محاضرات فى النظرية الكهرومغناطيسية

للفرقة الثالثة عام- شعبة الطبيعة

المحاضر/
د. خالد حسين

محاضرات الكهرومغناطيسية

Reference : **المصادر :-**

Foundation Of Electromagnetic Theory **الكتاب المقرر**

***By: John R. Reitz,   Frederick J.* Milford & Robert W. Christy**

الكتب المساعدة

ELECTROMAGNETICS , GENERAL THEORY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD , CLASSICAL AND RELATIVISTIC ,APPROACHES . THIRD EDITION. Revised and Augmented   by : Andrei NICOLAIDE (2012).

المجالات الكهرومغناطيسيه الجزء الاول والثاني

اساسيات النظريه الكهرومغناطيسيه الجزء الاول والثاني

سلسلة ملخصات شوم:الكهرومغناطيسيات (2000) تاليف جوزيف ادمنستر

Some Integrals;

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \;\; ; n \neq -1$

2. $\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

3. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$

4. $\int \cos u \, du = \sin u + c$

5. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$

6. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$

7. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$

8. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$

9. $\int \tan u \, du = \ln \sec u + c = -\ln \cos u + c$

10. $\int \cot u \, du = \ln \sin u + c$

11. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + c$

12. $\int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + c$

13. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \;\; ; a > 0, a \neq 1$

14. $\int e^u \, du = e^u + c$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + c_1 = -\cos^{-1}\frac{u}{a} + c_2$

16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{u}{a} + c_2$

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\csc^{-1}\frac{u}{a} + c_2$

(1 -1) تعاريف :- Definition

ان استخدام تحليل المتجهات في موضوع الكهربائية والمغناطيسية يوضح الافكار الفيزيائية التي تتضمنها المعادلات الرياضية وللتعرف على عدد من المفاهيم الاساسية ، اليكم بعض التعاريف .

تقسم الكميات الفيزيائية الى نوعين :-

1- كميات متجهة vectors:- تعرف الكمية الاتجاهية على انها تلك الكمية التي تميز كليا بمقدارها واتجاهها مثل السرعة، التعجيل، القوة والمجال الكهربائي.

2- كميات لامتجهة (عددية) scalars:- وهي تلك الكمية التي تميز كليا بمقدارها فقط مثل درجة الحرارة، الكثافة ، الطول والحجم.

متجهات الوحدة المتعامدة : unit vectors

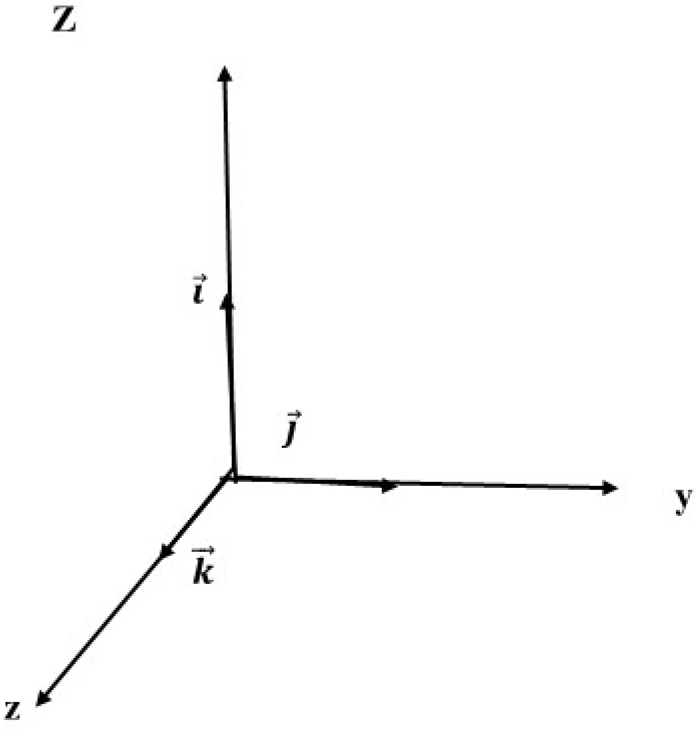
ومقدارها وحدة واحدة وتكتب ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) وهي باتجاه المحاور الديكارتية او الكارتيزية (x,y,z) على الترتيب .

المقدار *scalar*	الاتجاه *vector*	وحدة المتجه
$\lvert\vec{\imath}\rvert$	$\vec{\imath}$	$\hat{\imath}$
$\lvert\vec{\jmath}\rvert$	$\vec{\jmath}$	$\hat{\jmath}$
$\lvert\vec{k}\rvert$	$\vec{k}$	$\hat{k}$

$$\hat{\imath} = [1,0,0]$$

$$\hat{\jmath} = [0,1,0]$$

$$\hat{k} = [0,0,1]$$



مركبات المتجه :

حسب نظام الاحداثيات الديكارتية يحدد المتجه بثلاث مركبات باتجاه الاحداثيات (x , y , z)، لو فرضنا انه لدينا المتجه $\vec{A}$ فيكون له ثلاث مركبات هي :-

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$or\ \vec{A} = \vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

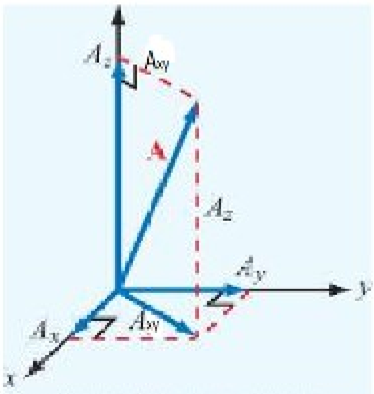
$$or\vec{A} = \vec{\imath}|\vec{A}_x| + \vec{\jmath}|\vec{A}_y| + \vec{k}|\vec{A}_z|$$

حيث :-

$A_x = |\vec{A}_x|$ ، $A_y = |\vec{A}_y|, A_z = |\vec{A}_z|$

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

ومن الشكل التالي:-



$$\vec{A}_{xy} = \vec{A}_x + \vec{A}_y\ , \vec{A} = \vec{A}_{xy} + \vec{A}_z \quad \therefore\ \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

(2-1) جبر المتجهات :- *Vector algebra*

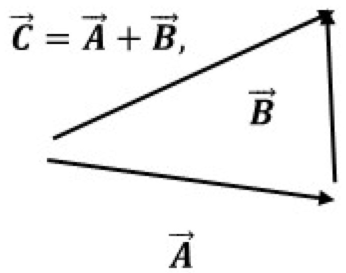
1- جمع وطرح المجهات :

يعرف حاصل جمع متجهين بأنه المتجه الذي تكون مركباته مساوية لمجموع المركبات المناظرة للمتجهين الاصليين .

مثال :- اذا كان المتجه $\vec{C}$ مساويا لمجموع المتجهين $\vec{A}\ , \vec{B}$ فان :

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B},$$

$$\vec{C}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x, \qquad \vec{C}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y, \quad \vec{C}_z = \vec{A}_z + \vec{B}_z$$

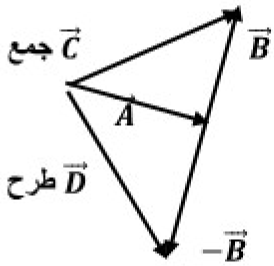


ويعرف طرح المتجهات بدلالة القيمة السالبة للمتجه .

المتجه السالب :- هو المتجه الذي تكون مركباته مساوية للمركبات المناظرة للمتجه الاصلي ولكن باشارة سالبة اي يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه والزاوية بينهما ($180°$) .

وعليه تعرف عملية طرح المتجهات على انها جمع المتجه السالب اي ان :

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



وبما ان جميع الاعداد الحقيقية تمتلك خاصية الترافق (*associative*) فان عمليات الجمع والطرح للمتجهات تمتلك خاصية الترافق ايضا وبناء عليه لاحاجة للاقواس عند جمع وطرح المتجهات اي ان :-

$$\vec{A} + (\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

اذا كان لدينا متجهين يلتقي راسيهما بنقطة واحدة فعند جمع او طرح المتجهين نلاحظ الزاوية بينهما :

أ- اذا كانت الزاوية بينهما حادة نستخدم قانون الجيب تمام لايجاد المحصلة بينهما

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2AB\cos\theta$$

ب- واذا كانت الزاوية منفرجة يصبح قانون جيب التمام كالاتي :

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 - 2AB\cos\theta$$

ج - واذا كانت $\theta = 90°$ نستخدم قانون فيثاغورس

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 \ as\ \theta = 90° \ and\ cos90 = 0$$

2- ضرب المتجهات :- Vector Product

أ- ضرب المتجه بمقدار عددي :- ويكون ناتج هذه العملية متجها ، تمتاز كل مركبة من مركباته بانها تساوي حاصل ضرب الكمية العددية بالمركبة المناظرة للمتجه الاصلي اي ان :-

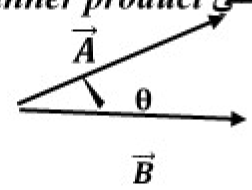
$$\vec{C} = A\vec{B} = A\vec{B}_x + A\vec{B}_y + A\vec{B}_z \quad as \quad \vec{C}_x = A\vec{B}_x, \quad \vec{C}_y = A\vec{B}_y, \ \vec{C}_z = A\vec{B}_z$$

ب- ضرب متجهين :- ويكون على نوعين

اولا : الضرب العددي *dot product* : وله تسميات اخرى مثل الضرب العددي *scalar product* او الضرب الداخلي *inner product* ويكون الناتج النهائي لهذه العملية هو كمية عددية غير متجه .

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{A}|}$$



ويكون الناتج كمية غير متجهة حيث :

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z \ and\ \vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \ \ as\ \ \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1, \qquad \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$$

لانه عندما $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$ اي متوازيان . وعندما تكون متعامدتان اي $\cos\theta = 0$, $\theta = 90$

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}, \qquad \vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

ثانيا :- الضرب الاتجاهي *vector product* ، او التتابع التقاطعي *cross product* او التتابع الخارجي *outer product* :-

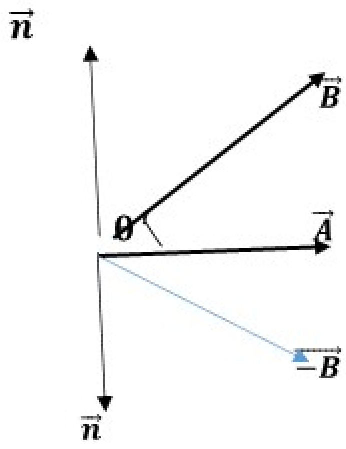
ويكون الناتج كمية متجهة ويكتب بالشكل : $\vec{A}x\vec{B} = AB\sin\theta\,\vec{n}$

$$\vec{A}x\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{n}, \quad as\ \vec{n} = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{AB\sin\theta}$$

اي ان الناتج هو حاصل ضرب مقدار كل من المتجهين بالاخر بجيب الزاوية المحصورة بين المتجهين الاصليين ، علما ان الاتجاه يؤخذ حسب قاعدة اليد اليمنى .

$$\vec{A}x\vec{B} \neq \vec{B}x\vec{A} = -\vec{B}x\vec{A}\ , \qquad \vec{B}x\vec{A} = |\vec{B}||\vec{A}|\sin\theta\,\vec{n}$$

حيث ان اتجاه $\vec{n}$ في هذه الحالة باتجاه الاسفل حسب قاعدة اليد اليمنى.



$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$where\ \vec{i}x\vec{j} = \vec{k},\quad \vec{j}x\vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k}x\vec{i} = \vec{j},\quad \vec{k}x\vec{j} = -\vec{i}$$

$$where\ \theta = 0\ , \sin\theta = 0\ \ , then\ \vec{i}x\vec{i} = \vec{j}x\vec{j} = \vec{k}x\vec{k} = 0$$

$$if\ \ \vec{A}x\vec{B} = 0\ \Rightarrow\ \vec{A} \parallel \vec{B}\ and\ if\ \vec{A}.\vec{B} = 0\ then\ \vec{A} \perp \vec{B}$$

وهناك حالتان مرتبطتان بالضرب العددي والاتجاهي وهما :

1- الضرب الثلاثي العددي ***Triple scalar product***

وهو كمية عددية وتحصل عملية الضرب بالصيغة التالية :

$$(\vec{A}x\vec{B}).\vec{C} = (\vec{B}x\vec{C}).\vec{A} = (\vec{C}x\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = -(\vec{C}x\vec{B}).\vec{A}$$

ومن السهل التعبير عن حاصل الضرب الثلاثي للمتجهات بدلالة مركباتها المتعامدة بالشكل التالي:

$$\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$
$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

وتبعا للمحدد (المصفوفة) التالي:

$$\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\vec{B}.(\vec{A}x\vec{C})$$

2- الضرب الاتجاهي الثلاثي : ***Triple vector product***

وهي كمية متجهة وتأخذ الصيغة:

$$\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z)(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)$$

$$-(\vec{i}C_x + \vec{j}C_y + \vec{k}C_z)(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

ويطلق على هذه القاعدة اسم " ***back cab rule*** **" ووضع الاقواس هنا ضروري حيث بدونه تكون عملية الضرب غير معرفة**

(1- 3) تفاضل المتجهات :-

1- الانحدار (الميل) : *Gradient*

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: هي مشتقة اتجاهية يقصد بها تغير الدالة باتجاه معين . اذا دخل متجه الانحدار على كمية عددية مثل الجهد ($\emptyset$)اصبح الناتج كمية متجهة :

$$\vec{\nabla}\emptyset = \vec{i}\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = grad\,\emptyset$$

اي ان انحدار دالة غير متجهة (*scaler*) مثل الجهد تصبح كمية متجهة مقداره يساوي ذروة المشتقة الاتجاهية عند نقطة معينة واتجاهه يكون بنفس اتجاه ذروة المشتقة الاتجاهية عند تلك النقطة .

2- التباعد : *Divergence*

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج عدديا مثل

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = div\,\vec{A} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ويمثل التباعدغاية التكامل السطحي لوحدة الحجم عندما يقترب الحجم من الصفر اي ان:

$$div\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{F}.\vec{n}da$$

3- الالتفاف او الدوران : Curl

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج متجها مثل

$$\vec{\nabla}x\vec{A} = curl\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}x\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$curl\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{n}x\vec{F}da$$

4- مؤثر لابلاس : *The Laplacian operator*

وتمثل عملية مزدوجة من تباعد وانحدار مثل:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = div\,grad = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(4-1) تكامل المتجهات : Vectors integration

1- التكامل الخطي : line integration

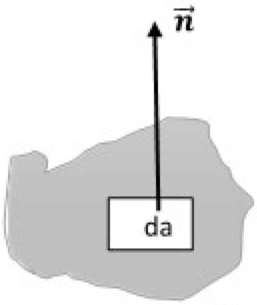
وناتج التكامل كمية عددية . والتكامل هنا يعتمد على بداية ونهاية المنحني وكذلك على المنحني C.
فاذا كان المسار مفتوح اي المنحني مفتوح فيعبر عنه بالعلاقة:

$$\int_a^b \vec{A}.d\vec{\ell} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} A.\Delta\ell$$

حيث a,b تمثل بداية ونهاية المنحني على التوالي ويشير c المنحني الذي ينجز عليه التكامل الخطي . اما اذا كان المسار مغلق (منحني مغلق) فيعبر عنه بالشكل الاتي : $\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell}$

2- التكامل السطحي : Surface integration

$$\int_S \vec{A}.\vec{n}da = \int_S \vec{A}.d\vec{S}$$



سطح (S)

تمثل (da) مساحة صغيرة جداعلى السطح (S) الذي تنجز عليه عملية التكامل و $\vec{n}$ وحدة متجه عمودية على da واتجاهها يحدد بقاعدة اليد اليمنى right hand rule . اما اذا السطح مغلق فيكتب بالشكل : $\oint_S \vec{A}.\vec{n}da$

3- التكامل الحجمي : *Volume integral*

ويعبر عنه بالشكل التالي:

$$\int_V \vec{A}.d\vec{V} = \int \vec{A}dxdydz = \vec{A}\int dxdydz$$

(1- 5) النظريات الخاصة بالمتجهات

1- نظرية التباعد : Divergence theorem

ان تكامل تباعد متجه خلال حجم (V) يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية للمتجه على السطح الذي يضم الحجم (V) اي ان:

$$\int_V divF dV = \int_V \vec{\nabla}.\vec{F} dV = \oint_S \vec{F}.\vec{n} da = \oint_S \vec{F}.d\vec{S}$$

وهي علاقة بين التكامل السطحي والحجمي

2- نظرية ستوك : *Stock's theorem*

وهي علاقة بين التكامل السطحي والخطي وتنص على ان :- التكامل الخطي لمتجه حل مسار مغلق يساوي تكامل المركبة العمودية لالتفاف المتجه على اي سطح محاط بالمسار، اي ان:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{\ell} = \int_S curl\vec{F}.\vec{n} da = \int_S \vec{\nabla} x \vec{F}.\vec{n} da$$

حيث C يمثل المنحني المغلق المحيط بالسطح S.

(6-1) الاحداثيات :- *Coordinates*

هناك ثلاثة احداثيات مستخدمة هي :

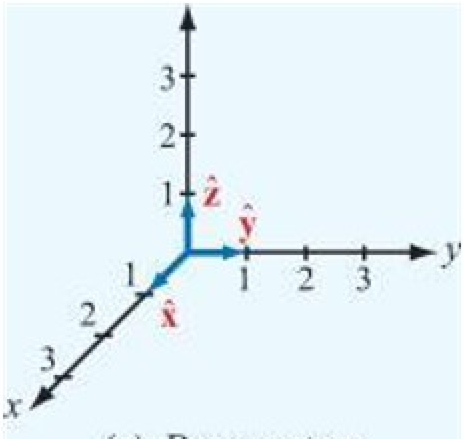
1- الاحداثيات الديكارتية (الكارتيزية) *Cartesian Coordinates*

وتمثل الاحداثيات التي اوجدها العالم الفرنسي ديكارت

الاحداثيات = x,y,z ، المساحة $da=dxdy=$ ، الحجم = $dV=dxdydz$

$$grad\,\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

مؤثر لابلاس هو: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

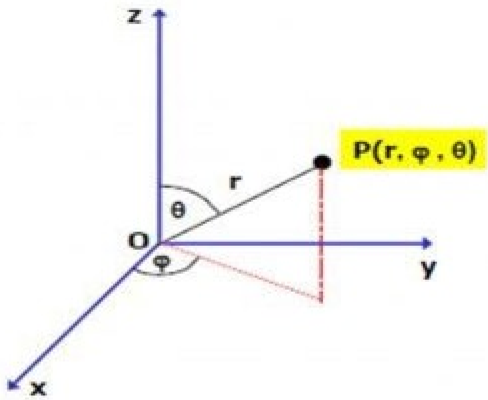


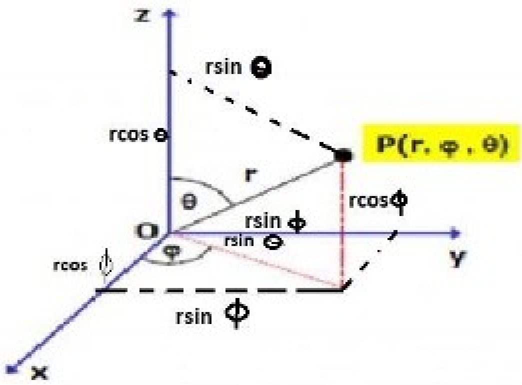
(a) Base vectors

2- الاحداثيات الكروية : Spherical coordinates

الاحداثيات = $r, \theta, \emptyset$ ، المساحة = da= $r^2 \sin\theta\, d\theta d\emptyset$ ، الحجم = dV = $r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\emptyset$

$$x = r\sin\theta\cos\emptyset\,, \quad y = r\sin\theta\sin\emptyset\,, \quad z = r\cos\theta$$





حيث θ تمثل الزاوية القطبية ، r يمثل مقدار متجه نصف القطر من نقطة الاصل .

$$grad\,\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\emptyset}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\emptyset}$$

ومؤثر لابلاس هو:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\emptyset^2}$$

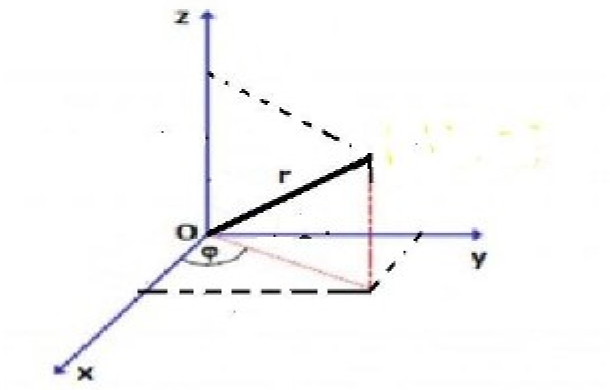
3- الاحداثيات الاسطوانية :- Cylindrical coordinates

الاحداثيات = $r, \emptyset, z$ ، المساحة = $da = rdrd\emptyset$ ، الحجم = dV= $rdrd\emptyset dz$

$$grad\ \vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\emptyset}\frac{\partial}{\partial \emptyset} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$x = rcos\emptyset, \quad y = rsin\emptyset, \quad r = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$



(1- 7) صيغ (متطابقات) مهمة من تحليل المتجهات :-

لو كان لدينا C, B, ψ, F دوال متجهة ولدينا ϕ, γ دوال عددية فان :-

$1-\ \nabla(\psi + \gamma) = \nabla\psi + \nabla\gamma$

$2-\ \nabla(\psi\gamma) = \psi\nabla\gamma + \gamma\nabla\psi$

$3-\ \nabla.(B + C) = \nabla.B + \nabla.C$

$4-\ \nabla x(B + C) = \nabla xB + \nabla xC$

$5-\ \nabla.(B.C) = (B.\nabla)C + (C.\nabla)B + Bx(\nabla xC) + Cx(\nabla xB)$

$6-(B.\nabla)C = \left(B_x\frac{\partial}{\partial x} + B_y\frac{\partial}{\partial y} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)C$

$7-\ \nabla.(\gamma B) = \gamma\nabla.B + B\nabla.\gamma$

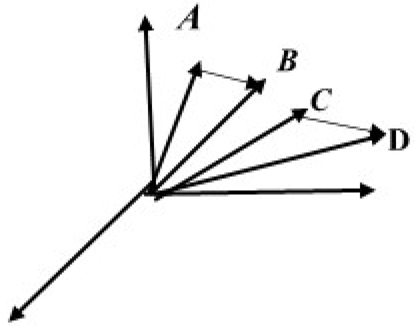
$8-\ \nabla x(\gamma B) = \gamma\nabla xB + \nabla\gamma xB = \gamma\nabla xB + Bx\nabla\gamma$

$9-\ \nabla x\nabla\gamma = 0, \qquad always\ curl\ grad\gamma = 0$

مسائل Problems:-

س1/ اذا علمت ان المتجهات $\vec{A}=\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k},\quad \vec{B}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}\ ,\ \vec{C}=3\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-2\hat{k},\quad \vec{D}=\hat{k}-\hat{\jmath}$ تشير الى النقاط A, B, C, D ابتداءا من نقطة الاصل ، اثبت ان الخطين AB و CD متوازيان ثم جد النسبة بين طوليهما .

الجواب/ من الرسم ادناه



$$\vec{B}+\overrightarrow{AB}=\vec{A}$$

$$\overrightarrow{AB}=\vec{A}-\vec{B}=(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})-(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath})=-\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}$$

$$\overrightarrow{CD}=\vec{C}-\vec{D}=(3\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-2\hat{k})-(\hat{k}-\hat{\jmath})=3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-3\hat{k}$$

$$if\ \overrightarrow{AB}x\overrightarrow{CD}=0,\qquad then\ \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&-2&1\\3&6&-3\end{vmatrix}=\hat{\imath}(6-6)+\hat{\jmath}(3-3)+\hat{k}(-6+6)=0$$

$$\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|sin\theta=0\ ,\ \ i.e\ sin\theta=\frac{\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=0\ ,\quad\therefore\theta=0\implies\overrightarrow{AB}$$

$$\parallel\overrightarrow{CD}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{\sqrt[2]{1+4+1}}{\sqrt[2]{9+36+9}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}}$$

س2/ اثبت ان المتجهين $\vec{A}=\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+3\hat{k},\quad \vec{B}=4\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k}$ متعامدان.

الجواب/

$$if\ \vec{A}.\vec{B}=0,\ \implies\vec{A}\perp\vec{B}$$

$$\vec{A}.\vec{B}=(\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+3\hat{k}).(4\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k})=4+8-12=0$$

$$\vec{A}.\vec{B}=ABcos\theta\implies cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}=\frac{zero}{AB}=0,\quad\therefore\theta=90\implies\vec{A}\perp\vec{B}$$

س3/ اثبت ان: $\mathit{Prove}\quad \vec{\nabla}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$

الجواب/

$$\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z \quad and \quad |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = (\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{\imath}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.2x\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.2y\right] + \hat{k}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.2z\right]$$

$$= \frac{\hat{\imath}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\hat{\jmath}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{(\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$$

س4/ اثبت ان : $\mathit{Prove\ that}\quad \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$

الجواب/

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}|} = (\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \hat{\imath}\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}.2x\right] + \hat{\jmath}\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}.2y\right] + \hat{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}.2z\right]$$

$$= \frac{-\hat{\imath}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\hat{\jmath}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z)}{\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$= -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2.|\vec{r}|} \qquad but \quad unit\ vector \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad then \quad \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$$

وبنفس الطريقة نستطيع ان نثبت المسائل التالية

$$1-\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2}=\frac{-2}{|\vec{r}|^3}\hat{r}=-\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$2-\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}=\frac{-3}{|\vec{r}|^4}\hat{r}=-\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

H.W:-

اذا كانت $\emptyset$ دالة مجال غير متجهة اي دالة عددية scalar وان $\vec{F}$ متجه اثبت ان :-

التفاف انحدار اي مجال لامتجه =صفر

$$1-Curl\ \ grad\ \ \emptyset=\nabla x\nabla\emptyset=0$$

تباعد اي التفاف =صفر

$$2-div\ \ curl\,\vec{F}=\nabla.\nabla x\vec{F}=0$$

اخذ الالتفاف لالتفاف مجال متجه

$$3-\ \ curl\,curl\,\vec{F}=grad\,div\,\vec{F}-\nabla^2\vec{F}=\nabla(\nabla.\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$$

س5/ $prove\ that\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2}=\frac{-2}{|\vec{r}|^3}\hat{r}=-\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$

الجواب/

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2}=(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2+y^2+z^2)^{-1}$$

$$=\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1}$$

$$=\hat{\imath}\left[-1(x^2+y^2+z^2)^{-2}.2x\right]+\hat{\jmath}\left[-1(x^2+y^2+z^2)^{-2}.2y\right]+\hat{k}\left[-1(x^2+y^2+z^2)^{-2}.2z\right]$$

$$=\frac{-2\hat{\imath}x}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{2\hat{\jmath}y}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{2\hat{k}z}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-2(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^4}=-\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$=-\frac{2}{|\vec{r}|^3}\hat{r}$$

س6/ $prove\ that\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}=\frac{-3}{|\vec{r}|^4}\hat{r}=-\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$

الجواب/

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}=(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$=\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\hat{\imath}\left|-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2x\right|+\hat{\jmath}\left|-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2y\right|$$
$$+\hat{k}\left|-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2z\right|$$

$$=\frac{-3\hat{\imath}x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\hat{\jmath}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\hat{k}z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-3(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^5}=-\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

$$=-\frac{3}{|\vec{r}|^4}\hat{r}$$

س7/ اذا علمت ان $\vec{r}$ يمثل متجه مرسوم من نقطة الاصل الى النقطة (x,y,z) ، برهن صحة الصيغ الاتية:

1-div r=3 2- curl r=0 3- (u.grad)r=u , u is any vector

حيث u يمثل اي متجه .

الجواب/

$$1-\ \vec{\nabla}.\vec{r}=\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1+1+1=3$$

$$2-\ \vec{\nabla}x\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x&y&z\end{vmatrix}=\hat{\imath}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)+\hat{\jmath}\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)=0$$

$$3-\ (\vec{u}.grad)\vec{r}=\vec{u}\qquad let\ \vec{u}=\hat{\imath}u_x+\hat{\jmath}u_y+\hat{k}u_z$$

$$=\left|(\hat{\imath}u_x+\hat{\jmath}u_y+\hat{k}u_z).(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})\right|(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)$$

$$= \left[u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}\right] (\hat{\imath} x + \hat{\jmath} y + \hat{k} z)$$

$$= u_x \frac{\partial}{\partial x}(\hat{\imath} x + \hat{\jmath} y + \hat{k} z) + u_y \frac{\partial}{\partial y}(\hat{\imath} x + \hat{\jmath} y + \hat{k} z) + u_z \frac{\partial}{\partial z}(\hat{\imath} x + \hat{\jmath} y + \hat{k} z)$$

$$= \hat{\imath} u_x + \hat{\jmath} u_y + \hat{k} u_z = \vec{u} \qquad \therefore (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{u}$$

س8/ اذا كان A اي متجه ثابت بين ان : -

$$grad(\vec{A}.\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{r}) = \vec{A}$$

الجواب/

$$\vec{A} = \hat{\imath} A_x + \hat{\jmath} A_y + \hat{k} A_z, \qquad \vec{r} = \hat{\imath} x + \hat{\jmath} y + \hat{k} z,$$

$$\vec{A}.\vec{r} = (\hat{\imath} A_x + \hat{\jmath} A_y + \hat{k} A_z).(\hat{\imath} x + \hat{\jmath} y + \hat{k} z) = xA_x + yA_y + zA_z$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{r}) = \hat{\imath} \frac{\partial x}{\partial x} A_x + \hat{\jmath} \frac{\partial y}{\partial y} A_y + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial z} A_z = \hat{\imath} A_x + \hat{\jmath} A_y + \hat{k} A_z = \vec{A}$$

س9/ اثبت ان:

$$prove\ that \quad \vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0$$

الجواب /

$$if\ \vec{F} = \vec{r}, \qquad and\ \emptyset = \frac{1}{|\vec{r}|^3}, scaler$$

اذن حسب الفرضية :-

$$\vec{\nabla}.\emptyset\vec{F} = \emptyset\vec{\nabla}.\vec{F} + \vec{F}.\vec{\nabla}\emptyset = \frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{\nabla}.\vec{r} + \vec{r}.\nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}$$

ومن الامثلة السابقة تم اثبات مايلي:

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = 3, \quad \nabla\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}, \qquad \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3} = -3\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^4}$$

اذن : -

$$\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{3}{|\vec{r}|^3} + \vec{r}.\left(\frac{-3}{|\vec{r}|^4}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \frac{3\vec{r}.\vec{r}}{|\vec{r}|^5} = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \frac{3|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \frac{3}{|\vec{r}|^3}$$
$$= 0 \quad , \quad as\ \vec{r}.\vec{r} = r^2$$

س10/ $\boldsymbol{prove\ that\ \ \vec{\nabla}x\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=0}$

الجواب /

$$let\ \ \vec{F}=\vec{r},\quad and\ \emptyset=\frac{1}{|\vec{r}|^3}$$

وحسب الفرضية :

$$\nabla x\emptyset F=\emptyset\nabla xF+\nabla\emptyset xF$$

$$\vec{\nabla}x\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=\frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{\nabla}x\vec{r}+\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^3}x\vec{r},\quad but\ \ \vec{\nabla}x\vec{r}=0\ and\ \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^3}=-\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^4}\quad,\qquad \hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{\nabla}x\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=-\frac{3\hat{r}}{|\vec{r}|^4}x\vec{r}=-\frac{3\vec{r}x\vec{r}}{|\vec{r}|^5}=0,\qquad as\ \vec{r}x\vec{r}=0$$

س11/ $\boldsymbol{prove\ \ that\ \vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|^2}}$

الجواب /

$$let\ \vec{\psi}=\vec{r},\quad \gamma=\frac{1}{|\vec{r}|^2}\qquad and\ according\ to\ \ \vec{\nabla}.\gamma\vec{\psi}=\gamma\vec{\nabla}.\vec{\psi}+\vec{\psi}.\nabla\gamma$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|^2}\vec{\nabla}.\vec{r}+\vec{r}.\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^2}\ \ ,but\ \ \vec{\nabla}.\vec{r}=3\ and\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2}=-\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}\right)=\frac{3}{|\vec{r}|^2}-\frac{2\vec{r}.\vec{r}}{|\vec{r}|^4}=\frac{3}{|\vec{r}|^2}-\frac{2|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^4}=\frac{3}{|\vec{r}|^2}-\frac{2}{|\vec{r}|^2}=\frac{1}{|\vec{r}|^2}$$

امثلة محلولة

مثال 1/ اوجد المتجه $\vec{A}$ الذي يتجه من *(2,-4,1)* الى *(0,-2,0)* بالاحداثيات الكارتيزية واوجد متجه الوحدة على طول *A* .

الجواب /

$$\vec{A}=(0-2)a_x+[-2-(-4)]a_y+(0-1)a_z$$

$$\vec{A}=-2a_x+2a_y-a_z,\qquad \left|\vec{A}\right|^2=(-2)^2+(2)^2+(-1)^2=9$$

$$a_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=-\frac{2}{3}a_x+\frac{2}{3}a_z-\frac{1}{3}a_z$$

مثال 2/ اثبت ان المتجهين $\vec{A} = 4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y - \vec{a}_z$ و $\vec{B} = a_x + 4a_y - 4a_z$ متعامدين .

الجواب /

$$\vec{A}.\vec{B} = (4x1) + (-2x4) + (-1x-4) = 0$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta \quad , \qquad cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = 0, \ \ then\ \theta = 90\,, \qquad \therefore \vec{A} \perp \vec{B}$$

مثال 3/ اذا كان $\vec{A} = 2a_x + 4a_x$ و $\vec{B} = 6a_y - 4a_z$ متجهين ، اوجد قيمة الزاوية الصغرى بينهما باستخدام : 1- الضرب الاتجاهي 2- الضرب العددي .

الجواب / الفرع الاول من السؤال:

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -16a_x + 8a_y + 12a_z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (0)^2} = 4.47, \quad \vec{B} = \sqrt{0^2 + 6^2 + (-4)^2} = 7.21$$

$$|\vec{A}x\vec{B}| = \sqrt{(-16)^2 + (8)^2 + (12)^2} = 21.54$$

$$|\vec{A}x\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|sin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{21.54}{4.47x7.21} = 0.668, \Rightarrow \theta = 41.9°$$

الفرع الثاني من السؤال:

$$\vec{A}.\vec{B} = (2x0) + (4x6) + (0x-4) = 24$$

$$cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{24}{4.47x7.21} = 0.745, \Rightarrow \theta = 61.9$$

مثال 4/ اذا كان $\vec{A} = a_x + a_Y$ و $\vec{B} = a_X + 2a_z$ و $\vec{C} = 2a_y + a_z$ ، اوجد $\overrightarrow{(\vec{A}x\vec{B})}x\vec{C}$ و $\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C})$ وقارن بينهما

الجواب /

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a_x - 2a_y - a_z$$

$$(\vec{A}x\vec{B})x\vec{C} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2a_x + 4a_z$$

$$\vec{B}x\vec{C} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4a_x - a_y + 2a_z$$

$$\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a_x - 2a_y + 3a_z$$

وعلى ذلك يتضح مدى اهمية وضع الاقواس في الضرب الاتجاهي الثلاثي .

مثال 5 / باستخدام المتجهات A,B,C في السؤال الرابع اوجد $\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C})$ وقارن النتيجة مع $(\vec{A}x\vec{B}).\vec{C}$.

الجواب / من السؤال السابق نجد ان :

$$(\vec{B}x\vec{C}) == -4a_x - a_y + 2a_z$$

$$\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = (1x-4) + (1x-1) + (0x2) = -5$$

وايضا من السؤال السابق نجد:

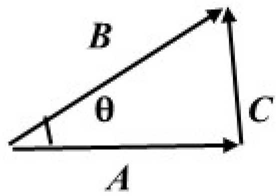
$$\vec{A}x\vec{B} = 2a_x - 2a_y - a_z$$

$$(\vec{A}x\vec{B}).\vec{C} = (2x0) + (-2x2) + (-1x1) = -5$$

النتيجة نفسها مما يدل على وضع الاقواس في هذا النوع من الضرب الثلاثي غير ضرورية طالما ان المتجهات تظهر بنفس الترتيب الدوري فان النتيجة تكون واحدة اذ تتغير الاشارة عندما لاتكون بنفس الترتيب الدوري .

مثال 6/ بتربيع طرفي المعادلة $\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$ برهن قانون الجيب تمام .

الجواب/



$$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = \vec{B} - \vec{C} \Rightarrow \vec{A}.\vec{A} = A^2 = (\vec{B} - \vec{C}).(\vec{B} - \vec{C}) = \vec{B}.\vec{B} - \vec{B}.\vec{C} - \vec{B}.\vec{C} + \vec{C}.\vec{C}$$
$$= B^2 - 2\vec{B}.\vec{C} + C^2 = B^2 - 2BC\cos\theta + C^2$$

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\theta$$

مثال 7 / جد تباعد والتفاف المتجه $\vec{A} = \hat{\imath}(x^2 + y^2) + \hat{\jmath}(y^2 + Zx) + \hat{k}(z^2 + xy)$.

الجواب /

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left[\hat{\imath}(x^2 + y^2) + \hat{\jmath}(y^2 + zx) + \hat{k}(z^2 + xy)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + zx) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy) = 2x + 2y + 2z$$
$$= 2(x + y + z)$$

$$curl\,\vec{A} = \vec{\nabla}x\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2+y^2) & (y^2+zx) & (z^2+xy) \end{vmatrix}$$

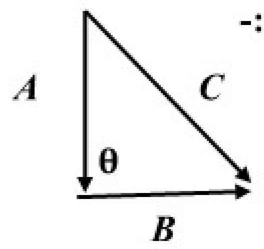
$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}(z^2+xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2+zx)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2+xy)\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2+zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right] = \hat{\imath}(x-x) + \hat{\jmath}(0-y) + \hat{k}(z-2y)$$

$$= -\hat{\jmath}y + \hat{k}(z-2y)$$

مثال 8 / برهن على ان المتجهات الثلاثة : $\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k},\ \ \vec{C} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ثمثل جوانب مثلث قائم الزاوية.

الجواب/ من الرسم :-



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}) + (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}) = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}).(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}) = 2 + 3 - 5 = 0,$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = 0 \Rightarrow \theta = 90 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

(2-1) الشحنة الكهربائية : Electric charge

الشحنة هي خاصية اساسية مميزة للجسيمات الاولية التي تتكون منها المادة والحقيقة ان جميع المواد تتكون من بروتونات والكترونات ونيوترونات واثنين من هذه الجسيمات تحملان شحنة هي (البروتونات والالكترونات) والمقصود بالشحنة من وجهة النظر العينية هو صافي الشحنة او الشحنة الفائضة فعندما نقول ان الجسم مشحون فان ذلك يعني ان الجسم يمتلك شحنة فائضة ناتجة اما عن فائض في عدد الالكترونات (سالب الشحنة) او فائض في عدد البروتانات (موجب الشحنة) والحقيقة ان الشحنة محفوظة لايمكن ان تفنى او تخلق.

(2-2) قانون كولوم : Coulomb Law

أن حصيلة القياسات التجريبية على القوى العاملة بين الشحنات الكهربائية هي:

1- هناك نوعان فقط من الشحنات الكهربائية هي الشحنات الموجبة والشحنات السالبة.

2- تؤثر شحنتان نقطيتان احداهما على الاخرى بقوة :

أ- تعمل على امتداد الخط الواصل بين الشحنتين .

ب- يتناسب مقدار هذه القوة طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين .

ج- يتناسب مقدارها عكسيا مع مربع المسافة بينهما .

3- القوة المؤثرة بين الشحنتين اما قوة تنافر اذا كانت الشحنتان متماثلتين او تجاذب اذا كانت الشحنتان مختلفتين.

يمثل النصان الاخيران (نقطة 2,3) نص قانون كولوم :(القوة الكهربائية بين شحنتين تتناسب طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين وعكسيا مع مربع المسافة بينهما).

ويمكن صياغة قانون كولوم بصيغة المتجهات على النحو الاتي:

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

But $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1q_2}{||\vec{r}|_{12}|^3}\vec{r}_{12}$$

ووحداتها نيوتن N وان :

حيث ان : $\vec{r}_{12}$ المتجه من q_1 الى $q2$. وكذلك

$$\epsilon_o = 8.85x10^{-12}\frac{F}{m} or \frac{C^2}{J} or \frac{C^2}{N.m^2}, \ and \ K = 9x10^9\frac{N.m^2}{coul^2}$$

يستخدم قانون كولوم على الشحنات النقطية ، ويقصد بالشحنة النقطية حسب المفهوم العيني ، بأنها تلك الشحنة التي حيزا ابعاده صغيرة جدا مقارنة مع اي طول.

ويطبق قانون كولوم على الشحنات المستقرة النقطية في الفراغ وفي العوازل والموصلات ويصح تطبيق قانون كولوم على الجسيمات الاولية المشحونة (البروتونات والالكترونات).

$$\vec{F}_{21} = K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{21}|^3}\hat{r}_{21}, \ |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| \qquad but \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(3-2) قاعدة التراكب للقوى :-

في حالة وجود اكثر من شحنتين نقطتين ، فيمكن تعيين القوى المتبادلة بين هذه الشحنات بتكرار استخدام معادلة (1) .
لو أفترضنا وجود منظومة من من (N) من الشحنات النقطية ، فالقوى المؤثرة على الشحنة q_i هي:

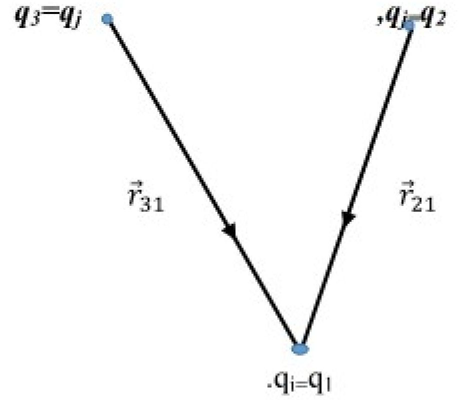
$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q_i \sum_{j\neq i}^{N} q_j \frac{\vec{r}_{ji}}{\left|\vec{r}_{ji}\right|^3}$$

اذ تشير علامة الجمع ($\sum$) الى حقيقة ان الجمع الاتجاهي يشمل جميع الشحنات عدا الشحنة (i) وهذه هي قاعدة التراكب للقوى والتي تنص على ان :-

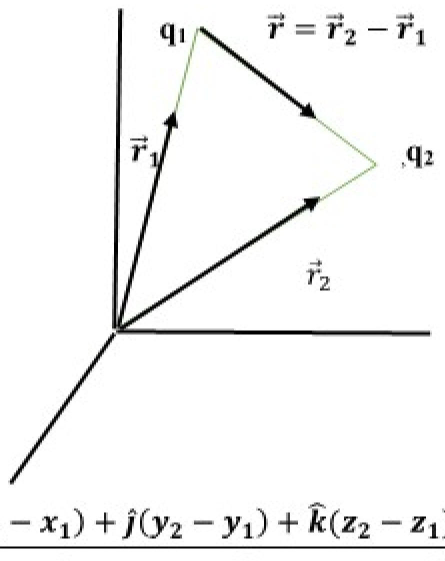
القوى الكلية المؤثرة على جسم تساوي المجموع الاتجاهي لجميع القوى المؤثرة على الجسم كلا على انفراد.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2}\hat{r}_{21} + \frac{1}{4\pi \in_o}\frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_{31}|^2}\hat{r}_{31} + \cdots \qquad as\ q_i = q_1, and\ q_j = q_2 . q_3, \dots \dots$$

حيث q_1 تكون مرجع وليس نقطة اصل . $\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2}\hat{r}_{21} + K\frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_{31}|^2}\hat{r}_{31}$ كما في الرسم التوضيحي التالي:-



اذا عبرنا عن مواقع الشحنات بوجود نقطة الاصل : $\vec{r}_1 + \vec{r} = \vec{r}_2 \implies \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.



$$\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o}\frac{\left[\hat{\imath}(x_2 - x_1) + \hat{\jmath}(y_2 - y_1) + \hat{k}(z_2 - z_1)\right]}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}}$$

(2 – 4) كثافة الشحنة : *Charge density*

يمكن توسيع فكرة لتاثير المتبادل بين N من الشحنات النقطية وجعلها تسمل التاثير المتبادل بين شحنة نقطية وتوزيع متصل (ممتد) من الشحنة .

معنى التوزيع المتصل للشحنة:ان الشحنة الكهربائية تتكون من مضاعفات لشحنة اساسية هي شحنة الالكترون ($1.6x10^{-19}coul$) وهو مقدار ضئيل جدا ،وهذا يعني ان قيمة اي شحنة كهربائية يجب ان تكون مساوية لشحنة الالكترون مضروبة في عدد صحيح . وهذا بدوره يعني ان اي عنصر صغير من الحجم مأخوذ من توزيع شحني يحتوي على عدد كبير جدا من الالكترونات وعندئذ يصبح بالامكان ان نصف اي توزيع شحني بدلالة دالة كثافة الشحنة والتي تمثل :- غاية الشحنة لوحدة الحجم عندما يصبح حجم الشحنة متناهي الصغر ويمكن وصف التوزيع الشحني بدلالة الدوال النقطية الاتية:

1- دالة كثافة الشحنة الحجمية ρ:- وتعرف كثافة الشحنة الحجمية بموجب العلاقة

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad and\ dq = \rho dV, \therefore \quad q = \int \rho dV$$

2- كثافة الشحنة السطحية σ :- وتعرف الكثافة السطحية للشحنة بموجب العلاقة

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad and \ \ ,dq = \sigma dS \ \therefore \ q = \int \sigma dS$$

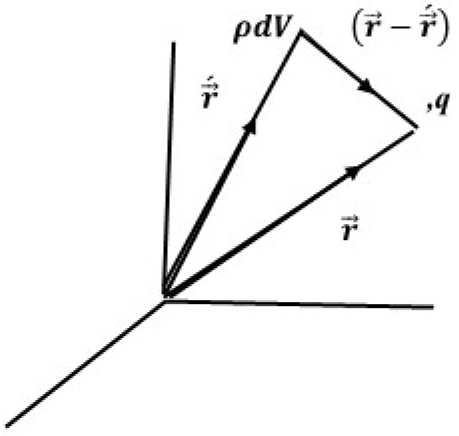
3- كثافة الشحنة الطولية λ :- وتعرف كثافة الشحنة الطولية بموجب العلاقة

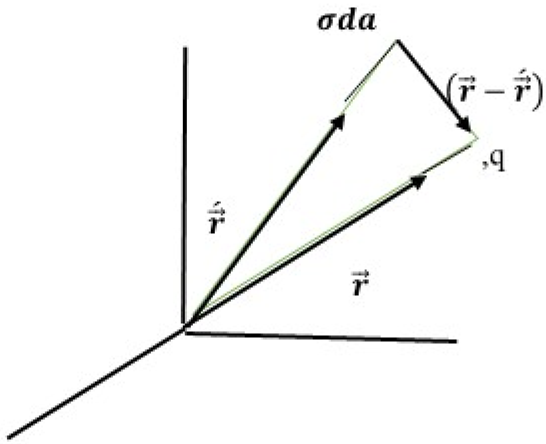
$$\lambda = \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell} \quad and\ , \ \ dq = \lambda d\ell, \ \ q = \int \lambda d\ell$$

ان $\rho, \sigma. \lambda$ تمثل كثافة الشحنة الفائضة اوكثافة صافي الشحنة .

اذا توزعت الشحنة بحيث شغلت حجما قدره V بكثافة حجمية ρ واصبحت كثافتها السطحية σ على السطح S المحيط بالحجم V لامكن ايجاد قوة كولوم التي يؤثر بها هذا التوزيع الشحني على شحنة نقطية q محدد موضعها بالمتجه $\vec{r}$ وفق العلاقة التالية:-

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{(\vec{r} - \acute{\vec{r}})}{\left|\vec{r} - \acute{\vec{r}}\right|^3} \rho dV + \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{(\vec{r} - \acute{\vec{r}})}{\left|\vec{r} - \acute{\vec{r}}\right|^3} \sigma da$$





(5-2) المجال الكهربائي : Electric Field

يعرف المجال الكهربائي عند نقطة ما بأنه القوة المؤثرة على شحنة اختبارية موضوعة عند تلك النقطة الى قيمة الشحنة الاختبارية ويعطى بالعلاقة التالية :-

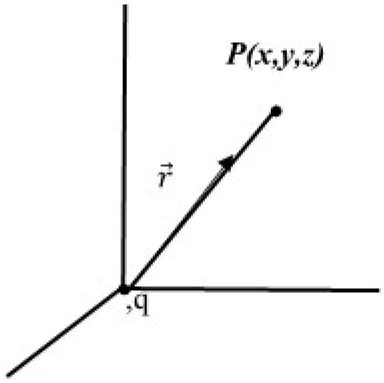
$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}}{q} \; \frac{volt}{m} \; or \; \frac{N}{coul} \quad , as \; \frac{N}{coul} = \frac{J/_m}{coul} \text{ but } \frac{J}{coul} = \text{volt} \Longrightarrow \frac{volt}{m} = \frac{N}{coul}$$

ان الهدف من ادخال الغاية في تعريف المجال هو لجعل الشحنة الاختبارية غير مؤثرة على التوزيع الشحني المولد للمجال . (الشحنة الاختبارية تؤخذ عادة بقيمة واحد كولوم)

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = \frac{q}{4\pi \in_o r^2} \hat{r}$$

اذا كانت الشحنة المسببة للمجال الكهربائي (q) واقعة في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية واقعة عند النقطة (P) على مسافة r من الشحنة q فعندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية:

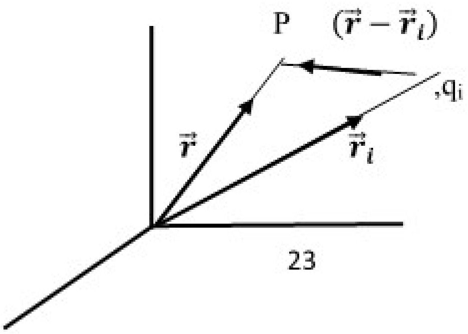
$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \hat{r} \qquad or \qquad \vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$$



اما اذا كانت لدينا مجموعة من الشحنات النقطية مسببة للمجال الكهربائي (q_i) حيث ($i = 1, 2, 3, \ldots$) ولاتقع في نقطة الاصل ولكن تبعد تبعد بمسافة r_i عن نقطة الاصل اما الشحنة الاختبارية عند النقطة P على مسافة r من نقطة الاصل عندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} , \qquad as \; \vec{r}_i + (\vec{r} - \vec{r}_i) = \vec{r}$$

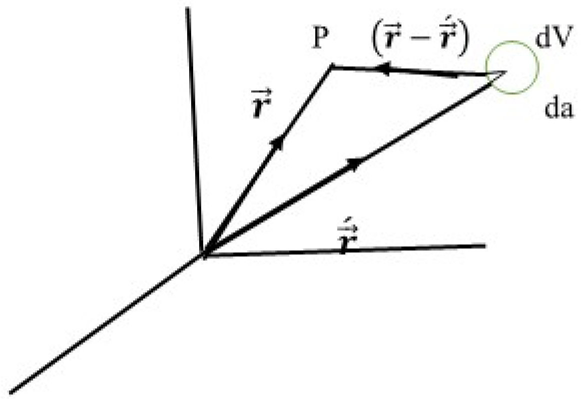
ويكون المجال بنفس اتجاه القوة .



لنأخذ توزيع شحني مكون من N من الشحنات النقطية $q_1, q_2, \ldots, q_N$ ونفرض انها موضوعة على النقاط $r_1, r_2, \ldots, r_N$ على الترتيب ومن توزيع حجمي لشحنة تشغل حجما قدره V بكثافة حجمية $\rho(\acute{r})$ ، ومن توزيع سطحي لشحنة موزعة على سطح S مميز بكثافة سطحية $\sigma(\acute{r})$ فاذا وضعت شحنة اختبارية (q) عند النقطة P التي تبعد مسافة r عن نقطة الاصل اي ان لدينا توزيع حجمي وسطحي فالمجال الكهربائي في هذه الحالة يعطى بالعلاقة الاتية بحيث يغطي التوزيع الشحني بأكمله :-

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_V \frac{(\vec{r}-\vec{\acute{r}})}{|\vec{r}-\vec{\acute{r}}|^3}\rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S \frac{(\vec{r}-\vec{\acute{r}})}{|\vec{r}-\vec{\acute{r}}|^3}\sigma dS, \qquad as\ \vec{\acute{r}} + (\vec{r}-\vec{\acute{r}}) = \vec{r}$$

نقطي ↑   حجمي ↑   سطحي ↑



لأثبات ان المجال الكهربائي محافظ (Conserved) نتبع مايلي :-

اذا ازيحت شحنة مقدارها q في مجال كهربائي E بحيث لايؤثر وجودها على شكل المجال او مقداره ، ازاحة تفاضلية ($d\ell$) من نقطة a الى نقطة b وبدون تغيير في طاقتها الميكانيكية فان الشغل المنجز عليها يكون :

$$W = -\oint_a^b \vec{E}\,Q.d\ell \qquad \text{(الشغل = F= القوة x الازاحة =QE)}$$

والاشارة السالبة تعني ان الشغل قد انجز ضد المجال الكهربائي $\vec{E}$ وكانت الشحنة على مسار مغلق ولسهولة الحل نتصور ان الجسم هو شحنة نقطية مقدارها Q فالشغل المنجز عندئذ هو:-

$$W = -\oint \vec{E}\acute{Q}\,.d\ell = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\oint_a^b \frac{\vec{r}.d\ell}{\vec{r}^3}$$

الحد داخل التكامل يمثل $\frac{d\ell}{r^2} = \frac{-d}{dr}$ وعليه:

$$W = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\oint_a^b \frac{-d}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\oint_a^b \frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b$$

ان مجموع الزيادات في 1/r في مسار مغلق يساوي صفر لان قمة r ثابتة هي نفسها عند بداية ونهاية المسار وعليه فالتكامل الخطي يساوي صفر وعليه فالشغل المنجز لتحريك شحنة نقطية حول اي مسار مغلق في مجال شحنة نقطية اخرى يساوي صفر اي ان :-

$$\oint \vec{E}.d\ell = 0$$

ومن نظرية ستوكس وعند كل نقاط الفراغ :

$$\oint \vec{E}.d\ell = \oint \vec{\nabla} x \vec{E} dS = 0$$

(2 – 6) الجهد الكهروستاتيكي :- *The Electrostatic Potential*

اذا تلاشى التفاف كمية متجهة لأمكن التعبير عن هذه الكمية المتجهة بمثابة انحدار لكمية لامتجهة وهذا الكلام ينطبق على المجال الكهربائي المعطى بالمعادلة (2) ولتحقيق ذلك تأخذ التفاف المجال الكهربائي .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{i=1}^{N} q_i \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_V \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\sigma dS$$

$$from\ the\ hypothesis\quad \vec{\nabla} \times \emptyset F = \emptyset \vec{\nabla} \times F + \vec{\nabla}\emptyset \times F$$

$$let\ \emptyset = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\ ,and\quad \vec{r}-\vec{r}'_i = F$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\nabla \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) + \nabla \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\because\ \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$we\ proved\ that\quad \nabla \frac{1}{|r|^3} = -3\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^4} = -3\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

$$\therefore\ \nabla \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = -3\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1)

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = 0 - \frac{3\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5} \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right),\qquad but\ \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) = 0$$, متوازيان

$$\therefore \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|^3} = 0$$

القوة محفوظة

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \ldots\ldots\ldots..(4)}$$

تشير معادلة 4 الى وجود دالة لامتجهة ذات انحدار مسار للمجال الكهربائي وهذه الدالة هي الجهد الكهروستاتيكي u.
وعليه اذا كان التفاف كمية متجهة يساوي صفر فنعبر عن هذه الكمية المتجهة بدلالة انحدار كمية لامتجهة اي ان :

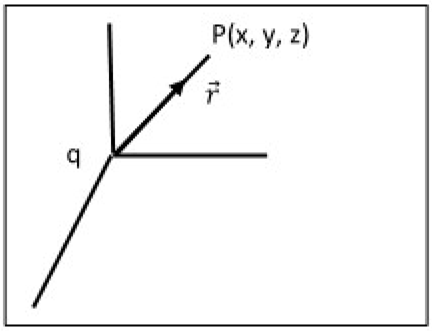
$$\boxed{\vec{E} = -\nabla u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)}$$

$$\because\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\ ,\ \ also\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(-\nabla\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = -\nabla\frac{q}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}|} = -\nabla u$$

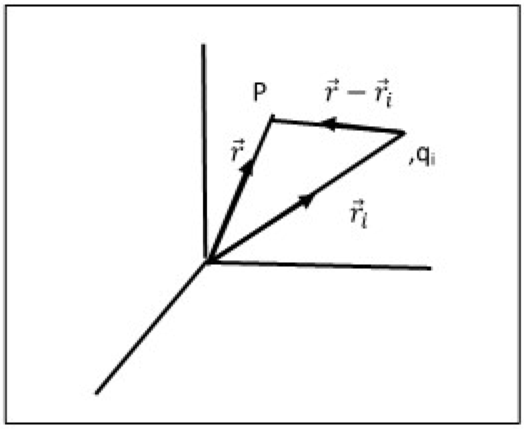
$$u = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{|\vec{r}|}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

حيث الشحنة q هي المسببة للجهد الكهروستاتيكي ونفرضانها تقع في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية عند الموقع P على بعد r من نقطة الاصل .



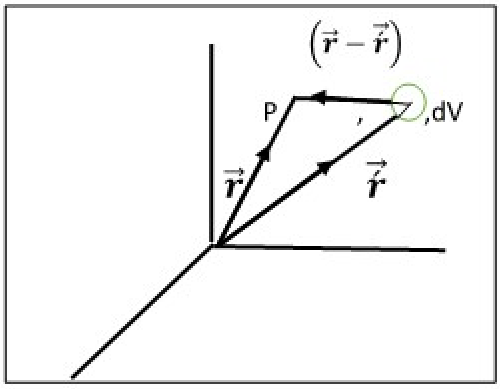
ويعطى الجهد الكهروستاتيكي الناشيءعن مجموعة من الشحنات النقطية (q_i) والتي لا تقع في نقطة الاصل بل على بعد r_i من نقطة الاصل والشحنة الاختبارية في الموقع P على بعد r من نقطة الاصل بالعلاقة :-

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\ldots\ldots\ldots..(7)$$



واذا كان لدينا توزيع شحني بشكل (نقطي و حجمي و سطحي) والشحنة الاختبارية في الموقع P على بعد r من نقطة الاصل فالجهد الكهروستاتيكي عندئذ يعطى بالعلاقة ادناه:-

$$u(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}+\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_V\frac{\rho(r)dV}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|}+\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S\frac{\sigma(r)da}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|}$$



كما يمكننا الحصول على الجهد الكهروستاتيكي بصورة مباشرة وذلك بوجود المجال الكهربائي كما في المعادلة التالية

$$E(r)=-\nabla u$$

وبأخذ التكامل للطرفين : $\int_{ref}^{r}E(r).\,dr=-\int_{ref}^{r}\nabla u.\,dr$

حيث ref **نقطة المرجع واختيرت عند نقطة يكون عندها الجهد يساوي صفر ومن تعريف الانحدار نجد ان :-**

$$\nabla u(r)=\frac{du(r)}{dr}\Rightarrow\nabla u(r).\,dr=du(r)\qquad but\int_r du(r)=u(r)$$

$$\int_{ref}^{r}E(r).\,dr=-\int_{ref}^{r}du(r)=-u(r)$$

$$\boxed{u(r)=-\int E(r)dr\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(8)}$$

(2 – 7) الطاقة الكامنة :- *Potential Energy*

ان هناك علاقة بين الجهد الكهروستاتيكي والطاقة الكامنة المصاحبة للقوة المحافظة الكهروستاتيكية وبصورة عامة يمكن التعبير عن الطاقة الكامنة المصاحبة لقوة محافظة بالشغل المبذول لتحريك الشحنة (q) من موقع الى اخر داخل المجال E والذي يعطى بالعلاقة :-

$$w(r) = -\int_{ref}^{r} F(r).dr$$

حيث w(r) تمثل الطاقة الكامنة عند الموقع r نسبة الى نقطة المرجع (ref) تكون عندها الطاقة الكامنة (اي الشغل والجهد) تساوي صفر وظهرت الاشارة السالبة لأن الشغل غير ناتج عن قوة المجال وانما من قوة مقاومة او الجهة المعاكسة للقوة.

$$F = qE,\ \ w = -\int_{ref}^{r} F.dr\ , \qquad \therefore w = -q\int_{ref}^{r} E.dr\ ,\ \ but\ \ E = -\nabla u$$

$$\therefore w = q\int_{ref}^{r} \nabla u.dr\ , \quad but\ \ \nabla u = \frac{du}{dr}, \Rightarrow \nabla u.dr = du$$

$$\therefore w = q\int_{ref}^{r} du = qu(r)]_{ref}^{r}$$

$$w = q(u(r) - u(ref) = qu$$

$$\boxed{u = \frac{w}{q} \quad \frac{Joul}{coul} = volt}$$

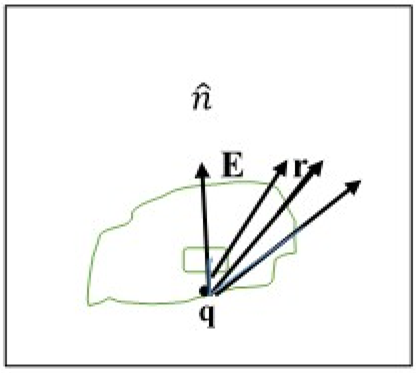
اي ان فرق الجهد يمثل مقدار الشغل المنجز لوحدة الشحنة

(2 – 8) قانون كاوس :- *Gauss Law*

اوجد كاوس العلاقة بين تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية التي يضمها السطح .بما ان المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة نقطية (q) واقعة في نقطة الاصل عند نقطة محددة بالمتجه $\vec{r}$ يساوي :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

بأخذ التكامل السطحي للمركبة العمودية لهذا المجال على سطح مغلق والذي يحيط بالشحنة (q) سنحصل على:



$$\oint_s \vec{E}.\hat{n}da = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\oint \frac{\vec{r}.\vec{n}}{|\vec{r}|^3}da$$

$$but\ \ \oint_s \frac{\vec{r}.\hat{n}}{|\vec{r}|^3}da = 4\pi$$

$$\therefore \oint \vec{E}.\hat{n}\, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}.4\pi = \frac{q}{\epsilon_o}$$

الصيغة التكاملية لقانون كاوس

$$\boxed{\oint \vec{E}.\hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_o}}$$

تشير المعادلة اعلاه الى ان التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي على اي سطح مغلق (الفيض) يساوي المجموع الكلي للشحنات الموجودة ضمن السطح المغلق مقسوما على سماحيته.

اما اذا كان لدينا شحنتين يصبح القانون :

$$\oint \vec{E}.dS = \frac{q_1}{\epsilon_o} + \frac{q_2}{\epsilon_o} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_o}$$

وبصورة عامة يعطى القانون بالصيغة :-

$$\oint \vec{E}\,.dS = \frac{1}{\epsilon_o}\sum q_i$$

ولأيجاد الصيغة التفاضلية لقانون كاوس نستخدم نظرية التباعد .

$$\oint \vec{F}.\hat{n}\, da = \int_V \vec{\nabla}.\vec{F}\, dV$$

$$\oint \vec{E}.\hat{n}\, da = \int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\, dV \qquad but \oint \vec{E}.\hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\, dV = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$but\;\; dq = \rho dV \;\Rightarrow q = \int \rho\, dV$$

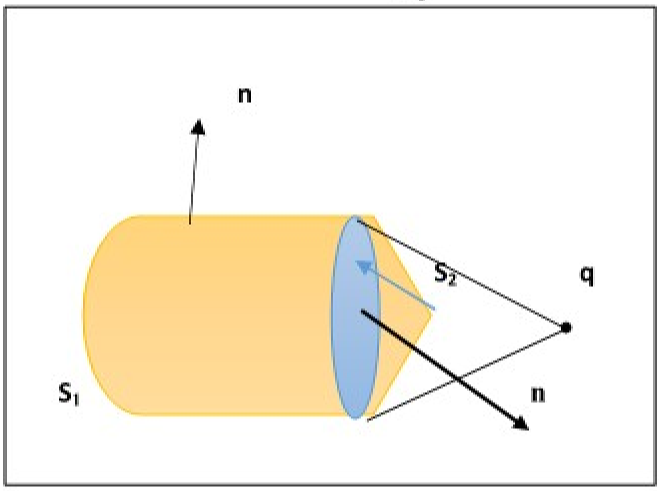
$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\, dV = \frac{1}{\epsilon_o}\int_V \rho\, dV$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}}$$

اذا وقعت الشحنة خارج السطح ، يمكن تقسيم السطح الى قسمين مساحتهما S_1 و S_2 وهما في مواجهة الزاوية المجسمة نفسها المتكونة عند الشحنة (q) وتكون مساهمة كل من السطحين للتكامل السطحي متساوية بالمقدار ومتعاكسة في الاشارة مما يؤدي الى تلاشي التكامل الكلي للسطح المغلق اي يصبح التكامل السطحي لشحنة واقعة

خارج السطح المغلق يساوي صفر وبذلك يمكننا ان نستنتج أنه اذا احاط السطح المغلق بالشحنة النقطية لأصبح التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال العمودية الكهربائي مساويا الى $\frac{q}{\epsilon_o}$ اما اذا وقعت الشحنة خارج السطح المغلق اصبح التكامل السطحي مساويا للصفر.

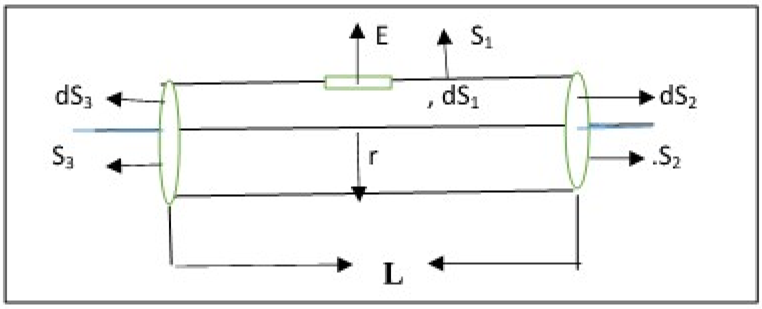


(2 – 9) تطبيقات قانون كاوس : *Application of Gauss's law*

لقانون كاوس فوائد عملية تتجلى في توفير اسلوب سهل لحساب المجالات الكهربائية في الحالات التي يكون فيها المجال بقدر كاف من التماثل ، وعليه يجب اختيار سطح مغلق (سطح كاوس) بحيث يكون للمجال مركبة عمودية عليه ذات قيمة ثابتة لجميع نقاط السطح او ان تكون قيمة المركبة صفرا ، وعلى سبيل المثال :

لأيجاد المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة خطية طويلة جدا ذات كثافة شحنية قدرها λ لوحدة الطول .

لحل هذا المثال نجد ان طبيعة التماثل في هذه الحالة تشير الى ان المجال الكهربائي المتولد يكون شعاعيا وغير معتمد على الموقع سواء من ناحية البعد على امتداد خط الشحنة او من ناحية الموضع الزاوي حول الشحنة الخطية كما في الشكل :



وهذا يعني ان التوزيع المنتظم للشحنة على على طول الخط المستقيم اللانهائي يشير الى ان المجال الناشئ عن الخط يكون بأتجاه شعاعي منبعث من الخط وان مقدار شدة المجال مساوي لجميع النقاط التي تبعد مسافة قدرها (r) وعليه نجد ان افضل سطح كاوس ملائم لهذا التناسق الشعاعي للمجال المحيط بالخط المشحون هو سطح اسطواني دائري مغلق نصف قطره (r) وطوله (L) ومحوره منطبق على الخط المشحون كما في الشكل اعلاه.

$$\oint \boldsymbol{E.n\,da} = \oint \boldsymbol{E\,.\,dS} = \oint \boldsymbol{E\cos\theta\, dS} = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\oint E\cos\theta\, dS = \oint_{S_1} E\cos\theta\, dS + \oint_{S_2} E\cos\theta\, dS + \oint_{S_3} E\cos\theta\, dS = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\oint E\cos\theta\, dS = \oint_{S_1} E\cos(o)\, dS + \oint_{S_2} E\cos(90)\, dS \oint_{S_3} E\cos(90)\, dS = ES_1 = E(2\pi rL) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$but\ q = \int \lambda\, d\ell = \lambda \int d\ell = \lambda L$$

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \quad \text{(مقدارا)}$$

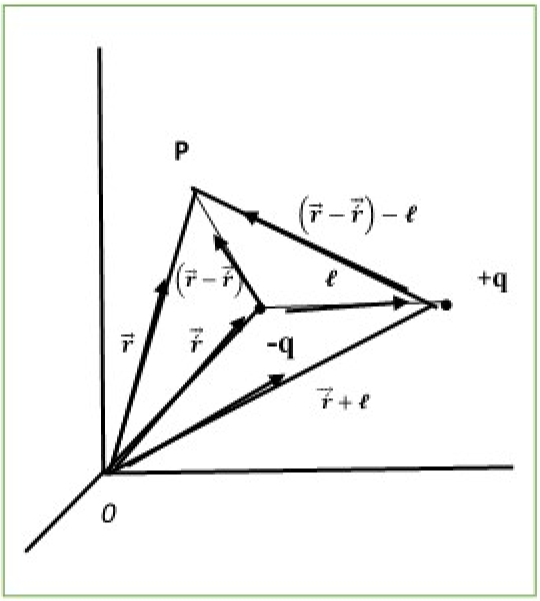
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi\epsilon_o \vec{r}^2} \quad \text{اتجاها}}$$

(2 -10) ثنائي القطب الكهربائي : *The electric dipole*

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين في الاشارة تفصل بينهما مسافة صغيرة (ℓ) ، نفرض ان شحنة قدرها (q -) تبعد مسافة ($\vec{r}'$) عن نقطة الاصل وان شحنة قدرها ($+q$) تبعد مسافة ($\vec{r}' + \ell$) عن نقطة الاصل وكما هو موضح بالشكل ، عندئذ يمكن ايجاد المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب عند النقطة P التي تبعد مسافة ($\vec{r}$) عن نقطة الاصل :

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}')-\vec{\ell}}{\left|(\vec{r}-\vec{r}')-\vec{\ell}\right|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right]$$

والاشارة السالبة ظهرت لان الشحنة الثانية هي سالبة الشحنة (q -) .



نأخذ الحد الاول من القوس من المعادلة اعلاه :-

$$\frac{1}{\left|(\vec{r}-\vec{r}')-\vec{\ell}\right|^3} = \left|(\vec{r}-\vec{r}')-\vec{\ell}\right|^{-3} = \left[\left|(\vec{r}-\vec{r}')-\vec{\ell}\right|^2\right]^{-3/2} = \left[\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2 - 2\ell\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) + \ell^2\right]^{-3/2}$$

نضرب ونقسم بالمقدار $\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^2$:

$$\frac{1}{\left|\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)-\vec{\ell}\right|^3}=\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^{-3}\left[1-\frac{2(\vec{r}-\vec{\acute{r}})\ell}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^2}+\frac{\ell^2}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^2}\right]^{\frac{-3}{2}}\quad but\ \ell \lll \left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)$$

لذلك الحد الاخير يهمل وبأستخدام مفكوك نظرية ذي الحدين :-

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)x^{n-1}}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-2}}{3!}+\cdots$$

نفرض $x=\frac{-2(\vec{r}-\vec{\acute{r}})\ell}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^2}$ و $n=-3/2$ ونستخدم مفكوك نظرية ذي الحدين :

$$\left|\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)-\vec{\ell}\right|^{-3}=\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^{-3}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\left(-2\ell\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^2}-\frac{3}{2}*\frac{-5}{2}*\frac{1}{2}\left(\frac{-2\ell(\vec{r}-\vec{\acute{r}})^{-5/2}}{\left|\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|\right|^3}\right)\right]$$

وبما ان ℓ في البسط في الحد الثاني داخل القوس في الطرف الايمن صغيرة جدا اقل بكثير من $\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|$ لذا يهمل هذا الحد. فتصبح المعادلة :

$$\left|\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)-\vec{\ell}\right|^{-3}=\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^{-3}\left[1+\frac{3\ell.\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^2}\right]$$

نعوض هذه القيمة في معادلة المجال (E) :

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\left(q\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)-q\ell\right)\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}+\frac{3\ell\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^5}\right)-\frac{q\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{q\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}+\frac{q\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)x3\ell\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^5}-\frac{q\ell}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}-\frac{q\ell.3\ell\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^5}-\frac{q\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}\right]$$

الحد الاول يختصر مع الحد الاخير ويهمل الحد الرابع لكونه صغير جدا لاحتوائه على ℓ^2 في البسط فتصبح النتيجة :-

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{3q\ell.\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^5}\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)-\frac{q\ell}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}\right]$$

بما ان عزم ثنائي القطب dipole moment هو $P = q\ell$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3\vec{P}.\left(\vec{r}-\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|^5}\left(\vec{r}-\vec{r}\right) - \frac{\vec{P}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|^3}\right]}$$

تحفظ هذه المعادلة

ولوكان ثنائي القطب موضوع في نقطة الاصل اي ان : $\vec{r} = 0$ فتصبح المعادلة بالشكل :-

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3\vec{P}.(\vec{r})}{|\vec{r}|^5}(\vec{r}) - \frac{\vec{P}}{|\vec{r}|^3}\right]$$

ويمكن حساب الجهد الناشئ عن ثنائي القطب مباشرة من المعادلة :

$$u(r) = \frac{q}{4\pi\in_o}\frac{1}{\left|\left(\vec{r}-\vec{r}\right)-\ell\right|} - \frac{q}{4\pi\in_o}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|} = \frac{q}{4\pi\in_o}\left[\frac{1}{\left|\left(\vec{r}-\vec{r}\right)-\ell\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|}\right]$$

بتبسيط المقام في الحد الاول بنفس الطريقة السابقة :-

$$\left|\left(\vec{r}-\vec{r}\right)-\ell\right|^{-1} = \left[\left|\left(\vec{r}-\vec{r}\right)-\ell\right|^2\right]^{-1/2} = \left[\left|\vec{r}-\vec{r}\right|^2 - 2\left(\vec{r}-\vec{r}\right)\ell + \ell^2\right]^{-1/2}$$

$$\left|\left(\vec{r}-\vec{r}\right)-\ell\right|^{-1} = \left|\vec{r}-\vec{r}\right|^{-1}\left[1 - \frac{2\left(\vec{r}-\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|^2} + \frac{\ell^2}{\left|\vec{r}-\vec{r}\right|^2}\right]^{-1/2}$$

الحد الاخير يهمل لان $\left(\vec{r}-\vec{r}\right) \lll \ell$ وباستخدام مفكوك ذي الحدين وتعويض النتائج في معادلة الجهد نحصل على :-

$$u(r) = \frac{q\left(\vec{r}-\vec{r}\right).\ell}{4\pi\epsilon_o\left|\vec{r}-\vec{r}\right|^3}\ , \qquad but\ \vec{P} = q\ell$$

$$\boxed{u(r) = \frac{P.\left(\vec{r}-\vec{r}\right)}{4\pi\epsilon_o\left|\vec{r}-\vec{r}\right|^3}}$$

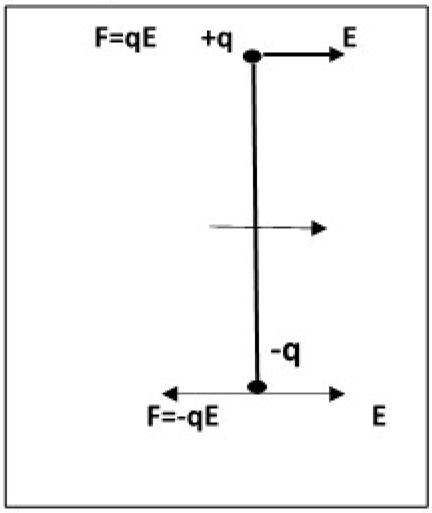
تحفظ هذه المعادلة

فاذا كانت $\vec{r} = 0$

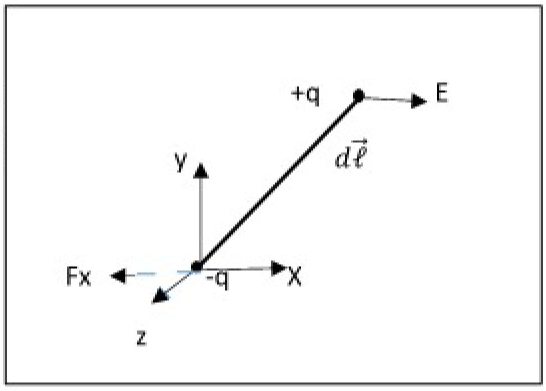
$$u(r) = \frac{q.\vec{r}}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}|^3}$$

(2 – 11) ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم : -

عندما يكون المجال منتظم تكون محصلة القوى مساوية للصفر اي ان $\vec{F} = 0$ كما في الشكل ادناه :



اما عند وضع ثنائي القطب في مجال غير منتظم فيمكن ايجاد القوة الموثرة حيث نفرض ان نقطة الاصل لنظام الاحداثيات تنطبق على الشحنة السالبة (q-) لثنائي القطب .



$$F = F_{q^+} + F_{q^-} = \mathrm{qE}$$

نحسب اولا القوة باتجاه المركبة x . فالقوة المؤثرة على الثنائي القطب الكهربائي في الاتجاه السيني الموجب هي:-

$$\vec{F}_x^+ = q^+(E_x + dE_x)$$

وفي الاتجاه السالب تكون القوة مساوية الى $\vec{F}_x = -qE_x$

لان الشحنة السالبة (q -) تقع في نقطة الاصل توجد مركبة واحدة حيث البعد من نقطة الاصل r=0 وعليه تصبح محصلة القوة في اتجاه x تعطى بالعلاقة : $\vec{F}_x = +qdE_x$

$$\because\ d\vec{E}_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz$$

$$\therefore \vec{F}_x = \mathrm{q}\left(\mathrm{dx}\frac{\partial E_x}{\partial x} + dy\frac{\partial E_x}{\partial y} + dz\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = q\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x$$

$$but \quad \vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad and \quad d\vec{\ell} = \vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz$$

$$\vec{F}_x = q(d\vec{\ell}.\vec{\nabla})\vec{E}_x \qquad but \quad \vec{P} = qd\vec{\ell}$$

$$\therefore\ \vec{F}_x = (\vec{P}.\vec{\nabla})\vec{E}_x$$

وبنفس الطريقة نوجد القوة بأتجاه المركبات الاخرى y,z وعليه بصورة عامة فأن القوة المؤثرة على ثنائي القطب الكهربائي تعطى بالعلاقة الاتية :-

$$\boxed{\therefore\ \vec{F} = (\vec{P}.\vec{\nabla})\vec{E}}$$

يعطى عزم الازدواج Torque بالعلاقة الاتية :-

$$\vec{\tau} = d\ell \times \vec{F} = d\ell \times q\vec{E} = qd\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} = PEcos\theta}$$

$$if\vec{P} \parallel \vec{E} \Longrightarrow, \vec{\tau} = 0$$

وعليه نستنتج انه لثنائي القطب اذا كان المجال منتظم فأن محصلة القوة المؤثرة عليه تساوي صفر وعليه يصبح $\vec{\tau} = 0$ وذلك لأن $\vec{\tau} = d\ell \times \vec{F}$.

اسئلة الفصل الثاني

س1/ كرة نصف قطرها R ملئت بالشحنة باسلوب ما ، فاذا كان المجال لهذه المنطقة $\vec{E} = \frac{E_o}{R}|\vec{r}|\vec{r}$ حيث E_o ثابت و R متجه من مركز هذه الكرة اوجد تعبيرا للكثافة الحجمية ؟

الجواب / باستخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاوس :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \Longrightarrow \rho = \epsilon_o\ \vec{\nabla}.\vec{E}$$

بتعويض معادلة المجال المعطاة بالسؤال نحصل على:

$$\rho = \epsilon_o\ \nabla.\left[\frac{E_o}{R}|\vec{r}|\vec{r}\right] = \frac{\epsilon_o}{R}E_o\nabla.|\vec{r}|\vec{r}$$

بأستخدام المتطابقة :- $\vec{\nabla}.\emptyset\vec{A} = \emptyset\vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{A}.\nabla\emptyset, \quad let\ \emptyset = |\vec{r}|, and\ \vec{A} = \vec{r}$

$$\vec{\nabla}.|\vec{r}|\vec{r} = |\vec{r}|\vec{\nabla}.\vec{r} + \vec{r}.\vec{\nabla}|\vec{r}|\ , but\ \vec{\nabla}.\vec{r} = 3, \qquad and\ \vec{\nabla}|\vec{r}| = \hat{r}. = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}.|\vec{r}|\vec{r} = 3|\vec{r}| + \vec{r}.\hat{r} = 3|\vec{r}| + \vec{r}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = 3|\vec{r}| + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|} = 4|\vec{r}|$$

$$\therefore\ \rho = \frac{4\epsilon_o E_o}{R}|\vec{r}|$$

س2/ اذا كان الجهد لتوزيع كروي للشحنة معطى بالعلاقة $u(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ حيث α, K ثوابت جد المجال الكهربائي .

الجواب / من العلاقة:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}u(r) = -\frac{du(r)}{dr} = -K\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right) = -\mathrm{K}\left(\frac{re^{-\alpha r}(-\alpha) - e^{-\alpha r}}{r^2}\right)$$

$$= K\left(\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r} + \frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\right) = Ke^{-\alpha r}\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = Ke^{-\alpha r}\left(\frac{r\alpha + 1}{r^2}\right)$$

$$\therefore\ \vec{E} = Ke^{-\alpha r}\left(\frac{1+\alpha r}{r^2}\right)$$

س3/ تتوزع الشحنة على كرة(نصف قطرها R) بكثافة شحنة حجمية متجانسة ، جد المجال والجهد الكهربائي للحالات الاتية: 1- نقطة خارج الكرة على على بعد r من المركز $r > R$ 2- نقطة داخل الكرة حيث $r < R$

الجواب/

$1-)r > R$

من قانون كاوس :-

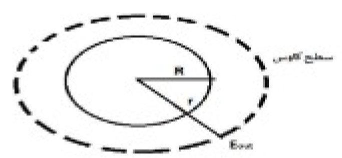
$$\oint \vec{E}_{out}.\vec{n}da = \frac{q}{\epsilon_o}, \Longrightarrow \qquad E_{out}\oint da = \frac{q}{\epsilon_o} \ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$but:\ \ q = \int \rho dV$$

والحجم بالاحاثيات الكروية يعطى بالعلاقة التالية : $dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\emptyset$

$$\therefore\ \ \mathrm{q} = \rho\int_0^R r^2\,dr\int_0^\pi sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\emptyset = \rho\left[\frac{R^3}{3} - 0\right][-cos\theta]_0^\pi[\phi]_0^{2\pi}$$

$$q = \rho\left[\frac{R^3}{3}\right][-(-1)+1](2\pi) = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$



المساحة السطحية للكرة (سطح كاوس) هو (a) حيث : (3)..................... $a = \int da = 4\pi r^2$

بتعويض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :- المجال خارج الكرة

$$\vec{E}_{out}.4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{\epsilon_o}\ , \qquad \Longrightarrow E_{out} = \left|\vec{E}_{out}\right| = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r^2}$$

من المعادلة الاخيرة نلاحظ ان : $E_{out} \propto \frac{1}{r^2}$

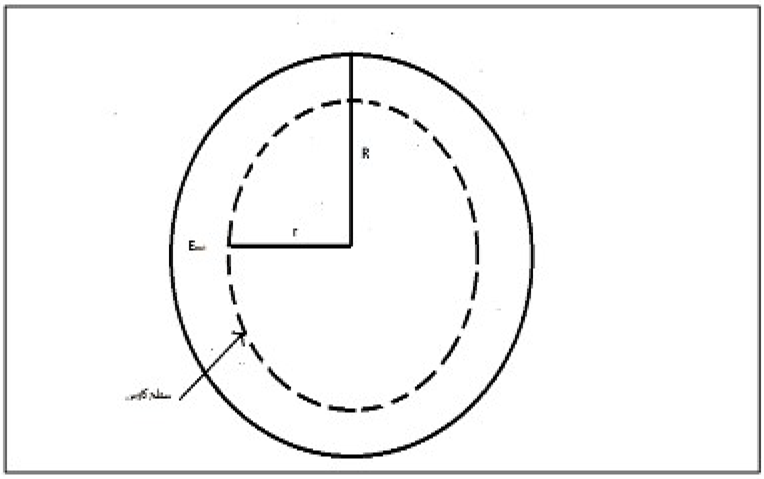
اما الجهد الكهربائي اللازم لتقريب شحنة نقطية من المالانهاية الى سطح كاوس يساوي u_{out} ويحسب كالاتي:

$$u_{out} = -\int_{\infty}^{r} \left|\vec{E}_{out}\right| dr = -\int_{\infty}^{r} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r^2}\right) dr = \frac{-\rho R^3}{3\epsilon_o}\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_o}\left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$$

اذن الجهد الكهربائي لنقطة خارج الكرة هي:

$$u_{out} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r} \qquad u_{out} \propto \frac{1}{r}$$

$2)\ r < R$



بتطبيق قانون كاوس :-

$$\oint E_{in}.n da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} \Longrightarrow \left|\vec{E}_{in}\right| \int da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} \ldots\ldots(1)$$

حيث $\acute{q}$ هي جزء من الشحنة الكلية للكرة وهي ذلك الجزء الموجود ضمن الحجم المحدد بسطح كاوس(داخل سطح كاوس فقط) ويساوي :

$$\acute{q} = \int \rho\, dV = \rho \int dV = \rho \int_0^r r^2\, dr \int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\emptyset = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}|4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)}{\epsilon_o} \Longrightarrow |\vec{E}_{in}| = \frac{\rho r}{3 \in_o} \quad , \qquad E_{in} \propto r$$

ولايجاد الجهد الكهربائي داخل الكرة فأنه يساوي الجهد اللازم لنقل شحنة اختبارية من المالانهاية الى R والجهد اللازم لنقلها من R الى r وعليه:

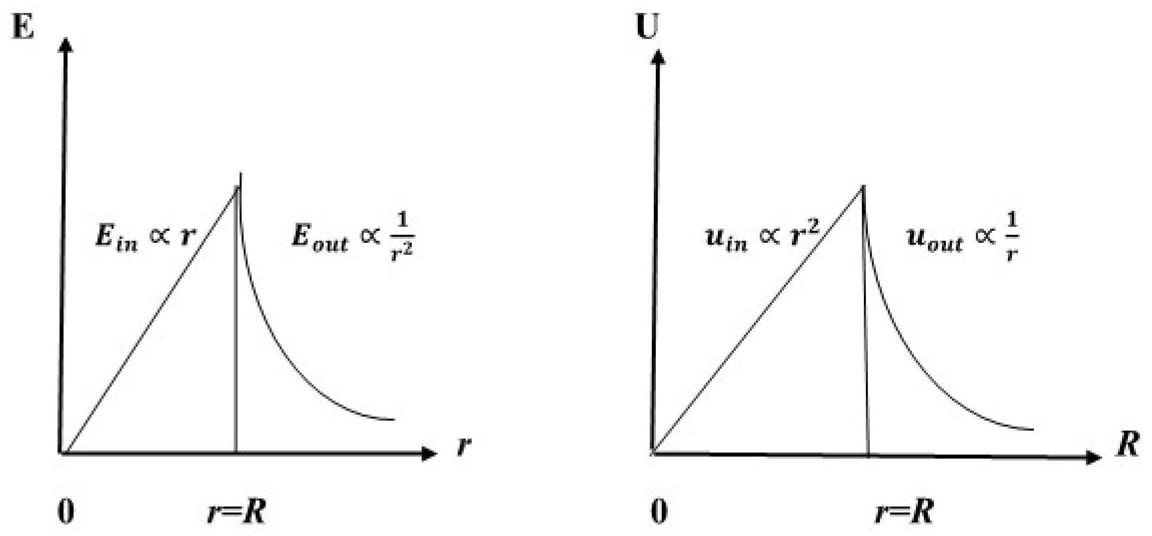
$$u_{in} = -\int_{\infty}^{R} |E_{out}| dr - \int_{R}^{r} |E_{in}| dr$$

$$u_{in} = -\frac{\rho R^3}{3 \in_0}\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r^2}dr - \frac{\rho}{3 \in_o}\int_{R}^{r} r\,dr = -\frac{\rho R^3}{3 \in_o}\left[-\frac{1}{R}+\frac{1}{\infty}\right] - \frac{\rho}{3 \in_o}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right] = \frac{\rho R^2}{3 \in_o} - \frac{\rho r^2}{6 \in_o} + \frac{\rho R^2}{6 \in_o}$$

$$= \frac{2\rho R^2 - \rho r^2 + \rho R^2}{6 \in_o} = \frac{3\rho R^2 - \rho r^2}{6 \in_o} = \frac{\rho}{6 \in_o}[3R^2 - r^2]$$

$$or: \quad u_{in} = \frac{\rho}{2 \in_o}\left[R^2 - \frac{r^2}{3}\right] \qquad U_{in} \propto r^2$$

يمكن توضيح العلاقة بين E و u مع r بالمخططات الاتية:



س4/ توزيع شحني كروي يمتلك كثافة شحنية كدالة الى r فقط حيث $\rho = \frac{A}{r}$ جد المجال الكهربائي والجهد :

1- خارج الكرة حيث $r > R$.
2- داخل الكرة حيث $r < R$.

الجواب/ نفس الرسوم في السؤال السابق .

$$1)\ \oint \vec{E}.\vec{n}\,da = \vec{E}_{out}\oint da = \frac{q}{\epsilon_o} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$but:\ \ q = \int_0^R \rho\, dV,\quad and \quad \rho = \frac{A}{r}\,,\qquad dV = r^2 sin\theta d\theta d\emptyset dr$$

$$\therefore\ \ q = \int_0^R \frac{A}{r} r^2\, dr \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_o^{2\pi} d\emptyset = \mathrm{A}\left[\frac{R^2}{2} - 0\right][-cos\pi + cos0][2\pi - 0]$$

$$\therefore\ \ q = 2\pi A R^2 \dots\dots\dots.(2)$$

ولسطح كاوس نحسب المساحة السطحية له:

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots\dots\dots\dots.(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في (1)

$$|\vec{E}_{out}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi A R^2}{\epsilon_o} \Rightarrow |\vec{E}_{out}| = \frac{AR^2}{2\,\epsilon_o\, r^2}$$

$$u(r)_{out} = -\int \vec{E}_{out}\,.dr = -\int_\infty^r E_{out}\,dr = -\int_\infty^r \frac{AR^2}{2\,\epsilon_o\,r^2}dr = -\frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\left[\frac{-1}{r}\right]_\infty^r$$

$$u(r)_{out} = \frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{AR^2}{2\,\epsilon_o\, r}$$

2) $r < R$

$$\oint \vec{E}_{in}.n\,da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} = |\vec{E}_{in}|\oint da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} \dots\dots\dots\dots.(1)$$

$$\acute{q} = \int_0^r \frac{A}{r} r^2\,dr \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\emptyset = A\frac{r^2}{2}]_0^r[-cos\pi + cos0](2\pi)$$

$$= \frac{Ar^2}{2}(-(-1)+1)(2\pi) = 2\pi A r^2$$

$$\acute{q} = 2\pi A r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi A r^2}{\epsilon_o}$$

$$\therefore\ |\vec{E}_{in}| = \frac{A}{2\,\epsilon_o}$$

$$u_{in} = -\int_{\infty}^{R}|\vec{E}_{out}|\,\mathrm{dr} - \int_{R}^{r}|\vec{E}_{in}|\,dr = -\int_{\infty}^{R}\left(\frac{AR^2}{2\,\epsilon_o\,r^2}\right)dr - \int_{R}^{r}\frac{A}{2\,\epsilon_o}dr$$

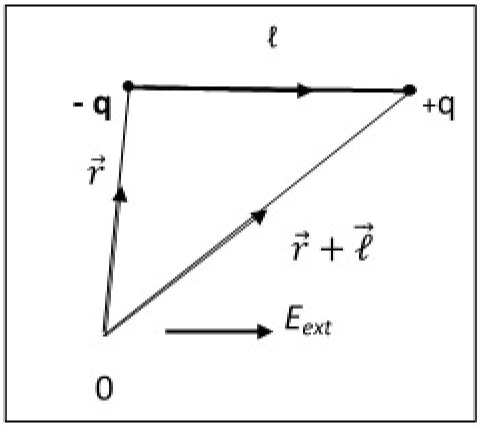
$$= -\frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} - \frac{A}{2\,\epsilon_o}\int_{R}^{r}dr = -\frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R} - \frac{A}{2\,\epsilon_o}[r]_R^r$$

$$= \frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\frac{1}{R} - \frac{A}{2\,\epsilon_o}(r-R) = \frac{AR}{2\,\epsilon_o} - \frac{Ar}{2\,\epsilon_o} + \frac{AR}{2\,\epsilon_o} = \frac{2AR}{2\,\epsilon_o} - \frac{Ar}{2\,\epsilon_o}$$

$$= \frac{A}{2\,\epsilon_o}(2R-r) \Rightarrow\ u_{in} = \frac{A}{2\,\epsilon_o}(2R-r)$$

س5/ جد الطاقة الكامنة لثنائي القطب الكهربائي عندما يوضع في مجال كهربائي منتظم (E_{ext}).

الجواب/ $\because\ u = \frac{\omega}{q}$



$$\omega = -qu_{ext}(r) + qu_{ext}(r+\ell)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث ω هي الطاقة الكامنة potential energy ، اذا كانت $\vec{r} \lll \vec{\ell}$ نستخدام قانون متسلسلة القوى power series كالاتي:

$$u_{ext}(\vec{r}+\vec{\ell}) = u_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}) \dots\dots\dots\dots (2)$$ حفظ

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) :-

$$\therefore\ \omega = -q\, u_{ext}(\vec{r}) + qu_{ext}(\vec{r}) + q\vec{\ell}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}) = q\vec{\ell}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}), \quad but: \vec{P} = q\vec{\ell}$$

$$\omega(\mathrm{r}) = \vec{P}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}), \qquad but: \vec{E} = -\nabla u, \quad E_{ext}(\vec{r}) = -\nabla u_{ext}(\vec{r})$$

$$\therefore\ \omega(r) = -\vec{P}.E_{ext}(\vec{r})$$

حيث المجال الخارجي $E_{ext}(\vec{r})$ ناشئ عن شحنات غير الشحنتين المكونتين لثنائي القطب .

س 6 / بين ان القوة المؤثرة على ثنائي القطب في مجال كهربائي خارجي $E_{ext}(\vec{r})$ تعطى بالعلاقة :-

$$\vec{F} = \vec{P}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}$$

الجواب / نفس الرسم في السؤال السابق

$$\vec{F} = \vec{F}_{+q} + \vec{F}_{-q}, \quad and\ \vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{F} = +q\vec{E}_{ext}(\vec{r}+\vec{\ell}) - q\vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots\dots\dots.(1), \qquad but, \qquad \vec{\ell} \lll \vec{r}$$

حسب قانون متسلسلة القوى:

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r}+\vec{\ell}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) نحصل على:-

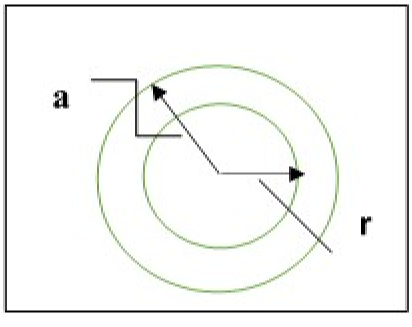
$$\vec{F} = q\vec{E}_{ext}(\vec{r}) + q\vec{\ell}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r}) - q\vec{E}_{ext}(\vec{r}) = q\vec{\ell}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

$$as: \quad \vec{P} = q\vec{\ell}, \quad \therefore \quad \vec{F} = \vec{P}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

س7/ شحنة كروية نصف قطرها (a) كثافة شحنتها تتغير وفق العلاقتين :-

1- $\rho_1 = \rho_o\left(\frac{a}{r}\right)$ 2- $\rho_2 = \rho_o\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$ ، اوجد المجال الكهربائي الداخلي لكلا الحالتين .

الجواب /



$$\oint \vec{E}_{in}.\vec{n}\, da = \frac{q_1}{\epsilon_o}$$

$$|\vec{E}_{in}| \oint da = \frac{q_1}{\epsilon_o} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$q_1 = \int \rho_1\, dV = \int_0^r \rho_o \left(\frac{a}{r}\right) r^2 dr + \int_0^\pi sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\emptyset = \frac{a\rho_o r^2}{2}(4\pi)$$

$$q_1 = 2\pi a\rho_o r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\oint da = a = 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi\rho_o a r^2}{\epsilon_o} \Longrightarrow E_{in} = \frac{\rho_o a}{2\,\epsilon_o}$$

وللحالة الثانية :

$$|E_{in}| \oint da = \frac{q_2}{\epsilon_o} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$q_2 = \int \rho_2\, dV = \int_0^r \rho_o \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) r^2\, dr + \int_0^\pi sin\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} d\emptyset = \left[\int_0^r \rho_o r^2\, dr - \int_0^r \rho_o a^2\, dr\right](4\pi)$$

$$q_2 = \left[\frac{\rho_o r^3}{3} - \rho_o a^2 r\right](4\pi) = 4\pi\rho_o\left[\frac{r^3}{3} - a^2 r\right] = 4\pi r^2 \rho_o\left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r}\right] \ldots\ldots\ldots(2)$$

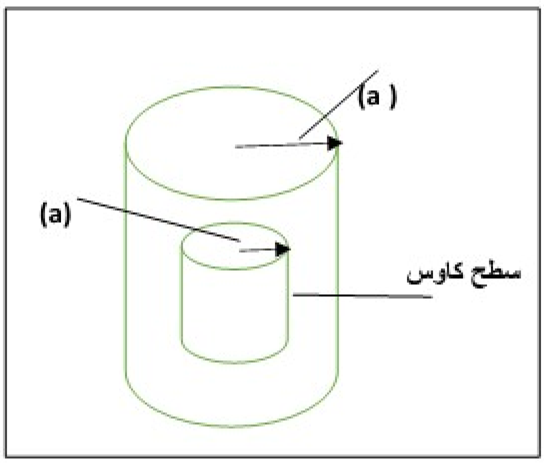
$$\oint da = 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{4\pi r^2 \rho_o \left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r}\right]}{\epsilon_o}, \Longrightarrow \; |E_{in}| = \frac{\rho_o}{\epsilon_o}\left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r}\right]$$

س 8 / توزيع شحني لاسطوانة لانهائية الطول ذات نصف قطر a وكثافة شحنة $\sigma = \frac{3q(a-r)}{\pi a^3}$ والتي تكون على بعد $r < a$ احسب المجال الكهربائي.

الجواب / بما ان $r < a$ اذن المطلوب حساب المجال الكهربائي الداخلي .



(3 -1) مقدمة :

ان حل اي مسألة كهروستاتيكية يكون سهلا في حالة معرفة التوزيع الشحني حيث يمكن ايجاد كل من المجال والجهد الكهربائي بسهولة وبصورة مباشرة وذلك بأخذ التكامل لتوزيع الشحنة بأجمعه وهذا مارأيناه في الفصل السابق . اما اذا كان التوزيع الشحني غير محدد او غير معلوم فعليه يجب تعيين المجال الكهربائي اولا ، وفي هذا الفصل سنطور اسلوب بديل لمعالجة المسائل الكهروستاتيكية وسنتعامل في هذا الفصل مع الاجسام الموصلة ونترك المواد العازلة للفصل الرابع.

(3- 2) معادلة بويزون : *Poisson's Equation*

من الصيغة التفاضلية لقانون كاوس :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$but: \quad \vec{E} = -\nabla u, \qquad \therefore \ \vec{\nabla}.\vec{\nabla} u = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\boxed{\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_o}}$$

هذه معادلة بويزون

وتعطى $\nabla^2 u$ وفق الاحداثيات الكارتيزية (x,y,z) كالاتي :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

ووفق الاحداثيات الكروية $(r, \theta, \emptyset)$:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

وووفقا للاحداثيات الاسطوانية $(r, \emptyset, z)$:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

(3 – 3) معادلة لابلاس : *Laplace's Equation*

في طائفة معينة معينة من المسائل الكهروستاتيكية والتي تتضمن مواد موصلة تكون الشحنة بأجمعها مستقرة على سطح الموصل اي في مثل هذه الحالة تكون $\rho = 0$ عند معظم النقاط في الفراغ وعندها ستؤول معادلة بويزون الى مايعرف بمعادلة لابلاس حيث تتلاشى كثافة الشحنة .

$$\boxed{\nabla^2 u = 0}$$

معادلة لابلاس .

(3 – 4) حل معادلة لابلاس بمتغير واحد مستقل :

Solution of Laplace's Equation in one independent variable

1- عندما يكون $u=u(x)$ اي دالة لمتغير واحد فقط هو x فان حل المعادلة بالاحداثيات الكارتيزية يكون كالتالي :-

$$\nabla^2 u(x) = 0, \quad \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = 0 \; or: d\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$$

$$\int d\left(\frac{du}{dx}\right) = \int 0, \Rightarrow \frac{du}{dx} = a, \; \int du = \int a dx, \qquad then: \quad u = ax + b$$

وهو الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الكارتيزية والقيم a,b هي ثوابت.

$$but: \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} u = -\frac{du}{dx} = -\frac{d}{dx}(ax+b) = -a$$

$$\therefore \vec{E} = -\mathrm{a}$$

2- وفقا للاحداثيات الكروية لمتغير واحد مثلا اذا كان $u=u(r)$ اي متغير فقط الى r اي ان :-

$$u = u(r), \qquad \nabla^2 u = 0$$

وبالاحداثيات الكروية:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

ولمتغير واحد فقط مثل r فان :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = 0, \Rightarrow \int d\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = \int 0 = A$$

$$\therefore r^2 \frac{du}{dr} = A, \Rightarrow \quad \frac{du}{dr} = \frac{A}{r^2}, \qquad \Rightarrow \int du = A \int \frac{dr}{r^2}, \qquad \Rightarrow u = -\frac{A}{r} + B$$

وهي الحل العام بالاحداثيات الكروية حيث A,B ثوابت .

$$but: \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{A}{r} + B\right) = \frac{-A}{r^2}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{A}{r^2}$$

3- وفقا للاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد فقط :-

اذا كانت (u) دالة لمتغير واحد مثل (r) اي : $\qquad u = u(r), \quad \nabla^2 u = 0$

وبالاحداثيات الاسطوانية :-

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$$

$$\int d\left(r\frac{du}{dr}\right) = \int 0 \Rightarrow r\frac{du}{dr} = A$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow \mathrm{du} = \frac{A}{r}dr \;\Rightarrow \int du = A\int \frac{dr}{r}$$

$$u = A\ln r + B$$

المعادلة اعلاه تمثل الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية حيث و $A.B$ ثوابت .

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr}(A\ln r + B)$$

$$\therefore\; \vec{E} = -\frac{A}{r}$$

(3 – 5) حل معادلة بويزون : *Solution of Poisson's Equation*

قد بينا سابقا ان معادلة لابلاس ملائمة لحل المسائل الكهروستاتيكية التي تمتاز بأن تكون الشحنة مستقرة على سطوح الموصلات او متمركزة على شكل شحنات نقطية او خطية ، كذلك تصح معادلة لابلاس اذا ماملئت المنطقة الكائنة بواحد او اكثر من الاوساط العازلة البسيطة .

لو أخذنا مسألة كهروستاتيكية بحيث يكون جزء من الشحنة معطى بدلالة كثافة الشحنة $\rho(x,y,z)$ والجزء الباقي من الشحنة (الشحنة المحتثة) مستقرا على سطوح الموصلات ، ان مسألة من هذا النوع تتطلب حلا لمعادلة بويزون وكمثال على هذه نأخذ السؤال الاتي:-

س/ جد شدة المجال الكهربائي داخل حجم كروي فيه شحنات ، علما ان كثافة الشحنة الحجمية ثابتة وتساوي ρ وهي دالة للاحداثي r فقط وتتوزع الشحنة الكلية بشكل كروي متناظر .

الجواب/

$$\because\; \nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_o}, \Rightarrow\; \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_o}, \Rightarrow \int d\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int r^2\,dr$$

$$r^2\frac{du}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\,\epsilon_o} + C$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\rho r}{3\,\epsilon_o} + \frac{C}{r^2}\,, \qquad \rightarrow \int du = -\frac{\rho}{3\,\epsilon_o}\int r\,dr + C\int\frac{dr}{r^2}$$

$$u = -\frac{\rho r^2}{6 \in_o} - \frac{C}{r} + B$$

وهو الحل العام لمعادلة بويزون لمتغير واحد (r) بالاحداثيات الكروية .

ولايجاد المجال الكهربائي:

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{-\rho r^2}{6 \in_o} - \frac{C}{r} + B\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3 \in_o} - \frac{C}{r^2}$$

س/ جد الحل العام لمعادلة بويزون بالاحداثيات الكارتيزية عندما(x,z)ثوابت .

الجواب /

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\in_o} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad but \quad x\,,z = \; constant$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{-\rho}{\in_o} \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{\rho}{\in_o}$$

$$\int d\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{\rho}{\in_o}\int dy$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{-\rho}{\in_o}y + C \Rightarrow \int du = -\frac{\rho}{\in_o}\int y\,dy + C\int dy$$

$$\therefore u = -\frac{\rho}{\in_o}\frac{y^2}{2} + Cy + b$$

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dy}, \qquad \vec{E} = -\frac{d}{dy}\left(-\frac{\rho y^2}{2 \in_o} + Cy + b\right) = \frac{\rho}{\in_o}y - C$$

س/ جد الحل العام لمعادلة بويزون بالاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد فقط .

الجواب / نفرض المتغير هو r فقط .

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\in_o}$$

وبالاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد تصبح المعادلة :-

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}r, \quad \int d\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int r\,dr, \qquad r\frac{du}{dr} = -\frac{\rho r^2}{2\,\epsilon_o} + A$$

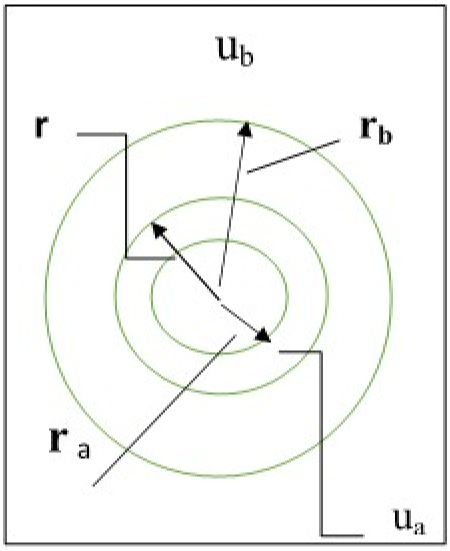
$$\therefore\ \frac{du}{dr} = \frac{-\rho r}{2\,\epsilon_o} + \frac{A}{r}, \qquad \int du = -\frac{\rho}{2\,\epsilon_o}\int r\,dr + A\int\frac{dr}{r}$$

$$u = -\frac{\rho r^2}{4\,\epsilon_o} + A\ln r + B$$

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{\rho r^2}{4\,\epsilon_o} + A\ln r + B\right) = \frac{\rho r}{2\,\epsilon_o} - \frac{A}{r}$$

أسئلة الفصل الثالث

س1/ قشرتان كرويتان موصلتان نصف قطريهما r_a و r_b على الترتيب وضعتا بحيث ينطبق مركز الاولى على الثانية ثم شحنتا الى ان اصبح جهد احدهما u_a و u_b على الترتيب ، فأذا كان $r_b > r_a$ ، جد 1) الجهد عند النقاط الواقعة بين القشرتين . 2) الجهد عند النقاط الواقعة خارج القشرة الكبيرة.



الجواب /

1- لايجاد الجهد عند النقاط بين القشرتين اي: $r_a < r < r_b$

وبما ان الكرتان موصلتان ،اذن ستكون المنطقة بينهما خالية

من الشحنات $\rho = 0$ لان الشحنات تستقر على السطح وهذايعني ان:-

$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_o} = 0$ وبما ان u دالة الى r عليه سيكون :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

والحل كما مر علينا سابقا

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0, \qquad r^2\frac{du}{dr} = A, \qquad \int du = \int\frac{A}{r^2}dr, \Rightarrow u = -\frac{A}{r} + B$$

$$u = -\frac{A}{r} + B \ldots\ldots\ldots.(1)$$

هذا هوالحل العام بالاحداثيات الكروية : الان نطبق الشروط الحدودية لايجاد الثوابت A,B وهي .

$$when\ \ r = r_a\ , \quad u = u_a \quad , \quad and\ \ r = r_b, \quad u = u_b$$

$$\oint E_{in} \, . \, dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_o}$$

$$|E_{in}| \oint dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_o} \ldots\ldots\ldots (1) \qquad , \qquad q_{tot} = \int_0^r \sigma \, da$$

المساحة بالاحداثيات الاسطوانية : $da = rdrd\emptyset$

$$\therefore \; q_{tot} = \int_0^r \sigma r \, dr \int_0^{2\pi} d\emptyset = \int_0^r \frac{3q(a-r)}{\pi a^3} rdr(2\pi) = \frac{6q}{a^3}\left[\int_0^r ar \, dr - \int_0^r r^2 \, dr\right]$$

$$= \frac{6q}{a^3}\left[\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right] = \frac{3qr^2}{a^2} - \frac{2qr^3}{a^3} = \frac{qr^2}{a^3}(3a-2r) \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\oint dS = S = 2\pi ra \ldots\ldots\ldots (3)$$

تعويض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(2\pi ra) = \frac{qr^2}{a^3 \epsilon_o}(3a-2r) \Rightarrow |E_{in}| = \frac{qr(3a-2r)}{2\pi a^4 \epsilon_o}$$

نعوض هذه الشروط في معادلة (1) فنحصل على :

$$u_a = -\frac{A}{r_a} + B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$u_b = -\frac{A}{r_b} + B \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بطرح معادلة (3) من معادلة (2) :

$$(u_a - u_b) = -A\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = -A\left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}\right)$$

$$\therefore\ -A = \frac{(u_a - u_b)}{(r_b - r_a)}(r_a r_b) \ldots\ldots\ldots (4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (2) لنجد قيمة B :-

$$u_a = \frac{(u_a - u_b)(r_a r_b)}{(r_b - r_a) r_a} + B, \quad \therefore B = u_a - \frac{(u_a - u_b) r_b}{r_b - r_a} \ldots\ldots\ldots (5)$$

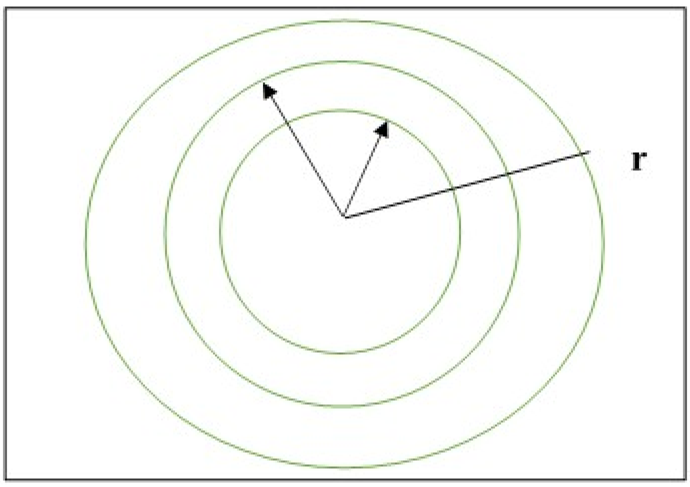
نعوض المعادلات (4) و (5) في معادلة (1) :-

$$u = \frac{(u_a - u_b) r_a r_b}{(r_b - r_a) r} + u_a - \frac{(u_a - u_b) r_b}{r_b - r_a}$$

$$= \frac{(u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r} + u_a(r_b - r_a) - (u_a - u_b) r_b}{r_b - r_a}$$

$$u = \frac{(u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r} + u_a r_b - u_a r_a - u_a r_b + u_b r_b}{r_b - r_a}$$

$$\therefore u = \frac{r_b u_b - r_a u_a + (u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r}}{r_b - r_a}$$



2- عندما $r > r_b$ اي خارج القشرة الكبيرة :-

بما ان r تقع خارج القشرة فأحتمال ان تكون

النقطة في المالانهاية وعليه الجهد يساوي صفر لان:

$$u = \frac{q}{4\pi r \in_o} \qquad \to u \propto \frac{1}{r}$$

$$if\ \ r = \infty,\ \ then\ u = 0$$

$$then:\quad \nabla^2 u = 0$$

وتأخذ نفس شكل الحل العام :

$$u = -\frac{A}{r} + B \ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

نعوض الشروط الحدودية:-

$$if \quad r = \infty, \quad then \ \ u = 0 \ldots\ldots\ldots. (2)$$

$$if\ r = r_b, \quad then \quad u = u_b \ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض معادلة (2) في (1) :-

$$0 = -\frac{A}{\infty} + B, \quad \therefore B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots. (4)$$

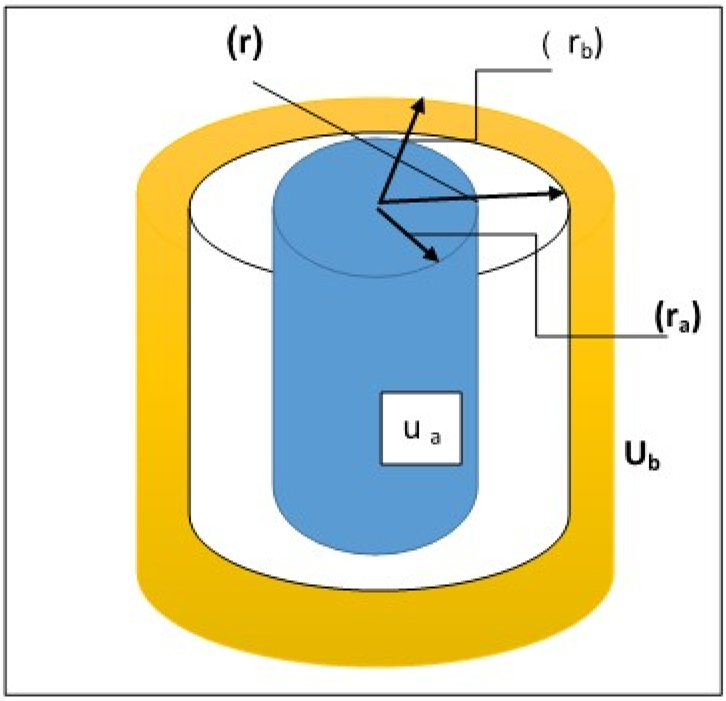
بتعويض معادلة (3) و (4) في (1) نحصل على :

$$u_b = -\frac{A}{r_b} + 0, \qquad \therefore \ -A = r_b u_b \ldots\ldots\ldots\ldots. (5)$$

وبتعويض (4)و(5) في معادلة (1) نحصل على :-

$$u = \frac{r_b u_b}{r}$$

س2/ قشرتان اسطوانيتان متحدتا المركز نصف قطريهما r_b, r_a شحنتا الى ان اصبح جهداهما u_b, u_a على الترتيب جد الجهد عند النقاط بين القشرتين.



الجواب/

المنطقة بين القشرتين خالية من الشحنات

$$\rho = 0$$

اي ان : $\nabla^2 u = 0$

ومعادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية :

$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$ والحل العام لمعادلة لابلاس بالمحاور الاسطوانية:-

$$u = A \ln r + B \ldots\ldots (1)$$

نطبق الشروط الحدودية لمعرفة الثابت $A\ ,B$

$$when\ \ r = r_a\ , \quad u = u_a \quad , \quad and\ \ r = r_b, \quad u = u_b$$

$$u_a = A \ln r_a + B \dots\dots (2)$$

$$u_b = A \ln r_b + B \dots\dots (3)$$

بطرح المعادلتين نحصل على :-

$$u_a - u_b = A(\ln r_a - \ln r_b) = A \ln \frac{r_a}{r_b}, \qquad \therefore A = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \dots\dots\dots\dots (4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (2) لايجاد الثابت B :-

$$B = u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a \dots\dots\dots\dots (5)$$

نعوض معادلة (4) و(5) في معادلة (1) :-

$$U = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r + u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a = \frac{(u_a - u_b)\ln r + u_a \ln \frac{r_a}{r_b} - (u_a - u_b)\ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$= \frac{(u_a - u_b)\ln r + u_a(\ln r_a - \ln r_b) - (u_a - u_b)\ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$\therefore U = \frac{u_b \ln r_a - u_a \ln r_b + (u_a - u_b)\ln r}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

س3/ اثبت ان جهد الشحنة النقطية يحقق معادلة لابلاس .

الجواب / يعطى جهد الشحنة النقطية بالعلاقة الاتية :-

$$u = \frac{1}{4\pi \in_o} \cdot \frac{q}{|\vec{r}|}$$

وبأستخدام هذه المعادلة يجب ان تحقق معادلة لابلاس ($\nabla^2 u = 0$) وسنستخدم الاحداثيات الكروية ولمتغير واحد (r)

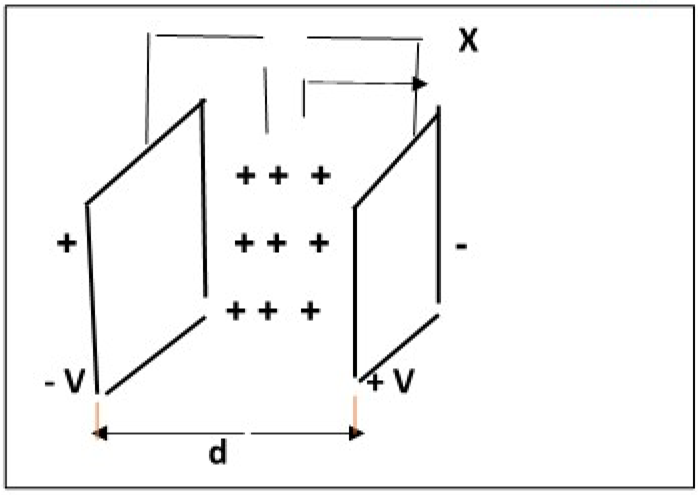
$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q}{4\pi \in_o r}\right]\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{qr^2}{4\pi \in_o}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{-q}{4\pi \in_o}\right) = 0$$

لان مشتقة الثابت = صفر لذلك :

$$\boxed{\nabla^2 u = 0}$$

س4 / ربطت صفيحتا متسعة ذات لوحين متوازيين المسافة بينهما (d) ببطارية بفرق جهد (V) فاذا كانت كثافة الشحنة في الفراغ بين الصفيحتين تساوي (ρ) وهي منتظمة ، اوجد في كل نقطة داخل المتسعة العلاقة الخاصة لكل من 1- الجهد بالنسبة للصفيحة الموجبة ، 2- شدة المجال.



الجواب /

نلاحظ ان الجهد u يتغير باتجاه واحد عمودي على مستوي الصفيحتين وليكن بالاتجاه x .

ولحل هذا السؤال نستخدم معادلة بويزون وذلك لكون ρ محدودة ومعلومة اي ان :-

$$\nabla^2 u = \frac{-\rho}{\epsilon_o}$$

ولو كانت الكثافة ρ غير معلومة لاستخدمنا معادلة لابلاس ($\nabla^2 u = 0$)

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\rho}{\epsilon_o}, \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{-\rho}{\epsilon_o} \quad , \quad \Rightarrow \int d\left(\frac{du}{dx}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int dx, \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{\rho x}{\epsilon_o} + A$$

$$\int du = \frac{-\rho}{\epsilon_o}\int x dx + A\int dx \Rightarrow \mathrm{U} = -\frac{\rho x^2}{2\,\epsilon_o} + Ax + B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

هذا هو الحل العام ولايجاد الثوابت A , B نطبق الشروط الحدودية :

$$if\ x = 0\,, then\ U = U_o\,, \qquad and\ if\ x = d\,, then\ U = U_o - V$$

نعوض الشروط الحدودية في معادلة (1) نحصل على :-

$$if\ x = 0, \qquad U = U_o, \quad B = U_o$$

$$if\ x = d, \qquad U = U_o - V, \qquad \therefore U_o - V = -\frac{\rho d^2}{2\,\epsilon_o} + Ad + U_o, \quad \therefore A = -\frac{V}{d} + \frac{\rho d}{2\,\epsilon_o}$$

نعوض قيم الثوابت A, B في معادلة (1) فنحصل على :-

$$U = -\frac{\rho x^2}{2\,\epsilon_o} + \left(\frac{\rho d}{2\,\epsilon_o} - \frac{V}{d}\right)x + U_o$$

ولايجاد قيمة المجال E ، حيث U تتغير باتجاه x فقط فان :

$$E_x = -\nabla U = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[-\frac{\rho x^2}{2\,\epsilon_o} + \left(\frac{\rho d}{2\,\epsilon_o} - \frac{V}{d}\right)x + U_o\right]$$

$$E_x = \left[\frac{V}{d} + \frac{\rho}{2\,\epsilon_o}(2x - d)\right]$$

ملاحظة :- اذا كانت $\rho = 0$ فأن $E = \frac{V}{d}$ وهي تمثل العلاقة بين الجهد و شدة المجال بين لوحي المتسعة .

(4 – 1) مقدمة :

المادة العازلة المثالية : هي تلك التي لاتمتلك شحنات طليقة ، وعلى الرغم من ذلك فأن كل مادة تتركب من جزيئات وهذه بدورها تتركب من جسيمات مشحونة (نوى الذرات و الالكترونات) وتتاثر جزيئات المادة العازلة بوجود المجال الكهربائي ، اذ يسلط المجال قوة على كل جسم مشحون داخل الجزيئة الواحدة ، فتندفع الجسيمات الموجبة بأتجاه الكهربائي بينما تندفع الجسيمات السالبة بالاتجاه المعاكس مما يؤدي الى ازاحة الجزئين الموجب والسالب للجزيئة عن موضع الاتزان بأتجاهين متعاكسين ، ومع هذا فأن مقدار هذه الازاحة محدد ويمكن ببساطة القول حسب وجهة النظر العينية وكأنه تم ازاحة كل الشحنة الموجبة للعازل عن شحنته السالبة ، وعندئذ يقال بان العازل اصبح مستقطبا وعلى الرغم من العازل المستقطب يعد متعادلا كهربائيا بالمتوسط الا انه يولد مجالا كهربائيا عند النقاط الخارجية وفي داخل العازل على حد سواء . ان الفصل بين الشحنات الموجبة والسالبة يؤدي الى نشوء ثنائي قطب **dipole** ويمتلك عزم كهربائي .

(4 – 2) الاستقطاب :- *Polarization*

يعرف الاستقطاب على انه : هوغاية عزم ثنائي القطب لوحدة الحجم من العازل عندما يقترب الحجم من الصفر اي ان:-

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

حيث : P=P(x,y,z) متجه ووحداته تنتج من قسمة وحدة الشحنة على وحدة المساحة $\frac{coul}{m^2}$

ويعطى عزم ثنائي القطب الكهربائي لجزيئة واحدة بالعلاقة :

$$P_{molecule} = \int_{molecule} r\,dq \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(العزم = حاصل ضرب احدى الشحنتين x المسافة بينهما) باعتبار ان الجزيئة هي احدى المكونات الصغيرة المتعادلة كهربائيا للمادة العازلة . ويعطي عزم ثنائي القطب للعنصر الحجمي (ΔV) بالعلاقة الاتية :-

$$\Delta \mathbf{P} = \sum P_m \ldots\ldots (2)$$

حيث يشمل الجمع جزيئات داخل العنصر (ΔV)

$$\because \vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

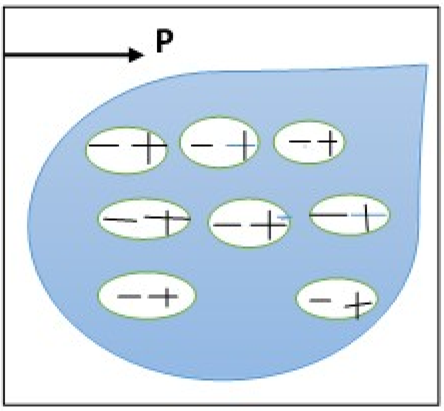
نعوض معادلة (2) في (3) نحصل على:

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum P_m$$

حيث يمثل كل عنصرحجمي من العزل المستقطب ثنائي قطب صغير وان كل ثنائي قطب يمثل جزيئة منفردة كما في الشكل ادناه :-

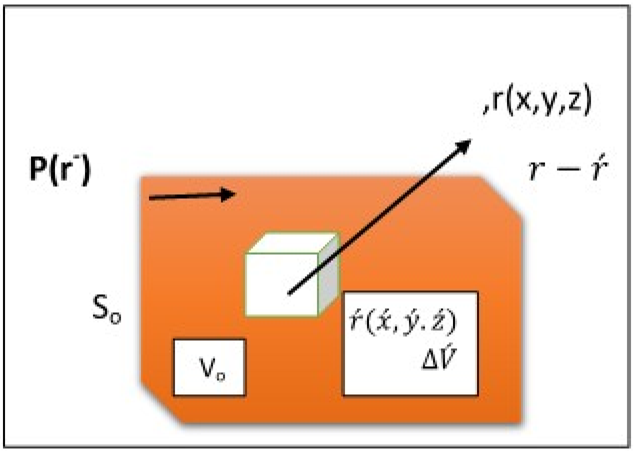
لو اخذنا عنصر حجمي صغير ΔV من وسط عازل متعادل كهربائيا فاذا كان الوسط مستقطبا لنتج عن ذلك فاصل بين الشحنات الموجبة والسالبة وعليه يوصف العنصر الحجمي بعزم ثنائي القطب الكهربائي والذي تعطى قيمته بالعلاقة :

$$\Delta P = \int_{\Delta V} r dq$$



(4 – 3) المجال الخارجي لوسط عازل :- *External Field of a Dielectric media*

لو اخذنا قطعة محدودة من مادة عازلة مستقطبة ، ونفرض انها تتسم بانها تتجه بمتجه الاستقطاب ($\vec{P}(r)$) عند كل نقطة ممثلة بالمتجه $\acute{r}$ كما في الشكل ادناه :-



ان الاستقطاب $P(\acute{r})$ يؤدي الى نشوء مجال كهربائي والمطلوب حساب هذا المجال عند النقطة (r) التي تقع خارج العازل ومن الافضل ان نحسب الجهد اولا ومن ثم نجد المجال الكهربائي بأخذ انحدار الجهد باشارة سالبة. ناخذ عنصر حجمي $\Delta \acute{V}$ من الوسط العازل (داخل العازل) ويميز هذا العنصر الحجمي بقيمة عزم ثنائي القطب ΔP حيث :

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P} \Delta \acute{V} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وعليه يعطى الجهد الناتج من عنصر الحجم $\Delta \acute{V}$ عند النقطة (r) بالعلاقة :

$$\Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta p . \left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right)}{4\pi \in_o |r - \acute{r}|^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض معادلة (1) في (2) فنحصل على :

$$\Delta U(r) = \frac{P(\acute{r}).(r - \acute{r})\Delta \acute{V}}{4\pi \in_o |r - \acute{r}|^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

والكمية $r - \acute{r}$ تمثل متجه اتجاهه منبثق من $\Delta\acute{V}$ نحو الخارج ومقداره :

$$|r - \acute{r}| = \sqrt{(x-\acute{x})^2 + (y-\acute{y})^2 + (z-\acute{z})^2}$$

وعليه فالجهد الكلي عند النقطة r يمثل مساهمات جميع اجزاء العازل :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o}\int_{V_o} \frac{P(\acute{r}).(r-\acute{r})d\acute{V}}{|r-\acute{r}|^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ومما اثبتنا سابقا (الفصل الاول) $\left[\nabla\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right]$ وعليه نجد ان:-

$$\acute{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|} = \frac{\vec{r}-\vec{\acute{r}}}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}$$

ان العامل ($operator$) $\acute{\nabla}$ يتضمن مشتقات للاحداثيات المؤشرة بعلامة الفتحة ومن الواضح انه اذا اثر العامل $\acute{\nabla}$على الدالة $\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|$ فان النتيجة ستكون مساوية لتاثير العامل $(-\nabla)$ على الدالة نفسها وعليه ستصبح معادلة (4) بالشكل التالي:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o}\int_{V_o} \vec{P}.\acute{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|}d\acute{V} \ldots\ldots\ldots (5)$$

ويمكن تحويل معادلة (5) بواسط المتطابقة:

$$\acute{\nabla}.(FA) = F\acute{\nabla}.A + A.\acute{\nabla}F, \quad where : F = scalar = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|}, \qquad and \;\; A = vector = \vec{P}$$

$$\acute{\nabla}.\left(\frac{P}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|}\right) = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|}\acute{\nabla}.P + P.\acute{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|}$$

$$P.\acute{\nabla}\frac{1}{|r-\acute{r}|} = \acute{\nabla}.\frac{P}{|r-\acute{r}|} - \frac{1}{|r-\acute{r}|}\acute{\nabla}.P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

نعوض معادلة (6) في معادلة (5) فنحصل على :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o}\int_{V_o} \acute{\nabla}.\frac{P}{|r-\acute{r}|}d\acute{V} + \frac{1}{4\pi \in_o}\int_{V_o} \frac{-\acute{\nabla}.P}{|r-\acute{r}|}d\acute{V}$$

وباستخدام نظرية التباعد $\left[\oint_S \; F.n\,da = \int_V \; \nabla.F\,dV\right]$ يتحول الحد الاول من تكامل حجمي الى تكامل سطحي :

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\in_o}\oint_{S_o}\frac{P.\hat{n}d\acute{a}}{|r-\acute{r}|}+\frac{1}{4\pi\in_o}\int_{V_o}\frac{-\acute{\nabla}.Pd\acute{V}}{|r-\acute{r}|}$$

يرمز n الى العمود المقام على السطح da باتجاه خارج العازل .

$$\sigma_p=P.\hat{n}=P_{n'}\quad and\quad \rho_p=-\nabla.P$$

حيث σ_p تمثل كثافة شحنة الاستقطاب السطحية ، بينما ρ_p تمثل كثافة شحنة الاستقطاب الحجمية .

ويطلق على شحنة الاستقطاب اسم الشحنة المقيدة للتعبير عن حقيقة كونها غير حرة الحركة ولايمكن انتزاعها عن مادة العازل. يمكننا الان كتابة الجهد الناتج عن مادة العازل بالعلاقة :-

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\in_o}\left[\oint_{S_o}\frac{\sigma_p d\acute{a}}{|r-\acute{r}|}+\int_{V_o}\frac{\rho_p d\acute{V}}{|r-\acute{r}|}\right]\dots\dots\dots\dots(7)$$

$$as:\quad dq=\sigma_p d\acute{a}+\rho_p d\acute{V}$$

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\in_o}\int\frac{dq}{|r-\acute{r}|}$$

معادلة (7) تشير الى ان مادة العازل قد استبدلت بتوزيع شحني مقيد مكافئ وشحنة الاستقطاب الكلية لجسم عازل Q_P تعطى بالعلاقة:

$$Q_P=\int_{V_o}-\acute{\nabla}.P\,d\acute{V}+\oint_{S_o}P.n\,d\acute{a}$$

ويجب ان تساوي صفر لان فرضيتنا تنص على ان العازل ككل متعادل كهربائيا .

اما المجال الكهربائي فيمكن الحصول عليه من اخذ الانحدار السالب للمعادلة (7) ($E=-\nabla u$) ولما كانت u دالة للاجاثيات (x,y,z).

فان الانحدار الملائم هو ($-\nabla$) .

$$\because\ \nabla\frac{1}{|r-\acute{r}|}=-\acute{\nabla}\frac{1}{|r-\acute{r}|}=-\frac{\vec{r}-\vec{\acute{r}}}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}$$

وبالتعويض في معادلة (7)

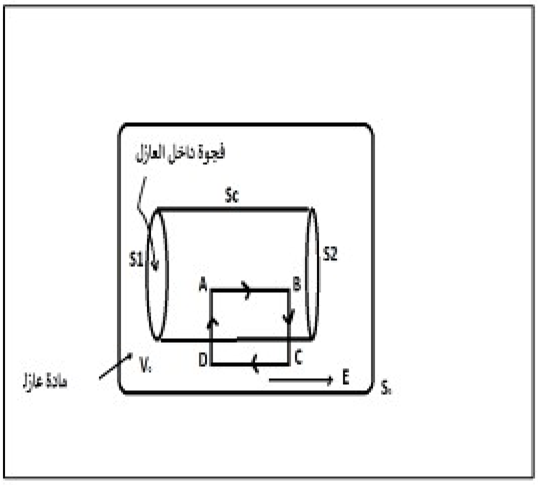
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\in_o}\left[\oint_{S_o}\frac{\sigma_p d\acute{a}\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}+\int_{V_o}\frac{\rho_p d\acute{V}\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}\right]\dots\dots\dots(8)$$

(4 -4) المجال الكهربائي داخل العازل : *The Electric Field inside A dielectric*

ان المجال الكهروستاتيكي في العازل يجب ان يمتلك الخواص الاساسية نفسها للمجال في حالة الفراغ وخاصة ان المجال الكهربائي E يعد مجالا محافظا (*conserved*) وهذا يعني :-

$$\nabla \mathrm{x} \mathbf{E} = 0, \qquad \Rightarrow \oint E . d\ell = 0$$

دعنا نطبق هذه المعادلة على المسار $ABCD$ الموضح بالشكل :



يقع الجزء AB داخل فجوة على شكل ابرة استقطعت من

من العازل اما الجزء CD فيقع داخل المادة العازلة .

$$E_{Vacuum} . L - E_{dielectric} . L = 0$$

اي ان:

$$E_{Vacuum} . L = E_{dielectric} . L$$

$$E_{vacuum} = E_{dielectric}$$

المعادلة اعلاه تصح لكل الاتجاهات التي يمكن ان تاخذها تلك

الفجوة وبهذا نصل الى الاستنتاج التالي :-

يكون المجال الكهربائي داخل العازل مساويا للمجال الكهربائي داخل الفجوة التي على شكل ابرة في العازل بشرط ان يكون محور الفجوة موازيا لأتجاه المجال الكهربائي.

وعلى هذا الاساس تحول حساب المجال الكهربائي داخل العازل الى حساب المجال الكهربائي داخل فجوة في العازل على شكل ابرة ، بيد ان المجال الكهربائي داخل الفجوة (*cavity*) هو في واقع الحال مجال خارجي ولهذا يمكن تعيينه وفق النتائج التي حصلنا عليها سابقا.

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o - V_1} \frac{\rho_p(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} d\acute{V} + \frac{1}{4\pi \in_o} \oint_{S_o + \acute{S}} \frac{\sigma_p(\acute{x}, \acute{y}. \acute{z})}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} d\acute{a}$$

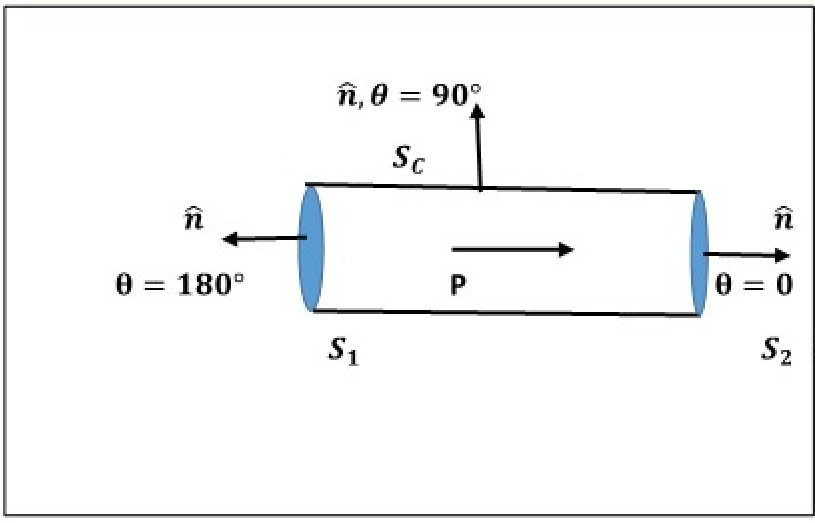
اي بنفس الطريقة نفرض ان استقطاب العازل هو دالة معطاة $\acute{P}(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})$. نحسب الجهد والمجال الناشئ عن هذا الاستقطاب بأخذ نقطة المجال (r) عند مركز الفجوة .

(V_o-V_1) : تمثل الحجم الكلي للعازل عدا حجم الابرة.

S_o: السطح الخارجي للعازل.

$\acute{S}$: يمثل سطح الابرة حيث ($\acute{S} = (S_1 + S_2 + S_C)$

ملاحظة : يلاحظ من المعادلة ان التكامل السطحي اخذ كل السطوح وذلك لأن التكامل السطحي حول سطح مغلق وعليه يشمل جميع السطوح التي يحويها السطح المغلق ، بينما التكامل التكامل الحجمي يأخذ حجم العازل ككل .



يلاحظ من الشكل ان $\sigma_p = 0$ على السطح الاسطواني S_C للابرة لأنه في المواد العازلة متساوية الاتجاه ويكون اتجاه الاستقطاب P منطبقا على E ولهذا يكون $\sigma_p = 0$

$$\sigma_p = P.\hat{n} = Pncos\theta = Pncos90 = 0$$

كما يمكن جعل الابرة رقيقة الى درجة بحيث يمكن اهمال مساحة السطحين S_2,S_1 وعلى هذا الاساس يصبح السطح الخارجي للعازل هو الوحيد الذي يسهم في تكوين الجهد و هو السطح (S_o) وعليه تصبح معادلة الجهد :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o - V_1} \frac{\rho_p(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} d\acute{V} + \frac{1}{4\pi \in_o} \oint_{S_o} \frac{\sigma_p(\acute{x}, \acute{y}. \acute{z})}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} d\acute{a}$$

فأذا كانت الفجوة ضيقة جدا يمكن اهمال V_1 فتكون هذه المعادلة مشابهة لمعادلة (7) فتعطي قيمة الجهد U(r) للوسط العازل دون الاخذ بنظر الاعتبار اذا كانت r داخل العازل ام خارجه وعليه يمكن ايجاد المجال الكهربائي حيث :

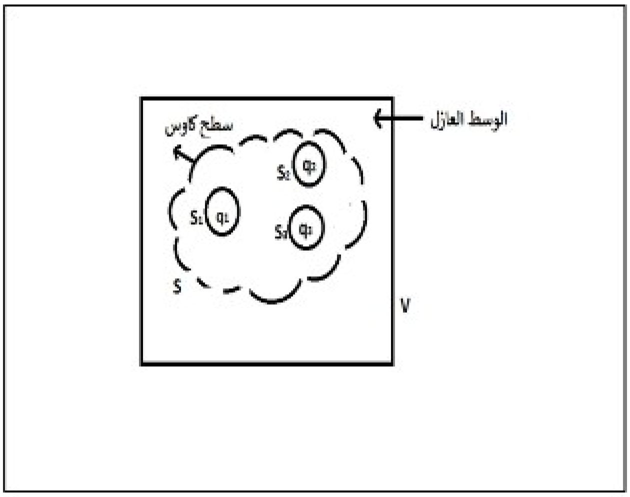
$$E = -\nabla U$$

(4 – 5) قانون كاوس في العوازل والازاحة الكهربائية:

Guess's Law in A dielectric and *The electric Displacement*

ينص قانون كاوس على ان الفيض الكهربائي خلال سطح مغلق يتناسب تناسبا طرديا مع الشحنة الكلية التي يحتضنها السطح.

وعند تطبيق قانون كاوس على منطقة تحتوي شحنات طليقة مغروسة في عازل فيجب ان تشمل جميع الشحنات داخل السطح المقيدة منها والطليقة على حد سواء.



ان الخط المتقطع S يمثل سطح كاوس في الشكل المجاور ، وهو سطح مغلق كائن داخل الوسط العازل ، وهناك كمية من الشحنة الطليقة Q داخل داخل الحجم المحدد بالسطح S.

سنفرض ان الشحنة الطليقة موزعة على ثلاثة اجسام موصلة بكميات قدرها q_1,q_2,q_3 حيث:

$$Q_f = q_1 + q_2 + q_3$$

وبتطبيق قانون كاوس على هذه الحالة ينتج ان :

$$\oint E.n\,da = \frac{Q_f + Q_p}{\epsilon_o} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$but: \quad Q_P = \oint_S P.n\,da + \int_V -\nabla.P\,dV \dots\dots (2)$$

يمثل V حجم العازل المحاط بالسطح S حيث :-

$$P.n = \sigma_P, \qquad\qquad -\nabla.P = \rho_P$$

$$\therefore\ Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} P.n\,da + \int_V -\nabla.P\,dV \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

سنحول التكامل الحجمي (الحد الثاني من معادلة (3)) الى تكامل سطحي بأستخدام نظرية التباعد وبأخذ جميع السطوح المحيطة بالحجم (V) ، اي (S, S_1, S_2, S_3)

$$\int_V -\nabla.P\,dV = \int_{S+S_1+S_2+S_3} -P.n\,\mathrm{da} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

نعوض (4) في (3) فنحصل على :

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} P.n\,da + \int_{S+S_1+S_2+S_3} -P.n\,\mathrm{da}$$

من الواضح ان المساهمات الناشئة عن السطوح الثلاثة الاخيرة ستمحو الحد الاول وعليه ستصبح المعادلة.

$$Q_P = -\oint_S P.nda \dots\dots\dots.. (5)$$

ومن معادلة (1) :-

$$\oint (\epsilon_o\,E).n\,da = Q_f + Q_P$$

$$\oint (\epsilon_o\,E)\,.nda - Q_P = Q_f \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

نعوض (5) في (6) :

$$\oint (\in_o E + P) . nda = Q_f \dots \dots \dots (7)$$

تشير معادلة (7) الى ان فيض المتجه ($\in_o E + P$) خلال سطح مغلق يساوي الشحنة الطليقة الكلية التي يحتضنها السطح وهذا المتجه يسمى الازاحة الكهربائية ويرمز له D وهو كمية متجهة .

$$\vec{D} = \in_o \vec{E} + \vec{P} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ووحداتها وحدات استقطاب اي وحدة شحنة مقسومة على وحدة مساحة .

E: يمثل شدة المجال الناشئ عن الشحنات المقيدة والطليقة معا.

P: يمثل متجه الاستقطاب الناشئ عن الشحنات المقيدة المحتثة فقط .

D: تمثل الكثافة السطحية للشحنات الطليقة (الحرة) .

نعوض معادلة (8) في (7) فنحصل على :

$$\oint D.n\, da = Q_f = \int \rho dV \dots \dots (9)$$

وهي تمثل الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل .

وباستخدام نظرية التباعد نحول التكامل من سطحي الى حجمي :

$$\oint D, n\, da = \int \nabla . D\, dV \dots \dots \dots (10)$$

نعوض (10) في (9) :

$$\int \nabla . D\, dV = \int \rho\, dV$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس في العوازل حيث

$$\boxed{\therefore \ \nabla . D = \rho}$$

ρ : تمثل كثافة الشحنة الطلقة.

ولايجاد المجال E نستخدم معادلة (8) حيث:

$$E(x, y, z) = \frac{D}{\in_o} - \frac{P}{\in_o}$$

حيث E المجال الكهروستاتيكي الكلي عند اي نقطة في وسط عازل . حيث:

$(\frac{D}{\in_o})$ يرتبط بكثافة الشحنة الطليقة من خلال تباعد الازاحة.

$(-\frac{P}{\in_o})$ يتناسب طرديا مع الاستقطاب للوسط العازل .

وفي الفراغ يعطى المجال الكهربائي الكلي بالحد الاول فقط من المعادلة اعلاه.

(6 – 4) التأثرية الكهربائية وثابت العزل -: *Electric Susceptibility and Dielectric constant*

يحدث الاستقطاب للمواد العازلة استجابة للمجال الكهربائي المسلط عليها وان درجة الاستقطاب لاتعتمد فقط على المجال الكهربائي ولكن على خواص المادة العازلة ايضا، والعلاقة التي تربط الاستقطاب وشدة المجال الكهربائي (حسب وجهة النظر العينية) علاقة نقطية ،فاذا تغيرت E من نقطة الى اخرى داخل الوسط المادي لتغيرت P تبعا لذلك ولمعظم المواد تتلاشى P اذا ماتلاشت E واذا كانت المادة العازلة متساوية الاتجاه (isotropic) لوجب ان يكون الاستقطاب باتجاه المجال الكهربائي نفسه الذي تسبب في تكوين الاستقطاب ويمكن تلخيص النتائج بالمعادلة :

$$P \propto E \Rightarrow P = \epsilon_o \chi_e E$$

حيث χ_e :- تمثل التأثرية الكهربائية.

$$as: \ D = \epsilon_o E + P = \epsilon_o E + \epsilon_o \chi_e E = \epsilon_o E(1 + \chi_e)$$

$$but: \ \chi_e = \mathrm{K} - 1, \Rightarrow \mathrm{K} = 1 + \chi_e$$

$$\therefore \ D = \mathrm{K}\epsilon_o E, \qquad but \ \mathrm{K} = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \epsilon_r \Rightarrow \mathrm{K}\epsilon_o = \epsilon$$

ويسمى K ثابت العزل او السماحية النسبية(ϵ_r) $relative\ permitivity$ وهو مجرد من الوحدات.

$$\therefore \ D = K \in_o \mathrm{E} = \in \mathrm{E}$$

$$\in = \epsilon_o + \epsilon_o \chi_e = \epsilon_o (1 + \chi_e) = \mathrm{K}\epsilon_o$$

حيث :

$\in$: سماحية المادة $permitivity\ of\ material$ ووحداتها نفس وحدات ϵ_o .

للاوساط المتساوية الاتجاه isotropic : $\boxed{\therefore \ D = \in \mathrm{E}}$

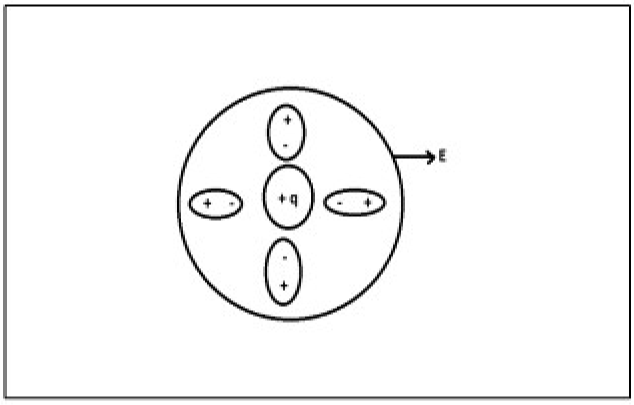
للفراغ K=1 و $\chi_e = 0$ وللغازات $1 > \chi > 0$ وللمواد الصلبة والسوائل $\chi > 1$

وتتراوح قيمة ثابت العزل بين الواحد والعشرة لمعظم المواد العازلة ويشذ الماء عن هذه القاعدة حيث ثابت العزل له يساوي (80) في درجات الحرارة الاعتيادية . ان السلوك الكهربائي للمادة يحدد كليا بالسماحية(ϵ) او بالتاثرية الكهربائية (χ_e) فاذا كان المجال الكهربائي المسلط على المادة العازلة شديد جدا فانه سيعمل على سحب الالكترونات خارج الجزيئات وبصورة تامة وبذلك تصبح المادة موصلة (انهيار العازل dielectric breakdown).

واقصى قيمة للمجال الكهربائي الذي يستطيع العازل تحمله دون ان يحدث انهيار كهربائي يدعى : شدة (قوة) العزل dielectric strength.

س/ اوجد الاستقطاب لشحنة نقطية تقع في نقطة الاصل لعازل متجانس ومتساوي الاتجاه.

الجواب/ لو كان لدينا شحنة نقطية في عازل متجانس ومتساوي الاتجاه (linear isotropic and homogenous) والوسط مميز بثابت العزل (K) وممتد الى المالانهاية ، نستخدم قانون كاوس على سطح كروي نصف قطره (r) ومركزه ينطبق على الشحنة النقطية التي يفترض ان تقع في نقطة الاصل للسهولة.



الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل :

$$\oint D.nda = Q$$

$$D.4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{n} = \frac{q}{4\pi r^3}\vec{r} \ldots.(1)$$

$$D = \in E \Rightarrow E = \frac{D}{\in} \ldots\ldots\ldots..(2)$$

نعوض (1) في (2) نحصل على :-

$$E = \frac{q\vec{r}}{4\pi \in r^3} \ldots\ldots\ldots.(3)$$

$$but : \in = K \in_o, \Rightarrow \therefore E = \frac{q}{4\pi K \in_o}\frac{\vec{r}}{r^3} \ldots\ldots.(4)$$

اي ان المجال الكهربائي يكون اصغر بمقدار K من المرات مما عليه الحال لوكان الوسط العازل غير موجود وهذا يعني ان وجود الوسط العازل يضعف المجال الكهربائي .

$$as: P = \epsilon_o \chi_e E \ldots\ldots..(5), \qquad and\ \chi_e = K - 1,$$

نعوض قيمة (E) في معادلة (4) وقيمة χ_e في معادلة (5) :-

$$P = (K-1)\epsilon_o \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \therefore P = \frac{(K-1)q}{4\pi K}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

(4 – 7) الشروط الحدودية على متجهات المجال : - Boundary Conditions on the Field Vectors

تطبق شروط الحدود على متجهات المجال لنتعرف على التغير الذي يطرأ على متجه المجال E ومتجه الازاحة الكهربائية D عندما يجتازان فاصلا بين وسطين وقد يكون الوسطين مادتين عازلتين مختلفتين في خواصهما او من مادة عازلة واخرى موصلة .

1) لنأخذ وسطين مختلفتين على تماس احدهما بالاخر ونفرض ان الوسط الفاصل بينهما يحمل شحنة طليقة ذات كثافة سطحية σ.

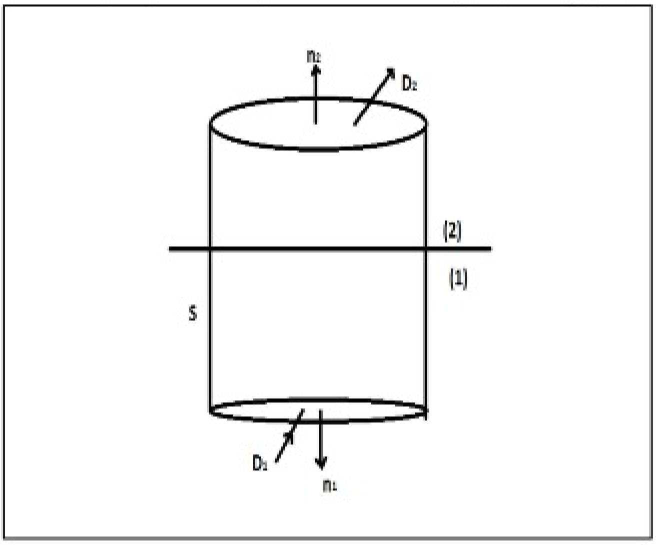
لنأخذ سطح اسطواني (S) على شكل علبة اقراص صغيرة بحيث يقطع السطح الفاصل ويحيط بمساحة منه قدرها (ΔS) كما في الشكل ادناه، فعند تطبيق قانون كاوس على السطح الفاصل (S) نحصل على :-

$$\oint D.nda = Q$$

الشحنة الطليقة التي يحتضنها السطح (S) تساوي شحنة كثافة حجمية وسطحية اي :

$$\sigma\Delta S + \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)V$$

وبما ان الحجم يهمل لأن حجم السطوانة صغير جدا (ارتفاع السطح صغير بحيث يهمل اذا ماقورن مع قطر السطح الاسطواني) لذا يبقى فقط كثافة سطحية $\sigma\Delta S$ وعليه :-



$$D_2 . n_2 \Delta S + D_1 . n_1 \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$as: n_1 = -n_2,$$

$$(D_2 - D_1). n\Delta S = \sigma \Delta S$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث n_2 العمود على السطح الفاصل .

تشير معادلة (1) الى ان الانقطاع في المركبة العمودية للازاحة D يعطى بدلالة الكثافة السطحية للشحنة الطليقة على السطح الفاصل بين الوسطين. وبتعبير اخر ان المركبة للازاحة D تكون متصلة فيما لو لم تكن هناك شحنة طليقة على السطح الفاصل بين الوسطين ، اي ان :-

(الشحنات الحرة في المواد العازلة تساوي صفر) $\sigma = 0$

$$D_{2n} - D_{1n} = 0, \quad D_{2n} = D_{1n} \ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث D_{1n} و D_{2n} هما المركبتان العموديتان للازاحة الكهربائية في الوسطين العزلين الاول والثاني على التوالي ، وهذه هي العلاقة الاولى الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين .

اما بالنسبة للمجال الكهربائي فان ($\nabla x E = 0$) اي المجال محافظ وعليه بالامكان الحصول على المجال الكهروستاتيكي من اخذ انحدار الجهد باشارة سالبة ($-\nabla U$) وعليه سيكون :-

$$\oint E . d\ell = 0$$

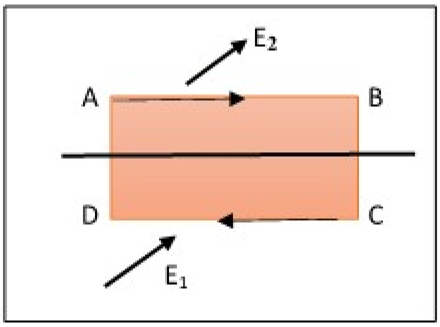
اي ان التكامل الخطي حول اي مسار مغلق يتلاشى ، دعنا نطبق هذه النتيجة على المسار المغلق $ABCD$ المبين بالشكل ادناه :-

لنفرض طول كل من جزئي المسار (AB و CD) يساوي ($\Delta\ell$) وان طول BC و AD مهمل لذا ينتج :-

$$E_2.\Delta L + E_1.(-\Delta L) = 0 \Longrightarrow (E_2 - E_1).\Delta L = 0$$

$$\therefore\ E_{2t} = E_{1t} \ldots\ldots\ldots.(3)$$

وهما مركبتا شدة المجال الكهربائي الموازيتان للسطح الفاصل .



معادلة (3) تعني ان المركبة المماسة للمجال الكهربائي تكون متصلة عبر السطح الفاصل (مستمرة في الوسطين العازلين) وهذه هي العلاقة الثانية الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين .

ويمكن الحصول على العلاقة الثالثة والخاصة بالجهد على السطح الفاصل في كل من الوسطين وذلك بأخذ التكامل الخطي :-

$$\int E_{1t}.\Delta\ell = \int E_{2t}.\Delta\ell$$

$$\therefore\ \emptyset_1 = \emptyset_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

وهذا يعني ان الجهد لنقطة واقعة على الحدود الفاصلة له نفس القيمة في الوسط الاول والثاني وهذه هي العلاقة الثالثة الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين.

2) اذا كان الوسط رقم (1) موصل لأصبح $E_1=0$ لأن المجال صفر داخل الموصل ، وهذا يعني ان الاستقطاب $P_1=0$ لأن : $(P = \in_o \chi_e E)$ كما ان الازاحة في هذا الوسط تتلاشى $D_1=0$ لأن :

$$D_1 = \epsilon_o E_1 + P_1 = 0$$

وبهذا تأخذ المعادلتان (1) و(3) الصيغتين الاتيتين :

$$D_{2n} = \sigma, \qquad\qquad E_{2t} = 0$$

س/ اثبت ان الجهد خلال جسم عازل يحقق معادلة لابلاس .

الجواب/ من الصيغة التفاضلية لقانون كاوس في العوازل :-

$$\nabla.\mathrm{D} = \rho \ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث ρ كثافة الشحنة الطليقة ، وبما ان العازل خطي ومتجانس وذا اتجاه متساو فان:

$$\mathrm{D} = \in E \ldots\ldots(2)$$

وبتعويض معادلة (2) في (1) :

$$\therefore\ \nabla.E = \frac{\rho}{\in} \ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

ولكن متجه المجال الكهروستاتيكي E يرتبط بالجهد اللا متجه حسب العلاقة :

$$E = -\nabla U \ldots\ldots.(4)$$

بتعويض معادلة (4) في (3) :

$$\therefore\ \nabla.\nabla U = -\frac{\rho}{\in} \qquad \Rightarrow \nabla^2 U = \frac{-\rho}{\in}$$

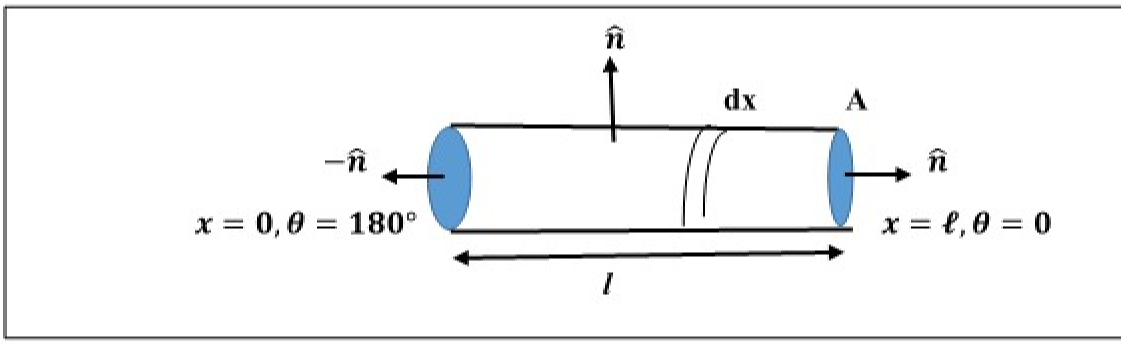
وبهذا نجد ان جهد العازل يحقق معادلة بويزون والفرق الوحيد بي المعادلة اعلاه والمعادلة المماثلة في حالة الفراغ هو احلال $\in$ بدلا عن $\in_o$ وفي معظم الحالات لايحتوي العازل على شحنة حرة طليقة موزعة خلال الحجم الذي تشغله اي ان

$$\rho = 0, \qquad \nabla^2 U = 0$$

تحت هذه الظروف يحقق الجهد معادلة لابلاس خلال جسم العازل حيث يمكن ان توجد الشحنات الطليقة على سطوح الموصلات او ان تتمركز على هيئة شحنات نقطية قد تغمس في العازل .

اسئلة الفصل الرابع

س1/ ساق رقيق عازل مساحة مقطعه A يمتد على الاحداثي x بين النقطتين $x = 0$, $x = \ell$ واتجاه الاستقطاب في الساق مع محور x معطاة بالمعادلة $P_x = ax^2 + b$ ، جد الكثافة الحجمية لشحنة الاستقطاب والشحنة السطحية للاستقطاب على نهايتي الساق (اي كثافتي الشحنة المقيدة) وبين ان شحنة الاستقطاب الكلية المقيدة تتلاشى في هذه الحالة .



الجواب/ لايجاد كثافة الشحنة الحجمية المستقطبة او المقيدة نستخدم العلاقة:

$$\rho_P = -\nabla.P = -\frac{dP_x}{dx} = -\frac{d}{dx}(ax^2 + b) = -2ax$$

ولايجاد كثافة الشحنة السطحية المقيدة نستخدم العلاقة :

$$\sigma_P = \mathrm{P.n} = P_x.\mathrm{n} = \mp P_x$$

لان من الرسم ناخذ اتجاه العمود n فقط باتجاه x عندما $cos180 = -1,\ cos0 = 1$

$$when\ x = 0,\ \ \sigma_P = -P_x]_{x=0} = -ax^2 - b\Big]_{x=0} = -b$$

$$when\ \ x = \ell\ , \sigma_P = P_x]_{x=\ell} = ax^2 + b\Big]_{x=\ell} = a\ell^2 + b$$

والشحنة السطحية للاستقطاب :

$$Q_{ts} = \int_A \sigma_b \, dS$$

والشحنة الكلية للاستقطاب = الشحنة السطحية + الشحنة الحجمية : $\quad Q_{tot} = Q_{ts} + Q_{tV}$

$$Q_{tot} = \int_V \rho_b \, dV + \int_A \sigma_b \, dS = \int_0^{\ell} -2ax\, A dx + \int_A (-b + a\ell^2 + b)\, dS = -aAx^2\Big]_o^{\ell} + a\ell^2 A$$
$$= -a\ell^2 A + a\ell^2 A = 0$$

س2/ اثبت ان :- $\rho_b = \frac{-(K-1)}{K}\rho_f$ حيث K هو ثابت العزل .

الجواب / $\quad as: \quad D = \in E \quad and \ \in = K \in_o \qquad \therefore D = K \in_o E \ \Rightarrow \in_o E = \frac{D}{K}$

$$but: P = \in_o \chi_e E$$

$$\therefore P = \chi_e \frac{D}{K} \qquad as: \ \chi_e = K - 1, \quad \therefore \ P = \frac{K-1}{K} D$$

بأخذ تباعد الطرفين :

$$\nabla . P = \frac{K-1}{K} \nabla . D, \qquad but \ \nabla . P = -\rho_P, \quad and \ \nabla . D = \rho_f \ ,$$

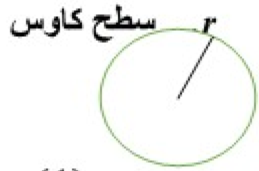
$then$:

$$\rho_P \, or \, \rho_b = -\frac{(K-1)}{K}\rho_f$$

ويمكن حل السؤال بطريقة اخرى :-

نأخذ شحنة نقطية q مغمورة في وسط عازل ثابت عزله K ونرسم سطح كاوس افتراضي نصف قطره r والشحنة q تكون بضمنه. ومن الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل:-

$$\oint_S D.n \, da = q$$



$$D.S = q, \ \ then \ \ D.4\pi r^2 = q, \quad \therefore \ D = \frac{q}{4\pi r^2} \ldots \ldots (1)$$

$$but \ \ D = \in E = K \in_o E \qquad \Rightarrow E = \frac{D}{K \in_o} \ldots \ldots (2)$$

نعوض (1) في (2) :

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi \in_o r^2 K} \dots\dots (3)$$

$$but : D = \in_o E + P, \qquad then \quad P = D - \in_o E \dots\dots. (4)$$

نعوض (1) و(3) في (4) :

$$\therefore \mathrm{P} = \frac{q}{4\pi r^2} - \in_o \frac{q}{4\pi \in_o K r^2} = \frac{q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{q}{4\pi r^2}\left(\frac{K-1}{K}\right)$$

$$\therefore P = D\left(\frac{K-1}{K}\right)$$

بأخذ تباعد الطرفين نحصل على:-

$$\nabla.\mathrm{P} = \nabla.\mathrm{D}\left(\frac{K-1}{K}\right) \qquad but\ \nabla.P = -\rho_P, \quad and\ \nabla.D = \rho_f$$

$$\Rightarrow \rho_b = -\frac{K-1}{K}\rho_f$$

س3/ برهن العلاقة :- $\int_V PdV = \int_V \rho_P r dV + \int_S \sigma_P r\, dS$ التي تربط بين الاستقطاب وكثافات الشحنة المقيدة ρ_P, σ_P لوسط عازل حجمه V وسطحه S حيث r متجه موقعي .

الجواب / من المتطابقة التالية:

$$\nabla.\mathrm{XP} = \mathrm{X}\nabla.\mathrm{P} + \mathrm{P}.\nabla\mathrm{X} \qquad\qquad \mathrm{but}: \ -\nabla.\mathrm{P} = \rho_P$$

$$\therefore\ \nabla.\mathrm{XP} = -\mathrm{X}\rho_P + P.\hat{\imath}\frac{dx}{dx} = -\rho_P X + P_x \dots\dots (1)$$

وبنفس الطريقة:-

$$\nabla.\mathrm{yP} = -\rho_P y + P_y \dots\dots\dots\dots (2), \qquad \nabla.zP = -\rho_P + P_z \dots\dots\dots. (3)$$

$$as: \ \vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$$

$$\therefore\ \nabla.\left(\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z\right)P = \nabla.\vec{r}P = -\rho_P\vec{r} + P$$

وبأخذ التكامل الحجمي للطرفين :

$$\int_V \nabla.(\vec{r}\vec{P})\, dV = \int_V -\rho_P\vec{r}dV + \int_V P\, dV$$

وباستخدام نظرية التباعد :-

$$\oint_S (rP).nda + \int_V \rho_P r\,dV = \int_V P\,dV$$

$$\oint rP.n\,dS + \int_V \rho_P r\,dV = \int_V P\,\mathrm{dV}$$

$$as:\ P.n = \sigma_P, \qquad \therefore \oint_S \sigma_P r\,dS + \int_V \rho_P r\,dV = \int_V P\,dV$$

س4/ مكعب من مادة عازلة طول ضاعه (L) ، فاذا كان الاستقطاب يعطى بالعلاقة : $\vec{P} = A\vec{r}$ حيث A كمية ثابتة وان : $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$ ونقطة الاصل للاحداثيات تقع في مركز المكعب . اوجد كثافات الشحنة المقيدة الحجمية والسطحية وبين ان الشحنة الكلية تساوي صفر.

الجواب /

$$\rho_P = -\nabla.P = -\nabla.(A\vec{r}) = -[A\nabla.\vec{r} + \vec{r}.\nabla A],$$

$$as\ \nabla.\vec{r} = 3\ and\ \nabla A = 0\ (constant)$$

$$\therefore\ \rho_P = -3A$$

$$\sigma_P = P.n = A\vec{r}.\vec{n} = Ar = A\frac{L}{2}$$

$$Q_{tot} = Q_{ts} + Q_{tv}$$

$$Q_{tot} = \int_V \rho_p\,\mathrm{dV} + \int_A \sigma_P\,dS = -3AV + A\frac{L}{2}S$$

$$= -3AL^3 + A\frac{L}{2}(6L^2)$$

$$= -3AL^3 + 3AL^3 = 0$$

(6 – 1) مقدمة :

في الفصل الثاني كنا نتعامل مع الشحنات الساكنة ولكن هنا سنتعامل مع الشحنات المتحركة ،هذا يعني اننا سنتعامل مع المواد الموصلة للكهربائية ذلك ان الموصل هو الجسم الذي تكون فيه ناقلات الشحنة طليقة الحركة وهذا التعريف لايتضمن الموصلات كالمعادن والسبائك فقط وانما ايضا اشباه الموصلات والمحاليل الالكتروليتية والغازات المتأينة والعوامل غير التامة (*imperfect*) . ان الشحنة المتحركة تولد تيارا وعملية نقل الشحنة تدعى بالتوصيل (*Conduction*) وبتعبير ادق يعرف التيار على انه: المعدل الزمني لأنتقال الشحنة عبر نقطة معينة في منظومة موصلة.

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (1amper = \frac{coul}{sec})$$

(6 – 2) طبيعة التيار : *Nature of the Current*

1- ينتقل التيار في المعادن بواسطة الالكترونات بينما الايونات الموجبة الثقيلة تبقى مثبتة عند مواضع منتظمة في التركيب البلوري.
2- في المحاليل الالكتروليتية ينتقل التيار بواسطة الايونات الموجبة والسالبة معا ولكن عملية التوصيل بأحد النوعين من الايونات هي التي تكون متغلبة ويعود السبب في ذلك الى ان قسم من الايونات تتحرك بسرعة اكبر من الايونات الاخرى.
3- في انبوبة التفريغ ينتقل التيار بواسطة الالكترونات والايونات الموجبة معا ومع ذلك فان الالكترونات تعد هي المسؤولة من الناحية العملية عن تكوين التيار باجمعه وذلك لأن قدرة الالكترونات على التحرك السريع تفوق كثيرا قدرة الايونات الثقيلة نسبيا.

ان التيارات التي سبق وصفها تسمى تيارات التوصيل (*conduction currents*) هذه التيارات تمثل الحركة الانتقالية لناقلات الشحنة خلال الوسط اما الوسط نفسه فيكون ساكنا . وقد يحدث في الغازات والسوائل حركة هيدروداينميكية (*hydrodynamic motion*) وقد ينتج عنها تيارات في حالة احتواء الوسط على كثافة شحنية والتيارات من هذا النوع تنشأ عن الانتقال الكتلي ، تدعى بتيارات الحمل (*convection currents*) .

مثلا :- تتجه تيارات الحمل الى الاعلى خلال الزوابع الرعدية وتكون لاحداث انحدار طبيعي في الجهد في الطبقة الجوية فوق سطح الارض وتيارات الحمل ليست متعادلة كهروستاتيكيا.

(6 – 3) كثافة التيار لوحدة المساحة ومعادلة الاستمرارية.

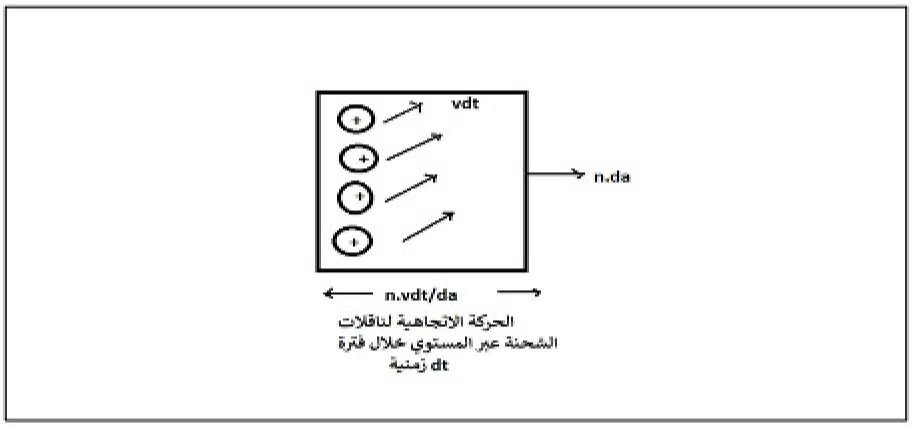
Current density and Equation of continuity

لناخذ وسط موصل يمتلك نوع واحد من ناقلات الشحنة التي تحمل شحنة q وسنرمز بالرمز N لعدد الناقلات لوحدة الحجم ونفرض ان جميع الناقلات ذات سرعة انجراف واحدة v وعليه يمكننا ان نحسب التيار خلال عنصر المساحة da فخلال فترة زمنية dt نجد ان كل شحنة تتحرك مسافة قدرها vdt وان الشحنة dQ التي تجتاز المساحة da خلال الفترة الزمنية dt تساوي q مضروبة في مجموع كل الناقلات التي يحويها الحجم اي ان :-

$$dQ = qN\vec{v}dt.\vec{n}da$$

حيث $\vec{n}$ وحدة المتجه العمودي على المساحة da .

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qN\vec{v}dt.\vec{n}da}{dt} \rightarrow \qquad \therefore\ I = Nq\vec{v}.\vec{n}da$$



فاذا كان الوسط يحوي على اكثر من نوع واحد من ناقلات الشحنة فان كل نوع سيساهم في تكوين التيار وفق المعادلة اعلاه . وبصورة عامة ستؤول الصيغة المعبرة عن التيار المار خلال المساحة da الى :-

$$dI = \left[\sum N_i q_i \vec{v}_i\right] . nda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (1)$$

وعلامة الجمع تمثل كل الانواع المختلفة من الناقلات. والكمية المحصورة بين القوسين كمية متجهة لها ابعاد التيار لوحدة المساحة . هذه الكمية تدعى كثافة التيار current density ويرمز لها $J = \frac{dI}{da}$ ووحداتها (amp/m^2) .

كثافة التيار لوحدة المساحة عند كل نقطة من نقاط الوسط الموصل :

$$J = \sum N_i q_i v_i$$

نعوض قيمة J في معادلة (1) :

$$\therefore dI = \vec{J}.\vec{n}da$$

وعليه تعطى قيمة التيار المار خلال سطح S بالمعادلة :

$$I = \int_S \vec{J}.\vec{n}\, da \ldots\ldots\ldots\ldots . (2)$$

ترتبط كثافة التيار J وكثافة الشحنة الشحنة ρ بمعادلة الاستمرارية واصل هذه المعادلة مستمد من حقيقة ان الشحنة محفوظة لاتفنى ولاتستحدث ولغرض اشتقاق معادلة الاستمرارية نتبع مايلي:-

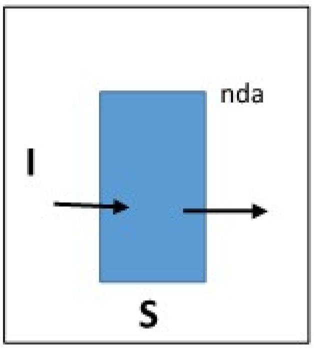
لوطبقنا معادلة (2) على سطح كيفي مغلق S لاعلى التعيين فالتيار الكهربائي الذي يدخل الحجم V المحاط بالسطح S يعطى بالعلاقة:-

$$I = -\oint_S \vec{J}.\vec{n}da \ldots\ldots\ldots . (3)$$

الاشارة السالبة تعني ان التيار يدخل ويخرج داخل الحجم وان العمود على السطح (nda) يكون بالاتجاه المعاكس .

$\vec{n}$:- يمثل العمود الخارج من السطح ، واننا نرغب في جعل التيار موجب عندما ينساب بالاتجاه المعاكس من خارج الحجم V الى الداخل .

نحول معادلة (3) من تكامل سطحي الى حجمي حسب نظرية التباعد :



$$I=-\int_V \vec{\nabla}.\vec{J}dV \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وعند نقل الشحنة الى داخل الحجم :

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV=\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV \ldots\ldots(5)$$

بما ان الحجم ثابت القيمة تؤخذ المشتقة لكثافة الشحنة الحجمية ρ فقط وبما انها دالة لـ (x,y,z.t) وعليه تم اخذ المشتقة الجزئية للزمن فقط لان الحجم ثابت والمتغير هو الزمن فقط.
وبتعويض معادلة (5) في معادلة (4) نحصل على :-

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\int_V \vec{\nabla}.\vec{J}\,\mathrm{dV} \Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}.\vec{J}\right)dV=0$$

حتى تصبح المعادلة صحيحة لاي جزء كيفي في الوسط يجب ان تتلاشى الكمية المطلوب تكاملها عند كل نقطة من نقاط ذلك الجزء الحجمي وبما ان $dV \neq 0$ اذن :-

$$\therefore\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}.\vec{J}=0 \ldots\ldots(6) \quad or\ -\frac{\partial\rho}{\partial t}=\vec{\nabla}.\vec{J}$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة الاستمرارية اومعادلة حفظ الشحنة حيث ρ :- تمثل صافي كثافة الشحنة وليست كثافة الشحنة الحركية.

$\frac{\partial\rho}{\partial t}$:- يمكن لاتكون قيمتها صفر داخل الموصل الابشكل عابر وعليه تصبح المعادلة :

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=0$$

وهي تكافئ المجال لقانون كيرشوف للتيار الذي ينص على صافي التيار الذي يتحرك في تقاطع من عدة موصلات يساوي صفر.

(6 – 4) قانون اوم –الموصلية :- *Ohm's Law – Conductivity*

وجد عمليا ان كثافة التيار لوحدة المساحة J في المعدن تتناسب طرديا مع المجال الكهربائي عند ثبوت درجة الحرارة اي ان :

$$J \propto E \Rightarrow J = gE \dots\dots (7)$$

هذا هو قانون اوم في الموصلات والمواد التي تخضع للعلاقة رقم (7) تدعى بالاوساط الاومية او اوساط خطية حيث g يمثل ثابت التناسب ويعرف بالتوصيل النوعي او الموصلية conductivity وهي دالة للمجال الكهربائي اي $g(E)$.

يدعى مقلوب الموصلية بالمقاومة النوعية η .

$$\eta = \frac{1}{g}, \;\; ohm.m \quad or \quad \frac{volt.m}{amp}$$

اما الصيغة العامة والمألوفة لقانون اوم هي :

$$\Delta U = RI \dots\dots\dots\dots (8)$$

ΔU : فرق الجهد المسط على نهايتي السلك .

ويمكن ان نعرف الموصلية g على انها :- قدرة الوسط على ايصال التيار الكهربائي وتسمى ايضا الايصالية وتكون غير متناظرة وغير متجانسة وقد تكون خطية لانها تتغير من مكان الى اخر وفي اي اتجاه كان .

وتعرف المقاومة النوعية η على انها : مقاومة موصل من المادة طوله متر واحد (1m) ومساحة مقطعه ($1m^2$) عند درجة حرارة معينة ،اي حساب المقاومة الكهربائية لموصل منتظم الشكل والبنية.

<u>سبب المقاومة النوعية :</u>

1- اصطدام الالكترونات بالذرات المكونة للمادة وهي تعتمد على درجة الحرارة .
2- اصطدام الالكترونات بالشوائب الموجودة في المادة وهي تعتمد على تركيز الشوائب وليس درجة الحرارة.

س/ اوجد العلاقة التي تربط المقاومة النوعية والمقاومة الخطية الاومية .

الجواب / على فرض ان توزيع التيار منتظم فقيمة التيار المار خلال اي مقطع في سلك يعطى بالعلاقة:

$$I = \int J.dS \quad or \quad I = \int J.n\, da$$

وبما ان التيار ينتقل عبر الوسط بانتظام فهذا يعني ان J كمية ثابتة . ونفرض ان السلك متجانس ومميز بتوصيل نوعي ثابت .

$$I = J.S \dots\dots (1)$$

حيث S=A ويمثل مساحة المقطع .

$$as: \; I = \frac{\Delta U}{R} \dots\dots (2)$$

بتعويض (2) في (1)

$$\frac{\Delta U}{R} = J.S \,\ldots.(3)$$

$$but: \ \ J = gE, \quad then \quad \frac{\Delta U}{R} = gES \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ان المقطع الثابت للطول (ℓ) ينتج عنه مجال (E) ثابت ويعطى فرق الجهد (هبوط الجهد) :-

$$\oint E.d\ell = \Delta U$$

لاتوجد مركبة عمودية للمجال على محور السلك ، حذفت الاشارة السالبة حيث n عكس الاتجاه.

$$E.\ell = \Delta U \implies E = \frac{\Delta U}{\ell} \ldots\ldots\ldots.(5)$$

نعوض معادلة (5) في معادلة (4) :

$$\frac{\Delta U}{R} = gES = gS\frac{\Delta U}{\ell}$$

$$\therefore \ \frac{1}{R} = g\frac{S}{\ell}, \rightarrow R = \frac{\ell}{gS}, \quad but: \eta = \frac{1}{g}, then \quad R = \eta\frac{\ell}{S}$$

تمثل R خاصية الجسم المادي والتي تعتمد على على طبيعة المادة وشكلها الهندسي ، اما المقاومة النوعية فتعتمد على طبيعة المادة فقط.

اذاكانت المادة مكونة من وسطين (مادتين) فان:-

$$R = \frac{\ell_1}{g_1S_1} = \frac{\ell_2}{g_2S_2} \quad or \quad R = \eta_1\frac{\ell_1}{S_1} = \eta_2\frac{\ell_2}{S_2}$$

ملاحظة : اذا كان توزيع التيار غير منتظم تصبح المقاومة بالشكل :

$$R = \frac{\Delta U}{\int J.dS} = \frac{\Delta U}{\int gEdS}$$

اما اذا كان المجال E هو المعلوم وليس فرق الجهد فان المقاومة تعطى بالعلاقة :-

$$R = \frac{\int E.d\ell}{\int gE.dS}$$

(6 – 5) القوة الدافعة الكهربائية :- *Electromotive Force*

لو تساءلنا انه لو كان لدينا وسط ناقل للكهربائية فهل يحدث تجمع شحني فيه والاجابة على على هذا السؤال تكون لا بسبب وجود القوى الكهروستاتيكية في ذلك الوسط .اذن مالسبب الذي يجعل التيار يسير خلال الوسط ؟ . ان سبب جعل التيار يسير خلال الوسط هو وجود فرق جهد ناشئ عن مصادر خارجية للطاقة وهذا ماكان معروف سابقا ،فاذا كان التيار سائرا داخل دائرة مغلقة فانه يسير باتجاه واحد ولكن مالسبب في ذلك ؟ بما ان تكامل المركبة المماسة لمجال كهروستاتيكي يساوي صفر:

$$\oint_S \vec{E}.d\ell = 0$$

لأن المجال محافظ اي مايربحه في خطوة يخسره في خطوة اخرى تالية اي ان المجال الكهروستاتيكي لايستطيع لوحده ان يجعل التيار مستقر ويستمر في الدائرة المغلقة وفي اتجاه واحد وانما هناك عوامل اخرى تدفعه الى ذلك وهي :

1- قد تكون تغيرات مغناطيسية تسبب قوى تساعد على دفع الالكترونات في السير باتجاه ما.
2- قد يكون التركيز الكيميائي في الوسط هو الذي يحدث الالكترونات في حوض فيه مواد كيميائية.
3- قوى ميكانيكية (مثل القوى التي تؤثر في الحوض)
4- قوى ضوئية مثل الفوتونات .
5- قوى حرارية.

وبناء على ماتقدم فان اي جسيم مشحون يقع تحت تاثير قوى اخرى اضافة الى القوى الكهروستاتيكية اي ان :

$$qE_{eff} = qE_S + F_w$$

وتدعى محصلة القوى لوحدة الشحنة المؤثرة بالمجال الكهربائي الفعال E_{eff} وهو المجال الكلي الذي يؤدي الى تدوير الشحنة باتجاه واحد في دائرة مغلقة. حيث E_S :المجال الاستاتيكي . F_w :- القوى المؤثرة الباقية.

$$\therefore\ E_{eff} = E_s + \frac{1}{q}F_w$$

$$\oint E_{eff}\,.d\ell \neq 0 = E_{eff}\, or\ E_{emf}$$

حيث ان ε_{emf} هي القوة الدافعة الكهربائية ووحداتها فولت *volt=Joule/column*

هذه القوة والتي تسمى احيانا قوة السوق (*driving force*) هي التي تجعل التيار يسير باتجاه واحد وباستمرار وبمعدل واحد في دائرة كهربائية مغلقة.

والسؤال الذي يطرح نفسه هو: كيف تستطيع هذه القوة دفع الشحنات (الالكترونات او الايونات او الفجوات ....الخ) ؟

والجواب على هذا السؤال يكون كالتالي:-

حسب قانون نيوتن الثاني تؤثر هذه القوة على حوامل الشحنات التي لها كتلة اي ان :

$$qE_{eff} = qE_s + F_W = mf \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث f : تعجيل الجسيم او حامل الشحنة، m : كتلة الجسيم حامل الشحنة

ان حوامل الشحنات تسير بفضل تلك القوة في الفراغ وتستمر في التسارع الى مقدار كبير جدا.

اما في الاوساط المادية فان حاملات الشحنة بمجرد تاثرها بقوة تتسارع وتتصادم مع اخر (تصادم غير مرن) يؤدي الى ابعاده الى مكان اخر باتجاه عشوائي وتبدأ حاملة الشحنة الاخرى بالتسارع وتتصادم مع اخر بحيث يكون متوسط التاثير الناشئ عن التصادم هو تقليل سرعة الجسم الى الصفر . لو فرضنا ان الفترة الزمنية بين كل تصادمين تساوي τ وعلى اساس ان الوسط متجانس فان العامل الحراري يؤدي رمي الذرة في اي مكان عشوائيا لذا فان المعدل الزمني يساوي صفر تقريبا . وعليه فاننا سوف نهتم بالحركة المنتظمة فقط وباتجاه المجال لكي نتوصل الى نتيجة مرضية .

ان السرعة المكتسبة في زمن τ تعطى بالعلاقة :

$$V = f\tau \,\ldots\ldots(2)$$

ولو فرضنا ان v هي سرعة نهائية وان حامل الشحنة يسير بهذه السرعة وهي سرعة منتظمة (سرعة انجراف) وهذه السرعة هي معدل بين سرعتين اي ان :

$$v = \frac{0+V}{2}, \qquad \to v = \frac{1}{2}V \,\ldots\ldots(3)$$

وبتعويض (2) في (3) :-

$$v = \frac{1}{2}f\tau \,\ldots\ldots(4)$$

ومن معادلة (1) ناخذ قيمة f :

$$f = \frac{q}{m}E_{eff} \,\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

نعوض (5) في (4) فنحصل على :

$$v = \frac{1}{2}\tau\frac{q}{m}E_{eff}$$

$$as; \quad qE_{eff} = qE_S + F_w, \qquad \therefore v = \frac{1}{2m}(qE_S + F_w)\tau$$

$$\because J = \sum_i q_i N_i v_i$$

حيث J كثافة التيار لوحدة المساحة

$$\therefore J = \sum_i q_i N_i \frac{1}{2}\frac{\tau_i q_i}{m_i}E_{eff} = \sum_i q_i^2 N_i \frac{1}{2}\frac{\tau_i}{m_i}E_{eff} \,\ldots\ldots\ldots(6)$$

ومن قانون اوم :

$$J = gE_{eff}, \qquad \to g = \frac{J}{E_{eff}} \,\ldots\ldots(7)$$

وناخذ قيمة J من معادلة (6) :

$$\therefore\ g=\sum_i \frac{1}{2m_i} q_i^2 N_i \tau_i\,,\quad but\ g=\frac{1}{\eta}$$

من معادلة (1) ومعادلة (7):

$$\therefore\ \frac{J}{g}=\eta J=E_{eff}=E_s+\frac{1}{q}F_w\ \ \rightarrow\ \ \eta J=E_S+\frac{1}{q}F_w$$

باخذ التكامل الخطي لهذا المقدار على المسار a الى b يكون:

$$\int_a^b E_S.\,d\ell+\int_a^b \frac{1}{q}F_w d\ell=\eta\int_a^b J.\,d\ell$$

التكامل الاول يمثل فرق الجهد حيث : $\Delta U=U_a-U_b=-\int_a^b E_S.\,d\ell$

ويمثل التكامل الثاني القوة الدافعة الكهربائية للجزء a,b :-

$$(U_a-U_b)+\mathcal{E}_{ab}=\eta J\ell$$

نضرب ونقسم الطرف الايمن بـ (S) فنحصل على:-

$$\eta J\ell=\eta\frac{J}{S}\ell S\,,\ \ but\ \ I=JS\quad and\ \ R=\frac{\eta\ell}{S}$$

$$\therefore\ \eta\frac{J}{S}\ell S=R_{ab}I$$

حيث I : التيار المار بين نقطتين . و R_{ab} : المقاومة المكافئة بين a,b

$$\therefore\ (U_a-U_b)+\mathcal{E}_{ab}=R_{ab}I$$

اذن معادلة تحليل اي دائرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$\therefore\ (U_b-U_a)=\mathcal{E}_{ab}-R_{ab}I$$

وبضرب المعادلة اعلاه في I نحصل على:

$$\therefore\ (U_b-U_a)I=\mathcal{E}_{ab}I-R_{ab}I^2$$

ان النقل المتواصل للشحنة بين a,b يؤدي الى نشوء تيار ثابت في الجزء ab اي ان:

$$I=\frac{dQ}{dt}\ \rightarrow dQ=Idt$$

وعليه يصبح الربح في الطاقة الكهربائية يساوي :-

$$(U_b-U_a)dQ=[\mathcal{E}_{ab}I-I^2R_{ab}]dt$$

حيث ان :-

$I^2R_{ab}dt$: طاقة حرارية ضائعة لايمكن ان تسترجع متولدة من التصادم (تحويل من طاقة كهربائية الى حرارية) عملية غير عكوسة.

$\mathcal{E}_{ab}Idt$: طاقة مخزونة (تحويل طاقة غير كهربائية لمصدر مثالي للقوة الدافعة الكهربائية الى طاقة كهربائية)
وهي عملية عكوسة
$(U_b-U_a)\ dQ$:- الطاقة الكلية.

دعنا نتسائل هل لكل دائرة كهربائية قوة دافعة كهربائية ؟ .

ج/ ليس شرطا ، واذا كانت موجودة تسمى الدائرة الفعالة ووجودها قد يكون موجب او سالب واذا كانت غيرموجودة تسمى بالدائرة السلبية تعد $\mathcal{E}_{ab}$ موجبة اذا كانت باتجاه التيار نفسه حيث يقوم بهذه الحالة مصدر ق . د . ك بتجهيز الطاقة الكهربائية الى الدائرة على حساب الطاقة غير الكهربائية التي يمتلكها المصدر اما اذا كانت $\mathcal{E}_{ab}$ سالبة فان المصدر يقوم بامتصاص الطاقة الكهربائية من الدائرة ويحولها الى طاقة من نوع اخر (اي نعتبرها كمخزن لخزن الطاقة الموجودة) كمثال :-

الخلية الكيميائية : تحويل كيميائي – كهربائي الطاقة .

المزدوج الحراري : تحويل حراري – كهربائي للطاقة .

المولد الكهربائي (الداينمو) : تحويل ميكانيكي – كهربائي للطاقة، عندما يمتص الداينمو الطاقة من الدائرة يعمل كمحرك وعندما يجهز الطاقة يعمل كمولد . فالتيارات المستقرة في الاوساط تكون خالية من مصادر القوة الدافعة الكهربائية وقد وجد ان هناك تشابه بين وسطين ، وسط موصل يمر به تيار كهربائي مستقر وثابت مع الزمن ووسط اخر الكتروستاتيكي هو عبارة عن موصلات محاطة بمادة عازلة .

ولايجاد التشابه مابين الاوساط العازلة التي توجد فيها اجسام موصلة وبين وسط موصل نتبع مايلي :-

لنأخذ وسط موصل موصل متجانس اوميا لايحتوي على مصادر للقوة الدافعة الكهربائية والتيار ثابت ، من معادلة الاستمرارية :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . J = 0$$

في الوسط الاول يكون ρ مقدار ثابت اي ان $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ لذلك (للتيارات الثابتة) $\nabla . J = 0$ وهذا دليل على الحالة المستقرة ، ولكن حسب قانون اوم فأن :

$$J = gE$$

$$\nabla . \mathrm{J} = \mathrm{g}\nabla . \mathrm{E} \quad \rightarrow 0 = \mathrm{g}\nabla . E$$

$$\nabla . E = 0 \ldots\ldots . (1), \qquad g = constant$$

g كمية ثابتة للوسط المتجانس

فاذا كانت الاوساط خالية مصادر القوة الدافعة الكهربائية فان :-

$$\frac{1}{q} F_w = 0$$

ولكن موجود في المجال الكهروستاتيكي (E_S) اي ان :-

$$E = E_S + \frac{1}{q} F_w , \quad \rightarrow E = E_S$$

$$\therefore \ E_S = -\nabla U \ldots\ldots (2)$$

ومن دمج معادلتي (1) و (2) :

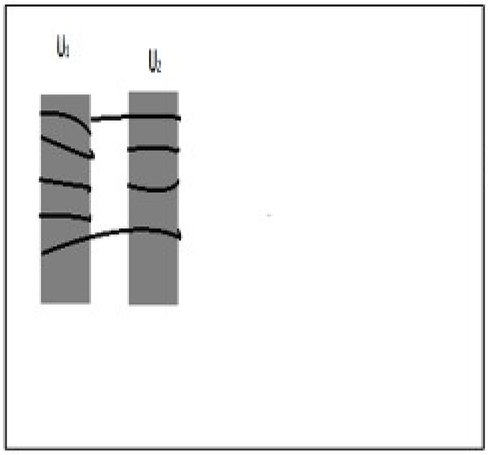
$$-\nabla.\nabla U = 0, \quad \rightarrow \nabla^2 U = 0$$

وهذه هي معادلة لابلاس اي انه يمكن حل مسألة التوصيل في حالة الاستقرار بنفس طريقة حل المسائل الكهروستاتيكية وذلك بحل معادلة لابلاس باحدى الطرق المستخدمة في الفصل الثالث.

اسئلة الفصل السادس

س1/ موصلين مغلفين بمادة عازلة الاول محاط ومغلف كليا بمادة عازلة والاخر مغلف جزئيا ، احسب زمن الاسترخاء (ثابت الزمن) اذا علمت ان الجهد في الاول U_1 والجهد في الثاني U_2 .

الجواب / لدينا موصلين في وسط متجانس واومي وذو توصيل نوعي (g) وثبت جهد الموصلين على القيم U_1 و U_2 فالتيار المار بينهما يعطى بالعلاقة:-



$$I = \frac{\Delta U}{R} = \frac{U_1 - U_2}{R} \dots\dots (1)$$

حيث R مقاومة الوسط الذي يمرفيه التيار الكهربائي ، ويعطى التيار الخارج من سطح مغلق بالعلاقة:-

$$I = \oint_S J.dS \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore J = gE \Longrightarrow I = g\oint_S E.dS \dots\dots (3)$$

$$\frac{U_1 - U_2}{R} = g\oint_S E.dS \dots\dots\dots (4)$$

هناك تشابه بين الحالة الديناميكية والستاتيكية ،بمعنى ان المجال الكهربائي المتولد عن سير التيار مشابه للمجال الناتج عن شحنات كهروستاتيكية موضوعة على موصلين ، وطبقا لقانون كاوس :-

$$\oint E.dS = \frac{Q}{\in} \dots\dots\dots\dots (5)$$

حيث Q الشحنة الموضوعة على الموصل المعدني المحاط بالسطح S

وفي هذه الحالة يشكل الموصلان متسعة وعليه يكون :-

$$C = \frac{Q}{\Delta U}, \quad \rightarrow Q = C\Delta U \dots\dots (6)$$

نعوض (5) و (6) في (4) :

$$\frac{\Delta U}{R} = g\frac{Q}{\in} = \frac{g}{\in}C\Delta U \ \rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{g}{\in}C$$

$$\therefore RC = \frac{\in}{g} = \tau$$

وهو زمن الاسترخاء او ثابت الزمن .

س2/ اذا كان لدينا جسم ووضعنا عليه شحنة ، فما الوقت الذي تحتاجه الشحنة لكي تكون في موضع الاستقرار ؟

الجواب / لو اخذنا وسط متجانس متساوي الاتجاه ومميز بتوصيل نوعي g وسماحيته $\in$ يحتوي على شحنة طليقة ذات كثافة حجمية ρ ، وعند فصل هذه المنظومة عن مصادر القوة الدافعة الكهربائية وعن المجالات المعتمدة عن الزمن فانها تميل نحو الاتزان .

من معادلة الاستمرارية:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . J = 0\,, but \quad J = gE, \qquad \therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + g\nabla . E = 0 \;\ldots\ldots (1)$$

$$as: \quad \nabla . E = \frac{\rho}{\in}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g\frac{\rho}{\in} = 0, \quad divided\ bY\ \rho,\ \ we\ get: \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{E} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{g}{\in}, \qquad then: \qquad \int_{\rho_o}^{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{g}{\in}\int_{0}^{t} dt$$

$$\ln \rho - \ln \rho_o = -\frac{g}{\in}t, \qquad then \quad \rho = \rho_o e^{-\frac{g}{\in}t}$$

$$\mathbf{as:} \qquad \tau = \frac{\in}{g}, \quad then \quad \rho = \rho_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1- اذا كان الجسم موصل فان g كبيرة مما يؤدي الى تكون الكمية $\tau = \frac{\in}{g}$ صغيرة اي يحتاج زمن قصير جدا للاستقرار اي ان الموصل الجيد يحتاج يصل بسرعة الى حالة الاتزان.
2- اذا كان الجسم ردئ التوصيل اي g صغيرة و $\tau = \frac{\in}{g}$ كمية كبيرة اي يحتاج الى زمن طويل جدا للاستقرار.

وهذا يؤكد ان الشحنة الحرة لايمكن ان تبقى داخل الموصل وتكون بدلا من ذلك موزعة بالتساوي على سطح الموصل.

س3/ اسطوانتان معدنيتان طويلتان جدا نصف اقطارها r_1 و r_2 بحيث ان $r_2 > r_1$ رتبت على محور واحد وسلط فرق جهد قدره ΔU بينهما فاذا ملئت الفسحة بين الاسطوانتين بوسط توصيليته g 1- احسب التيار لكل وحدة طول من هذا النظام باستخدام قانون اوم .
2-اذا ملئت الفسحة بينهما بوسط عازل سماحيته $\in$ من حساب سعة المجموعة برهن ان حاصل ضرب المقاومة لوحدة الطول تساوي $(\frac{\in}{g})$.

الجواب/ اولا: من قانون اوم :

$$J = gE \ldots\ldots(1)$$

نستخدم معادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0, \qquad \to r\frac{dU}{dr} = A, \quad then \quad \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r} \Longrightarrow U = A\ln r + B$$

$$\because E = -\nabla U = -\frac{dU}{dr}\,, \quad \to \quad E = -\frac{A}{r}$$

$$U_1 = A\ln r_1 + B$$

$$U_2 = A\ln r_2 + B$$

بطرح المعادلتين:

$$\Delta U = A(\ln r_1 - \ln r_2) = A\ln\frac{r_1}{r_2}$$

$$\therefore A = \frac{\Delta U}{\ln\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\therefore E = -\frac{A}{r} = \frac{\Delta U}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right).r} \ldots\ldots(2)$$

نعوض معادلة (2) في (1):

$$\therefore J = g\frac{\Delta U}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right).r}$$

$$as\!: \ I = \int J.dS = J.S = g\frac{\Delta U}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right).r}(2\pi rL)$$

$$I = \frac{2\pi g\Delta UL}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)} \ldots\ldots(3)$$

ثانيا :-

$$as\!: \ \frac{\Delta U}{I} = R, \quad and \quad I = \frac{2\pi g\Delta UL}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

$$then \ \left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2\pi g\Delta UL}{I}, \qquad \left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right) = 2\pi gRL$$

$$\therefore R = \frac{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi g L} \dots \dots (4)$$

$$as : C = \frac{Q}{\Delta U} \dots \dots (5), \quad from\ Gauss\ law \quad \oint E.dS = \frac{Q}{\in}$$

$$E.S = \frac{Q}{\in}, \quad then\ E = \frac{Q}{2\pi r \in L} \dots \dots (6)$$

من معادلة (2) ومعادلة (6) :

$$E = \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right).r}, \quad then \quad \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right).r} = \frac{Q}{2\pi r \in L}, \quad but\ Q = C\Delta U$$

$$\therefore \frac{\Delta U}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right).r} = \frac{C\Delta U}{2\pi r \in L}$$

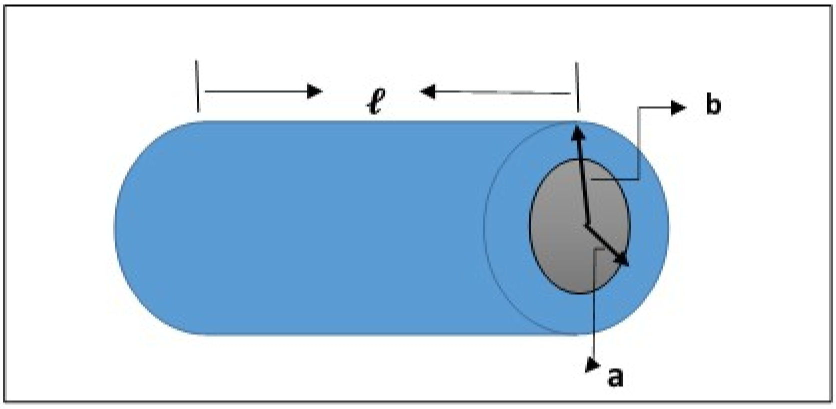
$$\therefore C = \frac{2\pi \in L}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)} \dots \dots (7)$$

من معادلة (4) و(7) :

$$now: \ RC = \frac{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi g L} * \frac{2\pi \in L}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)} \rightarrow \qquad RC = \frac{\in}{g}$$

س4/ احسب المقاومة لعازل طوله (ℓ) على شكل كيبل محوري *axial cable* .

الجواب/ نفرض تيار كلي (I) من الموصل الداخلي الى الموصل الخارجي عند مسافة شعاعية (r).



$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi r\ell} \dots\dots\dots (1), \qquad but \quad J = gE, \quad then \quad E = \frac{J}{g} \dots\dots. (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$E = \frac{I}{2\pi g r\ell}$$

$$U_{ab} = -\int_a^b E.dr = -\int_b^a \frac{I}{2\pi g r\ell} dr = -\frac{I}{2\pi g\ell}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

لكي نجعل التيار موجب عندما تنساب الشحنة بالاتجاه المعاكس من الخارج الى الداخل استبدلت الاشارة السالبة للتيار حدود التكامل.

$$\therefore\ U_{ab} = \frac{I}{2\pi g\ell}\ln\frac{b}{a} \qquad \rightarrow \qquad R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi g\ell}\ln\frac{b}{a}$$

(7 – 1) مقدمة :

تشبه المواد المغناطيسية العوازل في ان الشحنات الانفرادية او مجاميع من الشحنات يمكن ان تمتلك عزوم مغناطيسية وهذه العزوم عندما يتم ترتيبها بصورة مناسبة تولد محصلة عزم مغناطيسي في الاجسام العيانية عندئذ يقال عن مثل هذه الاجسام بانها ممغنطة.

في معظم الذرات تلغى العزوم المغناطيسية التى تعزى الى الحركة المدارية والحركة الدورانية للالكترون واذا لم يتم هذا الالغاء عندئذ يقال عن هذه المادة بانها (بارامغناطيسية) وعندما نضع هذه المادة في مجال مغناطيسي فان ذراتها تتعرض الى عزم يجعلها تميل الى تنظيم مع المجال لكن الاضطراب الحراري يعمل على تدمير هذا التنظيم ، هذه الظاهرة مشابهة الى تنظيم الجزيئات القطبية في العوازل.

في المواد الدايامغناطيسية (ضعيفة النفاذية المغناطيسية) تكون العزوم الاولية غير دائمة ولكنها تحث طبقا لقانون فاراداي للحث وبصورة عامة تعتبر جميع المواد دايامغناطيسية.

وهناك فرق مهم بين العوازل والمواد المغناطيسية ، ففي معظم العوازل يكون D متناسبا مع E وعليه يقال عن الوسط بانه خطي .بينما تعتبر المواد الفيرو مغناطيسية مواد لاخطية عالية ويعتمد سلوكها على قدمها لذا فان حسابات المجالات التي تتضمنها المواد المغناطيسية تعتمد على الفرض والتجربة بصورة كبيرة.

(7 – 2) التمغنط (M) : *The Magnetization*

هو العزم المغناطيسي لوحدة الحجم عند نقطة معلومة ويعطى بالعلاقة .

$$M = Nm$$

حيث : m : عزم ثنائي القطب المغناطيسي لكل ذرة ، N: عدد الذرات لوحدة الحجم .

وذلك اذا كانت عزوم ثنائيات القطب الانفرادية في عنصر من الحجم تحت الدراسة منتظمة وبنفس الاتجاه .

يقاس M بالامبير لكل متر وهو يناظر الاستقطاب P في العوازل . اما اذا كانت الذرات غير منتظمة فان :-

$$M = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}$$

ويعطى كثافة تيار التمغنط J_M بالعلاقة :

$$\nabla x M = J_M$$

اي انها تساوي التفاف التمغنط . ∇xMتكافئ كثافة التيار الحقيقي الذي يولد القدر نفسه من المجال المغناطيسي الذي يولده التمغنط M .

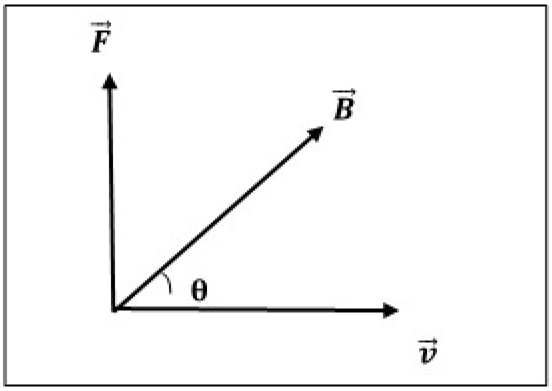
(7- 3) قوة لورنس :

لقد دلت التجارب العملية على انه عندما تتحرك شحنة كهربائية Q في مجال مغناطيسي الحث فيه B فان قوة ستؤثر فيها فتجرفها عن اتجاهها وتحدد هذة القوة(القوة المغناطيسية) بالعلاقة المتجهة التالية :-

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v}x\vec{B})$$

حيث Q :- الشحنة الكهربائية وتعد هنا موجبة. و v: سرعتها ، وB : كثافة الفيض المغناطيسي.

ان القوة F عمودية على كل من v و B ويكون اتجاهها خاضعا لقاعدة اليد اليمنى حسب تعريف حاصل الضرب الاتجاهي بين متجهين فأذا فرضنا ان θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين v و B فان :



$$F = QvBsin\theta$$

ومن هذه العلاقة يكمننا قياس كثافة الفيض المغناطيسي B بشرط ان يكون المجال المغناطيسي الذي تولده الشحنة اثناء حركتها غير مؤثرة على مؤثرة المجال المغناطيسي الاصلي الذي تتحرك فيه وعليه :-

$$B = \frac{F}{Qvsin\theta}$$

وحدة قياس B هي $\frac{weber}{m^2}$ حيث تعتبر weber وحدة قياس الفيض المغناطيسي في النظام العالمي للوحدات .

$$1\,T = \frac{Wb}{m^2}\,(\text{تسلا}), \qquad Wb = \frac{N}{A.m}$$

وبما ان : $\vec{v} \perp \vec{F}$ لذلك $\vec{F}.\vec{v} = 0$ وتكون القدرة المجهزة للجسم تساوي صفر وعلى هذا الاساس تعمل قوة لورنس على تغيير اتجاه v بدون ان تغير مقدارها .

(7 – 4) القوة المؤثرة على الموصلات الحاملة للتيار .

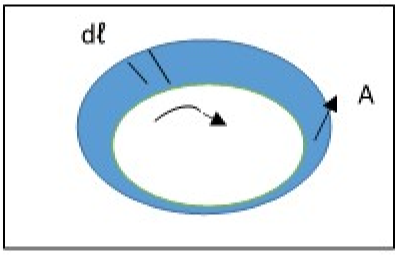
سنحاول ان نجد علاقة تعبر عن القوة المغناطيسية التي تؤثر في سلك موصل متناهيا في الصفر طوله $d\vec{\ell}$ يحمل تيار كهربائي مقداره I ونفرض ان جميع الشحنات الحرة ضمن السلك الموصل تتحرك بسرعة واحدة v ويحمل كل منها شحنة كهربائية Q . اذن القوة التي تؤثر على كل ششحنة من هذه الشحنات المتواجدة ضمن العنصر $d\vec{\ell}$ تساوي :-

$$\vec{F} = Q(\vec{v}x\vec{B})$$

اذ يلاحظ ان B يمثل معدل كثافة الفيض المغناطيسي ضمن العنصر $d\vec{\ell}$ وهكذا فان القوة الكلية المؤثرة في جميع الشحنات اي لـ N من ناقلات الشحنة لوحدة الحجم داخل العنصر $d\vec{\ell}$ تساوي :

$$dF_m = NAd\ell q(\vec{v}x\vec{B}) \ldots\ldots (1)$$

حيث : A : مساحة المقطع العرضي . q: شحنة الناقل . ولما كان $\vec{v}$ و $d\vec{\ell}$ متوازيين وبنفس الاتجاه فان الصيغة البديلة لمعادلة (1)



$$dF_m = NAvq(d\vec{\ell}x\vec{B})$$

وتمثل الكمية $(NAvq)$ التيار الكلي I المار في السلك حيث :-

$$J_m = Nqv, \quad I = JA, \quad \rightarrow I = NqvA$$

$$dF_m = Id\vec{\ell}x\vec{B}$$

وهذه العلاقة تحدد القوة المؤثرة على عنصر التيار بالمقدار والاتجاه وتستخدم لحساب القوة الكلية F المؤثرة في دائرة مغلقة مثل (C) وعليه يكون: -

$$F_m = \oint_C I\,\overrightarrow{d\ell}x\vec{B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

وضع التكامل مغلق لان التيار لايمر الا اذا كانت الدائرة مغلقة. يمكن ان تكتب العلاقة الاخيرة (معادلة 2) بشكل اخر ، اذا فرضنا ان كثافة الفيض المغناطيسي تبقى ثابتة مع التيار ولاتعتمد على الموضع ينتج :-

$$F = \int dF = \oint I\,d\vec{\ell}x\vec{B} = I\oint d\vec{\ell}x\vec{B}$$

$$F = I\left\{\oint_C d\vec{\ell}\right\}x\vec{B}$$

ان التكامل الموضح في المعادلة السابقة يمثل مجموع المتجهات المكونة للدائرة المغلقة فهي اذن تساوي صفر وعليه يكون :-

$$F = I\left[\oint d\vec{\ell}\right]x\vec{B} = 0$$

B منتظمة. وهذا يعني ان محصلة القوة المؤثرة في دائرة مغلقة يمر بها تيار كهربائي مستمر في مجال مغناطيسي منتظم يساوي صفر .

اما اذا كان B غير منتظم فان هناك قوة مؤثرة على هذه الدائرة المغلقة ويكون هناك عزم يؤثر في الدائرة نفسها ويمكن حسابه من معرفة العزم التفاضلي :-

$$d\vec{\tau} = \vec{r}xd\vec{F}$$

$$d\vec{\tau} = I\vec{r}x(d\vec{\ell}x\vec{B}) \Rightarrow \tau = I\oint \vec{r}\,x(d\vec{\ell}x\vec{B})$$

والسؤال الذي يطرح نفسه الان هو هل ان في جميع الحالات التيار يمر بسلك ؟

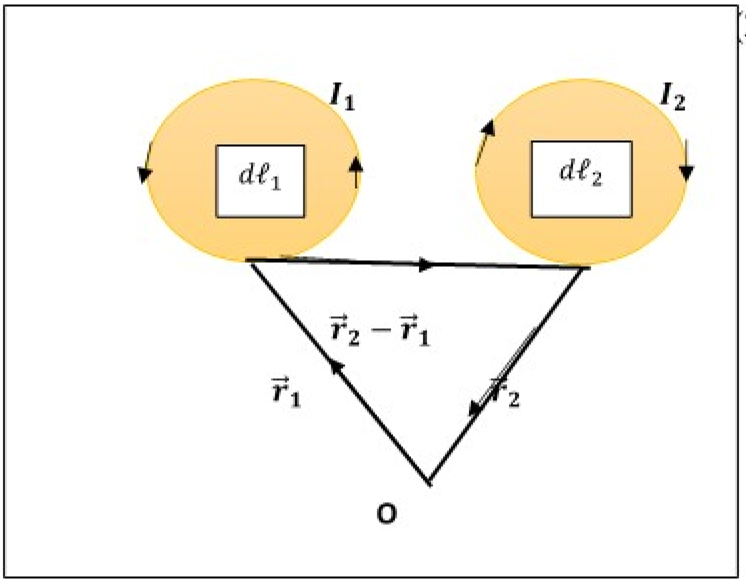
الجواب كلا ، احيانا يكون لدينا وسط مادي له حجم معين وتوجد هناك تيارات خارجة خارجة في هذه الحالة تستبدل الكمية $Id\vec{\ell}$ وتصبح

$(JSd\ell = JdV)$ وعليه تصبح كل مسالة حسب نوعها اي ان :- في الاسلاك نعوض $Id\vec{\ell}$ وفي الاوساط الممتدة نعوض JdV وعليه تصبح العلاقة للاوساط الممتدة :

$$dF = JxBdV$$

(7 – 5) قانون بايوت – سافارت *Biot- Savart Law*

اكتشف اورستد بأن التيارات الكهربائية تولد مجالات مغناطيسية بعدها باسابيع اثبتت التجارب التي قام بها امبير بأن القوة المغناطيسية بين دائرتين مغلقتين تحمل كل منهما تيارا كهربائيا تعتمد على الشكل الهندسي لكل منهما والمسافة الفاصلة بينهما ، كما تعتمد على التيار الذي يمر بكل منهما . ان مقدار القوة المتبادلة بين الدائرتين (بين مصدرين) يسمى قانون بايوت – سافارت .



نفرض ان dl_1 و dl_2 هما شرح صغير من دائرتين (1) و(2)

I_1: التيار المار في الدائرة الاولى.

I_2: التيار المار في الدائرة الثانية.

فالقوة المتبادلة بين الدائرتين هي :-

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_2 x[d\vec{\ell}_1 x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (3)$$

Or

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi} I_2 I_1 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 x[d\vec{\ell}_2 x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_{12}$$

حيث $\vec{F}_{12}$:- هي القوة التي تؤثر بها الدائرة الكهربائية الاولى على الثانية او هي المؤثرة على الدائرة الثانية نتيجة وجود الدائرة الاولى. والكمية $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ يمثل متجه موضع للعنصر $d\vec{\ell}_1$ بالنسبة لموقع $d\vec{\ell}_2$.

والكمية : $\frac{\mu_o}{4\pi}$ تساوي $10^{-7}\frac{N}{amp^2}$ ووضعت لتعديل الوحدات .

نلاحظ ان الدائرة الاولى تؤثر على الدائرة الثانية وكذلك الدائرة الثانية تؤثر على الاولى بقوة لها نفس المقدار ولكن بعكس الاتجاه وذلك حسب قانون نيوتن الثالث اي ان :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

ولحساب القوة الكلية المؤثرة في اي من الدائرتين في اي من الدائرتين لابد من ان ناخذ بنظر الاعتبار المجموع الاتجاهي لكل القوة المؤثرة على العناصر التي تتالف منها تلك الدائرة ، فالقوة الكلية المؤثرة في الدائرة الاولى تكتب بالشكل :-

$$\vec{F}_1 = \oint_{C_1} d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{\ell}_1 x \left\{ \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right\}$$

والتي تمثل القوة الخارجية المؤثرة في عنصر التيار $I_1 d\vec{\ell}_1$ وبعد مقارنة المعدلتين (2) و(3) نجد ان :

$$d\vec{F} = I\big(d\vec{\ell} xB)\big) \ , \quad or \quad \vec{F} = I \oint d\vec{\ell} x\vec{B}$$

لذلك فان :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

وهذه المعادلة تمثل قانون بايوت – سافارت . حيث :- $\vec{B}_2$ تمثل كثافة الفيض المغناطيسي في اي نقطة قريبة من دائرة مغلقة تحمل تيارا كهربائيا والدائرة هنا هي الدائرة الثانية. وقد تكتب المعادلة بالصيغة التفاضلية:-

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

حيث تمثل $d\vec{B}$ كثافة الفيض المغناطيسي المتولد في نقطة واقعة على بعد (r) من عنصر $Id\vec{\ell}$ وينبغي ان لايغيب عن الاذهان ان اتجاه dB خاضع لقاعدة اليد اليمنى وهو عمودي على المستوي الذي يضم كل من المتجهين $\vec{r}, d\vec{\ell}$ وتكون B_2 دالة لـ r_2 اي ان r_1 ثابت . اما اذا كان لدينا وسط ممتد وليس سلك ، فيمكن التعبير عن الحث المغناطيسي بدلالة كثافة التيار J حيث نستبدل $Id\vec{\ell}$ بـ JdV .

$$B(r_2) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r_1) x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) dV_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

في المعادلة $d\vec{F} = I\big(d\vec{\ell} xB)\big)$ نجد ان :-

$$\vec{F}_2 = I_2 \oint d\vec{\ell}_2 x\vec{B}$$

$$B(r_2) = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 \int \frac{d\ell_1 x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

ولو اخذنا تباعد الطرفين نجد ان $\nabla . \mathrm{B} = 0$ وهي احدى معادلات ماكسويل وتشير الى حقيقة عدم امكانية وجود اقطاب مغناطيسية معزولة.

(7 – 6) قانون امبير الدائري :-

اذا اخذنا التفاف المجال $\vec{B}$ نحصل على الصيغة التفاضلية لقانون امبير في الفراغ (وهي احدى معادلات ماكسويل) .

$$\vec{\nabla} x \vec{B}(r_2) = \mu_o J_F(r_2)$$

وهذه المعادلة للاوساط غير المغناطيسية . حيث J_F تمثل كثافة التيار الحقيقي.

لو كان لدينا منطقة فيها مجال مغناطيسي ، تاخذ التكامل ضمن هذه المنطقة فنحصل على :

$$\oint \vec{\nabla} X \vec{B}. n da = \mu_o \oint J. n\, da$$

$$\oint \vec{\nabla} X \vec{B}. ds = \mu_o \oint J. dS$$

نحول التكامل السطحي الى تكامل خطي حسب نظرية ستوكس :

$$\oint \vec{\nabla} X \vec{B}. dS = \oint \vec{B}. d\vec{\ell} = \mu_o \oint J. dS$$

$$\therefore \oint \vec{B}. d\vec{\ell} = \mu_o \oint J. dS$$

$$but \oint J. dS = I, \quad \Rightarrow \oint \vec{B}. d\vec{\ell} = \mu_o I$$

وهي الصيغة التكاملية لقانون امبير للدوائر الكهربائية . وينص هذا القانون على ان: مجموع المركبات المماسية للحث المغناطيسي حول مسار مغلق يساوي النفاذية المغناطيسية (magnetic permeability) في الهواء μ_o مضروب في التيارالكلي I خلال المسار. يعتبر قانون امبير الدائري هو نظير قانون كاوس في الكهربائية المستقرة .

(7 – 7) معادلات المجال : *Equations of Field*

قد تولد مادة معينة مثل الحديد مجال مجال مغناطيسي سواء لكونها ممغنطة او لانها تحمل تيار حقيقي وسنرى مساهمة مادة ممغنطة $\mathrm{J_M}$ في تكوين المجال المغناطيسي على معادلات المجال للتيارات .

في حالة وجود مادة مغناطيسية يضاف الحد $\mathrm{J_M}$ الى المعادلة اي ان :-

$$\vec{\nabla} X \vec{B} = \mu_o (J_F + J_M) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث $\mathrm{J_M}$: هي كثافة تيار التمغنط و J_F : كثافة التيار الحقيقي (الاصلي) .

$$but: \ \vec{J}_M = \vec{\nabla} X \vec{M} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على :

$$\vec{\nabla} X \vec{B} = \mu_o (J_F + \vec{\nabla} X \vec{M}) = \mu_o J_F + \mu_o \vec{\nabla} X \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} X \vec{B} - \mu_o \vec{\nabla} X \vec{M} = \mu_o J_F$$

$$\vec{\nabla} X (\vec{B} - \mu_o \vec{M}) = \mu_o J_F \ \Rightarrow \vec{\nabla} X \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \right) = J_F$$

$$but : \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} X \vec{H} = J_F \ldots \ldots \ldots (3)$$

تسمى H شدة المجال المغناطيسي ووحداتها نفس وحدة التمغنط amp/m وهو متجه مغناطيسي مساعد وجد لحل مشاكل التكامل لمسائل الحث المغناطيسي . وفي الفراغ تكون المعادلة :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o}, \Rightarrow \ \vec{B} = \mu_o \vec{H}$$

ان معادلة (3) تثبت ان المتجه المغناطيسي المساعد H يرتبط بكثافة التيار الحقيقي J_F من خلال التفافه وهذه الحالة تشبه الحالة الكهروستاتيكية حيث يكون المتجه المساعد D يرتبط بكثافة الشحنة الحرة من خلال تباعد الازاحة. بأخذ التكامل السطحي لمعادلة(3) :

$$\oint_S \vec{\nabla} X \vec{H} . \hat{n} \, da = \oint_S \vec{J} . \hat{n} \, da$$

وباستخدام نظرية ستوكس نحول الطرف الايسر من المعادلة الى تكامل خطي :

$$\oint_S \vec{\nabla} X \vec{H} . \hat{n} \, da = \oint_C \vec{H} . d\vec{\ell}$$

$$\therefore \ \oint_C \vec{H} . d\vec{\ell} = \oint_S \vec{J} . \hat{n} da , \ \ but: \ \ \oint_S \vec{J} . \hat{n} da = I$$

$$\boxed{\therefore \ \oint_C \vec{H} . d\vec{\ell} = I}$$

والمعادلة الاخيرة تشير الى ان التكامل الخطي للمركبة المماسية لشدة المجال المغناطيسي حول مسار مغلق (C) يساوي التيار الكلي الذي ينتقل خلال المساحة المحاطة بالمنحني المغلق C .

(7 - 8) الفيض المغناطيسي : *Magnetic Flux*

لوكان لدينا سطح مغلق ويوجد فيه مجال مغناطيسي B اي وجود فيض مغناطيسي اي ان :-

$$\emptyset = \oint_{S} \vec{B}.dS$$

وهي مجموع المركبات العمودية لـ B باتجاه S .

وباستخدام نظرية التباعد يصبح لدينا :

$$\oint \vec{B}.\hat{n}\,da = \int_{V} \vec{\nabla}.\vec{B}dV = \emptyset$$

$$but: \quad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \ \rightarrow \emptyset = 0$$

اي ان الفيض المغناطيسي خلال اي سطح مغلق يساوي صفر ومعنى ذلك ان اي مجال مغناطيسي يدخل فانه يخرج ولايبقى منه شئ .

(7 – 9) الحث الكهرومغناطيسي : *Electromagnetic Induction*

لقد وجد تاثير للفيض المغناطيسي في تجارب فاراداي حيث لاحظ هو والعالم هنري توليد ق . د . ك محتثة نتيجة تغير الفيض المغناطيسي مع الزمن وهذا التغير يحدث في العمليات التالية :-

1- قد تكون الدائرة متحركة في مجال مغناطيسي غير منتظم .
2- قد تكون الدائرة متحركة باستمرار.
3- قد يكون المجال متغير مع الزمن.

ان التغير الحاصل في الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربائية يكون مصحوب بتوليد ق . د . ك محتثة ضمن هذه الدائرة تعطى بالعلاقة :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون فاراداي في الحث الكهرومغناطيسي وهو قانون تجريبي . وظهور الاشارة السالبة تعني ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تكون بالاتجاه الذي يعمل على معاكسة التغير الذي تسبب في توليدها او ان التغير في الفيض المغناطيسي يولد تأثير يقاوم المسبب للتغيير (حسب قانون لنز).

عند تقريب القطب الشمالي لمغناطيس في ملف بصورة عمودية يؤدي الى تولد تيار يقاوم هذا التغيير.

$$\phi = \oint B.dS, \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d}{dt}\oint B.dS$$

اذا كانت الدائرة متماسكة وثابتة في موضعها. اما اذا كانت B دالة للموضع والزمن معا ، يتحول من تفاضل كلي الى جزئي :

$$\varepsilon = -\oint \frac{\partial}{\partial t} B.dS = \oint E.dS$$

$$\oint E.dS = -\oint \frac{\partial B}{\partial t}.dS$$

باستخدام نظرية ستوكس نحصل على :-

$$\oint_S \vec{\nabla} X \vec{S}.dS = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.dS$$

$$\vec{\nabla} X \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

وهي الصيغة التفاضلية لقانون فاراداي في الاوساط غير المتحركة وللمتحركة تكون المعالجة اصعب .

(7 – 10) التاثرية المغناطيسية والنفاذية المغناطيسية :

Magnetic Susceptibility and magnetic Permeability

ان العلاقة بين M وأحد متجهات المجال المغناطيسي H تعتمد على طبيعة المادة المغناطيسية . وتكون العلاقة علاقة خطية تقريبا لصنف واسع من المواد . فأ ذا كانت المادة متساوية الاتجاه (اي ان H,M بنفس الاتجاه) وخطية فأن

$$M = \chi_m \mathrm{H}$$

حيث χ_m هي التاثرية المغناطيسية *magnetic susceptibility* او قابلية التمغنط وهي خالية من الوحدات .

اذا كانت $\chi_m > 0$ اي موجبة تسمى المادة بارامغناطيسية ووجودها يؤدي الى تقوية الحث المغناطيسي . اما اذا كانت $\chi_m > 0$ اي سالبة تسمى المادة دايامغناطيسية ووجودها يؤدي الى ضعف الحث المغناطيسي . وفي الفراغ $\chi_m = 0$

ان العلاقة الخطية بين H,M تدل ضمنا على العلاقة بين B,H وهي علاقة خطية ايضا :

$$B = \mu H \dots\dots(1)$$

حيث μ هي النفاذية المغناطيسية *magnetic permeability* ولايجاد قيمتها نتبع الخطوات الاتية:-

$$H = \frac{B}{\mu_o} - M \rightarrow H + M = \frac{B}{\mu_o}, \quad \therefore B = \mu_o(H + M) = \mu_o(H + \chi_m H)$$

$$= \mu_o(1 + \chi_m)H \dots\dots(2)$$

$$\therefore \ \mu = \mu_o(1 + \chi_m)$$

في الفراغ :- $\mu = \mu_o$ $\chi_m = o \quad then$ لذلك النفاذية المغناطيسية النسبية :- $K_m or \mu_r = \frac{\mu}{\mu_o}$ وهي خالية من الوحدات.

عندما K_m اقل من الواحد للمواد البارامغناطيسية ولكن تعتمد على معكوس درجة الحرارة المطلقة .

عندما تكون K_m اقل من الواحد للمواد الدايامغناطيسية ولكن تعتمد على درجة الحرارة.

عندما تكون K_m اكبر من الواحد للمواد الفيرومغناطيسية والتي تشكل نوع من المواد المغناطيسية تتميز بقدرتها على اكتساب تمغنط دائمي وبتاثرها الشديد على الحث المغناطيسي. ان المواد الفيرومغناطيسية ليست خطية ولهذا السبب لايصح تطبيق المعادلتين:

$$M = \chi_m H, \quad and \quad B = \mu H$$

والذي يكون فيها M و χ_m ثابتين .

(7 – 11) كثافة الطاقة المغناطيسية :- Magnetic Energy Density

$$W_B = \frac{1}{2}\int_V H.B\, dV$$

تشبه هذه المعادلة صيغة الطاقة الكهروستاتيكية : $W = \frac{1}{2}\int_V D.E dV$. اي ان الطاقة المغناطيسية موزعة بكثافة قدرها : $(\frac{1}{2}(H.B))$

$$W_B = \frac{dW_B}{dV} = \frac{1}{2}\mathrm{H.B} \quad ,\mathrm{but} \quad \mathrm{B} = \mu\mathrm{H} \quad \mathrm{then:} \quad W_B = \frac{1}{2}\mu\mathrm{H}^2$$

وهذه المعادلة تخص الاوساط المادية ذات الخواص الخطية المتساوية الخواص في كل الاتجاهات . وفي الفراغ :

$$W_B = \frac{1}{2}\mu_o \mathrm{H}^2$$

(7 – 12) تعميم قانون امبير وتيار الازاحة :-

Generalization of Amperes law and Displacement current

من قانون امبير:

$$\nabla \mathrm{XH} = \mathrm{J} \quad \mathrm{and} \quad \nabla.\nabla\mathrm{XH} = \nabla.\mathrm{J},$$

ولكن تباعد التفاف اي قيمة= صفر $\quad \therefore \quad \nabla.\nabla XH = 0\,, \quad \nabla.J = 0 \ldots\ldots.(1)$

ولكن من معادلة الاستمرارية :-

$$\nabla.\mathrm{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \ldots\ldots.(2)$$

ونتيجة لهذا التناقض او الاختلاف بين المعادلتين (1) و(2) اضاف ماكسويل تيار اخر هو تيار الازاحة والذي يعطى بالمعادلة :

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_o \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\therefore\ \nabla.\nabla xH = \nabla.J + \nabla.J_d$$

$$\therefore \nabla XH = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

وهي احدى معادلات ماكسويل ، ان ادخال الحد الثاني من الطرف الايمن يطلق عليه تيار الازاحة يمثل احدى الاضافات التي اضافها ماكسويل للنظرية الكهرومغناطيسية . اي ان المجال المغناطيسي لاينشأ عن وجود تيار التوصيل الاعتيادي وانما ينشأ عن وجود مجال كهربائي متغير كما هو الحال في تغير المجال الكهربائي بين لوحي متسعة في حالة شحنها او تفريغها .

(7 – 13) معادلات ماكسويل : *Maxwell Equations*

من المعلوم ان مجال مغناطيسي متغير يولد ق . د . ك محتثة او مايسمى بالحث الكهرومغناطيسي وان تغير المجال الكهربائي يولد مجال مغناطيسي ، ومن هذه المبادئ تمكن ماكسويل من وضع فروض نظريته ومعادلات هي خلاصة الدراسات التي قام بها كاوس وفاراداي وامبير والتي تعد من الانجازات العلمية الكبيرة لكونه الاساس الذي تعمل بموجبه الاجهزة الكهرومغناطيسية مثل المحركات واجهزة البث والحاسبات

1- عندما تكون المجالات متغيرة مع الزمن اي ان : *E=E(t) ,B=B(t)* تكون معادلات ماكسويل كالاتي :

الصيغة التكاملية	الصيغة التفاضلية
$\oint H.d\ell = \oint_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right).ds$	1) $\nabla XH = J + \frac{\partial D}{\partial t}$
$\oint E.d\ell = \oint_S -(\frac{\partial B}{\partial t}).dS$	2) $\nabla XE = -\frac{\partial B}{\partial t}$
$\int_S D.dS = \int_V \rho dV$	3) $\nabla.D = \rho$
$\oint_S B.dS = 0$	4) $\nabla.\mathrm{B} = 0$

المعادلة الاولى تمثل قانون امبير والمعادلة الثانية تعبر عن قانون فاراداي والمعادلة الثالثة تمثل قانون كاوس والمعادلة الرابعة هي تعبير عن عدم وجود قطب مغناطيسي واحد .

اما في حالة كون المجالات ثابتة وغير متغيرة مع الزمن مثل $\mathrm{E} \neq \mathrm{E(t)}\ ,\ B \neq B(t)$ فان المعادلات رقم (1) و (2) ستصبح :

$$\nabla XH = 0 \quad and\ \nabla XE = 0$$

2- معادلات ماكسويل في الفراغ حيث $J = 0$, $\rho = 0$ تعطى بالشكل الاتي:

الصيغة التكاملية	الصيغة التفاضلية
$\oint H.d\ell = \oint_S \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right).ds$	$1)\ \nabla X H = \frac{\partial D}{\partial t}$
$\oint E.d\ell = \oint_S -(\frac{\partial B}{\partial t}).dS$	$2)\ \nabla X E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
$\int_S D.dS = 0$	$3)\ \nabla.D = 0$
$\oint_S B.dS = 0$	$4)\ \nabla.B = 0$

(7 – 14) الموجة الكهرو مغناطيسية : *Electromagnetic Wave*

تعتمد نظرية ماكسويل على مبدئين اساسيين :

1- **المجال الكهربائي المتغير مع الزمن في الفضاء ينتج مجال مغناطيسي عمودي عليه ومتفق معه في الطور.**
2- **المجال المغناطيسي المتغير مع الزمن في الفضاء ينتج مجال كهربائي يكون ايضا عمودي عليه وبنفس الطور.**

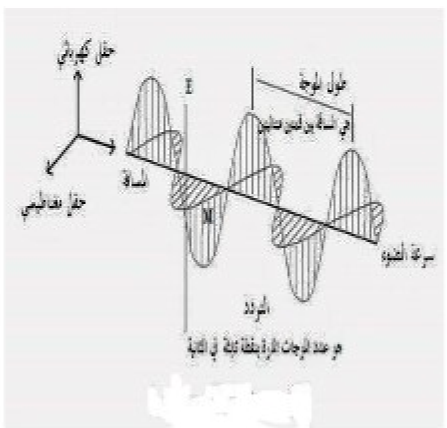
وبناء على هذين المبدأين فان المجالين الكهربائي والمغناطيسي ينتشران في الفضاء من نقطة الى اخرى وهما متلائمان ومتفقان بالطور وعموديان على خط انتشارهما مكونان مايسمى بالموجة الكهرومغناطيسية . كما توصل ماكسويل الى ان سرعة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ تساوي سرعة انتشار الضوء ($3x10^8 m/sec$) ، كما تتوزع طاقة الموجة الكهرومغناطيسية المنتشرة في الفراغ بصورة متساوية بين المجالين الكهربائي والمغناطيسي. اما في الاوساط المادية فسرعة انتقال الموجة الكهرومغناطيسية تعتمد على الخواص الكهربائية والمغناطيسية لذلك الوسط.

$$E = \hat{i}E_o e^{i(\omega t+kz)} \quad (x - direction)$$

$$H = \hat{j}H_o e^{i(\omega t+kz)} \quad (y - direction)$$

وعليه يكون انتشار الموجة باتجاه $-z$.

ومن اهم تطبيقات معادلات ماكسويل هو استخدامها في اشتقاق معادلة الموجة



اشتقاق معادلة الموجة العامة :-

اولا : بدلالة المجال الكهربائي (E) :-

$$\nabla X\mathrm{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}$$

بأخذ الالتفاف للطرفين :

$$\nabla X\nabla XE = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla XB = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla XH$$

من المتطابقة (حفظ) $\nabla X\nabla X\mathrm{E} == \nabla(\nabla.E) - \nabla^2 E$

$$as:\ \ \nabla XH = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\therefore\ \ \nabla.(\nabla.\mathrm{E}) - \nabla^2 E = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right)$$

$$but:\ \ J = gE,\ \ and\ \ D = \in E$$

$$\nabla.(\nabla.E) - \nabla^2 E = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(gE + \in\frac{\partial E}{\partial t}\right) = -\mu g\frac{\partial E}{\partial t} - \mu\in\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

وعند تطبيق هذه المعادلة على فضاء شحنته طليقة حرة بحيث $\nabla.D = 0$ نحصل على فضاء خالي من الشحنات $\nabla.\mathrm{E} = \frac{\rho}{\in_o} = 0,$

$$\rho = 0$$

$$-\nabla^2 E = -\mu g\frac{\partial E}{\partial t} - \mu\in\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E - \mu g\frac{\partial E}{\partial t} - \mu\in\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

اشتقاق معادلة الموجة فى الفراغ :-

$$\nabla X\mathrm{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}$$

بأخذ الالتفاف للطرفين :

$$\nabla X\nabla XE = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla XB = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla XH$$

من المتطابقة (حفظ) $\nabla X\nabla X\mathrm{E} == \nabla(\nabla.E) - \nabla^2 E$

$$as:\ \ \nabla XB = \mu_o\frac{\partial D}{\partial t} = \mu_o\in_o\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\therefore \quad \nabla X \nabla X \mathrm{E} - \nabla^2 E = -\mu_o \in_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad , \quad but: \ \nabla . E = 0$$

$$\nabla^2 E = \mu_o \in_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\therefore \ \nabla^2 E - \mu_o \in_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

وهي معادلة الموجة التفاضلية في الفراغ.

$$also: \quad \nabla^2 B = \mu_o \in_o \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}, \quad and \quad \frac{1}{C^2} = \mu_o \in_o \quad therfore \ \ \nabla^2 E = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

مثلا اذا اعطي لك المجال بدلالة العلاقة :-

$$E(r,t) = E_o e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_o e^{-i\omega t}(-i\omega) = -i\omega E, \quad and \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t} = E_o e^{-i\omega t}(i\omega)^2 = -\omega^2 E$$

وعليه تصبح المعادلة العامة :- بعد تعويض الاشتقاقات اعلاه في المعادلة العامة.

$$\nabla^2 E - g\mu \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \in \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad therore \quad (\nabla^2 E_o + ig\mu\omega E_o + \omega^2 \in \mu E_o)e^{-i\omega t} = 0$$

$$\therefore \ \ (\nabla^2 E_o + ig\mu\omega E_o + \omega^2 \in \mu E_o) = 0$$

مثال/ اذا كان المجال الكهربائي معطى بالعلاقة الاتية : $E = E_S e^{+i\omega t}$ باتجاه محور – z اوجد معادلة الموجة في الفراغ.

الحل / من معادلة الموجة في الفراغ بدلالة المجال الكهربائي: $\nabla^2 E = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E_s e^{i\omega t}, \quad and \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_s e^{i\omega t}$$

$$\therefore \ \frac{d^2 E}{dz^2} = \frac{-\omega^2}{C^2} E_s e^{i\omega t}$$

(7 – 15) خواص الموجة الكهرومغناطيسية : *The Properties Of Electromagnetic Wave*

1- تنتقل الموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ بسرعة الضوءاما في الاوساط المادية فتعتمد على الخواص الكهربائية والمغناطيسية لذلك الوسط.
2- المجالان الكهربائي والمغناطيسي يتذبذبان بطور واحد وبصورة عمودية على بعضهما في الفضاء وعموديان على خط انتشارهما.
3- طاقة الموجة الكهرومغناطيسية تتوزع بين المجالين الكهربائي والكهرومغناطيسي بصورة متساوية.
4- عند اصطدامهما بمادة قد تتحول الى طاقة (حرارية ، كهربائية او ميكانيكية .... الخ)
5- للطاقة مظاهر متعددة (ضوئية ، حرارية ، وهذا ناتج عن اختلافها بالتردد او الطول الموجي)

ان مدى اطوالها يمتد من الموجات ذات الاطوال الموجية الاطول (الموجات الراديوية) الى الموجات ذات الطول الموجي الاقصر (موجات كاما) .

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
الموجات الراديوية	الموجات المايكروية	الاشعة تحت الحمراء(*IR*)		الضوء المرئي *visible light*	الاشعة فوق البنفسجية (*UV*)	الاشعة السينية *X-Ray*
اشعة كاما $\gamma - ray$						

س / اثبت ان تباعد متجه كثافة الفيض المغناطيسي يساوي صفر ($\nabla . \mathrm{B} = 0$)، او هل للمغناطيس قطب واحد ؟ اثبت ذلك رياضيا .

الحل /

$$B(r_2) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{J(r_1)X(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} dV_1$$

بأخذ التباعد للطرفين :

$$\nabla . \mathrm{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \nabla . \left[\frac{J(r_1)X(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\right] dV_1$$

حسب الفرضية:

$$\nabla . (\mathrm{AXB}) = \mathrm{B} . \nabla \mathrm{XA} - \mathrm{A} . \nabla \mathrm{XB}, \ \ \mathrm{as}: \vec{J}(\mathrm{r}) = \mathrm{A} \ \ \mathrm{and} \ \ \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \mathrm{B}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{J}(r_1) X \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} . \vec{\nabla} X \vec{J}(r_1) - \vec{J}(r_1) . \vec{\nabla} X \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

ولكن$\vec{\nabla} X \vec{J}(r_1) = 0$ لان ∇ توخذ الى r_2 وليس الى r_1 اذن ثابتة ومشتقة الثابت صفر وكذلك :-

$$\vec{\nabla} X \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = 0 \quad as \ we \ proved \ befor \ that \ \nabla X \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0$$

تم اثباته في الفصل الاول اذن :-

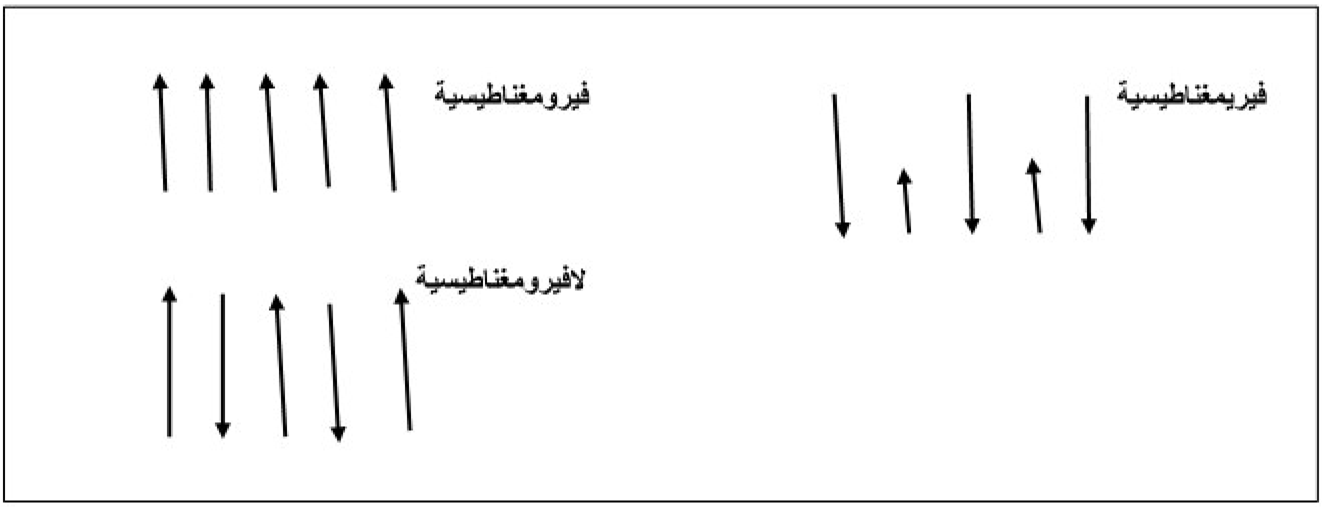
$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

هذايعني انه لايوجد مصدر منفرد للمغناطيسية ، اي عدم وجود قطب شمالي منفرد او جنوبي ، فاذا وجد احدهما وجد الاخر ذاتيا.

(8 – 8) الفيرايت : Ferrites

وفقا للنظرية الفيرومغناطيسية لهايزنبرك هناك تغير في الطاقة الكهروستاتيكية مرافقة للتغير الذي يحدث في البرم من وضع تراصف التوازي الى وضع التراصف المعاكس للتوازي للذرات المجاورة . فأذا كان هذا التغير في الطاقة لصالح تراصف التوازي وفي الوقت نفسه ذا مقدار محسوس فان المادة المكونة لهذه الذرات تكون فيرومغناطيسية . اما اذا كان التغير في الطاقة في صالح التراصف المعاكس للتوازي فانه لايزال بامكاننا ايجاد تركيب برمي مرتب ولكن بصورة برم متناوب من ذرة الى اخرى خلال البلورة . يطلق على تركيب برمي مرتب وذو عزم مغناطيسي صافي يساوي صفر بلافيرومغناطيسي (ضديد الفيرومغناطيسية **antiferromagnetic**) . والتركيب البرمي الذي يحتوي على كلا المركبتين (برم اعلى) و (برم اسفل) ولكن صافي العزم المغناطيسي لايساوي صفر يسمى فيريمغناطيسية او للسهولة فيرايت. ومن هذه المواد الفيرايتية هي الاكاسيد مثل $\mathbf{MoFe_2O_4}$ او معادن اكاسيد الحديد الاسود ، ولهذه المواد الفيرايتية اهمية كبيرة في مجال التطبيقات التكنولوجية بسبب كونها ضعيفة التوصيل للكهربائية اضافة الى كونها ذات ذات تمغنط اشباع كبير نسبيا لذا فيمكن استخدامها في تطبيقات التردد العالي حيث يكون لفقدان الطاقة الناتج عن التيارات الدوامة (*eddy current*) في المواد الموصلة مشاكل خطيرة .

وتقع المقاومة النوعية لمواد الفيرايت ضمن المدى $\mathbf{1 \rightarrow 10000}\ ohm.m$ وللمقارنة فان المقاومة النوعية للحديد تساوي $\mathbf{10^{-7}}$
اوم –متر تقريباً.



$$H = \frac{1}{4\pi}\int \frac{JX(r-\acute{r})}{|r-\acute{r}|^3} d\acute{V} + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_m(r-\acute{r})}{|r-\acute{r}|^3} d\acute{V} + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\sigma_m(r-\acute{r})}{|r-\acute{r}|^3} d\acute{a}$$

لذا يمكننا ايجاد المجال الجزيئي H_m بطريقة مماثلة ماعدا هناك اسهامات اضافية ناتجة عن سطح التجويف وعن ثنائيات القطب المنفردة في التجويف . نلاحظ انه لايشمل التكامل $\frac{\rho_m(r-\acute{r})}{|r-\acute{r}|^3}$ حول التجويف لأن :

$$\rho_m = -div\, M = 0$$

في عينة منتظمة التمغنط. وبهذا فإن :

$$H_m = H + H_S + \acute{H} \ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث : H: شدة المجال المغناطيسي العيني في النموذج . H_S :- الاسهام الناتج عن كثافة القطب السطحية $\sigma_M = M_n$ على سطح التجويف . $\acute{H}$: الاسهام الناتج عن ثنائيات القطب المختلفة داخل التجويف . وهذا يعني ان H_S يكتب بالصيغة التالية:

$$H_S = \frac{1}{3}M \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

كذلك فإن اسهام ثنائي القطب يكون :

$$\acute{H} = \frac{1}{4\pi}\sum_i \left[\frac{3(m_i.r_i)r_i}{r_i^5} - \frac{m_i}{r_i^3}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

حيث r_i المسافة من ثنائي القطب (i) الى مركز التجويف وهذه المعادلة مشابهة الى صيغة الحد المناظر لثنائي القطب الكهربائي $\acute{E}$.

فأذا حصرنا اهتمامنا بصنف كبير من المواد التي تمتاز بأن تتلاشى فيها المعادلة (3) فان المعادلة (1) تختزل الى الاتي:

$$H_m = H + \frac{1}{3}M \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$B_m = \mu_o H_m \ldots\ldots\ldots (5)$$

والمعادلتان (4) و (5) تمثل المجال الجزيئي بدلالة الشدة المغناطيسية العينيةوالتمغنط . لمعظم المواد البارا والدايا مغناطيسية يكون الحد

$$\frac{1}{3}M = \frac{1}{3}\chi_m H$$

صغيرا ومهملا في حين للمواد الفيرومغناطيسية يكون مهما للغاية.

(8 – 4) منشأ الدايا مغناطيسية : *Origin Of Diamagnetism*

الدايامغناطيسية ظاهرة ناتجة عن تطبيق قانون لنز على النطاق الذري فعند تسليط المجال المغناطيسي تحور التيارات الالكترونية في كل ذرة بطريقة بحيث انها تحاول ان تضعف تأثير هذا المجال . ولحساب قابلية التمغنط الدايامغناطيسية لمجموعة ذرات ينبغي معرفة بعض الشئ عن الحركة الالكترونية في الذرة نفسها . لنفرض ان الكترون يدور في مدار ما حول النواة الذرية ، لنأخذ مدارا دائريا نصف قطره R

في مستوي عمودي على المجال المغناطيسي المؤثر ، وحسب الميكانيك الكمي فإن الالكترونات لاتدور حول النواة بمدارات معرفة بدقة لذا وبعد حل معادلة شرودنجر لالكترون ذري في مجال مغناطيسي سنحصل على القيمة التقريبية لحساب قابلية التمغنط

للمواد الدايامغناطيسية . قبل تسليط مجال الحث المغناطيسي ،فإن الالكترون يكون في حالة مستقرة في مداره .

$$F_q = m_e \omega_o^2 R_i \ldots\ldots\ldots (6)$$

حيث ان : F_q تمثل القوة الكهربائية التي تبقي الالكترون في ذرته . ω_o : تمثل التردد الزاوي في مداره . m_e : كتلة الالكترون .

فعندتسليط مجال مغناطيسي تنشأ قوة اضافية مؤثرة على الالكترون قدرها ($-qvXB_m$) وعلى فرض بقاء الالكترون بالمدار نفسه نجد ان :

$$F_q \mp q\omega R_o B_m = m_e \omega^2 R$$

وعند دمجها مع معادلة (6) :

$$\mp q\omega B_m R = R m_e(\omega^2 - \omega_o^2)$$
$$\mp q\omega B_m = m_e(\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) \dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

حيث : $\Delta\omega = \omega - \omega_o$ تمثل التغير في التردد الزاوي للالكترون .

لذا فإن الالكترون إما يتسارع او يتباطأ في مداره معتمدا على التفاصيل الهندسية (اي معتمداً على اتجاه ∇XB_m بالنسبة الى F_q) . ولكن في كلتا الحالتين ووفقا لقانون لنز نجد ان التغير في العزم المغناطيسي المداري يكون في اتجاه مضاد للمجال المؤثر ، لذا فعند المجالات الكبيرة فأن $\Delta\omega$ تكون صغيرة جدا بالنسبة الى ω_o لذا يمكن تقريب معادلة (7) الى الصيغة الاتية :-

$$\Delta\omega = \mp \frac{q}{2m_e} B_m \dots\dots\dots\dots (8)$$

ويسمى بتردد لارمور Larimore Frequency.

افترضنا لحد الان بقاء الالكترون في المدار نفسه ، كما استخدمنا هذه الفرضية بالاضافة الى توازن القوى لأشتقاق معادلة (8) ولبقاء الالكترون في مداره فأن التغير في طاقته الحركية طبقا لقانون فاراداي للحث يجب ان يكون مطابقا للمعادلة (8) .

وعند بدء تأثير المجال المغناطيسي يصبح هناك تغير في الفيض خلال المدار والذي يطى بالكمية ($\pi R^2 \Delta B_m$) وهذا الفيض يكون مرتبطا بدورات الالكترون والتي قدرها Δn حيث انها تمثل عدد الدورات التي يعملها الالكترون خلال فترة تغير المجال . هذا التغير في الفيض يولد قوة دافعة كهربائية تمثل بالعلاقة الاتية :-

$$\varepsilon = \pi R^2 \frac{dB_m}{dt} \Delta n = \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \dots\dots\dots (9)$$

اما الطاقة المعطاة للالكترون في هذه العملية فتكون ε_e وتظهر كتغير في الطاقة الحركية قدره :-

$$\frac{1}{2} m_e R^2(\omega^2 - \omega_o^2) = e\pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \dots\dots\dots (10)$$

حيث :ΔB_m يمثل القيمة النهائية للمجالB_m ومعدل قيمة dn/dt تساوي :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(\omega + \omega_o)}{4\pi}$$

وبهذا تكون :-

$$\frac{1}{2} m_e R^2(\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) = e\pi R^2 \frac{(\omega + \omega_o)}{4\pi} B_m$$

$$\therefore\ \Delta\omega = (\omega - \omega_o) = \frac{e}{2m_e} B_m$$

متفقة مع المعادلة (8) اي ان فرضية المدار الثابت لاتقود الى تناقض للمعادلة (9) ومعادلة القوة . وبسبب التغير في السرعة الزاوية المتوقع من المعادلة من معادلة (8) تغيرا في عزم مغناطيسي قدره:

$$\Delta m = -\frac{e}{2\pi} \pi R^2 \frac{e}{2m_e} B_m = -\frac{e^2}{4m_e} R^2 \mu_o H_m \dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

حيث : $B_m = \mu_o H_m$ ولايجاد التمغنط لابد من جمع هذه النتيجة لكافة الالكترونات في وحدة الحجم N على اعتبار أن الجزيئات من صنف واحد .

$$M = -\frac{Ne^2}{4m_e}\mu_o H_m \sum_i R_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

حيث يغطي الجمع كافة الالكترونات الموجودة في الجزيئة الواحدة.
واما المواد الدايامغناطيسية فإننا نجد ان H_m يختلف جزئيا عن H . لذا فإن قابلية التمغنط للدايامغناطيسية هي :

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_o}{4m_e}\sum R_i^2$$

حيث : $\chi_m = \frac{M}{H_m}$

تم الحصول على هذه النتيجة على فرض ان كافة الالكترونات تدور في مستويات عمودية على المجال H_m . وعند ميلان المدار بحيث ان العمود على المدار يصنع زاوية قدرها θ_i مع المجال . فان مركبة H_m على طول هذا العمود ($H_m cos\theta_i$) تكون فعالة في تغيير السرعة الزاوية للالكترون بالاضافة الى ذلك فأن مركبة Δm الموازية للمجال تكون اصغر بمعامل قدره $cos\theta_i$ اي افضل قيمة لقابلية التمغنط الدايامغناطيسية التقريبية تعطى بالعلاقة :

$$\chi_m = -\frac{N\mu_o e^2}{4m_e}\sum_i R_i^2 cos^2\theta \ldots\ldots\ldots(13)$$

من المفروض ان تظهر الدايامغناطيسية في كافة المواد ولكن يحجب تأثيرها اعتياديا نتيجة للسلوكين البارا والفيرومغناطيسية اللذان يمكن ان يحثا انياً في المادة . ويتفوقان على سلوك الدايامغناطيسية . يكون سلوك الدايامغناطسية هو المتغلب في مواد متكونة كليا من ذرات او ايونات ذات قشرات الكترونية مغلقة حيث تتعادل كافة المساهمات البارامغناطيسية ويزول تأثيرها في مثل هذه المواد.

(8 – 5) منشأ البارامغناطيسية : *Origin of Para magnetism*

يمكن وصف الحركة المدارية لأي الكترون في ذرة أو جزيئة بدلالة العزم المغناطيسي وكذلك فمن المعروف ان الالكترون يمتلك خاصية ذاتية يطلق عليها خاصية البرم كما يمتلك عزما مغناطيسيا ذاتيا مرافقا لشحنته التي تكون في حالة حركة مغزلية (*spin*) . لذا فإن لكل جزيئة عزم مغناطيسي مقداره m_i والذي يمثل الجمع الاتجاهي للعزوم المدارية والبرمية الناشئة عن الالكترونات المختلفة في الجزيئة .
وبإختصار فان البارامغناطيسية تنتج عن ميل هذه العزوم الجزيئية للتراصف مع المجال المؤثر كما هي الحالة في دائرة التيار الكهربائي التي تميل الى تراصف نفسها مع المجال وهذه الحالة ليست ببساطة التيار ووضوحه في دائرة كهربائية والحقيقة ان هناك تعقيدين هما :-
<u>اولا</u> :- في حالة وجود مجال مغناطيسي
<u>ثانيا</u> :- ان الحركة الالكترونية داخل الذرة التي تؤدي الى تكوين m_i تولد ايضا زخما زاويا حول الذرة والحقيقة ان m_i ترتبط بعلاقة خطية مع هذا الزخم الزاوي.
تحت هذه الشروط فأن العزم المغناطيسي سوف لايعمل على تراصف عزم ثنائي القطب m_i مع المجال مباشرة ولكن سيؤدي الى طوافها *Precis's* حول المجال وبميل ثابت . وتكون الذرات او الجزيئات في منظومتنا المادية في حالة تلامس حراري فيما بينها وتكون الذرات في الغاز او السائل في حالة تصادم مع بعضها البعض باستمرار في حين تخضع الذرات في المواد الصلبة لتذبذب حراري وتحت هذه الظروف تتمكن m_i من استبدال الطاقة المغناطيسية بالطاقة الحرارية ومن الانتقال من حالة الى حالة اخرى ذات طابع مختلف وتحاول طاقة المنظومة الحرارية ان تؤثر بطريقة معينة بحيث ينتج عنها اتجاه عشوائي لـ m_i الا ان اتجاهات m_i التي تكون باتجاه المجال او بالاتجاه القريب من ذلك

تمتلك طاقة مغناطيسية اقل وبهذا فان تلك الاتجاهات تصبح متغلبة . هذه الحالة تشبه تماما حالة الجزيئات القطبية الموضوعة في مجال كهربائي .
ولمادة متجانسة من نوع جزيئي واحد حيث تمتلك كل جزيئة عزما مغناطيسية قدره m_o يعطى الاتجاه بصورة تقريبية بواسطة
دالة لانجفن :-

$$\langle m_o cos\theta \rangle = m_o \left[cothy - \frac{1}{y} \right]$$

حيث:

$$y = \frac{m_o \mu_o H_m}{KT} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

ويعطى التمغنط بالعلاقة الاتية :

$$|M| = Nm_o \left[cothy - \frac{1}{y} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (15a)$$

حيث تمثل N عدد الجزيئات لوحدة الحجم .
يمكننا تقريب دالة لانجفن لتشمل الحد الاول من متسلسلتها الأسية اذا تم استثناء درجات الحرارة القريبة من الصفر المطلق وبهذا :

$$M = \frac{Nm_o^2}{3KT} \mu_o H_m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15b)$$

والتي تؤول الى الصيغة الاتية لقابلية التمغنط المغناطيسية .

$$\chi_m = \frac{Nm_o^2 \mu_o}{3KT} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

ووفقا للنظرية الذرية ،فان قيمة m_o تكون بحدود بضعة مغنيتون بور ***Bohr magneton*** (***1Bohr magneton***$=\frac{eh}{4\pi m_e}$، h هو ثابت بلانك). باختصار ولمعرفة سلوكية البارامغناطيسية فأن ذرات او جزيئات المنظومة ينبغي ان تمتلك عزوما مغناطيسية دائمة تميل الى التراصف مع اتجاه المجال المؤثر . كذلك فان العزوم المغناطيسية المختلفة تكون غير مزدوجة اي انها تقوم بالطواف حول المجال المغناطيسي كوحدات منفردة (وليس كمجموعة منسجمة) ولكنها قادرة على تبادل الطاقة بسبب التماس الحراريمع محيطها باستثناء الدرجات الحرارية القريبة من الصفر المطلق وتأثير المجالات الانية الكبيرة فأن التمغنط يكون فيها اقل بكثير من متجه التشبع المغناطيسي التي يمكن الحصول عليها عند تراصف كافة عزوم ثنائيات القطب .

(8 – 6) النظرية الفيرومغناطيسية : *Theory of Ferromagnetism*

في المواد الفيرومغناطيسية تكون العزوم المغناطيسية الذرية او الجزيئية متراصفة تقريبا حتى في حالة غياب المجال المؤثر ويؤدي هذا التراصف الى نشوء المجال الجزيني H_m الذي لايتلاشى بغياب المجال الخارجي $H=0$ مالم تتلاشى M انياً ويعمل التمغنط على انشاء مجال جزيني ولكن مالم يولد هذا المجال الجزيني نفس مقدار التمغنط M الذي يفترض وجوده في المادة فان الحل يكون متناقضا وان المشكلة هي تعيين الظروف التي تجعل التمغنط قادرا على دعم نفسه بواسطة المجال الجزيئي .

$$H_m = H + \gamma M \quad , \quad if \;\; H = 0 \; then \quad H_m = \gamma M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16a)$$

ووفقا للنظرية فان : $H_S = \frac{1}{3} M$ وهذا يعني ان $\gamma = \frac{1}{3}$ فاذا كان جمع حدود المعادلة (3) لايساوي صفر فان قيمة γ قد لاتساوي $\frac{1}{3}$ ومع ذلك فاننا نتوقع ان تكون قيمتها (γ) كذلك . اذا اخذنا مادة متجانسة من نوع واحد من

الذرات (نوع ذري واحد) حيث تمتلك كل ذرة عزما مغناطيسيا قدره m_o وان عدد الذرات لوحدة الحجم N فاذا كانت العزوم الذرية متراصفة تقريباً فان M يجب ان تمثل جزءاً كبيراً من Nm_o اي دعنا نأخذ :

$$M > 0.7\, Nm_o \dots\dots\dots\dots (17)$$

وحسب المعادلة ($15a$) ينتج :-

$$\left[cothy - \frac{1}{y}\right] > 0.7 \qquad or\ y = 3$$

كما هو معروف بالمعادلة (14) فان :

$$y = \frac{m_o \mu_o H_m}{KT} > 3$$

وبدمج المعادلتين ($16a$) مع (17) نحصل على :-

$$0.7 \frac{\gamma N \mu_o m_o^2}{KT} > 3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (18)$$

وهذا هو الشرط التقريبي لحدوث الفيرومغناطيسية . لذا تتطلب المعادلة (18) بان تكون قيمة γ حوالى 10^3 والتي تكون اكبر بكثير مما يمكن اخذه بالحسبان في الاشتقاق المقدم لذا يظهر ان منشأ الفيرومغناطيسية يكون معقدا بشكل كبير اكثر من الحالة المناظرة في الفيروكهربائية. يعتبر بييرويس اول من ادرك الدور الاساس الذي يؤديه المجال الجزيني ولم يستطع توضيح قيمة γ الكبيرة ولكنه اقرها كحقيقة حيث وجد ان نظرية ويس *Weiss* قريبة من التطابق مع التجارب ومن ثم اتى هايزنبرك بعده وقام بتوضيح القيمة الكبيرة لـ γ حيث اوضح مايلي :-

اولا :- أن العزوم البرمية المغناطيسية تسهم في انشاء المجال الجزيئي فقط .

ثانيا :- ان المجال ينشأ اساسا من قوى كهروستاتيكية .

كما بين هايزنبرك ان المجال ينشا على اساس الميكانيك الكمي بأنه متى ماتغير برم الذرات من تراصف متواز الى تراصف معاكس للتوازي فانه ينبغي ان يكون هناك تغير آني في التوزيع الشحني الالكتروني في الذرات ، وهذا بدوره يغير من طاقة المنظومة الكهروستاتيكية وفي بعض الحالات يكون باتجاه تراصف التوازي (الفيرومغناطيسية) وعندها يمكن دراسة الطاقة التي تعتمد على طريقة ترتيب برم المنظومة بدلالة القوة او العزم الذي ينشأ على احدى الذرات عند تغيير الترتيب.

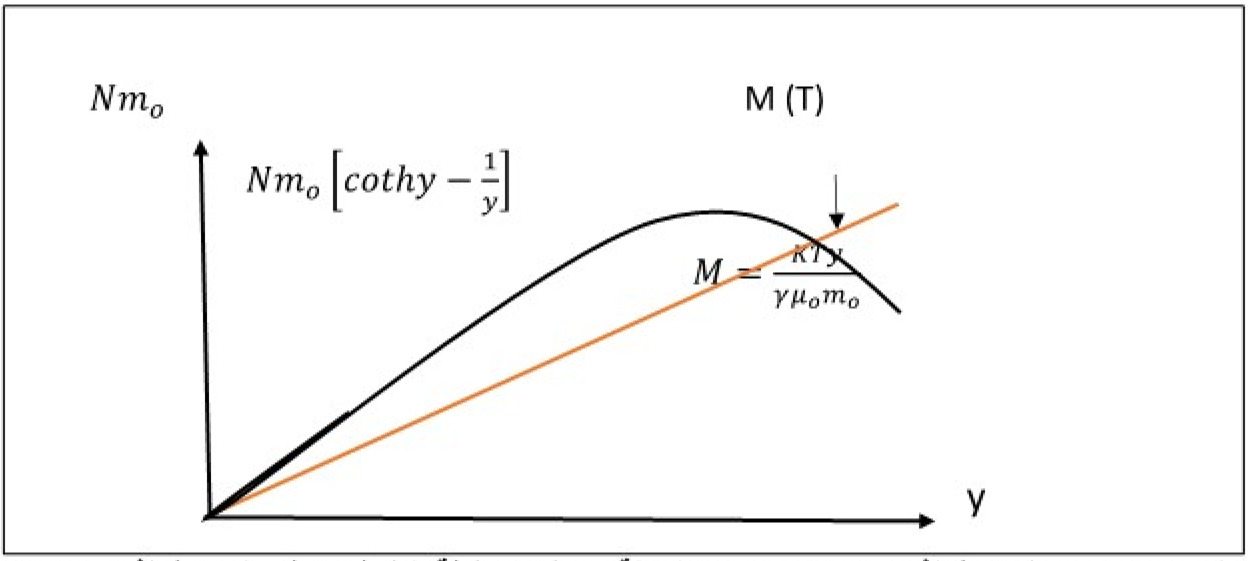
يمكن استخدام نظرية ويس – هايزنبرك *Weiss-Heisenberg* للتنبؤ بالطريقة التي يتغير بها تمغنط الفيرو مع درجة الحرارة حيث تصور هذه النظرية حالة الفيرو كحالة نهائية للبارا في مجال كبير الى حد ما ولكن هذا المجال ينشأ عن التمغنط نفسه .

وبدمج المعادلات ($16a$) و (14) و(15) ينتج :

$$M = Nm_o \left[cothy - \frac{1}{y}\right] \dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

$$M = \frac{KTy}{\gamma \mu_o m_o} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

ويمكن ايجاد التمغنط الذاتي (التمغنط عندما يكون المجال الخارجي يساوي صفرا) لدرجة حرارة معينة من الحل الاني للمعادلتين (19) و (20) وذلك برسم M كدالة الى y كما موضح ادناه :

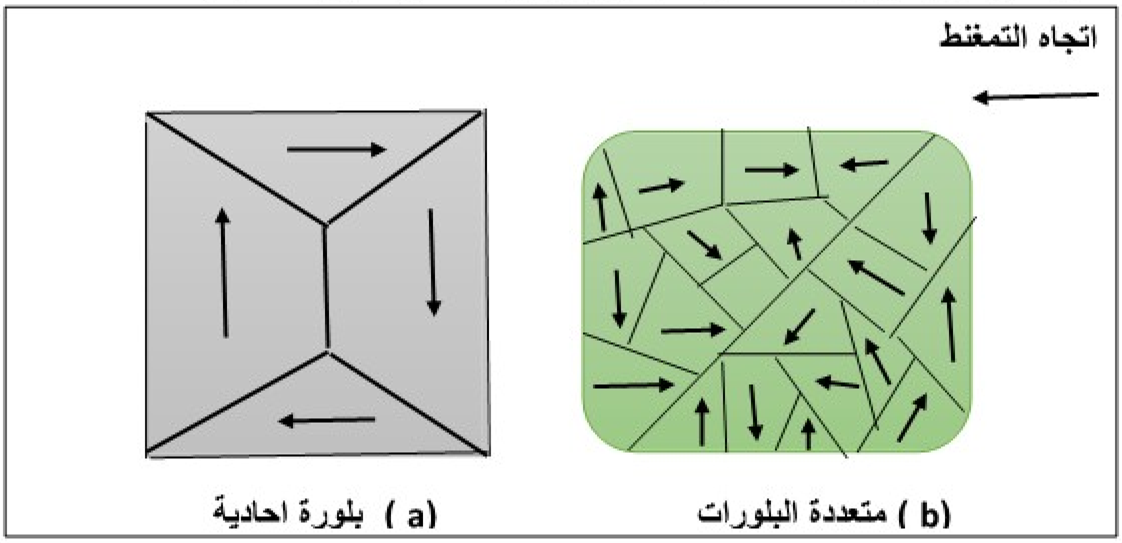


الشكل يوضح ايجاد التمغنط الذاتي **M(T)** بمساعدة دالة لانجفن ونقطة التقاطع تعطي التمغنط الذاتي **M(T)** .

كلما زادت درجة الحرارة فان المنحني الخطي الممثل بالمعادلة (20) يصبح اكثر انحدارا حين لاتتغير المعادلة (19) بتغير درجة الحرارة ، ولهذا فان نقطة التقاطع سوف تتحرك نحو يسار الشكل ونحصل على قيمة اصغر للتمغنط الذاتي الى ان تصل درجة الحرارة تكون فيها المعادلة (20) في تماس مع المعادلة (19) عند نقطة الاصل. عند هذه الدرجة والدرجات الحرارية الاعلى منها يكون التمغنط الذاتي مساويا للصفر ويطلق على هذه الدرجة بدرجة حرارة كيوري Curie temperature (T_C) وعند درجات حرارة اعلى منها يتلاشى التمغنط وتصبح المادة ذات سلوكية بارامغناطيسية اعتيادية .

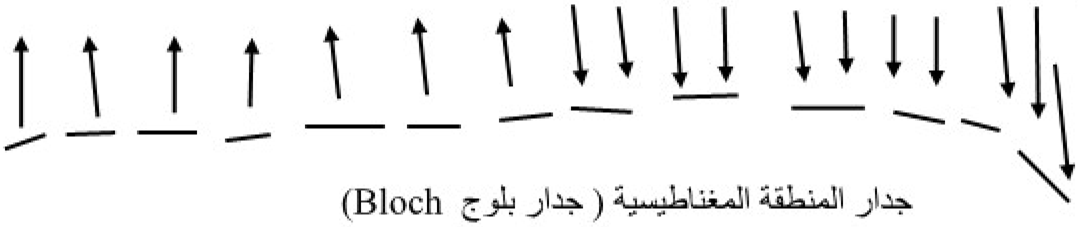
(8 – 7) المناطق الفيرومغناطيسية : *Ferromagnetic Domains*

ينبغي على عينة فيرومغناطيسية ان تتمغنط بدرجة قريبة من حالة الاشباع عن درجات حرارة اوطأ من درجة حرارة كيوري (بغض النظر عن الماضي المغناطيسي للعينة) وهذا مغاير للملاحظات التجريبية فمثلا يمكن ايجاد قطعة من الحديد في حالة ممغنطة او غير ممغنطة . والجواب لهذه الظاهرة التي تبدو متناقضة هو ان المواد الفيرومغناطيسية تتكون من مناطق مغناطيسية كل منطقة تكون ممغنطة بالكامل ومنسجمة مع النتائج السابقة ولكن يمكن للمناطق المغناطيسية المختلفة ان تكون بأتجاهات عشوائية متباينة كما في الشكل ادناه وبهذا تظهر على هيئة غير ممغنطة ومن وجهة النظر العينية وان ويس Weiss اول من فرض وجود المناطق الفيرومغناطيسية.



يمثل الشكل تراكيب المواد الفيرومغناطيسية .

عند العبور من منطقة مغناطيسية الى اخرى مجاورة لها فان متجه العزم الذري m_o يدور تدريجيا من اتجاهه الاصلي الى الاتجاه الجديد على مدى 100 ذرة يطلق على هذه المنطقة الواقعة بي المنطقتين المغناطيسيتين اسم جدار المنطقة المغناطيسية والذي يظهر ان عزم البرم الذري في منطقة الجدار يقع تحت تأثير مجال جزيئي اقل بقليل مما يتعرض عزم البرم الذري داخل اصل المنطقة المغناطيسية .



جدار المنطقة المغناطيسية (جدار بلوج Bloch)

ومن جهة اخرى فان عينة متكونة من منطقة مغناطيسية واحدة تتطلب بقاء مجال مغناطيسي خارجي كبير على حين العينة المتكونة مناطق مغناطيسية متعددة الطاقة المغناطيسية ماحبة لتركيب مجالها اقل مما عليه في حالة المنطقة المنفردة لذا فالتركيب المتكون من مناطق مغناطيسية متعددة يكون هو المفضل من وجهة نظر الطاقة.

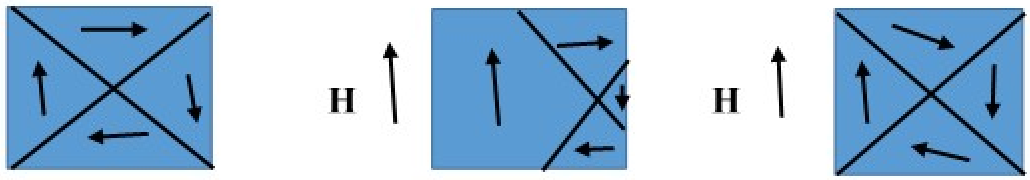
من مظاهر التمغنط العينية في المواد الفيرومغناطيسية هي :-

1- تكون متعلقة بتغيرات هيئة المنطقة المغناطيسية .

2- الزيادة في التمغنط الناتجة عن تاثير المجال المغناطيسي المؤثر يحدث بعمليتين مستقلتين هما:

اولا: بزيادة حجم المناطق المغناطيسية التي يكون اتجاهها متفقاً مع اتجاه المجال الخارجي على حساب المناطق المغناطيسية الاخرى التي لاتكون باتجاه المجال (حركة جدار المنطقة المغناطيسية).

ثانيا : دوران اتجاه تمغنط المنطقة المغناطيسية نحو اتجاه المجال .



غير ممغنطة — حركة جدار المنطقة — ممغنطة بدوران المنطقة

فعند تسليط مجالات ضعيفة يتغير التمغنط اعتياديا بطريقة حركة جدار المنطقة المغناطيسية . في المواد النقية تكون حركة الجدار والى مدى واسع قابلة للعكس عند منطقة المجال الضعيف ، وفي المجالات الاقوى ينمو التمغنط بفضل حركة الجدار الغير قابلة للعكس ، وبسبب دوران المناطق المغناطيسية تبقى المادة ممغنطة عند زوال المجال المغناطيسي الخارجة.

(8 – 1) الخواص المغناطيسية للمادة :- Magnetic Properties of Matter

تتكون المادة من ذرات وكل ذرة تحتوي على الكترونات في حالة متحركة وحركة كل الكترون مقيدة داخل الذرة التي تنتمي اليها . هذه الدوائر الكهربائية الناشئة عن حركة الالكترونات في الذرة تسمى بالتيارات الذرية . لذا سيكون هناك نوعان من التيارات الذرية :

1- تيار حقيقي يتكون من انتقال الشحنة بسبب حركة الالكترونات الطليقة والايونات المشحونة .
2- تيار ذري ناشئ من حركة دورانية بحتة لاتؤدي الى حدوث انتقال في الشحنة .

ومع ذلك نجد ان كلا من هذين النوعين من التيار يساهم في تكوين المجالات المغناطيسية .

(8 – 2) التمغنط : Magnetization

يعد كل تيار ذري بمثابة دائرة كهربائية صغيرة جدا ذات ابعاد ذرية ولهذا السبب قد يكون من الملائم وصفه كثنائي قطب مغناطيسي والحقيقة ان عزم ثنائي القطب المغناطيسي هو المقدار هو المقدار الذي يهمنا طالما ان مجال الحث المغناطيسي الناشئ عن ذرة منفردة عند نقاط بعيدة يحدد كليا بعزم ثنائي القطب المغناطيسي لها m . نفرض ان العزم المغناطيسي لذرة ما هو (m) اما M فهي كمية عينية متجهة ناتجة من جمع كل عزوم ثنائيات الاقطاب المغناطيسية الموجودة في عنصر صغير من الحجم ΔV جمعا اتجاهيا ومن ثم تقسيم ناتج الجمع على ΔV اي ان :-

$$M = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i m_i$$

وبمعنى اخر ان التمغنط يساوي عزوم ثنائي القطب لوحدة الحجم من المادة . ففي حالة ان تكون المادة غير ممغنطة فان ناتج كل الجمع $\sum_i m_i$ سيؤول الى الصفر نتيجة للاتجاهات العشوائية لعزوم ثنائيات القطب m_i ولكن بوجود مجال مغناطيسي خارجي ينشأ تمغنط M يعتمد على هذا المجال . اي الدالة M تعطي وصفا عينيا للتيارات الذرية داخل المادة اي انها تقيس عدد الدوائر الذرية لوحدة الحجم مضروبا بمتوسط العزم المغناطيسي لكل دائرة كهربائية.

مما سبق نلاحظ ان الصفات العينية للتمغنط اعطيت بدلالة الدالة M التي تصف الصفات المغناطيسية للمادة . وفي هذا الفصل سننظر الى الموضوع من وجهة نظر مجهرية *microscopic view of point* (اي مجموعة ذرات وجزيئات) وكيف تستجيب الجزيئات انفراديا لتأثير المجال المغناطيسي وبالتالي نصل الى صياغة نظرية لقابلية التمغنط للوسط المادي واستخراج علاقة بين $B - H$ لكافة انواع المواد وسنشير هنا بالرمز m اسفل B او H للاشارة الى كلمة مجهري اي تصبح B_m او H_m .

(8 – 3) المجال الجزيئي داخل المادة : Molecular field inside matter

يعد المجال المغناطيسي فعالا في تأثيره المتبادل مع التيارات الذرية في ذرة او وجزيئة يطلق عليه اسم المجال الجزيئي

$$B_m = \mu_o H_m$$

حيث : B_m : المجال المغناطيسي للجزيئة او الذرة .

H_m : شدة المجال المغناطيسي للذرة او الجزيئة .

ويسمى B_m احيانا بالمجال الموقعي وهو المجال المغناطيسي عند موقع جزيئي او ذري في المادة وينشأ عن مصادر خارجية وعن كافة ثنائيات القطب الجزيئية في المواد مع استثناء الجزيئة الواحدة (الذرة) عند النقطة قيد الدرس.

هذا يعني أن B_m ليس بالضرورة ان يكون مساوي لمجال الحث العيني (*Macroscopic*) لأن الاخير متعلق بالقوة على عنصر تيار ذي ابعاد كبيرة مقارنة مع الابعاد الجزيئية . لونأخذ قطعة صغيرة من جسم مادي يمتلك تمغنط منتظم قدره M تاركين تجويفاً كروياً يحيط بالنقطة المراد قياس المجال الجزيئي عندها ، ثم نعالج جزء المادة المتبقية كسلسلة متصلة وذلك من وجهة النظر العينية ومن ثم نعيد وضع المادة المستقطبة داخل التجويف جزيئة بعد جزيئة ،ماعدا الجزيئة التي تقع عند مركز التجويف حيث ينبغي حساب المجال الجزيئي عند موقعها . اما الجزيئات التي اعيدت الان فتعامل كثنائيات قطب منفردة او زمر من الثنائيات وليست كمادة متصلةكما في الحالة العينية .

يمكن ايجاد شدة المجال المغناطيسي H او المجال العيني كالاتي :