الفصل الثاني

التكامل الثنائي

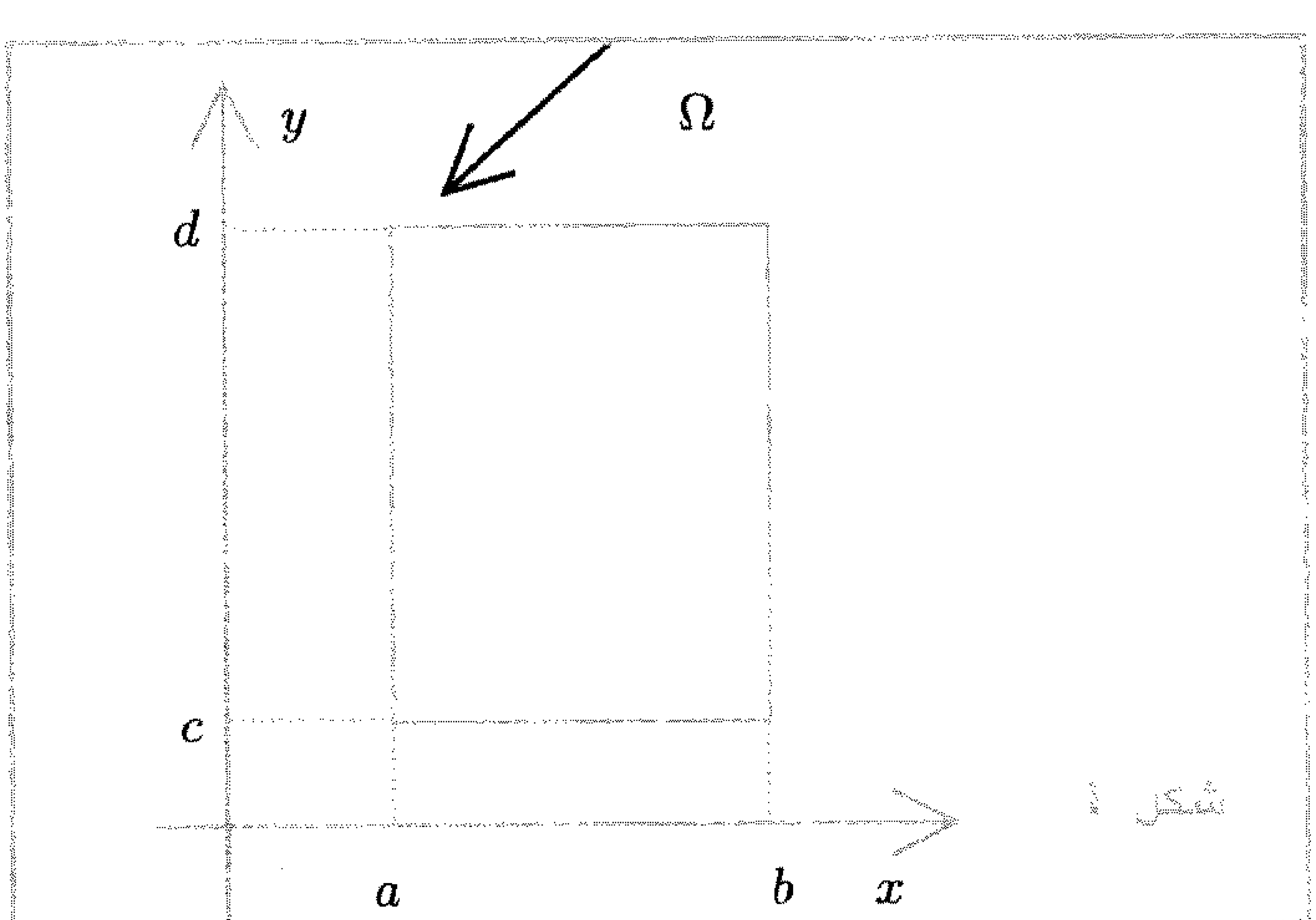
2 . 1 الحجم تحت سطح والتكامل الثنائي

التكامل المفرد $\int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق محور x في الفترة $[a,b]$ حيث أن $f(x) \geq 0$، والتكامل الثنائي يعتبر تعميماً للتكامل المفرد أي يمثل الحجم تحت سطح في R^3.

ونعتبر حالة بسيطة. نفرض أن Ω تمثل مستطيلاً في R^2 :

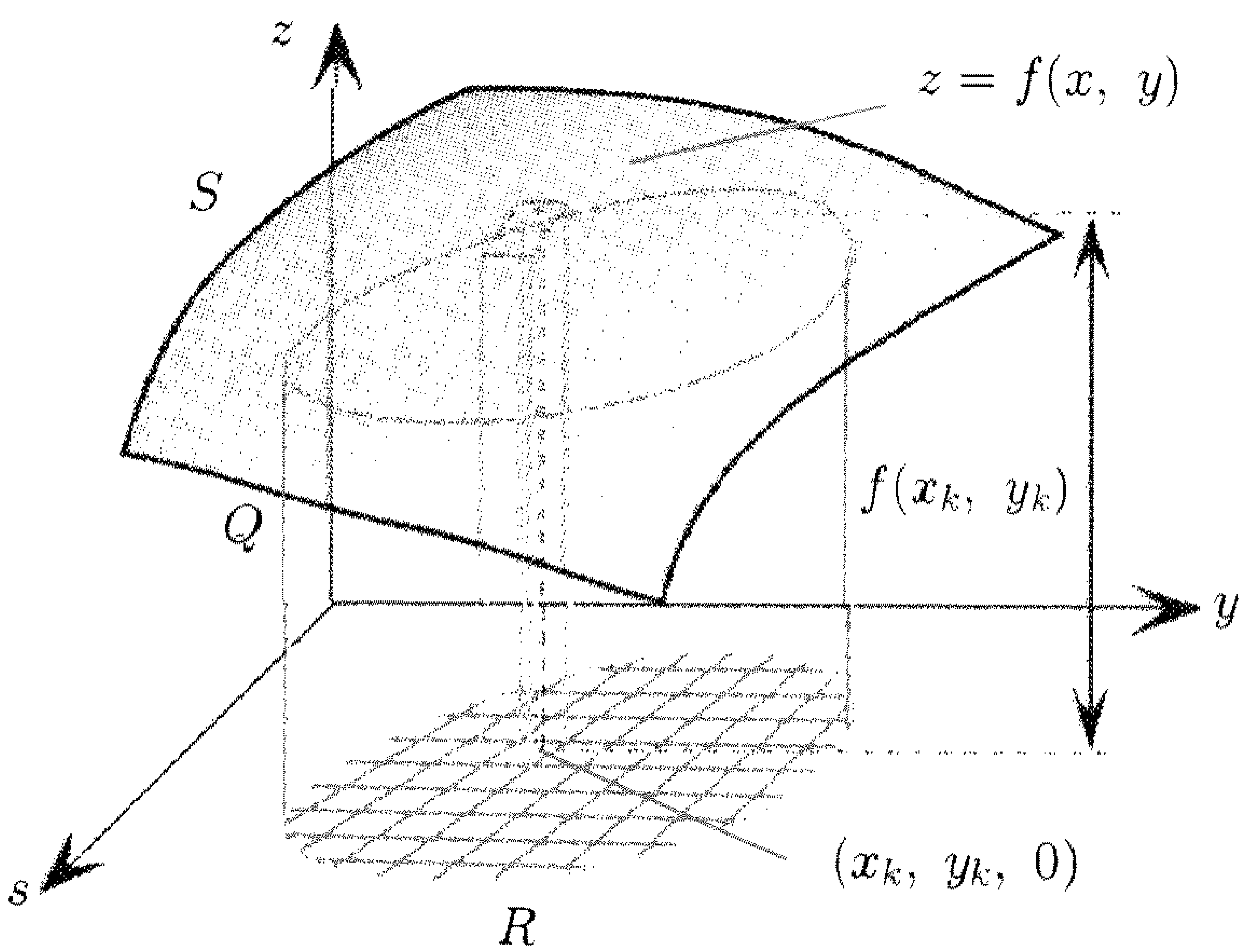
$$\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq d\}$$

أنظر الشكل (1).



ونفرض أن $z = f(x,y)$ دالة متصلة وغير سالبة على المنطقة Ω، أي أن $f(x,y) \geq 0$ لكل $(x,y) \in \Omega$. والسؤال الآن ما هو الحجم تحت السطح $z = f(x,y)$ وفوق المستطيل Ω؟

وللإجابة عن السؤال نتبع الخطوات التالية:



شكل (2)

(1) نقسم المستطيل Ω إلى مستطيلات فرعية بمستقيمات موازية للمحورين حيث أن:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

و
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

ويمكن تعريف Δx و Δy كما يلي:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

و
$$\Delta y = y_i - y_{i-1} = \frac{b-a}{m}$$

وهكذا يمكن تعريف المستطيلات الفرعية كما يلي:

$$\Omega_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1} \le x \le x_i \ , \ y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

حيث أن $i = 1, 2, ..., n$ و $j = 1, 2, ..., m$

أي أنه توجد $n\,m$ من المستطيلات الفرعية.

(2) نقدر الحجم تحت السطح وفوق كل مستطيل فرعي:

إذا كانت (x_i^*, y_j^*) نقطة في Ω_{ij}، فإن الحجم تحت السطح وفوق المستطيل Ω_{ij} تكون قيمته التقريبية كما يلي:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A \qquad (*)$$

حيث أن $\Delta A = \Delta x \Delta y$ تمثل مساحة المستطيل Ω_{ij}.

(3) وبجمع الحجوم التقريبية نحصل على الحجم الكلي:

$$V = V_{11} + V_{12} + ... + V_{1m} + V_{21} + V_{22} + ... + V_{2m} + ... + V_{n1} + V_{n2} + ... + V_{nm}$$

أو بصورة مختصرة

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} \qquad (**)$$

من المعادلتين $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij}$$

(4) وبأخذ النهاية عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ نجد أن:

$$V = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

ملاحظة

عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$، فإن قطر المستطيل يؤول إلى الصفر، وإذا عرفنا $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)}$، فإن $\Delta s \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to \bar{o}$ ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$V = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A$$

حيث أن ΔA تساوي قطر المستطيل $\Delta x \Delta y$.

مثـــال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z = x + 2y$ وفوق المستطيل:

$$\Omega = \{(x,y) : 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 5\}$$

الحــل

للسهولة نقسم الفترتين $[1,2]$ و$[3,5]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية (أي أن $n = m$).

$$1 = x_0 < x_1 < \ \dots\ x_n = 2$$

و

$$3 = y_0 < y_1 < \ \dots\ < y_n = 5$$

كذلك $\Delta x = \dfrac{b-a}{b} = \dfrac{1}{n}$ و $\Delta y = \dfrac{d-c}{n} = \dfrac{2}{n}$

وهكذا $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$ و $y_j = 3 + \dfrac{2j}{n}$

وباختيار $x_i^* = x_i$ و $y_j^* = y_j$ نجد أن:

$$V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A = (x_i + 2y_j)\, \Delta x \Delta y$$

وبالتعويض عن x_i و y_j و Δx و Δy نجد أن:

$$V_{ij}=\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)+2\left(3+\frac{2j}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)\ \left(\frac{2}{n}\right)=\left(7+\frac{i}{n}+\frac{4j}{n}\right)\ \ \frac{2}{n^2}$$

وهكذا:

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{14}{n^2}+\frac{2i}{n^3}+\frac{8j}{n^3}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{14}{n^2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2i}{n^3}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{8j}{n^3}\right)$$

ولحسن الحظ يمكن إيجاد مجموع المتسلسلات الثنائية السابقة حيث أن:

$$,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{14}{n^2}=\frac{14}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\ =\frac{14}{n^2}(n)(n)=14$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2i}{n^3}=\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\ i=\frac{2}{n^3}(1+2+3+...+n)(n)$$

$$.=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n+1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{8j}{n^3}=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\ j=\frac{8}{n^3}(n)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{4(n+1)}{n}$$

ملاحظة

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

وهكذا

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}\approx 14+\frac{n+1}{n}+\frac{4(n+1)}{n}$$

وبذلك

$$V = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*, x_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[14 + \frac{n+1}{n} + \frac{4(n+1)}{n}\right] = 19$$

والآن يمكننا تعريف التكامل الثنائي كما يلي:

تعريف 1 (التكامل الثنائي)

إذا كانت $z = f(x, y)$ والمنطقة Ω معرّفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

وإذا كانت $\lim_{\Delta s\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$ موجودة ومستقلة عن كيفية اختيار النقاط (x_i^*, y_j^*)، فإن التكامل الثنائي للدالة f على Ω يعرّف كما يلي:

$$\int\int_{\Omega} f(x, y) dA = \lim_{\Delta s\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

نظرية 1

إذا كانت الدالة f متصلة على المنطقة المستطيلة Ω، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

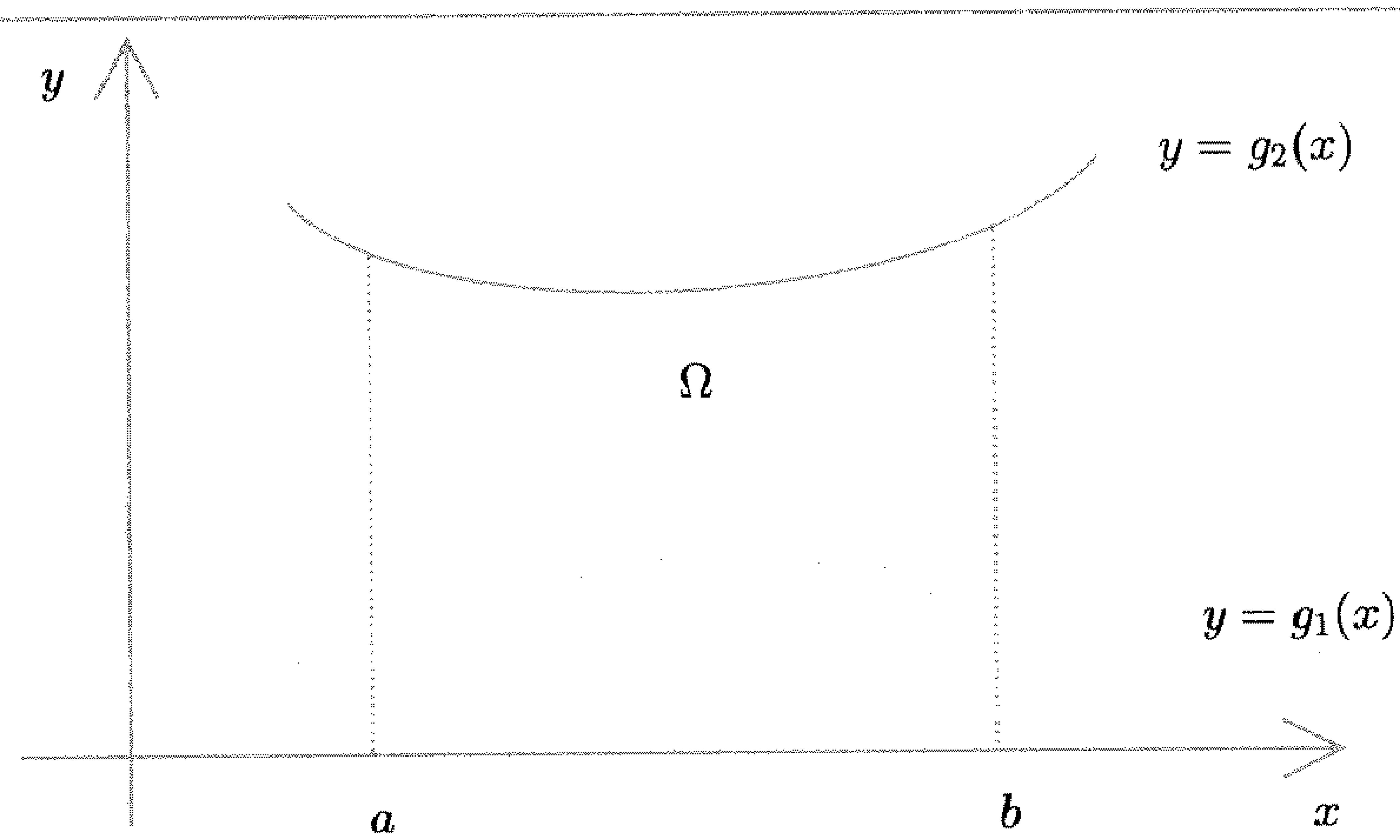
يمكن تعريف التكامل الثنائي على مناطق غير مستطيلة ومن أهمها المناطق الأفقية والرأسية البسيطة والتي سنقدمها فيما يلي:

المناطق الأفقية والرأسية البسيطة

حساب قيمة التكامل الثنائي باستخدام التعريف ليس بالأمر السهل، وتوجد كذلك بعض المناطق التي تكون عليها الدوال المتصلة غير قابلة للتكامل. وسنقتصر على نوعين من المناطق التي تكوّن عليها الدوال المتصلة قابلة للتكامل، ويمكن عليها حساب قيمة التكامل الثنائي.

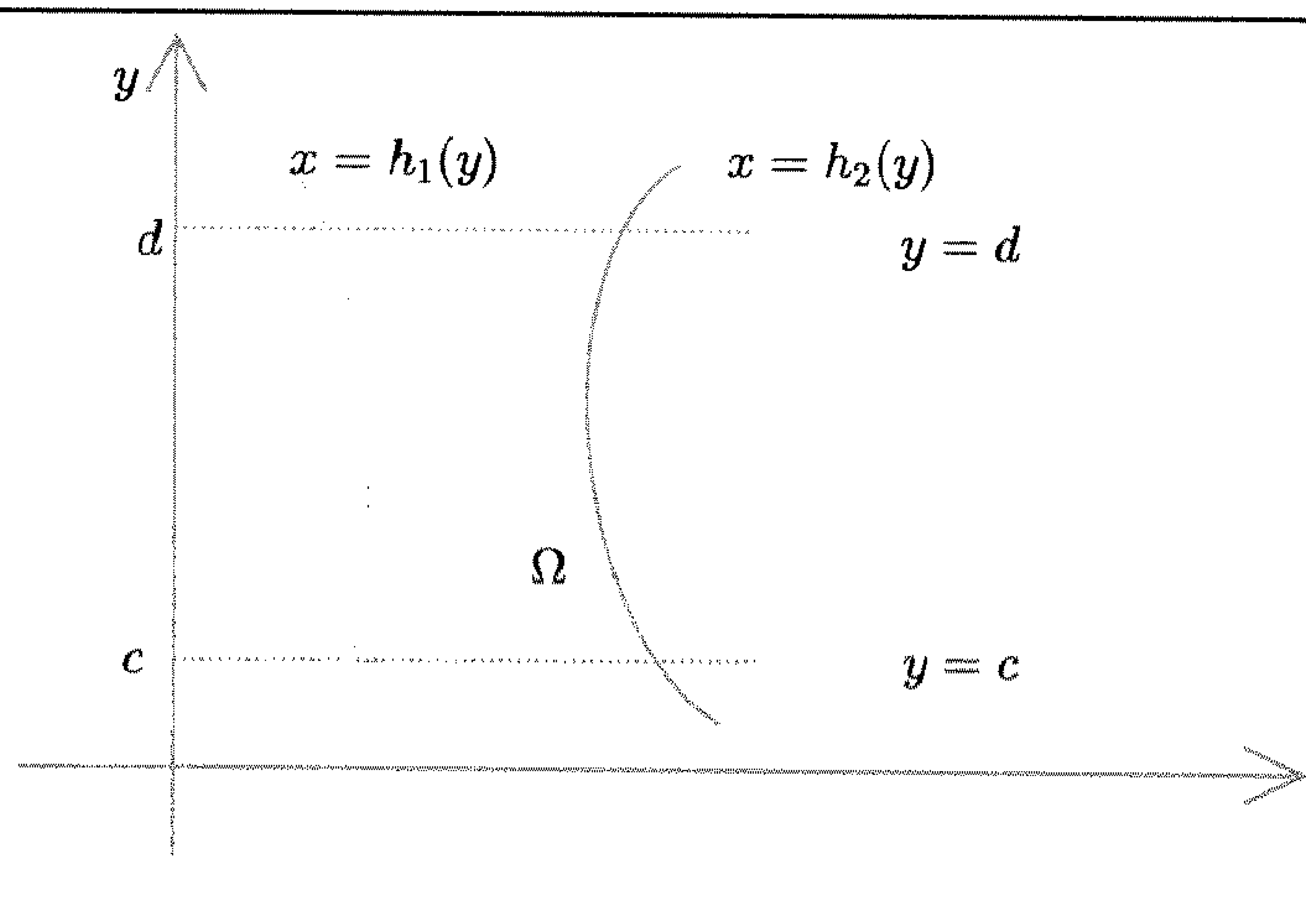
تعريف 2

(1) إذا كانت الدالتان g_1 وg_2 متصلتين على الفترة $[a,b]$ حيث أن $g_1(x) \leq g_2(x)$ لكل $x \in [a,b]$، وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين g_1 وg_2 على الفترة $[a,b]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة رأسية، انظر الشكل (3).



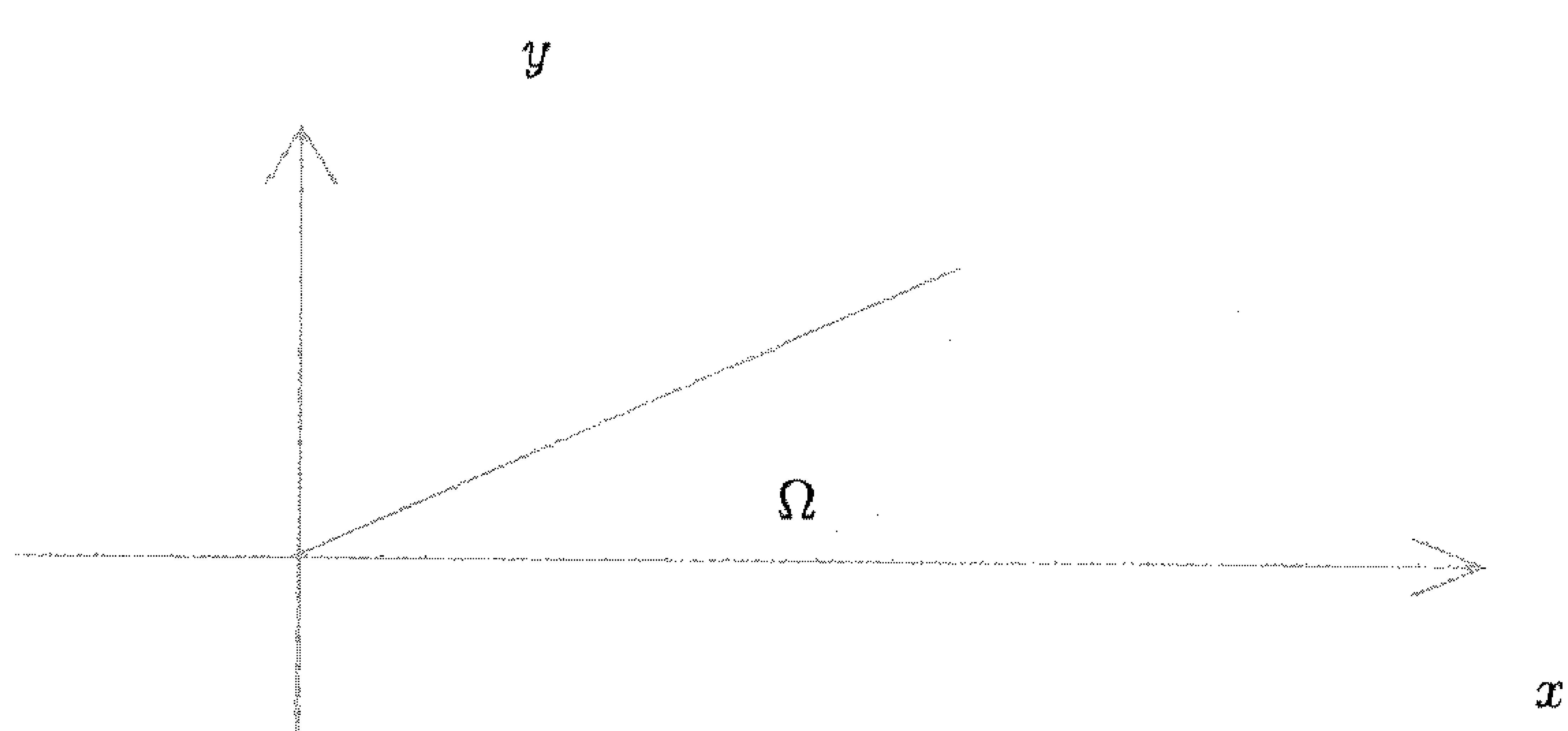
شكل (3)
منطقة رأسية بسيطة

(2) إذا كـانـت الـدالـتـان h_1 وh_2 مـتـصـلـتـيـن عـلـى الـفـتـرة $[c,d]$ حـيـث أن $h_1(y) \le h_2(y)$ لكل $y \in [c,d]$. وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين h_1 و h_2 على الفترة $[c,d]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة أفقية بسيطة، انظر الشكل (4).



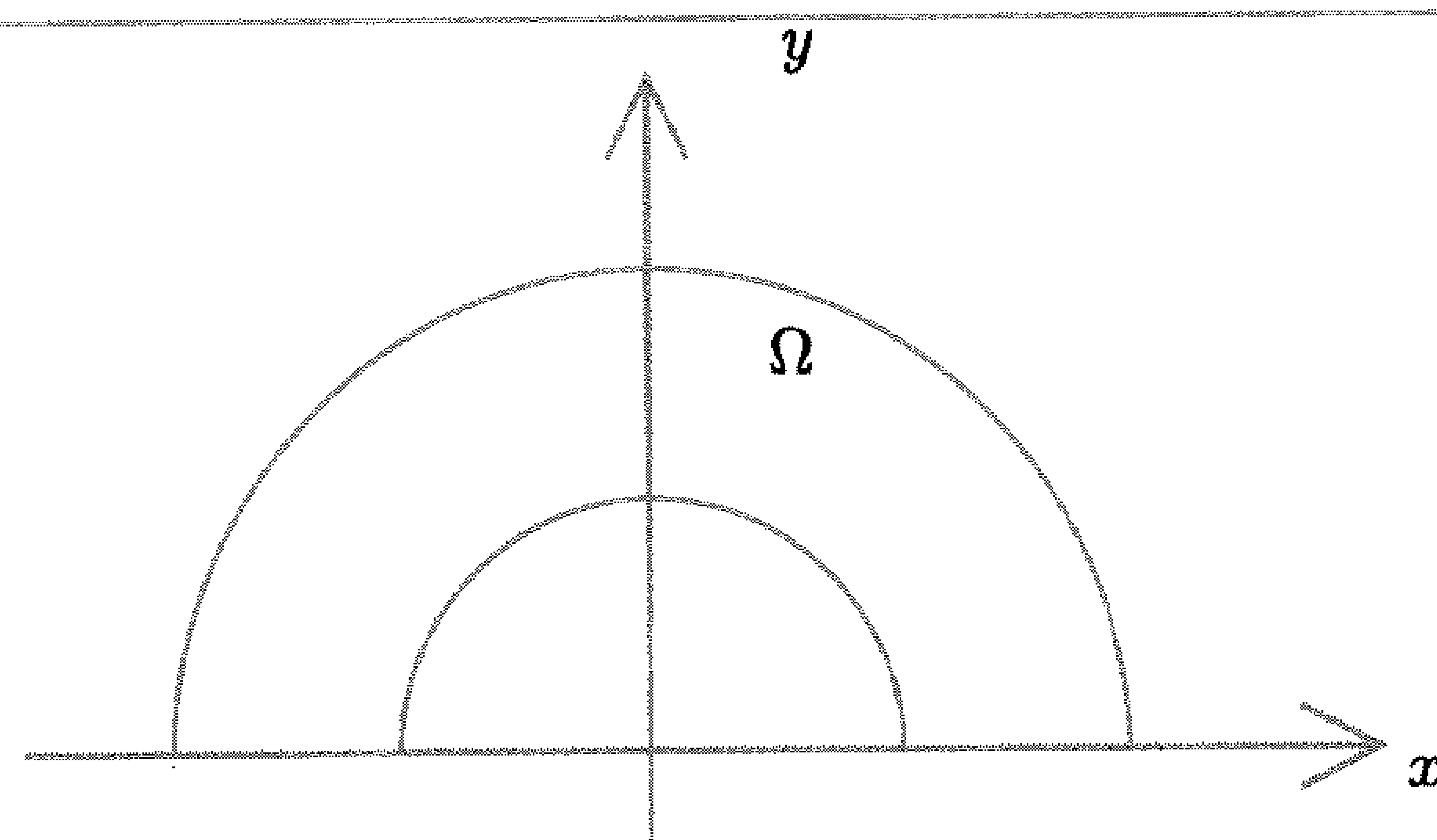
شكل (4)
منطقة أفقية بسيطة

(3) إذا كانت المنطقة Ω منطقة رأسية بسيطة، وأفقية بسيطة، فإن Ω تكون منطقة بسيطة، انظر الشكل (5).



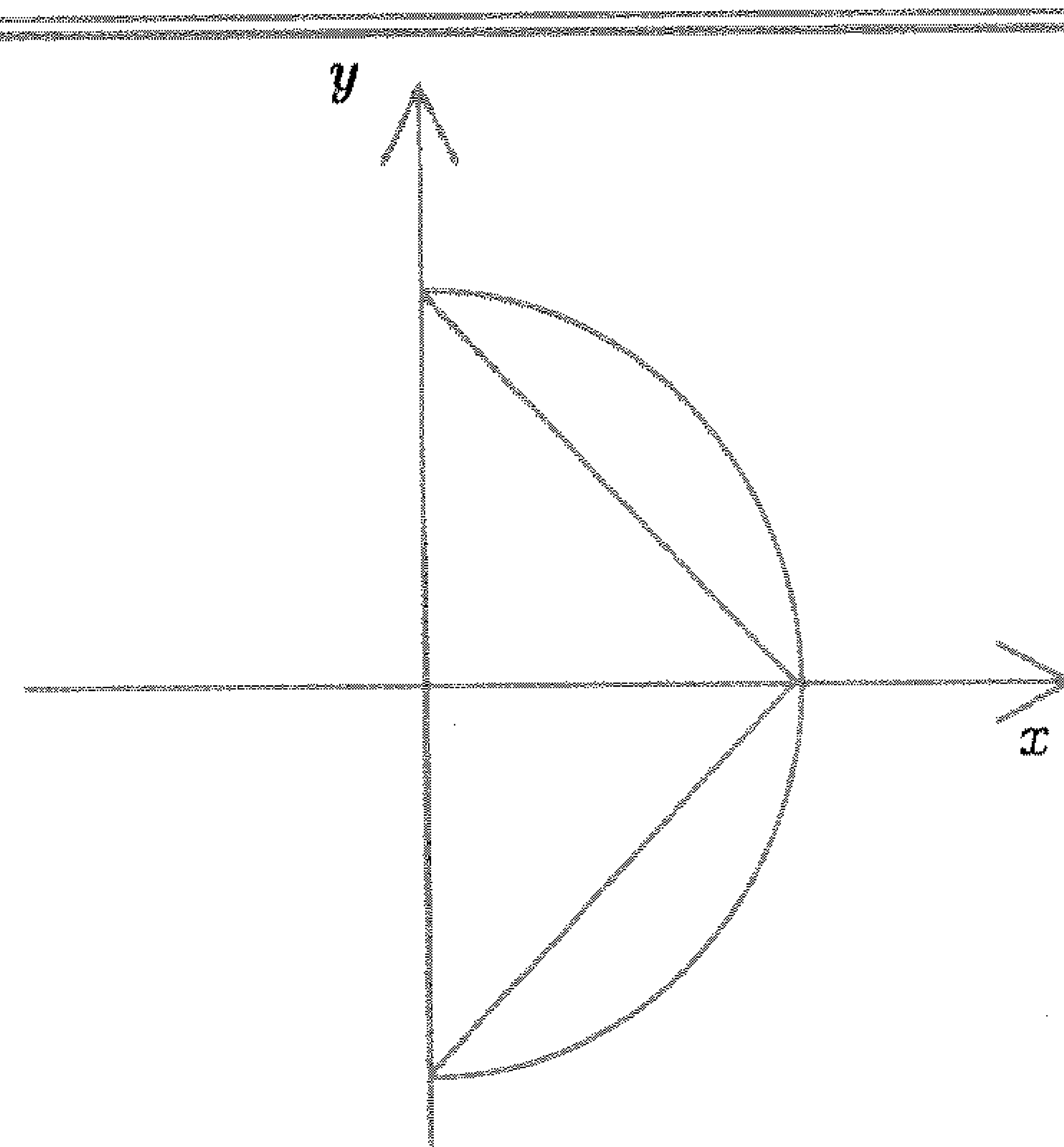
شكل (5)
منطقة بسيطة

وللتعرّف إلى مناطق مختلفة، انظر الأشكال من (6 ـ 8).



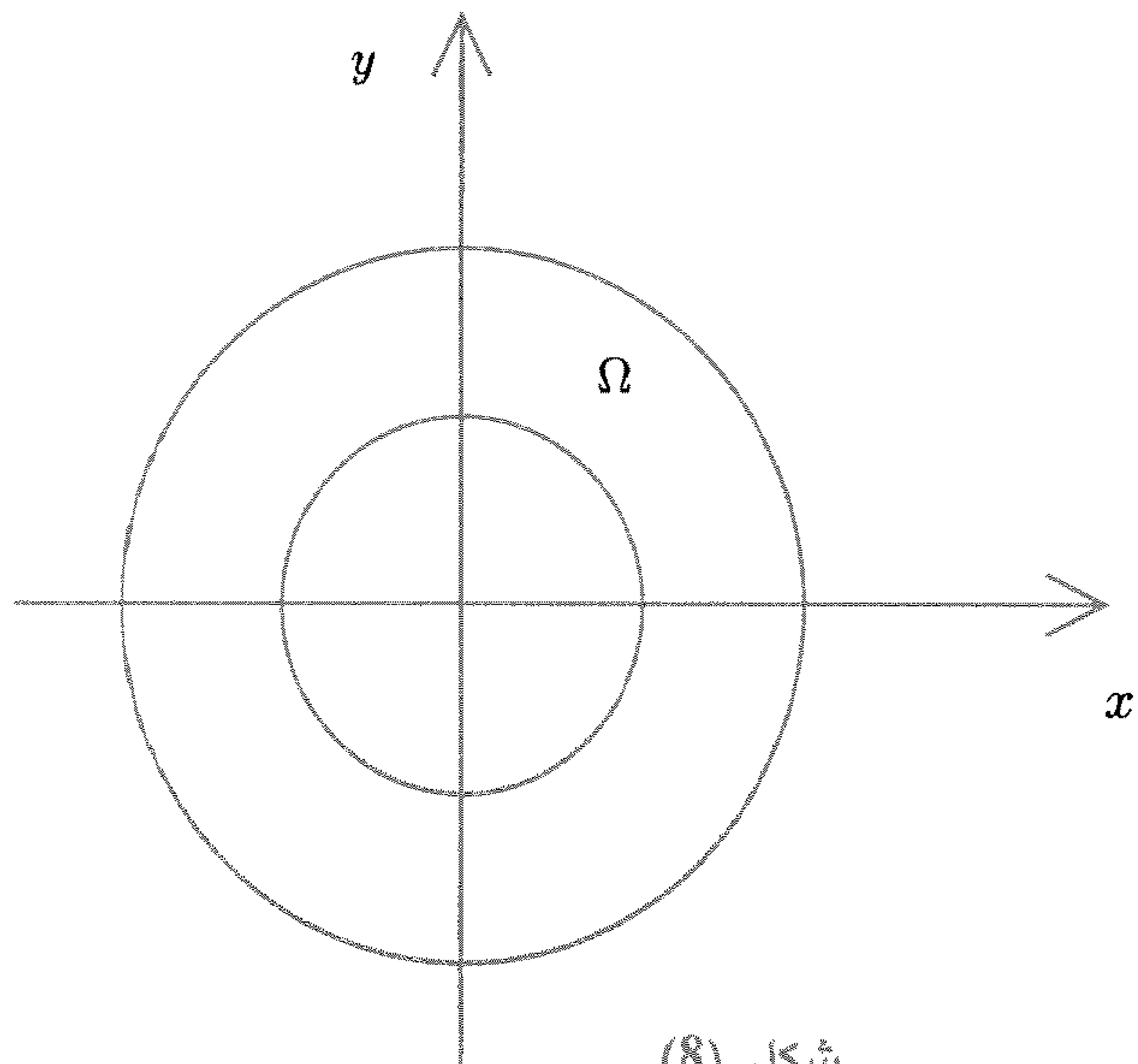
شكل 6

منطقة رأسية بسيطة ولكنها غير منطقة أفقية بسيطة



شكل (7)

منطقة أفقية بسيطة ولكنها غير منطقة رأسية بسيطة



شكل (8)

منطقة غير رأسية بسيطة وغير أفقية بسيطة

ويمكن تعريف التكامل الثنائي على منطقة عامة Ω، انظر الشكل (9)، ونفرض أن المنطقة محددة (Bounded)، أي أنه يوجد عدد M حيث أن لكل $(x,y)\in\Omega$ يكون $|f(x,y)|\leq M$، وبما أن Ω محددة، فإنه يمكن تعريف دالة جديدة $F(x,y)$ كما يلي:

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ; \quad (x,y)\in\Omega \\ 0 & ; \quad (x,y)\neq R, (x,y)\notin\Omega \end{cases}$$

تعريف 3

إذا كانت f معرّفة على Ω، والدالة F معرّفة كما سبق، فإن:

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dA=\int\int_{R} F(x,y)dA$$

وإذا كان التكامل على المنطقة R موجوداً، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

وسنوضح ذلك كما يلي:

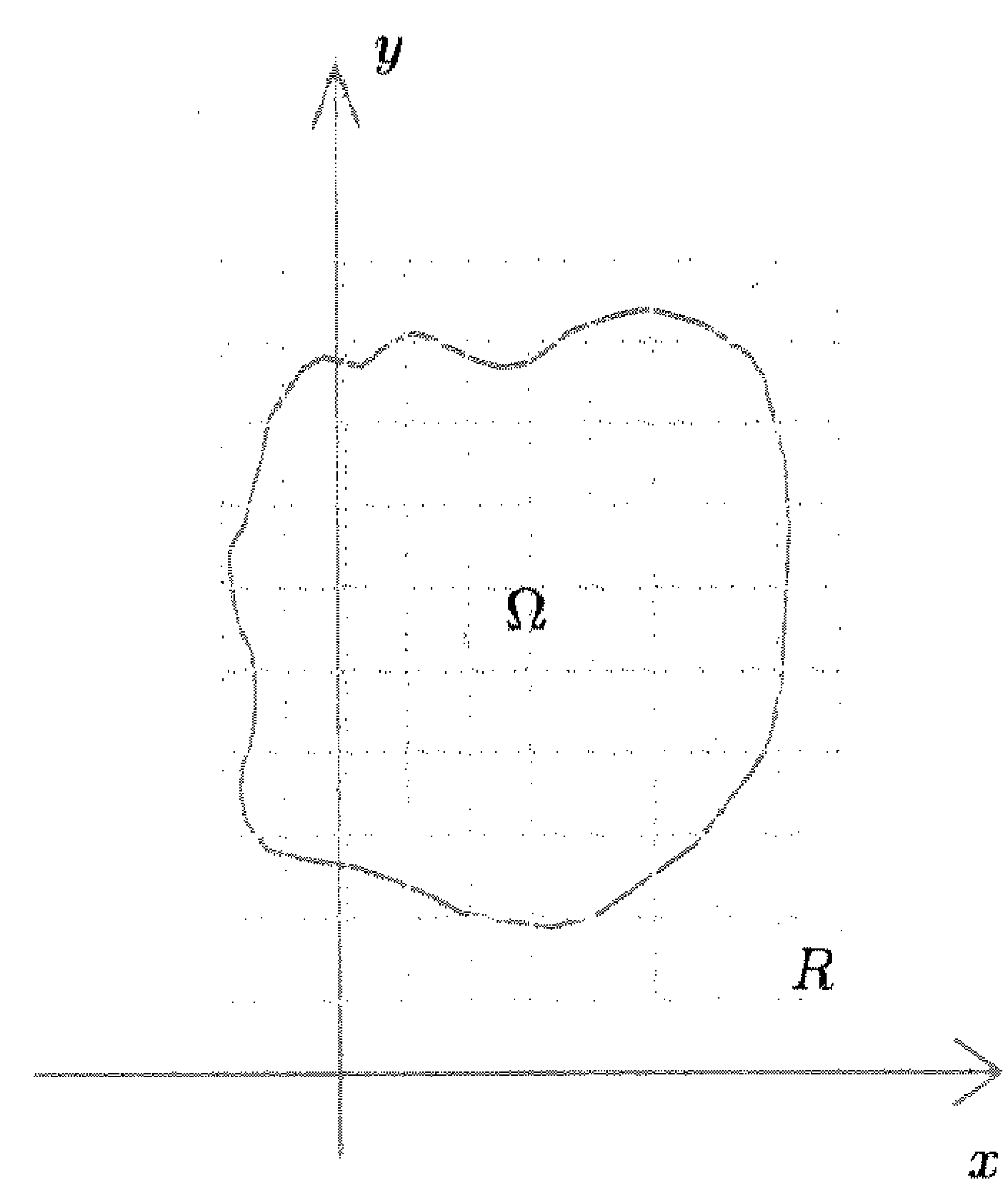
إذا تم تقسيم المستطيل R إلى $n\,m$ من المستطيلات الفرعية، انظر الشكل (9). فإنه في كل مستطيل فرعي R_{ij} يقع بالكامل في Ω تكون $F = f$. وهكذا الحجم الذي يقع تحت السطح $Z = f(x, y)$ وفوق المستطيل R_{ij} يعطى بالمعادلة التالية:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y$$

$$= F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y$$

وإذا كان R_{ij} في R وليس في Ω، فإن $F = 0$، وهذا يعني أن

$$V_{ij} = F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = 0$$



شكل 9

وأخيراً إذا كان R_{ij} لا يوجد بالكامل داخل Ω أي أن جزءاً منه يقع خارج Ω، فإن هذا لا يعتبر مشكلة حقيقية، لأنه عندما $\Delta s \to 0$ يؤول مجموع الحجوم فوق هذه المستطيلات (على حدود Ω إلى الصفر إذا كانت حدود Ω معقدة جداً، وهكذا يكون مجموع الحجوم فوق R يساوي مجموع الحجوم فوق Ω وهذا يفسر التعريف 3.

2.2 خواص التكامل الثنائي

الخواص الأساسية للتكامل الثنائي مشابهة تماماً لخواص التكامل للدالة في متغير واحد. وفيما يلي سنذكر أهم الخواص الأساسية للتكامل الثنائي:

إذا كانت الدالتان g, f قابلتين للتكامل في المنطقة المغلقة R، فإن:

(1
$$\iint_R Cf(x,y)dA = C\iint_R f(x,y)dA$$

حيث أن C مقدار ثابت.

(2
$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$$

(3 إذا كان لكل (x,y) في R يكون $m \leq f(x,y) \leq M$ وإذا كان $A\ (R)$ ترمز إلى مساحة R، فإن:

$$mA(R) \leq \iint_R f(x,y)dA \leq MA(R)$$

(4 إذا كانت $f(x,y) \leq g(x,y)$، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

(5 إذا كانت R مكونة من عدة مناطق $(R_1, R_2, ...)$ و f متصلة في R، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + ...$$

نظرية 2

إذا كانت $f(x,y)$ متصلة في المنطقة المغلقة R حيث أن:

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \quad ; \quad a \leq x \leq b$$

$f_1(x)$ و $f_2(x)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

وبصورة مشابهة تماماً إذا كانت R على الصورة

$$g_1(y) \leq y \leq g_2(y) \quad ; \quad c \leq y \leq d$$

$g_1(y)$ و $g_2(y)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

مثال 1

أوجد أصغر قيمة وأكبر قيمة للتكامل الثنائي: $\iint_R f(x,y)dA$

حيث أن: $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \; ; \; c \leq y \leq d\}$ و $f(x,y) = sin(x-3y)$

الحل

بما أن $-1 \leq sin(x-3y) \leq 1$ ومساحة المنطقة R تكون $A(R) = (b-a)\,(d-c)$ إذن حسب الخاصية (3) نجد أن:

$$-(b-a)(d-c) \leq \iint_R sin(x-3y)dA \leq (b-a)(d-c)$$

2.3 طرق إيجاد التكامل الثنائي (التكامل الجزئي)

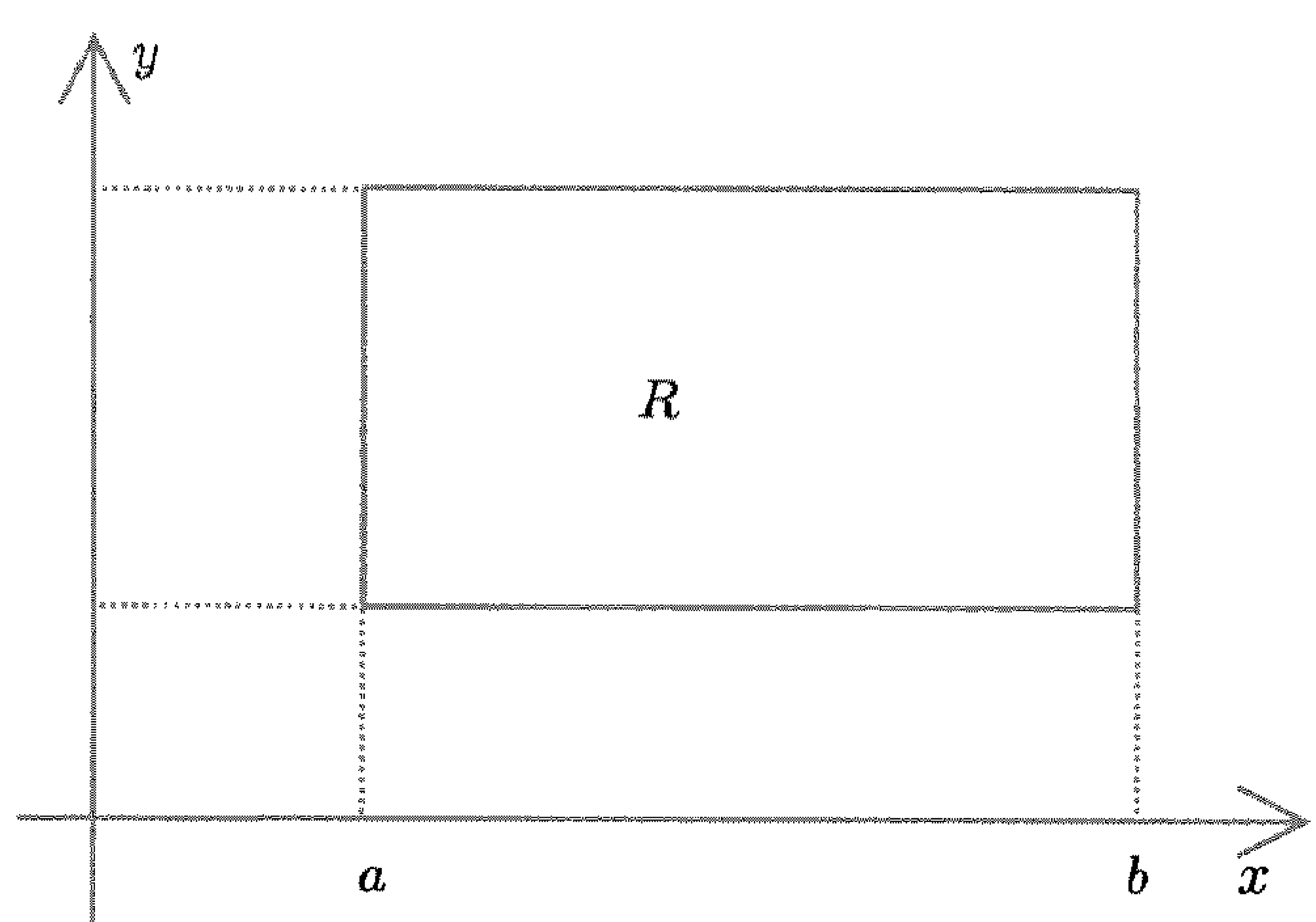
إذا كانت المنطقة R على شكل مستطيل في المستوى xy حيث أن $c \leq y \leq d, a \leq x \leq b$ وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R، فإن التكامل المعتاد بالنسبة للمتغير x هو

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

ويكون الناتج دالة في y فقط ولذلك $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ معرّفة في الفترة $c \leq y \leq d$.

وتكامل الدالة $A(y)$ يمكن أن يحسب كما يأتي:

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$



شكل 10

ويمكن البداية من الناحية الأخرى

$$B(x) = \int_c^d f(x,y)dx$$

وهكذا

$$\int_a^b B(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

تعريف 4

التكامل

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \quad \text{أو} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

يسمى التكامل الجزئي أو التكامل المتكرر للدالة f.

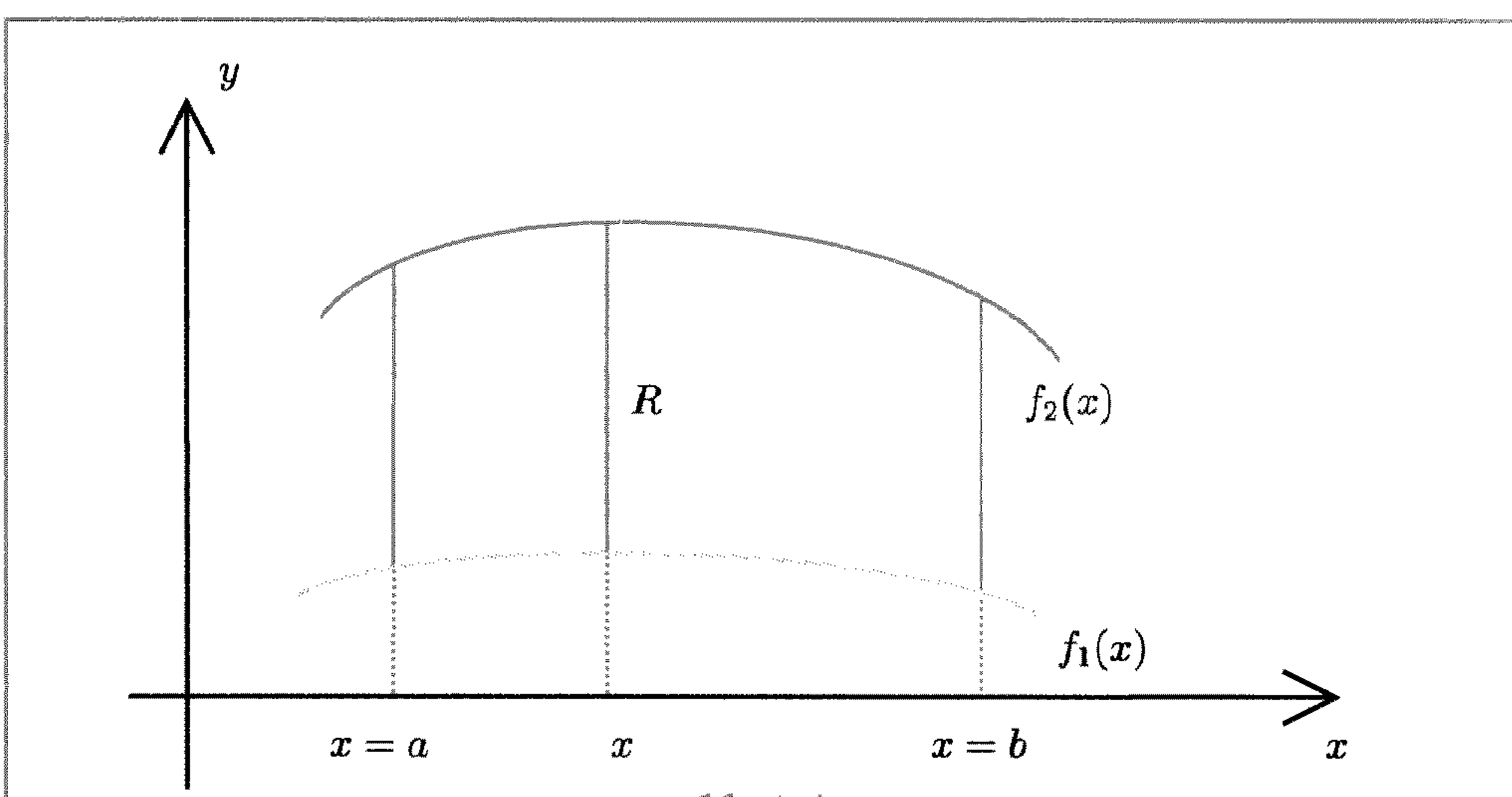
ملاحظة

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$

أو

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx$$

والتكامل الثنائي (الجزئي) يمكن أن يعرف في المنطقة R التي حدودها منحنيان كما هو موضح في الشكل (11).



شكل 11

$$R = \{(x,y)/a \leq x \leq b \ ; \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

وبذلك يمكن تعريف التكامل الثنائي في R كما يلي:

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int\limits_a^b \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

حيث حدود y تكون من أسفل $\big(y=f_1(x)\big)$ إلى أعلى $\big(y=f_2(x)\big)$ وحدود x من اليسار $(x=a)$ إلى اليمين $(x=b)$.

وبصورة عامة يمكن تعريف التكامل الثنائي في المنطقة R كما هو موضح في الشكل (12).

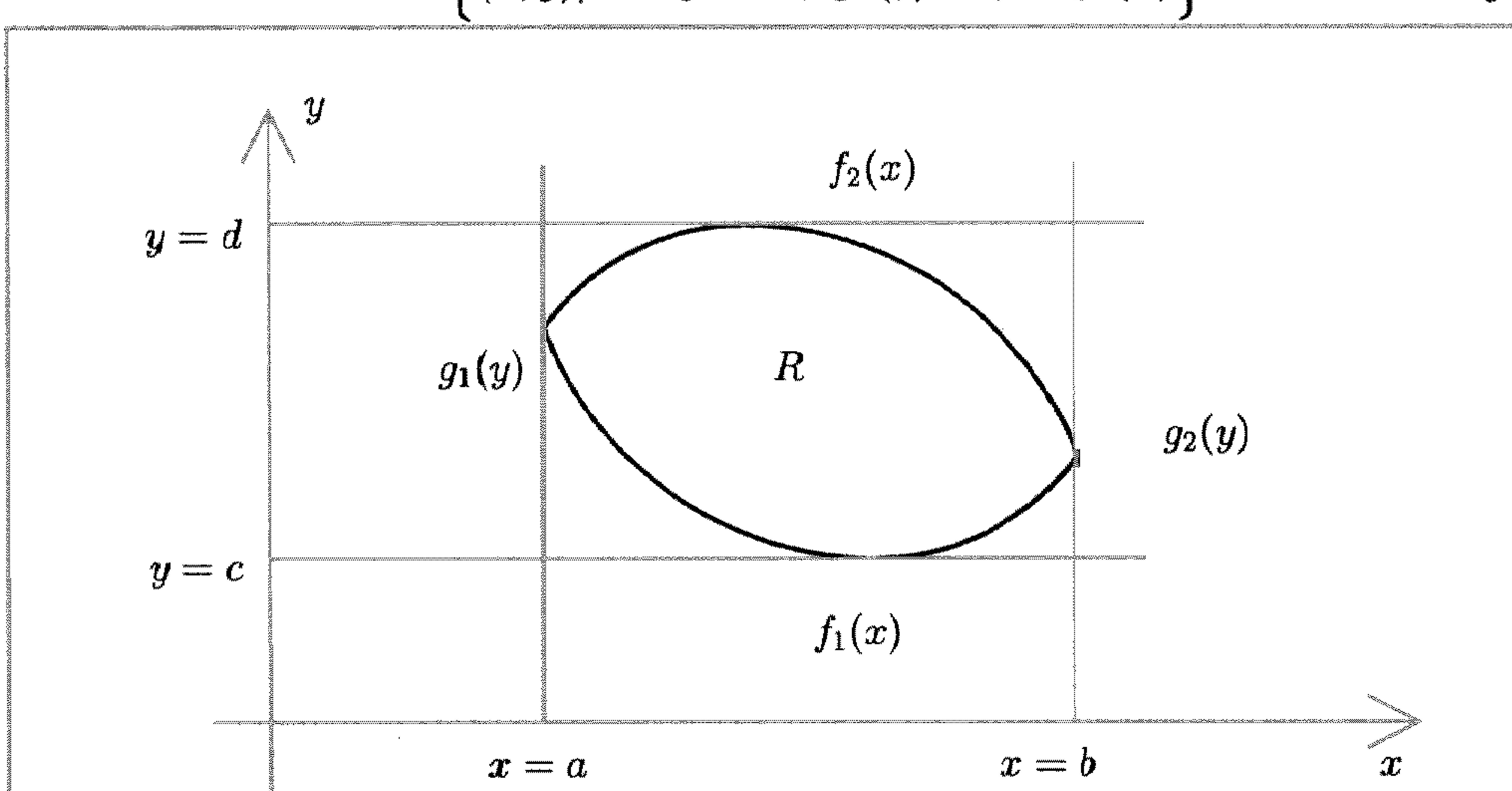
$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int\limits_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

حيث أن: $R = \left\{(x,y)/a \leq x \leq b \ ; \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\right\}$

و

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int\limits_c^d \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\ dy$$

حيث أن: $R = \left\{(x,y)/c \leq y \leq d \ ; \ g_1(y) \leq y \leq g_2(x)\right\}$



شكل 12

ملاحظة

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

مثـــال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z = y + 2y$ وفوق المستطيل R حيث أن:

$$R = \left\{(x,y) : 1 \le x \le 2; 3 \le y \le 5\right\}$$

الحـــل

$$V = \iint_R (x+2y)dA = \int_1^2 \int_3^5 (x+2y)dy\,dx = \int_1^2 (xy+y^2)\Big|_3^5 dx$$

$$= \int_1^2 (2x+16)dx = (x^2+16x)\Big|_1^2 = 19$$

وكذلك يمكن حساب الحجم كما يلي:

$$V = \iint_R (x+2y)dA = \int_3^5 \int_1^2 (x+2y)dx\,dy$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)\Big|_1^2 dy$$

$$= \int_3^5 \left(2y + \frac{3}{2}\right)dy$$

$$= \left(y^2 + \frac{3}{2}y\right)\Big|_3^5 = 19$$

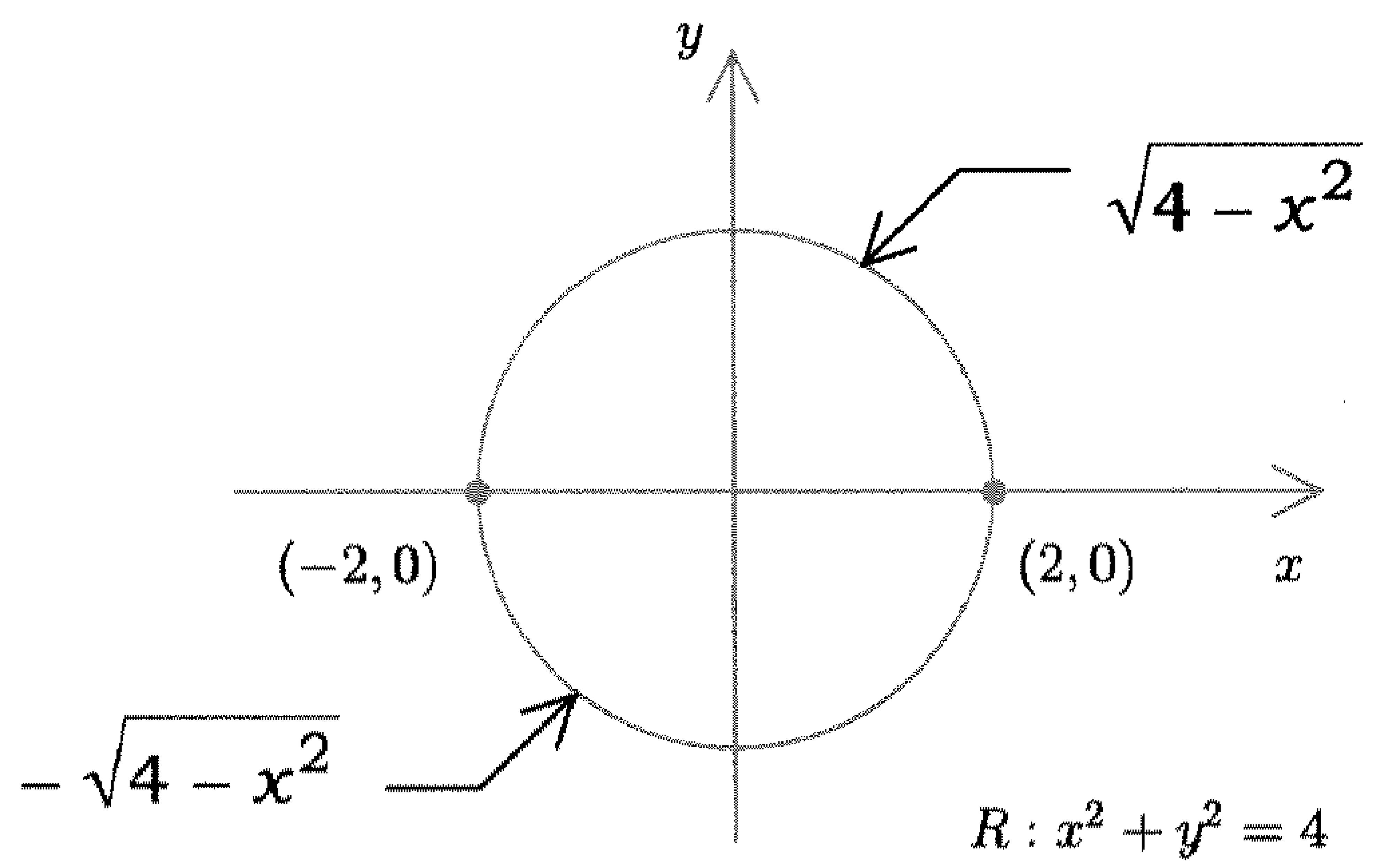
ملاحظة: يمكنك الآن المقارنة مع طريقة الحل المتبعة في البند الأول.

مثـــال 2

أوجد قيمة التكامل الثنائي

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\ dy\ dx$$

وارسم المنطقة R.



شكل 13

الحـــل

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\ dy\ dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}\ y^2\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\Big(4-x^2-(4-x^2)\Big)dx$$

$$= 0$$

حيث أن R دائرة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

مثـــال 3

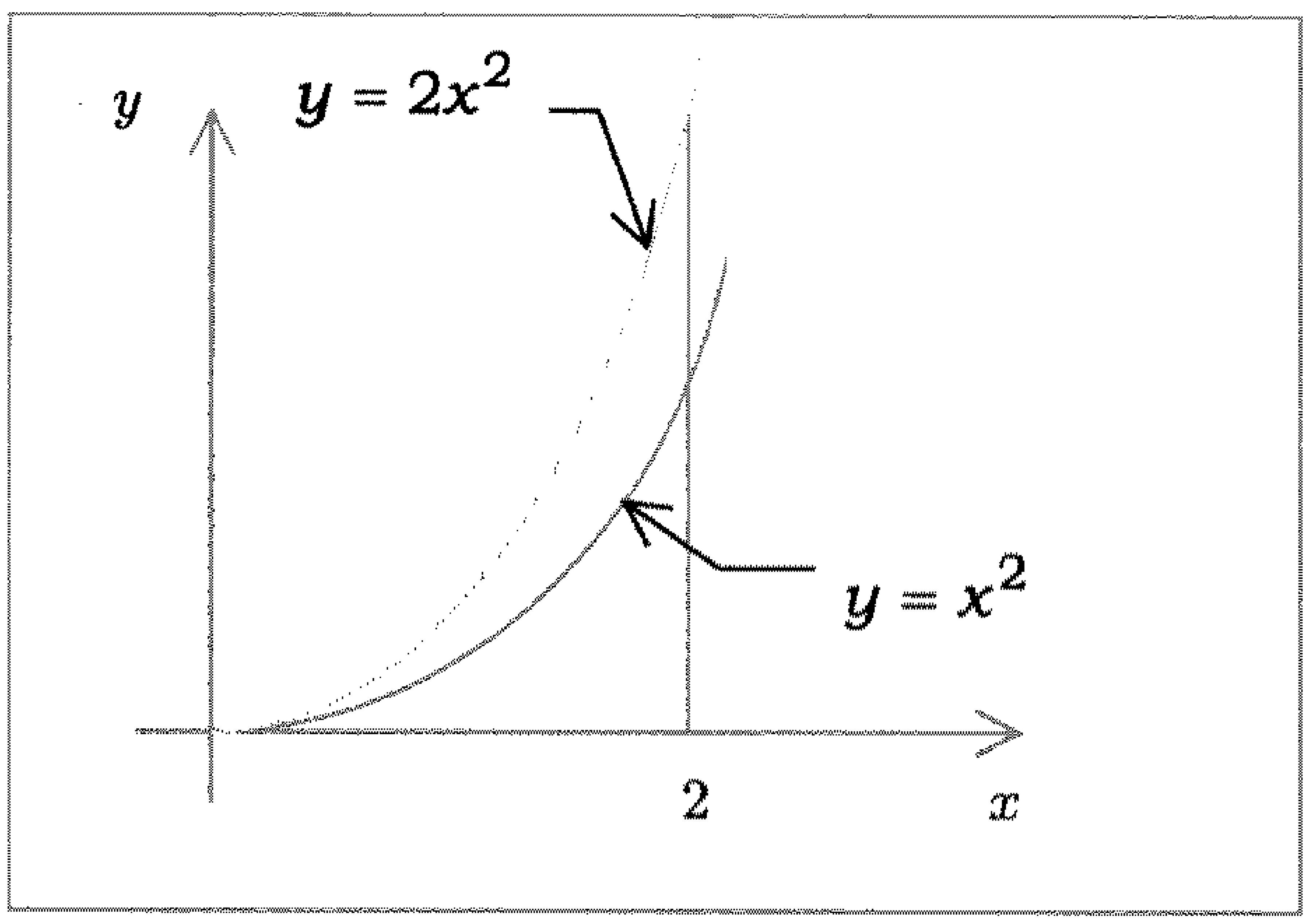
أوجد $\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x^2} x\ cos\ y\ dy\ dx$

وارسم المنطقة R.

الحــل

$$R = \{(x,y)/x^2 \le y \le 2x^2 \ ; \ 0 \le x \le 2$$

كما هو موضح بالرسم:



شكل 14

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x \cos y \, dy \, dx = \int_0^2 x \sin y \Big|_{x^2}^{2x^2} dx \quad ; \quad (x \text{ ثابت})$$

وبالتعويض عن y نجد أن:

$$= \int_0^2 \left(x \sin(2x^2) - x \sin x^2\right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \cos(2x^2) + \frac{1}{2} \cos x^2\right)\Big|_0^2$$

وهكذا

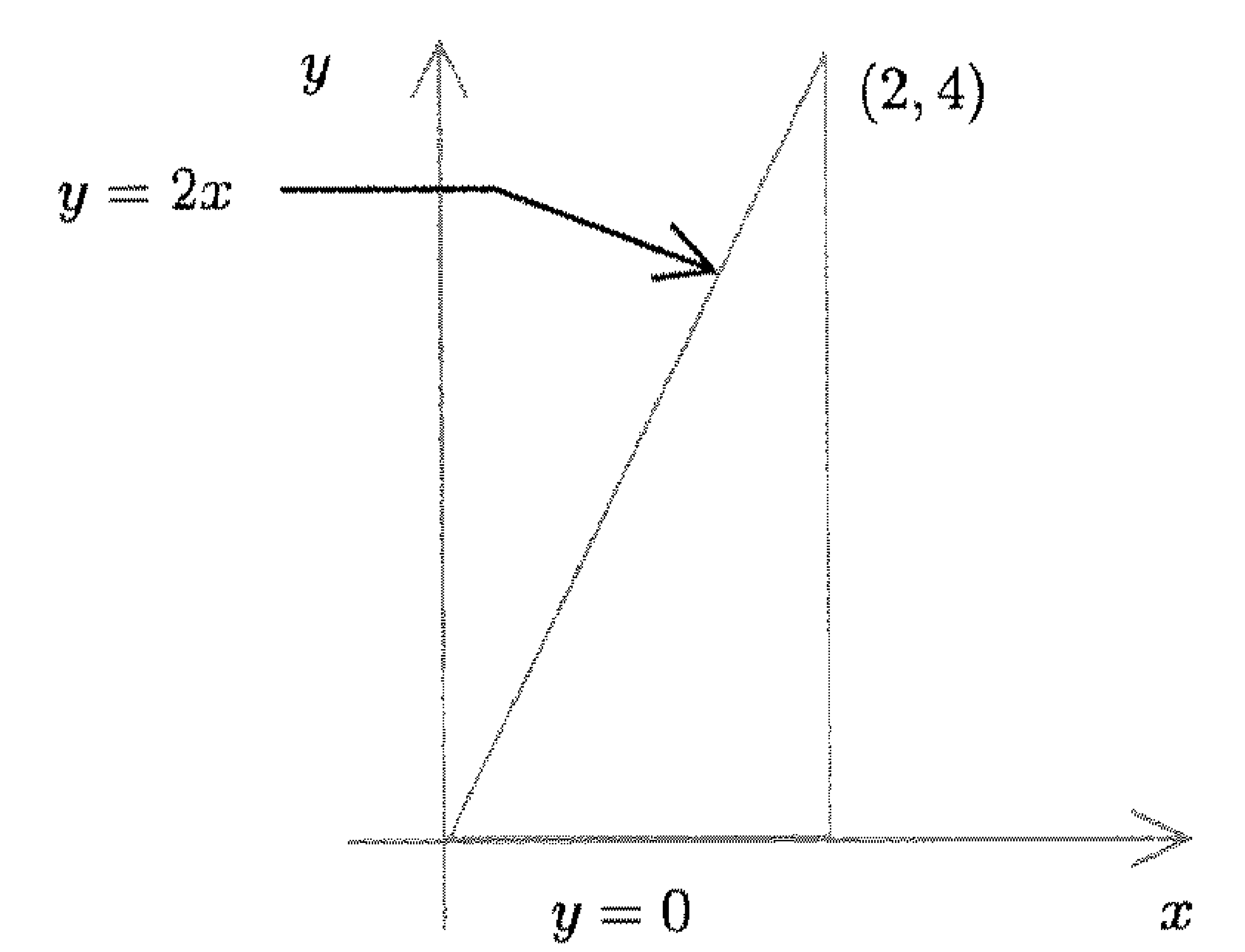
$$= -\frac{1}{4}[\cos(8) - 2\cos(4) + 1]$$

مثـــال 4

أوجد $\iint\limits_R x\,y\,dA$ حيث R المنطقة المغلقة الواقعة بين $y=0$ ، $y=2x$ ، $x=2$

الحـــل

يفضل دائماً رسم المنطقة R قبل وضع حدود التكامل.



شكل 15

واضح من الشكل أنه يمكن إجراء عملية التكامل حسب الترتيب $dydx$ أو $dxdy$.

أولاً إذا اخترنا الترتيب dydx:

$$\iint\limits_R x\ y\ dA = \int_0^2 \int_0^{2x} x\ y\ dy\ dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2} y^2 \Big|_0^{2x} dx = \int_0^2 \frac{x}{2}(4x^2)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2 = 8$$

وإذا اخترنا الترتيب dx dy:

$$\iint_R x\ y\ dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^2 x\ y\ dx\ dy = \int_0^4 \left(2y - \frac{1}{8}y^3\right) dy = 8$$

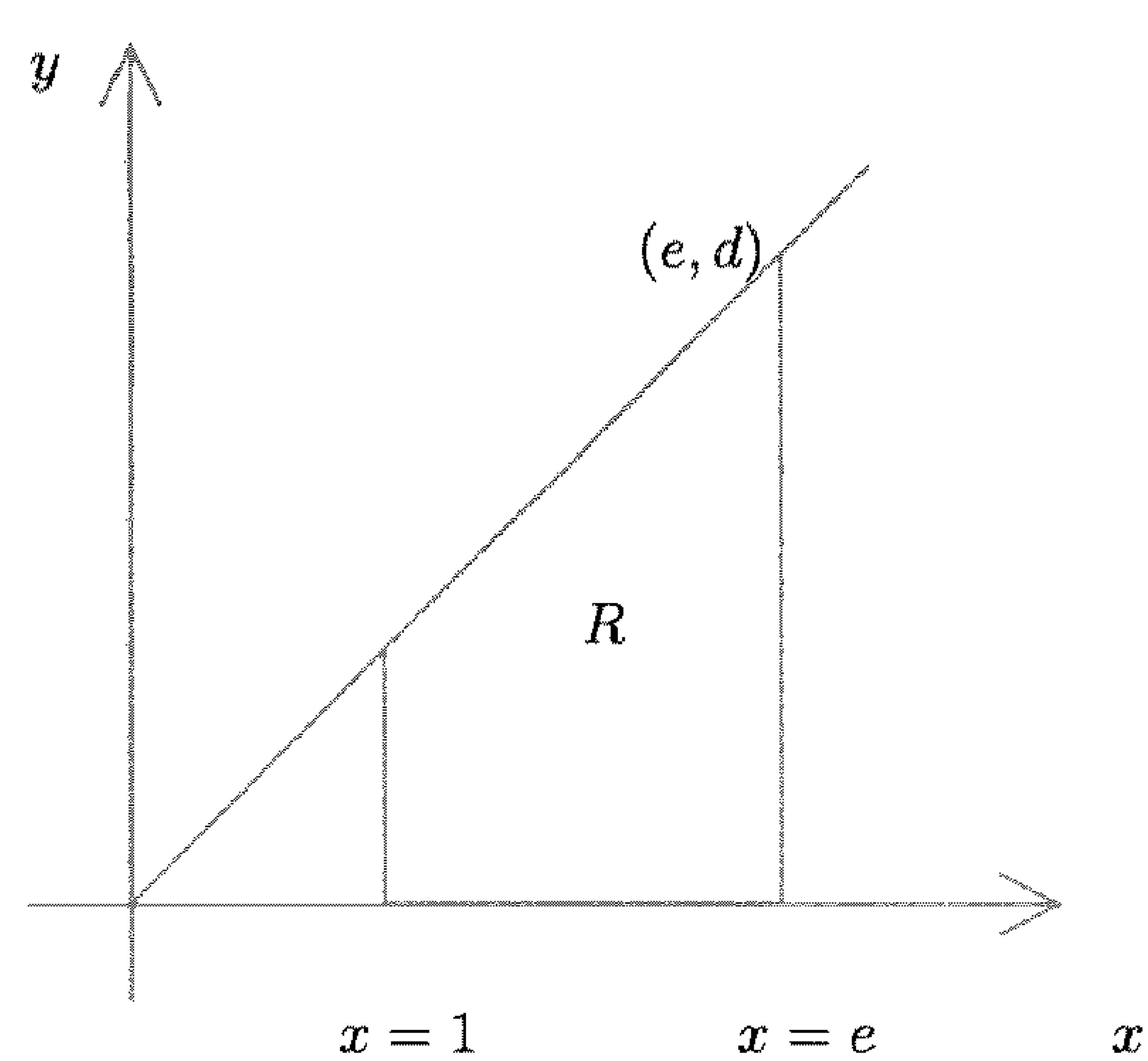
لاحظ تساوي القيمتين.

مثـــال 5

أوجد $\int_1^e \int_0^x ln\ x\ dy\ dx$

الحــل

$$\int_1^e [y\ ln\ x]_0^x dx = \int_1^e x\ ln\ x\ dx$$



شكل 16

ويمكن إيجاد التكامل الأخير كما يأتي:

$$\int_1^2 x\ ln\ x\ dx = \frac{1}{2}\int_1^e ln\ x\ dx^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 ln\ x\Big|_1^e - \int_1^e x^2 d\ ln\ x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \int_1^e x\ dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

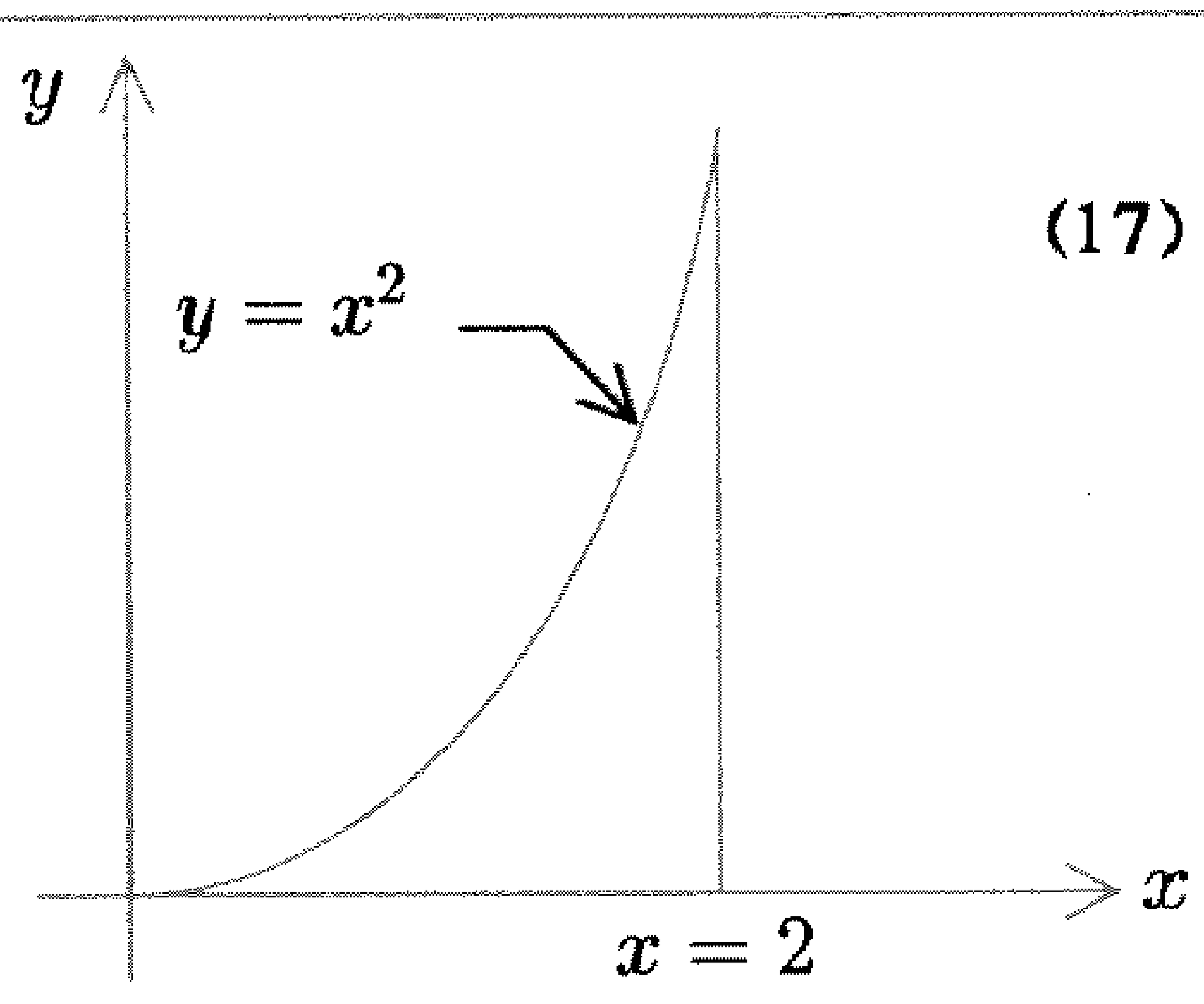
مثـال 6

أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\, cosx^5\, dx\, dy$$

الحـل

لا يمكن إيجاد قيمة التكامل على هذه الصورة ولذلك سنحاول تغيير حدود التكامل، ويفضل دائماً رسم المنطقة R. أنظر الشكل (17).



شكل (17)

من الشكل يتضح أن:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\, cosx^5\ dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} y\, cosx^5\ dy\, dx$$

واضح أنه يمكن إيجاد التكامل في الجانب الأيمن، أي أن:

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} y\, cosx^5\ dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4\, cosx^5\ dx$$

$$= \frac{1}{10} sinx^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{sin\ 32}{10}$$

تمارين

أوجد التكاملات الآتية وارسم المنطقة R في المستوى $x\ y$ في كل حالة:

(1 $\displaystyle\int_2^3 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x^2 - 2xy - 3y^2)dy\, dx$ (2 $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 - xy)dy\, dx$

(3 $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x\, cos\, y\ dy\, dx$ (4 $\displaystyle\int_1^2 \int_1^{x} \frac{x^2}{y^2} dy\, dx$

(5 $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\ dy\, dx$ (6 $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{1} \sqrt{1+y^3} dy\, dx$

(7 $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^{3} sinx^3\ dx\, dy$ (8 $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y} siny\, cos\frac{x}{y} dy\, dx$

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{(y^2)} dy\, dx$$ (9

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^8}} dx\, dy$$ (10

عبّر عن كل تكامل ثنائي كتكامل جزئي ثم أوجد قيمة التكامل:

11) $\iint_R x\, y^2\, dA$ حيث أن R مثلث رؤوسه $(0,0)$, $(3,1)$, $(-2,1)$.

12) $\iint_R e^{\frac{x}{y}}\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $y=4$, $y=-x$, $y=2$.

13) $\iint_R x^3 \cos xy\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $x=2$ ، $y=0$ ، $y=x^2$.

14) بيّن أن:

أ) $$\iint_R dA = \frac{1}{2}$$

حيث أن R المنطقة الواقعة بين رسمي المعادلتين:

$$x = y \quad \text{و} \quad x = y^{\frac{1}{3}}$$

ب) $$\int_{-\infty}^{\infty} Exp(-x^2-y^2) dx\, dy = \pi$$

جـ) $$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \cos\left(\frac{x^2}{3} - x\right) dx\, dy = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\right)$$

4.2 الحجم والمساحة والكتلة والعزم

التكامل الثنائي له تطبيقات متعددة وسنذكر منها ما يلي:

1) الحجم (Volume)

إذا كانت $z = f(x,y)$ تمثل معادلة السطح، فإن:

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dA$$

تعطي حجم المجسم الواقع بين السطح والمستوى $x\ y$

2) المساحة (Area)

إذا كانت $f(x,y) \equiv 1$، فإن

$$A(R) = \iint\limits_R dA$$

حيث أن $A(R)$ تمثل مساحة المنطقة المغلقة R.

3) الكتلة (Mass)

إذا كانت $f(x,y)$ تمثل الكثافة $\left(\dfrac{\Delta m}{\Delta V}\right)$، فإن:

$$M(R) = \iint\limits_R f(x,y)dA$$

حيث أن $M(R)$ كتلة الصفيحة التي على شكل المنطقة R.

4) مركز الكتلة (Center of Mass)

إذا كانت الدالة تمثل الكثافة، فإن مركز الكتلة (x,y) للصفيحة الممثلة بالمنطقة R يعطى بالمعادلتين:

$$M_x = \iint\limits_R y\ f(x,y)dA \quad , \quad M_y = \iint\limits_R x\ f(x,y)dA$$

5) عزم القصور الذاتي (Moment of Inertia)

عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور x ومحور y

$$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dA \quad , \quad I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dA$$

وكذلك عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل:

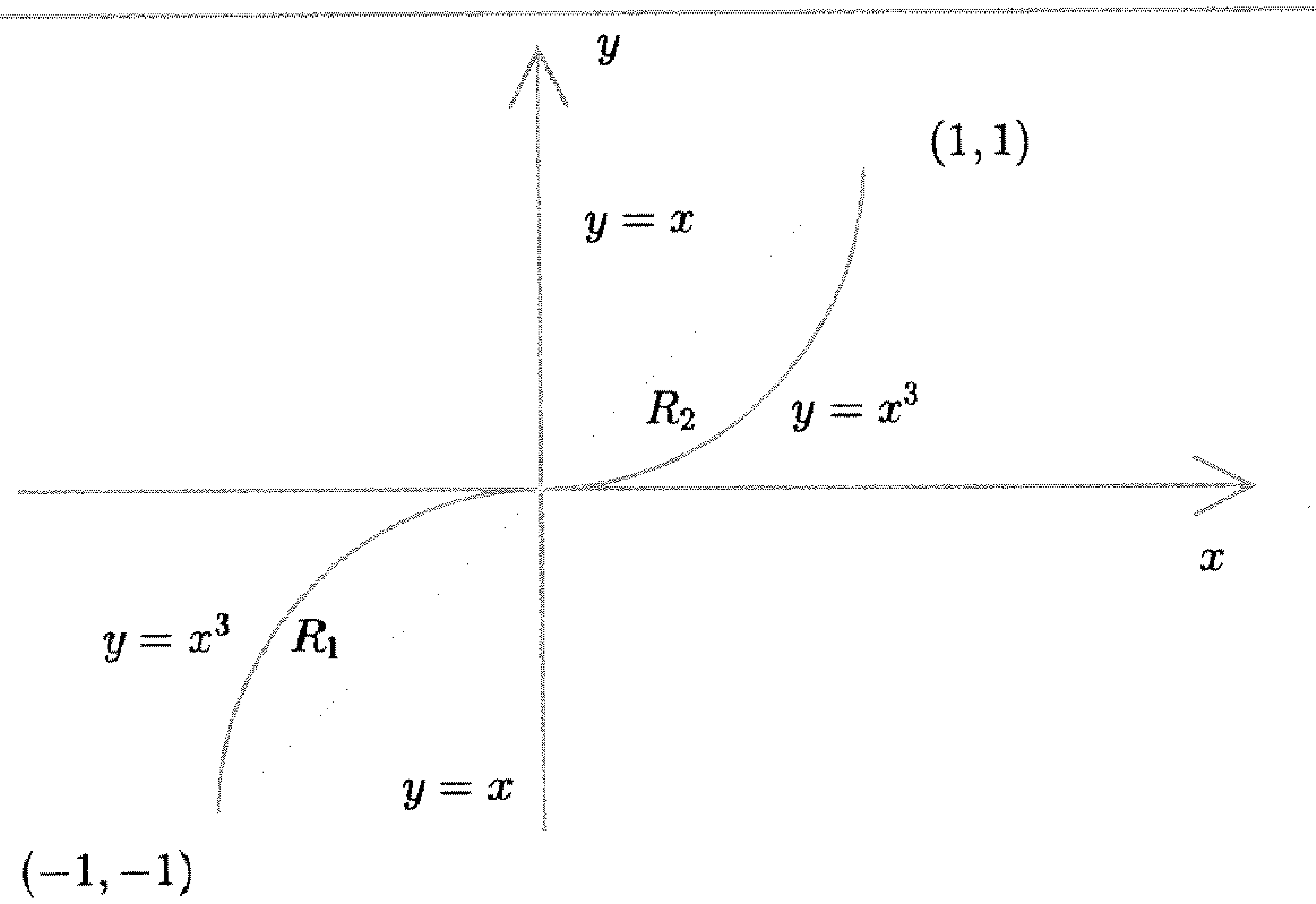
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2+y^2) f(x,y)dA$$

مثال 1

أوجد المساحة الواقعة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$.

الحل

المعادلتان تتقاطعان عند النقاط التالية $(0,0)$، $(1,1)$، $(-1,-1)$ كما هو موضح بالشكل (18).



شكل 18

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

ولذلك
$$A(R)\int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dy\ dx+\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dy\ dx=\frac{1}{2}$$

ونترك تفاصيل إجراء عملية التكامل للقارئ.

مثال 2

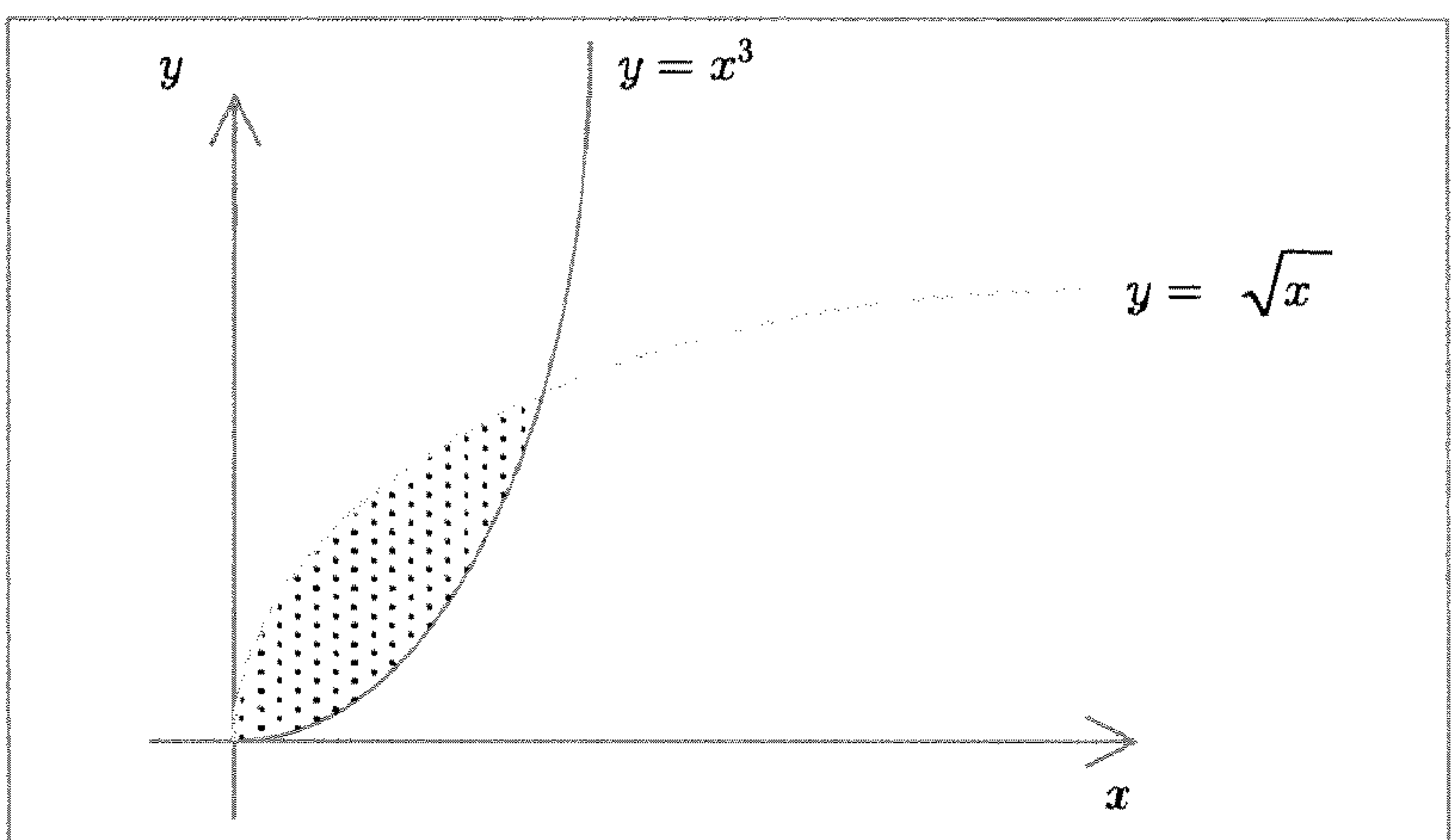
أوجد المساحة المحصورة بين المعادلتين $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$

الحل

المنحنيان يتقاطعان عند النقطتين $(0,0),(1,1)$.

المساحة:

$$\begin{aligned}A(R)&=\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{\sqrt{2}} dy\ dx\\&=\int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx\\&=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{5}{12}\end{aligned}$$



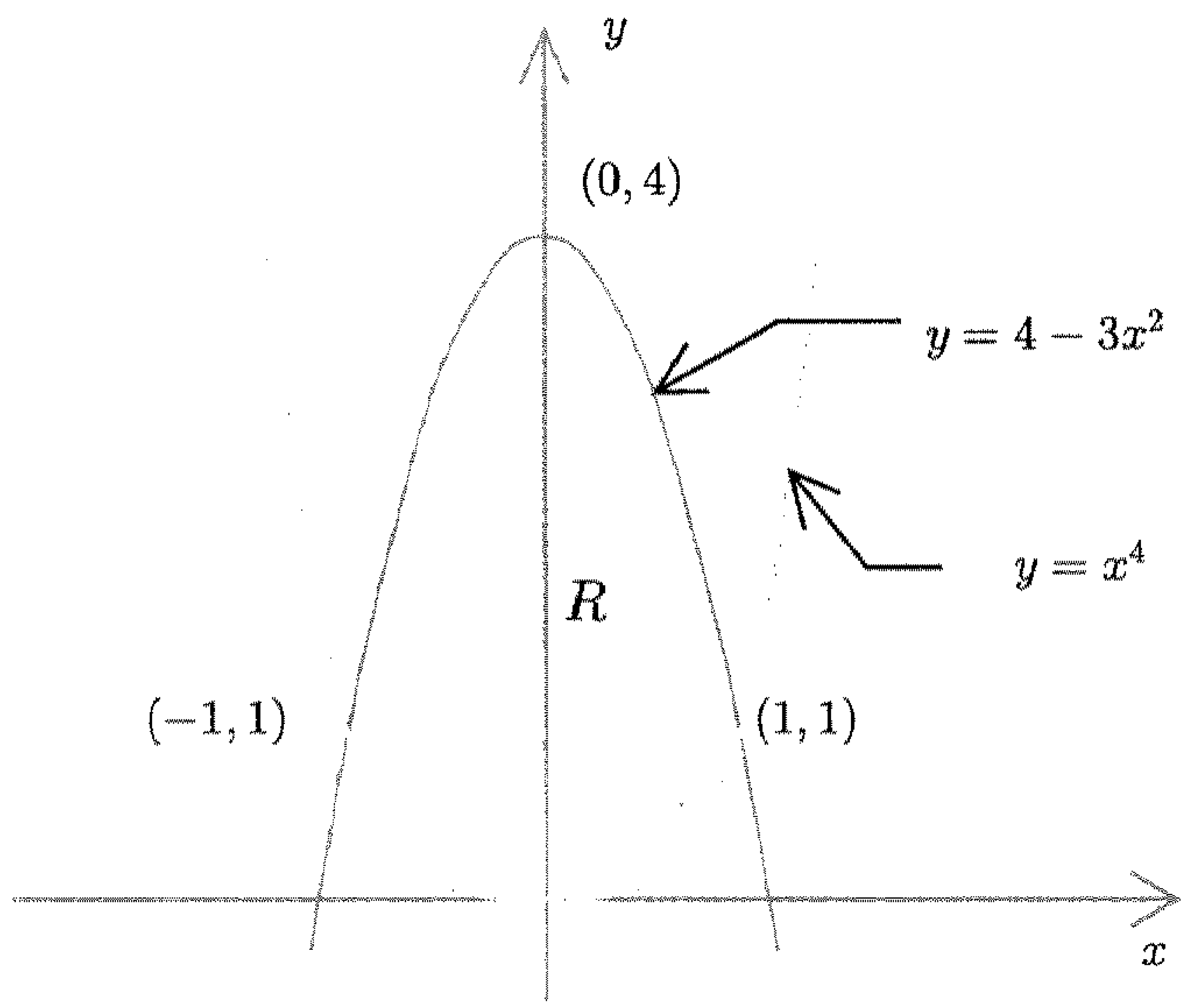
شكل 19

مثــال 3

أوجد مساحة المنطقة R الواقعة بين المنحنيين $y = x^4$ و $y = 4 - 3x^2$

الحــل

يتقاطع المنحنيان عند النقطتين $(1,1)$, $(-1,1)$.



شكل 20

مساحة المنطقة R

$$A(R) = \int_{-1}^{1} \int_{x^4}^{4-3x^2} dy\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (4 - 3x^2 - x^4) dx$$

$$= \left(4x - x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left[\left(4 - 1 - \frac{1}{5}\right) - \left(-4 + 1 + \frac{1}{5}\right)\right] = 6 - \frac{2}{3} = \frac{28}{5}$$

مثـــال 4

أوجد حجم المجسم المحدد بالسطوح التالية:

$$x = 2\ ,\ z = 0\ ,\ y = 0\ ,\ x^2 = y + z$$

الحــل

$$V = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 - y)dy\, dx = \int_0^2 (x^2 y - \frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^4}{2}\ dx = \frac{16}{5}$$

ملاحظة: سنتناول إيجاد حجوم المجسمات بالتفصيل في الفصل الثالث عند دراسة التكامل الثلاثي.

مثـــال 5

صفيحة معدنية لها شكل المنطقة R في المستوى $x\,y$ محددة برسم المعادلتين $x = y^2$ و $x = 4$. أوجد مركز الكتلة إذا كانت الكثافة عند $P(x,y)$ تتناسب طرداً مع المسافة من محور y إلى النقطة P.

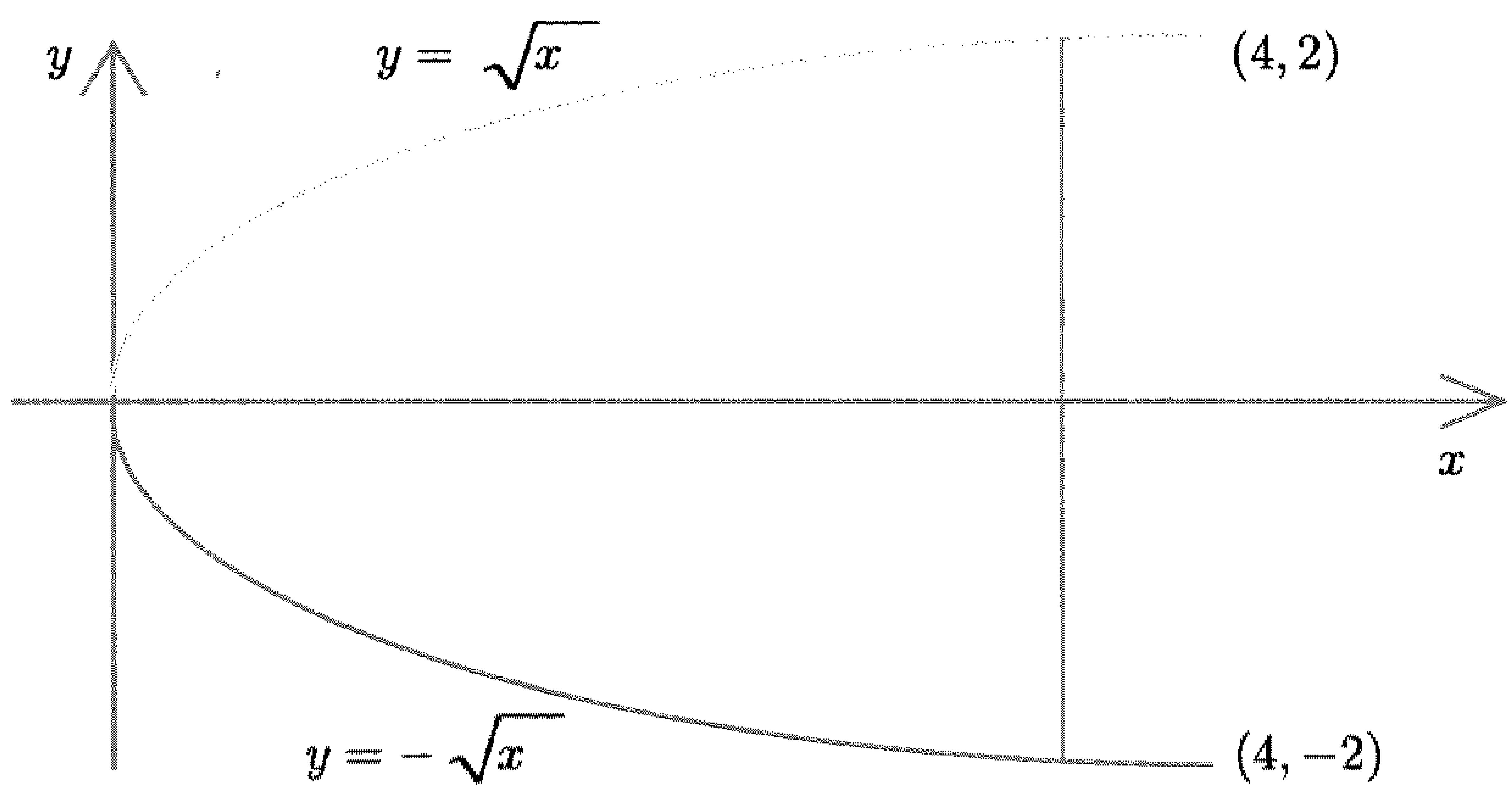
الحــل

من المعطيات $P(x,y) = k\,x$ حيث أن k مقدار ثابت، وحسب التعريف السابق كتلة الصفيحة:

$$M = \iint\limits_R k\,x\,dA$$

$$= k \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x \; dy \; dx$$

$$= 2k \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4k}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 = \frac{128}{5} k$$



شكل 21

عزم الصفيحة بالنسبة للمحور y:

$$M_y = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x(kx) \; dy \; dx$$

$$= 2k \int_0^4 x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{4k}{7}(128) = \frac{512k}{7}$$

ومركز الكتلة

$$x = \frac{M_y}{M} = \frac{512k}{7} \cdot \frac{5}{128k} = \frac{20}{7}$$

يترك تمرين للقارئ أن يبين $y = 0$، وهكذا

$$(x, y) = \left(\frac{20}{7}, 0\right)$$

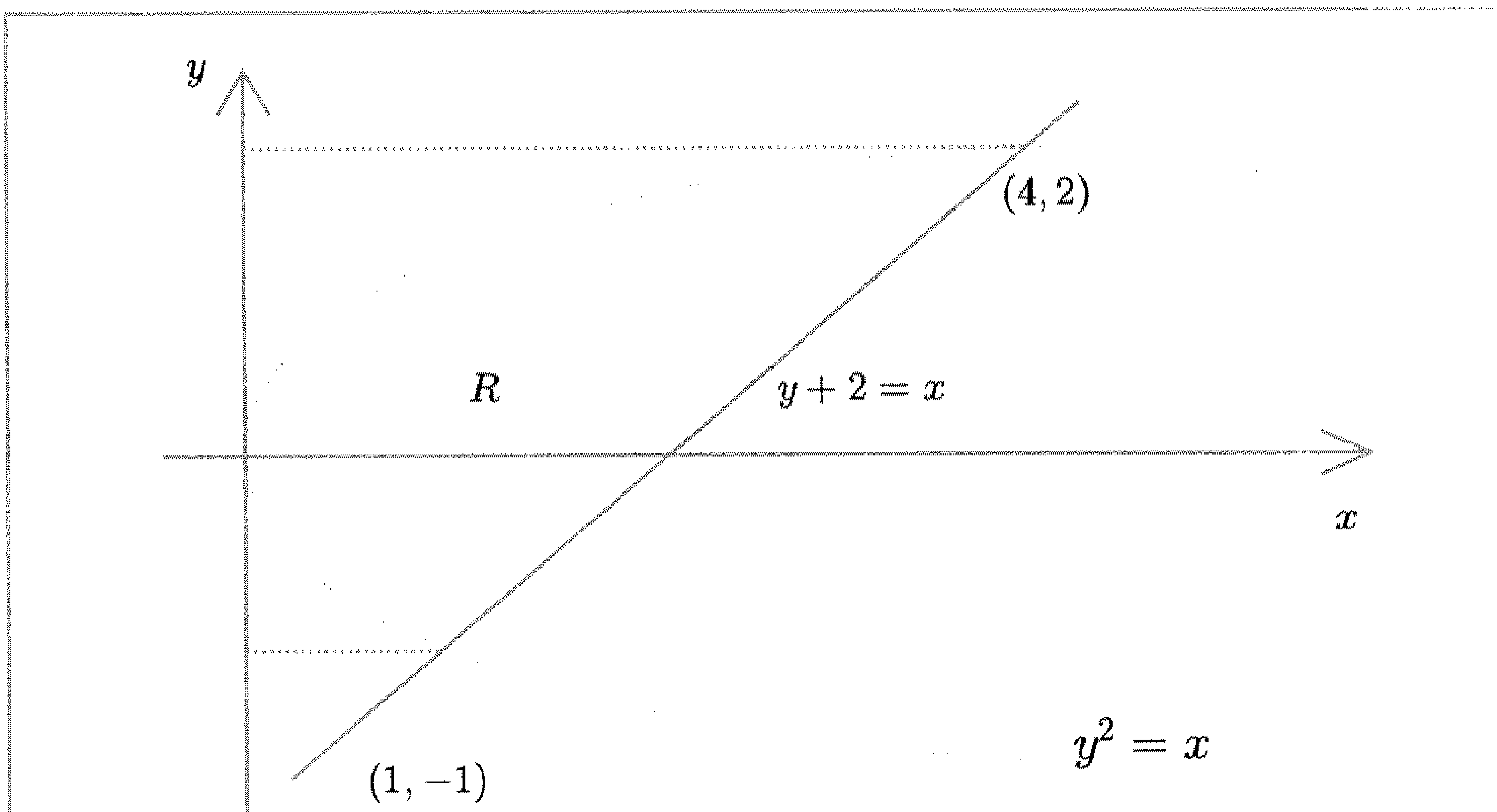
مثـــال 6

أوجد كتلة المنطقة R المحددة بـ $y^2 = x$ و $x = y + 2$ حيث أن الكثافة تعطى بالمعادلة التالية: $P = x^2\, y^2$

الحـــل

من السهل أن نوضح أن المنحنيين يتقاطعان عند النقطتين $(1,-1)$, $(2,4)$.

الكتلة: $$M(R) = \iint\limits_R P(x,y)\, dA$$



شكل 22

واضح من الشكل أن:

$$M(R) = \int_1^2 \int_{y^2}^{y+2} x^2\, y^2\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} y^2\, x^3 \Big|_{y^2}^{y+2} dx$$

وبالتعويض عن y وتجميع الحدود المتشابهة:

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{6} y^6 - \frac{1}{9} y^9 + \frac{6}{5} y^5 + 3y^4 + \frac{8}{3} y^3 \right] \Big|_{-1}^{2} = 20.7$$

مثــال 7

صفيحة معدنية مستوية على شكل مثلث محددة بالمستقيمين $y = x$ و $y = 2 - x$، ومحور x، كثافتها تعطى بالمعادلة التالية:

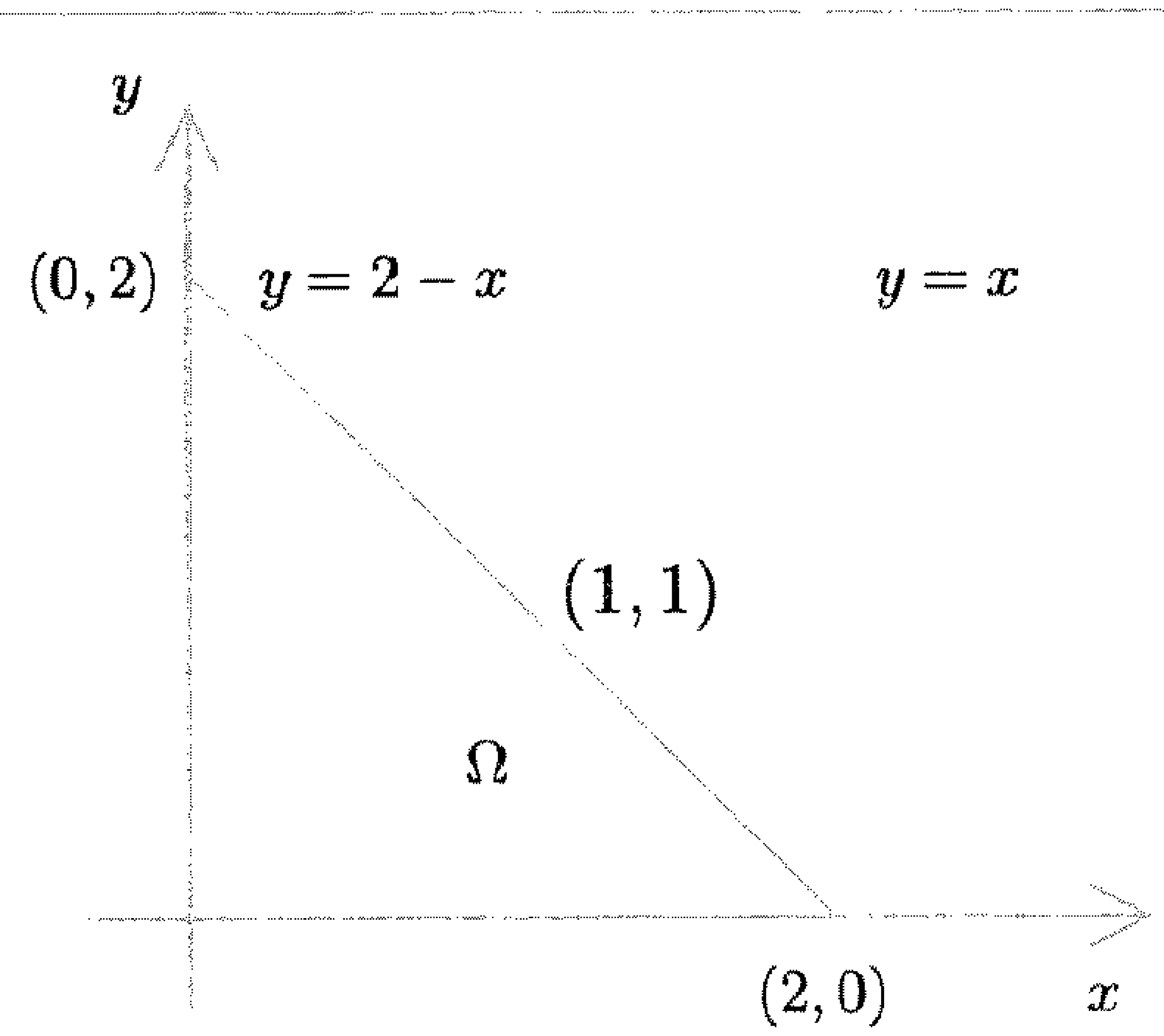
$$P(x,y) = 1 + 2x + y$$

المسافة مقيسة بالأمتار، والكتلة بالكيلوجرام، أوجد الكتلة، ومركز الكتلة للصفيحة.

الحــل

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} P(x,y)dA \\ &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (1 + 2x + y)dx\ dy \\ &= \int_0^1 (x + x^2 + xy)\Big|_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 (6 - 4y - 2y^2)dy = \frac{10}{3} kg \end{aligned}$$

ويترك للقارئ أن يبين: (x,y) = (1.1, 0.35)



شكل 23

تمارين

أوجد المسافة المحددة بالمعادلات أو المتباينات المذكورة وارسم المنطقة R في كل حالة:

1) $y = x$ ، $y = 3x$ ، $x + 4 = 4$

2) $y = 1$, $y = 0$, $y = ln|x|$

3) $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$

4) $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$, $y^2 = -x$

5) $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$

6) $x - y + 1 = 0$, $7x - y - 17 = 0$, $2x + y + 2 = 0$

7) $y = e^x$, $y = sin\ x$, $x = -\pi$, $x = \pi$

8) $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

9) $x = y^2$, $x = 32 - y^2$

10) $x = 2$, $x = y^2$, $x = 4y^2 - 3$

11) $y = cosh\ x$, $y = sinh\ x$ في الفترة $[-1,1]$.

أوجد كتلة المنطقة R في الحالات الآتية

12) المنطقة R داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 46$ حيث أن $P(x, y) = x^2 + y^2$

13) المنطقة R محددة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y^2 = x$ حيث أن $P = 3y$

14) المنطقة R محددة بالمستطيل الذي رؤوسه $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$ حيث أن:

$$P = \frac{3x}{1 + x^2y^2}$$

أوجد حجم المجسمات $V(S)$ المذكور في الحالات التالية:

15) المجسم S محدد بالمعادلة التالية:

$$x + y + z = 3\ ,\ y = 0\ ,\ x^2 + z^2 = 4$$

16) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$y = x - \frac{3}{2}\ ,\ y^2 + z^2 = 2x$$

17) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$z^2 = 4 - y\ ,\ y = x^2$$

5.2 تغيير المتغيرات في التكامل

نظرية 3

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الأقل في $x_1 \le x \le x_2$ و $x = x(u)$ معرفة في $u_1 \le u \le u_2$ ومشتقتها الأولى متصلة مع $x_1 = x(u_1)$ و $x_2 = x(u_2)$ و $f[x(u)]$ متصلة في $u_1 \le u \le u_2$ فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)] \frac{dx}{du} du \qquad (1)$$

البرهان

إذا كانت $F(x)$ تكاملاً غير محدد أو لانهائياً للدالة $f(x)$، فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1) \qquad (1)$$

ولكن $F[x\ (u)]$ تكون تكاملاً لانهائياً للدالة $f[x(u)] \dfrac{dx}{du}$

وبتطبيق قاعدة السلسلة:

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}\ \frac{dx}{du} = f(x) \frac{dx}{du} = f[x(u)] \frac{dx}{du} \qquad (2)$$

وبتكامل طرفي المعادلة (2) نجد أن:

$$F[x(u_2)] - F[x(u_1)] = F(x_2) - F(x_1) = \int_{u_1}^{u_2} f[x, u] \frac{dx}{du} \qquad (3)$$

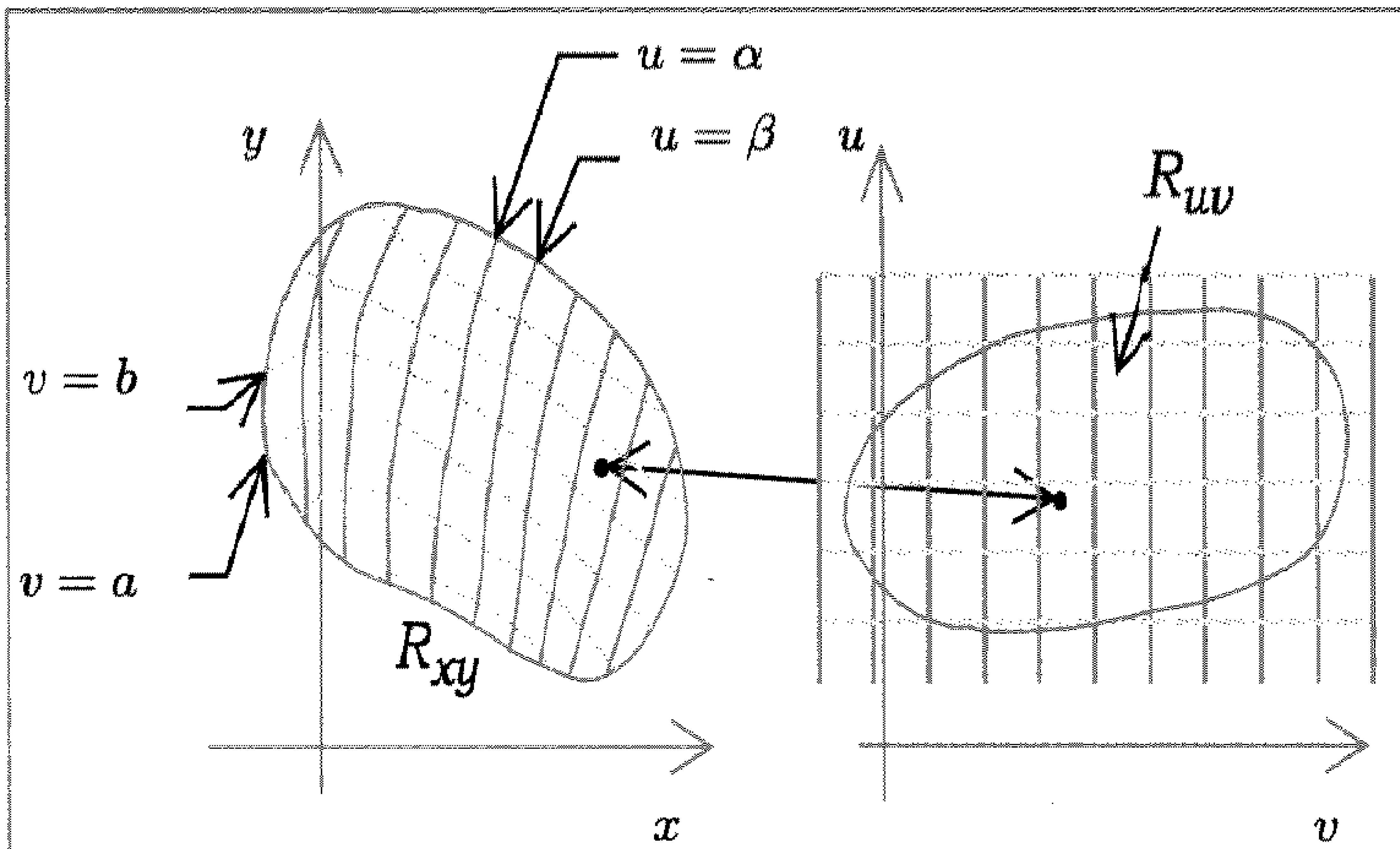
من (1) و(3) يكتمل البرهان.

نظرية 4

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R_{xy}، وإذا كانت الدالتان $x=x(u,v)$ و $y=y(u,v)$ معرفتين ولهما مشتقات أولية متصلة في R_{uv}، وإذا كانت الدالتان العكسيتان $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ معرفتين ومتصلتين في R_{xy} حيث أن $f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]$ متصلة في R_{uv}، فإن:

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

المعادلتان $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ يمكن اعتبارهما كمقدمة للإحداثيات الخطية المنحنية في المستوى $x\,y$ كما هو موضح في الشكل (24a).



شكل (24a) شكل (24b)

المستقيمات ($u=$ مقدار ثابت) و($v=$ مقدار ثابت) تكون نظام منحنيات موازية للمحورين ومن الطبيعي استخدامهما لتقسيم المنطقة R_{uv} إلى عناصر أو جزيئات من المساحة ΔA لتكوين التكامل الثنائي، وعند اعتبار العناصر الخطية

المنحنية، الحجم (تحت السطح $z = f(x,y)$) يقدر بـ $f(x,y)\Delta A$ حيث ΔA ترمز إلى أحد العناصر الخطية المنحنية.

إذا أمكن التعبير عن ΔA بـ $J\Delta u\ \Delta v$ والدالة $f(x,y)$ بـ $f((x(u)\ ,\ y(v))$ فإن:

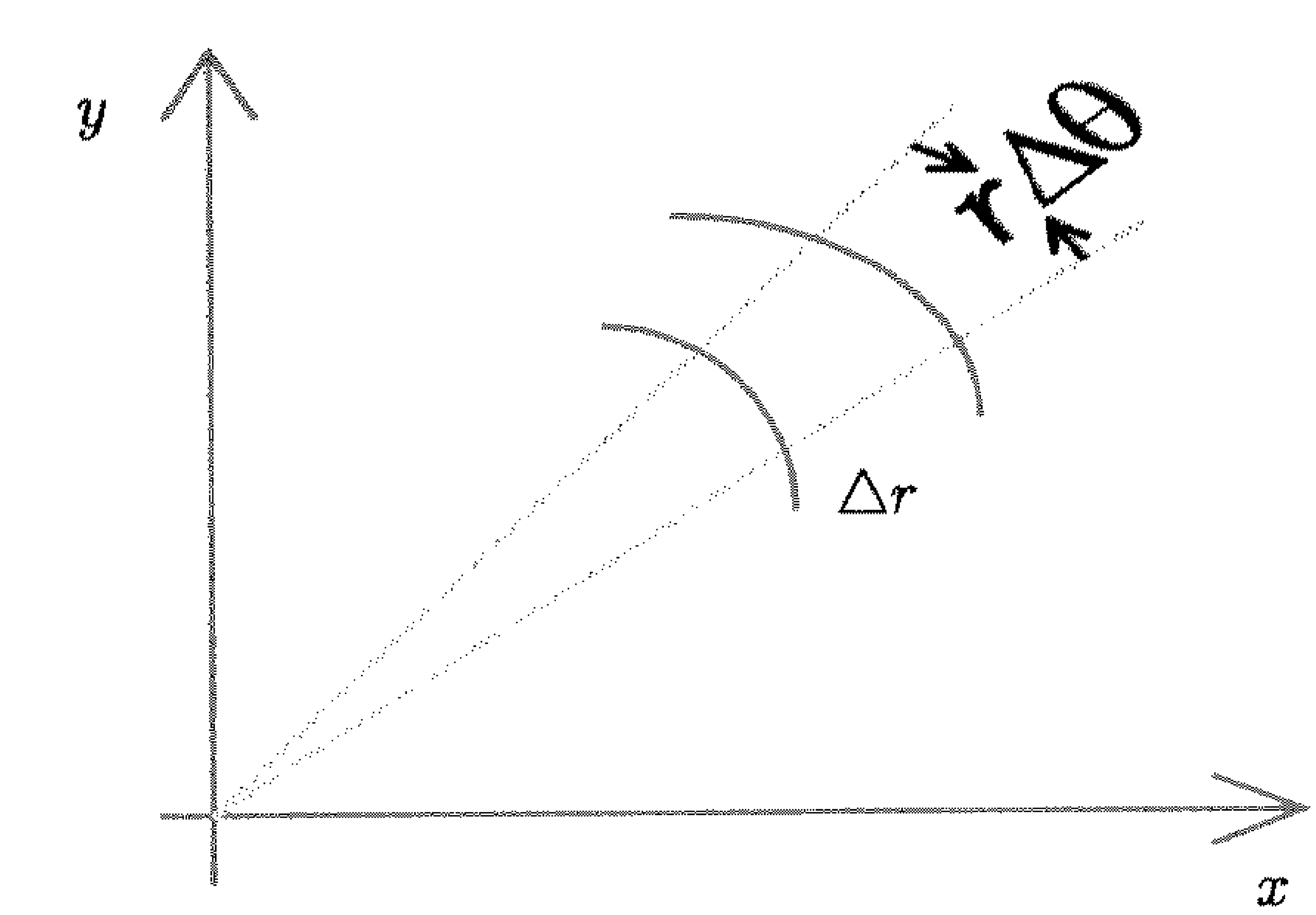
$$\sum_i f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]J\Delta u\ \Delta v = \iint\limits_{R_{uv}} f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]Jdu\ dv$$

حيث أن $J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

العدد J (الجاكوبي) يمكن تفسيره بـ $\dfrac{\Delta\ A_{xy}}{\Delta\ A_{uv}}$ حيث أن $\Delta\ A_{xy}$ و $\Delta\ A_{uv}$ عنصرا المساحة في المستويين $x\ y$ و $u\ v$ على التوالي.

والإحداثيات القطبية تعتبر مثالاً للإحداثيات الخطية المنحنية.

$$y = r\ sin\ \theta\quad ,\quad x = r\ cos\ \theta$$



شكل 25

عنصر المساحة بالإحداثيات القطبية

عنصر المساحة تقريباً مستطيل جوانبه Δr و$r\Delta\theta$ كما هو موضح في الشكل (25)، ولذلك يمكن التعبير عن التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dx\ dy = \iint\limits_{R_{r\theta}} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rd\theta dr$$

لاحظ أن الجاكوبي في هذه الحالة:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} cos\theta & -r\ sin\theta \\ sin\ \theta & r\ cos\ \theta \end{vmatrix} = r$$

وإذا كانت المنطقة $R_{r\theta}$ محددة بـ $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\ ,\ \alpha \le \theta \le \beta$، فإن:

$$\iint\limits_{R_r} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rd\ \theta\ d\theta\ = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ \sin\ \theta)rd\ rd\theta$$

وفي بعض المسائل يكون من السهل إيجاد التكامل حسب الترتيب $d\theta\ dr$ فإذا كانت R محددة بـ $\theta_1(r) \le \theta \le \theta_2(r)\ ,\ a \le r \le b$، فإن:

$$\iint\limits_{R_{r\theta}} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rdrd\theta = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rd\theta dr$$

مثال 1

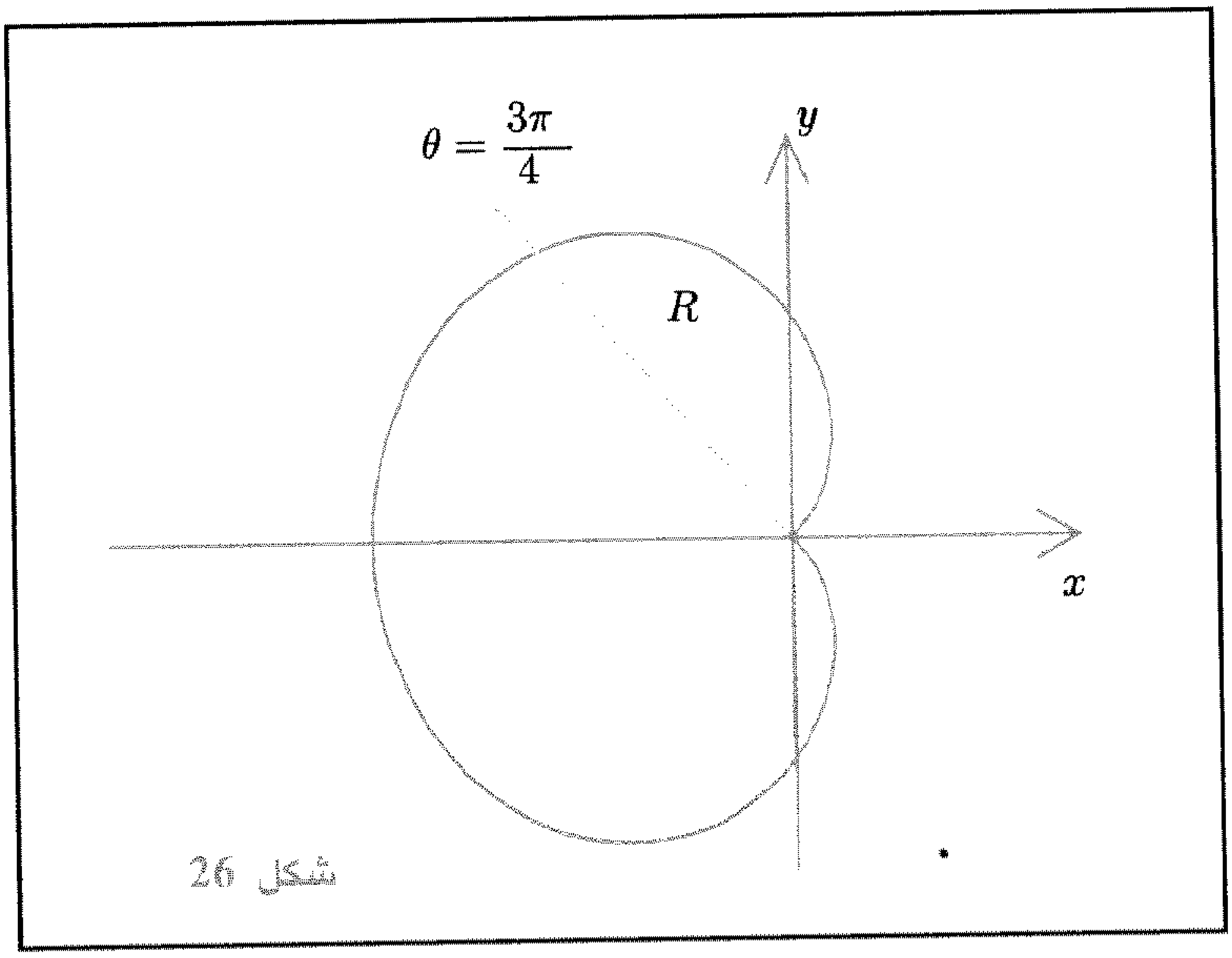
أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمستقيم $y = -x$ والمنحنى

$$x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2} - 3x$$

الحل

نستخدم الإحداثيات القطبية لوصف المنطقة R.

المنحنى $r^2 = 3r - 3rcos\ \theta$ أو $r = 3(1 - cos\ \theta)$، وهي تمثل معادلة قلب، والمعادلة القطبية للمستقيم $y = -x$ هي $\theta = \frac{3\pi}{4}$



شكل 26

من الرسم نلاحظ أن المنطقة محددة بـ

$$0 \le r \le 3(1 - \cos\,\theta) \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$$

مساحة المنطقة R:

$$A(R) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{3(1-\cos\theta)} r\ dr\ d\theta$$

$$= 4.5 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos\,\theta)^2 d\theta$$

$$= 4.5 \left[\frac{3\theta}{2} - 2\,\sin\,\theta + \frac{1}{4}\sin\,2\theta\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 4.5\left[\frac{9\pi}{8} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right] = 8.4153516$$

مثال 2

إذا كانت R المنطقة المحددة: $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$ فأوجد:

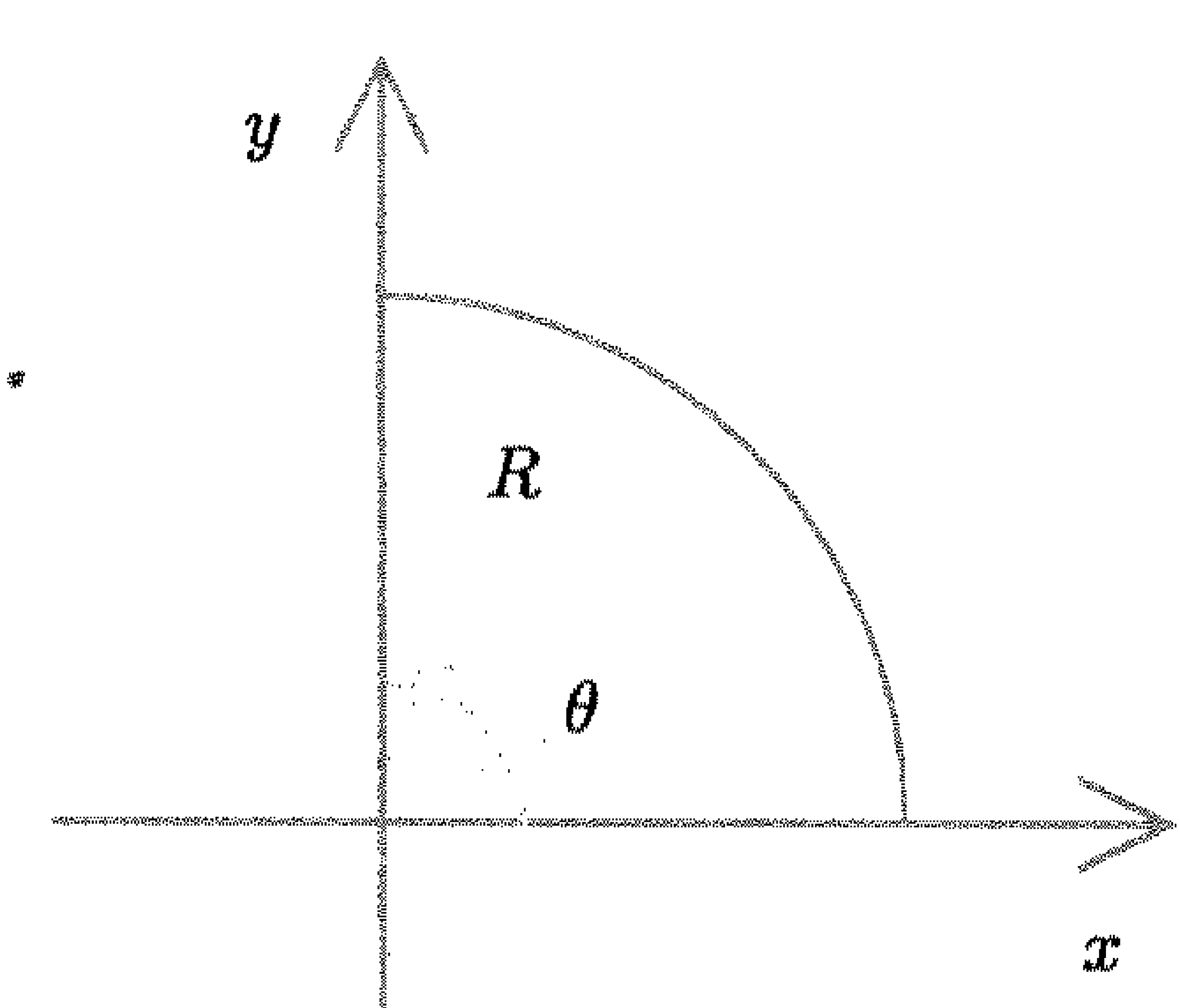
1 ـ مساحة المنطقة R

2 ـ قيمة التكامل $\iint_R \sin(x^2 + y^2)dA$

الحــل

المنطقة R عبارة عن ربع دائرة نصف قطرها 1 كما هو موضح بالرسم.

إذن مساحة المنطقة R هي $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$



شكل 27

من الرسم نلاحظ أن النقطة R محددة كما يلي:

$$0 \le r \le 1 \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

ومن الممكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل الثنائي:

$$A(R) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, d\theta\, dr = \int_0^1 \frac{\pi}{2} r\, dr$$

$$= \left.\frac{\pi r^2}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

هل يمكن إيجاد المساحة باستخدام الإحداثيات الديكارتية؟

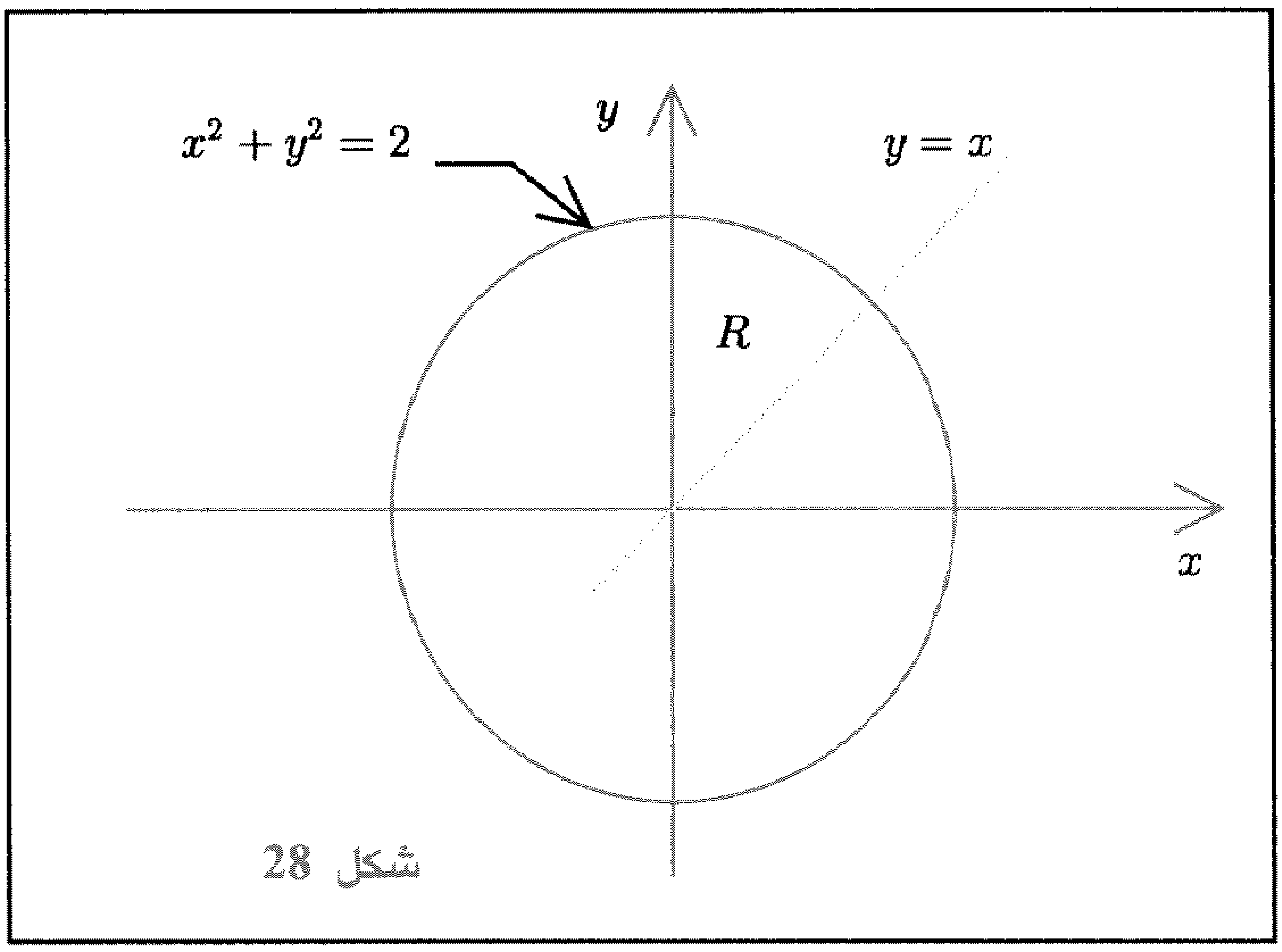
لاحظ أن:
$$\iint_R sin(x^2+y^2)dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} sin(x^2+y^2)dx\,dy$$

التكامل لا يمكن إيجاده على الصورة السابقة حتى لو تم تغيير ترتيب التكامل، أي $(dy\,dx)$، ولذلك سنستخدم الإحداثيات القطبية (تغيير المتغيرات).

ومن الرسم أيضاً:
$$\begin{aligned}\iint_R sin(x^2+y^2)dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 sin(r^2)r\,dr\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(r^2)\Big|_0^1 \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2}(cos(1)-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}(1-cos(1)) = 0.361045724\end{aligned}$$

مثـــال 3

أوجد قيمة التكامل $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\,dy$



شكل 28

ويتضح من الرسم أن مساحة المنطقة R

$$=\frac{1}{8}\pi\, r^2=\frac{\pi}{4}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\, dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\, d\theta$$

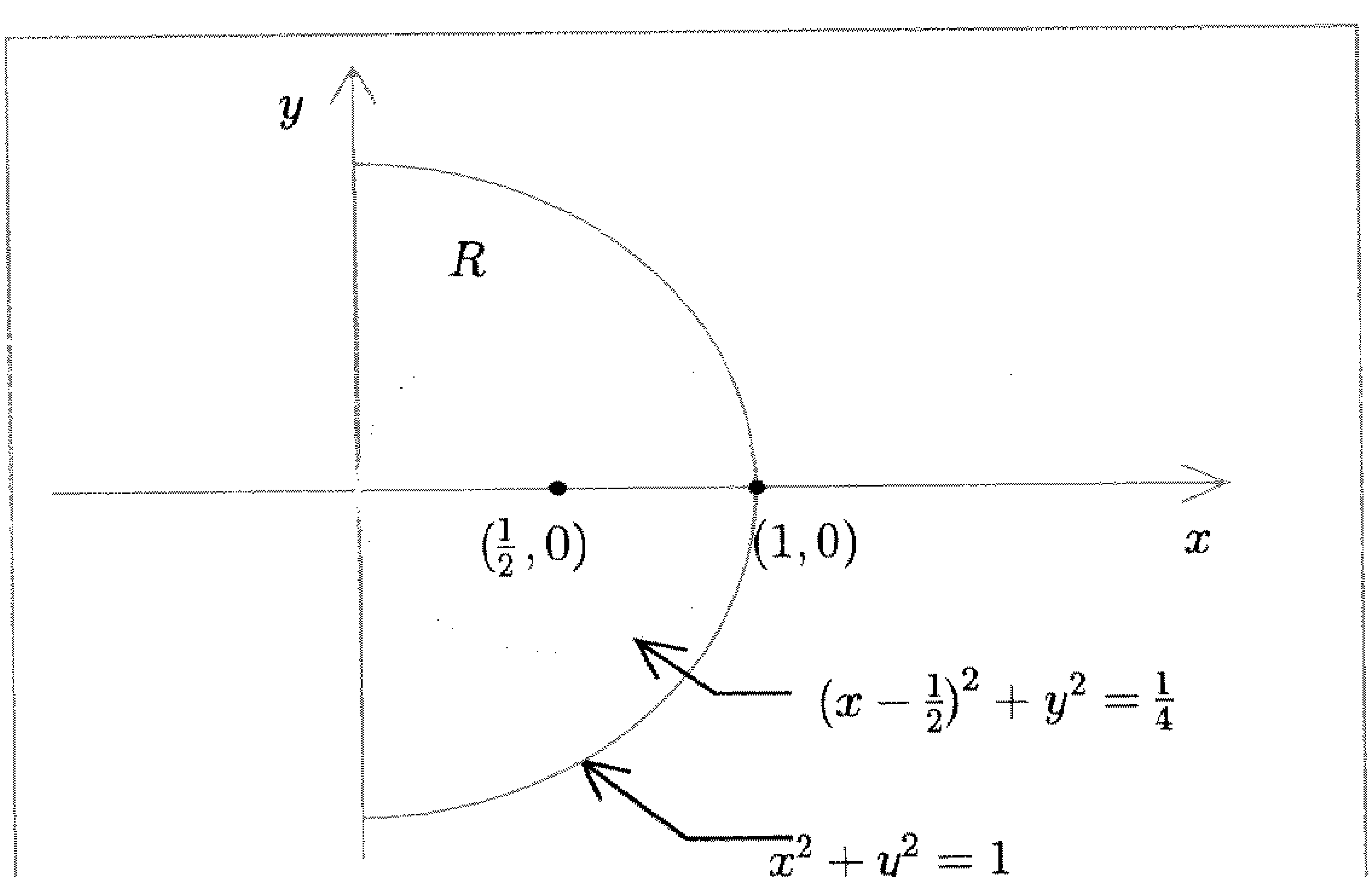
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

مثـــال 4

أوجد قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$

الحـــل

المنطقة R محددة بما يلي $\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\;,\quad 0\le x\le 1$



شكل 29

ولذلك $y=\sqrt{x-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=x$ أو $y^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

وكذلك $y=\sqrt{1-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=1$

لاحظ أن نصف قطر الدائرة الصغيرة $r_1=\frac{1}{2}$ ونصف قطر الدائرة الكبيرة $r_2=1$ ولذلك فإن مساحة المنطقة R هي:

$$A(R)=\frac{1}{4}\pi r_2^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2$$

$$=\frac{1}{4}\pi(r_2^2-2r_1^2)=\frac{\pi}{8}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$A(R)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{cos\ \theta}^{1} 6\ dr\ d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2\theta)d\theta$$

ولكن $1-cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-cos\ 2\theta)$

إذن $A(R)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos\ 2\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}$

مثال 5

أوجد مساحة المنطقة R حيث R تقع داخل المنحنى $r=1+cos\ \theta$

الحل

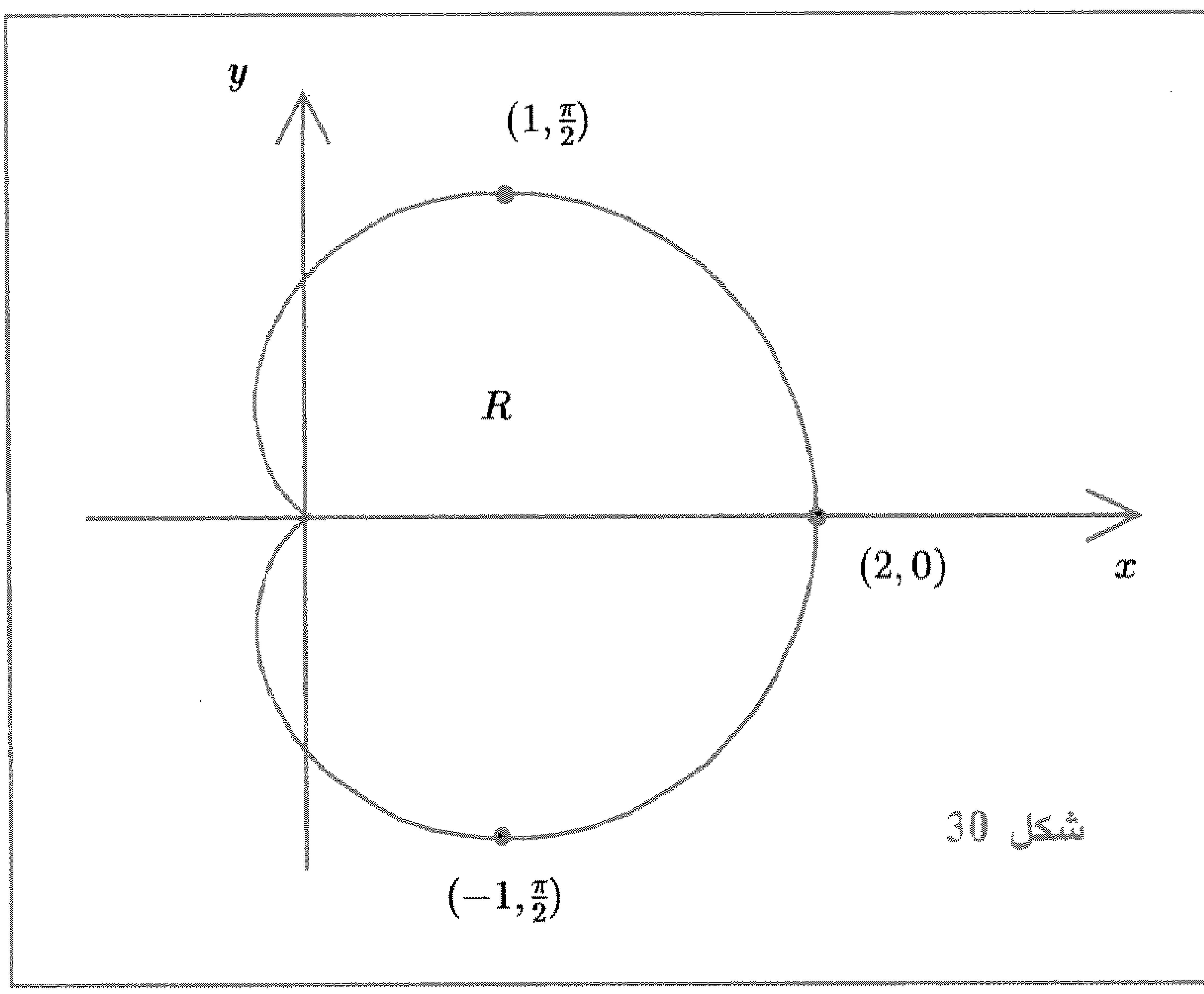
$$A(R)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1+cos\theta} rdrd\theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} r^2\Big|_0^{1+cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+2cos\theta+cos^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \Big(1 + 2cos\theta + 12(1 + cos2\theta)\Big) d\theta$$

وبعد إجراء عملية التكامل والتعويض عن θ نجد أن $A(R) = \dfrac{3\pi}{2}$

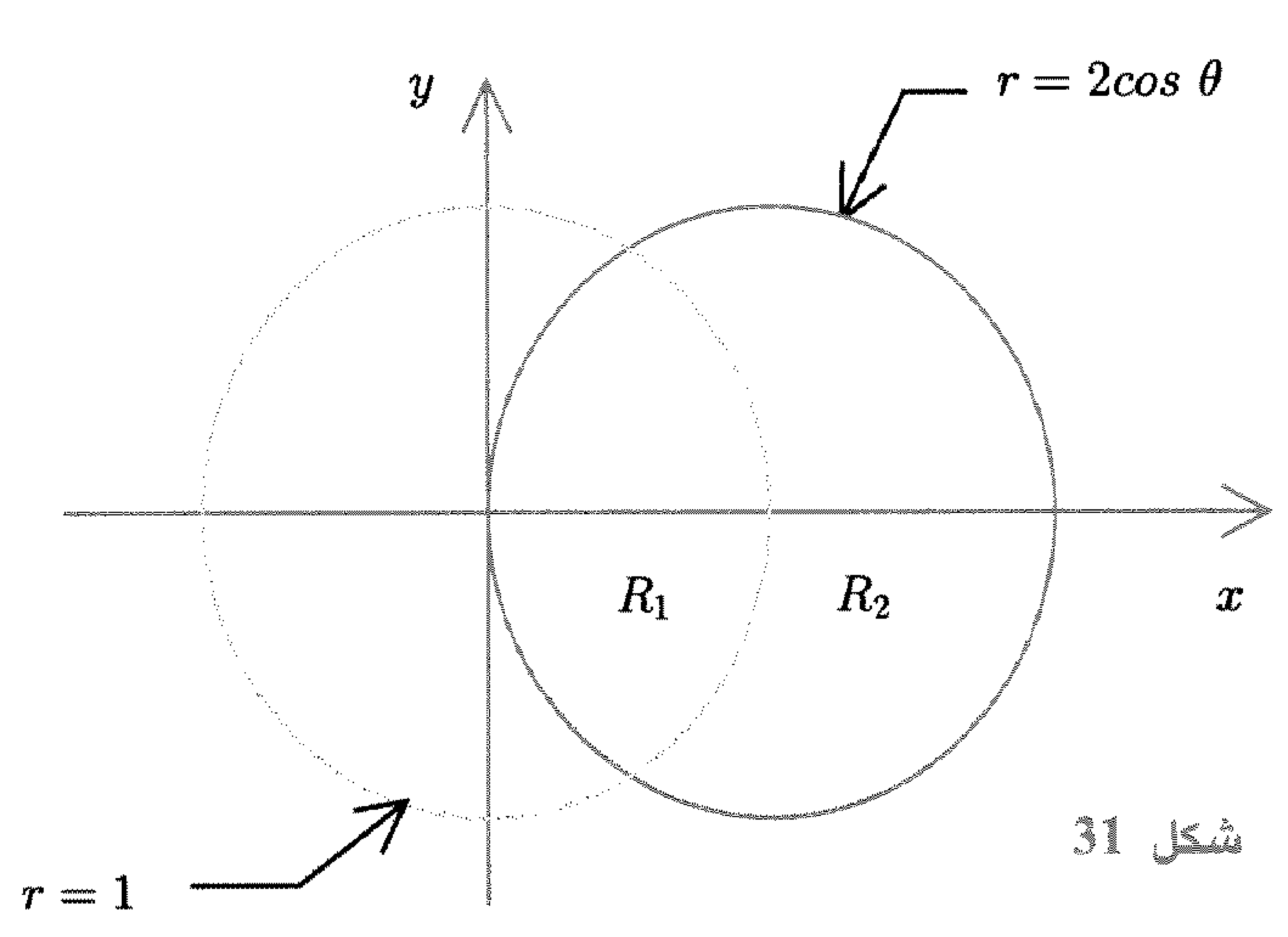


شكل 30

مثـال 6

أ) أوجد مساحة المنطقة الواقعة داخل الدائرة $r = 2cos\ \theta$ وخارج الدائرة $r = 1$.

ب) أوجد مساحة تقاطع الدائرتين.



شكل 31

الحـل

أ) تتقاطع الدائرتان عند $1 = 2cos\ \theta$ أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

ولذلك

$$A(R_2) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2\ cos\ \theta} r\ dr\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(r^2 \Big|_1^{2cos\ \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4cos^2\theta - 1) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\ cos\theta + 1) d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.91322955$$

ب) مساحة الدائرة $r = 2cos\theta$ تساوي π

مساحة منطقة التقاطع تكون:

$$A(R_1) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.228369699$$

مثـــال 7

أوجد حجم الكرة التي مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها a.

الحــل

معادلة سطح الكرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ومنها $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

إذن المطلوب إيجاد الحجم تحت السطح $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$، وفوق القرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ وهو يمثل نصف حجم الكرة.

وباستخدام التكامل الثنائي نجد أن:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$$

(واضح أنه يجب استخدام الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكامل الثنائي).

وباستخدام الإحداثيات القطبية يكون حجم نصف الكرة:

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{a} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2}\; r\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - r^2}\; r\, dr \\ &= -\frac{3}{2}\pi (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{a} \\ &= -\frac{2}{3}\pi (0 - a^3) \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

وهكذا حجم الكرة يكون $\frac{4}{3}\pi\, a^3$

مثـــال 8

أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالسطح $z = 3 + r$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالمعادلة $r = 1 + sin\ \theta$.

الحـــل

$$V = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1+sin\theta} (3 + r) r dr\ d\theta$$

ويترك للقارئ أن يبين أن

$$V = \frac{37}{6}\pi$$

مثـــال 9

أوجد $\int_{0}^{4} \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} dx\ dy$

مستخدماً التعويض $v = \frac{y}{2}$ ، $u = \frac{2x - y}{2}$

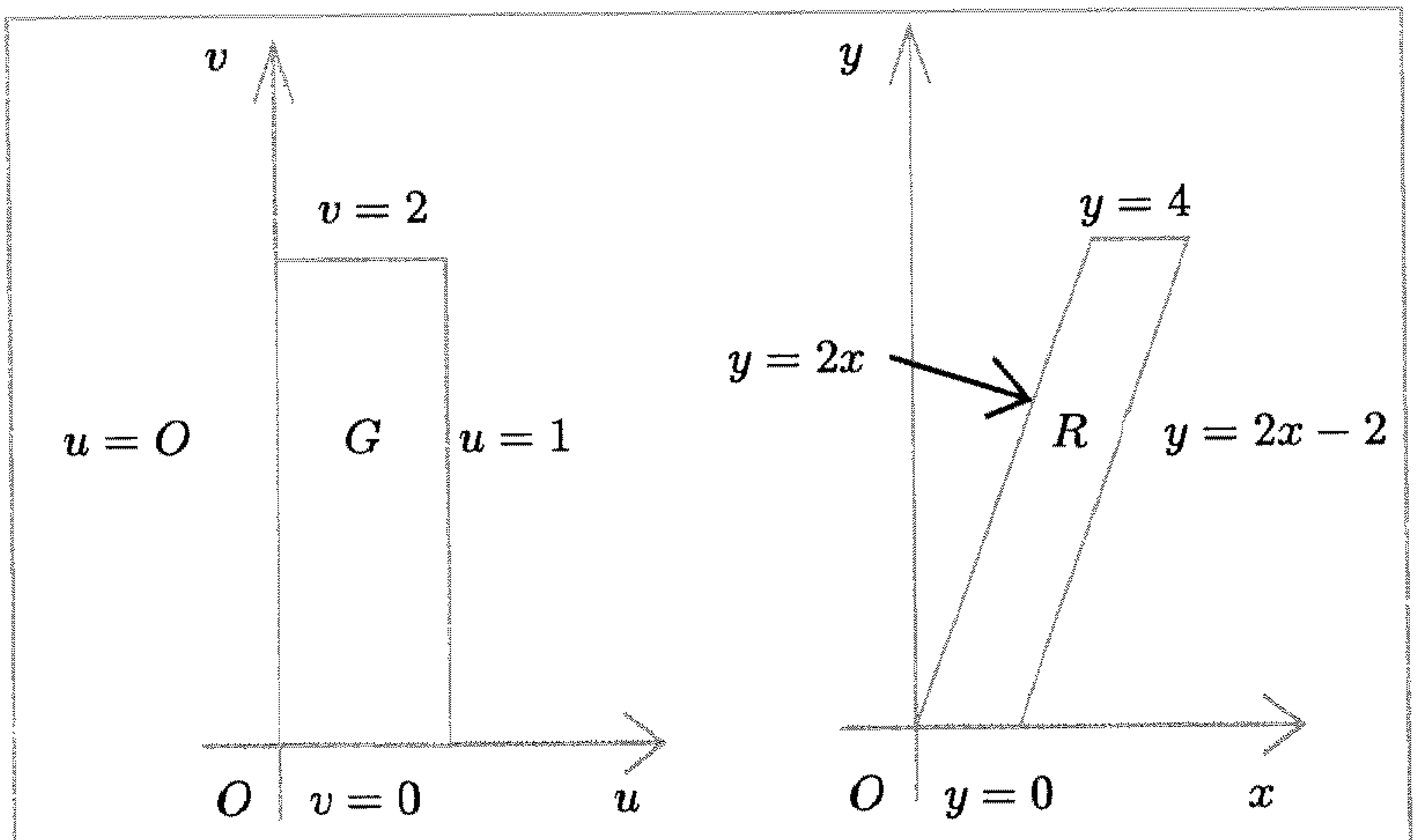
الحـــل

أولاً نرسم المنطقة R في المستوى $x\ y$ ونعين حدود المنطقة، أنظر الشكل (32).

ولتطبيق النظرية (4) يتطلب إيجاد المنطقة المناظرة G في المستوى $u\ v$ ومحدد جاكوبي للتحويل. ويمكن ذلك بإيجاد x وy بدلالة u، v من معادلتي التحويل، أي أن:

$$y = 2x$$

$$x = u + \frac{1}{2} y = u + v$$



شكل 32

ويمكن إيجاد حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$ بالتعويض عن x و y في حدود المنطقة R كما هو موضح في الجدول التالي:

حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$	التعويض عن x، y في حدود R	حدود R في المستوى $x\,y$
$u=0$	$u+v=v$	$x=y/2$
$u=1$	$u+v=v+1$	$x=(y/2)+1$
$v=0$	$2v=0$	$y=0$
$v=2$	$2v=4$	$y=4$

محدد جاكوبي يكون:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

والآن يوجد لدينا كل شيء لتطبيق النظرية (4):

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 uJdudv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 2ududv = \int_0^2 dv = 2$$

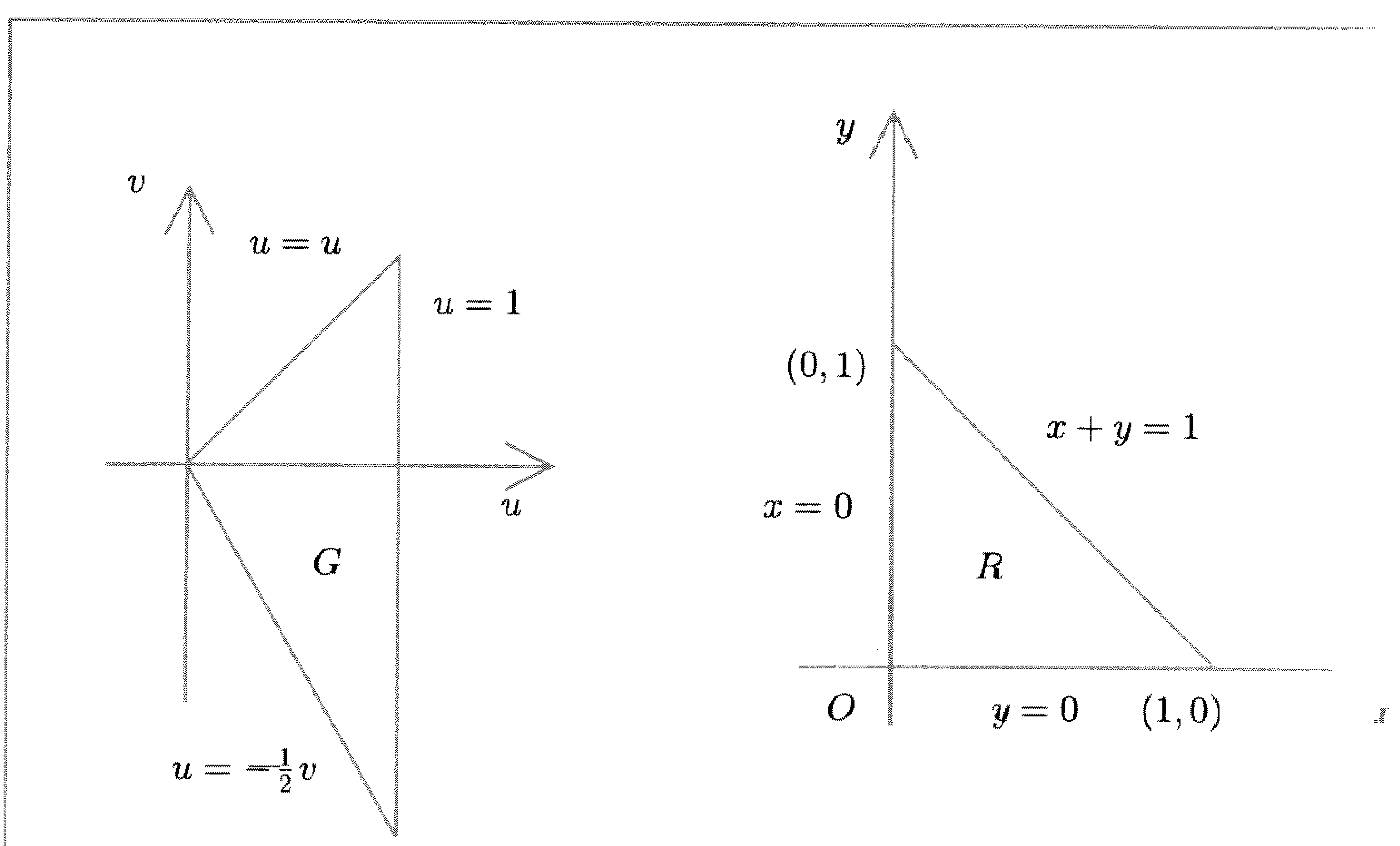
مثـــال 10

أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$

الحـــل

أولاً ترسم المنطقة R في المستوى $x\ y$ وتعين حدود المنطقة R كما هو موضح بالشكل (33). وبعد فحص الدالة المكاملة (Integrand) يمكن استخدام التحويل:

$u = x + y$ و $v = y - 2x$



شكل 33

وبعد حل المعادلتين السابقتين معاً نحصل على:

$$y=\frac{1}{3}(2u+v) \quad \text{و} \quad x=\frac{1}{3}(u-v)$$

وتوجد حدود المنطقة G في المستوى $u\ v$ كما في المثال السابق

$$R_{xy} \Longrightarrow G_{uv}$$

$$x+y=1 \Longrightarrow u=1$$

$$x=0 \Longrightarrow u=v$$

$$y=0 \Longrightarrow u=-\frac{1}{2}v$$

ويحسب محدد جاكوبي كما يلي:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحدد نجد أن:

$$J=\frac{1}{3}$$

وهكذا

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$$

$$=\int_0^1 \int_{-2u}^{u} \sqrt{u}(v^2)\left(\frac{1}{3}\right) dvdu=\frac{2}{9}$$

ويترك للقارئ إجراء عملية التكامل بالتفصيل والتحقق من صحة النتيجة.

مثــال 11

أوجد

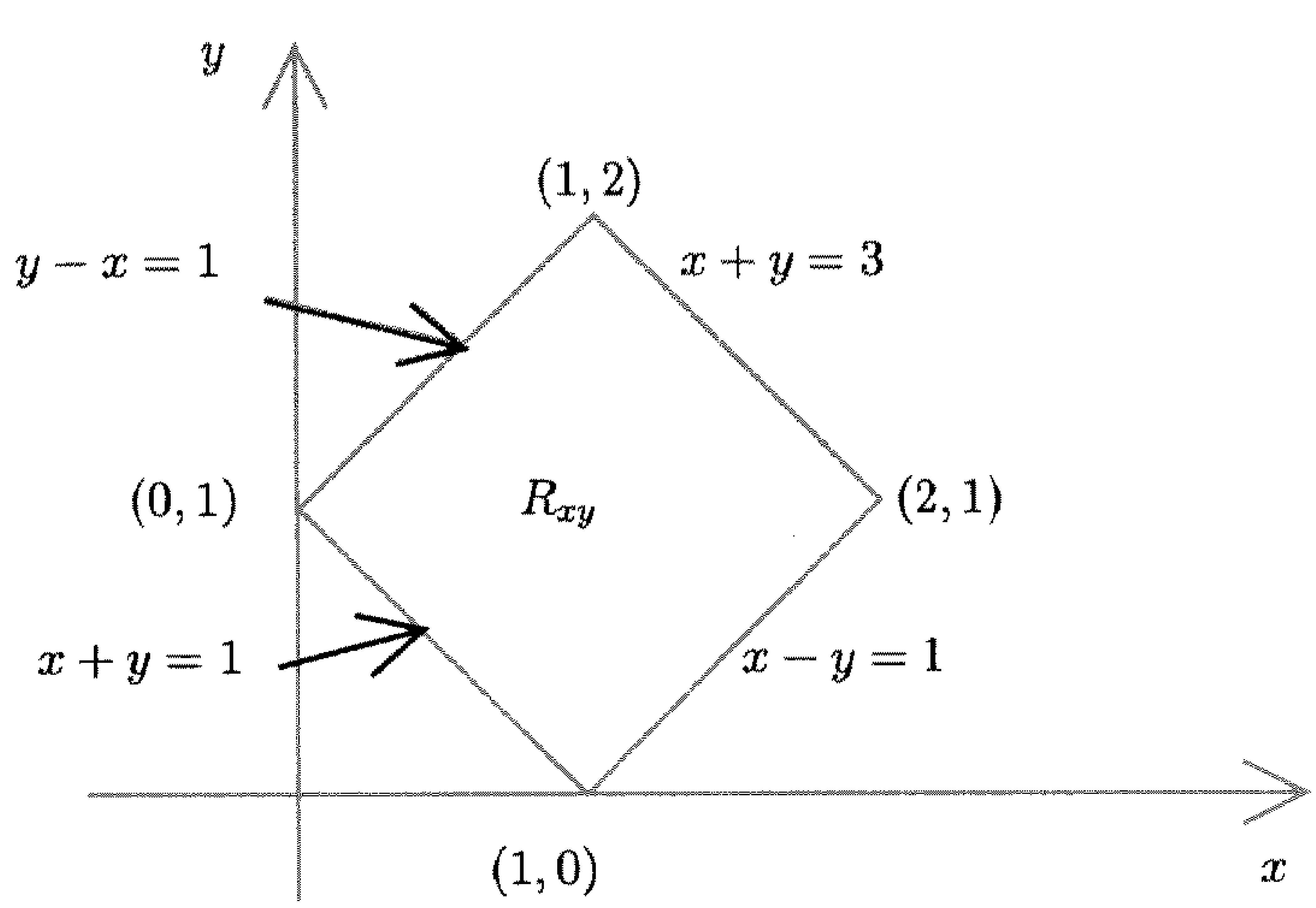
$$\iint\limits_R (x-y)^2 cos^2(x+y)dxdy$$

حيث أن R شبه المنحرف الذي رؤوسه:

$$(0,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,0)$$

الحــل

المنطقة R في المستوى $x\,y$ موضحة بالشكل (34).



شكل 34

من الدالة المكاملة (Integrand) يفضل استخدام التحويل:

$$u = x \quad \text{و} \quad v = x + y$$

وبعد حل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$y = \frac{1}{2}(-u+v) \quad , \quad x = \frac{1}{2}(u+v)$$

يمكن تحديد حدود المنطقة G من معادلات حدود المنطقة R في المستوى $x\,y$ كما يلي

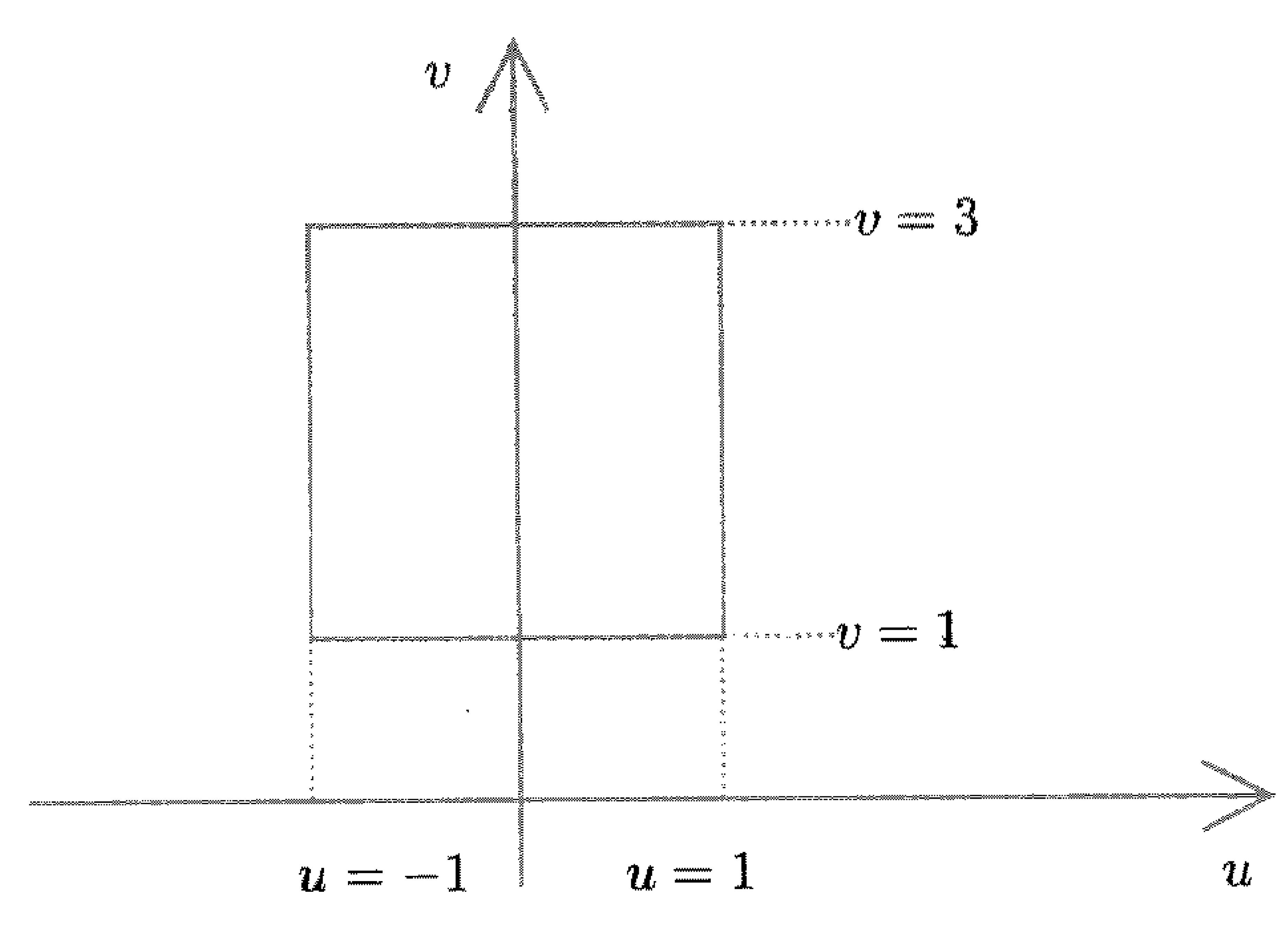
$$x - y = 1 \implies u = 1$$

$$x - y = 3 \implies v = 3$$

$$x + y = 1 \implies v = 1$$

$$y - x = 1 \implies u = -1$$

المنطقة G في المستوى $u\,v$ موضحة بالشكل (35).



شكل 35

ويمكن إيجاد محدد جاكوبي للتحويل كما يلي:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

وهكذا

$$\iint_R (x-y)^2 cos^2(x+y)dxdy$$
$$= \int_1^3 \int_{-1}^1 u^2 cos^2 v\left(\frac{1}{2}\right) dudv$$
$$= \int_1^3 \frac{1}{3} cos^2 vdv$$
$$= \frac{1}{6}\int_1^3 (1+cos2v)dv$$
$$= \frac{1}{6}\left[v+\frac{1}{2} sin\ 2v\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{6}\left[2+\frac{1}{2}(sin6-sin2)\right]$$
$$= 0.2342739$$

مثـــال 12

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

الحـــل

التكامل السابق يعتبر من أهم التكاملات التي يصادفها القارئ في نظرية الاحتمالات، وفي هذا المثال سنبين كيف يمكن استخدام التكامل الثنائي والإحداثيات القطبية لإيجاد قيمته.

نفرض أن:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

واضح أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I$$

(لماذا؟)

وبما أنه يمكن استخدام أي متغير في إيجاد قيمة التكامل، فإن:

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

وهكذا

$$I^2 = \left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx\ dy$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$I^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\ d\theta\ dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r\ dr$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty} e^{-r^2}\Big|_{0}^{a}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty}\left(e^{-a^2}-1\right) = \frac{\pi}{4}$$

وهذا يتضمن

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ومنها

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

ويترك للقارئ أن يبين $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

(**إيضاح** استخدام التعويض $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$).

تمارين

عبر عن التكاملات الآتية كتكاملات جزئية واستخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة كل منها:

1) $\iint_R x\,y\,dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=4$.

2) $\iint_R (x^2+y^2)dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2(1+sin\theta)$

3) $\iint_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2+cos\theta$

أوجد مساحة المنطقة R في المستوى $x\,y$ مستخدماً الإحداثيات القطبية

4) المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2+sin\theta$.

5) المنطقة داخل القلب $r=1+cos\theta$ وخارج الدائرة $r=\frac{1}{2}$

أوجد قيمة التكاملات الآتية مستخدماً الإحداثيات القطبية

6) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$

7) $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy\,dx$

8) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}$

9) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} cos(x^2+y^2)dx\,dy$

10) $\displaystyle\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx$

11) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$

12) $\displaystyle\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2\,dy\,dx$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى أو المنحنيات التالية:

13) $r = 1 - \cos\theta$ 14) $r = 4(1 + \cos\theta)$

15) $r^2 = \cos 2\theta$ 16) $r = 3 - 2\sin\theta$

17) $r = \tan 2\theta$ والمستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$

18) أوجد حجم المجسم المحدد بالمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$

19) أوجد مساحة المنطقة التي تقع داخل المنحنى $(x^2+y^2)^3 = 9y^2$

20) بيّن أن $\iint\limits_{\Omega} \frac{dA}{1+x^2+y^2} = \pi \ln 2$

حث أن Ω قرص الوحدة $(r = 1)$.

21) أوجد

$$\iint\limits_{R} (4x - 4y + 1)^{-2} dx dy$$

حيث أن R المنطقة المحددة بالمعادلات التالية:

$x = \sqrt{-y}$ ، $x = y$ و $x = 1$

حيث أن: $x = u + v$ ، $y = v - u^2$

22) أوجد

$$\iint\limits_{R} (x^2 + 2y^2) dx\, dy$$

حيث أن R منطقة في الربع الأول ومحددة برسم المعادلات:

$xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$

23) أوجد

$$\iint_R \left(\sqrt{x-2y}+\frac{1}{4}y^2\right)dx\ dy$$

حيث أن R المثلث الذي رؤوسه $(4,2)$, $(4,0)$, $(0,0)$

حيث أن $u=\frac{1}{2}y$ ، $v=x-2y$

تمارين الفصل الثاني

أرسم منطقة التكامل ثم أوجد قيمة التكاملات التالية:

1) $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\, dy\, dx$

2) $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx\, dy$

3) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy\, dx$

4) $\int_1^2 \int_0^{2\ln x} e^{x+y} dy\, dx$

5) $\int_0^1 \int_{-y}^{y} \sinh(y^2) dx\, dy$

6) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{1+y^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$

7) $\int_0^1 \int_{-y^{1/3}}^{y^{1/2}} 3x^2 y dx\, dy$

8) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{y} (\sin^2 xy + \cos^2 xy) dx\, dy$

أرسم منطقة التكامل واكتب التكامل الثنائي المكافئ مع تغيير ترتيب التكامل

9) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x dy\, dx$

10) $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x dy\, dx$

11) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3xy\, dx\, dy$

12) $\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x dy\, dx$

13) $\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{x^2+1} f(x,y) dy\, dx$

14) $\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} x^2 y\, dy\, dx$

15) $\int_0^1 \int_0^{exp(y)} xy\, dx\, dy$

16) $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y) dy\, dx$

أرسم منطقة التكامل وحدد ترتيب التكامل المناسب وأوجد قيمة التكامل لكل من التكاملات التالية:

(17 $\displaystyle\int_0^3\int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$ (18 $\displaystyle\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$

(19 $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$ (20 $\displaystyle\int_0^{1/16}\int_{y^{1/4}}^{1/2} cos(16\pi x^5)\,dx\,dy$

(21 $\displaystyle\iint_R (y-2x^2)dA$ حيث أن R المنطقة داخل المربع
$|x|+|y|=1$

(22 $\displaystyle\iint_R xydA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمستقيمات
$y=x$, $y=2x$ و $x+y=2$

الحجم تحت السطح $z=f(x,y)$

(23 أوجد حجم المنطقة الواقعة تحت المجسم المكافئ $z=x^2+y^2$ وفوق المثلث المحدد بالمستقيمات $y=x$, $x=0$ و $x+y=2$ في المستوى $x\,y$.

(24 أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالأسطوانة $z=x^2$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y=2-x^2$ والمستقيم $y=x$ في المستوى $x\,y$.

(25 أوجد حجم المنطقة التي تشتمل على كل النقاط التي تقع داخل الأسطوانة $(x+1)^2+y^2=1$ وداخل الكرة $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

(26 أوجد حجم المنطقة الواقعة داخل الأسطوانتين (المنطقة المشتركة):

$x^2+z^2=a^2$ و $y^2+z^2=a^2$

التكاملات على مناطق غير محدودة

أوجد قيمة التكاملات المعتلة التالية:

27) $$\int_{-1}^{1}\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}}(2y+1)dy\,dx$$

28) $$\int_{1}^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{1}{x^3y}dy\,dx$$

29) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}dx\,dy$$

30) $$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}xe^{-(x+2y)}dx\,dy$$

31) أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{2}(tan^{-1}\pi x-tan^{-1}x)dx$

32) أوجد المنطقة R التي تجعل قيمة التكامل التالي قيمة عظمى وقيمة صغرى وبيّن السبب في كل حالة $\iint_R(4-x^2-2y^2)dA$

33) أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{1}\int_{0}^{3}\frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}dy\,dx$

المساحة (Area)

أوجد مساحة المنطقة المحددة أو المطوقة بـ

34) المحوران والمستقيم $2x+y=2$

35) القطع المكافئ $x=-y^2$ والمستقيم $y=x+2$

36) القطاعان المكافئان $x=y^2$ و $x=2y-y^2$

37) القطاعان المكافئان $x=y^2-1$ و $x=2y^2-2$

التكاملات القطبية

استخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

(38 $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

(39 $$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$$

(40 $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ln(x^2+y^2+1)dx\,dy$$

(41 $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\,dx$$

42) أوجد مساحة المنطقة داخل القلب $r=1+cos\,\theta$ وخارج الدائرة $r=1$

43) أوجد مساحة المنطقة المشتركة التي تقع داخل القلبين $r=1+cos\,\theta$ و $r=1-cos\,\theta$

44) أوجد مساحة المنطقة المطوقة بالقلب $r=1+cos\,\theta$

45) أوجد المساحة الواقعة داخل رسم المنحنى $r=cos\,2\theta$

46) أوجد المساحة داخل رسم المعادلة $r=sin(n\,\theta)$ حيث أن n عدد صحيح موجب.

تغير المتغيرات في التكاملات الثنائية

أوجد قيمة التكاملات التالية:

(47 $$\int_{0}^{4}\int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}dx\,dy$$

(48 $$\iint_R (2x^2-xy-y^2)dx\,dy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيمات

$$y=x_1\ ,\ y=x-2\ ,\ y=-2x+7\ ,\ y=-2x+4$$

(**إيضاح**: استخدم التعويض $u = x - y$ و $v = 2x + y$).

48) أوجد قيمة التكامل:

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)dx\ dy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول ومحددة بالمستقيمات

$$y = -\frac{1}{4}x + 1\ ,\ y = -\frac{1}{4}x\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 3\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 1$$

(**إيضاح**: استخدم التعويض $u = 2x + 2y$ و $v = x + 4y$).

49) إذا كانت المنطقة الواقعة في الربع الأول للمستوى $x\,y$ ومحددة بالقطاعين الزائدين $xy = 1$ و $xy = 9$ والمستقيمين $y = 4x, y = x$، استخدم التعويض $x = \frac{u}{v}$ و$y = uv$ حيث أن $u > 0$ و $v > 0$ لكتابة التكامل $\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{y}} + \sqrt{xy}\right)dx\ dy$ كتكامل على منطقة ملائمة G في المستوى $u\,v$ ثم أوجد قيمة التكامل في المستوى $u\,v$ على المنطقة G

50) استخدم التحويل $x = u + \left(\frac{1}{2}\right)v$ و $y = v$ لإيجاد قيمة التكامل:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{2x-y)^2} dx\ dy$$

51) أوجد مركز كتلة المنطقة المثلثية المحددة بالمستقيمات $x = 2$ و $y = 2$ والقطاع الزائد $x\,y = 2$ في المستوى $x\,y$.

52) أوجد عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل لصفيحة مثلثية رقيقة كثافتها 3 ومحددة بمحور y والمستقيمين $y = 2x$ و $y = 4$ في المستوى $x\,y$

53) أوجد مركز الكتلة وعزوم القصور الذاتية وأنصاف أقطار التدوير (gyration) حول المحاور لصفيحة رقيقة (thin) محددة بالمستقيم $y = x$،

القطاع المكافئ $y = x^2$ في المستوى $x\,y$ إذا كانت دالة الكثافة $\delta(x, y) = 1$.

54) أوجد نصف قطر التدوير (radius of gyration) لكل مما يلي حول نقطة الأصل إذا كانت الكثافة 1:

أ) $x^2 + y^2 \geq 1$ ج) $0 \leq x \leq y \leq 1$

ب) $x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ y \geq 0$ د) $0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 2$

55) أوجد مركز المناطق التالية إذا كانت الكثافة ثابتة:

أ) $x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ y \geq 0$ ب) $x^2 \leq y \leq 4\ ,\ x \geq 0$

ج) $0 \leq y \leq \sin x$ $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

56) أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx\, dy \qquad \int_0^1 \int_{2y}^2 4\cos(x^2) dx\, dy$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi \sin \pi x^2}{x^2} dx\, dy \qquad \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\, dx}{1 + y^4}$$

الفصل الثالث

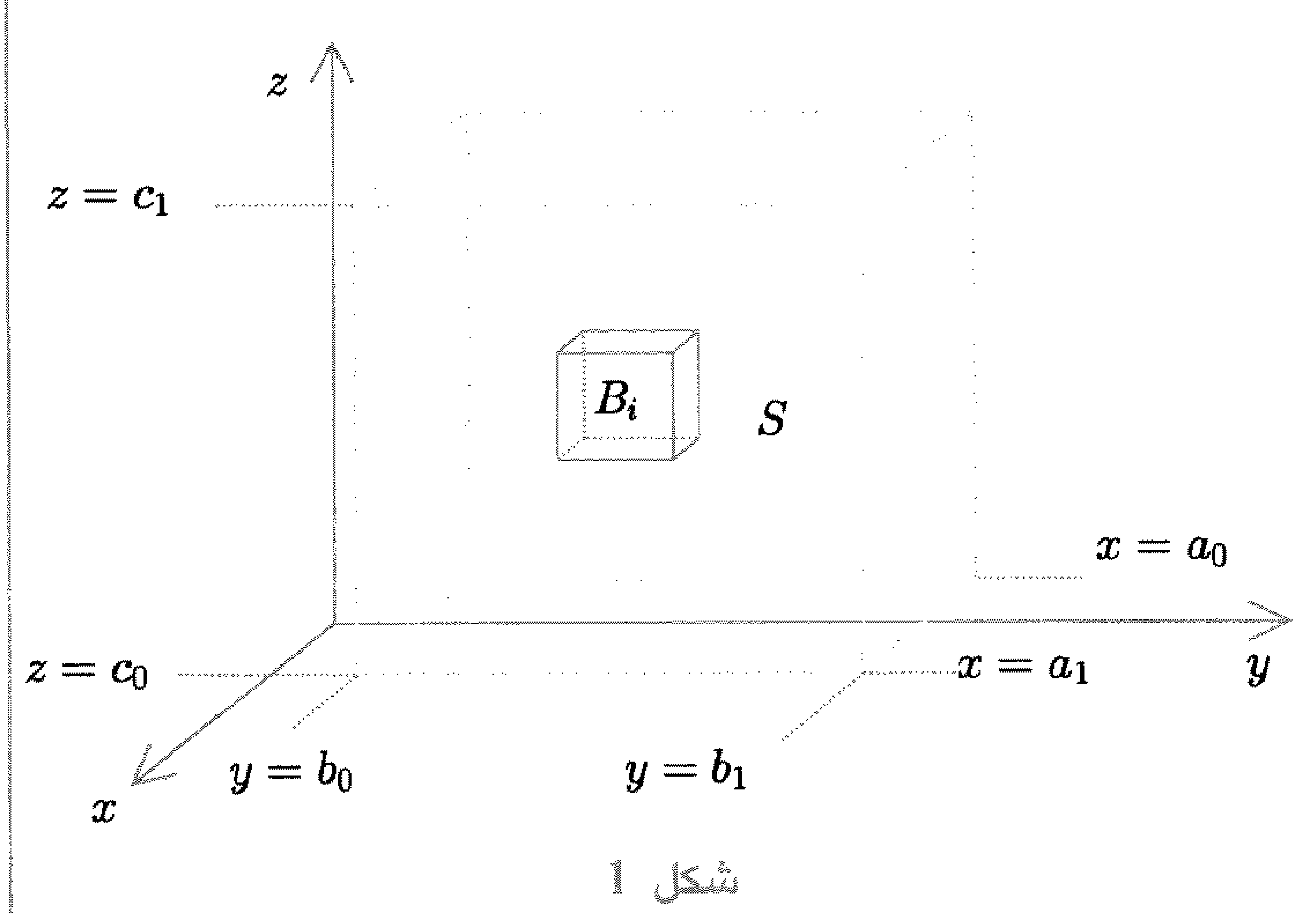
التكامل الثلاثي

3 . 1 تعريف التكامل الثلاثي

تعريف التكامل الثلاثي يوازي تعريف التكامل الثنائي، فإذا اعتبرنا متوازي السطوح المحدد بالمستويات الستة:

$c_0 \le z \le c_1 \quad , \quad b_0 \le y \le b_1 \quad , \quad a_0 \le x \le a_1$

أنظر الشكل (1).



شكل 1

وإذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ معرّفة في المنطقة المغلقة S، فإنه بصورة مشابهة للتكامل الثنائي تقسم المنطقة المجسمة S إلى متوازيات السطوح بمستويات موازية للمستويات الإحداثية (x,y,z).

وإذا كانت $B_1, B_2, ..., B_n$ تمثل متوازيات السطوح في S، وإذا رمزنا لحجم متوازي السطوح B_i بـ $V(B_i)$ وباختيار النقطة $P_i(x_i,y_i,z_i)$ في أي مكان من B_i، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\, V(B_i)$$

يكون قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي.

ملاحظة

اعتبرنا المنطقة S متوازي السطوح للتوضيح فقط، حيث أن R يمكن أن تكون أي منطقة محددة ومغلقة ومقياس التقسيم يساوي طول أكبر قطر من $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$، وإذا كان المجموع السابق يؤول إلى نهاية (عدد حقيقي) عندما يؤول مقياس التقسيم إلى الصفر لكل P_i (أي اختيار)، فإن النهاية تسمى تكاملاً ثلاثياً للدالة f على المنطقة S، ويرمز للتكامل الثلاثي بالرمز:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV$$

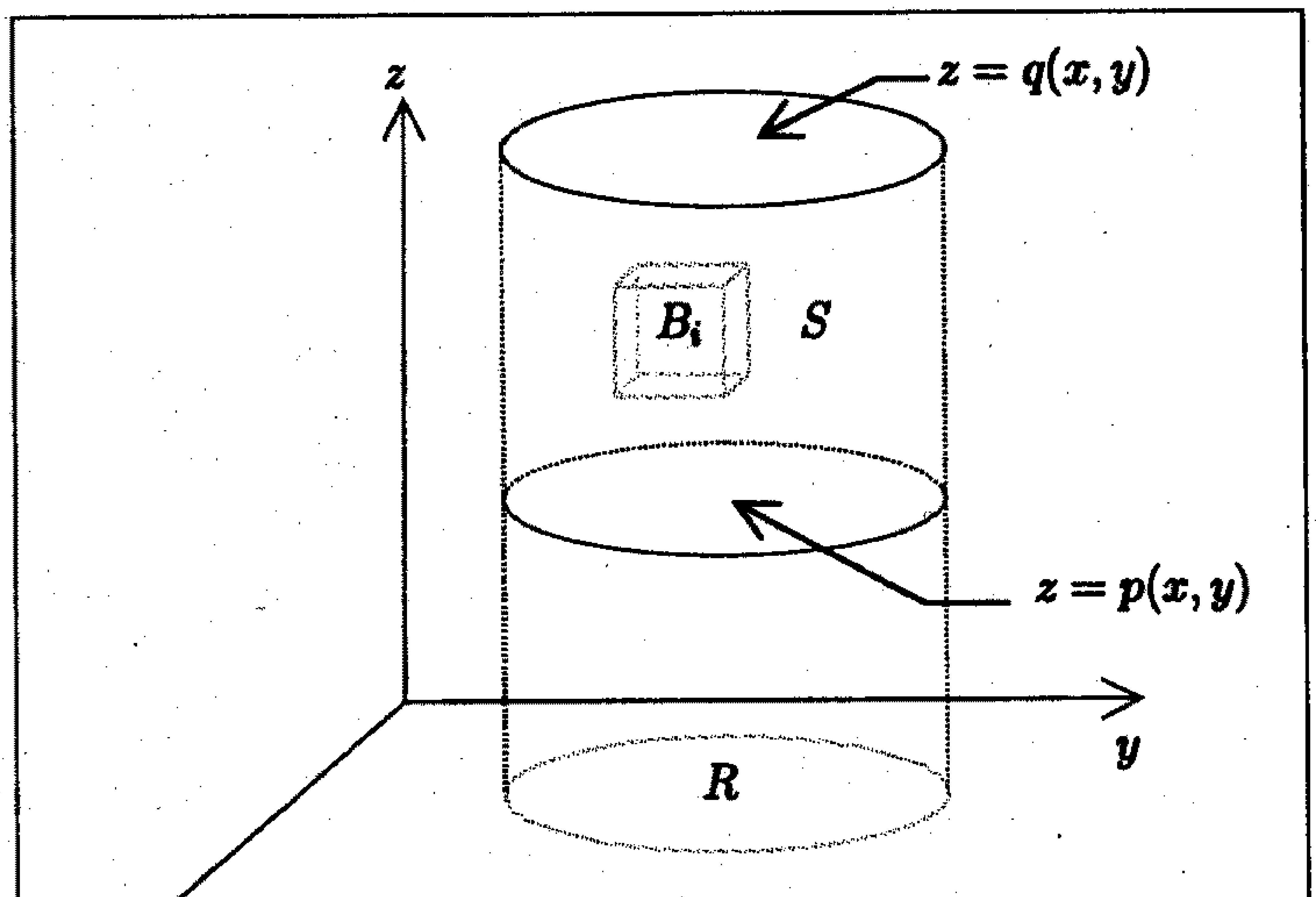
وعندما تكون المنطقة S متوازية السطوح كما سبق، فإن:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dv = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z)dz\, dy\, dx$$

وإذا كانت المنطقة S محددة كما يلي:

$$p(x,y) \le z \le q(x,y) \quad , \quad b_0 \le y \le b_1 \quad , \quad a_0 \le x \le a$$

كما هو موضح في الشكل (2).



شكل 2

فإن

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int\limits_{a_0}^{a_1}\int\limits_{b_0}^{b_1}\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

نظرية 1

نفرض أن المنطقة S معرفة بالمنحنيات التالية:

$$r_1(x,y) \le z \le r_2(x,y) \quad , \quad p(x) \le y \le q(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

حيث أن الدوال r_2, r_1, q, p تكون متصلة.

وإذا كانت الدالة f متصلة في المنطقة S، فإن:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{p(x)}^{q(x)}\int\limits_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

ملاحظة

إذا كانت حدود z متغيرة فإنها تكون دالة في المتغيرين x و y على الأكثر وحدود y دالة في x فقط وحدود x ثابتة حيث أن ترتيب التكامل $dz\ dy\ dx$ ويمكن اعتبار الترتيبات الأخرى بصورة مشابهة تماماً.

في الغالب يمكن تحديد حدود التكامل من الرسم التخطيطي بصورة مشابهة للتكامل الثنائي، كما سيتضح من الأمثلة التي سنقدمها في هذا الفصل.

وبما أن التكامل المحدد للدالة في متغير واحد يفسر بالمساحة والتكامل الثنائي بالحجم فمن المتوقع تفسير التكامل الثلاثي بما فوق الحجم أو الحجم الزائد (Hypervolume) أو الحجم في أربعة أبعاد. وعلى الرغم من بعض الأهمية للتفسيرات السابقة فإنه من الأهمية اعتبار الحالات الآتية:

1) الكتلة (Mass)

إذا كانت الدالة $\rho(x, y, z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم، فإن:

$$M(S) = \iiint_S \rho(x, y, z) dV$$

2) الحجم (Volume)

إذا كانت $f(x, y, z) = 1$، فإن:

$$V(S) = \iiint_S dV$$

3) عزم المجسم S بالسنبة للمستويات x y، x z، y z يعرف كما يأتي:

$$M_{xz} = \iiint_S y\ \rho(x, y, z) dV\ ,\ M_{xy} = \iiint_S z\ \rho(x, y, z) dV$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{S} x\ \rho(x, y, z)dV$$

حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

4) مركز الكتلة هو النقطة (x, y, z)

حيث أن:

$$x = \frac{M_{yz}}{M}\ ,\ y = \frac{M_{xz}}{M}\ ,\ z = \frac{M_{xy}}{M}$$

5) عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور z, y, x

$$I_y = \iiint\limits_{S} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV\ ,\ I_x = \iiint\limits_{S} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_z = \iiint\limits_{S} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV$$

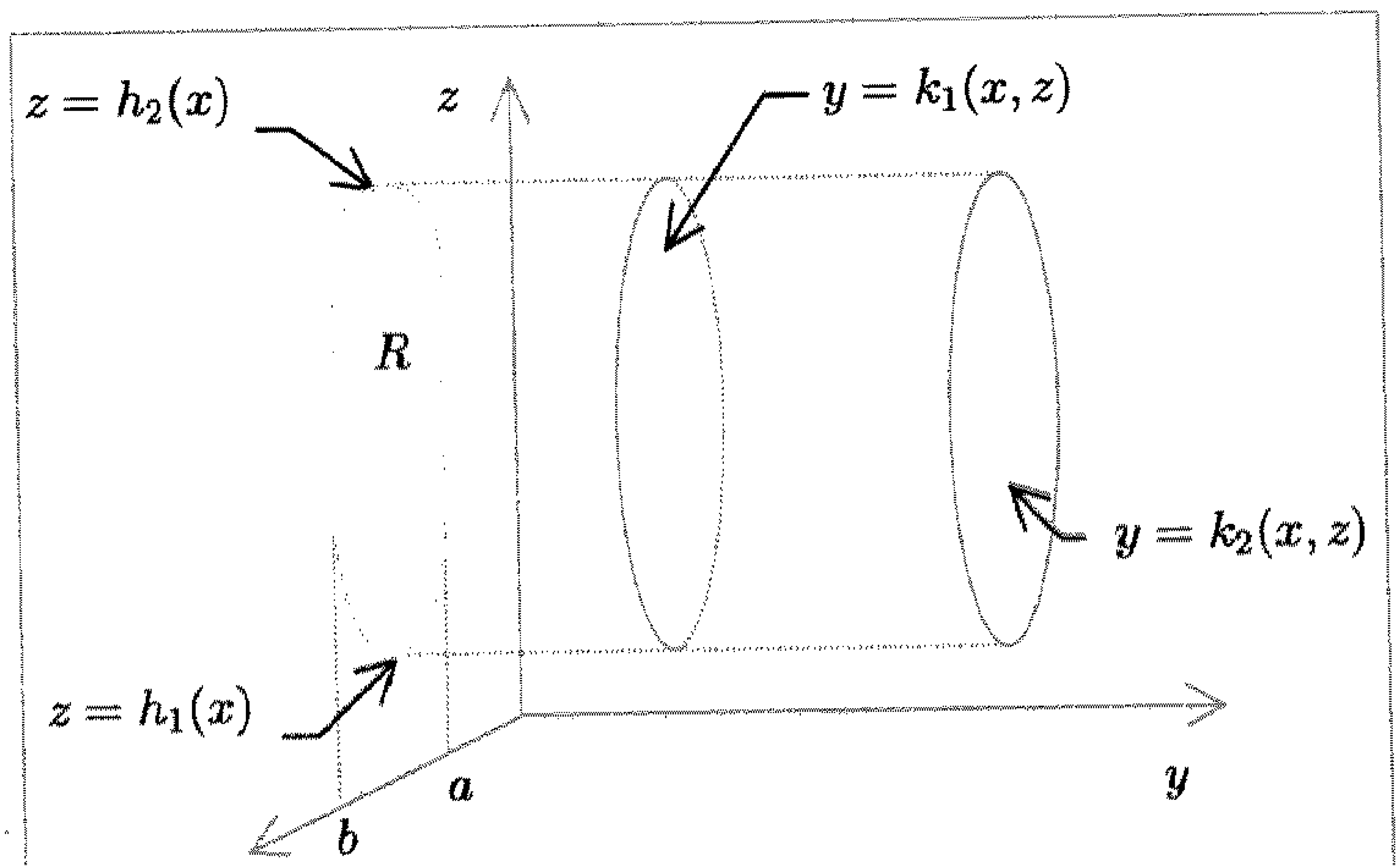
حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

2.3 تغيير ترتيب التكامل

رأينا أهمية ترتيب التكامل الثنائي، حين يتعذر في بعض المسائل إجراء عملية التكامل، كذلك الحال في التكامل الثلاثي يكون للترتيب أهمية كبيرة. فإذا كانت المنطقة S كما يلي:

$$S = \{(x,y,z) : a \le x \le b \ , \ h_1(x) \le z \le h_2(x) \ , \ k_1(x,z) \le y \le k_2(x,z)\}$$

أنظر الشكل (3).



شكل 3

فإن تكامل الدالة على المنطقة S يمكن كتابته كما يأتي:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int\limits_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z)dy\,dz\,dx$$

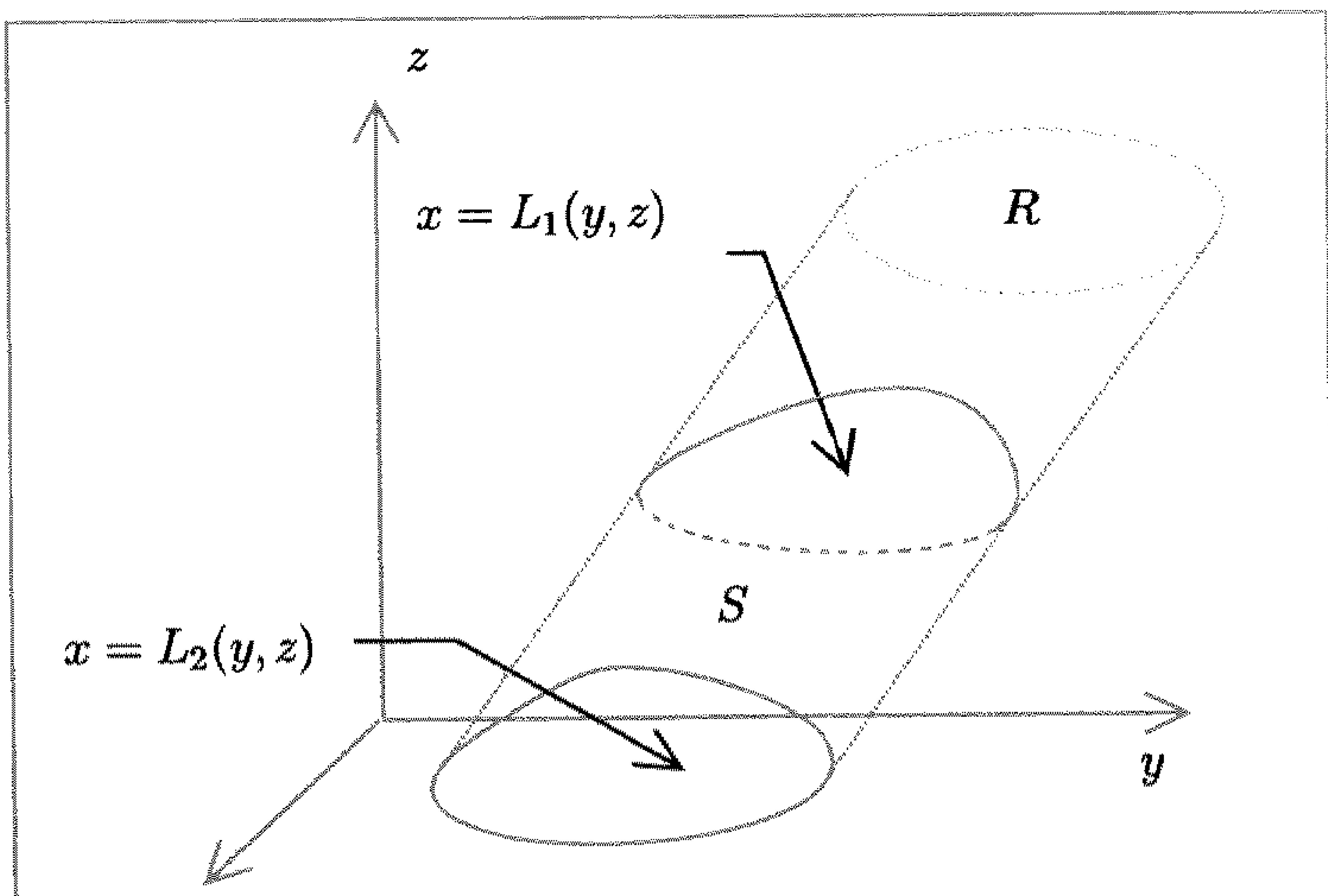
والصورة الأخيرة يمكن تفسيرها بأخذ نهاية مجموع صف من متوازيات السطوح الموازية لمحور y من السطح الأيسر $(y = k_1(x,z))$ إلى السطح الأيمن $(y = k_2(x,z))$ ثم تكامل الدالة المكاملة (Integrand) على المنطقة R في المستوى $x\,z$.

وأخيراً إذا كانت المنطقة S على الصورة التالية:

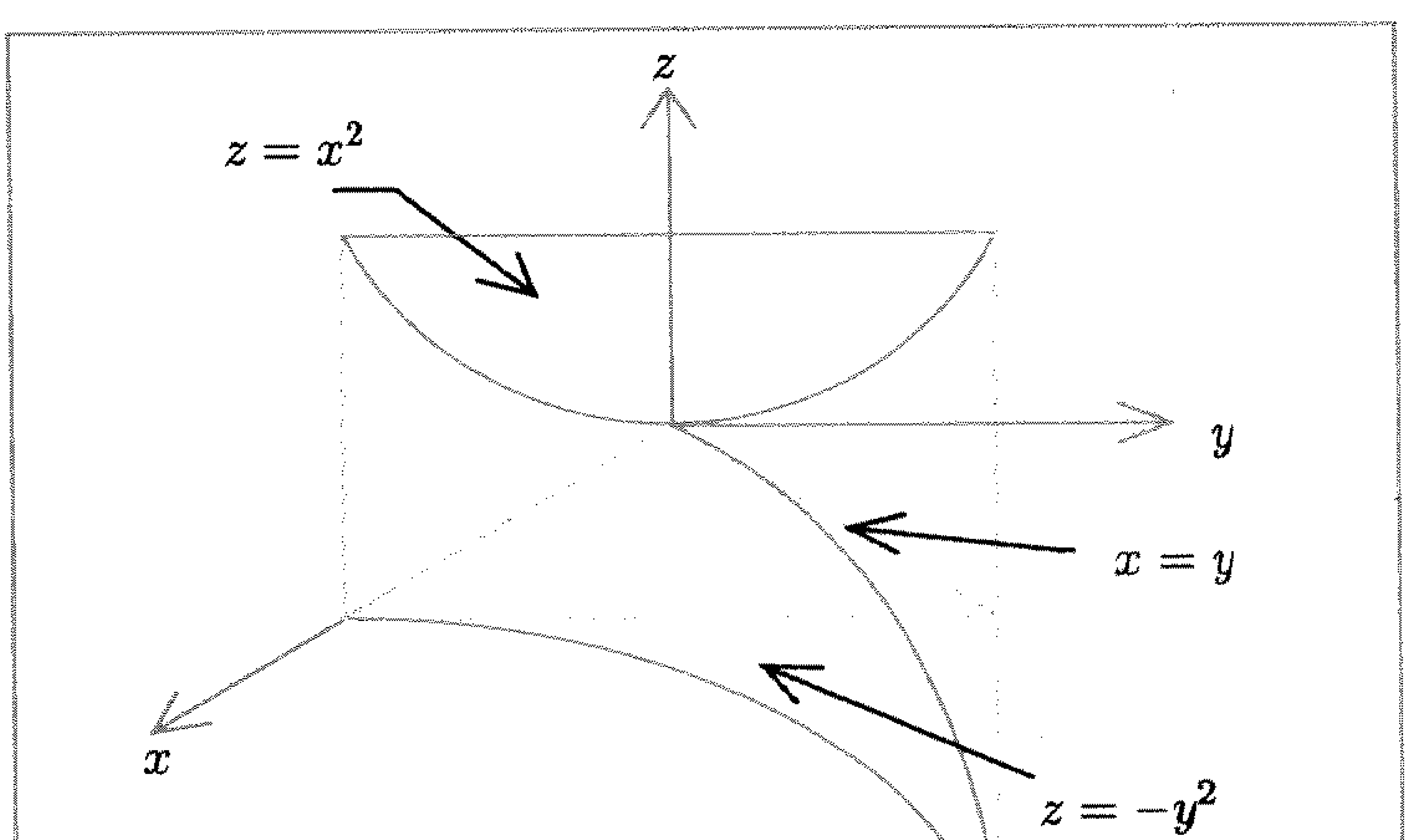
$$S = (x,y,z) : c_1 \le z \le c_2 \ , \ r_1(z) \le z \le r_2(z) \ , \ L_1(y,z) \le x \le L_2(y,z)\}$$

فإن التكامل الثلاثي للدالة f يكتب كما يأتي:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_{c_1}^{c_2} \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} \int_{L_1(y,z)}^{L_2(y,z)} f(x,y,z)dx\ dy\ dz$$



شكل 4



شكل 5

مثـال 1

أوجد قيمة التكامل $I=\iiint\limits_{S}(x^2-y^2)dv$

حيث أن S المجسم بين السطحين $z=-y^2$ و $z=x^2$ لكل $(x,y)\in R$ و R في المستوى $x\,y$ حيث أن $y=0$ و$y=x$ و$0\le x\le 1$.

الحـل

من الشكل (5) يمكن كتابة حدود التكامل كما يأتي:

$$I=\int_0^1\int_0^x\int_{-y^2}^{x^2}(x^2-y^2)dz\,dy\,dx$$

ولإيجاد قيمة التكامل الثلاثي نعتبر أولاً المتغيرين y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z أي أن:

$$I=\int_0^1\int_0^x(x^2-y^2)(x^2+y^2)dy\,dx$$

والخطوة الثانية نكامل بالنسبة للمتغير y ونعتبر x ثابتاً:

$$I=\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{5}x^5\right)dx=\int_0^1\left(\frac{4}{5}x^2\right)dx$$

$$=\frac{4}{30}x^6\Big|_0^1=\frac{2}{15}$$

مثـال 2

أوجد قيمة التكامل

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{sinz}x^2sin\ y\ dx\ dy\ dz$$

وارسم المجسم S.

الحــل

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \ siny\Big|_0^{sin\ z} dy\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 z\ sin\ y\ dy\ dz$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ cos\ y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz$$

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ dz$$

يمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2 z) d\ cos\ z$$

وبعد إجراء التكامل بالنسبة لـ $cos\ z$:

$$I = -\frac{1}{3}\left(cos\ z - \frac{1}{3}cos^3 z\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[0 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2}{9}$$

ويترك رسم المجسم كتمرين للقارئ.

مثــال 3

أوجد قيمة التكامل

$$\iiint_S ye^{xy} dV$$

حيث أن S المكعب المحدد بالمستويات التالية:

$z = 0$ و $z = -2$, $y = 2$ $y = 0$, $x = 3$ $x = 1$

الحـــل

$$\iiint\limits_S ye^{xy}dV = \int_0^2\int_1^3\int_{-2}^0 ye^{xy}dz\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^2\int_1^3 ye^{xy}dx\,dy$$

$$= \int_0^2 (e^{3y} - e^{y})dy$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^6 - 2e^2$$

ملاحظة

يمكن إيجاد التكامل السابق بتغيير ترتيب التكامل (خمس صور مختلفة) ويمكن للقارئ محاولة ذلك علماً بأن النتيجة مطابقة.

مثــال 4

أوجد قيمة التكامل الثلاثي $\iiint\limits_S x\,dz\,dy\,dx$

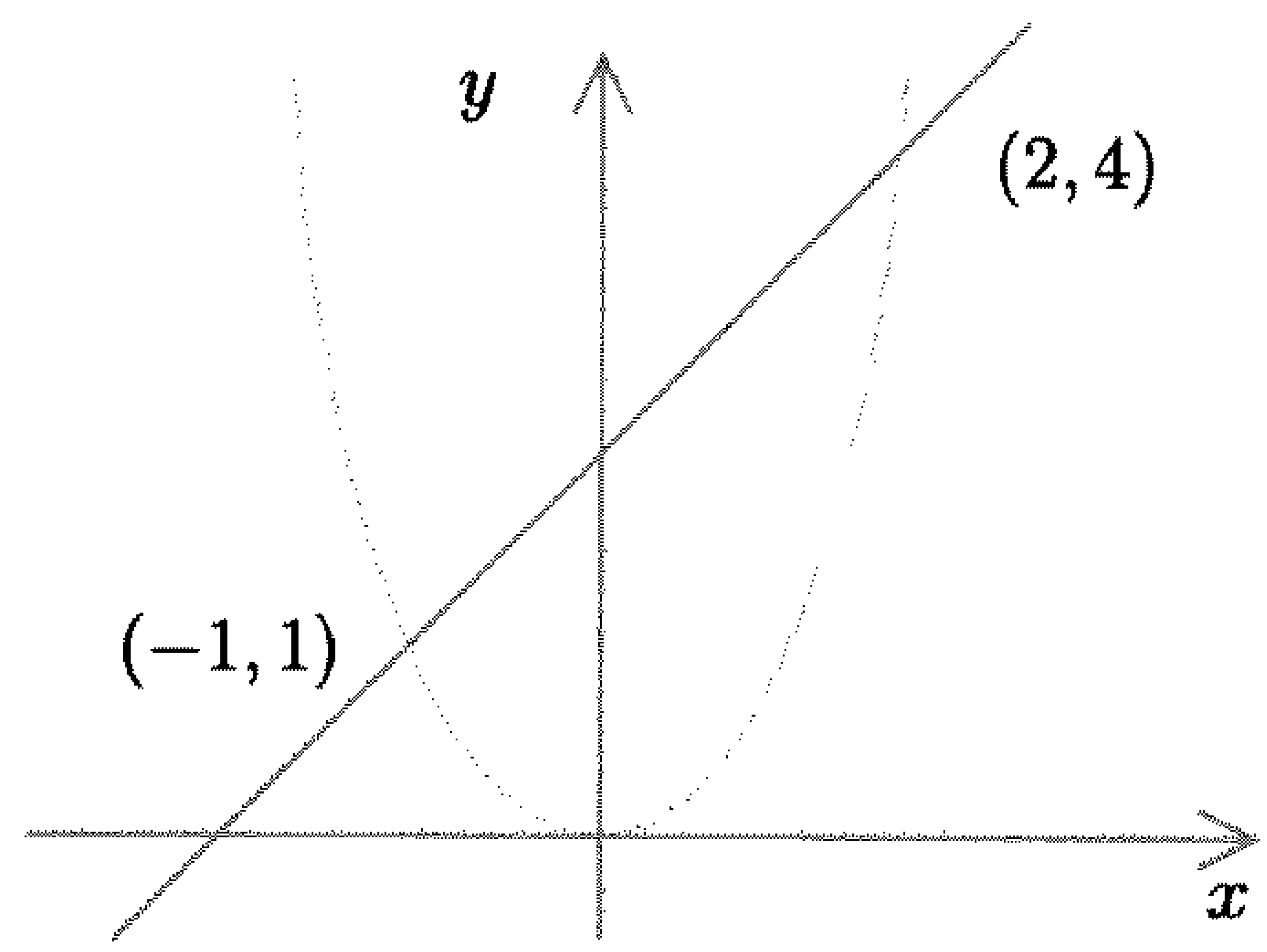
حيث أن S المنطقة المحددة بالسطوح التالية:

$y = x^2$, $y = 2 + x$ $4z = x^2 + y^2$ و $z = x + 3$

الحـــل

لمعرفة حدود التكامل نرسم مسقط المجسم S في المستوى $x\,y$، وهو عبارة عن المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x + 2$ كما هو موضح بالرسم، وبأخذ أي نقطة من السهل معرفة أن المجسم S محدد من أسفل

بـ $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ ومن أعلى بـ $z=x+3$



شكل 6

وهكذا $$I=\iiint\limits_S x\,dv=\int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{x^2}^{x+2}\int\limits_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{x+3} x\,dz\,dy\,dx$$

وعند إجراء عملية التكامل نعتبر y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z في البداية أي أن:

$$I=\int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{x^2}^{x+2}\Big[x(x+3)-\frac{x}{4}(x^2+y^2)\Big]dy\,dx$$

وعملية التكامل بسيطة ومن السهل أن يبين القارئ أن قيمة هذا التكامل تكون 5.23.

مثــال 5

أوجد قيمة التكامل الثلاثي

$$I=\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-z^2}}\int\limits_{0}^{2-z} z\,dx\,dy\,dz$$

الحــل

أولاً نعتبر المتغيرين y و z ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير x

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (x\ z)\Big|_0^{2-z} dy\ dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (2z - z^2) dy\ d$$

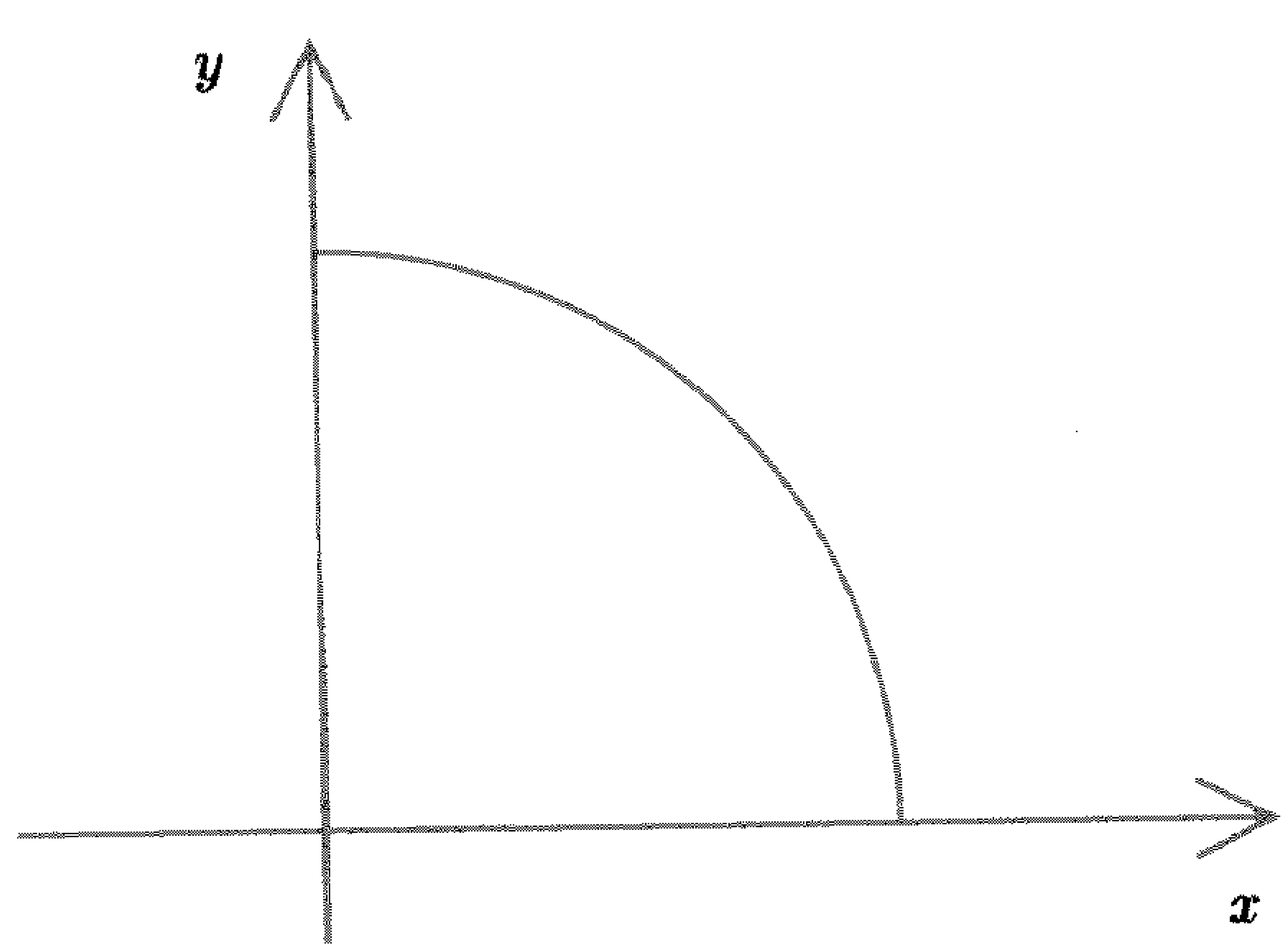
والآن نعتبر z ثابتاً ونكامل بالنسبة للمتغير y، ولتبسيط عملية التكامل نستخدم الإحداثيات القطبية، ولذلك:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (2r cos\theta - r^2 cos^2\theta) r\ dr\ d\theta$$

وبالتكامل بالنسبة لـ r نجد أن:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3} r^3 cos\theta - \frac{1}{4} r^4 cos^2\theta\right)\Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3} cos\ \theta - 4cos^2\theta\right) d\theta$$



شكل 7

وباستخدام المتطابقة $cos^2\theta = \frac{1}{2}(cos2\theta + 1)$ نجد أن:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3}cos\ \theta - 2cos\ 2\theta - 2\right)d\theta$$

$$= \left(\frac{16}{3}sin\ \theta - sin\ 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 0 - \pi\right) = \frac{16 - 3\pi}{3}$$

مثال 6

أوجد الحجم الواقع بين السطحين

$$z = 8 - x^2 - y^2 \quad , \quad z = x^2 + 3y^2$$

الحل

السطحان يتقاطعان عند الأسطوانة التي قاعدتها قطع ناقص في المستوى $x\ y$

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

أو

$$x^2 + 2y^2 = 4 \Longrightarrow x \pm \sqrt{4 - 2y^2}$$

وعندما $x = 0$ فإن $y = \pm\sqrt{2}$

ولذلك

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)dx\ dy$$

وبإجراء عملية التكامل بالنسبة للمتغير x (y ثابت) يمكن أن نبين أن:

$$V = \frac{8}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4-2y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy$$

وباستخدام التعويض $y = \sqrt{2}\, sin\, \theta$، وهذا يتضمن $dy = \sqrt{2}\, cos\theta d\theta$، نجد أن:

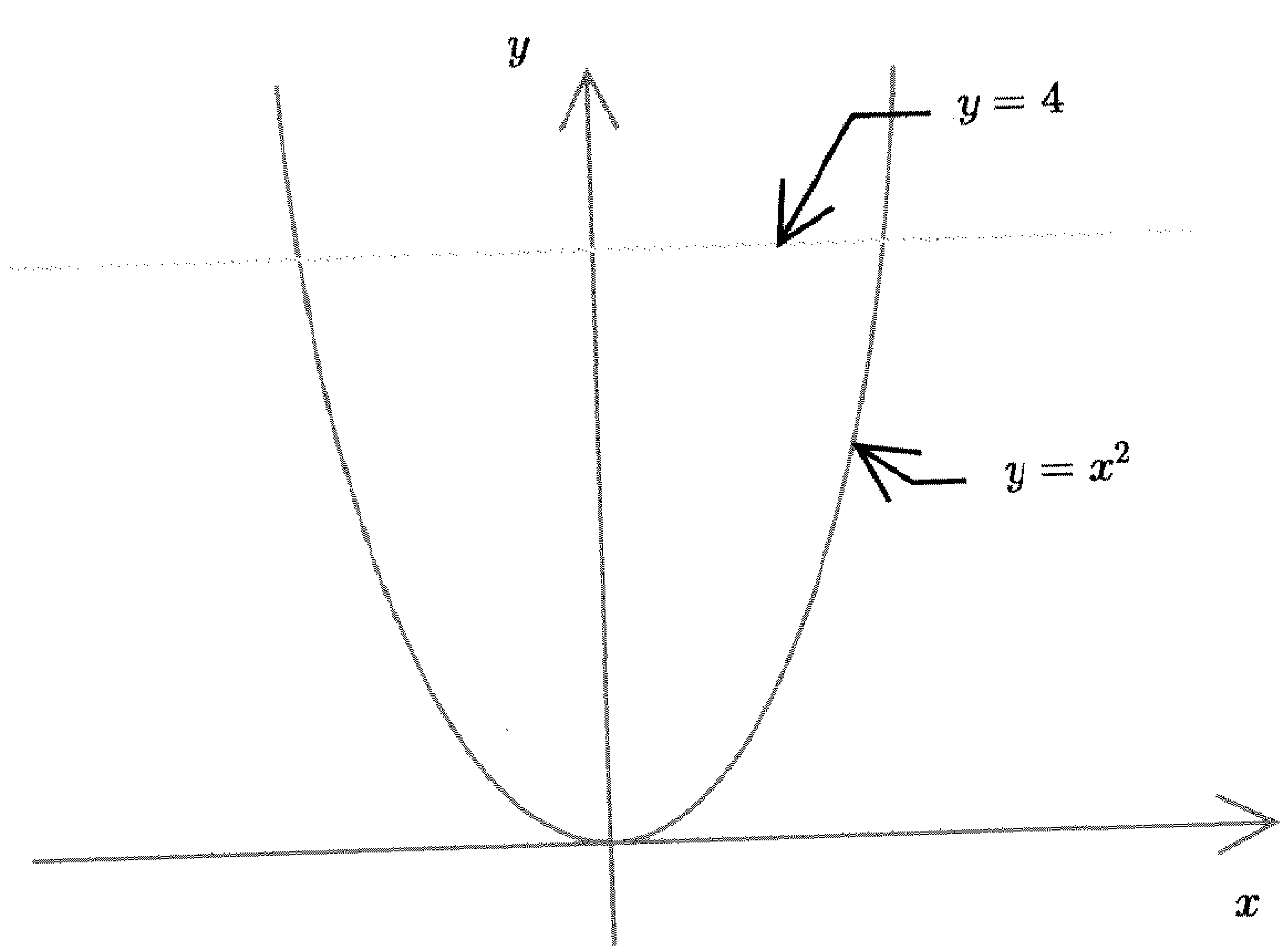
$$V = \frac{64\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta\, d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\, 2\theta + 1)^2 d\theta$$

ويمكن كتابة التكامل الأخير على الصورة التالية:

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2cos2\theta + \frac{1}{2}(cos\, 4\theta + 1\right)\, d\theta$$

وبعد إجراء التكامل نجد أن:

$$V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\, .\, \frac{3}{2}\pi = 8\sqrt{2}\, \pi = 35.54306351$$



شكل 8

مثـــال 7

أوجد حجم المجسم المحدد بالأسطوانة $y = x^2$ والمستويين $y + z = 4$ ، $z = 0$

الحـــل

لتحديد حدود التكامل، نرسم مسقط المجسم في المستوى $x\,y$، انظر الشكل (8).

واضح أن المستوى $y + z = 4$ فوق المستوى $z = 0$ (المستوى $x\,y$).

ولذلك

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{0}^{4-y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (4-y) dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) dx$$

$$= 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \Big|_{-2}^{2}$$

$$= 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10} = 17.067$$

مثـــال 8

إذا كانت المنطقة Ω معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 \ , \ x^2 \leq y \leq x \ , \ x - y \leq z \leq x + y\}$$

فأوجد ما يأتي:

أ) حجم المنطقة Ω

ب) $\iiint\limits_{\Omega} 2x^3y^2z \, dV$

جـ) الكتلة الكلية

د) مركز الكتلة

إذا كانت الكثافة $\rho(x, y, z) = x + 2y + 4z$

الحـــل

أ) يمكن إيجاد الحجم V كما يلي:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_{\Omega} dV \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{2} \int_{x-y}^{x+y} dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

ب)

$$\iiint\limits_{\Omega} 2x^3y^2z \, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} 2x^3y^2z \, dz \, dy \, dx$$

جزء

المعادلات التفاضلية

قسم الرياضيات - كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوداي

مقدمة وتعريف:

تلعب المعادلات التفاضلية دوراً هاماً في العلوم الطبيعية. فعند دراسة بعض الظواهر الطبيعية أحياناً لا يمكن الحصول على القانون أو الصيغة الرياضية بين المتغيرات التي تصف هذه الظواهر مباشرة، ولكن يمكن إيجاد علاقة رياضية تربط بين هذه المتغيرات ومشتقاتها التفاضلية. كما هو الحال في الفيزياء والهندسة دائماً تدل هذه العلاقة والتي تربط بين المتغيرات ومشتقاتها التفاضلية على مبدأ أساسي لقانون معين يصف بعض الظواهر الفيزيائية والهندسية. مثل هذه العلاقة تُعرف بالمعادلة التفاضلية ومن ثم يمكننا تعريف المعادلة التفاضلية كما يلي:

المعادلة التفاضلية: هي علاقة بين دالة مجهولة (متغير تابع) في متغير مستقل واحد أو أكثر من متغير مستقل وبين المشتقات التفاضلية المختلفة لهذه الدالة بالنسبة لهذه المتغيرات. وبصورة عامة فإن المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات تفاضلية. وأمثلة على ذلك المعادلات الآتية:

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x + 5.$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 3.$

(4) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2(\dfrac{d^2y}{dx^2})^2 + \dfrac{dy}{dx} = \cos x.$

(5) $(\dfrac{d^2y}{dx^2})^2 + (\dfrac{dy}{dx})^3 + 3y = x^2.$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z + x\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

(7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y.$

وتنقسم المعادلات التفاضلية إلى نوعين هما:

النوع الأول (المعادلات التفاضلية العادية):

وفيه تكون العلاقة بين الدالة المجهولة (المتغير التابع) في متغير مستقل واحد فقط وبين المشتقات التفاضلية الممكنة لهذه الدالة بالنسبة لهذا المتغير المستقل. وهذا النوع من المعادلات هو موضوع دراستنا في هذا المقرر إن شاء الله. وأمثلة ذلك في الأمثلة السابقة من (1) إلى (5) حيث x هي المتغير المستقل ، y هي الدالة المجهولة (المتغير التابع).

النوع الثاني (المعادلات التفاضلية الجزئية):

وفيه تكون العلاقة بين الدالة المجهولة (المتغير التابع) في أكثر من متغير مستقل وبين المشتقات التفاضلية الجزئية الممكنة لهذه الدالة بالنسبة لمتغيراتها المستقلة. وأمثلة ذلك في الأمثلة السابقة (7),(6) حيث x, y هي المتغيرات المستقلة ، z هي الدالة المجهولة (المتغير التابع).

رتبة المعادلة التفاضلية:

هي رتبة أعلى مشتقة تفاضلية موجودة بالمعادلة. فمثلاً المعادلات التفاضلية في الأمثلة السابقة (6),(3),(1) معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى. والمعادلات التفاضلية في الأمثلة (7),(5),(2) معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية. أما المعادلة التفاضلية في المثال (4) فهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة.

درجة المعادلة التفاضلية:

هي درجة أعلى مشتقة تفاضلية موجودة بالمعادلة – أي هي القوة المرفوعة إليها رتبة المعادلة – فالأمثلة السابقة معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى ماعدا المثال (5) فهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

حل المعادلة التفاضلية:

أي دالة تحقق طرفي المعادلة التفاضلية تُسمى حلاً للمعادلة. وطريقة الحصول على حل المعادلة التفاضلية تُسمى تكامل المعادلة التفاضلية، وبصفة عامة فإن الحل العام (الأصل التام) للمعادلة التفاضلية هو أي علاقة بين المتغيرات تحتوي على عدد n من الثوابت الاختيارية وتحقق المعادلة. كما أن كل علاقة تحتوي على على عدد n من الثوابت الاختيارية تُعطي معادلة تفاضلية من الرتبة n خالية من الثوابت الاختيارية. وهذه المعادلة التفاضلية تُسمى المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام، ويمكن الحصول على هذه المعادلة بعد حذف الثوابت من الحل العام وذلك بتفاضل الحل العام عدد n من المرات إذا كان الحل العام يشتمل على عدد n من الثوابت الاختيارية.

أمثلة:

مثال (١): أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام $y = Ax^2 + Bx + C$.

الحل: حيث إن الحل العام y يشتمل على ثلاث ثوابت اختيارية A, B, C فإنه يلزم ايجاد معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة، وذلك بإجراء عملية التفاضل للمتغير y بالنسبة إلى المتغير المستقل x ثلاث مرات متتالية، وذلك لحذف الثوابت كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

والمعادلة الأخيرة خالية من الثوابت الاختيارية ، ومن الرتبة الثالثة ، فتكون هي

المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام.

مثال (٢): أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام:

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \ .$$

حيث A, B ثابتان اختياريان، α ثابت معين.

الحل: حيث إن الحل العام يشتمل على ثابتين اختياريين فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة ستكون من الرتبة الثانية.

ونحصل عليها بتفاضل y مرتين متتاليتين كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -A\alpha^2 \cos \alpha x - B\alpha^2 \sin \alpha x \\ &= -\alpha^2 (A\cos \alpha x + B\sin \alpha x) \\ &= -\alpha^2 y.\end{aligned}$$

وإذاً المعادلة المطلوبة تكون $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$.

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

هو حل نحصل عليه من الحل العام للمعادلة باعطاء قيم معينة للثوابت الاختيارية الداخلة في تكوين الحل العام للمعادلة. ومن الناحية الهندسية الحل العام للمعادلة التفاضلية يمثل مجموعة (عائلة) من المنحنيات ، بينما يمثل الحل الخاص للمعادلة التفاضلية منحنى واحد من هذه المنحنيات.

الباب الثاني

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى في الصورة:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

حيث $M(x, y), N(x, y)$ دوال في x, y .

مثال : المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + \frac{y+x}{y-x} = 0$ يمكن كتابتها في الصورة:

$$(y+x)dx + (y-x)dy = 0$$

حيث $M(x, y) = y + x \ , N(x, y) = y - x$.

ونظراً لعدم إمكانية إعطاء قاعدة عامة لإيجاد الحل العام لكل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى فإننا سنقتصر على دراسة بعض أنواع المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، والتي يمكن باستخدام قواعد معينة أو تحويلات مناسبة إيجاد الحل العام لها. ومن هذه الأنواع ما يلي:

(١) المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للفصل (للانفصال).

(٢) المعادلات التفاضلية المتجانسة.

(٣) المعادلات التفاضلية القابلة للتحويل إلى معادلات متجانسة.

(٤) المعادلات التفاضلية التامة.

(٥) المعادلات التفاضلية الخطية.

(٦) معادلة برنولي التفاضلية.

(٧) معادلة ريكاتي التفاضلية.

وسنتناول كلا من هذه الأنواع بالشرح والتفصيل إن شاء الله فيما يلي.

(١) المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للفصل (للانفصال):

تُكتب المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى على الصورة:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

والتي يمكن فصل متغيراتها كما يلي:

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0 \qquad (1)$$

ولحل مثل هذه المعادلة لابد من ضرب طرفيها في صيغة معينة بحيث يصبح أحد طرفيها محتوياً على دالة في المتغير x فقط، والطرف الآخر على دالة في المتغير y فقط. أي تصبح على الصورة:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy.$$

ثم بعد ذلك بتكامل طرفي المعادلة نحصل على الحل العام.

أمثلة:

مثال (١-١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$xy\,dx+(x+1)\,dy=0.$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة:

$$xy\,dx=-(x+1)\,dy$$

ثم نفصل المتغيرات وذلك بقسمة طرفي المعادلة على $y(x+1)$ فنحصل على:

$$\frac{x}{(x+1)}dx=-\frac{dy}{y}$$

وبتكامل الطرفين: $\int\frac{x}{(x+1)}dx=-\int\frac{dy}{y}$

$$\therefore \int dx-\int\frac{1}{(x+1)}dx=-\int\frac{dy}{y}$$

$$\therefore x-\ln(1+x)=-\ln y+c.$$

حيث c ثابت التكامل، وبوضع $c=\ln c$ لتبسيط الحل نحصل على:

$$x=\ln(1+x)-\ln y+\ln c$$

$$\therefore y=c(x+1)e^{-x}.$$

وهذا هو الحل العام المطلوب.

مثال (١-٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x(y^2+1)\,dx-y(x^2+1)\,dy=0$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة:

$$x(y^2+1)\,dx=y(x^2+1)\,dy$$

ثم نفصل المتغيرات وذلك بقسمة طرفي المعادلة على $(y^2+1)(x^2+1)$

فنحصل على:

$$\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{y}{y^2+1}dy$$

وبتكامل الطرفين:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{y}{y^2+1}dy$$

$$\therefore \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}dy$$

$$\therefore \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \ln c.$$

$$\therefore \ln\left(\frac{x^2+1}{y^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln c$$

$$\therefore \left(\frac{x^2+1}{y^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} = c$$

$$\therefore y^2+1 = \frac{1}{c^2}(x^2+1)$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{\frac{1}{c^2}(x^2+1)-1}.$$

وهذا هو الحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية.

مثال (١–٣): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\cos y \cos x\, dx + \sin y \cos ec^2 x\, dy = 0$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة:

$$\cos y \cos x\, dx = -\sin y \cos ec^2 x\, dy$$

ثم نفصل المتغيرات وذلك بقسمة طرفي المعادلة على $\cos y\ \cos ec^2 x$

فنحصل على:

$$\frac{\cos x}{\cos ec^2 x}dx = -\frac{\sin y}{\cos y}dy$$

وبتكامل الطرفين:

$$\int \frac{\cos x}{\cos ec^2 x}dx = -\int \frac{\sin y}{\cos y}dy \Rightarrow \int \sin^2 x \cos x\, dx = -\int \frac{\sin y}{\cos y}dy.$$

$$\therefore \frac{1}{3}\sin^3 x = \ln(\cos y) + \ln c$$

$$\therefore c\cos y = e^{\frac{1}{3}\sin^3 x}.$$

ومنها يكون $y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{c}e^{\frac{1}{3}\sin^3 x}\right)$.

وهذا هو الحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية.

تمارين:

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0. \qquad ;y'=\dfrac{dy}{dx}$
2. $y'\cot x+y=2.$
3. $(x^2-yx^2)y'+y^2+xy^2=0.$
4. $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0.$

(٢) المعادلات التفاضلية المتجانسة:

تعريف: تُسمى الدالة $M(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n إذا تحقق الشرط:

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n M(x,y).$$

أمثلة:

مثال (٢-١): الدالة $f(x,y)=x^4-x^3y$ دالة متجانسة من الدرجة الرابعة.

وذلك لأن:

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda x)^4-(\lambda x)^3(\lambda y)\\ &=\lambda^4(x^4-x^3y)\\ &=\lambda^4 f(x,y). \end{aligned}$$

مثال (٢-٢): الدالة $f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}+\tan\dfrac{y}{x}$ دالة متجانسة من الدرجة صفر.

وذلك لأن:

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y)&=e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\tan\frac{\lambda y}{\lambda x}\\ &=e^{\frac{y}{x}}+\tan\frac{y}{x}\\ &=\lambda^0 f(x,y). \end{aligned}$$

مثال (٢-٣): الدالة $f(x,y)=x^2+\sin x.\cos x$ دالة غير متجانسة.

وذلك لأن:

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda x)^2+\sin(\lambda x).\cos(\lambda x)\\ &\neq \lambda^n f(x,y). \end{aligned}$$

تعريف: يُقال أن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ متجانسة إذا كانت كل من $M(x,y),N(x,y)$ دالتين متجانستين ولهما نفس درجة التجانس.

ولإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1).$$

نتبع الخطوات التالية:

١- نضع المعادلة(1) في الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-M(x,y)}{N(x,y)} \quad (2).$$

٢- نقسم كل من البسط والمقام في الطرف الأيمن للمعادلة(2) على x ذات أعلى

قوى (أي نقسم على x المرفوعة لأكبر أس) فنحصل على معادلة في الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x}) \quad (3).$$

٣- نضع $\frac{y}{x}=z$ ومن ثم يكون $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$ وبالتعويض في المعادلة(3) نحصل على معادلة تفاضلية تكون قابلة لفصل المتغيرات في x,z .

٤- نجري عملية التكامل ثم نضع بعد ذلك $\frac{y}{x}=z$ لنعود إلى المتغيرات الأصلية.

مثال (٢-٤): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x+y)dy+(y-x)dx=0.$$

الحل: بوضع المعادلة في الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}.$$

وبقسمة كل من البسط والمقام في الطرف الأيمن على x نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

وباستخدام التعويض $z=\frac{y}{x}$ ومن ثم يكون $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{1-z}{1+z}.$$

$$\therefore x\frac{dz}{dx}=\frac{1-z}{1+z}-z$$

$$\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{1-z-z^2-z}{1+z}$$

$$\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{-(z^2+2z-1)}{1+z}.$$

وبفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{1}{x}dx=\frac{-(1+z)}{z^2+2z-1}dz.$$

وبإجراء عملية التكامل على الطرفين كما يلي:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{2} \int \frac{2z+2}{z^2+2z-1} dz$$
$$\therefore \ln x = \frac{-1}{2} \ln(z^2+2z-1) + \ln c.$$

ومنها يكون:

$$x = \frac{c}{\sqrt{z^2+2z-1}}.$$

وبوضع $z = \frac{y}{x}$ نحصل على:

$$x^2(\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1) = c^2$$
$$\therefore y^2 + 2xy - x^2 = c.$$

وهذا هو الحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية.

مثال (٢-٥): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x\frac{dy}{dx} = y - x\tan\frac{y}{x}.$$

الحل: بوضع المعادلة في الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\tan\frac{y}{x}}{x}.$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \tan\frac{y}{x}.$$

وبوضع $z = \frac{y}{x}$ ومن ثم يكون $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$z + x\frac{dz}{dx} = z - \tan z$$
$$\therefore x\frac{dz}{dx} = -\tan z.$$

وبفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{dx}{x} = \frac{-1}{\tan z} dz.$$

وبإجراء عملية التكامل على الطرفين نحصل على:

$$\ln x = -\ln(\sin z) + \ln c.$$
$$\therefore \frac{c}{\sin z} = x$$
$$\Rightarrow \sin\frac{y}{x} = \frac{c}{x}.$$

وهذا هو الحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية.

تمارين:

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0.$
2. $2x^3y'=y(2x^2-y^2).$
3. $(x^2+y^2)y'=2xy.$
4. $(xy^2)dy=(x^3-y^3)dx.$
5. $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}.$
6. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}.$
7. $xy'=y\cos(\ln\dfrac{y}{x}).$

(٣) المعادلات التفاضلية القابلة للتحويل إلى معادلات متجانسة:

- المعادلات التفاضلية التي تكون على الصورة:

$$y'=f(ax+by).$$

حيث f دالة متصلة.

بوضع $ax+by=z$ فيها تتحول إلى معادلة متجانسة ، أو إلى معادلة قابلة لفصل المتغيرات مباشرة يمكن حلها كما سبق.

- والمعادلات التفاضلية التي تكون على الصورة:

$$y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}).$$

حيث f دالة متصلة. لها حالتين هما:

١- إذا كان $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

أي الخطين المستقيمين $a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0$ يكونا متوازيين

فبوضع $a_1x+b_1y=z$ أو $a_2x+b_2y=z$ في المعادلة تتحول إلى معادلة متجانسة يمكن حلها أيضاً كما سبق.

٢- أما إذا كان $\dfrac{a_1}{b_1}\neq\dfrac{a_2}{b_2}$

أي الخطين المستقيمين $a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0$ يكونا متقاطعين

فنوجد نقطة تقاطعهما وذلك بحل معادلتيهما معاً جبرياً ، ولتكن نقطة تقاطعهما هي (α,β) ثم بوضع $x=x+\alpha, y=y+\beta$ فتتحول المعادلة إلى معادلة متجانسة أو إلى معادلة قابلة لفصل المتغيرات مباشرة يمكن حلها أيضاً كما سبق.

أمثلة:

مثال (٣-١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx}=x-2y+3.$$

الحل: نضع المعادلة في الصورة $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y+3}{2x-4y+5}$

وواضح أن $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ حيث $\frac{1}{-2}=\frac{2}{-4}$ أي أن الخطين المستقيمين متوازيين.

وبوضع $x-2y=z$ ومن ذلك يكون:

$$1-2\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1-\frac{dz}{dx}).$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$\frac{1}{2}(1-\frac{dz}{dx})=\frac{z+3}{2(z+\frac{5}{2})}.$$

$$\therefore 1-\frac{dz}{dx}=\frac{2z+6}{2z+5}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=1-\frac{2z+6}{2z+5}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{2z+5-2z-6}{2z+5}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{-1}{2z+5}$$

$$\therefore (2z+5)dz+dx=0.$$

وبالتكامل نحصل على:

$$z^2+5z+x+c=0$$

$$\therefore (x-2y)^2+5(x-2y)+x+c=0.$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة.

مثال (٣-٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x-5y+5)dy+(5x-y+1)dx=0.$$

الحل: نضع المعادلة في الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-y+1}{-x+5y-5}.$$

واضح أن $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ حيث $\frac{5}{-1}\neq\frac{1}{-5}$ أي أن الخطين المستقيمين متقاطعين.

بحل معادلتي المستقيمين $5x-y+1=0,-x+5y-5=0$ معا نحصل على نقطة التقاطع $(x,y)\equiv(0,1)$.

وبوضع $x=x+0, y=y+1$ نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-1-y+1}{-x+5+5y-5}=\frac{5x-y}{-x+5y}=\frac{5-\frac{y}{x}}{-1+5\frac{y}{x}}.$$

وبوضع $\frac{y}{x}=z$ فيكون $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$ وبالتعويض نحصل على:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{5-z}{-1+5z}$$

$$\therefore x\frac{dz}{dx} = \frac{5-z}{-1+5z} - z \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{5-z-z(-1+5z)}{-1+5z} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{-5z^2+5}{5z-1}.$$

$$\therefore \frac{dx}{x} = (\frac{5z-1}{-5z^2+5})dz \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}(\frac{-10z+2}{-5z^2+5})dz$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}(\frac{-10z}{-5z^2+5})dz + \frac{1}{5}(\frac{1}{z^2-1})dz.$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(-5z^2+5) + \frac{1}{5}\tan ch^{-1} z + c.$$

$$\therefore \ln x = -\frac{1}{2}\ln(-5\frac{y^2}{x^2}+5) + \frac{1}{5}\tan ch^{-1}(\frac{y}{x}) + c.$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة.

(٤) المعادلات التفاضلية التامة:

- المعادلة التفاضلية التي في الصورة:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ .$$

إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فإنها تُسمى معادلة تفاضلية تامة.

والحل العام للمعادلة التفاضلية التامة نحصل عليه مباشرة بالتكامل مع عدم تكرار أي حد من ناتج التكامل.

أما إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ فإن المعادلة لا تكون تامة. ولجعلها تامة لابد من ضربها

في معامل تكاملي μ نوجده من أحد العلاقتين الآتيتين:

$$\mu = e^{\int (\frac{M_y - N_x}{N})dx} \ \vee \ \mu = e^{\int (\frac{N_x - M_y}{M})dy}.$$

حيث $M_y = \frac{\partial M}{\partial y} \ , \ N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$.

بحيث يكون هذا المعامل μ دالة فقط إما في المتغير x أو في المتغير y .

أمثلة:

مثال (٤-١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(\cos x - x\cos y)dy - (\sin y + y\sin x)dx = 0.$$

الحل:

$$M(x,y) = -(\sin y + y\sin x), \ N(x,y) = (\cos x - x\cos y).$$

$$\therefore M_y = -\cos y - \sin x \ , \ N_x = -\sin x - \cos y.$$

واضح أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ومن ثم تكون المعادلة تامة ،

ولإيجاد الحل العام لها نجري عملية التكامل على حدود المعادلة كما يلي:

$$\int (\cos x - x\cos y)dy - \int (\sin y + y\sin x)dx + c = 0$$
$$\therefore\ y\cos x - x\sin y - x\sin y + y\cos x + c = 0.$$

وبحذف تكرار الحدود في ناتج التكامل نحصل على الحل العام للمعادلة:

$$y\cos x - x\sin y + c = 0.$$

مثال (٤–٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0.$$

الحل:

$$M(x,y) = (1 - xy),\ N(x,y) = (xy - x^2).$$
$$\therefore M_y = -x\ ,\ N_x = y - 2x.$$

واضح أن $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ومن ثم تكون المعادلة غير تامة ،

لذلك يجب أن نوجد معامل تكاملي μ من أحد العلاقتين الآتيتين:

$$\mu = e^{\int (\frac{M_y - N_x}{N})dx} \ \vee\ \mu = e^{\int (\frac{N_x - M_y}{M})dy}.$$
$$\mu = e^{\int (\frac{M_y - N_x}{N})dx} = e^{\int (\frac{-x-y+2x}{xy-x^2})dx} = e^{\int \frac{-(y-x)}{x(y-x)}dx} = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}.$$

واضح أن μ دالة فقط في المتغير x .

وبضرب طرفي المعادلة في $\mu = \frac{1}{x}$ تصبح على الصورة:

$$(\frac{1}{x} - y)dx + (y - x)dy = 0.$$

وفي هذه الحالة يكون:

$$M(x,y) = (\frac{1}{x} - y),\ N(x,y) = (y - x).$$
$$\therefore M_y = -1\ ,\ N_x = -1.$$

أي أن المعادلة تصبح تامة.

وبإجراء عملية التكامل على حدودها نحصل على:

$$\ln x - yx + \frac{y^2}{2} - yx + c = 0$$

وبحذف تكرار الحدود في ناتج التكامل نحصل على حل المعادلة:

$$\ln x - yx + \frac{y^2}{2} + c = 0$$

(٥) المعادلات التفاضلية الخطية:

- المعادلة التفاضلية التي في الصورة:

$$\frac{dy}{dx}+g(x)y= f(x).$$

تُسمى معادلة تفاضلية خطية.

والحل العام لها يُعطى من العلاقة:

$$\mu y=\int \mu f(x)dx+c.$$

حيث μ معامل تكاملي يُعطى من العلاقة:

$$\mu = e^{\int g(x)dx}.$$

أمثلة:

مثال (٥–١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x.$$

الحل: واضح أن المعادلة التفاضلية خطية على الصورة $\frac{dy}{dx}+g(x)y= f(x)$

حيث: $g(x)=-\frac{1}{x}\ ,\ f(x)=x$

والحل العام لها يُعطى من العلاقة $\mu y=\int \mu f(x)dx+c$ حيث:

$$\mu = e^{\int g(x)dx}=e^{\int(-\frac{1}{x})dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}.$$

وإذاً الحل العام للمعادلة يكون:

$$(\frac{1}{x})y=\int(\frac{1}{x})xdx+c \Rightarrow \frac{y}{x}=x+c \Rightarrow y=x^2+xc.$$

مثال (٥–٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1+x^2)dy=(\sqrt{1+x^2}\sin x-xy)dx.$$

الحل: نكتب المعادلة على الصورة:

$$\frac{dy}{dx}+(\frac{x}{1+x^2})y=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

واضح أن هذه المعادلة التفاضلية خطية على الصورة $\frac{dy}{dx}+g(x)y= f(x)$ حيث:

$$g(x)=\frac{x}{1+x^2}\ ,\ f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}\ ,$$

وإذاً الحل العام للمعادلة يُعطى من العلاقة $\mu y=\int \mu f(x)dx+c$:

$$\mu = e^{\int g(x)dx}=e^{\int(\frac{x}{1+x^2})dx}=e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}=\sqrt{1+x^2}\ ,$$

$$\therefore y\sqrt{1+x^2}=\int(\sqrt{1+x^2})(\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}})dx+c$$
$$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}=-\cos x+c.$$

(٦) معادلة برنولي التفاضلية :

- المعادلة التفاضلية التي في الصورة:

$$\frac{dy}{dx}+g(x)y=f(x)y^n.$$

حيث $n\neq 1$, $n\neq 0$ تُسمى معادلة برنولي التفاضلية.

والحل العام لها يمكن الحصول عليه بقسمة حدود هذه المعادلة على y^n

واستخدام التعويض $y^{1-n}=z$ فتتحول المعادلة بذلك مباشرة إلى معادلة خطية

يمكن حلها كما سبق.

مثال (٦-١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{4y}{x}+x\sqrt{y}$

الحل: نكتب المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}-(\frac{4}{x})y=xy^{\frac{1}{2}}$

وبوضع $y^{1-\frac{1}{2}}=z$ ومن ثم يكون $y^{\frac{1}{2}}=z$ أي أن $y=z^2$ وإذاً:

$$\frac{dy}{dx}=2z\frac{dz}{dx}.$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على $2z\frac{dz}{dx}-(\frac{4}{x})z^2=xz$

$$\therefore \frac{dz}{dx}-(\frac{2}{x})z=\frac{x}{2}.$$

والمعادلة الأخيرة هذه معادلة تفاضلية خطية الحل العام لها يُعطى من العلاقة:

$$\mu z=\int\mu(\frac{x}{2})dx+c\ ;\ \mu=e^{\int(\frac{-2}{x})dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

وإذاً حل المعادلة يكون:

$$(\frac{1}{x^2})z=\int(\frac{1}{x^2})(\frac{x}{2})dx+c=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+c=\frac{1}{2}\ln x+c.$$

وبالتعويض عن $\sqrt{y}=z$ نحصل على:

$$\frac{\sqrt{y}}{x^2}=\ln\sqrt{x}+c.$$

وهذا هو الحل العام لمعادلة برنولي المعطاة.

(٧) معادلة ريكاتي التفاضلية :

- المعادلة التفاضلية التي في الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=g(x)y^2+f(x)y+h(x).$$

تُسمى معادلة ريكاتي التفاضلية.

والحل العام لها يمكن الحصول عليه باستخدام التعويض $y=y_1+\frac{1}{z}$

حيث y_1 حل خاص لها (قد يُعطى في المسئلة أو يمكن الحصول عليه بالتخمين ، وذلك باختيار مناسب للمتغير y كدالة في x بحيث تتحقق المعادلة) ،

فتتحول المعادلة بذلك مباشرة إلى معادلة خطية يمكن حلها كما سبق.

أو باستخدام التعويض $y=y_1+z$ حيث y_1 حل خاص لها

فتتحول المعادلة بذلك مباشرة إلى معادلة برنولي السابقة.

مثال (٧–١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x).$$

حيث $y=1$ حل خاص لها.

الحل: نكتب المعادلة على الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=xy^2-y^2-xy-xy+y+x=(x-1)y^2+(1-2x)y+x.$$

وواضح أنها معادلة ريكاتي التفاضلية حيث:

$$g(x)=x-1\,,\ f(x)=1-2x\,,\ h(x)=x.$$

وبوضع $y=1+\frac{1}{z}$ ومن ثم يكون $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(x-1)(1+\frac{1}{z})^2+(1-2x)(1+\frac{1}{z})+x$$
$$=(x-1)(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2})+(1-2x)(1+\frac{1}{z})+x.$$
$$\therefore \frac{dz}{dx}=(x-1)(-z^2-2z-1)+(1-2x)(-z^2-z)-xz^2$$
$$=z-x+1.$$
$$\therefore \frac{dz}{dx}-z=-x+1.$$

وواضح أن المعادلة الأخيرة معادلة تفاضلية خطية على الصورة:

$$\frac{dz}{dx}+g(x)z=f(x)$$

الحل العام لها يُعطى من:

$$\mu z=\int\mu(-x+1)dx+c\ \ ;\ \ \mu=e^{\int(-1)dx}=e^{-x}.$$

وإذاً حل المعادلة يكون:

$$\begin{aligned} ze^{-x} &= \int(-x+1)e^{-x}dx + c \\ &= \int xde^{-x} + \int e^{-x}dx + c \\ &= xe^{-x} - \int e^{-x}dx + \int e^{-x}dx + c \\ &= xe^{-x} + c. \end{aligned}$$

وبالتعويض عن $z = \dfrac{1}{y-1}$ نحصل على:

$$\frac{e^{-x}}{y-1} = xe^{-x} + c.$$

وهذا هو الحل العام لمعادلة ريكاتي المعطاة.

تمارين متنوعة علي الباب الثاني:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1. $x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0.$
2. $x(1-x^2)dy = (x^2-x+1)dx.$
3. $x^2(y+a)^2(\dfrac{dy}{dx}-1) = y^2-2ax^2y+a^2$; a constant.
4. $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2.$
5. $(x^2-3y^2)xdx = (y^2-3x^2)ydy.$
6. $x\dfrac{dy}{dx} = y - x\cos^2\dfrac{y}{x}.$
7. $(3y-x)\dfrac{dy}{dx} = 3x-y+4.$
8. $(y+ax+b)\dfrac{dy}{dx} = y+ax-b$; a,b constants.
9. $xy^3dx + (x^2y^2-1)dy = 0.$
10. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}.$
11. $x(y+1)dx - (x^2+1)dy = 0.$
12. $(xy-y^2)dx - (x^2-2xy)dy = 0.$
13. $(e^y+x)dx + (xe^y-2y)dy = 0.$
14. $\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{dy}{dx} - y = y^4.$
15. $\dfrac{dy}{dx} - y^2 - 2xy = 2.$

فكرة حل التمارين:

(١)، (٢) ، (٣) ، (١١) فصل متغيرات ، (٤) بوضع $x+y=z$.

(٥) ، (٦) ، (١٢) متجانسة وبوضع $y/x=z$ ، (٧) خطين متقاطعين في (3/2,-1/2-).

(٨) خطين متوازين ، (٩) غير تامة (العامل المكامل $1/y$) ، (١٠) خطية.

(١٣) تامة ، (١٤) برنولي ، (١٥) ريكاتي ($y=-1/x$ حل خاص لها).

الباب الثالث

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأعلى من الأولى:

وهذا النوع من المعادلات يُسمى أيضا المعادلات التفاضلية الغير قابلة للحل بالنسبة إلى مشتقاتها. والشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة n يكون:

$$p^n + f_1(x,y)p^{n-1} + \ldots + f_{n-1}(x,y)p + f_n(x,y) = 0. \qquad (1)$$

حيث $p=\dfrac{dy}{dx}$.

ولإيجاد الحل العام لمثل هذه المعادلة التفاضلية نحاول تحويلها إلى معادلة تفاضلية أو عدد من المعادلات التفاضلية (وذلك بتحليلها) من الرتبة الأولى والدرجة الأولى والتي يمكن حلها بالطرق السابق ذكرها في الباب الثاني.

وينقسم هذا النوع من المعادلات إلى الأقسام الأتية:

(١) المعادلات التفاضلية القابلة للحل في p .

(٢) المعادلات التفاضلية القابلة للحل في y .

(٣) المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x .

(٤) معادلات لاجرانج التفاضلية.

(٥) المعادلات اكليروت التفاضلية.

وسنتاول كلا من هذه الأنواع بالشرح والتفصيل إن شاء الله فيما يلي.

أولاً: المعادلات التفاضلية القابلة للحل في p :

إذا أمكن تحليل الطرف الأيسر للمعادلة (1) باعتباره كثيرة حدود في p إلى عوامل خطية حقيقية، وبمساواة كل عامل من هذه العوامل بالصفر فإننا نحصل بذلك على عدد n من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى والتي يمكن حلها بالطرق السابقة.

أي إذا أمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة:

$$(p-F_1)(p-F_2)\ldots(p-F_n)=0.$$

حيث $F_1, F_2, \ldots, F_n$ دوال في المتغيرين x, y .

ووضع $(p-F_1)=0\ ,\ (p-F_2)=0\ ,\ \ldots,\ (p-F_n)=0$ أي أن:

$$\frac{dy}{dx}=F_1(x,y)\ ,\ \frac{dy}{dx}=F_2(x,y)\ ,\ \frac{dy}{dx}=F_n(x,y).$$

وبحل كل معادلة من هذه المعادلات نحصل على:

$$F_1(x,y,c)=0\ ,\ F_2(x,y,c)=0\ ,...,\ F_n(x,y,c)=0.$$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) هو حاصل الضرب:

$$F_1(x,y,c)F_2(x,y,c)...\ F_n(x,y,c)=0.$$

أمثلة:

مثال (١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^2-(x+y)y'+xy=0.\qquad ;y'=\frac{dy}{dx}.$$

الحل: نضع $p=y'$ فتصبح المعادلة في الصورة:

$$p^2-(x+y)p+xy=0.$$

وبالتحليل نحصل على:

$$(p-x)(p-y)=0.$$

وبمساواة العوامل الناتجة من التحليل بالصفر نحصل على المعادلات:

$$(p-x)=0\ ,\ (p-y)=0.$$

ومن ذلك نحصل على:

$$p=x\ \ ,\ p=y.$$

أي أن: $$\frac{dy}{dx}=x\ \ ,\ \frac{dy}{dx}=y$$

وهذه معادلات من الرتبة الأولى والدرجة الأولى حلها يكون كما يلي:

$$\therefore dy=xdx\ \ ,\ dy=ydx.$$
$$\therefore y=\frac{1}{2}x^2+c\ \ ,\ y=ce^x.$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$(y-\frac{1}{2}x^2+c)(y-ce^x)=0.$$

مثال (٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x^2+xy=0.\qquad ;p=\frac{dy}{dx}.$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة:

$$xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x(x+y)=0.$$

وبالتحليل نحصل على:

$$(xp+x+y)(yp+x)=0.$$

وبمساواة العوامل الناتجة من التحليل بالصفر نحصل على المعادلات:

$$xp + x + y = 0\ ,\ yp + x = 0.$$

أي أن:

$$x\frac{dy}{dx} + x + y = 0.$$

$$y\ \frac{dy}{dx} + x = 0.$$

وهذه معادلات من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

- المعادلة الأولى $x\dfrac{dy}{dx} + x + y = 0$ نكتبها في الصورة:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = -1.$$

واضح أنها معادلة خطية الحل العام لها يُعطى من:

$$\mu y = \int \mu(-1)dx + c\ \ ;\ \mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x.$$

$$\therefore\ xy = \int x(-1)dx + c \Rightarrow xy = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\therefore\ y + \frac{x}{2} - \frac{c}{x} = 0.$$

- والمعادلة الثانية $y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$ نكتبها في الصورة:

$$ydy = -xdx.$$

واضح أنها معادلة قابلة لفصل المتغيرات الحل العام لها يُعطى من:

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c.$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - c = 0.$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$(y + \frac{x}{2} - \frac{c}{x})(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c) = 0.$$

ثانياً: المعادلات التفاضلية القابلة للحل في y :

هذا النوع من المعادلات يكون في الصورة:

$$y = f(x, p)\quad ;\ p = \frac{dy}{dx}. \qquad (1)$$

ولإيجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات نتبع الخطوات الأتية:

١- نفاضل طرفي المعادلة بالنسبة إلى x فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

أي أن:

$$p = F(x, p, \frac{dp}{dx}).$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

٢- نحل هذه المعادلة $p = F(x, p, \frac{dp}{dx})$. وليكن الحل في الصورة:

$$\phi(x, p, c) = 0. \qquad (2)$$

٣- نحذف p بين المعادلتين (2),(1) (إن أمكن ذلك) فنحصل بذلك على الحل العام المطلوب للمعادلة الأصلية (1) . وإذا لم يمكن فصل p بين المعادلتين نعبر عن كل من x, y كدالة بارامترية في p (وليكن مثلا $(x = \phi(p)\ ,\ y = \psi(p))$ ، وبالتالي يُعطى الحل العام للمعادلة الأصلية (1) في الصورة البارامترية.

أمثلة:

مثال (١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^5 + y'^3 - y - 2 = 0. \qquad ; y' = \frac{dy}{dx}.$$

الحل: نضع $p = y'$ فتصبح المعادلة في الصورة:

$$y = p^5 + p^3 - 2 = 0. \qquad (1)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على:

$$p = (5p^4 + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$
$$\therefore\ pdx = (5p^4 + 3p^2)dp$$
$$\therefore\ dx = (5p^3 + 3p)dp.$$

وبتكامل هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$x = \frac{5}{4}p^4 + \frac{3}{2}p^2 + c. \qquad (2)$$

والحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية الأصلية نحصل عليه بحذف p بين المعادلتين (2),(1) . أو يمكن اعتبار المعادلتين (2),(1) بمثابة الحل العام للمعادلة الأصلية في الصورة البارامترية.

مثال (٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2y = px - \frac{16}{p^2}x^2. \qquad ; p = \frac{dy}{dx}.$$

الحل: بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على:

$$2p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{32}{p^2}x + (\frac{32}{p^2}x^2)\frac{dp}{dx}.$$
$$\therefore\ 2p^4 = p^4 + xp^3\frac{dp}{dx} - 32xp + 32x^2\frac{dp}{dx}.$$

$$\therefore \frac{dp}{dx}(xp^3+32x^2)-p^4-32xp=0.$$
$$\therefore x\frac{dp}{dx}(p^3+32x)-p(p^3+32x)=0.$$
$$\therefore (p^3+32x)(x\frac{dp}{dx}-p)=0.$$

والمعادلة الأخيرة هذه تتحقق عندما يكون $(p^3+32x)=0$ أو $(x\frac{dp}{dx}-p)=0$ وحيث إن العامل (p^3+32x) لا يحتوي على المشتقة $\frac{dp}{dx}$ لذلك لا يُؤخذ في الإعتبار. ومن المعادلة $(x\frac{dp}{dx}-p)=0$ نحصل على:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}.$$

وبالتكامل نحصل على:

$$p=cx.$$

وبالتعويض عن $p=cx$ في المعادلة الأصلية نحصل على:

$$2y=cx^2-\frac{16}{c^2}.$$
$$\therefore 2c^2y-c^3x^2+16=0.$$

وهذا هو الحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية الأصلية.

ثالثاً: المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x :

هذا النوع من المعادلات يكون في الصورة:

$$x=f(y,p)\quad ;\ p=\frac{dy}{dx}. \qquad (1)$$

ولإيجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات نتبع الخطوات الأتية:

١- نفاضل طرفي المعادلة بالنسبة إلى y فنحصل على:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

أي أن:

$$\frac{1}{p}=F(y,p,\frac{dp}{dy}).$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

٢- نحل هذه المعادلة $\frac{1}{p}=F(y,p,\frac{dp}{dy})$. وليكن الحل في الصورة:

$$\phi(y, p, c) = 0. \qquad (2)$$

٣- نحذف p بين المعادلتين (2),(1) (إن أمكن ذلك) فنحصل بذلك على الحل العام المطلوب للمعادلة الأصلية (1) . وإذا لم يمكن فصل p بين المعادلتين نعبر عن كل من x, y كدالة بارامترية في p (وليكن مثلا $(x = \phi(p)\ ,\ y = \psi(p)$) ، وبالتالي يُعطى الحل العام للمعادلة الأصلية (1) في الصورة البارامترية.

أمثلة:

مثال (١): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^3 - y' - x - 1 = 0. \qquad ; y' = \frac{dy}{dx}.$$

الحل: نضع $p = y'$ فتصبح المعادلة في الصورة:

$$x = p^3 - p - 1. \qquad (1)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى y نحصل على:

$$\frac{1}{p} = (3p^2 - p)\frac{dp}{dy}.$$

$$\therefore dy = (3p^2 - 1)dp.$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + c. \qquad (2)$$

المعادلتين (2),(1) يمثلان الحل العام للمعادلة الأصلية في الصورة البارامترية.

مثال (٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x = \frac{p^2}{y} + \frac{4y}{p}. \qquad ; p = \frac{dy}{dx}.$$

الحل: بالتفاضل بالنسبة إلى y نحصل على:

$$\frac{2}{p} = \frac{2p}{y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{y^2} + 4\left(\frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}\right).$$

وبالضرب في p^2y^2 نحصل على:

$$2y^2p = 2yp^3\frac{dp}{dy} - p^4 + 4\left(y^2p - y^3\frac{dp}{dy}\right).$$

$$\therefore \frac{dp}{dy}(2yp^3 - 4y^3) - p(p^3 - 2y^2) = 0.$$

$$\therefore 2y\frac{dp}{dy}(p^3 - 2y^2) - p(p^3 - 2y^2) = 0.$$

$$\therefore (p^3 - 2y^2)\left(2y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

والمعادلة الأخيرة هذه تتحقق عندما يكون $(p^3-2y^2)=0$ أو $(2y\dfrac{dp}{dy}-p)=0$ وحيث إن العامل (p^3-2y^2) لا يحتوي على المشتقة $\dfrac{dp}{dy}$ لذلك لا يُؤخذ في الإعتبار. ومن المعادلة $(2y\dfrac{dp}{dy}-p)=0$ نحصل على:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}.$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\ln p=\frac{1}{2}\ln y+\ln c\Rightarrow p=\sqrt{cy}.$$

وبالتعويض عن $p=\sqrt{cy}$ في المعادلة الأصلية نحصل على:

$$2x=\frac{cy}{y}+\frac{4y}{\sqrt{cy}}.$$
$$\therefore 16y=c(2x-c)^2.$$

وهذا هو الحل العام المطلوب للمعادلة التفاضلية الأصلية.

رابعاً: معادلة لاجرانج التفاضلية:

هذه المعادلة تكون في الصورة:

$$y=x\phi(y')+\psi(y') \qquad ;y'=\frac{dy}{dx}.$$

وتكون هذه المعادلة خطية بالنسبة للمتغيرات x,y .

ولإيجاد الحل العام لمعادلة لاجرانج التفاضلية نتبع الخطوات الأتية:

١- نضع $y'=p$ في المعادلة فتصبح المعادلة على الصورة:

$$y=x\phi(p)+\psi(p). \qquad (1)$$

٢- بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x فنحصل على:

$$p=x\phi'(p)\frac{dp}{dx}+\phi(p)+\psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$
$$\therefore [p-\phi(p)]dx=[x\phi'(p)+\psi'(p)]dp.$$
$$\therefore [p-\phi(p)]\frac{dx}{dp}=[x\phi'(p)+\psi'(p)].$$
$$\therefore \frac{dx}{dp}=(\frac{\phi'(p)}{p-\phi(p)})x+(\frac{\psi'(p)}{p-\phi(p)}).$$

والمعادلة الأخيرة هذه معادلة تفاضلية خطية في المتغيرات $p,\dfrac{dx}{dp}$ يمكن الحصول على الحل العام لها كما سبق ، ويكون الحل العام لها على الصورة:

$$y=x\phi(p)+\psi(p). \qquad (2)$$

وعلى ذلك يكون الحل العام لمعادلة لاجرانج التفاضلية في الصورة البارامترية هو عبارة عن المعادلتين (2),(1).

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y=(y'+1)x+y'^2.$$

الحل: واضح أن المعادلة المعطاة هي معادلة لاجرانج التفاضلية. ولإيجاد الحل العام لها نضع $y'=p$ في المعادلة فنحصل على:

$$y=(p+1)x+p^2. \qquad (1)$$

وبتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x فنحصل على:

$$p=(p+1)+x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}.$$

$$\therefore -1=(x+2p)\frac{dp}{dx}.$$

$$\therefore \frac{dx}{dp}+x=-2p.$$

والمعادلة الأخيرة هذه معادلة تفاضلية خطية في المتغيرات $p,\frac{dx}{dp}$ حلها العام يُعطى من العلاقة:

$$\mu x=\int \mu(-2p)dp+c. \quad ;\ \mu=e^{\int dp}=e^p.$$

$$\therefore xe^p=\int e^p(-2p)dp+c$$

$$=-2pe^p+\int 2e^p dp+c$$

$$=-2pe^p+2e^p+c.$$

$$\therefore x=-2p+2+ce^{-p}. \qquad (2)$$

وإذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يكون هو عبارة عن المعادلتين (2),(1) في الصورة البارامترية.

خامساً: معادلة اكليروت التفاضلية:

هذه المعادلة تكون في الصورة:

$$y=xy'+\psi(y') \quad ;y'=\frac{dy}{dx}.$$

أي بوضع $\phi(y')=y'$ في معادلة لاجرانج التفاضلية نحصل على معادلة اكليروت التفاضلية.

وتوجد طريقتان للحصول على الحل العام لمعادلة اكليروت التفاضلية هما:

الطريقة الأولى: بوضع $y'=c$ في المعادلة (إن كان ذلك مناسبا) فتصبح المعادلة في الصورة:

$$y=xc+\psi(c).$$

فنحصل بذلك على الحل العام لها مباشرة.

الطريقة الثانية: نضع $y'=p$ في المعادلة فتصبح على الصورة:

$$y=xp+\psi(p). \qquad (1)$$

ثم بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x فنحصل على:

$$p=x\frac{dp}{dx}+p+\psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

$$\therefore [x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$
$$\therefore [x+\psi'(p)]dp=0.$$

وهذه المعادلة الأخيرة تتحقق عندما يكون $[x+\psi'(p)]=0$ أو $dp=0$.

فإذا كان $[x+\psi'(p)]=0$ فحل هذه المعادلة يكون على الصورة:

$$\phi(x,p,c)=0. \qquad (2)$$

ومن ثم يكون الحل العام لمعادلة اكليروت التفاضلية في الصورة البارامترية هو عبارة عن المعادلتين (1),(2) .

أما إذا كان $dp=0$ فحل هذه المعادلة يكون $p=c$ وبالتعويض بهذا الحل في المعادلة الأصلية نحصل على $y=xc+\psi(c)$ فيكون هذا هو الحل العام لمعادلة اكليروت.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y=px+\sqrt{p^2+4}.$$

الحل: واضح أن هذه المعادلة هي معادلة اكليروت التفاضلية والحل العام لها نحصل عليه مباشرة بوضع $p=c$.

وإذا الحل العام للمعادلة يكون هو:

$$y=cx+\sqrt{c^2+4}.$$

تمارين متنوعة علي الباب الثالث:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

16. $x=y'^3+y'.$
17. $x=y'\sqrt{y'^2+1}.$
18. $y=y'^2+2y'^3.$
19. $y'=e^{\frac{xy'}{y}}.$
20. $y=xy'-x^2y'^3.$
21. $y'^2-2xy'=8x^2.$
22. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1).$
23. $x(y-xy')^2=xy'^2-2yy'.$
24. $y(xy'-y)^2=y-2xy'.$
25. $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2.$

الباب الرابع

معادلات الغلاف والمسارات المتعامدة لعائلة من المنحنيات:

أولاً: معادلات الغلاف.

نعتبر عائلة المنحنيات التكاملية المعرفة بالمعادلة:

$$\phi(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

والتي هي في الواقع تنتج من الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

وبفرض أن لعائلة المنحنيات هذه منحنى غلافي (أي منحنى ثابت ومحدد)

وليكن هو ى بحيث إن ى يمس جميع منحنيات العائلة (1) .

حيث إن ميل المماس للمنحنى الغلافي ى عند أي نقطة (x, y) يكون هو نفس الميل لمنحنى العائلة الذي يمسه عند هذه النقطة، لذلك فإن معادلة هذا المنحنى الغلافي ى تحقق المعادلة التفاضلية (2) .

وفي الحالة العامة لا يكون المنحنى الغلافي ى أحد منحنيات العائلة (1) ولذلك لا يمكن استنتاج معادلته من العائلة (1) بإعطاء قيمة معينة للثابت c ولكن يمكن الحصول على معادلة المنحنى الغلافي للعائلة (1) بحذف البارامتر c بين المعادلتين:

$$\phi(x, y, c) = 0. \quad , \frac{\partial \phi}{\partial c} = 0.$$

وفي الواقع يمثل الغلاف (المنحنى الغلافي) لعائلة المنحنيات التكاملية لأي معادلة تفاضلية الحل المفرد لها (وهو أحد الحلول غير المستنتجة من الحل العام لهذه المعادلة مهما أعطينا للثوابت الإختيارية في الحل العام من قيم).

أمثلة:

مثال (١): أوجد معادلات الغلاف للحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^2 (\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = a^2. \qquad ; a \quad \text{constant.}$$

الحل: واضح أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2.$$

حيث هذا الحل يحقق المعادلة.

وهذا الحل يمثل عائلة من الدوائر مركزها النقطة $(c, 0)$.

ومعادلات الغلاف لهذه العائلة نحصل عليها بحذف البارامتر c بين المعادلتين:

$$\phi(x, y, c) = (x - c)^2 + y^2 - a^2 = 0. \quad , \frac{\partial \phi}{\partial c} = -2(x - c) = 0.$$

(أي بحل هاتين المعادلتين معاً) فنحصل بذلك على:

$$y = \pm a.$$

وهذه المعادلة الأخيرة تمثل معادلات الغلاف وهي معادلة لخطين مستقيمين يمسان عائلة الدوائر السابقة.

مثال (٢): أوجد معادلات الغلاف للحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y = xy' + y'^2.$$

الحل: واضح أن هذه المعادلة في الصورة:

$$y = xy' + \psi(y').$$

فهي معادلة اكليروت ومن ثم فإن الحل العام لها يكون على الصورة:

$$y = xc + \psi(c).$$

وإذاً معادلات الغلاف في الصورة البارمترية تُعطى من المعادلتين:

$$\phi(x, y, c) = xc + c^2 - y = 0. \;\; , \;\frac{\partial\phi}{\partial c} = x + 2c = 0.$$

تمارين:

أوجد معادلات الغلاف للمعادلات التفاضلية الآتية:

26. $y = xy' + \cos y'.$
27. $y = xy' + y'^3.$
28. $y = xy' + \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}\,. \quad ; a, b$ constants.
29. $y' = \ln(xy' - y).$
30. $y = xy' + \sqrt{y'^2 - 1}.$

ثانياً: معادلات المسارات المتعامدة.

تُعرف المسارات المتعامدة على أي عائلة من المنحنيات $\phi(x, y, a) = 0$ بأنها مجموعة المنحنيات المتقاطعة مع هذه العائلة بحيث تكون المماسات عند نقطة التقاطع للعائلة المعطاة ولهذه المنحنيات المتقاطعة معها متعامدة.

وللحصول على المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة نتبع الخطوات الأتية:

١-

٢-

٣- نوجد ميل المماس لأي منحنى من عائلة المنحنيات $\phi(x, y, a) = 0$ وليكن y'.

٤- فيكون ميل المماس لأي منحنى من المسارات المتعامدة مع عائلة المنحنيات المعطاة هو $-\dfrac{1}{y'}$ (وهذا من شرط التعامد).

٥- نحذف البارامتر a بين المعادلتين: $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0 \;,\; \phi(x, y, a) = 0$ فنحصل بذلك على المعادلة التفاضلية: $\phi(x, y, y') = 0$.

٦- بوضع $-\dfrac{1}{y'}$ بدلاً من y' في المعادلة $\phi(x, y, y') = 0$ فنحصل بذلك مباشرة على المعادلة التفاضلية المناظرة للمسارات المتعامدة والتي تكون في الصورة: $\phi(x, y, -\dfrac{1}{y'}) = 0$.

٧- نوجد الحل العام لهذه المعادلة فنحصل بذلك على عائلة المسارات المتعامدة.

أمثلة:

مثال (١): أوجد المسارات المتعامدة مع عائلة القطوع المكافئة:

$$y = ax^2. \qquad ; a \quad \text{constant.}$$

الحل: ميل المماس لأي من هذه القطوع هو:

$$y' = 2ax.$$

$$\therefore y' = \frac{2y}{x}. \quad ; a = \frac{y}{x^2}.$$

وإذاً المعادلة التفاضلية المناظرة لعائلة القطوع المعطاة هي $y' = \frac{2y}{x}$.

وبوضع $-\frac{1}{y'}$ بدلاً من y' في هذه المعادلة فنحصل بذلك مباشرة على المعادلة التفاضلية المناظرة للمسارات المتعامدة وهي $y' = \frac{-x}{2y}$.

والحل العام لها يُعطى من:

$$2ydy = -xdx.$$

بالتكامل نحصل على:

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = c^2.$$

وهذه تكون هي المسارات المتعامدة المطلوبة وهي تمثل عائلة من القطوع الناقصة.

مثال (٢): أوجد المسارات المتعامدة مع عائلة الدوائر:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0. \qquad (1)$$

الحل: بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على:

$$2x + 2yy' - 2a = 0. \qquad (2)$$

وبحذف a بين المعادلتين (2),(1) كما يلي:

$$\frac{x^2 + y^2}{2x^2 + 2xyy'} = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xyy'.$$

$$\therefore y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \qquad (3)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية المناظرة للدوائر المعطاة.

وبوضع $-\frac{1}{y'}$ بدلاً من y' في هذه المعادلة فنحصل بذلك مباشرة على المعادلة التفاضلية المناظرة للمسارات المتعامدة وهي:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \qquad (4)$$

والحل العام لهذه المعادلة نحصل عليه بوضعها على الصورة:

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}.$$

ثم بوضع $\frac{y}{x} = z$ ومن ذلك يكون $y' = z + xz'$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{1-z^2}.$$

$$\therefore x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{1-z^2} - z = \frac{2z - z(1-z^2)}{1-z^2} = \frac{z+z^2}{1-z^2}.$$

$$\therefore \frac{dx}{x} = \frac{(1-z^2)}{z(1+z^2)}dz.$$

$$\therefore \frac{dx}{x} = (\frac{1}{z} - \frac{2z}{(1+z^2)})dz.$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\ln x = \ln z - \ln(1+z^2) + \ln c.$$

$$\therefore x = \frac{cz}{1+z^2}.$$

نضع $\frac{y}{x} = z$ فنحصل على:

$$x = \frac{c\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow x = \frac{cxy}{x^2+y^2}.$$

$$\therefore cy = x^2 + y^2.$$

والمعادلة الأخيرة هذه هي معادلة المسارات المتعامدة لعائلة الدوائر المعطاة.

تمارين عامة:

١- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(1+x)}{x(1+y)}.$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{1-x}.$
3. $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + x^2 y = 0.$
4. $(y-a)dx + x^2 dy.$; a constant.
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 - a^2}.$; a constant.

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2}{1+y^2}.$
7. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}}{1+x^2}.$
8. $(\tan y)dx-(\tan x)dy=0.$
9. $(12x+5y-9)dx+(15x+2y-3)dy=0.$
10. $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}.$
11. $x\frac{dy}{dx}=x^3-y.$
12. $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0.$
13. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-y^2x}{y-x^2y}.$
14. $(x+2y+1)dx-(2x+3)dy=0.$
15. $(3y-x)\frac{dy}{dx}=(3x-y+4).$

٢- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1. $(y-x)dx+(y+x)dy=0.$
2. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$
3. $xy^2dy=(x^2+y^2)dx.$
4. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1}.$
5. $\frac{dy}{dx}=xy^2+2xy.$

٣- تحقق من أن المعادلات التفاضلية الآتية تكون تامة ثم أوجد الحل العام لها:

1. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0.$
2. $(y^3-x)\frac{dy}{dx}=y.$
3. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0.$
4. $\frac{xdx+(2x+y)dy}{x^2+y^2}=0.$
5. $[\frac{y^2}{(x-y)^2}]dx+[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}]dy=0.$

٤- ابحث عن عامل مكامل للمعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد الحل العام لها:

1. $(x^3+y^3)dx+8xy^3dy=0.$
2. $xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0.$

3. $(1-xy)dx+(1-x^2)dy=0.$
4. $(1+y)dx+(y^2+xy+y+1)dy=0.$
5. $(xy-1)dx=(x^2-xy)dy.$

٥- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x+1}+(x+1)^3.$
2. $\dfrac{dy}{dx}+(\dfrac{1-2x}{x^2})y-1=0.$
3. $3y^2\dfrac{dy}{dx}-4y^3-x-1=0.$
4. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy-4xy^2=0.$
5. $\dfrac{dy}{dx}(x^2y^3-2y)=1.$
6. $(y\ln x-2)ydx=xdy.$
7. $y-(\cos x)\dfrac{dy}{dx}=y^2(1-\sin x)\cos x.$
8. $y'^2-2\cos x=0.$
9. $y'^2+2y'-6=0.$
10. $y=x+y'^2.$
11. $x+yy'^2=y'(1+xy).$
12. $y\sin x+y'\cos x=1.$
13. $y'^2+y'=e^y.$
14. $y=xy'+\cos y'.$
15. $y'=\ln(xy'-y).$

- **المراجع:**

(1) S.Lipschutz : “Differential Equations”, Schaum’s outline Series McGraw-Hill Book Company (1972).

(2) L.Elsgolts : “Differential Equations and the calculus of variations”, Mir publishers, Moscow (1970).

(3) A.Bermant and I.Aramanovich: “Mathematical Analysis”, Mir publishers, Moscow (1975).

رياضيات تطبيقية ٢

أ.د مهدى

الفرقة الأولي

كليـــــة التربية
شعبة الرياضيات

الحركـــة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، ثم حركة جسيم في مســـتوى ثم تناولنا في الباب الذي يليه حركة المقذوفات وهي نوع مـــن أنـــواع الحركـــة في المســـتوى وسنتعرف بمشيئة الله في هذا الباب على نوع له أهميه من أنواع الحركة تُســـمى " الحركـــة التوافقية البسيطة " أو الحركة الموجية. إذا تحرك جسيم متذبذباً حول موضع اتزانـــه (وهـــو الوضع الذي إذا زُحزح الجسيم عنه وهو متزن عاد إليه مرةً أخرى) سُميت حركة الجســـيم بالحركة الاهتزازية أو الحركة الدورية وهناك أنواع مختلفة من الإهتزازات منها

♦الإهتزاز الحر أو الحركة التوافقية البسيطة وهى ما سندرسه بالتفصيل.

♦الإهتزاز القسري إذا أثرت قوة قاسرة دورية على جسيم يُقال أن الحركة إهتزاز قسري.

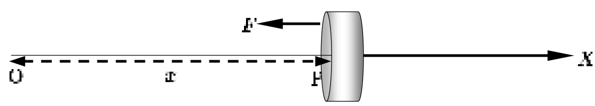
♦الإهتزاز المخمد الحر وفيها يكون الجسيم لقوة مقاومة مثل الاحتكاك والتي تجعـــل ســـعة الذبذبة تتناقص تدريجياً حتى تنعدم ومن ثم يتوقف الجسيم عن الحركة.

♦الإهتزاز القسري المخمد وهذه الحالة تمثل الحالتين السابقتين معاً وفيها يتلاشى تأثير المقاومة تدريجياً مع الزمن ويتبقى تأثير الذبذبة القسرية.

الإهتزاز الحر يُقال أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة وفيها يتحرك الجسيم متذبـــذباً حول موضع اتزانه دون أن تتغير سعة الذبذبة أو الزمن الدوري لها كما أن القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً تتجه نحو نقطة ثابتة أثناء الحركة ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناســـب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تُسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفـــرض أن O هـــي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذي سيمثله المحور OX وأن موضع الجسيم عند اللحظة t هو P حيث $\mathrm{OP} = x$ كما بالشكل. من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = k/m \qquad \text{....(1)}$$



والاشارة السالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الذبذبة ولإيجاد سرعة الجسيم عند أي موضـــع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad ....(2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج أن $v\dfrac{dv}{dx} = -\omega^2 x$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$v^2 = c_1 - \omega^2 x^2 \qquad ....(3)$$

حيث c_1 هو ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج إلى شروط أبتدائيـــة ولذلك سنعتبر أن أقصى مسافة للجسيم هي a والتي عندها يسكن الجسيم (أي أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c_1 = \omega^2 a^2$ وتُكتب المعادلة (3) في الصورة

$$v^2 = \omega^2 a^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 \;\; a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad .....(4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الأشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجســـيم متحركـــاً في الاتجـــاه الموجب (أي في اتجاه OX – تزايد x) وسنعتبر الأشارة السالبة إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه المضاد.

والآن لمعرفة موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية نضع $v = dx/dt$ في المعادلـــة (4) (علـــى اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \omega dt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad ....(5a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل ويُسمى " زاوية الطور " ويُعيّن من الشروط الأبتدائيـــة للحركـــة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$x = a\sin \;\; \omega t + \epsilon \qquad ......(5b)$$

وهذه المعادلة تُمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالـــة الأشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $\left|\sin\ \omega t+\epsilon\ \right|\le 1$ ومن المعادلة (5 b) يكون

$$\left|x\right|=\left|a\sin\ \omega t+\epsilon\ \right|=\left|a\right|\left|\sin\ \omega t+\epsilon\ \right|\le a \qquad \Rightarrow -a\le x\le a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x=a$ ، $x=-a$ لذلك فإن a تُسمى سعة الحركة التوافقية.

كما يمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x=\pm a$ ، كما تكـــون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x=0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x و $-x$ متساوٍ.

■ الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية ، ومن ثم فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويُعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من أحد أطراف الذبذبة $x=+a$ إلى الطـــرف الآخر $x=-a$ ثم العودة مرة أخرى $x=+a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبةً كاملـــةً وحيث أن

$$\begin{aligned}
x&=a\sin(\omega t+\epsilon)=a\sin(\omega t+\epsilon+2\pi)\\
&=a\sin\left(\omega\underbrace{\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'}+\epsilon\right)\\
&=a\sin(\omega t'+\epsilon), \qquad\qquad \left(t'=t+\frac{2\pi}{\omega}\right)
\end{aligned}$$

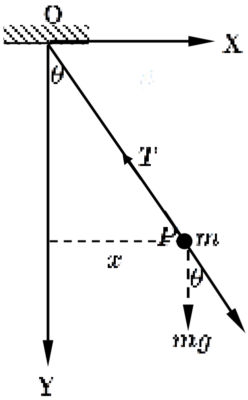
أي أن x عند الزمن t هي نفسها عند الزمن $t'=t+\frac{2\pi}{\omega}$ و ذلك يعني أن الجسيم يعود إلى وضعه الأول بعد زمن $\tau=\frac{2\pi}{\omega}$ و هو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري).

و لأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملـــها الجسيم في وحدة الزمن و هو ما يُعرف بالتردد.

■ التردد Frequency

يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) وسنرمز له بالرمز ν وهو مقلوب الزمن الدوري أي أن $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طـــرف خـــيط غـــير مـــرن (ساق خفيفة) طولها L مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طـــول الخيط L . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحـــت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومـــن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في الاتجاه الأفقي OX هى (بتحليل قوة الشد) بفرض أن $\angle \mathrm{YOP} = \theta$

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ddot{x} = -T\frac{x}{L}$$

وحيث أن θ صغيرة جداً فيمكن اعتبار أن الحركـــة هـــي حركـــة أفقيـــة فقـــط أي أن $T\cos\theta = mg$ ومن ثم تصبح المعادلة السابقة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L\cos\theta}$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\cos\theta \cong 1$ ومن ثم تؤول المعادلـــة السابقة إلى الصورة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -\frac{g}{L}\,x$$

هذه المعادلة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من – حيث – $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

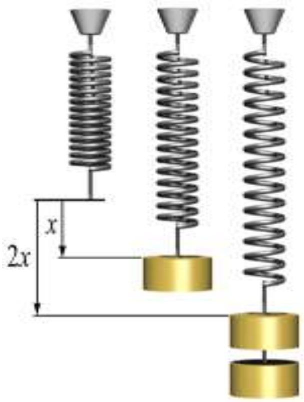
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـ " بندول الثواني ".

■ قانون هوك Hooke's Law

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب تناسباً طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. الصيغة الرياضية لهذا القانون هي $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه و عدد لفاته إلى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell}x$$



حيث λ ثابت يُسمى معامل المرونة للخيط و الزنبرك ، x مُثل الأستطالة الحادثة ، ℓ لطول الطبيعي للخيط ، T وة الشد الناشئة في الخيط. (الأستطالة الحادثة هي الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي).

كما ذكرنا ما يسري على الخيط المرن يسري على الزنبركات في حالة الأستطالة فقط أما في حالة الأنضغاط فتختفي القوة الناشئة في الخيط خلافاً لحالة الزنبرك و هذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم اغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ فاثبت أن حركة هذا الجسيم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن الدوري لها.

الحــــــــل

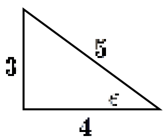
حيث أن موضع الجسيم يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على

$\dot{x} = -6\sin 2t + 8\cos 2t,$ again differentiating $\therefore \ddot{x} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$

Or $\therefore \ddot{x} = -4(\underbrace{3\cos 2t + 4\sin 2t}_{x}) = -2^2 x$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $\omega = 2$ حيث أن العجلة تتناسب مع المسافة و زمنها الدوري τ يتعين من $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ وسعة الحركة يمكن الحصول عليه كالآتي

$$3\cos 2t + 4\sin 2t = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\sin 2t\right)$$
$$= 5\ \ \sin\epsilon\, cos2t + \cos\epsilon \sin 2t\ \ = 5\sin(2t + \epsilon)$$



ومن ثم فإن سعة الذبذبة هي 5

مثـــ ٢ ـــال

إذا تعينت سرعة نقطة مادية تتحرك في خط مستقيم من العلاقة $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ فاثبت أن حركة هذه النقطة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$.

الحــــــــل

حيث أن $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ و باجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير x ينتج أن

$$v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \Rightarrow 2v\frac{dv}{dx} = n^2(4b - 2x) \quad \text{Or}$$
$$\underbrace{v\frac{dv}{dx}}_{\text{accel}} = -n^2(x - 2b) \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -n^2(x - 2b)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها مركز الذبذبة $4b$ و $n = \omega$

(توضيح: بوضع $y = x - 2b$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -n^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = 2b$).

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v = 0$ ومنها

$$0 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \quad \Rightarrow (x - 2b)(x - 6b) = 0 \quad \text{i.e.} \;\; x = 2b, \; x = 6b$$

وهذه القيم تمثل أطراف الذبذبة ومن ثم فتكون سعة الذبذبة هي $2b$ والزمن T اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$ يمثل ربع الزمن الدوري أي أن

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \because T = \frac{1}{4}\tau \qquad \Rightarrow T = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u, u' سرعتي الجسيم على بعدين b, b' من مركز الذبذبة على الترتيب. أوجد الزمن الدورى لها.

الحـــــــل

حيث أن السرعة لجسيم يتحرك حركة توافقية هي $v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ حيث أن سعة الحركة هي a وعند الموضعين المذكورين يكون

$$u^2 = w^2(a^2 - b^2), \qquad u'^2 = w^2(a^2 - b'^2)$$

من العلاقتين نحصل على – بالطرح –

$$u'^2 - u^2 = w^2(b^2 - b'^2), \qquad Or \qquad \omega^2 = \frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2}}$$

ومن ثم يكون الزمن الدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b^2 - b'^2}{u'^2 - u^2}}$ وهو المطلوب

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = \mu - \mu\cos 2t$ حيث μ ثابت فاثبـــت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة واوجد زمنها الدوري ومركزها.

الحـــــــل

حيث أن موضع الجسيم المتحرك $x = \mu - \mu\cos 2t$ وبالتفاضل مرتين للحصـــول علـــى العجلة نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\sin 2t \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\underbrace{\mu\cos 2t}_{\mu - x} = 4(\mu - x) = -4(x - \mu)$$

وهي معادلـــة حركـــة توافقيـــة بســـيطة مركزهـــا النقطـــة $x = \mu$ وزمنـــها الـــدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ حيث $\omega = 2$.

(توضيح: بوضع $y = x - \mu$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -2^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = \mu$).

(على الدارس ايجاد سعة الذبذبة).

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة اثناء جزء من الحركة – مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الذبذبة – هي X_1, X_2, X_3 عند نهايات ثلاث ثوانٍ متتالية عيّن الزمن الدوري للحركة.

الحـــــــل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركة التوافقيـــة البســـيطة هـــي $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$ و سنفرض أن زمن وصول الجسيم إلى الموضع X_1 هو t وبالتالي زمن وصوله إلى الموضع X_2 هو $t + 1$ وزمن وصوله إلى الموضع X_3 هو $t + 2$ ويكون

$$\begin{aligned} X_1 &= a\sin(\omega t + \epsilon) \\ X_2 &= a\sin(\omega(t+1) + \epsilon) \\ X_3 &= a\sin(\omega(t+2) + \epsilon) \end{aligned}$$

من المعادلات السابقة – بجمع الأولى والثالثة – ينتج أن

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= a\ \ \sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon) \\ &= 2\underbrace{a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{X_2}\cos\omega \\ &= 2X_2\cos\omega \end{aligned}$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$\because\ X_1 + X_3 = 2X_2\cos\omega$$

$$\Rightarrow \cos\omega = \frac{X_1 + X_3}{2X_2}$$

$$\text{Or} \qquad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)$$

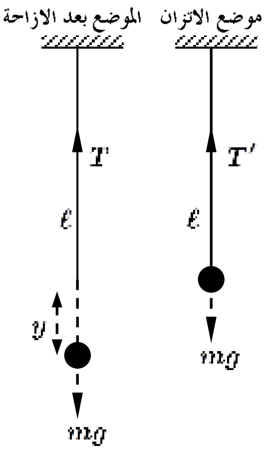
وحيث أن الزمن الدوري يُعطى بالعلاقة $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وبالتعويض عن قيمة ω يكون

$\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)}$ و يجب أن يتحقق الشرط $-2X_2 \le X_1 + X_3 \le 2X_2$

مثـــال ٦

عُلق جسيم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زحزح الجسيم من موضع اتزانه مسافةً رأسيةً صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبةً في الثانية. فإذا كان طول الخيط عند موضع الاتزان هو ℓ. اوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الاستطالة مساويةً للطول الطبيعي هو $m(4\pi^2 n^2 \ell - g)$.

الحـــل



حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الاتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط (قبل تعليق الكتلة m) و أن T' هو قيمة الشد في الخيط عند الاتزان ، في حالة الاتزان تؤثر على الكتلة قوتا الوزن والشد في الخيط فقط ومن قانون هوك يكون

$$mg = T' = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \qquad (1)$$

إذا أعطينا الكتلة ازاحة y بعيدا عن موضع اتزانها في هذه الحالة فإن معادلة حركة الكتلة هي

$$m\ddot{y} = mg - T \qquad (2)$$

حيث T هو الشد في الخيط و يساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$ وبالتعويض عن قيمة الشد في المعادلة (2) و باستخدام المعادلة (1)

$$\therefore\ m\ddot{y} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$$
$$= \cancel{mg} - \underbrace{\cancel{\frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0)}}_{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0}y = -\frac{\lambda}{\ell_0}y$$

$$\therefore\ \ddot{y} = -\frac{\lambda}{\ell_0 m}x = -w^2x, \qquad \therefore\ \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$$

المعادلة الاخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 m}{\lambda}}$ و التردد يتعين من $\therefore\ n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$ $\nu = \frac{1}{\tau}$ و نجد من هذه العلاقة $\frac{\lambda}{\ell_0} = 2\pi n\ ^2\ m$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$\cancel{m}g = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4\pi^2n^2\cancel{m}(\ell - \ell_0)$$

$$\therefore\ \ell - \ell_0 = \frac{g}{4\pi^2n^2}\ \text{ Or }\ \ell_0 = \ell - \frac{g}{4\pi^2n^2}$$

وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعيين قيمة الشد حينما تكون الاستطالة مساوية للطول الطبيعي من قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4\pi^2n^2m\ell_0 = 4\pi^2n^2m\left(\ell - \frac{g}{4\pi^2n^2}\right) = m\ \ 4\pi^2n^2\ell - g$$

مثـــ ٦ ـــال

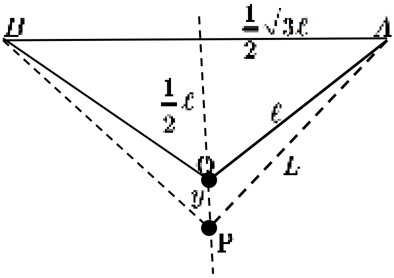
عُلق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن c مثبت طرفاه في نقطتين A, B يقعان في مستوى أفقي واحد. و في وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية 60^0 مع الرأسي و يكون طول كل منهما ℓ ، معامل مرونة الخيط يساوي mg . فإذا زحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي و ترك ليتذبذب. اوجد زمن الذبذبة.

الحــــــل

باعتبار أن λ هو معامل المرونة للخيط حيث

$\lambda = mg$ و بفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط

ومن ثم فعند حالة الاتزان يكون الشد من قانون هوك



$$mg = 2\lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\cos 60^0 = \lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

ولكن $\lambda = mg$ ومن ثم $\ell_0 = \frac{1}{2}\ell$

باعتبار أن y يمثل المسافة الرأسية و L هو هو طول الخيط بعد الازاحة كما بالشكل

ومن ثم بكتابة معادلة الحركة الرأسية للكتلة يكون

$$m\ddot{y} = mg - 2\lambda \frac{L - \ell_0}{\ell_0}\cos\angle\mathrm{OPA}$$

حيث P موضع الجسيم عند اللحظة t ، O هو موضع الاتزان وعند موضع عام حيث

$\mathrm{PA{=}PB} = L$ هو طول الخيط والآن

$$L^2 = \left(y + \frac{1}{2}\ell\right)^2 + \frac{3}{4}\ell^2 = \ell^2 + \ell y + y^2$$

ومن ثم

$$L = \ell\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)^{1/2} = \ell + \frac{1}{2}y$$

حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية فأعلى وايضاً

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{OPA} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{L} &= \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{\ell + \frac{1}{2}y}\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{2\ell}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)\end{aligned}$$

لأول قوة حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية

$$m\ddot{y} = mg - \frac{2\lambda\left(\ell + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\ell\right)}{\frac{1}{2}\ell} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

وهذا

$$\ddot{y} = g - g\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

أو

$$\ddot{y} = -\frac{5g}{2\ell}y$$

والاخيرة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $2\pi\sqrt{2\ell \,/\, 5g}$

■ مســـــــائل Problems ■

الحركة الدفعية وتصادم الاجسام

Impulse and Collision Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وسنتعرف بمشيئة الله تعالى في هذا الباب على نوع من أنواع الحركة تُسمى " الحركة الدفعية ".

■ الدفع وقانون الحركة

إذا بدأنا بقانون نيوتن الثاني للحركة معوضين عــن العجلــة بصــورتها $a = \dfrac{dv}{dt}$ يكــون $F = m\dfrac{dv}{dt}$ وبضرب طرفي هذه العلاقة في dt وتكاملها بين اللحظتين t_1, t_2 حيث سرعة الجسيم عندهما v_1, v_2 فإن

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv = mv\Big|_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1$$

يُعرف التكامل الزمني للقوة F بين اللحظتين t_1, t_2 والوارد بالطرف الأيسر للمعادلة السابقة ب دفع القوة خلال الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ ويرمز له بالرمز $\underline{I}$ اختصاراً لكلمة **Impulse** أي أن $\int_{t_1}^{t_2} F dt = \underline{I}$. ودفع أي قوة هو متجه ينطبق عليها نظراً لأن الزمن كمية قياسية.

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة

ينص هذا المبدأ على أن كمية الحركة mv في اتجاه خط التصادم (في حالة الكرات يكون خط المركزين) ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ قانون نيوتن التجريبي Experimental Newton's Law

في اتجاه خط المركزين تخضع لقاعدة نيوتن التجريبية والتي تنص على أن الســرعة النســبية للجسمين بعد التصادم تساوي معكوس السرعة النسبية لهما قبل التصادم مضروباً في معامــل الأرتداد (يُرمز له بالرمز e)أي أن

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

ويُطبق هذا القانون في اتجاه خط التصادم (خط المركزين) ، وتنحصر قيمة معامل الأرتداد e بين الصفر والواحد $0 \le e \le 1$ ويكون $e = 0$ إذا كان الجسمان عديمي المرونة ويساوي الواحد $e = 1$ إذا كان الجسمان تامي المرونة.

ايضاً حيث أن الكرتين ملساوتان فإنه لا توجد قوة عمودية على خط المركزين (خط التصادم) ومن ثم فإنه في حالة التصادم غير المباشر تظل مركبة السرعة لكل من الكرتين في اتجاه العمودي على خط المركزين ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ تصادم الاجسام

عند تصادم جسمان مرنان فإنه يحدث نتيجةً لهذا التصادم ردود فعل كبيرة جداً تؤثر على كلا الجسمين لفترة صغيرة ثم يميل الجسمان بعدها للعودة إلى حركتهما ، تُسمى ردود الأفعال هذه بردود الأفعال الدفعية.

سنعتبر في دراستنا تصادم الاجسام الملساء بحيث أننا سنهمل جميع قوى الاحتكاك ويبقى فقط ردود الأفعال العمودية على الأسطح المشتركة و لسهولة الدراسة سنعتبر تصادم اجسام على هيئة كرات مرنة ملساء كما سنهمل كلا من قوى الأوزان لصغر دفوعها و التغير في مواضع الكرات أثناء فترة التصادم باعتبار أن هذه الفترة الزمنية للتصادم صغيرة جداً ، أي أن التصادم سيغير من سرعات الكرات ولن يغير من مواضعها أثناء فترة حدوثة. وفي دراستنا سوف نعتبر نوعين من التصادم (تصادم مرن وتصادم غير مرن) – التصادم غير المرن تم دراسته سابقاً – والتصادم المرن ينقسم إلى تصادم مباشر وتصادم غير مباشر.

■ التصادم المباشر وغير المباشر (مائل)

نعتبر تصادم كرتين ملساوتين ، الخط الواصل بين المركزين الهندسيين للكرتين يُسمى بخط المركزين أو خط التصادم ، و إذا كان التصادم بحيث كانت السرعتان قبل التصادم كلاهما في اتجاه خط التصادم للكرتين سُميّ هذا التصادم بـ "التصادم المباشر" أما في حالة التصادم غير المباشر يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كليهما مائلاً على خط التصادم بزاوية معينة – نلاحظ أن التصادم المباشر هو حالة خاصة من التصادم غير المباشر فيها زاوية الميل صفراً.

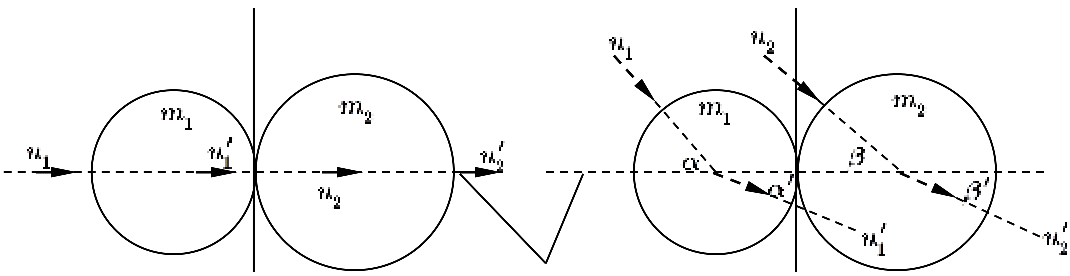
و في التصادم المرن سواءً كان التصادم مباشراً أو غير مباشر يُطبق قانون مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية و قانون نيوتن التجريبي في اتجاه خط التصادم. ويأخذ مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في حالة التصادم المباشر الصورة الرياضية

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2'$$

أما في حالة التصادم غير المباشر يكون

$$m_1u_1\cos\alpha + m_2u_2\cos\beta = m_1u_1'\cos\alpha' + m_2u_2'\cos\beta'$$

كما أن سرعة أي من الكرتين في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة قبل وبعد التصادم و من ثم فإن الكرة الساكنة أو الكرة المتحركة في اتجاه خط التصادم فإن حركتها بعد التصادم إذا تحركت تكون في اتجاه خط التصادم.



خط التصادم (خط المركزين)

تصادم مباشر

تصادم غير مباشر (مائل)

■ تصادم كرة بمستوى ثابت

نعتبر كرة ملساء كتلتها m اصطدمت بمستوى ثابت أملس وأن سرعة الكرة قبل التصـــادم مباشرة هي u وأن سرعتها بعد التصادم هي u' كما بالشكل و نظراً لأن كل من الكـــرة والمستوى أملسين فإن سرعة الكرة في اتجاه المستوى (العمودي على خط التصادم) لا تـــتغير بالتصادم أي أن

$$u \sin\alpha = u' \sin\theta \qquad (1)$$

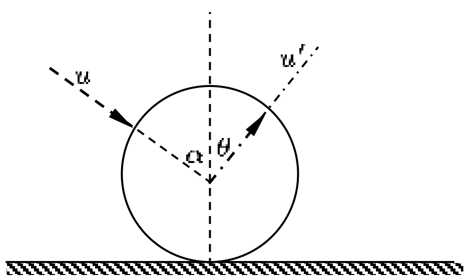
ومن قانون نيوتن التجريبي $u' \cos\theta = e u \cos\alpha$

وهاتان العلاقتان كافيتان لتعيين سرعة الكرة بعد التصادم إذا عُلمت سرعة الكرة قبل التصادم.

ومن العلاقة $u' \cos\theta = e u \cos\alpha$ نجد أنه إذا كان $e = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه في حالة تصادم كرة غير مرنة فإنها لا ترتد وإنما تتحرك على المستوى وبسرعة مقدارها $u \sin\alpha$.
أما إذا كان $e = 1$ فإنه يكون $u' \cos\theta = u \cos\alpha$ ومن هذه المعادلة والمعادلة (1) نحصل على

$$\tan\theta = \tan\alpha, \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

أي أن زاوية السقوط تساوي زاوية الأرتداد ونستنتج ايضاً أن $u = u'$ أي ان سرعة الكرة بعد التصادم تساوي في المقدار سرعتها قبل التصادم



■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

كرة تتحرك بسرعة u اصطدمت تصادماً مباشراً بكرة أخرى مساوية لها في الكتلة تتحـــرك بسرعة u' في الاتجاه المعاكس إذا توقفت الكرة ذات السرعة u بعد التصـــادم فاثبـــت أن $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{1+e}{1-e}$ حيث e هو معامل الارتداد.

الحـــــــل

نفترض أن سرعة الكرة التي تتحرك بسرعة u' بعد التصادم هي V وأن m هي كتلة كل من الكرتين و حيث أن الكرة ذات السرعة u توقفت بعد التصادم فإنه من مبدأ ثبوت كمية الحركة

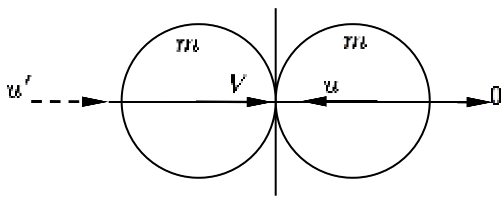
$$m \times 0 + m \times V = mu + m(-u') \quad \text{Or} \quad V = u - u'$$

ومن قانون نيوتن التجريبي

$$0 - V = -e(u - (-u')) \qquad \text{Or} \quad V = e(u + u')$$

$$\therefore\ u - u' = V = e(u + v) \quad \text{Or} \quad (1-e)u = (1+e)u'$$

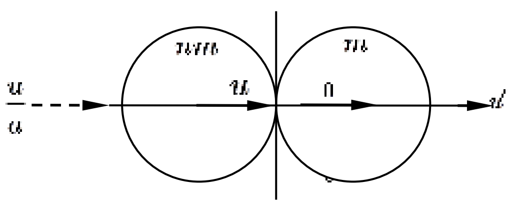
ولهذا فإن $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{1+e}{1-e}$



مثـــ ٢ ـــال

اصطدمت كرة كتلتها nm وسرعتها $\dfrac{u}{a}$ تصادماً مباشراً بكرة أخرى كتلتها m وسرعتها u وكانت السرعتان في نفس الاتجاه. إذا وقفت الكرة ذات الكتلة m بعد التصادم فاوجد معامل الارتداد.

الحـــــــل



نفرض أن الكرة ذات الكتلة nm تحركت بعد التصادم بسرعة V (في اتجاه خط التصادم حيث أن التصادم مباشر) و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$m(0) + nmV = mu + nm\left(\frac{u}{a}\right) \quad \Rightarrow nV = \left(1 + \frac{n}{a}\right)u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - 0 = -e\left(\frac{u}{a} - u\right) \quad \Rightarrow V = eu\left(1 - \frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

ومن المعادلتين (1) ، (2)

$$ne\cancel{u}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left(1 + \frac{n}{a}\right)\cancel{u} \quad \Rightarrow e = \frac{a+n}{n(a-1)}$$

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك كرة ملساء بسرعة 20 ft sec^{-1} اصطدمت بمستوى افقي أملس ثابت و في اتجاه يصنع زاوية 60^0 مع المستوى فإذا كان معامل الارتداد يساوي $e = 0.5$ فإوجد سرعة الكـــرة و اتجاهها بعد التصادم ثم أوجد مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة في اتجاه المستوى لا تتغير (في الاتجاه العمودي على خط التصـــادم) أي أن

$$u\sin\theta = 20\sin 30 \quad \Rightarrow u\sin\theta = 10$$

من قانون نيوتن التجريبي

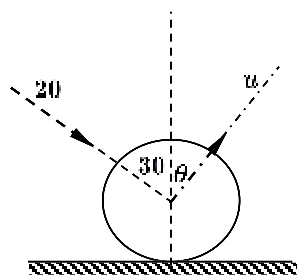
$$u\cos\theta = -e(-20\cos 30) \quad \text{Or} \quad u\cos\theta = 10\sqrt{3}(0.5) = 5\sqrt{3}$$

من المعادلتين بالتربيع والجمع نحصل على

$$u^2 = 100 + 75 = 175 \quad \Rightarrow u = \sqrt{175}$$

وبقسمة المعادلتين

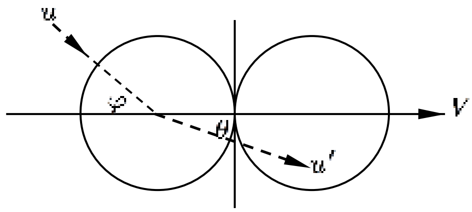
$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



مثــ ٤ ــال

اصطدمت كرة بأخرى ساكنة مساويةً لها في الكتلة تصادماً مائلاً. إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع مع خط التصادم زاوية φ. و كان e هومعامل الارتداد فاثبت ان اتجاه هذه الكرة بعد التصادم يصنع مع خط التصادم زاوية تتعين من $\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$.

الحـــــــل



من الشكل و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos\theta + mV = mu\cos\varphi + 0 \quad \Rightarrow u'\cos\theta + V = u\cos\varphi \tag{1}$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$u'\cos\theta - V = -e(u\cos\varphi - 0) \tag{2}$$

بجمع المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore\ 2u'\cos\theta = (1-e)u\cos\varphi \tag{3}$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u\sin\varphi \tag{4}$$

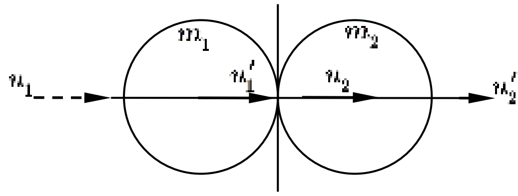
و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4)

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\tan\varphi}{1-e} \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\tan\varphi}{1-e} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$$

مثــ ٥ ــال

اثبــت أنــه في حالــة التصــادم المباشــر يكــون الفقــد في طاقــة الحركــة مســاوياً $\dfrac{(1-e^2)m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2$ حيث m_1, m_2 تمثل كتلتا الكرتين ، u_1, u_2 سرعتيهما قبل التصادم ، e معامل الارتداد.

الحـــــــل



من الشكل ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط التصادم

$$m_1u_1' + m_2u_2' = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (1)$$

و ذلك بفرض أن سرعتي الكرتان بعد التصادم هما u_1', u_2' و من قانون نيوتن التجريبي

$$u_1' - u_2' = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

الآن بتربيع المعادلة (1) ، (2) وضرب المعادلة (2) في m_1m_2 ثم الجمع نحصل على

$$(m_1u_1' + m_2u_2')^2 + m_1m_2(u_1' - u_2')^2 = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

باضافة وطرح المقدار $m_1m_2(u_1 - u_2)^2$ إلى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة نجد أن

$$(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 \pm m_1m_2(u_1 - u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

أي أن

$$(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) = (m_1 + m_2)(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ نحصل على

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

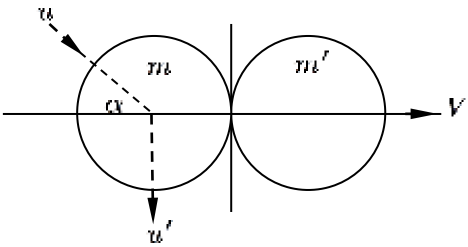
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2\right) = \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

من هذه العلاقة يتضح أن مجموع طاقتي الحركة بعد التصادم أقل من مجموع طاقتي حركة الكرتين قبل التصادم بمقدار $\frac{m_1 m_2 \ \ 1-e^2 \ \ (u_1-u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$ وهو ما يمثل مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

مثـــ ٦ ـــال

اصطدمت كرة ملساء بأخرى ساكنة. إذا كان اتجاها الحركة بعد التصادم متعامدين وكانـــت الكرتان تامتي المرونة فاثبت أن كتلتيهما متساويتان.

الحـــــــل



بفرض أن الكرة الساكنة كتلتها m' وحيث أن هذه الكرة كانت ساكنة فإن حركتها بعد التصادم بكون في اتجاه خط التصادم بسرعة ولتكن V وحيث أن اتجاها الحركة بعد التصادم متعامد فتكون السرعة u' عمودية على خط التصادم من الشكل وباعتبار أن كتلة الكرة الثانية m وسرعتها u في اتجاه يصنع زاوية α مع خط التصادم وأن سرعتها بعد التصادم u' و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos 90 + m'V = mu\cos\alpha + 0 \quad \Rightarrow m'V = mu\cos\alpha \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

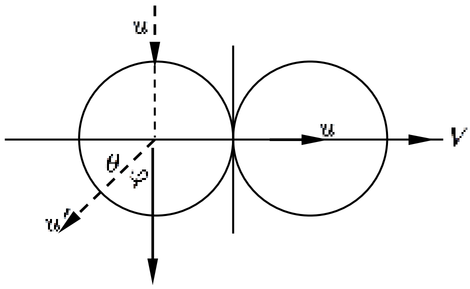
$$u'\cos 90 - V = -e(u\cos\alpha - 0) \quad \Rightarrow V = u\cos\alpha \quad (e=1) \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (2) يكون $\therefore m = m'$

مثـــ ٧ ـــال

تصطدم كرتان متساويتان وتتحركان بنفس السرعة و في اتجاهين متعامدين. إذا كـــان خـــط المركزين لحظة التصادم عمودياً على اتجاه الكرة الثانية وكان معامل الارتـــداد e فاثبـــت أن الكرة الثانية تنحرف بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ عن اتجاهها الأصلي.

الحـــــــل



من الشكل – مع مراعاة اتجاه السرعات – و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mV - mu'\cos\theta = mu\cos 90 + mu \quad \Rightarrow V - u'\cos\theta = u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - (-u'\cos\theta) = -e(u - u\cos 90) \quad \Rightarrow V + u'\cos\theta = -eu \qquad (2)$$

بطرح المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore 2u'\cos\theta = (1+e)u \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u \qquad (4)$$

و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4) $\tan\theta = \frac{2}{1+e}$ ولحساب انحراف السرعة عن اتجاهها الأصلي حيث الانحراف عن الاتجاه الأصلي هو $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ و من ثم

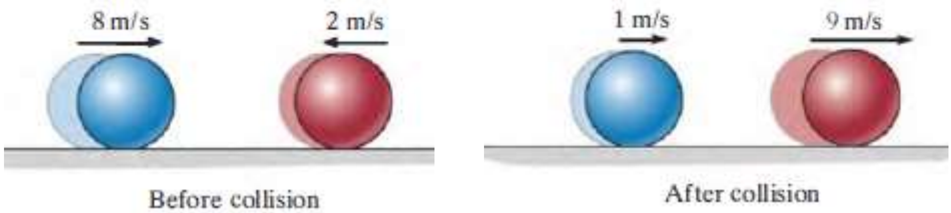
$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1+e}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{1+e}{2} \text{ Or } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

■ مسائل Problems ■

١- تتحرك كرة كتلتها الوحدة بسرعة $8\ \mathrm{ft\,sec^{-1}}$ عندما صدمت مستوى أفقي أملس ثابت في اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الرأسي. اثبت أنه إذا كان معامل الارتداد يساوي 0.5 فإن مقدار الفقد في طاقة الحركة يساوي 12 وحدة طاقة.

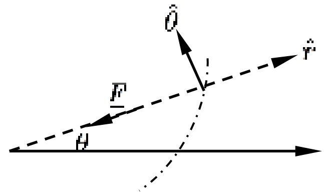
٢- عيّن معامل الارتداد بين الكرتين المتساويتين الكتلة ١ ، ٢ حيث وضّحت السرعات قبل وبعد التصادم على الرسم.



الحركة المداريـة

Orbital Motion

سنعالج في هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى. كثيراً ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين O يسمى بمركز القوة. كما تُسمى القوة في هذه الحالة بالقوة المركزية – حيث تنعدم المركبة العمودية لقوة المجال (طاردة أو جاذبة) ومن ثم تنعـــدم العجلة العمودية لحركة الجسيم دائماً و بتطبيق هذا الشرط نجد أنه من الاحداثيات القطبية



$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0$$
$$\therefore\ r^2\dot{\theta} = h\ \text{(const.)}$$

ويسمى المسار الذي ترسمه القوة بالمسار المركزي.

■ المعادلة التفاضلية للمسار المركزي Differential Equation of Orbital Path

معادلة الحركة في الاتجاهين r,θ هما

$$m\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ = -F \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تُعطي $r^2\dot{\theta} = h\ \text{(const.)}$

حيث h مقدار ثابت. المعادلتان (1) و (2) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب ومـــن هاتين المعادلتين بحذف $\dot{\theta}$ نحصل على

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{F}{m} \qquad (3)$$

ويمكن اجراء تكامل للمعادلة (3) باستخدام التعويض $\left(r=\frac{1}{u}\right)$ وبحذف t منها

$$\because r=\frac{1}{u} \qquad \therefore \frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{dr/du}\frac{du}{d\theta}\underbrace{\frac{h}{r^2}}_{d\theta/dt}=-h\frac{du}{d\theta},$$

$$\therefore \ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$
$$=-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2},$$

وبتعويض عن هذه النتائج في المعادلة نحصل على

$$-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{F}{mh^2u^2} \tag{4}$$

هذه المعادلة تُسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي وهي تُستخدم لمعرفة قانون القوة المركزي إذا عُلمت معادلة المسار و أيضاً إذا عُلمت القوة المركزية F فإنه يمكن حل المعادلة التفاضلية وايجاد معادلة المسار.

و كحالة خاصة حينما تكون الحركة في مجال قوة تتبع قانون التربيع العكسي $F=\frac{\mu}{r^2}$ فمن المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu \cancel{u^2}}{mh^2\cancel{u^2}}=\frac{1}{\mu^\star}, \qquad \mu^\star=\frac{mh^2}{\mu}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها العام على الصورة

$$u=\frac{1}{\mu^\star}\ \ 1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)$$

حيث ϵ,α ثابتي التكامل والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها

$$r=\frac{\mu^\star}{1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)}$$

وهذه المعادلة تُمثل قطع مخروط ويكون قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً حسبما تكون $\epsilon<1$ أو $\epsilon=1$ أو $\epsilon>1$ على الترتيب.

■ قانون السرعة Velocity Law

كما نعلم أن مركبتي السرعة في الاتجاهين r, θ هما $\dot{r},\ r\dot{\theta}$ ومن ثم فإن مقدار سرعة الجسيم v تتعين من $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ولكن $\dot{r} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ ومنها

$$v^2 = \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2h^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \qquad (5)$$

وهذه المعادلة تُعطي مقدار سرعة الجسيم عند أي موضع θ على المسار المركزي.

■ قوانين كبلر Kepler's Laws

من أهم تطبيقات الحركة بالاحداثيات القطبية هو دراسة حركة الكواكب. و لقد قام العالم يوهان كبلر (١٥٧١–١٦٣٠) و هو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية والمعرفة باسمه:

القانون الأول: تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

القانون الثاني: يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما أقترب من الشمس.

القانون الثالث: يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدوري ومعامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية.

هذه هي نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالي ٦٠ عاماً ليثبت على أساسها قانون الجذب العام والذي يُعتبر من أكبر كشوف الانسان

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية

كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب (الطرد) O هي عزم كمية الحركة الخطية حول O وتساوي -تذكر أن $v \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$ -

$$m\dot{r}(0) + mr\dot{\theta}(r) = mr^2\dot{\theta} = mh = \text{constant}$$

أي أن كمية الحركة الزاوية للجسيم حول المركز تظل ثابتة أثناء الحركة وهو ما يُسمى بمبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية.

■ السرعة المساحية Area Velocity

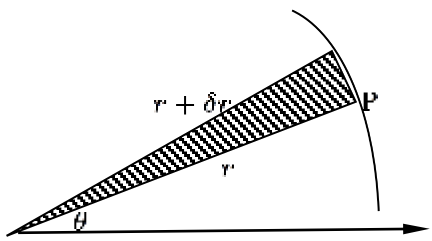
بفرض أن $\mathrm{P}(r,\theta)$ هو موضع الكوكب عند اللحظة الزمنية t وأنه بعد زمن صغير δt يكون عند الموضع $\mathrm{Q}(r+\delta r,\theta+\delta\theta)$. المساحة δA المقطوعة بمتجه الموضع خلال الفترة الزمنية δt تساوي تقريباً مساحة المثلث OPQ – كما بالشكل – أي أن

$$\delta A=\frac{1}{2}r(r+\delta r)\sin\delta\theta\cong\frac{1}{2}r^2\delta\theta$$

السرعة المساحية $\dot{A}$ هي المساحة التي يرسمها OP في وحدة الزمن و تتعين من

$$\begin{aligned}\dot{A}=\frac{dA}{dt}&=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta A}{\delta t}\\&=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}r^2\frac{\delta\theta}{\delta t}=\frac{1}{2}r^2\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t}\\&=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{h}=\frac{1}{2}h,\qquad\dot{A}=\frac{1}{2}h\end{aligned}$$

أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة في حالة المسار المركزي.



■ القُبا Apse

وتُعرف بأنها نقاط المسار المركزي والتي عندها يكون البعد عن مركز القوة نهاية عظمى أو صغرى. هذه الأبعاد تُسمى أبعاد القُبا أي عند نقط القُبا يكون $\dot{r}$ أو $\frac{du}{d\theta}$ أو $\frac{dr}{d\theta}$ وهذا يعني أنه عند القُبا تكون حركة الكوكب عمودية على متجه الموضع.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــال ١

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^2 = a^2\cos 2\theta$. اثبـــت أن الســـرعة تتناسب عكسياً مع r^3 وأن القوة تتناسب عكسياً مع r^7.

الحـــــــل

باختيار $r = \dfrac{1}{u}$ فيكون

$$\frac{1}{u^2} = a^2\cos 2\theta$$

بالتفاضل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$-\cancel{2}\frac{1}{u^3}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{2}a^2\sin 2\theta \;\Rightarrow\; \frac{du}{d\theta} = a^2u^3\sin 2\theta$$

ولحساب قانون السرعة

$$\begin{aligned} v^2 &= h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = h^2\left[\left(a^2u^3\sin 2\theta\right)^2 + u^2\right] \\ &= h^2\left[a^4u^6\sin^2 2\theta + u^2\right] \\ &= h^2\left[a^4(1-\cos^2 2\theta)u^6 + u^2\right] = h^2\left[a^4u^6 - u^2 + u^2\right] = h^2a^4u^6 \end{aligned}$$

$$\therefore v^2 = h^2a^4u^6 \;\Rightarrow\; v = ha^2u^3 = \frac{ha^2}{r^3} \qquad \text{that is } v \propto \frac{1}{r^3}$$

بالتفاضل مرةً ثانية لـ $\dfrac{du}{d\theta}$ يكون

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2a^2u^3\cos 2\theta + 3a^2u^2\frac{du}{d\theta}\sin 2\theta = 2u^3\underbrace{a^2\cos 2\theta}_{1/u^2} + 3a^2u^2\underbrace{\left(\frac{du}{d\theta}\right)}_{a^2u^3\sin 2\theta}\sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} &= 2u + 3a^4u^5\sin^2 2\theta = 2u + 3a^4u^5\left(1-\cos^2 2\theta\right) \\ &= 2u + 3a^4u^5 - 3a^4u^5\cos^2 2\theta \\ &= 2u + 3a^4u^5 - 3u = 3a^4u^5 - u \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^5$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2\left(3a^4u^5\right) = 3ma^4h^2u^7 = \frac{3ma^4h^2}{r^7} \qquad \text{that is } F \propto \frac{1}{r^7}$$

$$\ln u = -\theta + c_2$$

ومن الشرط $u = \dfrac{1}{2}$ عندما $\theta = 0$ نجد أن $c_2 = \ln\dfrac{1}{2} \quad \text{Or} \quad c_2 = -\ln 2$

$$\ln u = -\theta - \ln 2 \quad \Rightarrow \ln r = \theta + \ln 2 \quad \text{Or} \quad r = 2e^{\theta}$$

وهي معادلة المسار.

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مركزية جاذبة F وكانت سرعة النقطة المادية $v = \dfrac{\ell}{r}$ حيث ℓ ثابت. فاثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r وأن معادلة المســـار الذي تتحرك عليه النقطة المادية هي $r = e^{a\theta}$ حيـــث $a = \dfrac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2 - h^2}$ إذا علمـــت أن $r = 1$ عندما $\theta = 0$.

الحـــــــل

من قانون السرعة حيث $v^2 = \dfrac{\ell^2}{r^2} = \ell^2 u^2$

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2 u^2 \qquad (1)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$2h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\frac{\cancel{du}}{\cancel{d\theta}} = 2\ell^2 u\frac{\cancel{du}}{\cancel{d\theta}} \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \ell^2 u$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \qquad \Rightarrow F = mh^2\ell^2u^3 = \frac{mh^2\ell^2}{r^3}$$

ولايجاد معادلة المسار من المعادلة (1)

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2u^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{h^2}u^2$$

$$\text{Or} \quad \frac{du}{d\theta} = -\underbrace{\frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{h}}_{a}u = -au$$

واعتبرنا الاشارة سالبة لأن القوة جاذبة أى نحو المركز. بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{du}{u} = -a\,d\theta \quad \Rightarrow \ln u = -a\theta + c$$

مثـــ ٢ ـــال

إذا كان المسار المركزي لجسيم هو قطع مخروطي فاثبت أن القوة تخضـــع لقـــانون التربيـــع العكسي.

الحـــــــل

معادلة المسار هي $r = \dfrac{\ell}{1 + e\cos\theta}$ حيث e هو الاختلاف المركزي ، ℓ هو نصـــف وتره البؤري العمودي

$$\because\ u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow u = \frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta$$
$$\therefore\ \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\ell}\sin\theta, \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{\ell}\cos\theta = \frac{1}{\ell} - u$$

ومن ثم فإن قانون القوة يتعين من

$$\because\ F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$
$$= mh^2u^2\left(\frac{1}{\ell} - u + u\right) = \frac{mh^2}{\ell r^2} \qquad \text{i.e.} \quad F \propto \frac{1}{r^2}$$

مثـــ ٣ ـــال

اوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو القطب حتى يتحرك جسيم كتلته الوحدة على المسار $r = a(1-\cos\theta)$. وإذا كان مقدار كل من سرعة الجسيم والقوة عند القُبا همـــا P, V فاثبت أن $3V^2 = 4aP$.

الحـــــــل

حيث أن $r = a(1-\cos\theta)$ وباستخدام الفرضية $r = \dfrac{1}{u}$ نحصل على

$$\frac{1}{u} = a(1-\cos\theta)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = a\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -au^2\sin\theta$$

بالتفاضل مرةً أخرى بالنسبة إلى θ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -2au\frac{du}{d\theta}\sin\theta - au^2\cos\theta = 2a^2u^3\sin^2\theta - au^2\cos\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\sin^2\theta\ \ = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\ \ 1-\cos^2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta + 2au\ \ 1-\cos^2\theta$$

$$= -au^2\left(\cos\theta - 2u\underbrace{a\ \ 1-\cos\theta}_{1/u}\ (1+\cos\theta)\right)$$

$$= -au^2\ \ \cos\theta - 2(1+\cos\theta)$$

$$= -au^2(-2-\cos\theta) = -au^2(-3+\underbrace{1-\cos\theta}_{1/au})$$

$$= 3au^2 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3au^2$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2\ \ 3au^2\ \ = 3mah^2u^4\ = \frac{3mah^2}{r^4}$$

عند نقاط القُبا يكون

$$\dot r = 0 \text{ Or } \frac{du}{d\theta} = 0 \qquad \Rightarrow -au^2\sin\theta = 0 \qquad \therefore \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\because h = r^2\dot\theta = \underbrace{(r\dot\theta)}_{V}r = 2aV \quad \text{Note } r\Big|_{\theta=\pi} = a(1-\cos\pi) = 2a$$

ومن قانون القوة التى حصلنا عليها

$$\because F = \frac{3ah^2}{r^4} \quad \Rightarrow F\Big|_{\theta=\pi} = P = \frac{3a(2aV)^2}{(2a)^4} \quad \Rightarrow \quad 3V^2\ = 4aP$$

مثـــ ٤ ـــال

جسيم كتلته واحد جرام يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية تتناسب عكسياً مع مكعب r بحيث أن القوة تساوي واحد داين عند $r = 1$ cm . أوجد معادلة المسار علماً بأنـــه عنـــد $\theta = 0$ فإن $r = 2$ cm والسرعة تساوي $\frac{1}{2}$ cm sec^{-1} واتجاهها يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الثابت.

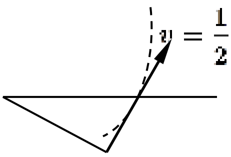
الحـــــــل

حيث أن قوة الجذب تتناسب مع مكعب r فإن $F = \dfrac{\mu}{r^3}$ حيث μ ثابت التناسب ويمكن حساب قيمته من الشـــرط $F = 1$ عنـــدما $r = 1$ ويكـــون ثابـــت التناســـب $\mu = 1$ أي أن $F = \dfrac{1}{r^3}$ ومن المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=u^3 \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=u \quad \text{Or} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1-\frac{1}{h^2}\right)u=0 \quad (1)$$

نوجد الثابت h باستخدام مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب ويكون

$$\Rightarrow h=\frac{1}{2}(2\sin\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}-u=0$

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\theta}\right)-u=0 \quad \text{Or} \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)d\left(\frac{du}{d\theta}\right)-udu=0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2+c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل ولحساب c_1 يلزمنا حساب $\dfrac{du}{d\theta}$ عندما $r = 2$ والتي يمكن حسابها من قانون السرعة

$$v^2=h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)$$

وحيث أن $v = \dfrac{1}{2}$ عندما $u = \dfrac{1}{2}$ فإن

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\bigg|_{r=2}=\frac{1}{4}$$

أي أن عند $u = \dfrac{1}{2}$ فإن $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ وبالتالي قيمة ثابت التكامل $c_1 = 0$ من المعادلة (2)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta}=-u \qquad \text{Or} \qquad \frac{du}{u}=-d\theta$$

وبعد اجراء فصل المتغيرات ، الآن بالتكامل

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $r=1$ عندما $\theta=0$ ومنها $c=0$

$$\ln u=-a\theta \qquad \Rightarrow \ln\frac{1}{r}=-a\theta \quad \text{Or} \quad \ln r=a\theta \quad \text{Or} \quad r=e^{a\theta}$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت النسبة بين اكبر سرعة زاوية يدور بها كوكب حول الشمس واقل ســـرعة زاويـــة تساوي γ^2 فاثبت أن الاختلاف المركزي لمسار هذا الكوكب هو $\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

الحـــــــــل

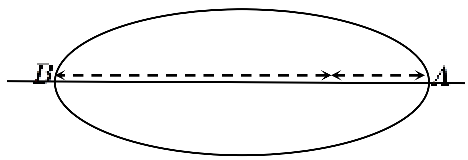
حسب قوانين كبلر فإن الكوكب يتحرك حول الشمس في مسار على شكل قطع نـــاقص و

حيث أن $r^2\dot{\theta}=h \quad \therefore \dot{\theta}=\dfrac{h}{r^2}$

واضح أن السرعة الزاوية تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن الشمس r ومن ثم فإن اكـــبر سرعة زاوية تحدث عندما تكـــون r اصـــغر مـــا يمكـــن ، اي عنـــدما $r=r_1$ حيـــث $r_1=OA=a-ae$ واصـــغر ســـرعة زاويـــة تحـــدث عنـــدما $r=r_2$ حيـــث $r_2=OB=a+ae$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B}=\gamma^2=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1+e}{1-e} \qquad \text{Or} \qquad e=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$



مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^n=a^n\cos n\theta$. اثبـــت أن القـــوة تتناسب عكسياً مع r^{2n+3}.

الحـــــــل

حيث أن $r^n = a^n \cos n\theta$ وباستخدام $r = \dfrac{1}{u}$ نجد أن

$$\frac{1}{u^n} = a^n \cos n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى المتغير θ

$$-\cancel{n}\,\frac{1}{u^{n+1}}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{n}a^n \sin n\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^n u^{n+1} \sin n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ مرة أخرى

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= na^n u^{n+1} \cos n\theta + (n+1)a^n u^n \frac{du}{d\theta} \sin n\theta \\ &= nu^{n+1} \underbrace{a^n \cos n\theta}_{1/u^n} + (n+1)a^n u^n \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^n u^{n+1} \sin n\theta} \sin n\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \sin^2 n\theta = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}(1-\cos^2 n\theta) \\ &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u^{2n+1} \underbrace{a^{2n} \cos^2 n\theta}_{1/u^{2n}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1}$$

$$\because F = mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \; (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \; = (n+1)ma^{2n}h^2u^{2n+3} \; = \frac{3ma^{2n}h^2}{r^{2n+3}}$$

وهذا يعني أن $F \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$ (على الدراس استنتاج قانون السرعة)

■ مســـــائل Problems ■