الحركة في اتجاة نصف القطر

$$-m(b-a)\theta^{\bullet 2} = R - mg\cos\theta \qquad (1)$$

معادلة الحركة في الاتجاة العمودي علي نصف القطر

$$m(b-a)\theta^{\bullet\bullet} = mg\sin\theta - F \qquad (2)$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

معادلة الحركة الدورانية لمركز الكرة المتحركة (الكرة العليا) : معدل التغير في كمية الحركة الزاوية (الدورانية) حول مركز الكرة يساوي عزوم القوة الموثرة علي الكرة عند نفس النقطة

$$\frac{d}{dt}(I_C\phi^{\bullet}) = I_C\,\phi^{\bullet\bullet} = Fa$$

حيث I_C هو عزم القصور الذاتي للكرة عند مركزها وفي اتجاة عمودي علي مستوي الحركة, كما أن عزوم القوي موجبة لانها في اتجاة الحركة الزاوية (اتجاة العجلة الزاوية $(\phi^{\bullet\bullet})$) والتي تصبح بالصورة

$$\frac{2}{5}ma^2\phi^{\bullet\bullet} = Fa \;\rightarrow\; \frac{2}{5}ma\phi^{\bullet\bullet} = F \qquad (3)$$

والأن لدينا ثلاث معادلات في اربع متغيرات وهي ($F,\, R, \theta,\, \phi$) لذلك يلزمنا معادلة رابعة لحل هذة النظام وهذة المعادلة تأتي من سرعة التماس بين الكرة والإسطوانة.

ثالثاً سرعة نقطة التماس

وشرط التدحرج البحت (التدحرج بدون انزلاق) هو أن سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الكرة المتحركة يساوي سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الأسطوانة الساكنة: $\vec{v}_B = \vec{v}_c + \vec{v}_{Bc}$

حيث سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الكرة المتحركة يساوي= سرعة مركز الثقل الإنتقالية – سرعة نقطة التماس الإنتقالية بالنسبة لمركز الثقل أي أن $(b-a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet}$

بينما سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الأسطوانة الساكنة يساوي صفر . وبذلك فإن

$$(b-a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet} = 0 \quad \rightarrow \quad (b-a)\theta^{\bullet\bullet} = a\phi^{\bullet\bullet} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3) عن $(a\phi^{\bullet\bullet})$ نحصل

$$(5)\,\frac{2}{5}m(b-a)\theta^{\bullet\bullet} = F \qquad \rightarrow \quad F = \frac{2}{5}m(b-a)\theta^{\bullet\bullet}$$

بالتعويض من (5) في (2) عن (F) نحصل علي

$$m(b-a)\theta^{\bullet\bullet} = mg\sin\theta - \frac{2}{5}m(b-a)\theta^{\bullet\bullet}$$

$$(6)\frac{7}{5}(b-a)\theta^{\bullet\bullet} = g\sin\theta \qquad \rightarrow \frac{7}{5}(b-a)\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta} = g\sin\theta$$

بالتكامل المعادلة (6) نحصل علي

$$\frac{7}{10}(b-a)\theta^{\bullet 2} = -g\cos\theta + c$$

(7)

ومن الشروط الإبتدائية حيث سرعة مركز الكرة يالنسبة لمركز الدوران (النقطة o)عندما تكون في أسفل موضع هي v_0 أي أن $\theta^{\bullet}\big|_{t=0} = \frac{v_0}{b-a} \rightarrow v_0 = (b-a)\theta^{\bullet}\big|_{t=0}$ تكون $\theta = 0^O$ وبالتعويض

في

المعادلة (7) نحصل علي

$$\frac{7}{10}(b-a)\left(\frac{v_0}{b-a}\right)^2 = -g\underbrace{\cos(0)}_{=1} + c \rightarrow \quad c = \frac{7}{10}\frac{v_0^2}{b-a} + g$$

وبالتعويض في المعادلة (7) عن قيمة (c)نحصل علي

$$\frac{7}{10}(b-a)\theta^{\bullet 2} = -g\cos\theta + \frac{7}{10}\frac{v_0^2}{b-a} + g$$

$$(b-a)\theta^{\bullet 2} = \frac{10}{7}g(1-\cos\theta) + \frac{v_0^2}{b-a}$$

(8)

وبالتعويض في المعادلة (1) من المعادلة (8) عن قيمة $((b-a)\theta^{\bullet 2})$ نحصل علي

$$-m\left\{\frac{10}{7}g(1-\cos\theta)+\frac{v_0^2}{b-a}\right\}=R-mg\cos\theta$$

$$R=m\left\{\frac{10}{7}g(\cos\theta-1)+\frac{v_0^2}{b-a}\right\}+mg\cos\theta$$

$$R=m\left\{\frac{17}{7}g\cos\theta-\frac{10}{7}g+\frac{v_0^2}{b-a}\right\}$$

(9)

ولكي يصنع الجسم دورات كاملة داخل الإسطوانة هو ان يجب يكون رد الفعل أكبر (أي أن $R>0$) من الصفر وكذلك $\theta=\pi$ وبالتعويض في المعادلة (9) نحصل

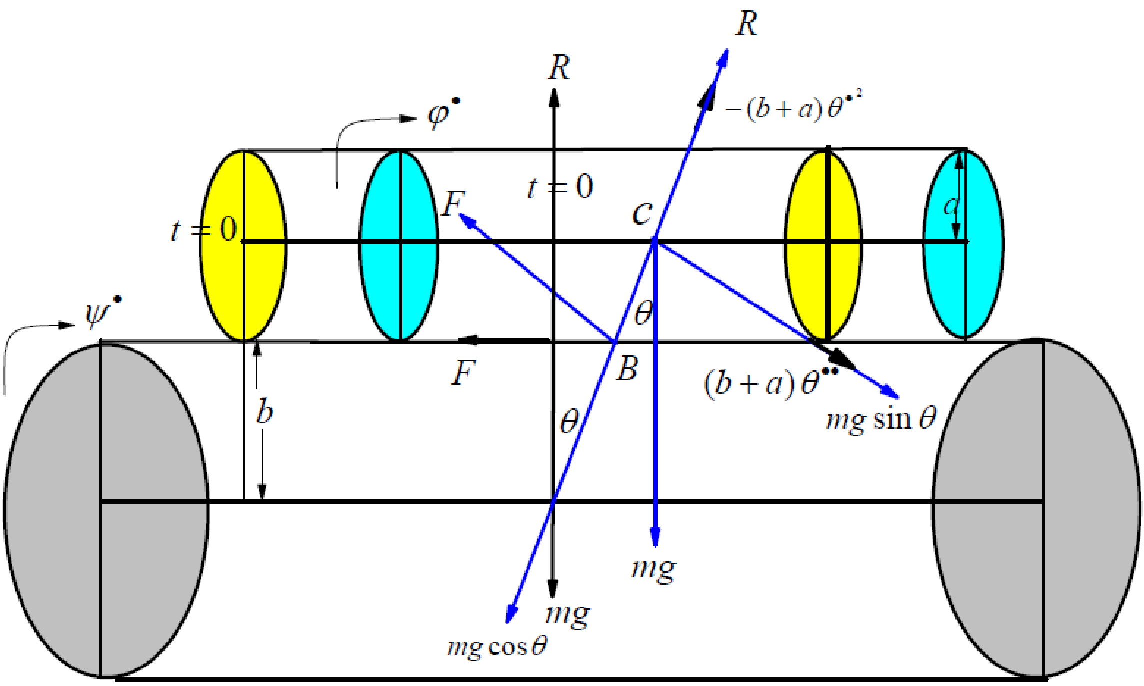
$$m\left\{\frac{17}{7}g\cos(\pi)-\frac{10}{7}g+\frac{v_0^2}{b-a}\right\}>0 \rightarrow \left\{-\frac{17}{7}g-\frac{10}{7}g+\frac{v_0^2}{b-a}\right\}>0$$

و يكون بذلك الشرط اللازم لكي تعمل الكرة دورات كاملة داخل الإسطوانة هو

$$v_0^2>\frac{27}{7}(b-a)g$$

مثال7: وضعت إسطوانة مصمتة تامة الخشونة نصف قطرها a وكتلتها m في وضع تماثل فوق إسطوانة اخري مصمتة نصف قطرها b وكتلتها m' يمكنها الدوران حول محورها الثابت أفقيا . بدأت الإسطوانة العليا التدحرج البحت فوق الإسطوانة السفلي وكانت θ هي الزاوية التي يصنعها المستوي المار بالمحورين مع المسنوي الرأسي عند أي لحظة زمنية t فأثبت أن $(3m'+2m)(a+b)\ddot{\theta}=2(m'+m)g\sin\theta$ وعين ايضاً الزاوية التي تترك فيها الإسطوانة العليا الإسطوانة السفلي ؟

الحـــــــــل



<u>اولاً معادلات الحركة الإنتقالية</u>

معادلة الحركة الإنتقالية لمركز الإسطوانة المتحركة (الإسطوانة العليا) : يمكن الحصول عليها من قانون نيوتن الثاني والذي ينص علي أن معدل التغير في كمية الإنتقالية لمركز الإسطوانة يساوي القوة الموثرة علي الإسطوانة في اتجاة عجلة الإسطوانة

(i) معادلة الحركة في اتجاة نصف القطر

$$-m(b+a)\dot{\theta}^2 = R - mg\cos\theta \qquad (1)$$

(ii) معادلة الحركة في الاتجاة العمودي علي نصف القطر

$$m(b+a)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - F \qquad (2)$$

<u>ثانياً معادلة الحركة الدورانية</u>

معادلة الحركة الدورانية لمركز الإسطوانة المتحركة (الإسطوانة العليا) يمكن الحصول عليها من قانون نيوتن الثاني في حالة الحركة الدورانية والذي ينص علي أن: معدل التغير في كمية

الحركة الزاوية (الدورانية) حول مركز الإسطوانة يساوي عزوم القوة الموثرة علي الإسطوانة عند نفس النقطة

$$\frac{d}{dt}(I_C\phi^{\bullet}) = I_C\,\phi^{\bullet\bullet} = Fa$$

حيث I_C هو عزم القصور الذاتي الإسطوانة عند مركزها وفي اتجاة عمودي علي مستوي الحركة, كما أن عزوم القوي موجبة لانها في اتجاة الحركة الزاوية (اتجاة العجلة الزاوية $(\phi^{\bullet\bullet})$) والتي تصبح بالصورة

$$\frac{1}{2}ma^2\phi^{\bullet\bullet} = Fa \;\rightarrow\; \frac{1}{2}ma\phi^{\bullet\bullet} = F \qquad (3)$$

كذلك معادلة الحركة الدورانية لمركز الإسطوانة السفلي تعطي من: معدل التغير في كمية الحركة الزاوية (الدورانية) حول مركز الإسطوانة السفلي يساوي عزوم القوة الموثرة علي الإسطوانة عند نفس النقطة

$$\frac{d}{dt}(I_{C'}\psi^{\bullet}) = I_{C'}\psi^{\bullet\bullet} = Fa$$

حيث $I_{C'}$ هو عزم القصور الذاتي الإسطوانة عند مركزها وفي اتجاة عمودي علي مستوي الحركة, كما أن عزوم القوي موجبة لانها في اتجاة الحركة الزاوية (اتجاة العجلة الزاوية $(\psi^{\bullet\bullet})$) والتي تصبح بالصورة

$$\frac{1}{2}m'a^2\psi^{\bullet\bullet} = Fa \;\rightarrow\; \frac{1}{2}m'a\psi^{\bullet\bullet} = F \qquad)4\quad ($$

والأن لدينا اربع معادلات في خمسة مجاهيل وهي ($F,\ R, \theta,\ \phi, \psi$) لذلك يلزمنا معادلة خامسة لحل هذا النظام والمعادلة الخامسة تأتي من سرعة التماس بين الإسطوانتين.

<u>ثالثاً سرعة نقطة التماس</u>

وشرط التدحرج البحت (التدحرج بدون انزلاق) هو أن سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الإسطوانة العليا يساوي سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الإسطوانة السفلي: $\vec{v}_B = \vec{v}_c + \vec{v}_{Bc}$.

و حيث أن الإسطوانة العليا تتحرك انتقالية و دورانية و بذلك تعطي سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الإسطوانة العليا بالصورة (سرعة مركز الثقل الإنتقالية – سرعة نقطة التماس الإنتقالية بالنسبة لمركز الثقل) أي أن $(b+a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet}$.

بينما سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الأسطوانة السفلي الدوراة يساوي $b\psi^{\bullet}$. وبذلك فإن

$$(b+a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet} = b\psi^{\bullet} \quad \rightarrow \quad (b+a)\theta^{\bullet\bullet} = a\phi^{\bullet\bullet} + b\psi^{\bullet\bullet} \qquad (5)$$

بالتعويض من (3) , (4) في (5) عن $(a\phi^{\bullet\bullet},\ a\psi^{\bullet\bullet})$ نحصل

$$(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = a\phi^{\bullet\bullet} + b\psi^{\bullet\bullet} \quad \rightarrow \quad (b+a)\theta^{\bullet\bullet} = \frac{2}{m}F + \frac{2}{m'}F$$

$$(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)F \quad \rightarrow \quad (b+a)\theta^{\bullet\bullet} = \frac{2}{m\,m'}(m+m')F$$

$$(6)\ F = \frac{m\,m'}{2(m+m')}(b+a)\theta^{\bullet\bullet}$$

بالتعويض من (6) في (2) عن F نحصل علي

$$m(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = mg\sin\theta - \frac{m\,m'}{2(m+m')}(b+a)\theta^{\bullet\bullet} \rightarrow \left(1 + \frac{m'}{2(m+m')}\right)(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = g\sin\theta$$

$$\left(\frac{2(m+m')+m'}{2(m+m')}\right)(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = g\sin\theta \rightarrow \left(\frac{2m+3m'}{2m+2m'}\right)(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = g\sin\theta$$

$$(7)\ (2m+3m')(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = (2m+2m')g\sin\theta$$

وهو المطلوب الأول:

والمعادلة (7) يمكن كتابتها بالصورة

$$(b+a)\theta^{\bullet\bullet} = \left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'}\right)g\sin\theta \quad \rightarrow \quad (b+a)\int\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta} = \left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'}\right)\int g\sin\theta$$

$$\frac{(b+a)}{2}\dot{\theta}^{2}=-\left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'}\right)g\cos\theta+c \qquad (8)$$

ومن الشروط الإبتدائية حيث بدات الإسطوانة العليا الحركة من الصفر ومن وضع التماثل أي عندما $\theta=0^{O}$ تكون $\dot{\theta}=0$ وبالتعويض في المعادلة (8) نحصل علي

$$(9)\ 0=-\left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'}\right)g\underbrace{\cos(0)}_{=1}+c\ \rightarrow\ c=\left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'}\right)g$$

وبالتعويض في المعادلة (8) عن قيمة (c)نحصل علي

$$(10)\,(b+a)\,\dot{\theta}^{2}=4g\left(\frac{m+m'}{2m+3m'}\right)(1-\cos\theta)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) من المعادلة (10) عن قيمة $((b+a)\dot{\theta}^{2})$ نحصل علي

$$-4mg\left(\frac{m+m'}{2m+3m'}\right)(1-\cos\theta)=R-mg\cos\theta$$

$$R=mg\cos\theta-4mg\left(\frac{m+m'}{2m+3m'}\right)(1-\cos\theta)$$

$$R=\left(\frac{mg}{2m+3m'}\right)\left\{(2m+3m')\cos\theta-4(m+m')(1-\cos\theta)\right\}$$

$$R=\left(\frac{mg}{2m+3m'}\right)\left\{(2m+3m'+4m+4m')\cos\theta-4(m+m')\right\}$$

$$R=\left(\frac{mg}{2m+3m'}\right)\left\{(6m+7m')\cos\theta-4(m+m')\right\} \qquad (11)$$

وعندما تترك الإسطوانة العليا الإسطوانة السفلي يكون رد الفعل مساوياً للصفر (أي أن $R=0$) (نحصل11ومن المعادلة)

$$0=\left(\frac{mg}{2m+3m'}\right)\left\{(6m+7m')\cos\theta-4(m+m')\right\}$$

و تعطي بذلك الزاوية التي تترك فيها الإسطوانة العليا الإسطوانة السفلي من $\cos\theta = \dfrac{4(m+m')}{6m+7m'}$

الحركة التوافقية المخمدة

Damped Oscillations

درسنا فيما سبق الحركة التوافقية البسيطة وهي عبارة عن حركة جسيم كتلة m تحت تأثير قوة متجهة دائماً نحو نقطة ثابتة ويتناسب مقدارها مع البعد عن النقطة الثابتة، في هذه الحالة تأخذ معادلة حركة الجسيم الصورة:

$$m\ddot{x} + kx = o \qquad (1)$$

حيث k مقدار ثابت موجب من الناحية العملية فإنه توجد قوى مقاومة أو إخماد تؤثر على حركة الجسيم . نفرض أن قوة الإخماد تتناسب مع السرعة وبذلك فإن معادلة حركة الجسيم تأخذ الصورة :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = o \qquad (2)$$

حيث (b) ثابت موجب يسمى معامل الإخماد بقسمة المعادلة (2) على (m) نجد أن :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_o^2 x = o \qquad (3)$$

حيث :

$$w_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \beta = \frac{b}{2m}$$

المعادلة (3) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة فتكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + w_o^2 = o \qquad (4)$$

جذرا المعادلة (4) هما:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - w_o^2} \ , \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - w_o^2} \qquad (5)$$

الحل العام للمعادلة (3) يكون :

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - w_o^2}\cdot t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - w_o^2}\cdot t}\right] \qquad (6)$$

توجد لدينا ثلاثة حالات وهي:

<u>أولاً:</u> عندما $\beta^2 > w_o^2$ فإن λ_1 , λ_2 يكونان حقيقيان وحركة الجسيم في هذه الحالة ليست تذبذبية ونلاحظ أن $x \to o$ عندما $t \to \infty$ وتسمى هذه الحالة بالحركة زائدة الإخماد

ثانياً: عندما $\beta^2 = w_o^2$ فإن : $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$ ويكون الحل التام للمعادلة (3) في الصورة :

$$x = e^{-\beta t}\ (A_1 + A_2\, t) \qquad (7)$$

المعادلة (7) تمثل حركة غير تذبذبية وأنه بعد زمن كبير جداً $t \to \infty$ فإن : $x \to o$ تسمى هذه الحالة بالحركة حرجة الإخماد.

ثالثاً: عندما $\beta^2 < w_o^2$ فإن : λ_1 , λ_2 يصبحان غير حقيقيين في الصورة :

$$\lambda_1 = -\beta + i\, w_1 \ , \quad \lambda_2 = -\beta - i\, w \qquad (8)$$

حيث :

$$w_1^2 = w_o^2 - \beta^2 \qquad (9)$$

ويأخذ الحل الصورة.

$$x(t) = e^{-\beta t}\ \left[A \cos\,(w_1 t - \gamma)\right] \qquad (10)$$

نلاحظ من المعادلة (1o) أن الحركة في هذه الحالة تكون تذبذبية وتتناقص السعة $Ae^{-\beta t}$ بزيادة الزمن (t) وتسمى هذه الحالة بالحركة ناقصة الإخماد.

الحركة التوافقية المجبرة:

إذا أثر على جسيم كتلته (m) قوة إضافية $(F_0 \cos wt)$ بجانب قوة الجذب (الاسترداد $-kx$) وقوة الإخماد $(b\,\dot{x})$ فإن هذه الحركة تسمى بالحركة التوافقية المجبرة.

معادلة حركة الجسم في هذه الحالة تكون الصورة .

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\,\dot{x} + F_0 \cos wt$$

بالقسمة على (m) نجد أن

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + w_o^2\, x = A \cos wt$$

حيث :

$$A = \frac{Fo}{m} \quad , \quad w_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \beta = \frac{b}{2m}$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية يتكون من جزئيين الأول (x_c) وهو الحل العـام للمعادلـة المتجانسـة والثـاني وهـو الحل الخاص (x_p).

$$\therefore x = x_c + x_p = e^{-\beta t}\left[A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - w_o^2}\cdot t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - w_o^2}\cdot t}\right] +$$

$$\frac{A\cos(wt-\delta)}{(w_o^2 - w^2)^2 + 4w^2\beta^2}$$

الثابتان (A_2, A_1) يتعينان من الشروط الابتدائية للحركة:

$$\delta = \tan^{-1}\left[\frac{2w\beta}{w_o^2 - w^2}\right]$$

مثال(1) : معادلة الحركة لجسيم يتحرك فى خط مستقيم هي $x^{\bullet\bullet} + 5x^{\bullet} + 4x = 0$ اذا بدء الجسيم حركة الابتدائية عند $t = 0$ وكانت $x = 1,\ x^{\bullet} = 2,$. أثبت أن الجسيم يصل إلى أقصى بعد من نقطة الأصل بعد زمن قدره $\frac{1}{3}\ln 2$.

الحـــــــــــل

المعادلة $x^{\bullet\bullet} + 5x^{\bullet} + 4x = 0$ هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات متجانسة ويمكن وضع حلها علي

الصورة $x = e^{\alpha t}$ وعلي وذلك $\alpha^2 + 5\alpha + 4 = 0$ ومنها $(\alpha+4)(\alpha+1) = 0$ و منها $\alpha = -4,\ \alpha = -1$ ويكون

حل المعادلة علي الصورة $x = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$ ومنها

$x^{\bullet} = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$ ومن الشروط الابتدائية عند $t = 0,\ x = 1$ نجد أن $1 = c_1 + c_2$

وعند $t = 0,\ x^{\bullet} = 2$ نجد أن $2 = -4c_1 - c_2$

وبحل المعادلتين السابقتين معا نجد ان $c_1 = -1,\ c_2 = 2$ وبذلك ويكون حل المعادلة علي الصورة

$x = -e^{-4t} + 2e^{-t}$ ويكون كذلك $x^{\bullet} = 4e^{-4t} - 2e^{-t}$ وعندما يصل الجسيم الي اقصى مسافة من نقطة الاصل

يعني هذا انه سوف يتوقف وعند ذلك يكون $x^{\bullet}=4e^{-4t}-2e^{-t}=0$ ومنها $4e^{-4t}=2e^{-t}$ و منها $2=e^{3t}$

ومنها $\ln 2=3t$ و منها $t=\frac{1}{3}\ln 2$.

وبذلك تصبح $x_{\max}=-e^{-4t}+2\,e^{-t}$ بالصورة

$$x_{\max}=-e^{-4(\frac{1}{3}\ln 2)}+2e^{-(\frac{1}{3}\ln 2)}$$

$$x_{\max}=-e^{(\ln(2)^{-\frac{4}{3}})}+2\,e^{(\ln(2)^{-\frac{1}{3}})} \quad\rightarrow\quad x_{\max}=-(2)^{-\frac{4}{3}}+2\,(2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$x_{\max}=\frac{2}{(2)^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{(2)^{\frac{4}{3}}} \quad\rightarrow\quad x_{\max}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^4} \quad\rightarrow\quad x_{\max}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

تمرين : معادلة الحركة لجسيم يتحرك في خط مستقيم هي $x^{\bullet\bullet}+4x^{\bullet}-5x=0$ وكانت الحالة الابتدائية لحركة الجسيم عند $x=1,\ x^{\bullet}=2,\ t=0$.أوجد الزمن اللازم لكى يصل الجسيم إلى أقصى بعد من نقطة الأصل؟

مثال(2): جسيم كتلة (m) يتحرك تحت تأثير قوة الجذب (9 m x) نحو نقطة ثابتة (o) وقوة الإخماد $6m\dot{x}$ حيث (x) هي بعد الجسيم عند (o). أوجد موضع وسرعة الجسيم عند أي لحظة ووضح نوع الحركة إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من السكون من الموضع (x = 4).

الحـــــــــــــل

معادلة حركة الجسيم باستخدام قانون نيوتن الثاني هي

$$m\ddot{x}=-9mx-6m\dot{x} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+6\dot{x}+9x=o$$

وتكون المعادلة المساعدة =

$$\lambda_1=\lambda_2=-3 \quad\Leftarrow\quad \lambda^2+6\lambda+9=o$$

ويكون الحل العام للمعادلة = $x=(A_1+A_2t)\ e^{-3t}$ حيث $A_1,\ A_2$ ثابتان يتعينان من الشروط الابتدائية .

At t = o , x = 4

$\therefore\ A_1=4 \qquad \therefore\ x=(4+A_2t)\ e^{-3t}$

$\therefore\ \dot{x}=e^{-3t}\,[-12+A_2-3A_2t]$

at t = o, , $\dot{x}=o$, $A_2=12$

$\therefore\ \dot{x} = -36\, t\, e^{-3t} \quad , \qquad x = 4\, e^{-3t}\ [1 + 3t]$

هذه الحركة من النوع حرج الإخماد

مثال(3) :كتلــة مقـدارها الوحدة وربطت بزنبرك وتحركت تحت تأثير قوة الاسـترداد $-16x$ والقوة $80 \sin 4t$ إذا بدأت الكتلة حركتها في السكون من نقطة الأصل وأهملنا الإخماد . فأوجد الموضع $x(t)$ عند أي لحظة t ووضح المعنى الفيزيائي للحل.

الحـــــــــــل

معادلة الحركة هي :

$$\ddot{x} = -16x + 80 \sin 4t \qquad \therefore\ \ddot{x} + 16x = 80 \sin 4t$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة (الدالة المكملة) x_c هو :

$$x_c = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t$$

والحل الخاص :

$$x_p = \frac{1}{D^2+16}\, 8o \sin 4t = -8o\ \frac{t}{2(4)} \cos 4t = -1ot \cos 4t$$

حيث

$$\frac{1}{D^2+a^2} \sin ax = \frac{-x \cos a x}{2a}$$

$$\therefore\ x = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t - 1ot \cos 4t$$

$$at\ t = o\ ,\ \ x = o\ ,\ \ c_2 = o$$

$$\therefore\ x = c_1 \sin 4t - 1o \cos 4t \cdot t$$

$$\dot{x} = 4c_1 \cos 4t - 1o\,[\cos 4t - 4t \sin 4t]$$

$$at\ \ t = o\ , \quad \dot{x} = o\ , \quad c_1 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{5}{2} \sin 4t - 1ot \cos 4t$$

مثال (4): تتذبذب كتلة m في وسط مقاومة لوحدة الكتل تساوي $-4\dot{x}$ وكانت قوة الاسـترداد لوحدة الكتـل تسـاوي $-13x$ أوجد الحل العام . .

الحـــــــــل

$m\ddot{x} = -4m\dot{x} - 13xm \qquad \therefore \ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = o$

$\therefore (D^2 + 4D + 13)x = o \qquad \therefore \lambda^2 + 4\lambda + 13 = o$

$$\therefore \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = -2 \pm 3i$$

$$\therefore x = Ae^{-2t} \cos(3t + B)$$

مثال (5): تتحرك كتلة m تحت تأثير قوة الاسترداد 5mx- وقوة الإخمـاد $-2m\dot{x}$ والقـوة التذبذبيـة cos t لوحـدة الكتل أوجد الحل العام .

الحـــــــــل

معادلة الحركة

$m\ddot{x} = -5mx - 2m\dot{x} + m\cos t \qquad \therefore \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \cos t$

$(D^2 + 2D + 5)x = \cos t$

أولاً: حل المعادلة المتجانسة تكون الدالة المساعدة.

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = o \qquad \therefore \lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-2o}}{2} = -1 \pm 2i$

$$\therefore x_1 = e^{-t}[A\cos 2t + B\sin 2t]$$

ثانياً: الحل الخاص:

$$x_2 = \frac{1}{f(D)}\cos t = \frac{1}{D^2+2D+5}\cos t = \frac{1}{-1+2D+5}\cos t$$

$$= \frac{1}{2(D+2)}\cos t = \frac{(D-2)}{2(D^2-4)}\cos t = \frac{(D-2)}{2(-5)}\cos t =$$

$$= -\frac{1}{10}[-\sin t - 2\cos t]$$

$$\therefore x = x_1 + x_2 = e^{-t}[A\cos 2t + B\sin 2t] + \frac{1}{10}[\sin t + 2\cos t]$$

مثال (6): يتحرك جسم كتلته 3 تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الأصل o مقدارها يساوي 12x عددياً وقوة إخماد تساوي عددياً أثنى عشر السرعة الخطية أوجد موضع وسرعة الجسيم عند أي لحظة وبين نوع هذه الحركة إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من السكون من الموضع x = 5 .

الحـــــــــــل

$$3\ddot{x} = -12x - 12\dot{x}$$
$$\therefore \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = o$$
$$\therefore (D^2 + 4D + 4)x = o$$
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = o$$
$$\lambda + 2)^2 = o \rightarrow \lambda = -2, -2$$
$$x = (A + Bt)e^{-2t}$$
$$\therefore \dot{x} = -2\,(A + Bt)e^{-2t} + Be^{-2t}$$
$$\therefore \dot{x} = (B - 2A - 2Bt)e^{-2t}$$
$$at \quad t = o, \qquad x = 5$$
$$\therefore A = 5$$
$$at \quad t = o, \qquad \dot{x} = o \quad o = B - 2A$$
$$\therefore B = 2A = 10$$
$$x = (5 + 10t)e^{-2t} \quad , \qquad \dot{x} = -2ote^{-2t}$$

مثال (7): `

يتحرك جسيم كتلته الوحدة تحت تأثير قوة الاسترداد 25x- وقوة الإخماد $\dot{x}$ 26 – إذا علم أن الجسيم بدأ حركته من السكون من الموضع x = 24 فأوجد موضع الجسيم وسرعته عند أى لحظة t وبين نوع هذه الحركة.

الحـــــــــــل

$$\ddot{x} = -25x - 26\dot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} + 26\dot{x} + 25x = o$$

$$\therefore (D^2 + 26D + 25)x = o$$

$$\lambda^2 + 26\lambda + 25 = o$$

$$\therefore \lambda = \frac{-26 \pm \sqrt{576}}{2} = -25, -1$$

$$\therefore x = Ae^{-25\,t} + Be^{-t}$$

$$\dot{x} = -25\,Ae^{-2t} - Be^{-t}$$

$$at \quad t = o, \quad x = 24$$

$$\therefore 24 = A + B \rightarrow (1)$$
$$at \quad t = o, \quad \dot{x} = o$$

$$\therefore \quad B = -25A \qquad (2)$$

$$A = -1 \quad , \quad B = 25$$
$$\therefore x = -e^{-25t} + 25e^{-t}$$

واضح إنها حركة غير تذبذبية.

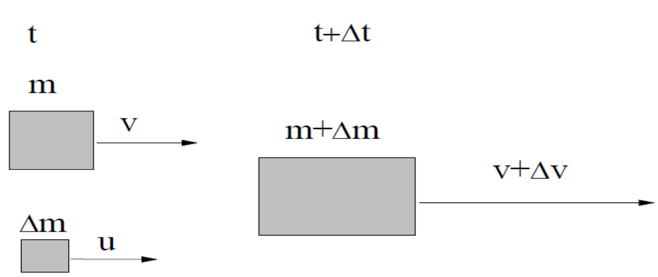
حركة جسيم متغير الكتلة

درسنا فيما سبق قانون نيوتن الثانى وقد تم التركيز على حركة الجسيمات ثابتة الكتلة ولكن في بعض الحالات يظهر تغير فى كتلته الجسيمات أثناء حركتها مثل الصواريخ و سقوط الأمطار و السلاسل الساقطة وغيرها. حيث فى حالة الصاروخ فإن الكتلة تتغير (تنقص) نتيجة احتراق الوقود وانبعاث غازات الاحتراق من مؤخرة الصاروخ. وفى حالة سقوط الأمطار فإن كتلة قطرة المطر تتغير (تزداد) نتيجة تكثف بخار الماء عليها أو التصاق الغبار بها.

ونتيجة لذلك فإن قانون نيوتن الثانى والمعروف بالصورة يكون غير صالح لدراسته مثل هذه الحالات وفيما يلي سوف نحاول إيجاد الصيغة المناسبة لدراسته مثل هذه الحالات

<u>قانون نيوتن الثاني في حالة الكتلة المتغيرة:</u>

لنفرض أنة لدينا جسيم كتلته m يتحرك بسرعة $\vec{v}$ وذلك عند اللحظة t وعند نفس اللحظة يوجد جسم أخر كتلته Δm يتحرك بسرعة $\vec{u}$. بعد لحظة زمنية مقدارها Δt التصق الجسيمان فكونا جسماً واحداً كتلته $m+\Delta m$ وأصبحت سرعته عند اللحظة $t+\Delta t$ بالصورة $\vec{v}+\Delta\vec{v}$ وذلك كما فى الشكل المقابل.



فيما يلى سوف نحاول تطبيق قانون الدفع وكمية الحركة . حيث الدفع عند لحظة ما يساوى التغير فى كمية الحركة.

وكما أنة من المعروف بأن للجسيمان تعطى كمية الحركة بالصورة التالية .

كمية الحركة عند اللحظة t تعطى بالصورة

$$\vec{p}(t)=m\vec{v}+\Delta m\vec{u} \qquad (1)$$

بينما تعطى كمية الحركة عند اللحظة $t+\Delta t$ تعطى بالصورة.

$$\vec{p}(t+\Delta t) = (m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) = m\vec{v}+\vec{v}\,\Delta m + m\Delta\vec{v} + \Delta m\Delta\vec{v}$$

وحيث أن كل من $\Delta m, \Delta\vec{v}$ كميات صغيرة فيمكن إهمال المقدار $\Delta m\Delta\vec{v}$ وتصبح المعادلة السابقة بالصورة

$$\vec{p}(t+\Delta t) = m\vec{v}+\vec{v}\,\Delta m + m\Delta\vec{v} \qquad (2)$$

وحيث أن الدفع خلال اللحظة Δt يعطى بالصورة

$$\vec{F}\Delta t = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) = m\vec{v}+\vec{v}\,\Delta m + m\Delta\vec{v} - \left\{ m\vec{v} + \Delta m\vec{u} \right\} \qquad (3)$$

$$\vec{F}\Delta t = \vec{v}\,\Delta m + m\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{u}$$

وبالقسمة على $\vec{F}\Delta t = \vec{v}\,\Delta m + m\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{u}$ نحصل على

$$\vec{F} = \vec{v}\frac{\Delta m}{\Delta t} + m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{u}\frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad (4)$$

وبأخذ النهاية للمعادلة (3) عندما $\Delta t \to 0$ نحصل على

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt} \\
\vec{F} &= \frac{d}{dt}(\vec{v}m) - \vec{u}\frac{dm}{dt} \\
\vec{F} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt} \\
\vec{F} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}
\end{aligned} \qquad (5)$$

ملاحظات

(1)- فى المعادلة (5) كل من $\vec{F}, \vec{v}, \vec{u}$ مأخوذة فى اتجاه واحد .

(2)- فى المعادلة (5) إذا كانت سرعة الجسيم المضاف($\vec{u}$) فى عكس الاتجاه المأخوذ (الكتلة المضافة تتحرك فى عكس اتجاه حركة الجسم الأصلي) فإن $\vec{u}$ توضع سالبة فى المعادلة (5) لتصبح.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{v}m) + \vec{u}\frac{dm}{dt} \qquad (6)$$

(3)- فى المعادلة (5) كانت هناك زيادة فى الكتلة بينما إذا كان هناك نقص فى الكتلة فإن $\frac{dm}{dt}$ توضع سالبة فى المعادلة وبذلك تصبح (5) بالصورة.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{v}m) + \vec{u}\frac{dm}{dt} \qquad (7)$$

(4)- فى المعادلة (5) ($\vec{u}$) هى سرعة الجسيم المضاف قبل الإضافة مباشرة وإذا كان الجسيم المضاف سكن قبل الإضافة فإن $\vec{u}=0$ وتصبح المعادلة (5) بالصورة.

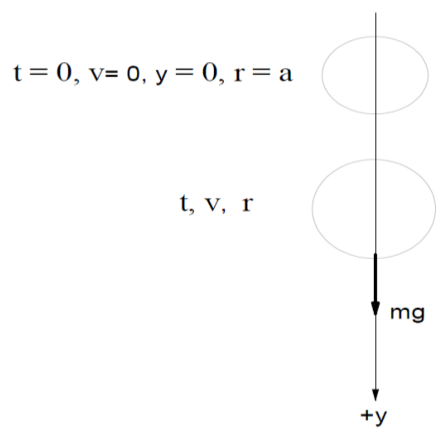
$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(\vec{v}m) \qquad (8)$$

(5)- فى المعادلة (5) اذا كانت $\vec{w}$ هى السرعة النسبية للكتلة المضافة بالنسبة للكتلة الأصلية فإن

$$\vec{w}=\vec{u}-\vec{v} \qquad (9)$$

مثال: تسقط قطرة مطر كروية الشكل من السكون. إذا كان بخار الماء يتكاثف عليها بحيث أن حجمها يزداد بمعدل λ من المرات من مساحة سطحها ولا تؤثر عليها قوى سوى وزنها أوجد سرعة القطرة عند أي لحظة زمنية t وكذلك المسافة المقطوعة بفرض سرعة الكتلة المضافة تساوي صفر .

الحـــــــــــــل



لجسم متغير الكتلة يمكننا كتابة معادلة الحركة علي الصورة

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})+\vec{u}\,\frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

وحيث أن بخار الماء سوف يتكاثف علي القطرة من السكون فهذا يعني أن سرعة الجزء المضاف تساوي الصفر $(u=0)$ وبذلك تصبح المعادلة (1) علي الصورة

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\,\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\,\frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

وحيث أن القوة الوحيدة التي توثر علي القطرة هو وزنها فقط فان المعادلة (2) يمكن كتابتها بالصورة

$$mg=\frac{d}{dt}(m\text{v}) \qquad (3)$$

ومن المعلوم بأن كتلة القطرة يمكن كتابتها بالصورة (حجم الكرة x الكثافة)

$$m=\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \qquad (4)$$

وحيث ان حجم القطرة يزداد بمعدل λ من المرات من مساحة سطحها فان

$$\frac{d}{dt}(\frac{4}{3}\pi r^3) = \lambda(4\pi r^2) \qquad (5)$$

وبتفاضل الطرف الأيسر من المعادلة نحصل $4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = \lambda(4\pi r^2)$

ومنها يكون $\frac{dr}{dt} = \lambda$. ومنها وبالتفاضل يكون $r = \lambda t + c_1$ ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ يكون $r=a$

ومنها يكون $c_1=a$ وبذلك يكون $r = \lambda t + a$

وبذلك تصبح الكتلة بالصورة $m=\frac{4}{3}\pi r^3 \rho =\frac{4}{3}\pi \rho(\lambda t + a)^3$ وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل

$$\frac{4}{3}\pi \rho(\lambda t+a)^3 g = \frac{d}{dt}\left\{\frac{4}{3}\pi \rho(\lambda t+a)^3 \mathrm{v}\right\}$$

$$(\lambda t+a)^3 g = \frac{d}{dt}\left\{(\lambda t+a)^3 \mathrm{v}\right\}$$

وبفصل المتغيرات و التكامل بالنسبة للزمن نحصل على :

$$g\int(\lambda t+a)^3 dt = \int d\left\{(\lambda t+a)^3 \mathrm{v}\right\}$$

$$\frac{g}{4\lambda}(\lambda t+a)^4 = (\lambda t+a)^3 \mathrm{v} + c_2$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ يكون $\mathrm{v}=0$ ومنها نجد أن $\frac{g}{4\lambda}a^4 = c_2$ وبالتالي فان المعادلة السابقة تصبح

$$\frac{g}{4\lambda}(\lambda t+a)^4 = (\lambda t+a)^3 \mathrm{v} + \frac{g}{4\lambda}a^4$$

وبذلك تصبح سرعة القطرة عند أي لحظة زمنية t بالصورة:

$$v = \frac{g}{4\lambda}\left[(\lambda t + a) - \frac{a^4}{(\lambda t + a)^3}\right] \qquad (7)$$

ولإيجاد المسافة المقطوعة نضع $v = \frac{dy}{dt}$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{4\lambda}\left[(\lambda t + a) - \frac{a^4}{(\lambda t + a)^3}\right]$$

وبفصل المتغيرات و التكامل نحصل على :

$$\int dy = \int \frac{g}{4\lambda}\left[(\lambda t + a) - \frac{a^4}{(\lambda t + a)^3}\right] dt$$

$$y = \frac{g}{4\lambda}\left[\frac{1}{2\lambda}(\lambda t + a)^2 + \frac{1}{2\lambda}\frac{a^4}{(\lambda t + a)^2}\right] + c_3$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t = 0$ يكون $y = 0$ ومنها نجد أن

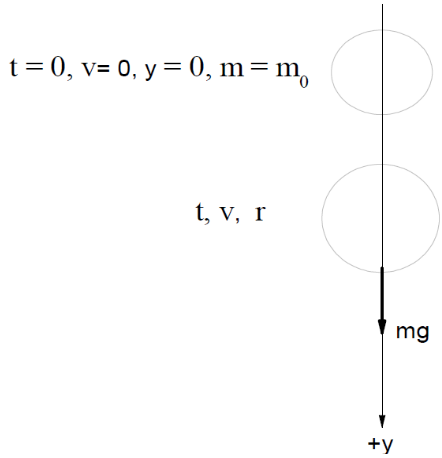
$$0 = \frac{g}{4\lambda}\left[\frac{1}{2\lambda}(0 + a)^2 + \frac{1}{2\lambda}\frac{a^4}{(0 + a)^2}\right] + c_3 \to \quad 0 = \frac{g}{4\lambda}\left[\frac{a^2}{2\lambda} + \frac{a^2}{2\lambda}\right] + c_3 \to c_3 = -\frac{g\,a^2}{4\lambda^2}$$

وبالتالي فان المسافة المقطوعة كدالة في الزمن تعطي بالصورة

$$y = \frac{g}{8\lambda^2}\left[(\lambda t + a)^2 + \frac{a^4}{(\lambda t + a)^2}\right] - \frac{g\,a^2}{4\lambda^2} \qquad (8)$$

مثال: تسقط قطرة مطر في وسط ساكن و يتكاثف عليها بخار الماء بمعدل كتلي ثابت مقداره k مع مرور الوقت وبفرض أن القطرة تقع تحت تأثر مقاومة تتناسب مع سرعتها. عين سرعة القطرة بعد زمن مقداره t علما بان القطرة قد بدأت حركتها من السكون وبكتله ابتدائية مقدارها m_0.

الحـــــــــــل



بفرض أن m هي كتله القطرة وحيث أن بخار الماء يتكاثف عليها بمعدل كتلـي ثابـت مقداره k أي أن وزنهـا يتغير مع مرور الزمن بالمقدار $\frac{dm}{dt}=k$ ومنها

$$\frac{dm}{dt}=k \Rightarrow \int dm = k\int dt \Rightarrow m = k\,t + c_1$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_1 = m_0$ وبذلك يكون لدينا

$$m = kt + m_o \qquad (1)$$

وبكتابة معادلة الحركة باستخدام قانون نيوتن الثانى في حالة الكتلة المتغيرة

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{v}m) - \vec{u}\,\frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

وحيث أن الكتلة المضافة ساكنة قبل الإضافة فإن $u = 0$ وكذلك فإن القطرة أثناء حركتها تقع تحت تأثير وزنها وقوة مقاومة تتناسب مع سرعتها أى أن $F = mg - \lambda v$. وبذلك تصبح المعادلة (2) بالصورة

$$mg - \lambda v = \frac{d}{dt}(mv) \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = mg - \lambda v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + v\frac{\frac{dm}{dt}}{m} = g - \frac{\lambda v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} + v\frac{k}{m} = g - \frac{\lambda v}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + v\frac{k}{k\,t + m_0} = g - \frac{\lambda v}{k\,t + m_0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{k\,t + m_0}(k + \lambda) = g$$

وهذه معادلة خطيه يكون حلها باستخدام العامل المكامل

$$e^{\int(\frac{k+\lambda}{m_o+kt})dt} = e^{\frac{(k+\lambda)}{k}\ln(m_o+kt)} = (m_o+kt)^{(1+\frac{\lambda}{k})}$$

$$v(m_o+kt)^{1+\frac{\lambda}{k}} = g\int(m_o+kt)^{1+\frac{\lambda}{k}}dt \Rightarrow v(m_o+kt)^{1+\frac{\lambda}{k}} = \frac{g(m_o+kt)^{2+\frac{\lambda}{k}}}{(2+\frac{\lambda}{k})k} + c_2 \qquad (3)$$

من الشروط الابتدائية وعندما $t=o, v=o$ نجد أن

$$\therefore c_2 = \frac{-gm_0^{(1+\frac{\lambda}{k})}}{(2k+\lambda)} \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) فى (3) نحصل على

$$v(m_o+kt)^{1+\frac{\lambda}{k}} = \frac{g(m_o+kt)^{2+\frac{\lambda}{k}}}{(2+\frac{\lambda}{k})k} - \frac{g\,m_0^{(1+\frac{\lambda}{k})}}{(2k+\lambda)} = \frac{g(m_o+kt)^{1+\frac{\lambda}{k}}(m_o+kt)}{(2+\frac{\lambda}{k})k} - \frac{g\,m_0^{(1+\frac{\lambda}{k})}}{(2k+\lambda)}$$

$$v = \frac{g(m_o+kt)}{(2+\frac{\lambda}{k})k} - \frac{g\,m_0^{(1+\frac{\lambda}{k})}}{(2k+\lambda)(m_o+kt)^{(1+\frac{\lambda}{k})}} \qquad (5)$$

مثال: وضعت سلسلة منتظمة وغير مرنة من حافة منضدة أفقية ملساء إذا تحرك أحد طرفيها ليسقط رأسياً من السكون من حافة منضدة . أثبت أنة بعد مضى زمن مقداره t وقبل أن تسقط السلسلة بأكملها يكون طول الجزء الرأسي المتدلي من السلسلة هو $\frac{1}{6}gt^2$ وسرعته تساوى $\frac{1}{3}gt$. حيث g هى عجلة الجاذبية الأرضية.

الحـــــــــل

بكتابة معادلة الحركة باستخدام قانون نيوتن الثاني في حالة الكتلة المتغيرة

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{v} m) - \vec{u}\frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

وحيث أن الجزء المضاف من السلسلة الى الجزء الرأسي المتدلي سوف يضاف إلى الجزء المتحرك مبتدئاً من السكون أى أن $u=0$ وبذلك تصبح المعادلة (1) بالصورة:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{v} m) \qquad (2)$$

وتعطى كتلته الجزء المضاف من السلسلة بالصورة (الطول× الكثافة) $m = \rho y$. وحيث أن القوة الوحيدة المؤثرة على الجزء المتدلي هو الوزن فقط فتصبح المعادلة (2) بالصورة

$$m g = \frac{d}{dt}(v m) \Rightarrow \rho y g = \frac{d}{dt}(v \rho y) \Rightarrow y g = \frac{d}{dt}(v\, y) \qquad (3)$$

ولكن $\frac{d}{dt}(\ ) = \frac{dy}{dy}\left[\frac{d}{dt}(\ )\right] = \frac{dy}{dt}\left[\frac{d}{dy}(\ )\right] = v\frac{d}{dy}(\ )$ وبالتعويض فى (3) نحصل على

$$y g = \frac{d}{dt}(v\, y) = v\frac{d}{dy}(v\, y) \Rightarrow y^2 g = v\, y\frac{d}{dy}(v\, y) \Rightarrow g\int y^2\, dy = \int v\, y\, d(v\, y)$$

$$\frac{1}{3} g\, y^3 = \frac{1}{2}(v\, y)^2 + c_1$$

ومن الشروط الابتدائية حيث $y=0, \text{v}=0$ فيكون $c_1=0$ ويكون بذلك

$$\frac{1}{3}g\,y^3=\frac{1}{2}(\text{v}\,y)^2 \Rightarrow \frac{1}{3}g\,y=\frac{1}{2}\text{v}^2$$

$$\text{v}=\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}}\int dt \Rightarrow 2y^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}} t+c_2$$

ومن الشروط يكون $c_2=0$ ويكون بذلك

$$2y^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}} t \Rightarrow \left[2y^{\frac{1}{2}}\right]^2=\left[\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}} t\right]^2 \Rightarrow 4y=\frac{2}{3}g\,t^2$$

ويعطى بذلك طول الجزء المتدلي بالصورة

$$\therefore \quad y=\frac{1}{6}g\,t^2 \qquad (5)$$

وتعطى سرعته طول الجزء المتدلي بالتعويض من (5) فى (4)

$$\text{v}=\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}g\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{6}g\,t^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}g\;\frac{1}{6}g\right)^{\frac{1}{2}} t=\left(\frac{1}{9}g^2\right)^{\frac{1}{2}} t=\frac{1}{3}g\,t$$

$$\therefore \quad \text{v}=\frac{1}{3}g\,t \qquad (6)$$

يمكن كذلك الحصول على المعادلة (6) مباشراً من تفاضل المعادلة (5) بالنسبة للزمن.

مثال: اعد صاروخ للانطلاق رأسيا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 وكانت كتلته الابتدائية مقدارها m_0 إذا كان الوقود يحترق بمعدل ثابت وتنبعث الغازات من مؤخرة الصاروخ بسرعة نسبية b ولا تؤثر عليه قوى سوى وزنه عين سرعة الصاروخ عند أي لحظة t **وكذلك المسافة المقطوعة؟**

الحـــــــــــــل

بفرض أن m هي كتله الصاروخ عند أي لحظة زمنية وحيث أن الوقود يحترق بمعدل ثابت وتنبعث الغازات وبذلك تتناقص كتلته مع مرور الزمن وبفرض أن هذا التغير يعطى بالمقدار $\frac{dm}{dt}=-k$ عند ذلك يكون

$$\frac{dm}{dt}=-k \Rightarrow \int dm=-k\int dt \Rightarrow m=-k\,t+c_1$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_1=m_0$ وبذلك يكون لدينا

$$m=m_o-kt \qquad (1)$$

وبكتابة معادلة الحركة باستخدام قانون نيوتن الثاني في حالة الكتلة المتغيرة

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}-(\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

حيث $\frac{dm}{dt}=-k,\ \vec{F}=-mg,\ b=\vec{u}-\vec{v}$ بذلك تصبح المعادلة (2) بالصورة

$$-mg=m\frac{dv}{dt}-(-b)(-k)$$

$$m\frac{dv}{dt}=-mg+bk \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{bk}{m}-g \qquad (3)$$

وبالتعويض عن m من المعادلة (1) فى المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{dv}{dt}=\frac{bk}{m_o-kt}-g \Rightarrow \int dv=\int\left\{\frac{bk}{m_o-kt}-g\right\}dt$$

$$v=\left\{-b\ln(m_o-kt)-gt\right\}+c_2$$

ومن الشروط الابتدائية (عند $t=0$ فإن $\mathrm{v}=\mathrm{v}_0$) يكون لدينا $c_2=\mathrm{v}_0+b\ln m_0$

وبذلك تصبح السرعة بالصورة

$$\mathrm{v}=\left\{-b\ln(m_o-kt)-gt\right\}+\mathrm{v}_0+b\ln m_0$$

$$\mathrm{v}=\mathrm{v}_0-gt-b\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\} \qquad (4)$$

من المعادلة (4) يمكننا إيجاد المسافة المقطوعة كدالة فى الزمن بالصورة

$$\mathrm{v}=\frac{dy}{dt}=\mathrm{v}_0-gt-b\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\} \quad \Rightarrow \int dy=\int\left[\mathrm{v}_0-gt-b\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\}\right]dt \quad (5)$$

ونحاول إيجاد تكامل الحد الأخير من الطرف الأيمن من المعادلة (5) وذلك بفرض أن

$$\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\}=\theta \Rightarrow \frac{m_o-kt}{m_0}=e^{\theta} \Rightarrow t=\frac{m_0}{k}\left(1-e^{\theta}\right) \Rightarrow dt=-\frac{m_0}{k}e^{\theta}\,d\theta \qquad (6)$$

ومن (6) يكون لدينا تكامل الحد الأخير من الطرف الأيمن من المعادلة (5) على الصورة

$$-b\int\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\}dt=-b\int\theta\left\{-\frac{m_0}{k}e^{\theta}\,d\theta\right\}=\frac{m_0 b}{k}\int\theta e^{\theta}\,d\theta=\frac{m_0 b}{k}\int\theta\,d(e^{\theta})$$

$$=\frac{m_0 b}{k}\left\{\theta e^{\theta}-\int e^{\theta}\,d\theta\right\}=\frac{m_0 b}{k}\left\{\theta-1\right\}e^{\theta}$$

$$\therefore \quad -b\int\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\}dt=\frac{m_0 b}{k}\left\{\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\}-1\right\}\frac{m_o-kt}{m_0} \quad (7)$$

وبذلك يكون تكامل المعادلة (5) بالصورة

$$y=\mathrm{v}_0 t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{m_0 b}{k}\left\{\ln\left\{\frac{m_o-kt}{m_0}\right\}-1\right\}\frac{m_o-kt}{m_0}+c_3$$

ومن الشروط الابتدائية (عند $t=0$ فإن $y=0$) يكون لدينا

$$\frac{m_0 b}{k}\left\{\ln\left\{\frac{m_o}{m_0}\right\}-1\right\}\frac{m_o}{m_0}+c_3 \Rightarrow c_3=\frac{m_0 b}{k}$$

وبذلك تصبح المسافة المقطوعة بالصورة

$$y=\mathrm{v}_0 t-\frac{1}{2}g t^2+\frac{m_0 b}{k}\left\{\ln\left\{\frac{m_o-k t}{m_0}\right\}-1\right\}\frac{m_o-k t}{m_0}+\frac{m_0 b}{k}$$

مثال: صاروخ كتلته الابتدائية M_0 يشتعل وقوده بمعدل ثابت مقداره λM_0 لكل ثانية وتنبعث الغازات الناتجة عن الاحتراق بسرعة نسبية v_0 لأسفل بالنسبة للصاروخ. إذا كانت M' هي كتلة معدات الصاروخ وغلافه الخارجي, M_1 هي كتلة الوقود الموجود داخل الصاروخ. أثبتي أن الصاروخ يرتفع مباشراً إذا كان $\mathrm{v}_0\lambda > g$ وأن الصاروخ لا ينطلق أبدا إذا كان $\mathrm{v}_0 M_0\lambda < M'g$. وإذا انطلق الصاروخ راسياً لأعلى فأوجد كل من السرعة والمسافة المقطوعة كداله في الزمن. حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية.

الحـــــــــــل

بفرض أن m هي كتله الصاروخ عند أي لحظة زمنية.

وحيث أن الوقود يحترق بمعدل ثابت وتنبعث الغازات وبذلك تتناقص كتلته مع مرور الزمن و أن هذا التغير يعطى بالمقدار $\frac{dm}{dt}=-\lambda m_0$ عند ذلك يكون

$$\frac{dm}{dt}=-\lambda m_0 \Rightarrow \int dm=-\lambda m_0\int dt \Rightarrow m=-\lambda m_0 t+c_1$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_1=m_0$ وبذلك يكون لدينا

$$m=m_0\left(1-\lambda t\right) \qquad (1)$$

وهى تمثل كتلته الصاروخ عند أي لحظة زمنية.

بفرض أن سرعة الصاروخ هي $\vec{\mathrm{v}}$ وسرعة الغازات المنبعثة هي $\vec{u}$ وتكون السرعة النسبية للغازات المنبعثة بالنسبة لسرعة الصاروخ $\vec{\mathrm{v}}_0=\vec{u}-\vec{\mathrm{v}}$. وتكون منها $\vec{u}=\vec{\mathrm{v}}_0+\vec{\mathrm{v}}$.

وبكتابة معادلة الحركة باستخدام قانون نيوتن الثاني في حالة الكتلة المتغيرة

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} - (\vec{u} - \vec{\mathrm{v}})\frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

وحيث أن $\frac{dm}{dt} = -\lambda m_0,\ \vec{F} = -mg,\ \vec{\mathrm{v}}_0 = \vec{u} - \vec{\mathrm{v}}$ بذلك تصبح المعادلة (2) بالصورة

$$-mg = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} - (-\mathrm{v}_0)(-m_0\lambda)$$

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{m_0\mathrm{v}_0\lambda}{m} - g \qquad (3)$$

وبالتعويض عن m من (3) فى (1) نحصل على

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{m_0\mathrm{v}_0\lambda}{m_0(1-\lambda t)} - g \quad \Rightarrow \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{\mathrm{v}_0\lambda}{1-\lambda t} - g \qquad (4)$$

عند بداية الحركة $(t=0)$ سيرتفع الصاروخ مباشراً إذا كانت عجلته موجبة ومن المعادلة (4) يكون

$\left.\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right|_{t=0} > 0 \ \Rightarrow\ = \frac{\mathrm{v}_0\lambda}{1-\lambda(0)} - g > 0$ وعند ذلك يكون شرط ارتفاع الصاروخ هو

$$\mathrm{v}_0\lambda > g \qquad (5)$$

من المعادلة (1) m تمثل كتلته الصاروخ عند أي لحظة زمنية وعند نفاذ كل الوقود تكون هـذه الكتلـة هـى M' وبفرض أن الزمن المستغرق لنفاذ كل الوقود هو t_1 فتصبح المعادلة (1) بالصورة

$$m = m_0(1-\lambda t) \Rightarrow \quad M' = m_0(1-\lambda t_1)$$

ويكون عند ذلك الزمن اللازم لنفاذ جميع الوقود هو

$$t_1 = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{M'}{m_0}\right) \qquad (6)$$

الصاروخ لا ينطلق أبداً أذا ظلت عجلته سالبة حتى نفاذ جميع الوقود أي أن $\left.\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right|_{t=t_1} < 0$

ومن المعادلتين (4, 6) يكون

$$\left.\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right|_{t=t_1} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{v}_0\,\lambda}{1-\lambda t_1} - g \;\Rightarrow\; > 0 \;\frac{\mathrm{v}_0\,\lambda}{1-\lambda\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{M'}{m_0}\right)} - g > 0 \Rightarrow\; \frac{\mathrm{v}_0\,\lambda}{1-1+\dfrac{M'}{m_0}} - g > 0$$

وعند ذلك يكون شرط عدم ارتفاع الصاروخ هو

$$\mathrm{v}_0\,\lambda m_0 > M' g \tag{7}$$

الآن نفرض أن الصاروخ قد تحرك ونحسب كل من السرعة والمسافة عند أي لحظة .

من المعادلة (4) يكون لدينا

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{\mathrm{v}_0\,\lambda}{1-\lambda t} - g \;\Rightarrow\; \int d\mathrm{v} = \int \left\{\frac{\mathrm{v}_0\,\lambda}{1-\lambda t} - g\right\} dt$$
$$\mathrm{v} = -\mathrm{v}_0 Ln(1-\lambda t) - g\,t + c_2$$

من الشروط الابتدائية
$$\mathrm{v} = 0,\; t = 0 \;\rightarrow\; c_2 = -\mathrm{v}_0\,Ln(1) = 0$$

وعند ذلك تكون السرعة بالصورة

$$\mathrm{v} = -\mathrm{v}_0 \ln(1-\lambda t) - g\,t \tag{8}$$

ومن المعادلة (8) يكون لدينا

$$\mathrm{v} = \frac{dy}{dt} = -\mathrm{v}_0 Ln(1-\lambda t) - g\,t$$

$$\int dy = \int \left\{-\mathrm{v}_0 Ln(1-\lambda t) - g\,t\right\} dt \tag{9}$$

لإيجاد الحد الأول من التكامل السابق نضع

$$\ln(1-\lambda t) = \vartheta \;\Rightarrow\; 1-\lambda t = e^{\vartheta} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\vartheta}\right) \;\Rightarrow\; dt = \frac{-1}{\lambda} e^{\vartheta}\; d\vartheta \tag{10}$$

ومن المعادلتين (9, 10) يكون لدينا الحد الثاني على الصورة

$$-v_0 \int Ln(1-\lambda t)dt = -v_0 \int \vartheta\left(\frac{-1}{\lambda} e^{\vartheta} \ d\vartheta\right) = \frac{v_0}{\lambda}\int \vartheta e^{\vartheta} \ d\vartheta = \frac{v_0}{\lambda}\int \vartheta \ d(e^{\vartheta})$$

$$= \frac{v_0}{\lambda}\left\{\vartheta e^{\vartheta} - \int e^{\vartheta} d\vartheta \right\} = \frac{v_0}{\lambda}\left\{\vartheta e^{\vartheta} - e^{\vartheta} \right\} = \frac{v_0}{\lambda}\left\{\vartheta - 1 \right\} e^{\vartheta}$$

$$= \frac{v_0}{\lambda}\left\{\ln(1-\lambda t) - 1 \right\}(1-\lambda t)$$

وبذلك يكون لدينا تكامل المعادلة (9) بالصورة

$$y = \frac{v_0 (1-\lambda t)}{\lambda}\left\{\ln(1-\lambda t) - 1 \right\} - \frac{1}{2} g t^2 + c_3$$

من الشروط الابتدائية يكون لدينا

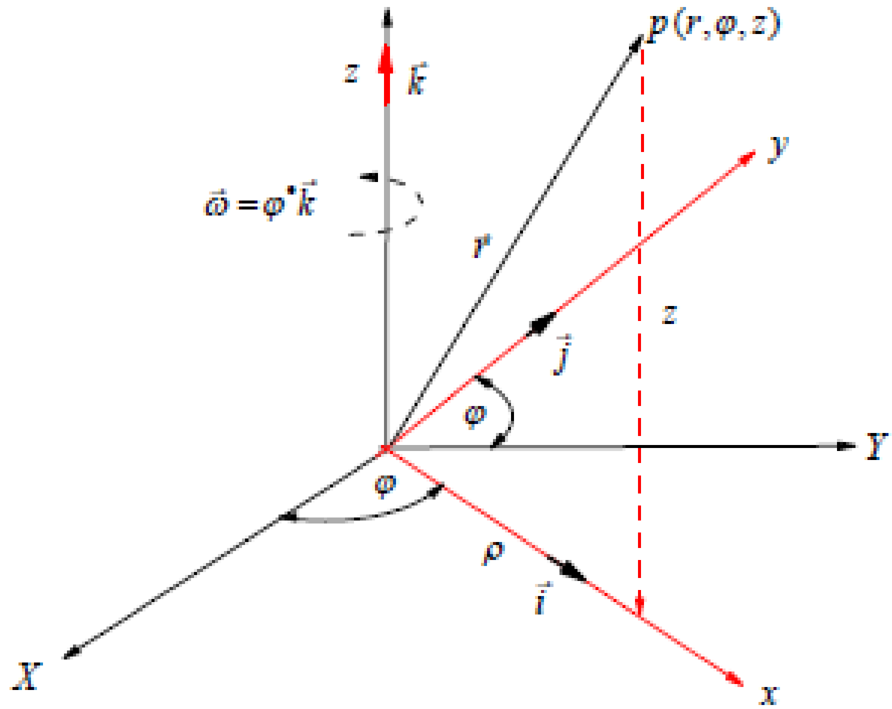
$$c_3 = \frac{v_0}{\lambda}$$

$$y = \frac{v_0}{\lambda}(1-\lambda t)\left\{Ln(1-\lambda t) - 1 \right\} - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{v_0}{\lambda}$$

حركة جسيم في الفراغ

مركبات السرعة والعجلة في الإحداثيات الأسطوانية

نفرض انه لدينا جسيم يتحرك على سطح اسطواني وبفرض ان موضعه عند النقطة p في نظام الإحداثيات الأسطوانية بالثلاثية (r, φ, z). حيث (r) نصف القطر و هو المسافة بين محور الصادات z والنقطة p. (φ) هو الزاوية بين محور السينات x الموجب ومسقط الخط المستقيم الواصل بين مركز الإحداثيات والنقطة p على المستوي (xoy). (z) هي المسافة ذات الإشارة (السالبة او الموجبة) بين المستوي (xoy) إلى النقطة p.
وبفرض ان (XYZ) هي محاور ثابتة وأن (xyz) هي محاورة دائرة مع الجسيم . وبفرض ان الجسيم يدور حول محور (z).



مما سابق يتضح أن $\vec{r}=\rho\,\vec{i}+z\,\vec{k}$ و أن $\vec{\omega}=\varphi^{\bullet}\,\vec{k}$ وفى حالة المحاور الدائرة مركبات السرعة بالصورة

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fixed}=\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rotating}+\vec{\omega}\cap\vec{r}$$

والتي تعطى بالصورة

$$\vec{\mathrm{v}}_{fixed}=\frac{d}{dt}\left(\rho\,\vec{i}+z\,\vec{k}\right)_{rotating}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varphi^{\bullet}\\ \rho & 0 & z\end{vmatrix}=\rho^{\bullet}\,\vec{i}+\rho\,\varphi^{\bullet}\,\vec{j}+z^{\bullet}\,\vec{k}$$

و هكذا فإن السرعة في الإحداثيات الأسطوانية تعطى بالصورة

$$\vec{\mathrm{v}}=\rho^{\bullet}\,\vec{i}+\rho\,\varphi^{\bullet}\,\vec{j}+z^{\bullet}\,\vec{k}\qquad Or\qquad \vec{\mathrm{v}}=\left(\mathrm{v}_r,\mathrm{v}_\varphi,\,\mathrm{v}_z\right)=\left(\rho^{\bullet},\,\rho\,\varphi^{\bullet},\,z^{\bullet}\right)$$

بينما تعطى مركبات العجلة بالصورة

$$\left(\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}\right)_{fixed}=\left(\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}\right)_{rotating}+\vec{\omega}\cap\vec{\mathrm{v}}$$

والتي تعطى بالصورة

$$\vec{a}_{fixed}=\frac{d}{dt}\left(\rho^{\bullet}\vec{i}+\rho\varphi^{\bullet}\vec{j}+z^{\bullet}\vec{k}\right)_{rotating}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varphi^{\bullet}\\ \rho^{\bullet} & \rho\varphi^{\bullet} & z^{\bullet}\end{vmatrix}$$

$$=\rho^{\bullet\bullet}\vec{i}+\left(\rho^{\bullet}\varphi^{\bullet}+\rho\varphi^{\bullet\bullet}\right)\vec{j}+z^{\bullet\bullet}\vec{k}-\rho\varphi^{\bullet 2}\vec{i}+\rho^{\bullet}\varphi^{\bullet}\vec{j}$$

وهكذا فإن العجلة في الإحداثيات الأسطوانية تعطى بالصورة

$$\vec{a}=\left(\rho^{\bullet\bullet}-\rho\varphi^{\bullet 2}\right)\vec{i}+\left(\rho\varphi^{\bullet\bullet}+2\rho^{\bullet}\varphi^{\bullet}\right)\vec{j}+z^{\bullet\bullet}\vec{k} \qquad \text{Or}$$

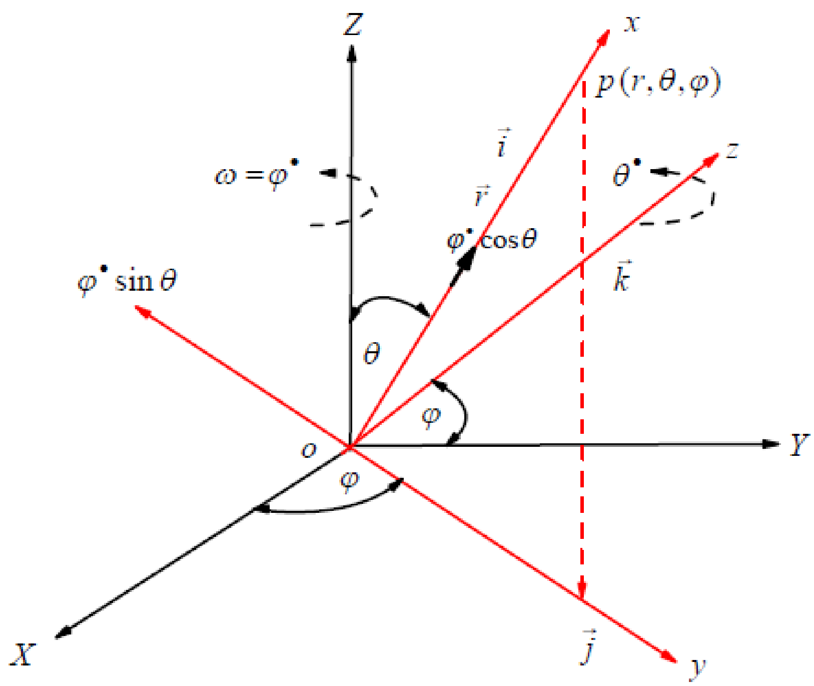
$$\vec{a}=\left(a_r,a_{\varphi},a_z\right)=\left(\rho^{\bullet\bullet}-\rho\varphi^{\bullet 2},\ \rho\varphi^{\bullet\bullet}+2\rho^{\bullet}\varphi^{\bullet},\ z^{\bullet\bullet}\right)=\left(\rho^{\bullet\bullet}-\rho\varphi^{\bullet 2},\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^{2}\varphi^{\bullet}),\ z^{\bullet\bullet}\right)$$

<u>مركبات السرعة والعجلة في الإحداثيات الكروية</u>

نفرض انه لدينا جسيم يتحرك على سطح كروي وبفرض ان موضعه عند النقطة p في نظام الإحداثيات الكروية بالثلاثية $(r,\ \theta,\ \varphi)$. حيث (r) متجه موضع الجسيم والنقطة , (θ) هى زاوية ميل متجه الموضع على المحور (oZ). (φ)

هو الزاوية بين محور السينات x الموجب ومسقط الخط المستقيم الواصل بين مركز الإحداثيات والنقطة p على المستوي (xoy). (z) هي المسافة ذات الإشارة (السالبة او الموجبة) بين المستوي (xoy) إلى النقطة p.

وبفرض ان (XYZ) هي محاور ثابتة وأن (xyz) هي محاورة دائرة مع الجسيم . وبفرض ان الجسيم يدور حول محور (z).



مما سابق يتضح أن $\vec{r}=r\vec{i}$ و أن $\vec{\omega}=\varphi^{\bullet}\cos\theta\,\vec{i}-\varphi^{\bullet}\sin\theta\,\vec{j}+\theta^{\bullet}\vec{k}$

وفى حالة المحاور الدائرة مركبات السرعة بالصورة

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rotating} + \vec{\omega} \cap \vec{r}$$

والتي تعطى بالصورة $\vec{v}_{fixed} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{i}\right)_{rotating} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi^{\bullet}\cos\theta & -\varphi^{\bullet}\sin\theta & \theta^{\bullet} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r^{\bullet}\,\vec{i} + r\,\theta^{\bullet}\vec{j} + r\,\varphi^{\bullet}\sin\theta\,\vec{k}$

وهكذا فإن السرعة في الإحداثيات الكروية تعطى بالصورة

$$\vec{v} = \left(v_r, v_\varphi, v_\theta\right) = \left(r^{\bullet}, r\,\theta^{\bullet}, r\,\varphi^{\bullet}\sin\theta\right)$$

بينما تعطى مركبات العجلة بالصورة

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{rotating} + \vec{\omega} \cap \vec{v}$$

والتي تعطى بالصورة

$$\vec{a}_{fixed} = \frac{d}{dt}\left(r^{\bullet}\,\vec{i} + r\,\theta^{\bullet}\vec{j} + r\,\varphi^{\bullet}\sin\theta\,\vec{k}\right) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi^{\bullet}\cos\theta & -\varphi^{\bullet}\sin\theta & \theta^{\bullet} \\ r^{\bullet} & r\,\theta^{\bullet} & r\,\varphi^{\bullet}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_{fixed} = r^{\bullet\bullet}\,\vec{i} + \left(r^{\bullet}\,\theta^{\bullet} + r\,\theta^{\bullet\bullet}\right)\vec{j} + \left(r^{\bullet}\,\varphi^{\bullet}\sin\theta + r\,\varphi^{\bullet\bullet}\sin\theta + r\,\varphi^{\bullet}\theta^{\bullet}\cos\theta\right)\vec{k}$$
$$+\left(-r\,\theta^{\bullet 2} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right)\vec{i} + \left(r^{\bullet}\theta^{\bullet} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right)\vec{j} + \left(r\,\theta^{\bullet}\,\varphi^{\bullet}\cos\theta + r^{\bullet}\,\varphi^{\bullet}\sin\theta\right)\vec{k}$$

$$\vec{a}_{fixed} = \left(r^{\bullet\bullet} - r\,\theta^{\bullet 2} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right)\vec{i} + \left(r\,\theta^{\bullet\bullet} + 2r^{\bullet}\theta^{\bullet} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right)\vec{j} +$$
$$\left(r\,\varphi^{\bullet\bullet}\sin\theta + 2r^{\bullet}\,\varphi^{\bullet}\sin\theta + 2\,r\,\theta^{\bullet}\,\varphi^{\bullet}\cos\theta\right)\vec{k}$$

وهكذا فإن العجلة في الإحداثيات الكروية تعطى بالصورة

$$\vec{a}_{fixed} = \left(r^{\bullet\bullet} - r\,\theta^{\bullet 2} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\,\theta^{\bullet}\right) - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right)\vec{j} +$$
$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\,\varphi^{\bullet}\sin^2\theta\right)\vec{k}$$

Or

$$\vec{a} = \left(a_r, a_\varphi, a_\theta\right) = \begin{pmatrix} r^{\bullet\bullet} - r\,\theta^{\bullet 2} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta,\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\,\theta^{\bullet}\right) - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\,\varphi^{\bullet}\sin^2\theta\right) \end{pmatrix}$$

في حالة حركة الجسيم على سطح كروى فان $r = constant$ ومنها $r^{\bullet} = r^{\bullet\bullet} = 0$ وبذلك تصبح مركبات السرعة والعجلة على الترتيب بالصورة

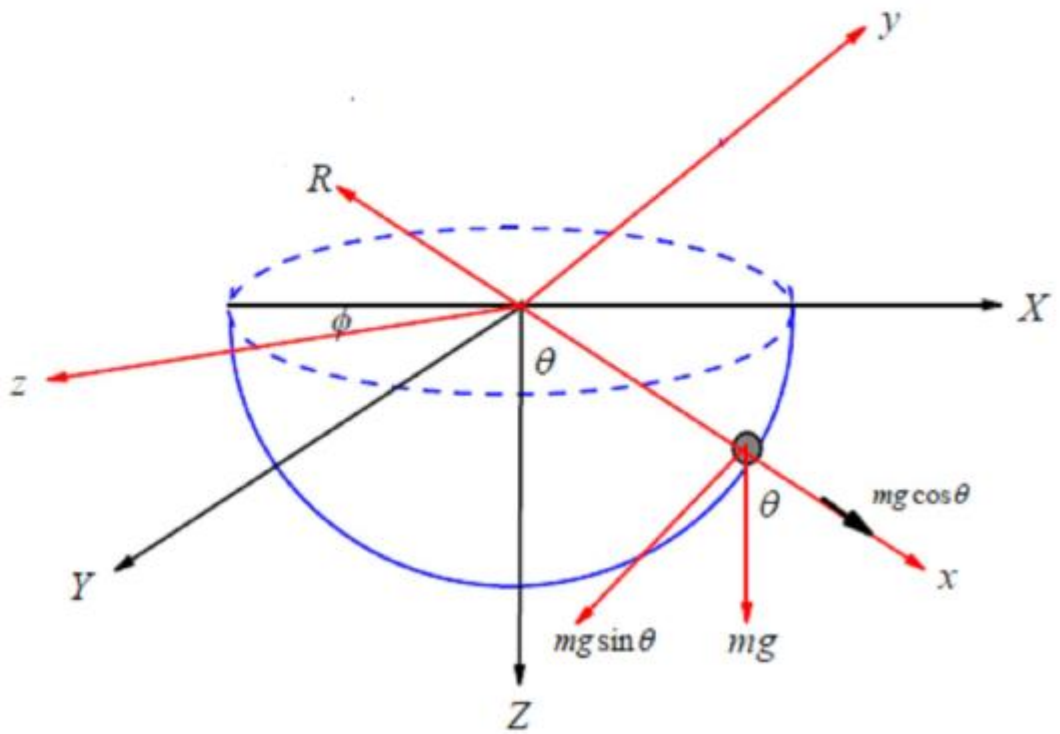
$$\vec{v} = \left(v_r, v_\varphi, v_\theta\right) = \left(0, r\,\theta^{\bullet}, r\,\varphi^{\bullet}\sin\theta\right)\ \vec{a} = \left(a_r, a_\varphi, a_\theta\right) = \begin{pmatrix} -r\,\theta^{\bullet 2} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta,\ r\theta^{\bullet\bullet} - r\,\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{r}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}\sin^2\theta\right) \end{pmatrix}$$

مثال (1) - قذف جسيم في مستوى أفقي على السطح الداخلي لنصف قشرة كروية ملساء محورها راسيي و رأسها الى أسفل وكانت نقطة القذف الابتدائية تصنع زاوية α مع الراسي . أثبت أن السرعة لابتدائية للقذف

بحيث يصعد الجسيم الى حافة نصف القشرة الكروية هي $(2L\,g\sec\alpha)^{\frac{1}{2}}$ حيث L نصف قطر القشرة الكروية و g عجلة الجاذبية الأرضية ؟

الحـــــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل حيث كتلة m والقوى التي تأثر عليه موزعة كما بالشكل.



مركبات السرعة

$$\vec{v}=\left(r^{\bullet},\ r\theta^{\bullet},\ r\varphi^{\bullet}\sin\theta \right)$$

$$\vec{a}=\left(r^{\bullet\bullet}-r\theta^{\bullet 2}-r\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta,\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\theta^{\bullet} \right)-r\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta,\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\varphi^{\bullet}\sin^2\theta \right)\right)$$

وحيث أن الجسيم يتحرك على السطح الداخلي لنصف كرة ملساء $r=L=constant$ ومنها

$r^{\bullet}=r^{\bullet\bullet}=0$ وبذلك تصبح مركبات السرعة والعجلة على الترتيب بالصورة

$$\vec{v}=\left(0,\ L\theta^{\bullet},\ L\varphi^{\bullet}\sin\theta \right)$$

$$\vec{a}=\left(0-L\theta^{\bullet 2}-L\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta,\ L\theta^{\bullet\bullet}-L\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta,\ \frac{L}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}\sin^2\theta \right)\right)$$

وبذلك تصبح معادلات الحركة للجسيم بالصورة

$$m\left(-L\theta^{\bullet 2}-L\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta \right)=mg\cos\theta-R \qquad (1)$$

$$m\left(L\theta^{\bullet\bullet}-L\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta \right)=-mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$m\left(\frac{L}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}\sin^2\theta \right)\right)=0 \qquad (3)$$

وبتكامل المعادلة (3) نحصل

$$\varphi^{\bullet}\sin^2\theta = c_1 \qquad (4)$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ فإن $\theta=\alpha$ وكذلك $\varphi^{\bullet}=\varphi_0^{\bullet}$ وبذلك يكون $c_1=\varphi_0^{\bullet}\sin^2\alpha$ وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$\varphi^{\bullet}=\varphi_0^{\bullet}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية أيضا وعندما $t=0$ فإن الجسيم قد قذف بسرعة ابتدائية (v_0) في الاتجاه الأفقي تعطى من والتي بالصورة $\mathrm{v}_0=(r\varphi^{\bullet}\sin\theta)_{t=0}$

$$\mathrm{v}_0=L\varphi_0^{\bullet}\sin\alpha \quad\rightarrow\quad \varphi_0^{\bullet}=\frac{\mathrm{v}_0}{L\sin\alpha} \qquad (6)$$

وبالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) نحصل على

$$\varphi^{\bullet}=\frac{\mathrm{v}_0}{L\sin\alpha}\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \quad\rightarrow\quad \varphi^{\bullet}=\frac{\mathrm{v}_0}{L}\,\frac{\sin\alpha}{\sin^2\theta} \qquad (7)$$

وبالتعويض من المعادلة (7) في المعادلة (2) نحصل على

$$L\theta^{\bullet\bullet}-L\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\,\frac{\sin\alpha}{\sin^2\theta}\right)^2\sin\theta\cos\theta=-g\sin\theta$$

$$\theta^{\bullet\bullet}-\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\sin\alpha\right)^2\frac{1}{\sin^3\theta}\cos\theta=-\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta}-\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\sin\alpha\right)^2(\sin\theta)^{-3}\cos\theta=-\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\int\theta^{\bullet}d\theta^{\bullet}=\int\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\sin\alpha\right)^2(\sin\theta)^{-3}\cos\theta\,d\theta-\int\frac{g}{L}\sin\theta\,d\theta$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\sin\alpha\right)^2\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g}{L}\cos\theta+c_2 \qquad (8)$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ فإن $\theta=\alpha$ وكذلك $\theta^{\bullet}=0$ وبذلك يكون $c_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\right)^2-\frac{g}{L}\cos\alpha$

وبالتعويض من المعادلة (8) في نحصل على

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\sin\alpha\right)^2\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g}{L}\cos\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\right)^2-\frac{g}{L}\cos\alpha$$

ويمكن اعادة ترتيب المعادلة السابقة بالصورة

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\right)^2\left(\frac{(\sin\alpha)^2}{(\sin\theta)^2}-1\right)+\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\right)^2\left(\frac{(\sin\alpha)^2-(\sin\theta)^2}{(\sin\theta)^2}\right)+\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\right)^2\left(1-(\cos\alpha)^2-1+(\cos\theta)^2\right)+\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\right)^2\left((\cos\theta)^2-(\cos\alpha)^2\right)+\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0}{L}\right)^2\left(\left[(\cos\theta)-(\cos\alpha)\right]\left[(\cos\theta)+(\cos\alpha)\right]\right)+\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2}=-\left\{\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{v_0}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)+\frac{g}{L}\right\}\left(\cos\theta-\cos\alpha\right)$$

ولدراسة مستويات الحركة نضع $\dot{\theta}=0$ في المعادلة السابقة نحصل على

$$\left\{\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{v_0}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)-\frac{g}{L}\right\}\left(\cos\theta-\cos\alpha\right)=0$$

والمستوى الأول يعطى من $\cos\theta-\cos\alpha=0 \;\rightarrow\; \cos\theta=\cos\alpha \;\rightarrow\; \theta=\alpha$

بينما يعطى المستوى الثاني من $\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)-\frac{g}{L}(\sin\theta)^2=0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)-\frac{g}{L}\left\{1-(\cos\theta)^2\right\}=0$$

ويمكن اعادة ترتيب المعادلة السابقة بالصورة $\cos^2\theta+\frac{v_0^2}{2gL}\cos\theta+\frac{v_0^2}{2gL}\cos\alpha-1=0$ و هي

معادلة من الدرجة الثانية في وحلها يكون بالصورة

$$\cos\theta=-\frac{v_0^2}{4gL}\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{v_0^2}{2gL}\right)^2-4\left(\frac{v_0^2}{2gL}\cos\alpha-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

وعندما يصعد الجسيم الى حافة نصف القشرة الكروية تكون $\theta=\frac{\pi}{2}$ ومن المعادلة (9) نحصل على

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=-\frac{v_0^2}{4gL}\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{v_0^2}{2gL}\right)^2-4\left(\frac{v_0^2}{2gL}\cos\alpha-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$0=-\frac{v_0^2}{2gL}\pm\left[\left(\frac{v_0^2}{2gL}\right)^2-4\left(\frac{v_0^2}{2gL}\cos\alpha-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; \left(\frac{v_0^2}{2gL}\right)^2=\left[\left(\frac{v_0^2}{2gL}\right)^2-4\left(\frac{v_0^2}{2gL}\cos\alpha-1\right)\right]$$

$$\frac{v_0^2}{2gL}\cos\alpha-1=0 \;\rightarrow\; v_0^2=\frac{2gL}{\cos\alpha}=2gL\sec\alpha$$

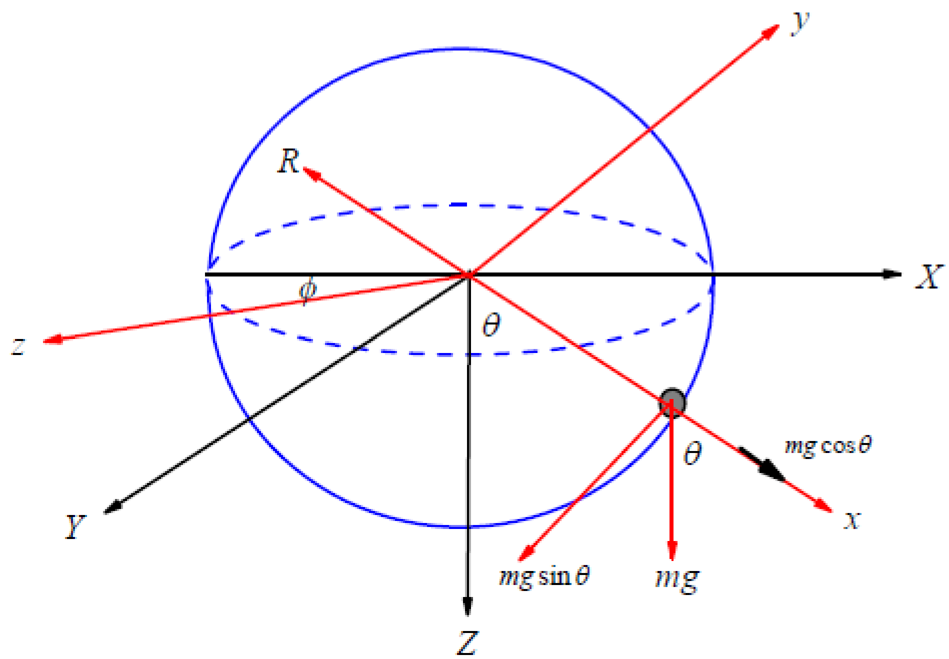
وبذلك تصبح السرعة الابتدائية المطلوبة بالصورة

$$v_0=\left(2gL\sec\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

مثال (2) - قذف جسيم على السطح الداخلي لكرة ملساء وكان أكبر وأقل عمق تحت مركزها هو $\frac{L}{4},\frac{L}{2}$ على الترتيب. أثبت أنه عندما يكون الجسيم على عمق h تحت المركز فان رد الفعل يصبح $\frac{3mg}{L}\left(h+\frac{L}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ حيث L و g عجلة الجاذبية الأرضية ؟

الحـــــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل حيث كتلة m والقوى التي تأثر عليه موزعة كما بالشكل.



بكاتبة معادلات الحركة للجسيم والتي تكون بالصورة

$$m\left(-L\theta^{\bullet 2}-L\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right)=mg\cos\theta-R \qquad (1)$$

$$m\left(L\theta^{\bullet\bullet}-L\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right)=-mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$m\left(\frac{L}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}\sin^2\theta\right)\right)=0 \qquad (3)$$

وبتكامل المعادلة (3) نحصل

$$(4) \qquad \varphi^{\bullet}\sin^2\theta=c_1 \;\rightarrow\; \varphi^{\bullet}=\frac{c_1}{\sin^2\theta}$$

وبالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (2) نحصل على

$$L\theta^{\bullet\bullet}-L\left(\frac{c_1}{\sin^2\theta}\right)^2\sin\theta\cos\theta=-g\sin\theta$$

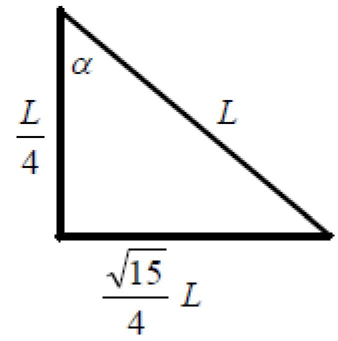
$$\theta^{\bullet\bullet}-c_1^2\frac{1}{\sin^3\theta}\cos\theta=-\frac{g}{L}\sin\theta$$

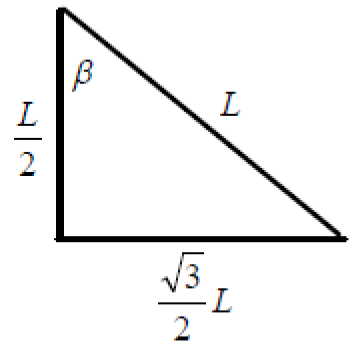
$$\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta}-c_1^2(\sin\theta)^{-3}\cos\theta=-\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\int\theta^{\bullet}d\theta^{\bullet}=c_1^2\int(\sin\theta)^{-3}\cos\theta\,d\theta-\int\frac{g}{L}\sin\theta\,d\theta$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}c_1^2\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g}{L}\cos\theta+c_2 \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية و حيث الحركة محصورة بين المستويين $\frac{L}{4},\frac{L}{2}$ والذى يظهران كما بالشكل





$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4},\quad \cos\alpha=\frac{1}{4} \qquad\qquad \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2}$$

وبالتعويض في المعادلة (5) مع الأخذ في الاعتبار أن ($\dot{\theta}=0$)

للمستوى الأول $\frac{L}{4}$ نحصل على

$$-\frac{1}{2}c_1^2\frac{1}{\frac{15}{16}}+\frac{g}{L}\frac{1}{4}+c_2=0 \quad\rightarrow\quad -\frac{8}{15}c_1^2+\frac{1}{4}\frac{g}{L}+c_2=0$$

للمستوى الأول $\frac{L}{4}$ نحصل على

$$-\frac{1}{2}c_1^2\frac{1}{\frac{3}{4}}+\frac{g}{L}\frac{1}{2}+c_2=0 \quad\rightarrow\quad -\frac{2}{3}c_1^2+\frac{1}{2}\frac{g}{L}+c_2=0$$

بطرح المعادلتين السابقتين نحصل على

$$-\frac{8}{15}c_1^2+\frac{2}{3}c_1^2+\frac{1}{4}\frac{g}{L}-\frac{1}{2}\frac{g}{L}=0 \;\rightarrow\; \frac{-8+10}{15}c_1^2+\frac{1-2}{4}\frac{g}{L}=0 \;\rightarrow\; c_1^2=\frac{15}{8}\frac{g}{L}$$

ويكون كذلك

$$-\frac{2}{3}\frac{15}{8}\frac{g}{L}+\frac{1}{2}\frac{g}{L}+c_2=0 \;\rightarrow\; c_2=\frac{5}{4}\frac{g}{L}-\frac{1}{2}\frac{g}{L} \;\rightarrow\; c_2=\frac{3}{4}\frac{g}{L}$$

وبالتعويض في المعادلة (4) , (5) على الترتيب نحصل على

$$\dot{\varphi}=\left(\frac{15g}{8L}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta} \qquad (6)$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{15}{8}\frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g}{L}\cos\theta+\frac{3}{4}\frac{g}{L}$$

$$\dot{\theta}^2=\frac{2g}{L}\cos\theta+\frac{3}{2}\frac{g}{L}-\left(\frac{15}{8}\frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^2} \qquad (7)$$

ولحساب رد الفعل نعوض من المعادلة (6) , (7) في المعادلة (1) نحصل على

$$m\left\{-L\left(\frac{2g}{L}\cos\theta+\frac{3}{2}\frac{g}{L}-\left(\frac{15}{8}\frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^2}\right)-L\left(\left(\frac{15\,g}{8L}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2\sin^2\theta\right\}=mg\cos\theta-R$$

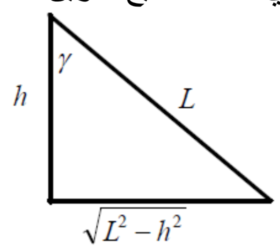
$$R=mg\cos\theta+m\left\{L\left(\frac{2g}{L}\cos\theta+\frac{3}{2}\frac{g}{L}-\left(\frac{15}{8}\frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^2}\right)+L\left(\left(\frac{15\,g}{8L}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2\sin^2\theta\right\}$$

$$R=mg\cos\theta+m\left\{L\left(\frac{2g}{L}\cos\theta+\frac{3}{2}\frac{g}{L}-\left(\frac{15}{8}\frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^2}\right)+L\left(\left(\frac{15\,g}{8L}\right)\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\right\}$$

$$R=mg\,\cos\theta+m\left\{2g\,\cos\theta+\frac{3}{2}g\right\}\quad\rightarrow\quad R=3mg\,\cos\theta+\frac{3}{2}mg$$

$$R=\frac{3}{2}mg\left(2\cos\theta+1\right)\qquad(8)$$

عندما يكون الجسيم على عمق h تحت المركز أي اننا نستطيع تكوين الشكل المقابل



$$\sin\gamma=\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L},\quad \cos\gamma=\frac{h}{L}$$

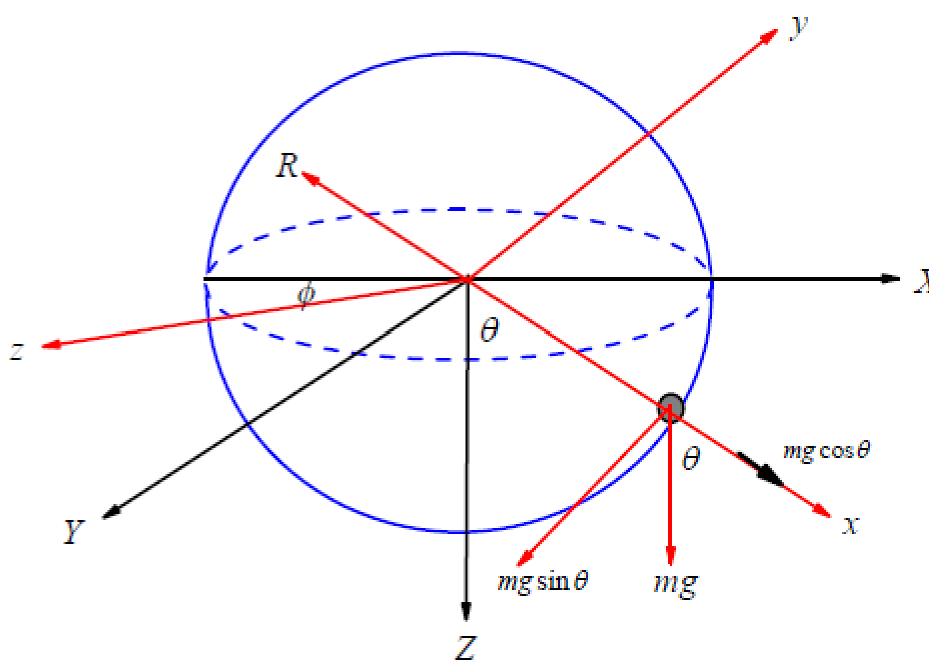
فان رد الفعل يصبح

$$R=\frac{3}{2}mg\left(2\frac{h}{L}+1\right)\rightarrow\qquad R=\frac{3}{2L}mg\left(2h+L\right)$$

مثال (3) - قذف جسيم في مستوى أفقي على السطح الداخلي لقشرة كروية ملساء نصف قطرها $\frac{L}{\sqrt{2}}$ وبسرعة ابتدائية مقدارها $\sqrt{\frac{7Lg}{3}}$ ومن على عمق $\frac{2}{3}L$ تحت المركز. أثبت أن النقطة المادية سوف ترتفع فوق المركز مسافة مقدارها $\frac{1}{3}L$ و أن الضغط على القشرة الكروية (رد فعل القشرة الكروية على الجسيم) ينعدم عند هذا الموضع حيث g عجلة الجاذبية الأرضية ؟

الحـــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل حيث كتلة m والقوى التي تأثر عليه موزعة كما بالشكل.



بكاتبة معادلات الحركة للجسيم والتي تكون بالصورة

$$m\left(-\frac{L}{\sqrt{2}}\theta^{\bullet 2}-\frac{L}{\sqrt{2}}\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right)=mg\cos\theta-R \qquad (1)$$

$$m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\theta^{\bullet\bullet}-\frac{L}{\sqrt{2}}\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right)=-mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$m\left(\frac{\frac{L}{\sqrt{2}}}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}\sin^2\theta\right)\right)=0 \qquad (3)$$

وبتكامل المعادلة (3) نحصل

$$\varphi^{\bullet}\sin^2\theta=c_1 \qquad (4)$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ وبفرض ان المستوى الأول للقذف هو $\theta=\alpha$ وكذلك $\varphi^{\bullet}=\varphi_0^{\bullet}$ بذلك يكون $c_1=\varphi_0^{\bullet}\sin^2\alpha$ وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$\varphi^{\bullet}=\varphi_0^{\bullet}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية أيضا وعندما $t=0$ فإن الجسيم قد قذف بسرعة ابتدائية (v_0) في الاتجاه الأفقي تعطى من $\mathrm{v}_0=(r\varphi^{\bullet}\sin\theta)_{t=0}$ والتي بالصورة

$$\mathrm{v}_0=\frac{L}{\sqrt{2}}\varphi_0^{\bullet}\sin\alpha \;\rightarrow\; \varphi_0^{\bullet}=\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L\sin\alpha} \qquad (6)$$

وبالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) نحصل على

$$\varphi^{\bullet}=\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L\sin\alpha}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \;\rightarrow\; \varphi^{\bullet}=\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\frac{\sin\alpha}{\sin^2\theta} \qquad (7)$$

وبالتعويض من المعادلة (7) في المعادلة (2) نحصل على

$$\frac{L}{\sqrt{2}}\theta^{\bullet\bullet}-\frac{L}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\ \frac{\sin\alpha}{\sin^2\theta}\right)^2\sin\theta\cos\theta=-g\sin\theta$$

$$\theta^{\bullet\bullet}-\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\sin\alpha\right)^2\frac{1}{\sin^3\theta}\cos\theta=-\frac{g\sqrt{2}}{L}\sin\theta$$

$$\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta}-\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\sin\alpha\right)^2(\sin\theta)^{-3}\cos\theta=-\frac{g\sqrt{2}}{L}\sin\theta$$

$$\int\theta^{\bullet}d\theta^{\bullet}=\int\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\sin\alpha\right)^2(\sin\theta)^{-3}\cos\theta\,d\theta-\int\frac{g\sqrt{2}}{L}\sin\theta\,d\theta$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\sin\alpha\right)^2\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g\sqrt{2}}{L}\cos\theta+c_2 \qquad (8)$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ فإن $\theta=\alpha$ وكذلك $\theta^{\bullet}=0$ وبذلك يكون

$$c_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2-\frac{g\sqrt{2}}{L}\cos\alpha$$

وبالتعويض من المعادلة (8) في نحصل على

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\sin\alpha\right)^2\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g\sqrt{2}}{L}\cos\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2-\frac{g\sqrt{2}}{L}\cos\alpha$$

أو

$$\theta^{\bullet 2}=-\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\sin\alpha\right)^2\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{2g\sqrt{2}}{L}\cos\theta+\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2-\frac{2g\sqrt{2}}{L}\cos\alpha \qquad (9)$$

ويمكن اعادة ترتيب المعادلة السابقة بالصورة

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(\frac{(\sin\alpha)^2}{(\sin\theta)^2}-1\right)+\frac{g\sqrt{2}}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(\frac{(\sin\alpha)^2-(\sin\theta)^2}{(\sin\theta)^2}\right)+\frac{g\sqrt{2}}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(1-(\cos\alpha)^2-1+(\cos\theta)^2\right)+\frac{g\sqrt{2}}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left((\cos\theta)^2-(\cos\alpha)^2\right)+\frac{g\sqrt{2}}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(\left[(\cos\theta)-(\cos\alpha)\right]\left[(\cos\theta)+(\cos\alpha)\right]\right)+\frac{g\sqrt{2}}{L}(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\left\{\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)+\frac{g\sqrt{2}}{L}\right\}\left(\cos\theta-\cos\alpha\right)$$

ولدراسة مستويات الحركة نضع $\theta^{\bullet}=0$ في المعادلة السابقة نحصل على

$$\left\{\frac{1}{2(\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)-\frac{g\sqrt{2}}{L}\right\}\left(\cos\theta-\cos\alpha\right)=0$$

والمستوى الأول يعطى من $\cos\theta-\cos\alpha=0 \;\rightarrow\; \cos\theta=\cos\alpha \;\rightarrow\; \theta=\alpha$

بينما يعطى المستوى الثاني من

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)-\frac{g\sqrt{2}}{L}(\sin\theta)^2=0$$

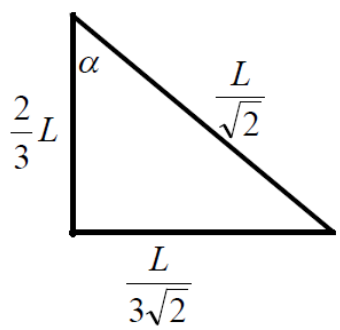
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0\sqrt{2}}{L}\right)^2\left(\cos\theta+\cos\alpha\right)-\frac{g\sqrt{2}}{L}\left\{1-(\cos\theta)^2\right\}=0$$

ويمكن اعادة ترتيب المعادلة السابقة بالصورة $\cos^2\theta+\frac{\mathrm{v}_0^2}{gL\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{\mathrm{v}_0^2}{gL\sqrt{2}}\cos\alpha-1=0$ و هي

معادلة من الدرجة الثانية في وحلها يكون بالصورة

$$\cos\theta=-\frac{\mathrm{v}_0^2}{2\sqrt{2}\,gL}\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{\sqrt{2}gL}\right)^2-4\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{\sqrt{2}gL}\cos\alpha-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

وحيث أن $\mathrm{v}_0=\sqrt{\frac{7Lg}{3}}$ و أن المستوى الأول $\theta=\alpha$ يعطى من الشكل المقابل



وبالتعويض في المعادلة (9) نحصل علي

$$\cos\theta=-\frac{\left(\sqrt{\frac{7Lg}{3}}\right)^2}{2\sqrt{2}\,gL}\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{7Lg}{3}}\right)^2}{\sqrt{2}gL}\right)^2-4\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{7Lg}{3}}\right)^2}{\sqrt{2}gL}\frac{2\sqrt{2}}{3}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta=-\frac{7}{6\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\frac{7gL}{3}}{\sqrt{2}gL}\right)^2-4\left(\frac{\left(\frac{7gL}{3}\right)}{\sqrt{2}gL}\frac{2\sqrt{2}}{3}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}=-\frac{7}{6\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{49}{18}\right)-4\left(\frac{14}{9}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

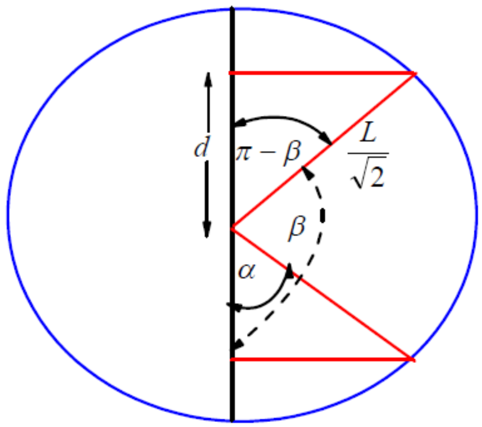
$$\cos\theta=-\frac{7}{6\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{49}{18}\right)-4\left(\frac{5}{9}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=-\frac{7}{6\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\left[\frac{49}{18}-\frac{20}{9}\right]^{\frac{1}{2}}=-\frac{7}{6\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\left[\frac{49-40}{18}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta=-\frac{7}{6\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\left[\frac{9}{18}\right]^{\frac{1}{2}}=-\frac{7}{6\sqrt{2}}\pm\frac{1}{4\sqrt{2}} \quad\rightarrow\quad \cos\theta=\frac{-7\pm3}{6\sqrt{2}}$$

$\cos\theta = \frac{-7-3}{6\sqrt{2}} = -\frac{10}{6\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{5}{3\sqrt{2}} > 1$ جذر مرفوض

$\cos\theta = \frac{-7\pm3}{6\sqrt{2}} = \frac{-4}{6\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \cos\beta = \frac{-2}{3\sqrt{2}}$ المستوى الثاني للحركة

ولإيجاد المسافة الرأسية التي يرتفعها الجسيم أعلى نصف القطر نفرض أن هذه المسافة كما بالشكل هي d وحيث أن المستوى الثاني وهو $\theta = \beta$ كما بالشكل .



من الشكل واضح أن $\cos(\pi-\beta) = \frac{d}{\frac{L}{\sqrt{2}}}$ ومنها

$$\cos(\pi-\beta) = \cos(\pi)\cos(\beta) + \sin(\pi)\sin(\beta) = \frac{d\sqrt{2}}{L} \rightarrow -\cos(\beta) = \frac{d\sqrt{2}}{L} \rightarrow -\left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{d\sqrt{2}}{L}$$

وهذا يشير الى أن الجسيم يرتفع فوق المركز مسافة مقدارها $d = \frac{1}{3}L$

ويعطى رد الفعل من العلاقة (1) وذلك بالتعويض عن $\theta^{\bullet}, \varphi^{\bullet}$ من العلاقتين (7) , (9) على الترتيب

$$-\frac{mL}{\sqrt{2}}\left\{\underbrace{-\left(\frac{v_0\sqrt{2}}{L}\sin\alpha\right)^2 \frac{1}{(\sin\theta)^2}}_{1+5=0} + \frac{2g\sqrt{2}}{L}\cos\theta + \left(\frac{v_0\sqrt{2}}{L}\right)^2 - \frac{2g\sqrt{2}}{L}\cos\alpha\right\}$$

$$\underbrace{-\frac{mL}{\sqrt{2}}\left(\frac{v_0\sqrt{2}}{L}\frac{\sin\alpha}{\sin^2\theta}\right)^2}_{1+5=0}\sin^2\theta = mg\cos\theta - R$$

$$R = mg\cos\theta + \frac{mL}{\sqrt{2}}\left\{\frac{2g\sqrt{2}}{L}\cos\theta + \left(\frac{v_0\sqrt{2}}{L}\right)^2 - \frac{2g\sqrt{2}}{L}\cos\alpha\right\}$$

وعندما $\theta = \beta$ تمثل المستوى الثاني و حيث ان α تمثل المستوى الأول يعطى رد الفعل بالصورة

$$R = mg\left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}\right) + \frac{mL}{\sqrt{2}}\left\{\frac{2g\sqrt{2}}{L}\left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{\frac{7Lg}{3}}\sqrt{2}}{L}\right)^2 - \frac{2g\sqrt{2}}{L}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$$

$$R = mg\left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}\right) + \frac{mL}{\sqrt{2}}\left\{\frac{2g\sqrt{2}}{L}\left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{2\,\frac{7Lg}{3}}{L^2}\right) - \frac{2g\sqrt{2}}{L}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$$

$$R = mg\left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}\right) + \frac{mgL}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{4}{3L} + \frac{14}{3L} - \frac{8}{3L}\right\}$$

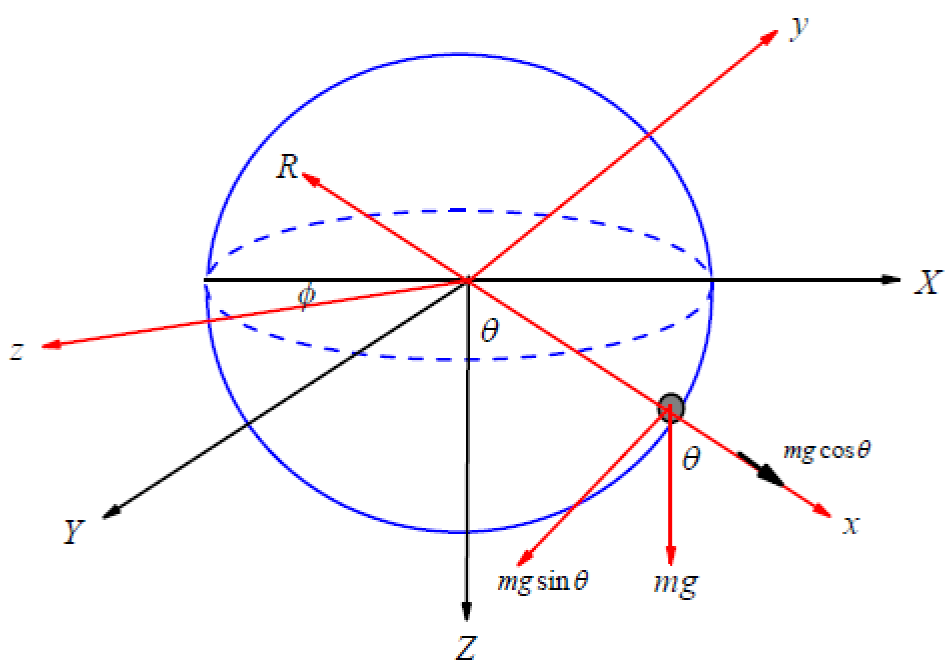
$$= \frac{-2}{3\sqrt{2}}mg + \frac{2}{3\sqrt{2}}mg = 0$$

$$R = 0$$

مثال (4) - يتحرك جسيم على السطح الداخلي لقشرة كروية ملساء نصف قطرها L بين دائرتين أفقيتين الأولي فوق المركز بمسافة $\frac{L}{3}$ والثانية أسفل المركز بمسافة $\frac{2L}{3}$. أثبت أن مقدار سرعة الجسيم عندما يقع في المستوى الأفقي المار بالمركز تساوي $2\sqrt{gL}$ و اتجاهها يصنع زاوية مع الأفقي تعطى بالصورة $\tan^{-1}\sqrt{7/20}$ و أن رد فعل القشرة الكروية على الجسيم عند أسفل موضع يساوى ضعف رد الفعل عند أعلي موضع حيث g عجلة الجاذبية الأرضية ؟

الحـــــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل حيث كتلة m والقوى التي تأثر عليه موزعة كما بالشكل.



بكاتبة معادلات الحركة للجسيم والتي تكون بالصورة

$$m\left(-L\dot{\theta}^2 - L\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) = mg\cos\theta - R \qquad (1)$$

$$m\left(L\ddot{\theta} - L\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$m\left(\frac{L}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}\sin^2\theta\right)\right)=0 \qquad (3)$$

وبتكامل المعادلة (3) نحصل

$$(4) \qquad \varphi^{\bullet}\sin^2\theta=c_1 \;\rightarrow\; \varphi^{\bullet}=\frac{c_1}{\sin^2\theta}$$

وبالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (2) نحصل على

$$L\theta^{\bullet\bullet}-L\left(\frac{c_1}{\sin^2\theta}\right)^2\sin\theta\cos\theta=-g\sin\theta$$

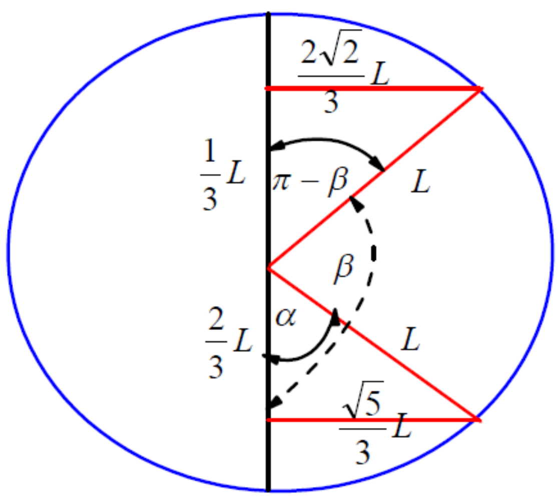
$$\theta^{\bullet\bullet}-c_1^2\frac{1}{\sin^3\theta}\cos\theta=-\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\theta^{\bullet}\frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta}-c_1^2(\sin\theta)^{-3}\cos\theta=-\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\int\theta^{\bullet}d\theta^{\bullet}=c_1^2\int(\sin\theta)^{-3}\cos\theta\,d\theta-\int\frac{g}{L}\sin\theta\,d\theta$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}c_1^2\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g}{L}\cos\theta+c_2 \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية و حيث الحركة محصورة بين المستويين $\frac{2L}{3},\frac{L}{3}$ والذى يظهران كما بالشكل



المستوى الأول $\frac{L}{3}$ أعلى المركز من ذلك نحصل على

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}L=\sin(\pi-\beta)=\sin\pi\cos\beta-\cos\pi\sin\beta=\sin\beta \;\rightarrow\; \sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1}{3}L=\cos(\pi-\beta)=\cos\pi\cos\beta+\sin\pi\sin\beta=-\cos\beta \;\rightarrow\; \cos\beta=-\frac{1}{3}$$

المستوى الثاني $\frac{2L}{3}$ أسفل المركز من ذلك نحصل على

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad \cos\alpha=\frac{2}{3}$$

وبالتعويض في المعادلة (5) مع الأخذ في الاعتبار أن $(\theta^{\bullet}=0)$

للمستوى الأول $\frac{L}{3}$ نحصل على

$$-\frac{1}{2}c_1^2\ \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}+\frac{g}{L}(-\frac{1}{3})+c_2=0 \quad\rightarrow\quad \frac{9}{16}c_1^2+\frac{1}{3}\frac{g}{L}-c_2=0$$

للمستوى الثاني $\frac{2L}{3}$ نحصل على

$$-\frac{1}{2}c_1^2\ \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}+\frac{g}{L}(\frac{2}{3})+c_2=0 \quad\rightarrow\quad \frac{9}{10}c_1^2-\frac{2}{3}\frac{g}{L}-c_2=0$$

بطرح المعادلتين السابقتين نحصل على

$$\frac{9}{16}c_1^2+\frac{1}{3}\frac{g}{L}-c_2-\frac{9}{10}c_1^2+\frac{2}{3}\frac{g}{L}+c_2=0 \quad\rightarrow\quad \frac{90-9(16)}{160}c_1^2+\frac{1+2}{3}\ \frac{g}{L}=0$$

$$\frac{9(10-16)}{160}c_1^2+\frac{g}{L}=0 \ \rightarrow\ -\frac{9(6)}{160}c_1^2+\frac{g}{L}=0 \ \rightarrow\ -\frac{27}{80}c_1^2+\frac{g}{L}=0\rightarrow$$

$$c_1^2=\frac{80}{27}\ \frac{g}{L} \tag{6}$$

ويكون كذلك

$$\frac{9}{16}(\frac{80}{27})\frac{g}{L}+\frac{1}{3}\frac{g}{L}-c_2=0 \ \rightarrow\ \frac{5}{3}\ \frac{g}{L}+\frac{1}{3}\frac{g}{L}-c_2=0 \quad\rightarrow$$

$$c_2=2\frac{g}{L} \tag{7}$$

وبالتعويض في المعادلة (4) , (5) على الترتيب نحصل على

$$\varphi^\bullet=\left(\frac{80}{27}\ \frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta} \tag{8}$$

$$\frac{\theta^{\bullet 2}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{80}{27}\ \frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^2}+\frac{g}{L}\ \cos\theta+2\frac{g}{L}$$

$$\theta^{\bullet 2}=2\ \frac{g}{L}\ \cos\theta+4\frac{g}{L}-\left(\frac{80}{27}\ \frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^2} \tag{9}$$

لاحظ ان مركبات السرعة تعطي من العلاقة

$$\vec{v}=\left(r^\bullet,\ r\theta^\bullet,\ r\varphi^\bullet\sin\theta\right)=\left(0,\ L\ \theta^\bullet,\ L\varphi^\bullet\sin\theta\right)$$

والتي تعطى بالصورة

$$\vec{v}=\left(\ 0,\ L\left[2\ \frac{g}{L}\ \cos\theta+4\frac{g}{L}-\frac{80}{27}\ \frac{g}{L}\frac{1}{(\sin\theta)^2}\right]^{\frac{1}{2}},\ L\left(\frac{80}{27}\ \frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin\theta}\right) \tag{10}$$

ولحساب السرعة عندما يمر الجسيم بالمستوى الأفقي (أي أن $\theta=\frac{\pi}{2}$) وبالتعويض في (10) نحصل علي

$$\vec{v}=\left(0,\ L\left[2\frac{g}{L}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+4\frac{g}{L}-\frac{80}{27}\frac{g}{L}\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2}}\right]^{\frac{1}{2}},\ L\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$\vec{v}=\left(0,\ L\left[4\frac{g}{L}-\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right]^{\frac{1}{2}},\ L\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$v=\sqrt{\left(L\left[4\frac{g}{L}-\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{2}+\left(L\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}}=\sqrt{\left[4\frac{g}{L}-\frac{80}{27}g\right]L^{2}+\frac{80}{27}\frac{g}{L}L^{2}}=\sqrt{4gL}$$

$$v=2\sqrt{gL} \qquad (11)$$

ويعطى اتجاه السرعة عند $\theta=\frac{\pi}{2}$ يصبح بالصورة

$$\tan\gamma=\left.\frac{v_\theta}{v_\varphi}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{L\left(4\frac{g}{L}-\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}{L\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\frac{108-80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\frac{28}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\frac{28}{27}\frac{g}{L}}{\frac{80}{27}\frac{g}{L}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{28}{80}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\gamma=\left(\frac{7}{20}\right)^{\frac{1}{2}} \quad\rightarrow\quad \gamma=\tan^{-1}\left(\frac{7}{20}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولحساب رد الفعل نعوض من المعادلة (8) , (9) في المعادلة (1) نحصل على

$$m\left\{-L\left(2\frac{g}{L}\cos\theta+4\frac{g}{L}-\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^{2}}\right)-L\left(\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin^{2}\theta}\right)^{2}\sin^{2}\theta\right\}=mg\cos\theta-R$$

$$R=mg\cos\theta+m\left\{2g\cos\theta+4g-\left(\frac{80}{27}\frac{g}{L}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^{2}}+\left(\frac{80}{27}g\right)\frac{1}{\sin^{2}\theta}\right\}$$

$$R=mg\cos\theta+m\left\{2g\cos\theta+4g\right\}$$

$$R=mg\left\{3\cos\theta+4\right\} \qquad (12)$$

عندما يكون الجسيم فوق المركز بمسافة $\frac{L}{3}$ يعطي رد الفعل من المعادلة (12) بالصورة

$$R_1=mg\left\{3\cos(\pi-\beta)+4\right\}\rightarrow R_1=mg\left\{3\left(-\frac{1}{3}\right)+4\right\}\rightarrow R_1=3mg$$

بينما عندما يكون الجسيم أسفل المركز بمسافة $\frac{2L}{3}$ يعطي رد الفعل من المعادلة (12) بالصورة

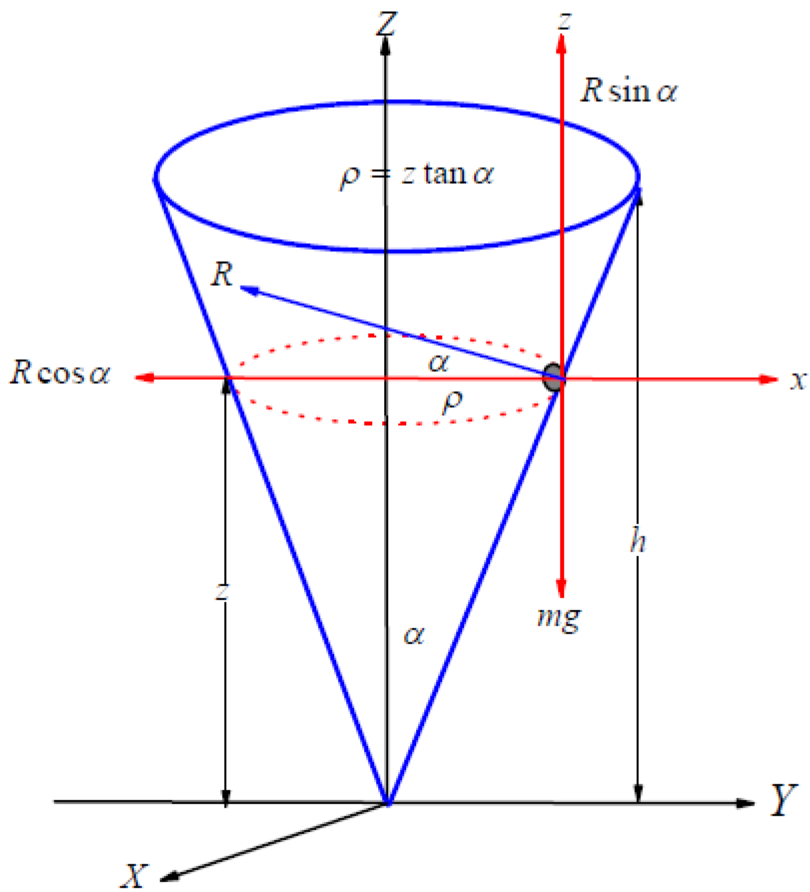
$$R_2 = mg\left\{3\cos(\alpha)+4\right\} \to \quad R_2 = mg\left\{3\left(\frac{2}{3}\right)+4\right\} \to \quad R_2 = 6mg$$

أي ان $\qquad R_2 = 6mg = 2R_1$

مثال(5): قذف جسيم في مستوى أفقي بسرعة ابتدائية مقدارها $\left(\frac{g\,h}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ من نقطة على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم أملس محوره راسي ورأسه لأسفل وذلك على ارتفاع h من رأس المخروط . أثبت أن أدني نقطة يصل اليها الجسيم على ارتفاع $\frac{h}{2}$ من رأس المخروط حيث g عجلة الجاذبية الأرضية ؟

الحــــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل واختيار المحاور (XYZ) بحيث تكون هي المحاور الثابتة وأن $(x\,y\,z)$ هي المحاورة الدائرة مع الجسيم بحيث يكون x في اتجاه تزايد نصف القطر والمحور z في الاتجاه العمودي على المحور x بينما المحور y عمودي على المستوى $(x\,z)$. وتكون القوى المؤثرة على الجسيم كما بالشكل وهى كل من الوزن راسيا الى اسفل ورد الفعل عمودياً على سطح المخروط .



من المعروف بأن مركبات السرعة والعجلة في الإحداثيات الأسطوانية تعطيان بالصورة

$$\vec{v} = \left(\dot{\rho},\ \rho\dot{\varphi},\ \dot{z}\right), \vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right),\ \ddot{z}\right)$$

وبكتابة معادلات الحركة للجسيم والتي تكون بالصورة

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = -R\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = R\sin\alpha - mg \qquad (3)$$

ومن هندسة الشكل واضح أن

$$\rho = z\tan\alpha \qquad (4)$$

ولذلك سوف نحول نظام المعادلات (1-3) الى الصورة

$$m\left(\ddot{z} - z\dot{\varphi}^2\right)\tan\alpha = -R\cos\alpha \qquad (5)$$

$$\frac{m}{z\tan\alpha}\frac{d}{dt}\left(\left(z\tan\alpha\right)^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(z^2\dot{\varphi}\right) = 0 \qquad (6)$$

$$m\ddot{z} = R\sin\alpha - mg \qquad (7)$$

وبتكامل المعادلة (6) نحصل

$$z^2\varphi^\bullet = c_1 \qquad (8)$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ فإن $\varphi^\bullet = \varphi_0^\bullet \; , \; z = z_0 = h$ وبذلك يكون $c_1 = h^2\varphi_0^\bullet$ وبالتعويض في المعادلة (8) نحصل على

$$\varphi^\bullet = \frac{h^2}{z^2}\varphi_0^\bullet \qquad (9)$$

ومن الشروط الابتدائية أيضا وعندما $t=0$ فإن الجسيم قد قذف بسرعة ابتدائية (v_0) في الاتجاه الأفقي والتي تعطى من

$$\mathrm{v}_0 = \rho_0\varphi_0^\bullet \quad \rightarrow \quad \varphi_0^\bullet = \frac{\mathrm{v}_0}{\rho_0} = \frac{\mathrm{v}_0}{h\tan\alpha} \qquad (10)$$

وبالتعويض من المعادلة (10) في المعادلة (9) نحصل على

$$\varphi^\bullet = \frac{h^2}{z^2}\frac{\mathrm{v}_0}{h\tan\alpha} = \frac{h\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha} \qquad (11)$$

بحذف رد الفعل بين المعادلتين (5), (7) وذلك بضرب المعادلة (5) في $\cos\alpha$ والمعادلة (7) في $\cos\alpha$ والجمع نحصل على

$$m\left(z^{\bullet\bullet} - z\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha\,\sin\alpha = -R\cos\alpha\,\sin\alpha$$

$$m\,z^{\bullet\bullet}\cos\alpha = R\,\sin\alpha\cos\alpha - mg\cos\alpha$$

$$\left(z^{\bullet\bullet} - z\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha\,\sin\alpha + z^{\bullet\bullet}\cos\alpha = -g\cos\alpha$$

$$\left(z^{\bullet\bullet} - z\varphi^{\bullet 2}\right)\sin^2\alpha + z^{\bullet\bullet}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)z^{\bullet\bullet} - z\varphi^{\bullet 2}\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$z^{\bullet\bullet} - z\varphi^{\bullet 2}\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha \qquad (12)$$

وبالتعويض من المعادلة (11) في المعادلة (12) نحصل على

$$z^{\bullet\bullet} - z\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha}\right)^2\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$z^{\bullet\bullet} - z\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{z^2}\right)^2\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha \quad \rightarrow \quad z^{\bullet\bullet} - \left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{z^3}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$z^\bullet\frac{dz^\bullet}{dz} - \left(h\mathrm{v}_0\right)^2 z^{-3}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha \rightarrow \int z^\bullet dz^\bullet - \left(h\mathrm{v}_0\right)^2\cos^2\alpha\int z^{-3}\,dz = -g\cos^2\alpha\int dz$$

$$\frac{1}{2}z^{\bullet 2} + \left(h\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2z^2}\cos^2\alpha + g\,z\cos^2\alpha = c_2 \qquad (13)$$

ومن الشروط الابتدائية كذلك وعندما $t=0$ فإن ($z = h = constant$) ومنها $z^\bullet = 0$ ويعطى بذلك c_2 بالصورة

$$\left(h\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2h^2}\cos^2\alpha + g\,h\,\cos^2\alpha = c_2$$

$$\frac{1}{2}z^{\bullet 2} + \left(h\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2z^2}\cos^2\alpha + g\,z\cos^2\alpha = \left(h\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2h^2}\cos^2\alpha + g\,h\cos^2\alpha$$

$$z^{\bullet 2} + \left(h\mathrm{v}_0\right)^2\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{h^2}\right)\cos^2\alpha + 2g\left(z-h\right)\cos^2\alpha = 0 \qquad (14)$$

لدراسة مستويات الحركة نضع $z^\bullet = 0$ فى المعادلة (14) لذلك نحصل

$$(h\text{v}_0)^2\left(\frac{h^2-z^2}{z^2h^2}\right)+2g\,(z-h)=0 \quad \rightarrow (\text{v}_0h)^2\left(\frac{(h-z)(h+z)}{z^2h^2}\right)+2g\,(z-h)=0$$

ومنها
$$(h\text{v}_0)^2\left(\frac{h+z}{z^2h^2}\right)-2g=0, \qquad z-h=0$$

حيث تمثل $z=h$ المستوى الأول بينما يعطى المستوى الثاني للحركة بالصورة

$$\frac{1}{2g}(\text{v}_0)^2(h+z)-z^2=0 \quad \rightarrow \quad z^2-\frac{1}{2g}(\text{v}_0)^2z-\frac{1}{2g}(\text{v}_0)^2h=0$$

$$z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2g}(\text{v}_0)^2\pm\left[\frac{1}{4g^2}(\text{v}_0)^4+\frac{4}{2g}(\text{v}_0)^2h\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2g}\left(\left(\frac{g\,h}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\pm\left[\frac{1}{4g^2}\left(\left(\frac{g\,h}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^4+\frac{4}{2g}\left(\left(\frac{g\,h}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2h\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

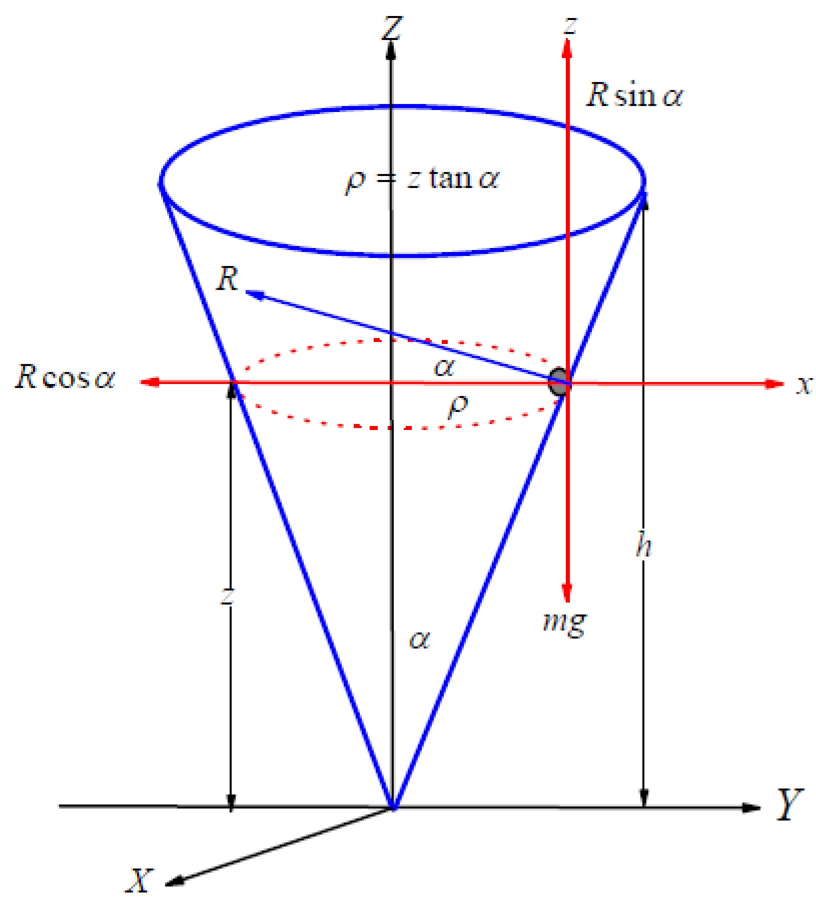
$$z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2g}\frac{g\,h}{3}\pm\left[\frac{1}{4g^2}\left(\frac{g\,h}{3}\right)^2+\frac{4}{2g}\frac{g\,h}{3}h\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{h}{2}\left\{\frac{1}{6}\pm\left[\frac{1}{36}+\frac{2}{3}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$z=\frac{h}{2}\left\{\frac{1}{6}\pm\frac{1}{6}\left[1+24\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{h}{2}\left\{\frac{1}{6}\pm\frac{5}{6}\right\}\rightarrow z=\frac{h}{2},\quad z=\frac{h}{2}\left\{\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right\}=\frac{h}{2}\left\{-\frac{4}{6}\right\}=-\frac{2}{3}h$$

مثال (6): قذف جسيم في مستوى أفقي بسرعة ابتدائية مقدارها $\left(\frac{2g\,h}{c^2+c}\right)^{\frac{1}{2}}$ من نقطة على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم أملس محوره راسي ورأسه لأسفل وذلك على ارتفاع h من رأس المخروط حيث g عجلة الجاذبية الأرضية, c ثابت . أثبت أن الحركة محصورة بين مستويين هما المستوى الابتدائي والمستوى الذى يرتفع عن رأس المخروط مسافة قدرها $\frac{h}{c}$ ؟

الحـــــــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل واختيار المحاور (XYZ) بحيث تكون هي المحاور الثابتة وأن $(x\,y\,z)$ هي المحاورة الدائرة مع الجسيم بحيث يكون x في اتجاه تزايد نصف القطر والمحور z في الاتجاه العمودي على المحور x بينما المحور y عمودي على المستوى $(x\,z)$. وتكون القوى الموترة على الجسيم كما بالشكل وهى كل من الوزن راسيا الى اسفل ورد الفعل عمودياً على سطح المخروط .



من المعروف بأن مركبات السرعة والعجلة في الإحداثيات الأسطوانية تعطيان بالصورة

$$\vec{v} = (\rho^{\bullet}, \rho\varphi^{\bullet}, z^{\bullet}), \vec{a} = \left(\rho^{\bullet\bullet} - \rho\varphi^{\bullet 2}, \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\varphi^{\bullet}), z^{\bullet\bullet}\right)$$

وبكتابة معادلات الحركة للجسيم والتي تكون بالصورة

$$m\left(\rho^{\bullet\bullet} - \rho\varphi^{\bullet 2}\right) = -R\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\varphi^{\bullet}) = 0 \qquad (2)$$

$$m z^{\bullet\bullet} = R\sin\alpha - mg \qquad (3)$$

ومن هندسة الشكل واضح أن

$$\rho = z\tan\alpha \qquad (4)$$

ولذلك سوف نحول نظام المعادلات (1-3) الى الصورة

$$m\left(z^{\bullet\bullet} - z\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha = -R\cos\alpha \qquad (5)$$

$$\frac{m}{z\tan\alpha}\frac{d}{dt}\left(\left(z\tan\alpha\right)^2\varphi^{\bullet}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(z^2\varphi^{\bullet}) = 0 \qquad (6)$$

$$m z^{\bullet\bullet} = R\sin\alpha - mg \qquad (7)$$

وبتكامل المعادلة (6) نحصل

$$z^2\,\varphi^{\bullet} = c_1 \qquad (8)$$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ فإن $\varphi^{\bullet}=\varphi_0^{\bullet}\ ,\ z=z_0=h$ وبذلك يكون $c_1=h^2\,\varphi_0^{\bullet}$ وبالتعويض في المعادلة (8) نحصل على

$$\varphi^{\bullet} = \frac{h^2}{z^2}\varphi_0^{\bullet} \qquad (9)$$

ومن الشروط الابتدائية أيضا وعندما $t=0$ فإن الجسيم قد قذف بسرعة ابتدائية (v_0) في الاتجاه الأفقي والتي تعطى من

$$\mathrm{v}_0 = \rho_0\,\varphi_0^{\bullet} \quad \rightarrow \quad \varphi_0^{\bullet} = \frac{\mathrm{v}_0}{\rho_0} = \frac{\mathrm{v}_0}{h\tan\alpha} \qquad (10)$$

وبالتعويض من المعادلة (10) في المعادلة (9) نحصل على

$$\varphi^{\bullet} = \frac{h^2}{z^2}\frac{\mathrm{v}_0}{h\tan\alpha} = \frac{h\,\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha} \qquad (11)$$

بحذف رد الفعل بين المعادلتين (5), (7) وذلك بضرب المعادلة (5) في $\cos\alpha$ والمعادلة (7) في $\cos\alpha$ والجمع نحصل على

$$m\left(z^{\bullet\bullet} - z\,\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha\,\sin\alpha = -R\cos\alpha\,\sin\alpha$$

$$m\,z^{\bullet\bullet}\cos\alpha = R\,\sin\alpha\cos\alpha - mg\cos\alpha$$

$$\left(z^{\bullet\bullet} - z\,\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha\,\sin\alpha + z^{\bullet\bullet}\cos\alpha = -g\cos\alpha$$

$$\left(z^{\bullet\bullet} - z\,\varphi^{\bullet 2}\right)\sin^2\alpha + z^{\bullet\bullet}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)z^{\bullet\bullet} - z\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$z^{\bullet\bullet} - z\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha \qquad (12)$$

وبالتعويض من المعادلة (11) في المعادلة (12) نحصل على $z^{\bullet\bullet} - z\left(\dfrac{h\,\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha}\right)^2\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha$

$$z^{\bullet\bullet} - z\left(\frac{h\,\mathrm{v}_0}{z^2}\right)^2\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha \quad \rightarrow \quad z^{\bullet\bullet} - \left(\frac{h\,\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{z^3}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$z^{\bullet}\frac{dz^{\bullet}}{dz} - \left(h\,\mathrm{v}_0\right)^2 z^{-3}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha \rightarrow \int z^{\bullet}dz^{\bullet} - \left(h\,\mathrm{v}_0\right)^2\cos^2\alpha\int z^{-3}\,dz = -g\cos^2\alpha\int dz$$

$$\frac{1}{2}z^{\bullet 2} + \left(h\,\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2z^2}\cos^2\alpha + g\,z\cos^2\alpha = c_2 \qquad (13)$$

ومن الشروط الابتدائية كذلك وعندما $t=0$ فإن $(z=h=constant)$ ومنها $z^{\bullet}=0$ ويعطى بذلك c_2 بالصورة

$$\left(h\,\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2h^2}\cos^2\alpha + g\,h\,\cos^2\alpha = c_2$$

$$\frac{1}{2}z^{\bullet 2} + \left(h\,\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2z^2}\cos^2\alpha + g\,z\cos^2\alpha = \left(h\,\mathrm{v}_0\right)^2\frac{1}{2h^2}\cos^2\alpha + g\,h\cos^2\alpha$$

$$z^{\bullet 2} + \left(h\,\mathrm{v}_0\right)^2\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{h^2}\right)\cos^2\alpha + 2g\left(z-h\right)\cos^2\alpha = 0 \qquad (14)$$

لدراسة مستويات الحركة نضع $z^{\bullet}=0$ فى المعادلة (14) لذلك نحصل

$$(h\mathrm{v}_0)^2\left(\frac{h^2-z^2}{z^2h^2}\right)+2g(z-h)=0 \quad\rightarrow (\mathrm{v}_0h)^2\left(\frac{(h-z)(h+z)}{z^2h^2}\right)+2g(z-h)=0$$

ومنها
$$(h\mathrm{v}_0)^2\left(\frac{h+z}{z^2h^2}\right)-2g=0, \qquad z-h=0$$

حيث تمثل $z=h$ المستوى الأول بينما يعطى المستوى الثاني للحركة بالصورة

$$\frac{1}{2g}(\mathrm{v}_0)^2(h+z)-z^2=0 \quad\rightarrow\quad z^2-\frac{1}{2g}(\mathrm{v}_0)^2z-\frac{1}{2g}(\mathrm{v}_0)^2h=0$$

$$z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2g}(\mathrm{v}_0)^2\pm\left[\frac{1}{4g^2}(\mathrm{v}_0)^4+\frac{4}{2g}(\mathrm{v}_0)^2h\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2g}\left(\left(\frac{2gh}{c^2+c}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\pm\left[\frac{1}{4g^2}\left(\left(\frac{2gh}{c^2+c}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^4+\frac{4}{2g}\left(\left(\frac{2gh}{c^2+c}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2h\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2g}\frac{2gh}{c^2+c}\pm\left[\frac{1}{4g^2}\left(\frac{2gh}{c^2+c}\right)^2+\frac{4}{2g}\,\frac{2gh}{c^2+c}h\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{h}{2}\left\{\frac{1}{c^2+c}\pm\left[\frac{1}{(c^2+c)^2}+\frac{4}{c^2+c}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

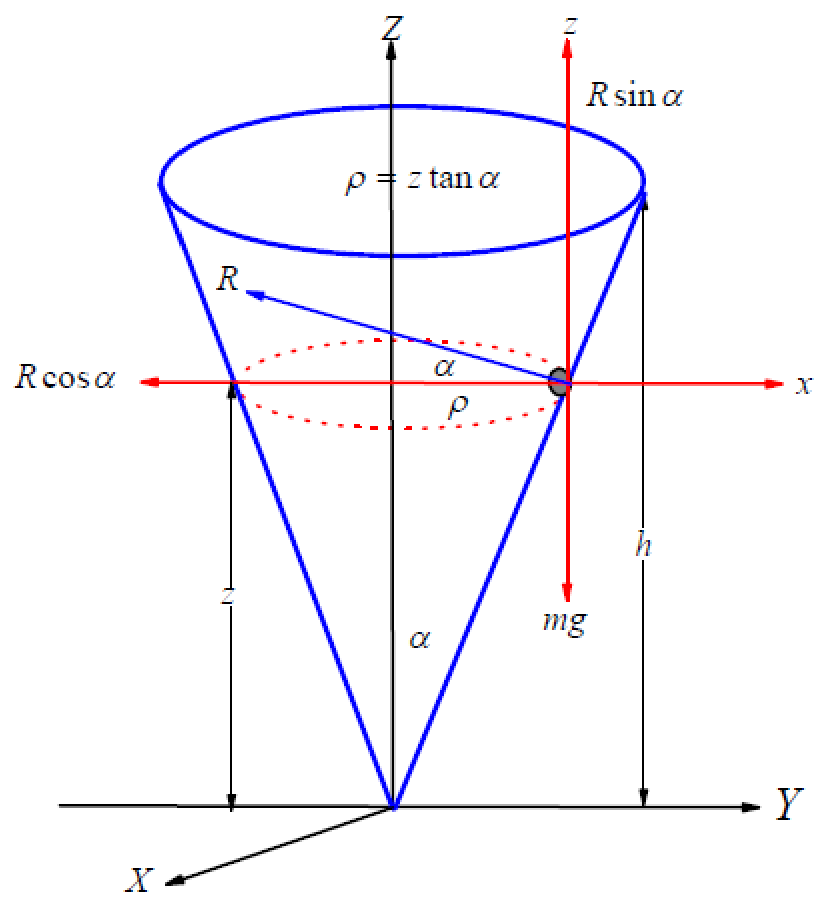
$$z=\frac{h}{2(c^2+c)}\left\{1\pm\left(4c^2+4c+1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{h}{2(c^2+c)}\left\{1\pm\left(\left(2c+1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{h\left\{1\pm\left(2c+1\right)\right\}}{2(c^2+c)}=\frac{h(1+(2c+1))}{2(c^2+c)}$$

$$z=\frac{h(1+(2c+1))}{2(c^2+c)}=\frac{h(2c+2)}{2(c^2+c)}=\frac{2h(c+1)}{2(c+1)}=\frac{h}{c}\rightarrow \qquad z=\frac{h}{c}$$
وهو المستوى الثاني للحركة

مثال (7) – يتحرك جسيم على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم أملس محوره راسي ورأسه الي أسفل اذا كانت الحركة محصورة بين مستويين هما h_1, h_2 فوق رأس المخروط أوجد رد الفعل الواقع على الجسيم عندما يكون على ارتفاع h فوق رأس المخروط ؟

الحـــــــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل واختيار المحاور (XYZ) بحيث تكون هي المحاور الثابتة وأن (xyz) هي المحاورة الدائرة مع الجسيم بحيث يكون x في اتجاه تزايد نصف القطر والمحور z في الاتجاه العمودي على المحور x بينما المحور y عمودي على المستوى (xz) . وتكون القوى المؤثرة على الجسيم كما بالشكل وهى كل من الوزن راسيا الى اسفل ورد الفعل عمودياً على سطح المخروط .



من المعروف بأن مركبات السرعة والعجلة في الإحداثيات الأسطوانية تعطيان بالصورة

$$\vec{v} = \left(\dot{\rho},\ \rho\dot{\varphi},\ \dot{z}\right), \vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right),\ \ddot{z}\right)$$

وبكتابة معادلات الحركة للجسيم والتي تكون بالصورة

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = -R\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = R\sin\alpha - mg \qquad (3)$$

ومن هندسة الشكل واضح أن

$$\rho = z\tan\alpha \qquad (4)$$

ولذلك سوف نحول نظام المعادلات (1-3) الى الصورة

$$m\left(\ddot{z} - z\dot{\varphi}^2\right)\tan\alpha = -R\cos\alpha \qquad (5)$$

$$\frac{m}{z\tan\alpha}\frac{d}{dt}\left(\left(z\tan\alpha\right)^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(z^2\dot{\varphi}\right) = 0 \qquad (6)$$

$$m\ddot{z} = R\sin\alpha - mg \qquad (7)$$

وبتكامل المعادلة (6) نحصل

$$z^2\,\dot{\varphi} = c_1 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{c_1}{z^2}$$ لاحظ اننا حذفنا $\tan^2\alpha$ من مقام هذه المعادلة (8)

بحذف رد الفعل بين المعادلتين (5), (7) وذلك بضرب المعادلة (5) في $\cos\alpha$ والمعادلة (7) في $\cos\alpha$ والجمع نحصل على

$$m\left(\ddot{z} - z\,\dot{\varphi}^2\right)\tan\alpha\,\sin\alpha = -R\cos\alpha\,\sin\alpha$$

$$m\,\ddot{z}\,\cos\alpha = R\,\sin\alpha\cos\alpha - mg\cos\alpha$$

$$\left(\ddot{z} - z\,\dot{\varphi}^2\right)\tan\alpha\,\sin\alpha + \ddot{z}\,\cos\alpha = -g\cos\alpha$$

$$\left(\ddot{z} - z\,\dot{\varphi}^2\right)\sin^2\alpha + \ddot{z}\,\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\ddot{z} - z\,\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$\ddot{z} - z\,\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha \quad \rightarrow \quad \ddot{z} = z\,\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha - g\cos^2\alpha \qquad (9)$$

وبالتعويض من المعادلة (8) في المعادلة (9) نحصل على

$$\ddot{z} - z\left(\frac{c_1}{z^2}\right)^2\sin^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$\ddot{z} - c_1^2\,\frac{1}{z^3}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha$$

$$\dot{z}\,\frac{d\dot{z}}{dz} - c_1^2\,z^{-3}\cos^2\alpha = -g\cos^2\alpha \rightarrow \int \dot{z}\,d\dot{z} - c_1^2\cos^2\alpha\int z^{-3}\,dz = -g\cos^2\alpha\int dz$$

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 + c_1^2\,\frac{1}{2z^2}\cos^2\alpha + g\,z\cos^2\alpha = c_2 \qquad (10)$$

ومن الشروط الابتدائية وحيث أن الحركة محصورة بين مستويين هما h_1, h_2 وعند كل منهم $\dot{z} = 0$ ويعطى بذلك c_1, c_2 من المعادلة (10) بالصورة

$$c_1^2\,\frac{1}{2h_1^2}\cos^2\alpha + g\,h_1\cos^2\alpha = c_2 \qquad (11)$$

$$c_1^2\,\frac{1}{2h_2^2}\cos^2\alpha + g\,h_2\cos^2\alpha = c_2 \qquad (12)$$

$$\frac{c_1^2}{2}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)\cos^2\alpha + g\left(h_1 - h_2\right)\cos^2\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{c_1^2}{2}\left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2\,h_2^2}\right) + g\left(h_1 - h_2\right) = 0$$

$$\frac{c_1^2}{2}\left(h_2 + h_1\right)\left(h_2 - h_1\right) + g\,h_1^2\,h_2^2\left(h_1 - h_2\right) = 0 \rightarrow \frac{c_1^2}{2}\left(h_2 + h_1\right) - g\,h_1^2\,h_2^2 = 0$$

$$c_1^2 = 2g\,\frac{h_1^2\,h_2^2}{h_2 + h_1} \qquad (13)$$

$$\left(2g\,\frac{h_1^2\,h_2^2}{h_2 + h_1}\right)\frac{1}{2h_1^2}\cos^2\alpha + g\,h_1\cos^2\alpha = c_2$$

$$c_2 = g\left(h_1 + \frac{h_2^2}{h_2 + h_1}\right)\cos^2\alpha \qquad (14)$$

$$z^2 \varphi^{\bullet} = c_1 \quad \rightarrow \quad \varphi^{\bullet} = \frac{\left(2g \dfrac{h_1^2 h_2^2}{h_2 + h_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{z^2} \qquad (15)$$

وبالتعويض من (9) في (1)

$$m\left(z\varphi^{\bullet 2} \sin^2 \alpha - g\cos^2 \alpha - z\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha = -R\cos\alpha$$

$$m\left(z\varphi^{\bullet 2} (\sin^2 \alpha - 1) - g\cos^2 \alpha\right)\tan\alpha = -R\cos\alpha$$

$$m\left(z\varphi^{\bullet 2} (-\cos^2 \alpha) - g\cos^2 \alpha\right)\tan\alpha = -R\cos\alpha$$

$$R = m\left(z\varphi^{\bullet 2} + g\right)\tan\alpha \,\cos\alpha \quad \rightarrow \quad R = m\left(z\varphi^{\bullet 2} + g\right)\sin\alpha \qquad (16)$$

وبالتعويض من (15) في (16)

$$R = m\left(z\left[\frac{\left(2g \dfrac{h_1^2 h_2^2}{h_2 + h_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{z^2}\right]^2 + g \right)\sin\alpha = m\left(z\frac{\left(2g \dfrac{h_1^2 h_2^2}{h_2 + h_1}\right)}{z^4} + g \right)\sin\alpha$$

$$R = mg\left(\frac{2}{z^3} \frac{h_1^2 h_2^2}{\left(h_1 + h_1\right)} + 1 \right)\sin\alpha$$

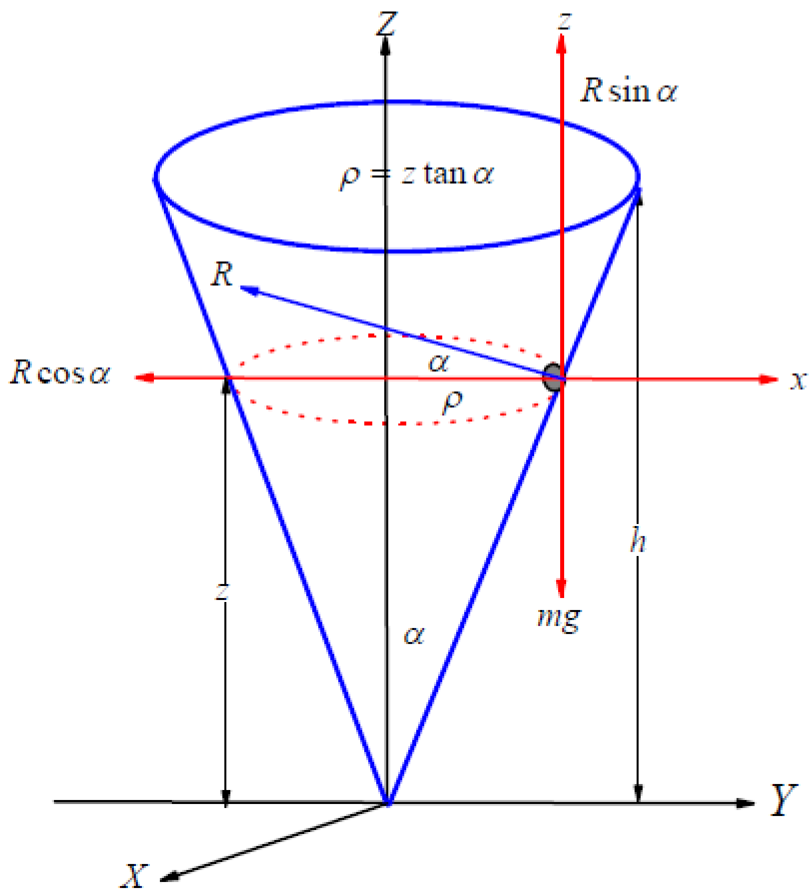
وعلى ارتفاع $z = h$ يعطى الضغط بالصورة

$$R = mg\left(\frac{2h_1^2 h_2^2}{\left(h_1 + h_1\right) h^3} + 1 \right)\sin\alpha$$

مثال (8) - قذف جسيم في مستوى أفقي بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 من نقطة على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم أملس محوره راسي ورأسه لأسفل وذلك من على ارتفاع h من رأس المخروط. أثبت أن المعادلة التفاضلية لمسقط مسار الجسيم على المستوى الأفقي المار براس المخروط هي $\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u\cos^2\alpha - \dfrac{c}{u^2} = 0$ حيث $u = \dfrac{1}{\rho}$, ρ هو نصف قطر الدائرة الأفقية المارة بالجسيم عند أى لحظة كذلك $c = \dfrac{g\,\cot\alpha\,\cos^2\alpha}{v_0^2 h^2}$, g عجلة الجاذبية الأرضية ؟

الحـــــــــــل

بأخذ موضع اختياري للجسيم كما بالشكل المقابل واختيار المحاور (XYZ) بحيث تكون هي المحاور الثابتة وأن (xyz) هي المحاورة الدائرة مع الجسيم بحيث يكون x في اتجاه تزايد نصف القطر والمحور z في الاتجاه العمودي على المحور x بينما المحور y عمودي على المستوى (xz) . وتكون القوى المؤثرة على الجسيم كما بالشكل وهى كل من الوزن راسيا الى اسفل ورد الفعل عمودياً على سطح المخروط .



من المعروف بأن مركبات السرعة والعجلة في الإحداثيات الأسطوانية تعطيان بالصورة

$$\vec{v} = \left(\dot{\rho},\ \rho\dot{\varphi},\ \dot{z}\right), \vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right),\ \ddot{z}\right)$$

وبكتابة معادلات الحركة للجسيم والتي تكون بالصورة

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = -R\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = R\sin\alpha - mg \qquad (3)$$

ومن هندسة الشكل واضح أن

$$\rho = z\tan\alpha \qquad (4)$$

ولذلك سوف نحول نظام المعادلات (1-3) الى الصورة

$$m\left(\ddot{z} - z\dot{\varphi}^2\right)\tan\alpha = -R\cos\alpha \qquad (5)$$

$$\frac{m}{z\tan\alpha}\frac{d}{dt}\left(\left(z\tan\alpha\right)^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(z^2\dot{\varphi}\right) = 0 \qquad (6)$$

$$m\ddot{z} = R\sin\alpha - mg \qquad (7)$$

وبتكامل المعادلة (6) نحصل

$$z^2\,\varphi^{\bullet}=c_1 \qquad (8)$$

لاحظ لو أننا اعتبرنا التكامل بالصورة	$\dfrac{d}{dt}\left(\left(z\tan\alpha\right)^2\varphi^{\bullet}\right)=0 \;\rightarrow \left(\tan\alpha\right)^2 z^2\varphi^{\bullet}=c_1$
سوف يكون الحل النهائي بالصورة	$\dfrac{d^2u}{d\varphi^2}+u\sin^2\alpha-\dfrac{c}{u^2}=0$

ومن الشروط الابتدائية وعندما $t=0$ فإن $\varphi^{\bullet}=\varphi_0^{\bullet}$, $z=z_0=h$ وبذلك يكون $c_1=h^2\,\varphi_0^{\bullet}$ وبالتعويض في المعادلة (8) نحصل على

$$\varphi^{\bullet}=\frac{h^2}{z^2}\varphi_0^{\bullet} \qquad (9)$$

ومن الشروط الابتدائية أيضا وعندما $t=0$ فإن الجسيم قد قذف بسرعة ابتدائية (v_0) في الاتجاه الأفقي والتي تعطى من

$$\mathrm{v}_0=\rho_0\,\varphi_0^{\bullet} \quad\rightarrow\quad \varphi_0^{\bullet}=\frac{\mathrm{v}_0}{\rho_0}=\frac{\mathrm{v}_0}{h\tan\alpha} \qquad (10)$$

وبالتعويض من المعادلة (10) في المعادلة (9) نحصل على

$$\varphi^{\bullet}=\frac{h^2}{z^2}\frac{\mathrm{v}_0}{h\tan\alpha}=\frac{h\,\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha} \qquad (11)$$

بحذف رد الفعل بين المعادلتين (5), (7) وذلك بضرب المعادلة (5) في $\cos\alpha$ والمعادلة (7) في $\cos\alpha$ والجمع نحصل على

$$m\left(z^{\bullet\bullet}-z\,\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha\,\sin\alpha=-R\cos\alpha\,\sin\alpha$$

$$m\,z^{\bullet\bullet}\cos\alpha=R\,\sin\alpha\cos\alpha-mg\cos\alpha$$

$$\left(z^{\bullet\bullet}-z\,\varphi^{\bullet 2}\right)\tan\alpha\,\sin\alpha+z^{\bullet\bullet}\cos\alpha=-g\cos\alpha$$

$$\left(z^{\bullet\bullet}-z\,\varphi^{\bullet 2}\right)\sin^2\alpha+z^{\bullet\bullet}\cos^2\alpha=-g\cos^2\alpha$$

$$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)z^{\bullet\bullet}-z\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\alpha=-g\cos^2\alpha$$

$$z^{\bullet\bullet}-z\,\varphi^{\bullet 2}\sin^2\alpha=-g\cos^2\alpha \qquad (12)$$

وبالتعويض من المعادلة (11) في المعادلة (12) نحصل على $z^{\bullet\bullet}-z\left(\dfrac{h\,\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha}\right)^2\sin^2\alpha=-g\cos^2\alpha$

$$z^{\bullet\bullet}-z\left(\frac{h\,\mathrm{v}_0}{z^2}\right)^2\cos^2\alpha=-g\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad z^{\bullet\bullet}-\left(\frac{h\,\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{z^3}\cos^2\alpha=-g\cos^2\alpha \qquad (13)$$

وبالتعويض من المعادلة (4) في (13) نحصل على

$$\rho^{\bullet\bullet}\cot\alpha-\left(\frac{h\,\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{\rho^3\cot^3\alpha}\cos^2\alpha=-g\cos^2\alpha$$

$$\rho^{\bullet\bullet}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{\rho^3(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})^3}\cos^2\alpha=-g\cos^2\alpha$$

$$\rho^{\bullet\bullet}-\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{\rho^3(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})^3}\sin\alpha\cos\alpha=-g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\rho^{\bullet\bullet}-\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{\rho^3}\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=-g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\rho^{\bullet\bullet}-\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\tan\alpha}\right)^2\frac{1}{\rho^3}\sin^2\alpha\tan^2\alpha=-g\sin\alpha\cos\alpha \qquad (14)$$

وحيث أن $u=\frac{1}{\rho}$ ومنها $\rho=\frac{1}{u}$

$$\rho^{\bullet}=\frac{d\rho}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{u})=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

ولتحويل المعادلة السابقة بدلالة φ نتبع التالي

$$\rho^{\bullet}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\varphi^{\bullet}\frac{du}{d\varphi}$$

بالتعويض عن $\varphi^{\bullet}$ من المعادلة (11) نحصل على

$$\rho^{\bullet}=-\frac{1}{u^2}\varphi^{\bullet}\frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha}\right)\frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\frac{\rho^2}{\tan^2\alpha}\tan\alpha}\right)\frac{du}{d\varphi}$$

$$\rho^{\bullet}=-\frac{1}{u^2}\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\frac{\rho^2}{\tan\alpha}}\right)\frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\left(\frac{h\mathrm{v}_0\tan\alpha}{\frac{1}{u^2}}\right)\frac{du}{d\varphi}=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{du}{d\varphi}$$

$$\rho^{\bullet}=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{du}{d\varphi} \qquad (15)$$

$$\rho^{\bullet\bullet}=\frac{d\rho^{\bullet}}{dt}=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi}\right)$$

$$\rho^{\bullet\bullet}=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{d\varphi}\right)=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{d}{d\varphi}\left(\varphi^{\bullet}\frac{du}{d\varphi}\right)=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{d}{d\varphi}\left\{\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{z^2\tan\alpha}\right)\frac{du}{d\varphi}\right\}$$

$$\rho^{\bullet\bullet}=-h\mathrm{v}_0\tan\alpha\frac{d}{d\varphi}\left\{\left(\frac{h\mathrm{v}_0}{\frac{\rho^2}{\tan^2\alpha}\tan\alpha}\right)\frac{du}{d\varphi}\right\}=-\left(\frac{h\mathrm{v}_0\tan\alpha}{\rho}\right)^2\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{du}{d\varphi}\right\}$$

$$\rho^{\bullet\bullet}=-\left(\frac{h\mathrm{v}_0\tan\alpha}{\rho}\right)^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} \qquad (16)$$

وبالتعويض من المعادلة (16) في المعادلة (14) نحصل على

$$-\left(\frac{h v_0 \tan\alpha}{\rho}\right)^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} - \left(\frac{h v_0}{\tan\alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho^3}\sin^2\alpha\ \tan^2\alpha = -g\ \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(\frac{h v_0}{\tan\alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho^3}\sin^2\alpha\ \tan^2\alpha\ \left(\frac{\rho}{h v_0 \tan\alpha}\right)^2 = g\ \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\rho}{h v_0 \tan\alpha}\right)^2$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho}\sin^2\alpha = g\ \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\rho}{h v_0 \tan\alpha}\right)^2$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)^2 (u)\sin^2\alpha = \frac{g\ \sin\alpha\cos\alpha}{u^2}\left(\frac{1}{h v_0 \tan\alpha}\right)^2$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\right)^2 (u) = \frac{c}{u^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(\frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^2 (u) = \frac{c}{u^2},$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\cos^2\alpha - \frac{c}{u^2} = 0$$

$$c = \frac{g\ \sin\alpha\cos\alpha}{(h v_0)^2\tan^2\alpha} = \frac{g\ \sin\alpha\cos\alpha}{(h v_0)^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{g\ \cos\alpha}{(h v_0)^2\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{g\ \cot\alpha\ \cos^2\alpha}{(h v_0)^2}$$ حيث