المحتويات

مقدمة عامة

مقدمـــة

إن قوانين القوة المعروفة لدينا تماماً هما القانونين اللذين يصفان قوى الجاذبية بين الكتل المختلفة ، القوى الكهربائية بين الشحنات المختلفة .

إن القوى المتبادلة بين الكتل أو الشحنات المختلفة المستقرة تكون متناسبة عكسياً مع مربع المسافة الفاصلة بينهما . ولقد تم اكتشاف العلاقات الرياضية المختلفة التي توضح طبيعة العلاقات المتبادلة بين الأجسام أو الشحنات الكهربية . أحد هذه القوانين المعروفة هو قانون نيوتن للجذب العام والقانون الآخر هو قانون كولوم في الالكتروستاتيكا .

إن الاستفادة التامة من معلوماتنا عن قانون القوة مثلاً ، يستلزم أن يكون لدينا نظرية ميكانيكية عن طبيعة الحالة المعنية بالدراسة . وهذا يعني أنه يجب أن يكون لدينا نظرية تصف سلوك الجسيم ، تحت تأثير قانون قوة معروف ، بالنسبة للجسيمات الأخرى .

إن الأجسام الكبيرة والتي تتحرك بسرعات صغيرة بالمقارنة بسرعة الضوء فإنها تخضع تماماً لقوانين ميكانيكا نيوتن الكلاسيكية . إن قوانين الميكانيكا الكلاسيكية بالإضافة لقانون الجاذبية معاً يؤديان إلى توقعات دقيقة بحركة الكواكب . وهناك شئ هام نركز عليه هنا ونشير إليه وهو أن الميكانيكا الكلاسيكية لا تنطبق مطلقاً على المشاهدات المأخوذة على الجسيمات في النطاق الذري أو على الأجسام التي تتحرك بسرعة عالية جداً . إن سلوكيات مثل هذه الجسيمات لا يمكن فهمها إلا باستخدام أفكار من نظرية الكم والنظرية الخاصة في النسبية .

إذن من الملاحظ أن الميكانيكا تخضع لتعديلات فعالة في حين أننا في نفس الوقت نجد أن قانون كولوم مازال كما هو ثابتاً. ونحن نعلم تماماً أن سلوك الذرات لا يناسب إطار الميكانيكا الكلاسيكية القديمة، وعلى الرغم من ذلك فإننا عند استخدام قانون كولوم مع النظريات النسبية وميكانيكا الكم نجد أن التفاعلات الذرية يمكن تفسيرها بدقة كبيرة في كل حالة وخاصة عندما نعمل مقارنة بين النظرية والتجريب.

من حيث المبدأ نجد أن معظم الخصائص الكيميائية، في الفيزياء الذرية وفيزياء الجوامد، يمكن إشتقاقها تقريباً إنطلاقاً من قانون كولوم.

- ٣ -

بعض المفاهيم والنظريات الهامة فى تحليل المتجهات

بند ١ : الدوال المتجهة

إذا تراجعت متجه ما وليكن $\vec{A}$ مع كل قيمة مناظرة نأخذها الكمية العددية u فإنه يقال أن المتجه $\vec{A}$ دالة فى المتغير u ويرمز له بالصورة $\vec{A}(u)$.

بإنا كانت $A_1(u)$ ، $A_2(u)$ ، $A_3(u)$ هى مركبات (مساقط) هذا المتجه $\vec{A}(u)$ فى إتجاه محاور الإحداثيات الثلاثة OX, OY, OZ على الترتيب فإنه يكون :

$$\vec{A}(u) = A_1(u)\vec{i} + A_2(u)\vec{j} + A_3(u)\vec{k} \qquad (1.1)$$

حيث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ هى متجهات الوحدة فى إتجاه المحاور الرئيسية OX, OY, OZ على الترتيب.

بإذا كان لكل نقطة من الفراغ الثلاثى (x,y,z) متجه $\vec{A}$ يناظرها فإن هذا المتجه $\vec{A}$ يكون دالة فى (x,y,z) ويمكن كتابته بدلالة مساقطه على محاور الإحداثيات كالآتى

$$\vec{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k} \qquad (1.2)$$

هذه الدالة المتجهة $\vec{A}(x,y,z)$ يقال أنها تعرف مجال متجه لأنه لكل نقطة من المجال يترافق معها متجه. كذلك المثل لأى دالة قياسية $\Phi(x,y,z)$ تعرف مجالاً عدديا (قياسيا) لأنه لكل نقطة من منطقتها تعريفها يترافق معها مقدار عددى.

بند ٢ : النهايات والإتصال والمشتقات للدوال المتجهة

تتبع النهايات والإتصال والمشتقات للدوال المتجهة قواعد مشابهة لتلك القواعد الخاصة بالدوال العددية. فمثلاً الدالة القياسية $\Phi(u)$ يقال أنها متصلة عند u إذا كان $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \Phi(u+\Delta u) = \Phi(u)$. أى أن الدالة $\Phi(u)$ تكون دالة متصلة عند u إذا كان لأى عدد موجب ϵ يمكن إيجاد عدد ما موجب δ بحيث أنه :

$$|\Phi(u+\Delta u) - \Phi(u)| < \epsilon \quad \text{طالما كان} \quad |\Delta u| < \delta \ .$$

الدالة الإتجاهية $\vec{A}(u) = A_1(u)\vec{i} + A_2(u)\vec{j} + A_3(u)\vec{k}$ تسمى دالة متصلة عند u إذا

كانت الدوال العددية الثلاث $A_1(u), A_2(u), A_3(u)$ متصلة عند u أو إذا كان

$\lim\limits_{\Delta u \to 0} \vec{A}(u+\Delta u) = \vec{A}(u)$. وهذا التعريف يكافئ القول أن الدالة المتجهة $\vec{A}(u)$ تكون

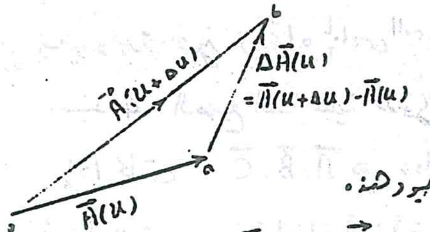
متصلة عند u إذا كان لأي عدد موجب $\in$ تمكننا إيجاد عدد ما موجب δ بحيث أن

$|\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)| < \in$ طالما كان $|\Delta u| < \delta$

II- نهاية ومشتقة المتجهات

لتكن الدالة المتجهة $\vec{A}(u)$ هي دالة في متغير عددي وحيد u عندئذ يكون

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} \qquad (1.3)$$



مشتقة المتجه $\vec{A}$ بالنسبة إلى المتغير u تعطى بـ

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u}.$$

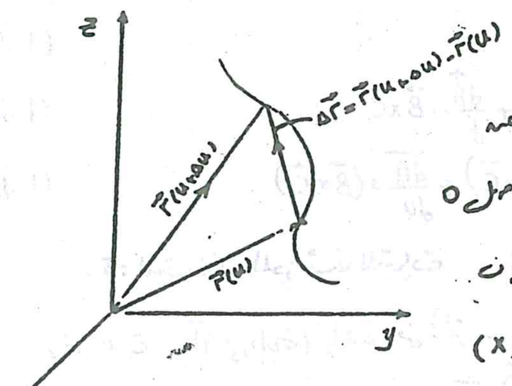
إذا كانت هذه المشتقة موجودة. وبشرط وجود هذه

النهاية موجودة فإنه يمكن التعبير عن مشتقة المتجه $\vec{A}(u)$ بدلالة مركباته

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_1}{du}\vec{i} + \frac{dA_2}{du}\vec{j} + \frac{dA_3}{du} \qquad (1.4)$$

بالمثل أيضاً يمكن تعريف مشتقات الدوال الاتجاهية ذات الرتب الأعلى مثل $\frac{d^2\vec{A}(u)}{du^2}$

شريطة أن تكون هذه المشتقة موجودة.



البند 3: المعنى الهندسي لمشتقة المتجه

على وجه الخصوص إذا كانت $\vec{A}(u)$ هو عبارة عن

دالة متجه موضع $\vec{r}(u)$ الذي يصل نقطة الأصل O

من نظام إحداثي معين مع النقطة (x, y, z) فإن

مركبات الدالة المتجهة $\vec{r}(u)$ تعرف (x, y, z)

كدوال للمتغير u حيث

$$\vec r(u) = x(u)\vec i + y(u)\vec j + z(u)\vec k$$

أي أنه عندما يتغير المتغير u في الفراغ فإن النقطة الإنتهائية للمتجه $\vec r$ ترسم في الفراغ منحنى

له المعادلات البارامترية $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$. عندئذ يكون

$\frac{\Delta \vec r}{\Delta u} = \frac{\vec r(u+\Delta u) - \vec r(u)}{\Delta u}$ عبارة عن متجه في اتجاه $\Delta \vec r$. وإذا كانت

$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta u} = \frac{d\vec r}{du}$ موجودة فإن النهاية له تمثل متجهاً في إتجاه المماس للمنحنى عند النقطة (x, y, z) وتعطى بالعلاقة الآتية

$$\frac{d\vec r}{du} = \frac{dx}{du}\vec i + \frac{dy}{du}\vec j + \frac{dz}{du}\vec k \qquad (1.5)$$

إذا كان البارامتر u هو طول القوس s مقاساً من نقطة ما على المنحنى فإن $\frac{d\vec r}{ds}$ يكون وحدة متجه في إتجاه المماس للمنحنى . ونسميه وحدة المماس المتجه .

بند 4 : الصيغ التفاضلية للمتجهات

إذا كانت $\vec A, \vec B, \vec C$ هي دوال إتجاهية تفاضلية في المتغير القياسي u , كانت Φ أيضاً دالة قياسية تفاضلية أيضاً في المتغير u فإن :

$$\frac{d}{du}(\vec A + \vec B) = \frac{d\vec A}{du} + \frac{d\vec B}{du} \qquad (1.6)$$

$$\frac{d}{du}(\vec A \cdot \vec B) = \vec A \cdot \frac{d\vec B}{du} + \vec B \cdot \frac{d\vec A}{du} \qquad (1.7)$$

$$\frac{d}{du}(\vec A \times \vec B) = \vec A \times \frac{d\vec B}{du} + \vec B \times \frac{d\vec A}{du} \qquad (1.8)$$

$$\frac{d}{du}(\Phi \vec A) = \Phi \frac{d\vec A}{du} + \vec A \frac{d\Phi}{du} \qquad (1.9)$$

$$\frac{d}{du}(\vec A \cdot \vec B \times \vec C) = \vec A \cdot \vec B \times \frac{d\vec C}{du} + \vec A \cdot \frac{d\vec B}{du} \times \vec C + \frac{d\vec A}{du} \cdot \vec B \times \vec C \qquad (1.10)$$

$$\frac{d}{du}(\vec A \times \vec B \times \vec C) = \vec A \times (\vec B \times \frac{d\vec C}{du}) + \vec A \times (\frac{d\vec B}{du} \times \vec C) + \frac{d\vec A}{du} \times (\vec B \times \vec C) \qquad (1.11)$$

بند 5 : المشتقات الجزئية للمتجهات :

إذا كانت $\vec A$ هي دالة إتجاهية في أكثر من متغير قياسي ولتكن x, y, z مثلاً عندئذ نكتب

$\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$. المشتقة الجزئية للدالة الإتجاهية $\vec{A}$ بالنسبة للمتغير x تعرف بـ

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x, y, z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta x} \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}(x,y+\Delta y,z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta y} \qquad (1.13)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(x,y,z+\Delta z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta z} \qquad (1.14)$$

إذا كانت هذه النهايات موجودة فإن تلك العلاقات السابقة تعرف المشتقات الجزئية للدالة

الإتجاهية $\vec{A}$ بالنسبة للمتغيرات x, y, z على الترتيب .

إذا كانت $\vec{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$ فإن

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz \qquad (1.15)$$

تعرف أيضا تعريف المشتقات الجزئية ذات الرتب الأعلى للدوال المتجهة (الرتبة الثانية) مثلا

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) . \qquad (1.16)$$

وخواص المشتقات الجزئية للمتجهات مشابهة تماماً لتلك التي في الدوال القياسية .

إذا كانت $\vec{A}, \vec{B}$ دوال إتجاهية من المتغيرات x, y, z فإن

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \qquad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\times\vec{B} \qquad (1.18)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\cdot\vec{B})\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right] \\ &= \vec{A}\cdot\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \vec{B}\cdot\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x}\end{aligned} \qquad (1.19)$$

بند 6: التدرج وتفرق والتفاف المتجهات

المؤثر التفاضلي الإتجاهي نابلا $\vec{\nabla}$ يعرف بـ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.20)$$

هذا المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ له خصائص مماثلة لتلك التي في المتجهات وهذا المؤثر التفاضلي ذو تطبيقات تعرف باسم الميل والتباعد والدوران.

1- الميل (التدرج)

لتكن Φ دالة قياسية تفاضلية عند كل نقطة (x,y,z) في حيز معين من الفراغ فإن تدرج Φ يعرف كالآتي

$$\text{grad}\,\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.21)$$

والدالة الإتجاهية $\vec{\nabla}\Phi$ تعرف بمجال إتجاهي.

* إذا كانت $\Phi(x,y,z)=c$ تمثل معادلة سطح مثلاً، حيث c مقدار ثابت فإن $\vec{\nabla}\Phi$ تمثل العمودي على هذا السطح. وسنقوم ببيان ذلك كالآتي

إذا فرضنا أن $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ تمثل موضع أي نقطة $P(x,y,z)$ على السطح فإن $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ تقع في المستوى المماس للسطح عند P ولكن

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right) = 0 \qquad (1.22)$$

$$\text{or} \quad d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = \vec{\nabla}\Phi\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (1.23)$$

أي أن $\vec{\nabla}\Phi$ عمودية على $d\vec{r}$ وبذلك تكون عمودية على السطح.

2- التفرق (التباعد)

نفرض أن $\vec{V}(x,y,z) = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ دالة إتجاهية تفاضلية ومعرفة عند كل نقطة (x,y,z) في حيز معين من الفراغ فإن تباعد $\vec{V}$ يكتب $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ أو $\text{div}\,\vec{V}$ ويعرف كالآتي

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}\right) \qquad (1.24)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \qquad (1.25)$$

مع ملاحظة أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \neq \vec{V}\cdot\vec{\nabla}$

3- الإلتفاف (الدوران)

دوران الدالة الإتجاهية التفاضلية $\vec{V}$ يكتب $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ أو $\text{curl}\,\vec{V}$

ويكتب كالآتي

$$Curl\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(V_1\vec{i}+V_2\vec{j}+V_3\vec{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1.26)$$

ويلاحظ عند فك المحدد أنه من الضروري أن تسبق العوامل المؤثرة $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ المركبات V_3 ...

بند 7: صيغ تحتوي على ∇

إذا كانت $\vec{A}, \vec{B}$ دوال إتجاهية تفاضلية وكانت Φ, Ψ دوال قياسية تفاضلية في الموضع (x,y,z) فإن:

$\vec{\nabla}(\Phi+\Psi) = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla}\Psi$ أو $grad(\Phi+\Psi) = grad\,\Phi + grad\,\Psi$ (1.27)

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ أو $div(\vec{A}+\vec{B}) = div\,\vec{A} + div\,\vec{B}$ (1.28)

$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$ أو $Curl(\vec{A}+\vec{B}) = Curl\,\vec{A} + Curl\,\vec{B}$ (1.29)

$$\vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{A} + \Phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \qquad (1.30)$$

$$\vec{\nabla}\times(\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{A} + \Phi(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \qquad (1.31)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad (1.32)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) \qquad (1.33)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad (1.34)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad (1.35)$$

حيث ∇^2 يسمى مؤثر لابلاس $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{0}$ دوران الميل للدالة القياسية Φ يساوي صفر

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ تباعد الدوران للدالة الإتجاهية $\vec{A}$ يساوي صفر

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \qquad (1.36)$$

ملحوظة: الصيغ المعطاة بالمعادلة (1.36) تكون محققة على إعتبار أن Φ , A لها مشتقات جزئيات متصلة من الرتبة الثانية.

أمثلة توضيحية

1- إحسب $\vec{\nabla} f(r)$. حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

من الواضح أن $f(r) = f([x^2+y^2+z^2]^{1/2})$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

الدالة $f(r)$ تعتمد على المتغير x لأن المتجه $\vec{r}$ دالة في هذا المتغير x

وبالتالي خاصة من قانون السلسلة في المشتقات الجزئية نجد أن

$$\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

وفي هذه الحالة

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 , \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{dr} , \frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2+y^2+z^2]^{1/2} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\,\frac{x}{r}$$

وبالمثل يمكننا أيضاً الحصول على المشتقات الجزئية للدالة $f(r)$ بالنسبة للمتغيرات z , y على الترتيب. وبجمع هذه المشتقات الجزئية والتعويض في صيغة الميل للدالة $f(r)$ نحصل على

$$\vec{\nabla} f(r) = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{df(r)}{dr} , \quad r = |\vec{r}|$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{r}_0\frac{df(r)}{dr} , \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

2- إحسب $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

3- احسب $\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}f(r))$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}f(r)) = \frac{\partial}{\partial x}(x f(r)) + \frac{\partial}{\partial y}(y f(r)) + \frac{\partial}{\partial z}(z f(r))$$
$$= 3f(r) + \left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r}\right) f_r'(r) = 3f(r) + r\frac{df}{dr}$$

وخصوصا إذا كان $f(r) = r^{n-1}$ فإن

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\,r^{n-1}) = 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} = (n+2)r^{n-1}$$

فإذا كانت $n=-2$ فإن $\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\,r^{n-1}) = 0$

4- احسب $\vec{\nabla}\times\vec{r}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

5- احسب $\vec{\nabla}\times(\vec{r}f(r))$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{r}f(r)) = f(r)\,\vec{\nabla}\times\vec{r} + (\vec{\nabla}f(r))\times\vec{r}$$

باستعمال نتائج المثالين (1)، (4) نجد أن

$$\vec{\nabla}\times(\vec{r}f(r)) = (\vec{\nabla}f(r))\times\vec{r} = \frac{df(r)}{dr}\,\vec{r}_0\times\vec{r} = \vec{0}$$

وحاصل الضرب الاتجاهي هذا يتلاشى لأن $\vec{r} = \vec{r}_0\, r$ ، $\vec{r}_0\times\vec{r}_0 = \vec{0}$

6- عبر عن تباعد الميل للدالة Φ ($\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية في الإحداثيات الكارتيزية وتعرف باسم معادلة لابلاس للدالة Φ . وهذه المعادلة لها أهمية خاصة في الرياضيات الطبيعية وخاصة عند دراسة النظرية [illegible]

تكامل المتجهات

بعد أن تعرضنا لتفاضل المتجهات سوف ندرس فيما التكاملات الخطية، السطحية والحجمية. في كل حالة من هذه الحالات نلجأ إلى اختصار التكاملات الاتجاهية إلى تكاملات قياسية. والآن فلنبدأ

البند 8 : التكاملات الخطية.

نفرض أن $\vec{r}$ هو متجه موضع نقطة في الفراغ (x, y, z) ونفرض أن $\Phi(x, y, z)$ هي دالة قياسية في الموضع. نفرض كذلك أن المتجه $\vec{A}$ هو دالة إتجاهية في الموضع معرفة ومتصلة على طول منحنى C يصل بين نقطتين P_1 و P_2 حيث

$$\vec{A}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$$

عندئذ نعرف التكامل الخطي لكل من الدالة القياسية Φ والدالة المتجهة $\vec{A}$ كالآتي

$$\int_C \Phi\, d\vec{r} \qquad (1.37)$$

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \qquad (1.38)$$

$$\int_C \vec{A} \times d\vec{r} \qquad (1.39)$$

وفي كل من الحالات الثلاثة يجري التكامل على المنحنى C والذي قد يكون منحنى مفتوحاً (له نقطتي بداية ونهاية منفصلتين) وقد يكون المنحنى C مغلقاً (مكوناً حلقة). والتكامل الثاني المعرف بالمعادلة (1.38) هو أهم التكاملات الخطية إستخداماً لما له من تطبيقات فيزيائية متعددة. رياضياً يعبر هذا التكامل عن المركبة المماسية للدالة المتجهة $\vec{A}$ على طول المنحنى C من النقطة P_1 إلى النقطة P_2. أما إذا كان المتجه $\vec{A}$ يمثل القوة $\vec{F}$ المؤثرة على جسيم متحرك على المنحنى C فإن هذا التكامل يعطي الشغل المبذول بهذه القوة $\vec{F}$ لنقل الجسيم من النقطة P_1 إلى P_2 على المنحنى C. وإذا كان C عبارة عن منحنى بسيط مغلق فإن التكامل (1.38) يأخذ الصيغة

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \qquad (1.40)$$

بند 9 : التكاملات السطحية

من الممكن كتابة التكاملات السطحية في صورة مماثلة للتكاملات الخطية السابقة. فإذا كان $d\vec{\sigma}$ يمثل عنصر مساحة (متجه) فإنه يمكن التعبير عنه في الصورة $\hat{n}\,d\sigma$ حيث $\hat{n}$ هو متجه وحدة عمودي على عنصر المساحة $d\sigma$ في الاتجاه الموجب. ويمكن تحديد هذا الاتجاه الموجب بالنسبة للسطح المغلق في الاتجاه العمودي على السطح إلى الخارج.

وبالتناظر مع التكاملات الخطية (1.37-1.39) يمكننا كتابة التكاملات السطحية كالتالي

$$\iint_\sigma \phi\, d\vec{\sigma} \tag{1.41}$$

$$\iint_\sigma \vec{A}\cdot d\vec{\sigma} \tag{1.42}$$

$$\iint_\sigma \vec{A}\times d\vec{\sigma} \tag{1.43}$$

والصيغة الثانية (1.42) هي أكثر الصيغ التكاملية شيوعاً. وهذا التكامل يوصف من الناحية الطبيعية بأنه سريان (تدفق) فيض خلال المساحة المعطاة.

ونرمز للتكامل السطحي على سطح مغلق σ بالعلامة التكاملية $\oiint_\sigma$

بند 10: التكاملات الحجمية

وهي تكاملات بسيطة بعض الشيء. فإذا كان لدينا سطح مغلق يحتوي على حيز حجمي τ فإن التكامل الحجمي يمكن التعبير عنه بدلالة عنصر الحجم المتناهي $d\tau$ كالآتي

$$\iiint_\tau \phi\, d\tau \tag{1.44}$$

$$\iiint_\tau \vec{A}\, d\tau \tag{1.45}$$

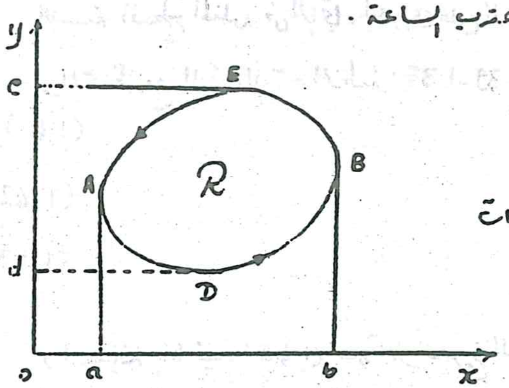
وسوف نبحث فيما بعد العلاقات المختلفة والتي تربط التكاملات الخطية والمساحية والحجمية كل بالآخر من خلال عرض نظريتي كل من جاوس (تربط التكامل الحجمي بالتكامل السطحي) وستوكس (التي تربط التكامل السطحي بالتكامل على المنحنى الذي يحد السطح)

١-١١ نظرية جرين في مستوى

تنص هذه النظرية على أنه : إذا كانت R هي منطقة مغلقة في المستوى xy ومحدودة بمنحنى بسيط مغلق C وكانت M, N دوال متصلة (مستمرة) في المنطقة R فإن

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{1.46}$$

المنحنى C مأخوذ في إتجاه ضد حركة عقرب الساعة .



البرهان

نفرض أن C هو منحنى مغلق وله خاصية أن أي خط مستقيم موازٍ لأي من محاور الإحداثيات يمكنه أن يتقاطع في نقطتين على الغالب نفرض لذلك أن معادلتي المنحنيين AEB , ADB هما $y = Y_2(x)$, $y = Y_1(x)$ على الترتيب .

على إعتبار كذلك أن المنطقة R محدودة بالمنحنى C فإنه

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\right] dx = \int_a^b \left(M(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \right) dx$$

$$= -\int_a^b M(x, Y_1)\,dx - \int_b^a M(x, Y_2)\,dx = -\oint_C M\,dx \tag{1.47}$$

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_C M\,dx \tag{1.48}$$

وبالمثل يمكن أيضاً إيجاد التكامل على المنحنيات EAD , EBD والتي نعتبرها المعادلات $x = X_1(y)$, $x = X_2(y)$ على الترتيب وعلى ذلك يكون

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=d}^{y=e}\left[\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\right]dy = \int_d^e \left[N(x_2,y)-N(x_1,y)\right]dy$$

$$= \int_e^d N(x_1,y)\,dy + \int_d^e N(x_2,y)\,dy = \oint N\,dy \qquad (1.49)$$

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \oint N\,dy \qquad (1.50)$$

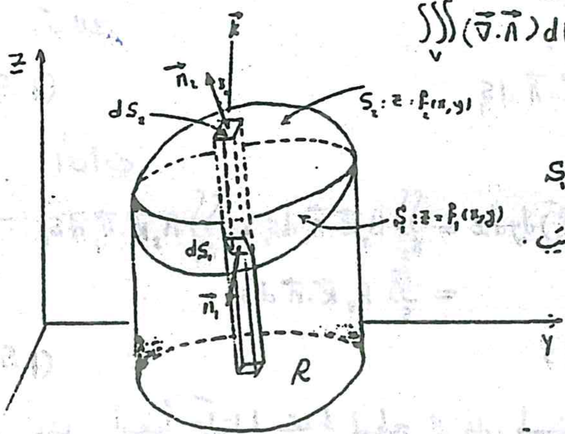
وبجمع العلاقتين (1.47) و(1.50) نحصل على

$$\oint_c M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (1.51)$$

بند 12: نظرية التباعد لجاوس

وهذه النظرية لها النص التالي: التكامل السطحي لمتجه ما على سطح مغلق يساوي التكامل الحجمي لتباعد ذلك المتجه متكاملاً على الحجم الذي يحده هذا السطح.

$$\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dV = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (1.52)$$



نفرض أن S هو عبارة عن سطح مغلق وأن معادلات سطحيه العلوي والسفلي S_2, S_1 تعطى من $Z=f_1(x,y)$ ، $Z=f_2(x,y)$ على الترتيب. نفرض كذلك أن مسقط السطح S على المستوى XY هو R ، ونعتبر أن $\vec{A}$ هي دالة اتجاهية من الموضع x,y,z حيث:

$$\vec{A}(x,y,z) = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\,dx\,dy = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\right]dx\,dy$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dV = \iint_R A_3(x,y,z)\Big|_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dx\, dy$$

$$= \iint_R \left[A_3(x,y,f_2) - A_3(x,y,f_1)\right] dx\, dy \qquad (1.53)$$

بالنسبة للجزء العلوي S_2 فإن مسقط عنصر المساحة له dS_2 على المستوى xy يعطى من $dy\,dx = \cos\gamma_2\, dS_2 = \vec{n}_2\cdot\vec{k}\, dS_2$ حيث $\vec{n}_2$ هو متجه وحدة عمودي على عنصر المساحة السطحية dS_2 ويصنع زاوية γ_2 مع اتجاه محور z الرأسي.

أما بالنسبة للجزء السفلي من المساحة السفلى S_1 فإن مسقط عنصر المساحة له dS_1 على المستوى xy يأخذ الصيغة $dy\,dx = -\cos\gamma_1\, dS_1 = \vec{n}_1\cdot\vec{k}\, dS_1$ حيث $\vec{n}_1$ هو متجه وحدة عمودي على عنصر المساحة السطحية dS_1 ويصنع زاوية منفرجة γ_1 مع اتجاه محور z إلى أسفل.

لذلك أمكننا كتابة الصيغ التكاملية السابقة على الصورة الآتية

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\, dy\, dx = \iint_{S_2} A_3\, \vec{k}\cdot\vec{n}_2\, dS_2 \qquad (1.54)$$

وكذلك

$$\iint_R A_3(x,y,f_1)\, dy\, dx = -\iint_{S_1} A_3\, \vec{k}\cdot\vec{n}_1\, dS_1 \qquad (1.55)$$

أي أن

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\, dy\, dx - \iint_R A_3(x,y,f_1)\, dy\, dx = \iint_{S_2} A_3\, \vec{k}\cdot\vec{n}_2\, dS_2 + \iint_{S_1} A_3\, \vec{k}\cdot\vec{n}_1\, dS_1$$

$$= \iint_S A_3\, \vec{k}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\therefore \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dV = \iint_S A_3\, \vec{k}\cdot\vec{n}\, dS \qquad (1.56)$$

بالمثل أيضاً لو أخذنا إسقاط السطح S على المستويات الكارتيزية xz ، yz نحصل على النتائج الآتية على الترتيب

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x}\, dV = \iint_S A_1\, \vec{i}\cdot\vec{n}\, dS \qquad (1.57)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y}\, dV = \iint_S A_2\, \vec{j}\cdot\vec{n}\, dS \qquad (1.58)$$

وبجمع نتيجة التكاملات السابقة (1.56) - (1.58) فإننا نحصل على

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}).\vec{n}\, ds \qquad (1.59)$$

$$\iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{A})\, dV = \iint_S \vec{A}.\vec{n}\, ds = \iint_S \vec{A}.\, d\vec{s}\ ;\ d\vec{s}=\vec{n}\, ds \qquad (1.60)$$

وهذه الصيغة تعرف باسم نظرية التباعد لجاوس. وتعتبر نظرية التباعد لجاوس عبارة عن تعميم لنظرية جرين في مستوى حيث تستبدل المنطقة R والمنحنى C الذي يحدها بحيز فراغي V تحده سطح مغلق S. وغالباً ما تسمى نظرية التباعد بنظرية جرين في الفراغ.

هناك بعض الصيغ التكاملية المرافقة لنظرية جاوس سوف نذكر بعض منها فيما يلي

نفرض أن ψ و ϕ هما دالتين قياسيتين في الموضع ولهما مشتقات متصلة من الرتبة الثانية على الأقل فإن

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\phi).\, d\vec{s} \qquad (1.61)$$

نفرض أن $\vec{A}$ هي دالة ما إتجاهية بحيث أن $\vec{A}=\phi\vec{\nabla}\psi$

وباستخدام نظرية التباعد لجاوس نحصل على

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{A}\, dV = \iiint_V \vec{\nabla}.(\phi\vec{\nabla}\psi)\, dV = \iint_S \vec{A}.\, d\vec{s} = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi).\vec{n}\, ds \qquad (1.62)$$

$$\vec{\nabla}.(\phi\vec{\nabla}\psi)=\phi\nabla^2\psi+(\vec{\nabla}\phi).(\vec{\nabla}\psi)$$

وبالتعويض في التكامل السابق نحصل على

$$\iiint_V \vec{\nabla}.(\phi\vec{\nabla}\psi)\, dV = \iiint_V [\phi\nabla^2\psi+(\vec{\nabla}\phi).(\vec{\nabla}\psi)]\, dV = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi).\, d\vec{s} \qquad (1.63)$$

وتعرف هذه الصيغة بمتطابقة جرين الأولى

وبتبديل كل من ϕ, ψ في التكامل السابق نحصل على

$$\iiint_V [\psi\nabla^2\phi+(\vec{\nabla}\psi).(\vec{\nabla}\phi)]\, dV = \iint_S (\psi\vec{\nabla}\phi).\, d\vec{s} \qquad (1.64)$$

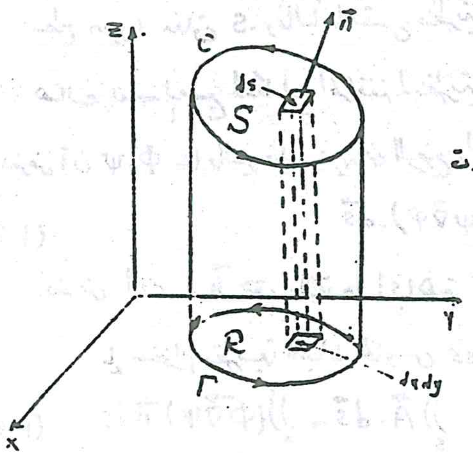
وبطرح هذه العلاقة التكاملية من النتيجة (1.63) نحصل على

$$2)\quad \iiint_V (\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi)\, dv = \iint_S (\Phi\vec\nabla\Psi - \Psi\vec\nabla\Phi)\cdot d\vec S \qquad (1.64)$$

وتعرف هذه النتيجة بمطابقة جرين الثانية

بند 13: نظرية ستوكس

وتنص هذه النظرية على ما يلي: التكامل الخطي للمركبة المماسية لمتجه ما $\vec A$ حول منحنى بسيط مغلق C يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية لدوران المتجه $\vec A$ مأخوذاً على السطح S الذي يحده هذا المنحنى C.



$$\iint_S (\vec\nabla\times\vec A)\cdot\vec n\, ds = \oint_C \vec A\cdot d\vec r \qquad (1.65)$$

نفرض أن S هو سطح وأن مساقطه على المستويات الإحداثية xy, yz, xz هي عبارة عن مناطق محدودة بمنحنيات بسيطة مغلقة. نفرض كذلك أن السطح S يمكن تمثيله بأي من المعادلات

$z = f(x,y)$ أو $y = h(x,z)$ أو $x = g(y,z)$

حيث f, g, h هي دوال تفاضلية متصلة. العلاقة المطلوب إثباتها هي

$$\iint_S (\vec\nabla\times\vec A)\cdot\vec n\, ds = \iint_S [\vec\nabla\times(A_1\vec i + A_2\vec j + A_3\vec k)]\cdot\vec n\, ds = \oint_C \vec A\cdot d\vec r \qquad (1.66)$$

حيث C هو منحنى في السطح S و $\vec A$ هي دالة إتجاهية. عندئذ يمكن كتابة

$$\vec\nabla\times(A_1\vec i) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z}\vec j - \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec k \qquad (1.67)$$

$$[\vec\nabla\times(A_1\vec i)]\cdot\vec n\, ds = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\vec n\cdot\vec j - \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec n\cdot\vec k\right) ds \qquad (1.68)$$

إذا كانت $z = f(x, y)$ تمثل معادلة السطح S وكانت $\vec{r}$ هو متجه موضع أى نقطة (x, y, z) على السطح S حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{k} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k} \qquad (1.69)$$

الآن $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ هو عبارة عن متجه مماس السطح S، وبالتالى فهو عمودى على المتجه الإتجاهية $\vec{n}$ (العمودية على السطح). لذلك يكون

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 0 = \vec{n}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{n}\cdot\vec{k} \qquad (1.70)$$

$$\therefore \vec{n}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial f}{\partial y}\vec{n}\cdot\vec{k} = -\frac{\partial z}{\partial y}\vec{n}\cdot\vec{k} \qquad (1.71)$$

وبالتعويض بهذه النتيجة فى العلاقة السابقة (1.68) نحصل على

$$\begin{aligned}[\vec{\nabla}\times(A_1\vec{i})]\cdot\vec{n}\,ds &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\vec{n}\cdot\vec{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec{n}\cdot\vec{k}\right)ds \\ &= \left(-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\vec{n}\cdot\vec{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec{n}\cdot\vec{k}\right)dS \\ &= -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\vec{n}\cdot\vec{k}\,dS \qquad (1.72)\end{aligned}$$

وحيث أن مساقط الدالة الإتجاهية $\vec{A}$ على محاور الإحداثيات هى دوال فى الموضع (x, y, z) لذلك

$$A_1(x, y, z) = A_1(x, y, f(x, y)) = F(x, y) \qquad (1.73)$$

$$\therefore \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad (1.74)$$

وبدمج النتيجتين (1.72) و (1.74) نحصل على

$$[\vec{\nabla}\times(A_1\vec{i})]\cdot\vec{n}\,ds = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\vec{n}\cdot\vec{k}\,ds = -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

لأن $\vec{n}\cdot\vec{k}\,ds = dx\,dy$

$$\therefore \iint_S [\vec{\nabla}\times(A_1\vec{i})]\cdot\vec{n}\,ds = -\iint_R \frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy \qquad (1.75)$$

حيث R هو مسقط S على المستوى xy. وباستعمال نظرية جرين فى المستوى نجد أن

$$-\iint_R \frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_\Gamma F\,dx \qquad (1.76)$$

حيث Γ هو منحنى تحيط بالمنطقة R (مسقط S على المستوى xy). وحيث أنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى Γ تجد أن قيمة الدالة F هي نفس قيمة A_1 عند كل نقطة (x, y, z) على المنحنى C وحيث أن dx هي نفسها لكلا المنحنيين لذلك

$$\oint_{\Gamma} F\,dx = \oint_{C} A_1\,dx \qquad (1.77)$$

or

$$\iint_S \left[\vec{\nabla}\times(A_1\vec{i})\right]\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C A_1\,dx \qquad (1.78)$$

وبالمثل يمكن تعميم المساقط على مستويات الإحداثيات الأخرى xz, yz فنحصل على النواتج

$$\iint_S \left[\vec{\nabla}\times(A_2\vec{j})\right]\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C A_2\,dy \qquad (1.79)$$

$$\iint_S \left[\vec{\nabla}\times(A_3\vec{k})\right]\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C A_3\,dz \qquad (1.80)$$

وبجمع النتائج (1.78) - (1.80) نحصل من النواتج على

$$\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \qquad (1.81)$$

وتعتبر نظرية جرين حالة خاصة من نظرية ستوكس. ونلاحظ هنا أن نظرية ستوكس تربط تكاملاً سطحياً بتكامل خطي مغلق. ويجب أن نتذكر أيضاً أن نظرية التباعد لجاوس تربط تكاملاً حجمياً بتكامل سطحي مغلق. وكلا النظريتين نجد أن أكبر استخدام لهما في البراهين المتجهة الهامة.

بند 14: أنظمة الاحداثيات

تعتبر أنظمة الإحداثيات الكارتيزية من أكثر الأنظمة شيوعاً بالنسبة للإستعمال من حل المسائل الفيزيائية المختلفة. والإحداثيات الكارتيزية تتميز بصفة خاصة بأن وهي أن متجهات الوحدة الثلاث $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ (في إتجاه محاور الإحداثيات) هي متجهات ثابتة ولا متغيرات ثابتة وتكون ليس كل المسائل الفيزيائية تتطلب أن نستعمل لها إحداثيات كارتيزية لحلها حتى تيسر. وخاصة عند التعامل مع قوى الجذب المتبادلة بين جسمين أو القوى الإلكتروستاتيكية.

ومن هنا فإن إيجاد أنظمة الإحداثيات المناسبة لكل المسائل الفيزيائية والإستغلال لحل التعبير المشروطة لتلك المسائل يكون هام جداً وخاصة عند دراسة حالات التماثل إن وجدت من المسألة المعنية بالدراسة. أي أنه تكون هناك سهولة في حل المسائل الفيزيائية المختلفة باستعمال الإحداثيات المناسبة لا أكثر مما لو إستعملنا الإحداثيات الكارتيزية في الغالب.

ومن هنا كان لابد من البحث عن صورة عامة تمكن كتابة الصيغ الرياضية للمؤثرات بجد والمتجهة في إيجاد الميل والدوران والتباعد والصيغ الرياضية الأخرى لدوال المجال القياسية والإتجاهية.

سوف نقدم لهذا الغرض الإحداثيات الخطية الإنحنائية المتعامدة في الصورة العامة والتي يمكن تحويلها إلى أي نظام إحداثي معني بالدراسة.

بند 15: الإحداثيات الخطية الإنحنائية المتعامدة

في الإحداثيات الكارتيزية يوجد ثلاث عائلات مترافقة ومتعامدة من المستويات والتي تحدد من $x = const$, $y = const$, $z = const$. أما في الإحداثيات العامة المعنية بالدراسة هنا سوف نعتبر: ثلاث سطوح خطية إنحنائية متعامدة وتوصف من: $q_1 = const$, $q_2 = const$, $q_3 = const$.

سوف نعتبر أي نقطة في إحداثياتنا هذه بالإحداثيات q_1, q_2, q_3 وكذلك أيضاً من x, y, z.

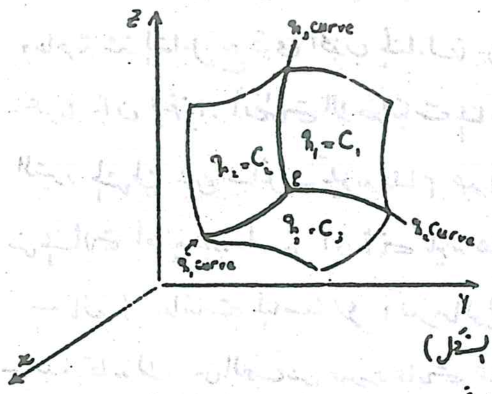
وهذا يعني أنه يمكن كتابة إحداثيات النقطة في الإحداثيات الخطية المتعامدة في الصورة q_2, q_3.

نفرض أن الإحداثيات المتعامدة x, y, z لأي نقطة يمكن التعبير عنها بدلالات q_1, q_2, q_3 كالآتي

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \quad , \quad y = y(q_1, q_2, q_3) \quad , \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \qquad (1.82)$$

بحل هذه المعادلات الثلاثة في q_1, q_2, q_3 بدلالات x, y, z نجد أن

$$q_1 = q_1(x, y, z) \quad , \quad q_2 = q_2(x, y, z) \quad , \quad q_3 = q_3(x, y, z) \qquad (1.83)$$



حيث الدوال الموجودة في المعادلة (1.82) والدوال العكسية (1.83) هي عبارة عن دوال متصلة ولها مشتقات جزئية ويوجد تناظراً أحادياً بين النقط الموجودة في نظام الإحداثيات المتعامدة x, y, z و q_1, q_2, q_3 ويمكن أن نعرف إحداثيات أي نقطة P (كما في الشكل):

ليس فقط بالإحداثيات المتعامدة x, y, z ولكن أيضاً بالإحداثيات q_1, q_2, q_3 والتي تسمى بالإحداثيات الخطية المنحنية لهذه النقطة. فإذا كانت q_2, q_3 ثابتة ويتغير q_1 فإن المتجه $\vec{r}$ يرسم منحنى يسمى منحنى الإحداثي q_1. وبالمثل يمكن تعريف منحنيي الإحداثيات q_2, q_3 المارين بالنقطة P. وكل سطحين من الأسطح المعرفة سابقاً يتقاطعان في منحنيات تسمى منحنيات إحداثية أو خطوط. والأسطح المنحنية إذا تقاطعت على التعامد فإن الإحداثيات الخطية المنحنية تكون متعامدة. ويمكن التعبير عن متجه موضع النقطة P كالتالي $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وباستخدام معادلات التحويل (1.82) يمكن كتابة $\vec{r}$ في الصورة

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\therefore d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \qquad (1.84)$$

حيث $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ هو المماس لمنحنى الإحداثي q_1 عند النقطة P. فإذا كانت $\vec{e}_1$ هو وحدة المتجهات

عند P في هذا الإتجاه فيمكننا كتابة $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = h_1 \vec{e}_1$ حيث $h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|$ بالمثل يمكن كتابة $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = h_2 \vec{e}_2$ ، $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = h_3 \vec{e}_3$ حيث $h_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right|$ ، $h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right|$ و $\vec{e}_2 , \vec{e}_3$ هي وحدات إتجاهية عند P في إتجاه المماس لمنحنيات الإحداثيات q_2 , q_3 على الترتيب ومن ذلك يكون

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3 \qquad (1.85)$$

فإذا كانت $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$ متعامدة على التبادل عند أي نقطة P فإن الإحداثيات المنحنية الإنحنائية تكون متعامدة. في هذه الحالة يمكن التعبير عن طول قوس منحنى ds بالعلاقة

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \qquad (1.86)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad ، \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \qquad (1.87)$$ حيث

فإذا كانت q_2 , q_3 ثابتة وتغيرت q_1 فإن $d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_1$ أي أن عنصر الطول التماسي ds_1 على المنحنى الإحداثي q_1 عند النقطة P هو $h_1 dq_1$.

بالمثل تكون العناصر المتناظرة للطول عبر منحنيات الإحداثيات q_2 , q_3 هي ds_2 , ds_3 حيث $ds_2 = h_2 dq_2$ ، $ds_3 = h_3 dq_3$. وبالتالي فإن عنصر الحجم في الإحداثيات المنحنية المتعامدة يعطى بـ

$$dV = d\vec{s}_1 \cdot (d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3) = (h_1 dq_1 \vec{e}_1) \cdot [(h_2 dq_2 \vec{e}_2) \times (h_3 dq_3 \vec{e}_3)]$$

$$\therefore dV = h_1 h_2 h_3 \, dq_1 dq_2 dq_3$$ إذ $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$

I. الميل في الإحداثيات المنحنية المتعامدة:

يمكن التعبير عن الميل في الإحداثيات المنحنية المتعامدة لدالة ما قياسية في الموضع Φ نفرض أن:

$$\vec{\nabla} \Phi = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3 . \qquad (1.88)$$

ولكن $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3$

$$\therefore d\Phi = \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = h_1 f_1 dq_1 + h_2 f_2 dq_2 + h_3 f_3 dq_3 \qquad (1.89)$$

أيضاً $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} dq_3 \qquad (1.90)$

بمقارنة المعادلتين (1.89) و(1.90) نجد أن

$$F_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \ ، \ F_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \ ، \ F_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \qquad (1.91)$$

وبالتعويض في الفرض (1.88) نجد أن

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \qquad (1.92)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \qquad (1.93)$$

متجهات الوحدة في اتجاه المماسات للإحداثيات المنحنية.

بفرض أن $\Phi = q_1$ في العلاقة السابقة (1.92) نجد أن $\vec{\nabla} q_1 = \frac{\vec{e}_1}{h_1}$

أي أن $|\vec{\nabla} q_1| = \frac{1}{h_1}$ وبالمثل يمكن إثبات أن

$\vec{\nabla} q_3 = \frac{\vec{e}_3}{h_3}$ ، $\vec{\nabla} q_2 = \frac{\vec{e}_2}{h_2}$ حيث $|\vec{\nabla} q_2| = \frac{1}{h_2}$ ، $|\vec{\nabla} q_3| = \frac{1}{h_3}$.

ومن ذلك يتضح أن

$$\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{h_2 h_3} = \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} \quad ; \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \qquad (1.94)$$

$$\therefore \vec{e}_1 = h_2 h_3 (\vec{\nabla} q_2) \times (\vec{\nabla} q_3) \qquad (1.95)$$

بالمثل يمكننا أيضاً إثبات أن

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_2 &= h_3 h_1 (\vec{\nabla} q_3) \times (\vec{\nabla} q_1) \quad ; \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 &= h_1 h_2 (\vec{\nabla} q_1) \times (\vec{\nabla} q_2) \quad ; \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1.96)$$

تباعد المتجهات في الإحداثيات المنحنية

نفرض أن $\vec{A}$ هي دالة اتجاهية في الإحداثيات المنحنية المتعامدة q_1, q_2, q_3 حيث

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \qquad (1.97)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(A_1\vec{e}_1) = \vec{\nabla}\cdot(A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

$$= \vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)\cdot(\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) + A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(A_1\vec{e}_1) = \vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)\cdot\frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) \qquad (1.98)$$

وبالمثل كذلك يمكنه إستنتاق نباشر لمركبات الأخرى للدالة المتجهة $\vec{A}$ كالآتى

$$\vec{\nabla}\cdot(A_2\vec{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) \ , \ \vec{\nabla}\cdot(A_3\vec{e}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2) \qquad (1.99)$$

وفى النهاية يمكنه إيجاد إنبعاج لأى دالة متجهة فى الوضع كالآتى

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3)\right] \qquad (1.100)$$

دوران المتجهات فى الإحداثيات المنحنية

يمكنه إيجاد دوران دالة متجهة $\vec{A}$ بإيجاد المركبات المختلفة كالآتى

$$\vec{\nabla}\times(A_1\vec{e}_1) = \vec{\nabla}\times(A_1 h_1 \vec{\nabla} q_1) = \vec{\nabla}(A_1 h_1)\times\frac{\vec{e}_1}{h_1}$$

$$= \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 h_1) - \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 h_1) \qquad (1.101)$$

وفى النهاية يكون

$$\vec{\nabla}\times(A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3) = \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 h_2)\right]$$

$$+ \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3 h_3)\right] + \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 h_1)\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \qquad (1.102)$$

مؤثر لابلاس فى الإحداثيات المنحنية :

مما سبق وجدنا أنه لأى دالة قياسية ϕ يكون

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3} \qquad (1.92)$$

إذا كانت $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$ فإن

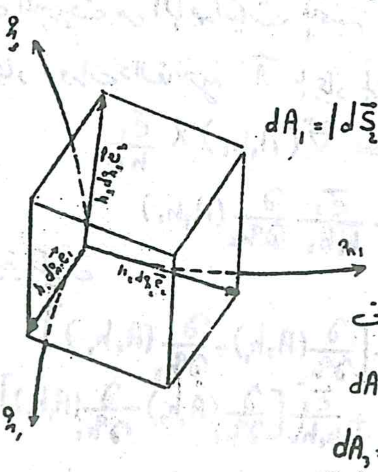
$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3} \qquad (1.103)$$

$$A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} \quad , \quad A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2} \quad , \quad A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3} \qquad (1.104)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \nabla^2\Phi$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right] \qquad (1.105)$$

عناصر المساحات في الإحداثيات المنحنية المتعامدة



من الشكل الواضح أمامنا نجد أن

$$dA_1 = |d\vec{S}_2 \times d\vec{S}_3| = |(h_2\, dq_2\, \vec{e}_2)\times(h_3\, dq_3\, \vec{e}_3)|$$

$$= h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 \qquad (1.106)$$

حيث $|\vec{e}_2 \times \vec{e}_3| = 1 \qquad (1.107)$

بالمثل نكتب أيضاً تعيين لعناصر المساحة dA_2 , dA_3 كالآتي

$$dA_2 = |(h_1\, dq_1\, \vec{e}_1)\times(h_3\, dq_3\, \vec{e}_3)| = h_1 h_3\, dq_1\, dq_3$$

$$dA_3 = |(h_1\, dq_1\, \vec{e}_1)\times(h_2\, dq_2\, \vec{e}_2)| = h_1 h_2\, dq_1\, dq_2$$

حيث $|\vec{e}_1 \times \vec{e}_3| = 1 \quad , \quad |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = 1 \qquad (1.108)$

وسوف نشتق فيما يلي بعض الصيغ الرياضية الخاصة لبعض الإحداثيات (الكارتيزية - الكروية - الإحداثيات الإسطوانية) وذلك باستعمال تعويضات مناسبة لكل نوع من هذه الإحداثيات

16: أنظمة إحداثيات خاصة

1. الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة.

تعتبر أنظمة الإحداثيات الكارتيزية هي أبسط أنظمة الإحداثيات والتي لها

$$h_1 = h_x = 1 \,, \quad h_2 = h_y = 1 \,, \quad h_3 = h_z = 1 \qquad (1.109)$$

أما بالنسبة لسطوح الإحداثيات فهي عبارة عن ثلاث فئات من السطوح المتوازية وهي

$$x = \text{Const} \,, \quad y = \text{Const} \,, \quad z = \text{Const} \qquad (1.110)$$

ونظام الإحداثيات الكارتيزية ينفرد بأن كل من h_1, h_2, h_3 ثوابت وهي ميزة ذات أهمية حيث تناظر $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ متجهات الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ على الترتيب والتي لها إتجاهات ثابتة. كما أن الإحداثيات الخطية المنحنية q_1, q_2, q_3 تناظر x, y, z على الترتيب. ونفرض أن ϕ هي دالة قياسية في الموضع ونفرض كذلك أن $\vec{A}$ هي دالة اتجاهية في الموضع ومما سبق نجد أن

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.111)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \qquad (1.112)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad (1.113)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (1.114)$$

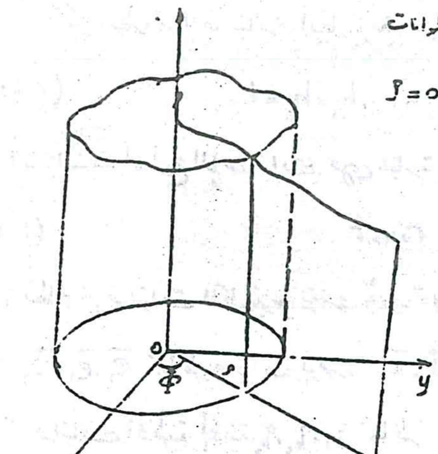
ويمكن أيضاً التعبير عن متجه الموضع $\vec{r}$ وكذلك عنصر الطول ds وعنصر الحجم dV في الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة كالآتي

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,, \quad d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \qquad (1.115)$$

$$(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \,, \quad dV = dx\,dy\,dz \qquad (1.116)$$

الإحداثيات الأسطوانية

في نظام الإحداثيات الأسطوانية نجد أن المعادلات الخطية المنحنية الثلاثة h_1, h_2, h_3 تناظر (ρ , ϕ , z) على الترتيب. أسطح الإحداثيات كالآتي



الإحداثيات الأسطوانية

- $\rho = const = (x^2+y^2)^{1/2}$ وهو تمثل تجمع الأسطوانات الدائرية التي لها محور z مشترك. أو محور z إذا كانت $\rho = 0$
- $\phi = const = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$. هي تجمع المستويات الرأسية التي تمر بمحور z.
- $z = const$ وهو تمثل تجمع المستويات المتوازية التي توازي المستوى xy.

وحل المعادلات السابقة في ρ, ϕ, z نحصل على معادلات التحويل الآتية

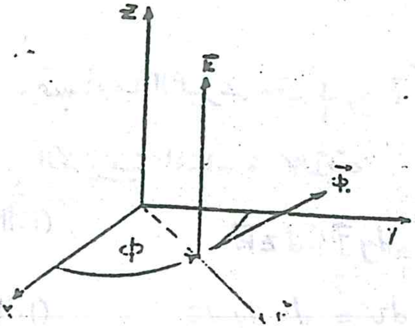
$$x = \rho\cos\phi , \quad y = \rho\sin\phi , \quad z = z$$

$$0 \le \rho \le \infty , \quad 0 \le \phi \le 2\pi , \quad -\infty \le z \le +\infty$$

حيث

أي أن محور z لا يتغير. أما عوامل القياس للإحداثيات الأسطوانية فهي $h_1 = h_3 = 1,\ h_2 = h_\phi = \rho$ ، $h_3 = h_z = 1$. أما متجهات الوحدة $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ في الإحداثيات الأسطوانية فهي $\vec{\rho}, \vec{\phi}, \vec{k}$

ومتجه الوحدة $\vec{\rho}$ عمودي على السطح الأسطواني ويشير دائماً إلى اتجاه تزايد نصف القطر ρ. ومتجه الوحدة $\vec{\phi}$ فهو يمس سطح الأسطوانة ومتعامد على المستوى $\phi = const$ ويشير دائماً إلى اتجاه تزايد ϕ.



أما متجه الوحدة الثالث $\vec{k}$ فهو متجه الوحدة الكارتيزي العادي ... دائماً في اتجاه تزايد محور z

والعنصر الطولي لقوس منحنى من الاحداثيات الاسطوانية هو

$$(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = (d\rho)^2 + (\rho\, d\phi)^2 + (dz)^2 \qquad (1.117)$$

$$d\vec{r} = d\rho\, \vec{\rho}_0 + (\rho\, d\phi)\, \vec{\phi}_0 + dz\, \vec{k} \qquad (1.118)$$

أما المؤثرات التفاضلية المشتملة على $\vec{\nabla}$ تنتج مباشرة من المعادلات

$$\vec{\nabla}\psi(\rho,\phi,z) = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{\phi}_0 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.119)$$

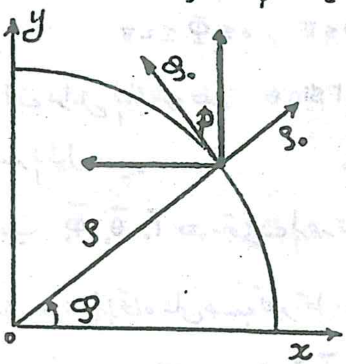
حيث ψ هي دالة قياسية في الوضع (ρ, ϕ, z).

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.120)$$

حيث $\vec{A}$ هي دالة إتجاهية في الموضع

$$\vec{\nabla}^2\psi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad (1.121)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{\rho}_0 & \rho\vec{\phi}_0 & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \qquad (1.122)$$



والعنصر الحجمي في الاحداثيات الاسطوانية له ثلاث عناصر طولية هي dz ، $\rho d\phi$ و $d\rho$. أي أن العنصر الحجمي في الاحداثيات الاسطوانية يعطى من

$$dv = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \qquad (1.123)$$

وهذه العلاقة يمكن إستنتاجها مباشرة من الرسم. كما أن متجهات الوحدة في الإحداثيات الإسطوانية يمكن إيجادها من العلاقات الآتية

$$\vec{\rho}_0 = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi \;,\; \vec{\phi}_0 = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi \;,\; \vec{k}_0 = \vec{k} \qquad (1.124)$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث في $\vec{\rho}_0$ و $\vec{\phi}_0$ و $\vec{k}$ فإننا نحصل على $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ للإحداثيات الكارتيزية.

الإحداثيات الكروية

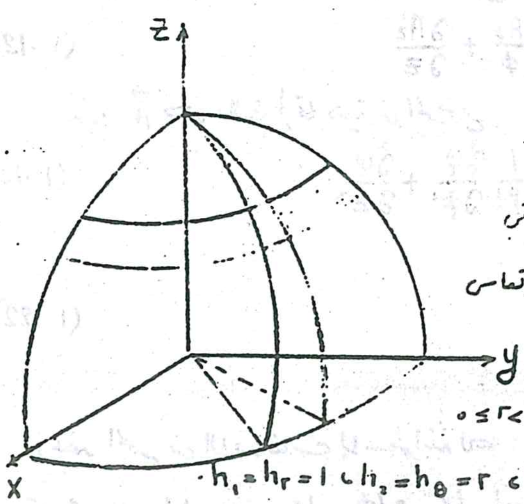
في الإحداثيات الكروية نجد أن r, θ, ϕ تناظر q_1, q_2, q_3 من الإحداثيات المنحنية العامة.

أن السطوح المختلفة في الإحداثيات الكروية يمكن تعريفها كما يلي

1. $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=Const$ هي جميع السطوح الكروية المشتركة في المركز أو نقطة الأصل إذا كان $r=0$

2. $\theta = Const$ هي عبارة عن جميع المخاريط المشتركة في محور z ولها رأس مشترك عند المركز وتكون خط إذا كانت $\theta=0$ أو $\theta=\pi$ وتتحول إلى المستوى XY إذا كانت $\theta=\frac{\pi}{2}$

3. $\Phi=\tan^{-1}(\frac{y}{x})=Const$ وهو يعطي جميع المستويات الرأسية المارة بمحور z .



ومن المعادلات لكل من r, θ, Φ نجد أن

$$X = r\sin\theta\cos\Phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\quad z = r\cos\theta$$

حيث الزاوية θ تقاس بداية من محور z الرأسي في الاتجاه الموجب. والزاوية Φ تقع في المستوى XY وتقاس بداية من محور x في الاتجاه الموجب. حيث

$$0\le r<\infty\ ,\ 0\le\theta\le\pi\ ,\ 0\le\Phi\le 2\pi$$

كما أن عوامل المقياس هي $h_1=h_r=1\ ,\ h_2=h_\theta=r\ ,\ h_3=h_\phi=r\sin\theta$

وعنصر الطول يعطى من

$$d\vec{r} = dr\,\vec{r}_0 + (r\,d\theta)\vec{\theta}_0 + (r\sin\theta\,d\phi)\vec{\phi}_0$$

حيث $\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\Phi}_0$ هي متجهات الوحدة في اتجاه تزايد كل من r, θ, Φ . ومتجهات الوحدة هذه تتميز بأنها متغيرة الاتجاه حسب تغير كل من θ, Φ . ويمكن كتابة متجهات الوحدة في الإحداثيات الكروية بدلالة متجهات الوحدة الكارتيزية $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ الثابتة الاتجاه كالآتي

$$\vec{r}_0 = \sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \qquad (1.125)$$

الفصل الثاني

المجال الكهربي للتوزيعات المختلفة للشحنات

بند 17: الشحنة الكهربائية وقانون كولوم

سوف نركز في دراستنا في هذا المنهج على تطبيق الكهرومغناطيسية على الأجسام ذات النطاق الكبير، حيث الأصل الذري للقوى الكهربائية غير منظور مباشرة.

نحن نعرف من دراستنا السابقة أنه يوجد نوعان من حاملات الشحنة الكهربائية: حاملات الشحنة السالبة مثل الإلكترونات والأيونات السالبة وحاملات الشحنة الموجبة مثل البروتونات والأيونات الموجبة. هذه الشحنات تؤثر بعضها البعض بقوى ذات طبيعة كهربية. وجدير بالذكر أنه يوجد نوعان من هذه القوى: قوى التنافر تلك التي توجد بين الشحنات المتشابهة وقوى التجاذب التي توجد بين الشحنات المختلفة.

ويمكن تلخيص أنواع التفاعل بين الأجسام نتيجة للقوى المتبادلة بينها كما يلي

I - تفاعل كتلي وهو يعتمد على كتل الأجسام المتفاعلة.

II - تفاعل كهربي ويحدث بين الأجسام التي تحمل شحنات كهربائية (سالبة أو موجبة) وقوى التفاعل في هذه الحالة قد تكون قوة تجاذب أو تنافر على حسب الشحنات الكهربائية المحمولة تلك الأجسام.

III - وبالقياس على التفاعل الكهربي المذكور يوجد أيضاً تفاعل مغناطيسي والذي يحتمل أن يكون موجباً أو سالباً أيضاً.

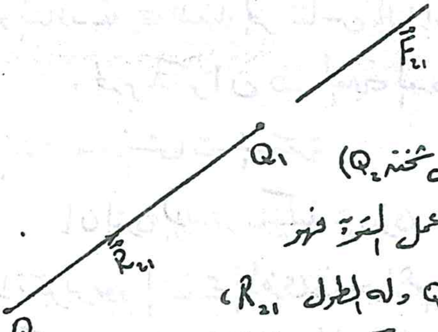
IV - هناك تفاعل آخر أيضاً وهو التفاعل النووي وهو ناتج عن وجود القوى المتبادلة بين الجسيمات المشحونة في نوى الذرات والإلكترونات المكونة للهيكل الذري لعنصر المادة. وقد تكون التفاعلات من هذا النوع هي إما تفاعلات جاذبة أو طاردة. فالشحنات التي من نفس النوع يدفع كل منها الآخر بينما الشحنات المختلفة تتجاذب معاً. ومن المعروف أن الشحنة المحمولة بالبروتون هي شحنة موجبة، أما الشحنة المحمولة بالالكترون فهي سالبة.

ان قيمة واتجاه القوة بين جسيمين مستقرين، كل منهم يحمل شحنة كهربية تعطى بقانون كولوم والذي ينص على ما يلي:

إن القوة المتبادلة بين جسيمين صغيرين جداً - يفصلهما في الفراغ أو الفضاء الحر مسافة كبيرة بالنسبة لمقاسهما - تتناسب مع الشحنة على كل منهم وتتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما.

إن الصيغة الرياضية لهذه القوة يمكن كتابتها كالتالي

$$\vec{F}_{21} \propto \frac{Q_2 Q_1}{R_{21}^2}\,\vec{a}_R \qquad (2.1)$$



حيث المتجه $\vec{F}_{21}$، المبين بالشكل الذي أمامنا، يمثل القوة المؤثرة بالجسيم (الذي يحمل شحنة Q_2) على الجسيم الذي يحمل شحنة Q_1. أما خط عمل القوة فهو ممثل بالمتجه $\vec{R}_{21}$ الذي يمتد من Q_2 إلى Q_1 وله الطول R_{21}، حيث متجه الوحدة $\vec{a}_R$ يعمل على طول الاتجاه $\vec{R}_{21}$، والذي يمكنه كتابته بدلالة R_{21} حيث $\vec{a}_R = \vec{R}_{21}/R_{21}$. المعادلة السابقة (2.1) هي قانون التربيع العكسي على الرغم من ظهور R_{21}^3 في مقام الكسر. لاحظ كذلك أن هذه المعادلة تصف بطريقة تلقائية شكل التجاذب والتنافر للقوة على حسب طبيعة الشحنة الموجودة على كل من Q_1 و Q_2.

ولتكملة العبارة القانونية السابقة والمعطاة بالمعادلة (2.1)، يجب أن نقرر ماهي الوحدات المستعملة ومن هنا نعين ثابت التناسب الطردي في تلك المعادلة المذكورة. لذلك سوف نستعمل نظام الوحدات الدولي SI والذي يطبقه معظم الفيزيائيين والمهندسين الذين يطبقون الكهرومغناطيسية على مشاكل تحتوي على أجسام ذات نطاق كبير.

هذا النظام ليس بالنظام الجاوسي وهو عالمي في الغالب ويستعمل من الفيزيائيين النظريين وفيزياء الجو.

ومن نظام الوحدات الدولي SI (نظام mks) فإن الشحنة Q تقاس بالكولوم Coulomb (C)، والمسافة R بالمتر meters (m) والقوة F يجب أن تكون بالنيوتن Newton (N). ومن نظام الوحدات فإن قانون كولوم يأخذ الصيغة الآتية

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_1}{R_{21}^2} \vec{a}_R \quad (2.2)$$

ومن نظام الوحدات الدولي نجد أن مقدار الثابت الجديد ϵ (يسمى بسماحية الفضاء الحر) كمية اسب خذ هية الأبعاد. فمن قانون كولوم نجد أنه لكي الوحدات $C^2/N.m^2$ ولكي المقدار

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Coulomb}^2 \text{ Newton}^{-1} m^{-2}$$

والتاذ ديتا ϵ للفضاء الحر تقاس بالنارد لكل متر حيث أن الفاراد له الأبعاد $C^2/N.m$.

والجدير بالذكر أن هذه القيمة المحددة لـ ϵ قد تم تعيينها تجريبياً وليست بقياس القوة بين الشحنات المستقرة.

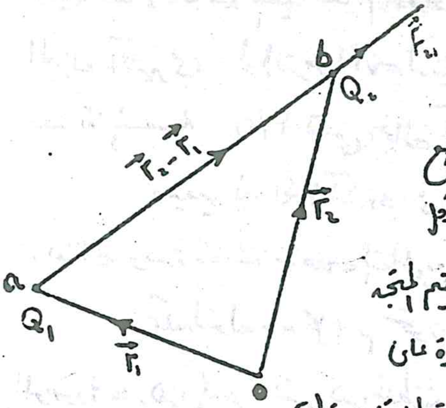
إن القوى الإلكتروستاتيكية هي قوى جسيمية والتي تعني أن القوة بين أي زوج من الشحنات لا تتغير بوجود الشحنات الأخرى في جوارهم. وكما ذكرنا أن النيوتن هو وحدة قياس القوة ويمكن تعريفه بأنه تلك القوة المطلوبة لإعطاء كتلة مقدارها واحد كيلوجرام (kg) عجلة مقدارها واحد متر لكل ثانية لكل ثانية m/s^2.

أما الكولوم فهو وحدة قياس كبيرة جداً للشحنة وتقاس بالوحدات التالية الأصغر microcoulombs (μC) أو nanocoulombs (nC) أو picocoulombs (pC).

وعموماً فإن التركيب الذري يتكون من ثلاث وحدات مواد أساسية هي: وحدة ذات شحنة سالبة وتسمى بالإلكترونات ووحدة ذات شحنة موجبة وتسمى بالبروتونات، هذا بالإضافة لوحدة متعادلة الشحنة تعرف باسم النيوترونات. والشحنة السالبة التي يحملها الإلكترون تعادل من حيث المقدار الشحنة الموجبة التي يحملها البروتون وكلاهما تمثل أصغر كمية للشحنة، وتستخدم كمية

الشحنة e (مقدار شحنة الإلكترون أو البروتون) كوحدة طبيعية لقياس الشحنة، بمعنى أن أي كمية من الشحنة تكون بمضاعفات صحيحة لهذه الكمية e.

القوة من الكميات المتجهة (لها مقدار واتجاه وخط عمل ونقطة تأثير). وبالنسبة لقانون كولوم فإن القوة تعمل على الخط الذي يصل بين الشحنتين. والصيغة الرياضية السابقة (2.1) يمكن كتابتها بدلالة متجهات الموضع للشحنات المختلفة بالنسبة لنقطة ثابتة o، كما هو موضح بالشكل الذي أمامنا



فإذا فرضنا أن $\vec{r}_1$ هو متجه موضع الشحنة Q_1 عند النقطة a، وأن $\vec{r}_2$ هو متجه موضع الشحنة Q_2 عند النقطة b، فمن الهندسة الشكل نجد أن $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ يمثل الجزء من الخط المستقيم المتجه من a إلى b. القوة المتجهة $\vec{F}_{12}$ هي القوة المؤثرة على الشحنة Q_2 نتيجة لوجود الشحنة Q_1 والصيغة الإتجاهية لها بدلالة متجهات الموضع تعطى من

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{12} \qquad (2.3)$$

حيث $\vec{a}_{12}$ هو متجه الوحدة في إتجاه المتجه $\vec{R}_{12}$. ومن الملاحظ أن متجه القوة في هذه الحالة يمكن تعيينه بدلالة ثلاثة مركبات تمثل مساقط تلك القوة على محاور الإحداثيات الثلاث

إن القوة المعبر عنها بقانون كولوم هي عبارة عن قوة متبادلة بين الشحنتين Q_1, Q_2 ولا تتغير المقدار عن كل منهما ولكن في إتجاه مضاد وبذلك يكون

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{21} \qquad (2.4)$$

حيث $R_{21} = R_{12} = |\vec{R}_{21}| = |\vec{R}_{12}|$.

بند 18: المجال الكهربي:

طبقاً لمبدأ التركيب، نجد أن القوة الكلية المؤثرة على جسيم مشحون هي عبارة عن المجموع الإتجاهي للقوى المبذولة عليه بكل الشحنات الأخرى. عادة ما يوجد في المادة عدد هائل من الجسيمات المشحونة. وعند الأخذ في الإعتبار القوى المؤثرة على أي واحد من تلك الجسيمات فإنه من المفيد تقديم المصادر المساهمة في القوة الفعلية وذلك بتقديم مفهوم المجال الكهربي. لو إفترضنا أنه لدينا شحنة ما ولتكن Q واقعة تحت تأثير قوة ما ولتكن F. فعندئذ النسبة F/Q تسمى المجال الكهربي عند النقطة حيث تقع الشحنة Q.

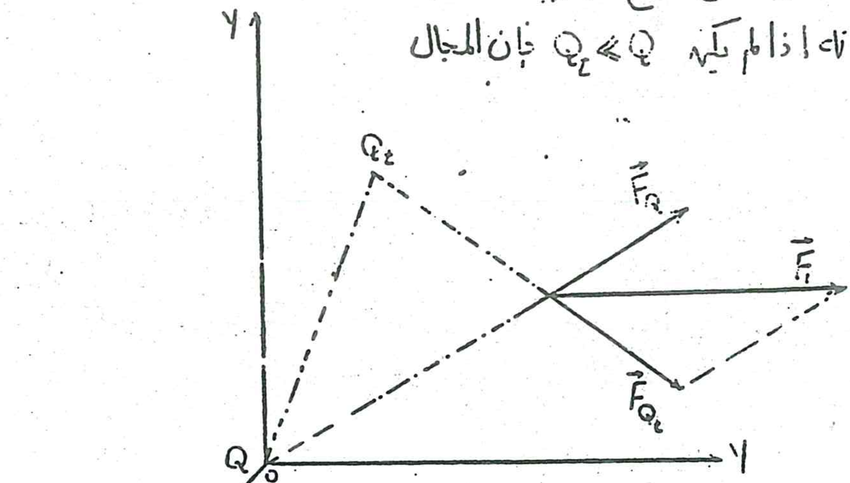
ويقاس بعد المجال الكهربي في نظام الوحدات الدولية من $(\text{Newton})(\text{Coulomb})^{-1}$، وهنالك وحدة مكافئة في حالات التعامل مع الطاقة الكهربية هي Volt m^{-1}.

ويمكن القول بأن كل جسم مشحون يكون محاطاً بمنطقة تظهر فيها آثار الشحنة الكهربية الموجودة على هذا الجسم. تسمى هذه المنطقة بالمجال الكهربي للجسم المشحون، بمعنى أنه عند وضع أي جسم آخر مشحون (ولتكن شحنة موجبة صغيرة Q_t "تسمى بشحنة إختبار") عند أي نقطة في هذه المنطقة سوف تتأثر بقوة تنافر أو تجاذب تبعاً لطبيعة شحنة الجسم صاحب المجال إذا كانت موجبة أو سالبة على الترتيب.

وتختلف شدة المجال الكهربي من نقطة لأخرى هذا إذا لم يكن المجال منتظماً، أما إذا كان المجال منتظماً فإن شدته تكون ثابتة عند جميع النقط.

ولتعيين شدة المجال الكهربي نفترض أنه لدينا شحنة ما ولتكن Q موضوعة عند نقطة الأصل O. ان شدة المجال الناشئة عن تلك الشحنة Q تكون كروية ومتماثلة وهذا يبدو واضحاً إذا كانت الشحنة عند نقطة الأصل. فإذا سمحنا لشحنة إختبار Q_t أن تتحرك ببطئ حول الشحنة Q فسوف تتولد قوة على طول الخط المستقيم الواصل بينهما ومتجهة من نقطة الأصل عند Q إذا كانت

الشحنات من نفس النوع. ويجب أن نلاحظ
هنا أنه إذا لم يكن $Q \gg Q_t$ فإن المجال



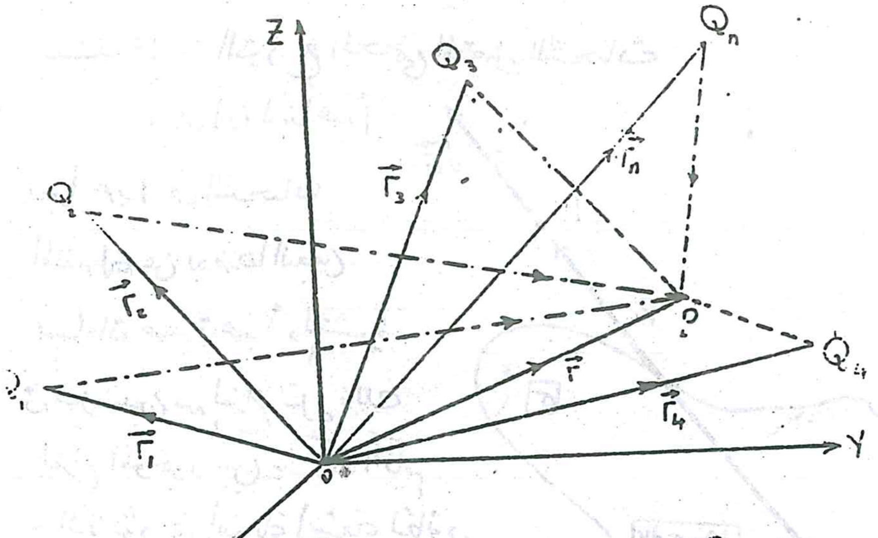
المتماثل حول Q يحدث له تشتت من أثر وجود
الشحنة Q_t. وكما هو واضح في الشكل، نجد أن القوة $\vec{F}_1$
يمكن التعبير عنها كمجموع إتجاهي في الصيغة

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{Q_t} + \vec{F}_Q \qquad (2.5)$$

ونفرض أن الشحنة Q_t صغيرة لدرجة كافية لمنع التشتت في المجال الناشئ
عن الشحنة النقطية Q عند نقطة الأصل O، فإن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناشئ
عن هذه الشحنة النقطية Q هو عبارة عن القوة المؤثرة على وحدة الشحنات
الموجبة في Q_t، أي أن

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_t} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\vec{a}_{1t} \qquad (2.6)$$

وهي تعتمد على الجزء الخطي R_{1t} المتجه من Q إلى Q_t. والمعادلة (2.6) تصف
مجالاً كهربياً متجهاً $\vec{E}$ نتيجة شحنة نقطية واحدة Q في الفراغ. وعلى وجه
العموم يمكن تعريف شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناتج عن الشحنة النقطية Q في الفراغ كما



$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\vec{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\vec{a}_2$$

$$+ \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}-\vec{r}_3|^2}\vec{a}_3 + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}-\vec{r}_n|^2}\vec{a}_n \quad (2.9)$$

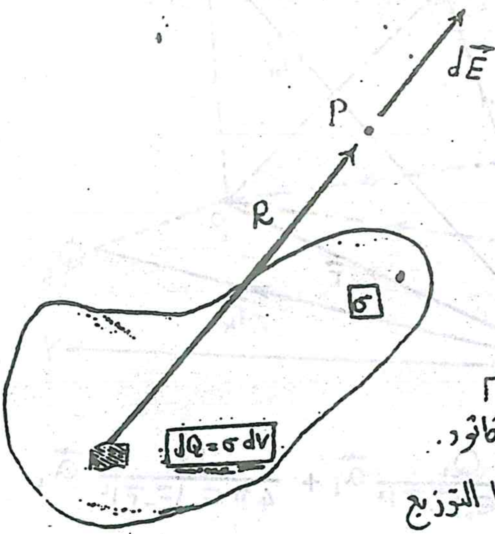
حيث $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n$ هي متجهات وحدة في إتجاه المتجهات $(\vec{r}-\vec{r}_1), (\vec{r}-\vec{r}_2), \ldots\ldots, (\vec{r}-\vec{r}_n)$ على الترتيب. أي أنه يمكن كتابة شدة المجال الكهربي الكلية، عند نقطة ما ولتكن P، والتي متجه موضعي $\vec{r}$ في الصيغة العامة التالية:

$$\vec{E} = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}-\vec{r}_m|^2}\vec{a}_m \qquad (2.10)$$

حيث $\vec{a}_m$ هو الوحدة الإتجاهية في إتجاه المتجه الواصل من موضع الشحنة Q_m إلى النقطة P المراد تعيين شدة المجال الكهربي عندها.

وفيما يلي سوف نعين الصيغ المختلفة لشدة المجال الكهربي الناتجة عن التوزيعات المختلفة الشحنات.

بند ١١ : التوزيع الحجمي المتصل للشحنات



نفرض أن لدينا عدداً كبيراً جداً من الشحنات المنفصلة عن بعضها البعض بمسافات صغيرة جداً ومنتشرة في حيز معين من الفراغ مثل ذلك الفراغ الموجود بين شبكة التحكم والكاثود في أنبوبة أشعة الكاثود. من الممكن إستبدال هذا التوزيع من الشحنات بدلالة توزيع أملس متصل يعرف بكثافة الشحنة الحجمية ونقاس بالكولوم لكل متر مكعب (C/m^3). وكثافة الشحنة الحجمية σ_v تعرف بـ

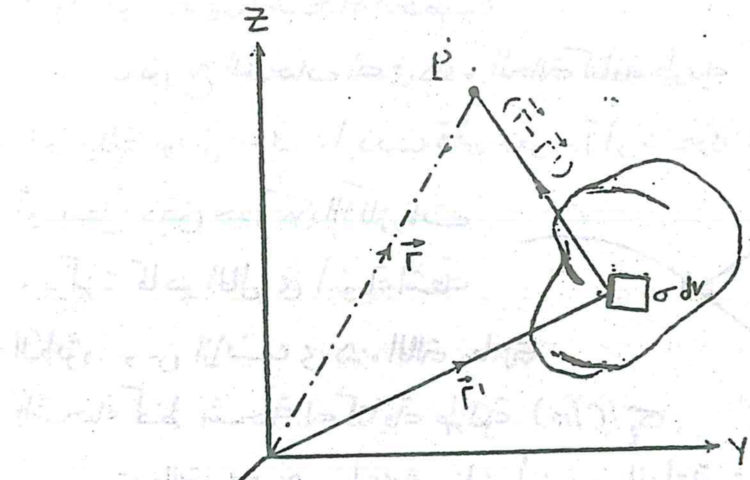
$$\sigma_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} \qquad (2.11)$$

ويشير الدليل v إلى الحجم. والشحنة الكلية داخل حجم معين محدود يمكن تعيينها من

$$Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \sigma\, dv \qquad (2.12)$$

ومن ذلك نجد أن الإسهام العنصري التزايدي لشدة المجال الكهربي، $\Delta\vec{E}(\vec{r})$، عند نقطة ما متجه موضعها $\vec{r}$ نتيجة لوجود عنصر شحنة ΔQ عند نفس الموضع يتعين من

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \qquad (2.13)$$



و بالتالى إذا جمعنا كل إسهامات العناصر التزايدية فى شدة المجال الكهربى - الناتجة عن العناصر الحجمية للشحنات، فى التوزيع المبين بالشكل - و بفرض أن العنصر الحجمى Δv المناظر لعنصر الشحنة يقترب من الصفر و أن عدد العناصر الحجمية الشحنة يصبح لا نهائياً عندئذ يتحول المجموع إلى تكامل على الحجم، حيث

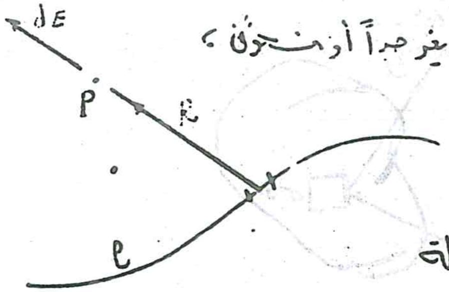
$$\vec E(r) = \int \frac{\sigma(\vec r')\, dv}{4\pi\epsilon_0 |\vec r-\vec r'|^3}(\vec r-\vec r') \qquad (2.14)$$

حيث المتجه $\vec r$ مقاس من نقطة الأصل حتى النقطة التى يُعين عندها المجال الكهربى $\vec E$. أما المتجه $\vec r'$ فهو متجه من نقطة الأصل حتى المنبع حيث تقع الشحنة. والمسافة القياسية من المنبع حتى نقطة تعيين المجال هى $|\vec r-\vec r'|$. فإذا فرضنا أن $(\vec r-\vec r') = \vec R$ و $\vec a_R$ تشير متجه الوحدة فى إتجاه $\vec R$، فإن المعادلة (2.14) تصبح

$$\vec E(r) = \int \frac{\sigma_v\, dv}{4\pi\epsilon_0 R^2}\vec a_R \quad , \quad \vec a_R = \frac{\vec R}{R} \qquad (2.15)$$

٢ - ٥ : مجال الشحنات الخطية

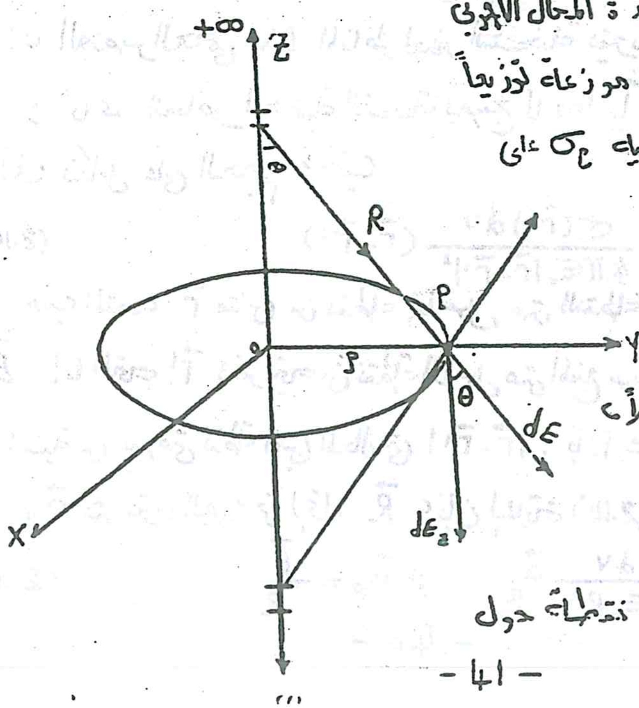
إن توزيع الشحنات له في هذه الحالة كثافة طولية



كما في حالة موصل معدني ذا مقطع قطره صغير جداً أو منحنٍ ، أو شعاع دقيق جداً من الإلكترونات مركزة كما هو الحال في أنبوبة أشعة الكاثود . ومن الأنسب في هذه الحالة معاملة الشحنة كخط شحنة له كثافة طولية σ_ℓ (C/m) .

وفي حالة عدم وجود أي شحنات أخرى في المنطقة عدا تلك التي في الموصل المعدني فإن المجال الكهربي الكلي عند النقطة P يعطى من

$$\vec{E} = \int \frac{\sigma_\ell \, d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R \qquad (2.16)$$



ولكي نحسب شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناتج عن شحنة موزعة توزيعاً متجانساً ذو كثافة طولية σ_ℓ على طول خط مستقيم ممتد امتداداً لانهائياً من $-\infty$ إلى $+\infty$ ومنطبق على محور Z مثلاً كما في حالة الإحداثيات الإسطوانية.

نعتمد ما تتحرك نقطة حول

خط الشحنة ، نجد أن قيمة المجال لا تتغير بتغير قيمة الزاوية Φ نظراً لوجود تماثل حول خط الشحنة.

أما إذا تحركنا إلى أعلى وأسفل خط الشحنة الممتد مسافة لانهائية في كلا الإتجاهين نجد أن كل عنصر طول تزايدي من خط الشحنة يعمل كشحنة نقطية ينتج عندها عنصر مساهمة تزايدي لشدة المجال الكهربي الموجه نحو الإبتعاد عن القطعة الصغيرة للشحنة (بفرض خط شحنة موجب). أي أن المحصلة النهائية لشدة المجال الكهربي في إتجاه محور z ، E_z ، تتلاشى نظراً لأن مجال عناصر الشحنة أعلى وأسفل النقطة التي نعين عندها المجال يلاشي كل منها الآخر.

ومما سبق نجد أن هناك مركبة واحدة تتغير معها شدة المجال الكهربي وأنها تتغير مع ρ فقط. المحصلة النهائية لشدة المجال الكهربي تساوي مجموع العناصر التساهمية لشدة المجال الناتجة عن عناصر الشحنة الطولية. وعندما يصبح كل عنصر طولي من خط الشحنة ، متناهياً في الصغر يتحول المجموع إلى تكامل ، حيث

$$\vec{E}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_\ell \, dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R \qquad (2.17)$$

وبعد إجراء التكامل نحصل في النهاية على

$$\vec{E}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_\ell \, \rho \, dz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{\rho}_0 \quad \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{\rho}_0 \qquad (2.18)$$

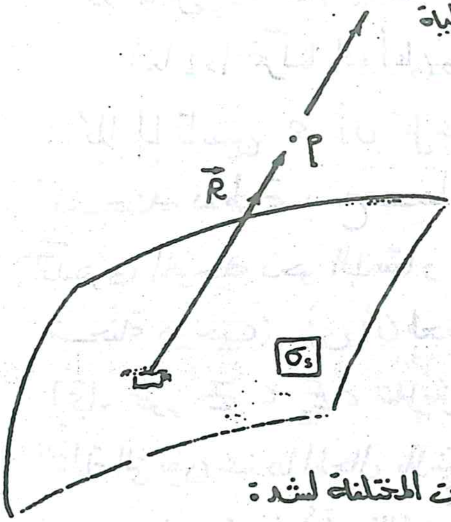
حيث متجه الوحدة $\vec{a}_R = \frac{\rho \vec{\rho}_0 - z\vec{k}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$. ويمكن صياغة النتيجة (2.18) كالآتي

$$\vec{E}(\rho) = E_\rho \vec{\rho}_0 \qquad (2.19)$$

حيث E_ρ هي مركبة شدة المجال الكهربي في إتجاه نصف القطر الدائري. وكما سبق أن أشرنا أن المركبة الثانية للمجال تتلاشى.

بند 21 : التوزيع السطحي للشحنات .

يوجد توزيع آخر للشحنات وهي الشحنات السطحية ذات الكثافة المنتظمة $\sigma_s\ (C/m^2)$. الشحنة الإستاتيكية



تستوطن أسطح الموصلات وليس بداخلها و لهذا فإن σ_s تسمى بالكثافة السطحية للشحنة. عندئذ كل عنصر شحنة سطحي ينشأ عنه عنصر مساهمة في شدة المجال الكهربي.

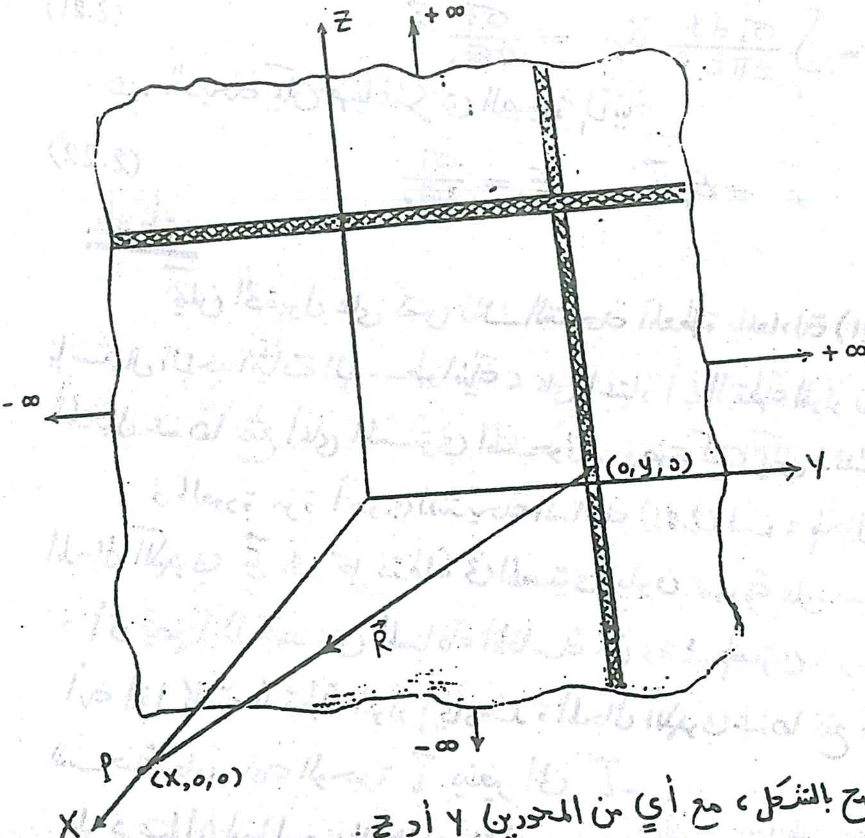
وشدة المجال الكهربي عند نقطة ما، ولتكن P مثلاً ، هي محصلة المساهمات المختلفة لشدة المجال المناظرة لعناصر الشحنة السطحية. وعندما تصبح العناصر السطحية ، الحاملة لعناصر الشحنة ، صغيرة بدرجة متناهية في الصغر عندئذ يتحول المجموع إلى تكامل حيث نحصل في النهاية على

$$\vec{E} = \int \frac{\sigma_s\, dS}{4\pi \epsilon_0 R^2}\, \vec{a}_R \qquad (2.20)$$

وذلك على إعتبار أنه لا توجد شحنات أخرى في المنطقة غير تلك التي توجد على السطح S .

وسوف نوضح فيما يلي الكيفية التي يمكن تعيين بها قيمة التكامل (2.20) .

نفترض أن لدينا سطح لانهائي مستو و أن كثافة الشحنة السطحية له هي σ_s مثلاً وبتقسيم اللوح المستو اللانهائي إلى عناصر (شرائح) طولية تفاضلية العرض ، وبتطبيق النتيجة (2.20) مباشرة نجد أن شدة المجال الكهربي عند نقطة ما لا تتغير



كما هو موضح بالشكل ، مع أي من المحورين Y أو Z .
والسبب فى هذا يرجع إلى أن المركبتين الناتجتين من العناصر التفاضلية للشحنة الموجودة فى كل شريحة تفاضلية متماثلة ، متماثلتين بالنسبة للنقطة المراد تعيين شدة المجال عندها سواء فى اتجاه محور Y أو فى اتجاه محور Z .
أى أن المركبة الوحيدة الموجودة هى تلك التى تعمل فى اتجاه محور X .
نفرض أن عنصر الشحنة لكل وحدة طول على كل شريط تفاضلى هى $\rho_L = \sigma_s \, dy$
ونفرض كذلك أن المسافة من عنصر ما على الشريحة إلى النقطة ، المطلوب تعيين شدة المجال عندها هى R . وباستخدام نتيجة البند السابق مباشرة ، نجد أ

شدة المجال الكهربي المحصلة تتعين من

$$\vec{E} = \int \frac{\sigma_s \, dy}{2\pi\epsilon_0 R} \, \vec{a}_R = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \, \vec{i} \qquad (2.21)$$

وهذه النتيجة يمكن صياغتها فى الصورة الآتية

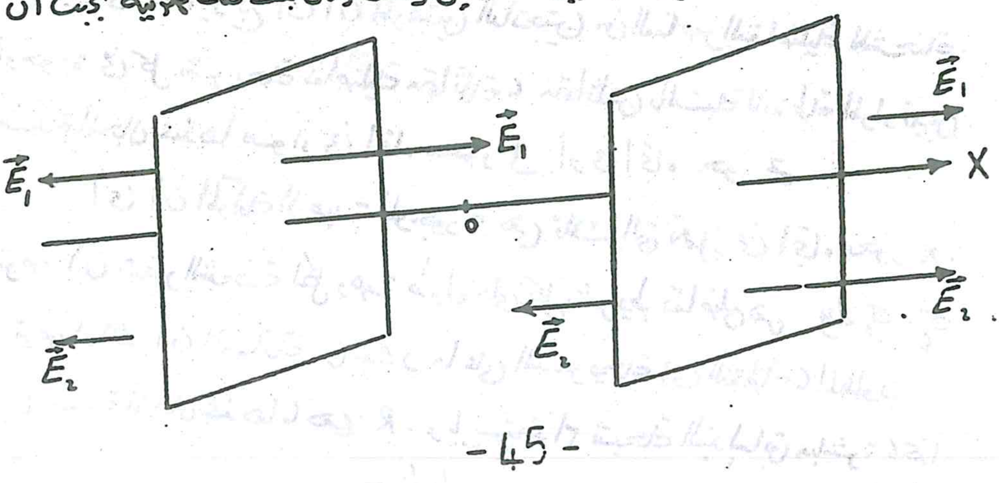
$$\vec{E} = E_x \vec{i} \, , \quad E_x = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \qquad (2.22)$$

ملحوظة:

يمكن الحصول على نفس تلك النتيجة المعطاة بالمعادلة (2.21) ، وذلك باستعمال الإحداثيات الإسطوانية ، على إعتبار أن النقطة المراد تعيين شدة المجال عندها تقع أعلى المستوى المشحون. وضح كيف يمكن ذلك؟

وبالعودة مرة أخرى للنتيجة السابقة (2.21) لشدة المجال نجد أن شدة المجال الكهربى $\vec{E}$ عند كل نقطة فى المستوى تكون عمودية على مستوى الشحنة ، وأن قيمتها لا تعتمد على المسافة المقاسة من ذلك المستوى. ونلاحظ كذلك أنه إذا كانت النقطة المراد إيجاد شدة المجال الكهربى عندها تقع خلف مستوى الشحنة فإن متجه الوحدة $\vec{i}$ يتغير إلى $-\vec{i}$.

فلو فرضنا أن لدينا لوحين لانهائيين منتظمين ومشحونان بشحنة كهربية يجب أن



الكثافة السطحية لشحنة أى منهما هى σ_s. نفرض أن هذين اللوحين عند
عند الموضعين $x = \pm a$.

شدة المجال الكهربى $\vec{E}$ الناتج من هذين اللوحين، فى المناطق المختلفة
الموضحة بالرسم تتعين من

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma_s}{\epsilon_0}\vec{i} & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}\vec{i} & x > a \end{cases} \qquad (2.23)$$

من الممكن أيضاً تعيين شدة المجال الكهربى $\vec{E}$ فى تلك المواضع المختلفة
فى الحالات المختلفة للكثافات السطحية على اللوحين. فإذا كانت الكثافة لهـ
للشحنة على اللوح الخلفى هى $-\sigma_s$، فإن شدة المجال تتعين من

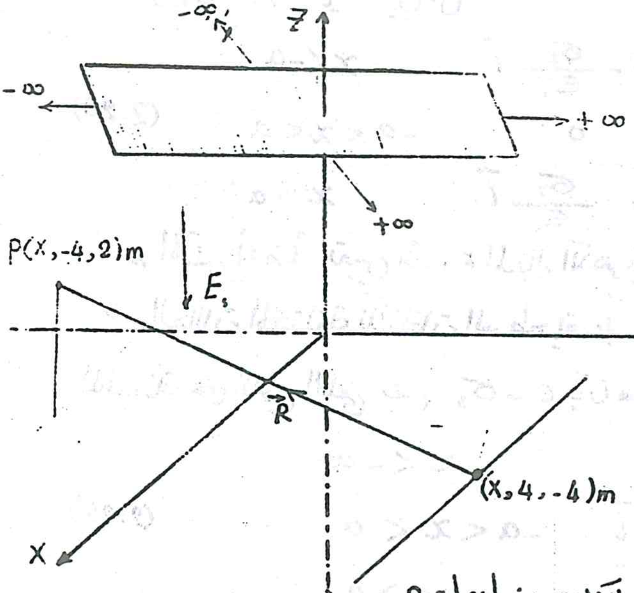
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -\frac{\sigma_s}{\epsilon_0}\vec{i} & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \qquad (2.24)$$

وهكذا لو كان لدينا أكثر من لوح معدنى موصل مشحون بحيث تكون هذ
المجموعات من الألواح عمودية على أحد المحاور، فإنه يمكن إيجاد شدة المجـ
الكهربى المحصل فى المواضع المختلفة أياً كانت الكثافات السطحية للشحنا
الموضوعة على هذه الألواح.

وهناك تطبيق هام لهذه النتيجة التى تم الحصول عليها فى هذا ا
والتى تعطى قيمة المجال الكهربى بين لوحين، حيث أنها تعطى المجال الكهربى
لوحين متوازيين لمكثف هوائى بشرط أن تكون المسافة البينية أصغر من أبعادهما با

: لوح معدني مشحون بكثافة شحنة منتظمة $\sigma_s = \frac{1}{18\pi}(nC/m^2)$ ،
موضوع عند $Z = 5m$. وخط شحنة منتظم مشحون بكثافة شحنة
ذات منتظمة حيث $\sigma_\ell = \frac{8}{9}(nC/m)$ ؛ ويوازي محور x ويمر بالنقطة
$Y=4m, Z=-4m$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $(X,-4,2)$

الحل :



$$\sigma_s = \frac{1}{18\pi}\,(nC/m^2)$$
$$\sigma_\ell = \frac{8}{9}\,(nC/m)$$
$$\therefore \vec{E}_s = -\vec{k} \quad V/m$$
$$E_\ell = 1.6 \quad V/m$$

وبالتالي فإن شدة المجال الكلية عند النقطة P
هي محصلة المجال الناتج عن المستوي المشحون بالإضافة للمجال الناتج عن الخط
المستقيم المشحون أيضاً ، حيث

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_\ell = -\vec{k} + 1.6\,\vec{a}_R$$
$$\therefore \vec{E} = -1.28\,\vec{j} - 0.04\,\vec{k}$$

أن المجال الاتجاه سالب في حين أن قيمته العددية تقريبا 1.2806 . وبالمثل
أيضاً يمكن تعيين شدة المجال الكهربي المحصل عند أي نقطة أو موضع في الفراغ .

تمارين

1- شحنتان نقطيتان $Q_1 = 50\,\mu C$ ، $Q_2 = 10\,\mu C$ موضوعتان عند النقطتين $(1,-3$
و $(3,1,0)$. أوجد القوة المؤثرة على الشحنة Q_1.

2- أوجد القوة التي تؤثر على الشحنة $Q = 100\,\mu C$ والموضوعة عند النقطة $,0,3)\,m$
نتيجة لوجود أربع شحنات قيمة كل منها $20\,\mu C$ وتقع على محوري x, y
عند $x = y = \pm 4\,m$

3- شحنة نقطية $Q_1 = 300\,\mu C$ عند النقطة $(1,-1,-3)\,m$ تلاقي قوة $= 8\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}\ N$
نتيجة لوجود شحنة نقطية $Q_2\,\mu C$ عند النقطة $(3,-3,-2)\,m$. أوجد الشحنة Q_2.

4- أوجد القوة التي تؤثر على شحنة نقطية قيمتها $30\,\mu C$ عند النقطة $(0,0,3)\,m$ والناشئة
عن وجود شحنة قدرها $200\,\mu C$ وموزعة توزيعاً منتظماً على القرص الدائري $0,\ r \le 6\,m$

5- أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند نقطة الأصل والناتجة عن شحنة نقطية قدرها nC
وموضوعة عند النقطة $(2,3,-4)$ وذلك في الإحداثيات الكارتيزية.

6- أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $(0,0,3)\,m$ والناتجة عن الشحنة $Q_1 = 0.35\,\mu C$
عند النقطة $(0,4,0)\,m$ والشحنة $Q_2 = -0.52\,\mu C$ عند النقطة $(3,0,0)\,m$.

7- خط شحنة منتظم يوازي محور z ويمر بالنقطتين $y = -4\,m$ ، $x = 2\,m$ وله توزيع
منتظم له الكثافة $\rho_\ell = 20\,nC/m$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $-1,4)\,m$

8- شحنة تقع على المستوى $z = -4\,m$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند نقطة الأصل ، إذا
أن المستوى مربع الشكل حيث $-2 \le x \le 2\,m$ ، $-2 \le y \le 2\,m$ وله شحنة سطحية
منتظمة التوزيع حيث $\sigma_s = (x^2 + y^2 + 16)^{3/2}\ nC/m^2$

9- مستوى $x + 3y - 6z = 6m$ يحتوي على شحنة سطحية منتظمة كثافتها السطحية $\sigma_s = 0.52\ nC/m^2$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ في الجانب الذي يحتوي على نقطة الأصل.

10- استنتج صيغة لشدة المجال الكهربي $\vec{E}$ في الإحداثيات الكارتيزية والناتجة عن خط شحنة لانهائي الطول ويحتوي على توزيع شحنة طولية منتظمة الكثافة σ_ℓ.

11- بيّن أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ خارج قشرة كروية منتظمة ومشحونة بشحنة منتظمة الكثافة σ_s هي نفس تلك للمجال الناشئ عن شحنة نقطية عند المركز ولها نفس قيمة الشحنة الكلية الموجودة على القشرة الكروية.

12- قرص دائري معرف $z = 0,\ r \le 1m$. له توزيع شحنة منتظم الكثافة حيث تعطى كثافته السطحية بالعلاقة $\sigma_s = 2(\rho^2 + 25)^{3/2} e^{-10\rho}\ C/m^2$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $(0,0,5)m$.

13- بيّن أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ لها قيمة صفرية في كل موضع داخل قشرة كروية مشحونة بشحنة منتظمة.

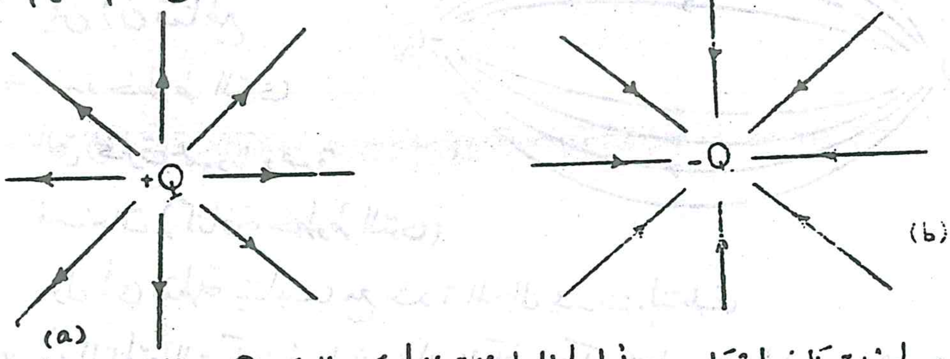
14- شحنة موزعة بانتظام داخل حجم كروي نصف قطره a. وشدة الشحنة لها كثافة σ ثابتة. بيّن أن شدة المجال الكهربي تعطى من

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{r\sigma}{3\epsilon_0}\vec{a}_r & r \le a \\[2ex] \dfrac{a^3\sigma}{3\epsilon_0 r^2}\vec{a}_r & r \ge a \end{cases}$$

حيث r هي المسافة مقاسة من مركز الكرة، $\vec{a}_r$ هو متجه الوحدة في اتجاه نصف قطر الكرة (في اتجاه تزايد نصف قطر الكرة r).

البند 22: كثافة الفيض الكهربي.

عند فحص خصائص المجال الكهربي في جوار مجموعة من الشحنات النقطية ا وُجد أن قيمة المجال الكهربي عند مسافة r من شحنة نقطية +Q تتعين كما أن أشرنا من المعادلة (2.7). والمجال في هذه الحالة يتجه نحو الخارج (من الناحية البعيد



(a) (b)

من الشحنة كما في الشكل a. أما المجال لشحنة نقطية سالبة Q - فله نفس المقدار ويشير للداخل نحو الشحنة كما في الشكل b. وكما هو واضح من الرسم نجد أن إتجاه المجال حول الشحنة الموجبة والسالبة يُشار إليه بخطوط عليها أسهم. وهذه الخطوط المتصلة التي تتبع اتجاه المجال تسمى بخطوط القوى. وحيث أن اتجاه المجال على وجه العموم يختلف من نقطة لأخرى فإن خطوط القوى غالباً ما تكون على شكل منحنيات.

وخط القوى في المجال الكهربي هو خط وهمي بحيث المماس له عند أي نقطة له نفس إتجاه المجال عند هذه النقطة.

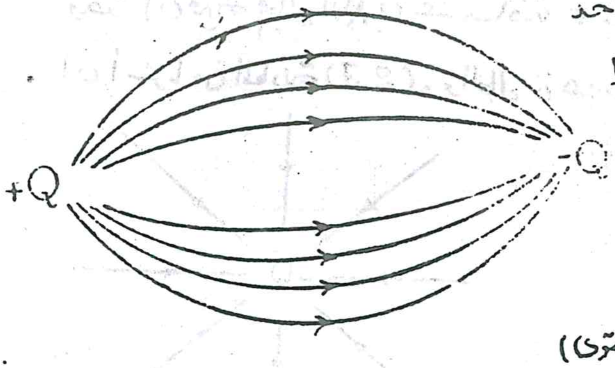
وكل خط من خطوط القوى في أي مجال كهروستاتيكي (عدا المجال الكهربي الناشئ عن التغير في المجال المغناطيسي) هو عبارة عن خط متصل بادئاً من شحنة موجبة ومنتهياً بسالبة. وكما هو واضح من الشكل a أن خطوط المجال حول الشحنة المعزولة Q

تنتهي بشحنات سالبة. وهذا يعني أن الشحنات السالبة والتي يجب أن تنتهي عندها خطوط القوى تقع على مسافات بعيدة من الشحنة المعزولة ذات الإعتبار

ومن أهم خواص خطوط القوى تلك هي ما يلي:

* عند أي نقطة يأخذ المجال إتجاهاً محدداً ومن هنا فإن أي نقطة لا يمكن أن يمر بها أكثر من خط واحد

هذا يعني أن خطوط القوى لا يمكن أن تتقاطع.



* عدد خطوط القوى التي تخترق عمودياً وحدة المساحات (كثافة خطوط القوى) حول أي نقطة يتناسب مع شدة المجال عند هذه النقطة.

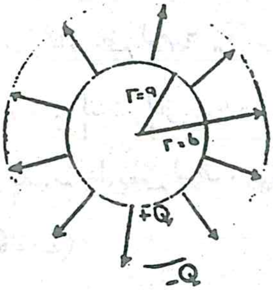
* في المناطق التي تكون فيها شدة المجال الكهربي كبيرة تتقارب خطوط القوى، حيث توجد الشحنات، كما أنها، خطوط القوى، تتباعد عند المسافات الكبيرة حيث يكون المجال ضعيفاً.

وحيث أن المجال الكهروستاتيكي حول شحنة نقطية معزولة +Q يمثل بخطوط مشعة في جميع الإتجاهات حول الشحنة الموجبة، فإنه يمكن التوصل إلى فكرة تقريبية عن المجال حول التوزيعات المختلفة للشحنة وذلك عن طريق رسم خطوط القوى.

وإنه لمن المهم هنا أن نلجأ إلى مفهوم التدفق (الفيض) الكهربي الذي ينساب للخارج متماثلاً من الشحنة النقطية وينطبق على خطوط الإنسياب (القوى)، ثم نتصور هذا التدفق الكهربي كلما وجد مجالاً كهربياً.

ولدراسة المجالات الكهروستاتيكية وتأثير المواد العازلة المختلفة على هذه المجالات

تجدر بنا الإشارة إلى التجربة التي أجراها فارادي - على سطحين كرويين موصلين ومتحدين المركز ونصفي قطريهما مختلفين وبينهما مادة عازلة - والتي بينت أن الشحنة الكلية على الكرة الخارجية تكون مساوية في المقدار الشحنة الأصلية الموجودة على الكرة الداخلية. وهذه النتيجة صحيحة لأي مادة عازلة تفصل بين هذين السطحين الكرويين. وهذه التجربة أدت الى استنتاج ما يسمى بالتدفق (الفيض) الكهربي. كما أنها بينت أن هناك تناسبا طرديا بين التدفق (الفيض) الكهربي



والشحنة الموضوعة على الكرة الداخلية. وذلك لأنه كلما زادت الشحنة الموضوعة على الكرة الداخلية إزدادت تبعاً لذلك الشحنة السالبة على الكرة الخارجية.

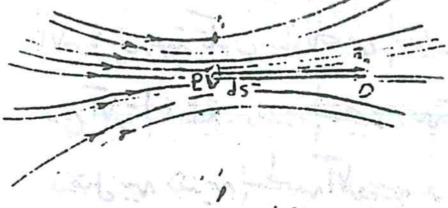
وباستخدام نظام الوحدات الدولي في القياس وجد أن ثابت التناسب بين التدفق أو الكهربي Ψ والشحنة الكلية الموجودة على سطح الكرة الداخلية Q يساوي الوحدة، أي:

$$\Psi = Q \qquad (2.25)$$

فإذا كانت Q كولوم هي الشحنة الكلية الموضوعة على الكرة الداخلية وموزعة على سطح هذه بانتظام فإنه ينتج عنها ($=Q$) Ψ كولوم من التدفق الكهربي والممتد من الكرة الداخلية إلى الكرة الخارجية في إتجاه خطوط الإنسياب وموزعة بتماثل على سطح هذه الكرة. فإذا كان a هو نصف قطر الكرة الداخلية، فإن كثافة التدفق على هذا السطح هي $\frac{\Psi}{4\pi a^2}$ (C/m^2) أو $\frac{Q}{4\pi a^2}$ (C/m^2). وباستخدام نظام الوحدات الدولي للقياس فإنه كثافة الفيض تقاس بالكولوم لكل متر مربع أو عدد الخطوط لكل متر مربع (لأن كل خط فيض ينتج من شحنة مقدارها كولوم واحد).

والفيض الكهربي Ψ هو كمية قياسية بينما كثافة الفيض الكهربي $\vec{D}$ هي كمية متجهة ولها نفس

اتجاه خطوط الفيض.

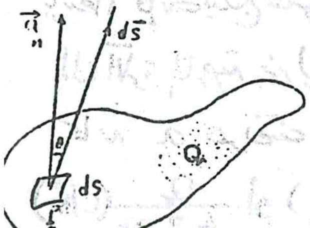


فإذا كانت خطوط الفيض المجاورة للنقطة P لها اتجاه متجه الوحدة $\vec{a}_n$ وفرضنا أن $d\Psi$ هي كمية الفيض التي تعبر عمودياً المساحة المتناهية الصغر dS والعمودية على متجه الوحدة $\vec{a}_n$ فإن كثافة الفيض عند النقطة P تعطى من

$$\vec{D} = \frac{d\Psi}{dS}\,\vec{a}_n \qquad (2.26)$$

ب ٢-٣: قانون جاوس

إذا أعيد توزيع الشحنة الداخلية الموجودة على سطح الموصل الكروي في التجربة السابقة بحيث تصبح شحنة نقطية داخل هذا الموصل الكروي فإن الشحنة الكلية المنتجة بالحث على الكرة الخارجية ستظل كما هي حتى لو كان سطح الموصل الداخلي مكعب. وذلك لأن كل كولوم واحد من الشحنة ينتج عنه كولوم واحد من الفيض (المندفع) الكهربي. أي أن $+Q$ coulombs على أي موصل داخلي سوف ينتج شحنة سالبة بالحث قيمتها $-Q$ coulombs على السطح الكروي للموصل الخارجي. أي أن $\Psi = Q$ خط فيض كهربي.



نفرض أن لدينا شحنة حجمية كثافتها هي ρ_v (C/m^3) وهذه الشحنة موزعة داخل سطح مساحته S كما لو كانت سحابة من الشحنات النقطية. فإذا كانت Q كولوم هي الشحنة الكلية داخل هذا السطح فإن Q كولوم من الفيض سوف تمر خلال هذا السطح المحتوي الشحنة. ويجب أن نلاحظ هنا أن كثافة الفيض تختلف في المقدار والاتجاه من نقطة إلى أخرى على السطح S (لأنه غير متماثل أو منتظم). أي كثافة الفيض $\vec{D}$ عند أي نقطة على السطح سيكون لها قيمة ما تبتعد عن الاتجاه العمودي بزاوية

ونفرض أن كثافة الفيض $\vec{D}$ عند نقطة ما ولتكن P تصنع زاوية θ مع العمودي على المستوى الذي يحتوي عنصر المساحة ds عند تلك النقطة. عنصر الفيض $d\psi$ الذي يعبر عنصر المساحة ds يعطى من

$$d\psi = D\, ds \cos\theta$$

$$= \vec{D} \cdot ds\, \vec{a}_n = \vec{D} \cdot d\vec{S} \qquad (2.27)$$

حيث $d\vec{S}$ هو عنصر متجه المساحة له القيمة ds والاتجاه $\vec{a}_n$. واتجاه متجه الوحدة مأخوذ دائماً من نقطة على السطح في الاتجاه العمودي على السطح إلى نقطة خارج هذا السطح ولذلك فإن كمية الفيض $d\psi$ تمر دائماً من داخل السطح S إلى خارجه خلال عنصر المساحة

وبتطبيق الصيغة (3.3) لكمية الفيض $d\psi$ على سطح مغلق S نحصل على

$$\psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \qquad (2.28)$$

وهذه الصيغة تعرف باسم قانون جاوس والذي ينص على أن "الفيض الكهربي خلال سطح مغلق يساوي الشحنة الكلية المحتواة بذلك السطح".

فإذا كانت الشحنة الكلية المحصورة بواسطة ذلك السطح هي عبارة عن شحنات نقطية فإن

$$Q = \sum_n Q_n \qquad (2.29)$$

وإذا كانت الشحنة طولية فإن

$$Q = \int_l \sigma_l\, dl \qquad (2.30)$$

وإذا كانت الشحنة ذات توزيع سطحي فإن

$$Q = \int \sigma_s\, ds \qquad (2.31)$$

أما إذا كانت الشحنة ذات توزيع حجمي فإن

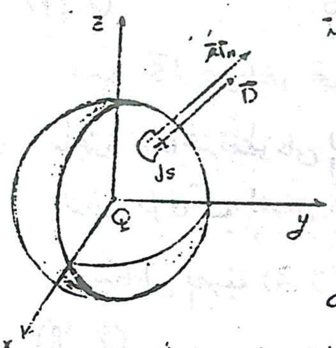
$$Q = \int \sigma_v\, dv \qquad (2.32)$$

ونظرية جاوس لها أهمية كبيرة في هذا المجال الدراسي تطبيقات متعددة.

٢-٤ تطبيقات قانون جاوس

سوف نتعرض فيما يلي لبعض تطبيقات قانون جاوس ونذكر منها ما يلي

I - استنتاج العلاقة بين الكثافة الفيض وشدة المجال الكهربي .



اعتبر شحنة نقطية Q ذات شحنة موجبة مثلاً وموضوعة عند نقطة أصل الإحداثيات . فإذا كانت هذه الشحنة محاطة بسطح كروي مثلاً وله نصف قطر r .

فمن التماثل نجد أن الكثافة الفيض D الناتجة عن الشحنة Q لها قيمة ثابتة عند كل نقطة على السطح . كما أن الكثافة الفيض أيضاً عمودية على السطح عند كل نقطة عليه . وبالتطبيق في قانون جاوس نجد أن

$$Q = \oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = D \oiint_s ds$$
$$= D(4\pi r^2)$$

$$\therefore D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad (2.33)$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_n = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_r \qquad (2.34)$$

ولكننا نعلم مما سبق أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناتجة عن الشحنة Q تعطى من

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{a}_r \qquad (2.35)$$

وبمقارنة النتيجتين (3.10) و(3.11) نجد أن

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \qquad (2.36)$$

وعموماً لأي مجال كهربي $\vec{E}$ في وسط متجانس له معامل نفاذية ϵ يكون

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad (2.37)$$

.... ومنه يتضح أن مجالات كل من $\vec{E}$ و $\vec{D}$ يكون لها نفس الهيئة ويختلفان فقط في معامل ثابت

يتوقف على الوسط. لأن المجال الكهربي E الناتج عن شحنة Q يكون دالة في معامل النفاذية للوسط بينما كثافة الفيض D لا تتوقف على هذا المعامل.

II - تعيين شدة المجال الناتج عن شحنة خطية.

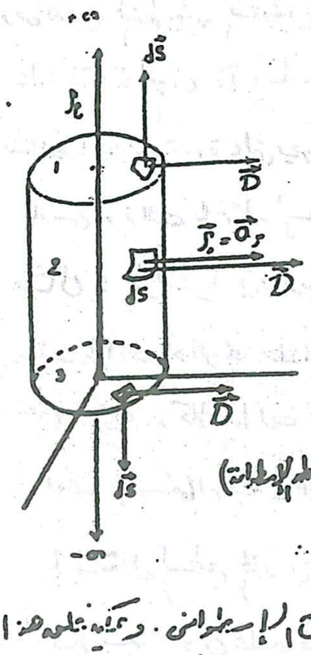
إن السطح الكروي المستخدم فيما سبق تحليله باعتباره سطح جاوسي خاص لأنه يحقق الشروط الآتية:

1- السطح مغلق

2- عند كل نقطة من السطح نجد أن كثافة الفيض D إما متعامدة أو مماسة للسطح

3- كثافة الفيض لها نفس القيمة عند كل نقط السطح حيث D تكون عمودية

من ذلك يتضح أن قانون جاوس يعتمد أساساً على التماثل وإلا فلا فائدة من استخدام هذا القانون للحصول على حل لبعض مسائل الإلكتروستاتيكا.



الشحنة الخطية تكون عبارة عن سلك رفيع لانهائي الطول عليه شحنة منتظمة الانتشار الطولي ρ_L نفترض في هذه الحالة أن خط الشحنة المنتظم يقع على طول محور z من الإحداثيات الإسطوانية. من الواضح أن شدة المجال لا تتغير أبداً عند جميع النقط التي لا تختلف إلا في إتجاه معروف أنه قطر للإسطوانة. ومن تماثل الإسطوانة حول محورها نجد أن كثافة الفيض لها مركبة واحدة فقط دالة في ρ (نصف قطر الإسطوانة)

$$\vec{D} = D_\rho \vec{a}_\rho = D_\rho \vec{\rho}_0 \quad , \quad D_\rho = f(\rho) \qquad (2.38)$$

وهذا يدل أن أنسب اختيار لسطح جاوس هو السطح الإسطواني. وتكامل على هذا السطح المغلق يتطلب معرفة ρ_L. وبتطبيق نظرية جاوس على سطح إسطواني دائري مغلق نجد

$$Q = \int_1 \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_2 \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_3 \vec{D}\cdot d\vec{s} \qquad (2.39)$$

تتلاشى التكاملات السطحية على كل من السطح الأول والثالث نظراً لتعامد كل من $\vec{D}$ ، $\vec{dS}$ له ويتوازى كل من $\vec{D}$ ، $\vec{dS}$ على السطح الثاني وتكون فيه D ثابتة إذا كانت ρ ثابتة

$$\therefore Q = \iint_2 \vec{D}\cdot d\vec{S} = D(2\pi\rho \ell)$$

حيث ℓ هو طول محور الإسطوانة. ولكن الشحنة الكلية داخل محور الإسطوانة هي $Q = \sigma_\ell \ell$

$$\therefore D = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\rho} \qquad (2.40)$$

أما شدة المجال الكهربي في اتجاه ρ (نصف قطر الإسطوانة) تكون

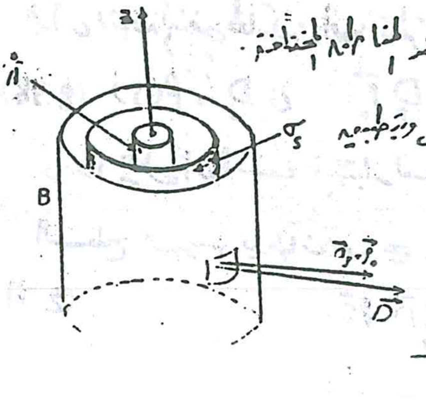
$$E_\rho = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon\rho} \qquad (2.41)$$

وعليه نقول بأن نظرية جاوس ينتفع بها في حالة الأسطح الجاوسية ذات التماثل بالنسبة لتوزيع الشحنات.

ومن هذين التطبيقين السابقين نجد أن التكامل يؤول إلى كتابة مساحة السطح الذي تكون ثابتة لذا فإن D منتظمة.

هناك أمثلة متعددة والتي يصعب التعامل معها من وجهة نظر قانون كولوم، والتي تحل بقانون جاوس، وذلك باختيار السطح المناسب للتماثل.

مثال : لو اعتبرنا أن لدينا شحنة خطية منتظمة كثافتها الطولية σ_ℓ وتحيط بها إسطوانات دائرية متحدة المحور مع خط الشحنة ونصف قطرها a وكثافتها السطحية σ_s وكلاهما له توزيعات شحنة ممتدة بامتداد لانهائي على طول محور z.



أوجد باستعمال نظرية جاوس كثافة الفيض عند المناطق المختلفة.

باستعمال السطح الجاوسي A المبين في الشكل وبتطبيق نظرية جاوس عليه نحصل على

$$\vec{D} = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\rho}\vec{a}_\rho \qquad 0<\rho<a$$

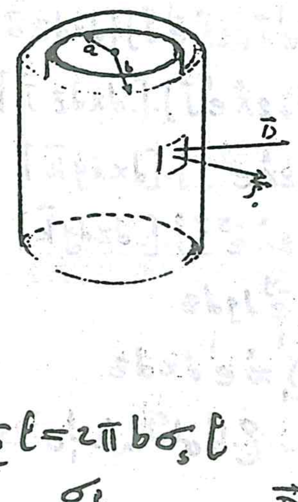
وباستعمال السطح الجاوسي B نحصل على

$$(\sigma_l + 2\pi a \sigma_s)l = \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = D\oint ds = D(2\pi\rho l)$$

$$\therefore D = \frac{\sigma_l + 2\pi a\sigma_s}{2\pi\rho} \quad ; \quad \rho > a$$

$$\therefore \vec{D} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_l}{2\pi\rho} & 0<\rho<a \\[2mm] \dfrac{\sigma_l + 2\pi a\sigma_s}{2\pi\rho} & \rho > a \end{cases}$$

مثال: إدرس كثافة الفيض D وذلك لإسطوانتين متحدتين المحور وطولهما لانهائي وكان نصف قطر الداخلية a والخارجية b مع العلم بأن الإسطوانة الداخلية لها الكثافة السطحية σ_s على سطحها الخارجي.



الحل: نختار سطح جاوس في هذه الحالة ليكون عبارة عن إسطوانة دائرية قائمة طولها l ونصف قطرها ρ حيث $a<\rho<b$ فنحصل مباشرة على

$$Q = D(2\pi\rho l)$$

أما بالنسبة للشحنة الكلية على سطح الإسطوانة الداخلية هي

$$Q = \int \sigma_s ds = (2\pi a\sigma_s)l$$

وبالمقارنة نحصل على $\quad \sigma_l l = 2\pi b\sigma_s l$

$$b\sigma_s = \frac{\sigma_l}{2\pi} \qquad \vec{D} = \frac{a\sigma_s}{\rho}\vec{a}_\rho \qquad a<\rho<b$$

وبكتابة التعبير هذه النتيجة أيضا بدلالة الشحنة لوحدة الأطوال σ_l فنحصل:

$$\therefore \vec{D} = \frac{\sigma_l}{2\pi\rho}\vec{a}_\rho$$

وهذه النتيجة تتفق تماما مع الحالة التي لخط شحنة لانهائي كثافة الشحنة الطولية له هي σ_l

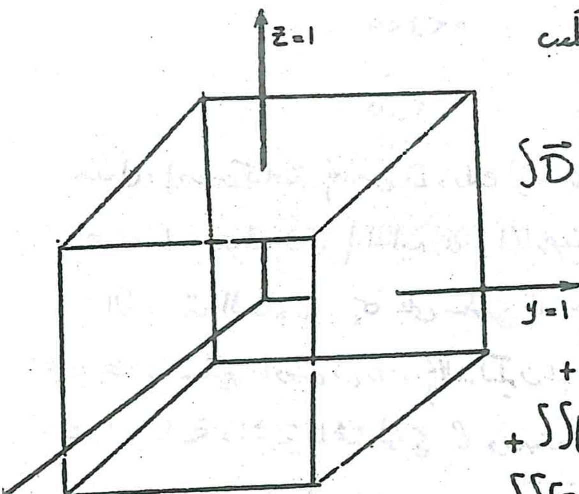
مثال :

إذا كانت كثافة التدفق تتعين من $\vec{D} = 5x e^{-y}\,\vec{i} + 2x^2 e^{-y}\,\vec{J} \quad \mu C/m^2$

إحسب التدفق الكلي الخارج من سطح المكعب المكون بـ $|x|\,,\,|y|\,,\,|z| \leq 1$

الحل :

لحساب التدفق الكلي الخارج من سطح المكعب نجد أن



$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} =$$

$$\iint [5e^{-y}\vec{i} + 2e^{-y}\vec{J}]\cdot[dy\,dz\,\vec{i}]$$

$$+ \iint [-5e^{-y}\vec{i} + 2e^{-y}\vec{J}]\cdot[-dy\,dz\,\vec{i}]$$

$$+ \iint [5x e^{-1}\vec{i} + 2x^2 e^{-1}\vec{J}]\cdot[dx\,dz\,\vec{J}]$$

$$+ \iint [5x e^{1}\vec{i} + 2x^2 e^{1}\vec{J}]\cdot[-dx\,dz\,\vec{J}]$$

$$+ \iint [5x e^{-y}\vec{i} + 2x^2 e^{-y}\vec{J}]\cdot[dx\,dy\,\vec{k}]$$

$$+ \iint [5x e^{-y}\vec{i} + 2x^2 e^{-y}\vec{J}]\cdot[-dx\,dy\,\vec{k}]$$

$$\therefore \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = 5\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-y}\,dy\,dz + 5\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-y}\,dy\,dz$$

$$+ 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-1}\,dx\,dz - 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 e^{1}\,dx\,dz$$

أي أن التدفق الكلي الخارج من سطح المكعب يساوي

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = 20\left(e - \frac{1}{e}\right) - \frac{8}{3}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$\therefore \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \frac{52}{3}\left(e - \frac{1}{e}\right) = 40.74 \quad \mu C$$

تمارين

1- سطح مغلق S يحتوي على شحنات خطية موزعة بانتظام ولها كثافة طولية $\rho_l = -\rho_0 \sin\frac{\ell}{2}\ (C/m)$ ، حيث $0 \le \ell \le \pi$. ما هو الفيض الكلي الذي يعبر السطح S .

2- شحنة موزعة في منطقة كروية حيث $r \le 2m$ ولها كثافة حجمية منتظمة تعطى بـ $\rho = -\frac{200}{r^2}\ (\mu C/m^3)$. ما هو الفيض الذي يعبر السطح $r = 1m$ ، $r = 4m$ ، $r = 500m$.

3- شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل في الإحداثيات الكروية يحيط بها سطح كروي له توزيع شحنات منتظم عند $r = a$ وله الشحنة الكلية $Q' - Q$. ما هو الفيض الذي يعبر الأسطح $r = K$ حيث $K < a$ ، $K > a$.

4- شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل . أوجد صيغة للفيض الكلي الذي يعبر مقطع من السطح الكروي مركزه عند نقطة الأصل حيث $\alpha \le \phi \le \beta$.

5- الأسطح الكروية $r = 2, 4, 6m$ تحمل شحنات كثافاتها السطحية هي $0, 6\ \mu C/m^2$ ، 100 على الترتيب . أوجد $|\vec{D}|$ عندما r تساوي $(r = 1m, 3m, 5m, 8m)$

6- نفرض أن $\vec{D} = 2r\cos\phi\ \vec{\phi_0} - \frac{\sin\phi}{3r}\vec{k}$ في الإحداثيات الإسطوانية . أوجد الفيض الذي يعبر الجزء من المستوى $z = 0$ والذي له $r \le a$ ، $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ وكذلك إذا كانت $\frac{3}{2}\pi \le \phi \le 2\pi$ حيث $\vec{D}$ هي كثافة الفيض . اعتبر أن الاتجاه الموجب للفيض هو لتسير إتجاه محور z .

7- إستعمل قانون جاوس لإيجاد كل من $\vec{E}$ و $\vec{D}$ في المنطقتين بين اسطوانتين موصلتين ومتحدتين المحور ، وذلك للمكثفات الإسطوانية إذا علمت أن الإسطوانة الداخلية لها نصف قطر a . أوجد كذلك كثافة الفيض التي تعبر السطح الإسطواني الذي نصف قطره أكبر من نصف قطر الإسطوانة الثانية .

٨- شحنة حجمية كثافتها ρ وموزعة بانتظام على حجم كروي نصف قطره $a \le r$. إستعمل قانون جاوس لتعيين كثافة الفيض $\vec{D}$. ماهي الشحنة النقطية التي يجب وضعها عند نقطة الأصل حتى ينتج عنها كثافة الفيض $\vec{D}$ عندما تكون $r < a$.

- يحتوي السطح المستوى $z = 0.5$ في المنطقة $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 2$ على كثافة شحنة $\rho_s = 2x^2 + 5y\ C/m^2$، وليس هناك شحنة في أي مكان آخر. كم هو قدر التدفق الكهربي التي يترك المنطقة المكعبة: $|x|$، $|y|$ و $|z| \le 1$.

١٠- يقع خط شحنة منتظم ذو $15\ nC/m$ على طول المحور z، ووضع لوح منتظم الشحنة ذي $4\ nC/m^2$ عند المستوى $z = 1$. (أ) ماهو التدفق الكهربي الكلي المغادر للسطح الكروي $r = 2$؟ (ب) أوجد $|\vec{D}|$ عند النقطة على السطح الكروي حيث $x = 2$
(جـ) أعد الجزء (ب) للنقطة حيث $x = 1$، $y = -0.5$، $z > 0$.

الفصل الثالث

الشغل و الطاقة للأنظمة المشحونة

سند 25 : المعادلة التفاضلية لقانون جاوس

تم ذكرنا فيما سبق كيفية تطبيق قانون جاوس لإيجاد كثافة الفيض الكهربي و ذلك بالنسبة للأسطح المتماثلة و التي تكون لها المركبة العمودية لكثافة الفيض ذات قيمة ثابتة أو صفرية و ذلك في كل موضع على السطح.

أما إذا لم يتحقق ذلك ، فإنه توجد طريقتين مختلفتين إحداهما هي الطريقة التي سوف نطبقها هنا وهي طريقة التباعد للمجالات الإتجاهية و التي تتغير بقدر بسيط من نقطة لأخرى في الفراغ.

فإذا كان التباعد في المجال الإتجاهي موجب أو سالب ، فإنه يقال في هذه الحالة أن المنطقة التي تحتوي على المجال إما منبع أو مصب على الترتيب. أي أن الفيض الكهربي ψ ينشأ من الشحنة الموجبة $+Q$ التي تكون عند المنبع حيث يكون التباعد موجب و ذلك بالنسبة للمجالات الكهربية الإستاتيكية و المغناطيسية بالمثل أيضاً.

ونظرية التباعد لجاوس يمكن إستعمالها لأي مجال إتجاهي في أي نظام إحداثيات (كارتيزي - إسطواني - كروي).

وقانون جاوس في صيغته التكاملية (العلاقة بين التكامل الحجمي و التكامل على السطح الذي يحد ذلك الحجم) بأحد الصورة المعطاة بالمعادلة (1.52)

و في ضوء نظرية جاوس للتباعد لأي مجال إتجاهي $\vec{A}$ عند نقطة ما ، لتكن في الفراغ ، فإنه يمكن كتابة

$$div\,\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\!\!\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \qquad (3.1)$$

حيث التكامل مأخوذ على عنصر السطح الذى يحد عنصر الحجم Δv المتناهى فى الصغر والذى يؤول للنقطة ρ. أى أننا يمكننا صياغة قانون جاوس للعلاقة بين كثافة الفيض والشحنة، وذلك بأخذ التكامل على عنصر الحجم Δv المحدود بعنصر السطح ΔS الذى يحده، حيث

$$\oiint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \rho \, \Delta v \qquad (3.2)$$

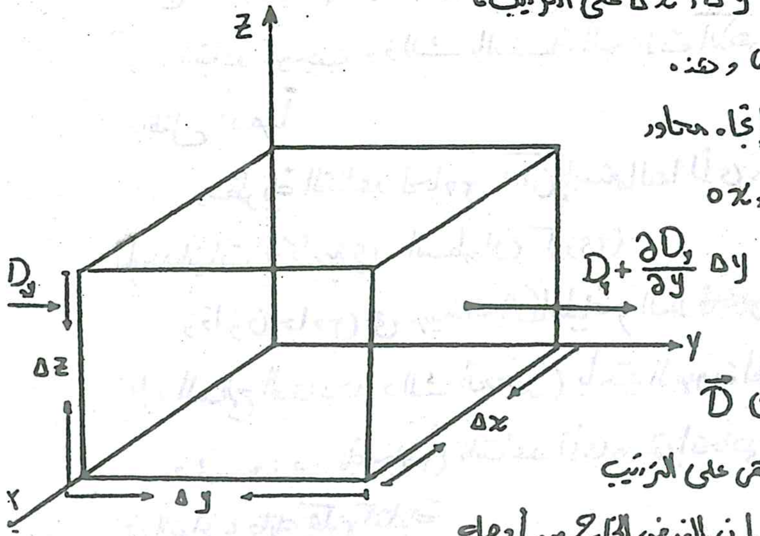
وبأخذ النهاية عندما تكون Δv كمية متناهية فى الصغر، نجد أخيراً أن

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta v} = \rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} \qquad (3.3)$$

وتلك الصيغة المعرفة فى الطرف الأيسر تسمى بتباعد كثافة الفيض D وتعتمد على نظام الإحداثيات المستخدم.

وسوف نأخذ فيما يلى كحالة خاصة الإحداثيات الكارتيزية.

نأخذ عنصر الحجم Δv عبارة عن مكعب له أوجه توازى محاور الإحداثيات وأبعاد الأطوال Δz، Δy، Δx على الترتيب، كما هو مبين بالشكل، وهذه الأطوال مأخوذة فى إتجاه محاور الإحداثيات oz، oy، ox بنفس الترتيب.



نفرض كذلك أن مركبات كثافة الفيض $\vec{D}$ فى إتجاه هذه المحاور هى على الترتيب D_z، D_y، D_x. إن الفيض الخارج من أوجه

المكعب العمودية على محور x هو

$$(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x)\Delta y \Delta z - D_x \Delta y \Delta z$$
$$= \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (3.4)$$

بالمثل لذلك توجد مساهمات أخرى مماثلة من الأوجه الأخرى العمودية :
محوري z , y ويكون الفيض الكلي خارج هذا المكعب هو

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (3.5)$$

هذه النتيجة يمكن صياغتها كالتالي

$$\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \to 0} \frac{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)$$
$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \operatorname{div} \vec{D} \qquad (3.6)$$

فاذا أخذت وحدة حجوم تفاضلية $r\,dr\,d\phi\,dz$ فى الإحداثيات الإسطوانية أو $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ فى الإحداثيات الكروية فإننا نحصل على صيغ مختلفة للتباعد (باختلاف نظام الإحداثيات) ومحتوية على مركبات الدالة المتجهة فى نظام الإحداثيات الخاص. ويمكن إستنتاج ذلك بالاستعانة بنظام الإحداثيات لذى سبق ذكره
بمقارنة المعادلتين (3.3) و (3.6) نحصل فى النهاية على

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad (3.7)$$

أو ما يساويها حيث

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (3.8)$$

وهذه هي الصيغة التفاضلية لقانون جاوس (وتسمى أيضاً بالصورة النقطية لقانون جاوس) والصيغتان (3.7) و (3.8) يمثلان أحد معادلات ماكسويل للمجالات الإستاتيكية والمعادلة (3.8) تكون صحيحة باعتبار أن ϵ_0 مقدار ثابت خلال المنطقة تحت الإختبار

اما عدا ذلك فنجد أن

$$\operatorname{div}(\epsilon.\vec{E}) = \rho \qquad (3.9)$$

و المعنى الفيزيائي لمتجه كثافة الفيض بأنه يمثل الإنسياب الخارجي للتدفق من سطح صغير مغلق لكل وحدة حجوم عندما يتقلص الحجم إلى الصفر.

و من النتيجتين السابقتين (3.7) و (3.8) يمكننا أن نستنتج أن كل من $\vec{E}$, $\vec{D}$ لهما تباعد صفري في المنطقة الخالية من الشحنة.

و الصيغ التفاضلية ، لتباعد المجال أو التدفق ، و السابق إستنتاجها في هذا البند تعتبر هامة للمجالات المتغيرة وذلك بإستثناء المجالات التي لها تماثل و في جوار المنطقة المجاورة للشحنة النقطية يكون المجال ليس له نفس القيمة عند المواضع المختلفة.

و بالعودة مرة أخرى للمعادلة (3.7) نجد أنه على الرغم من أن الحدود الفردية في الطرف الأيسر لتلك المعادلة ، قد تكون غير صفرية إلا أن المحصلة الكلية لمجموع هذه الحدود دائماً مساوياً للصفر.

ولبيان ذلك ، نفترض أننا وضعنا شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل. متجه الموضع $\vec{r}$ ، لنقطة ما في الفراغ ، له المركبات x, y, z في الإحداثيات الكارتيزية.

أي أن المجال الكهربي عند أي نقطة في الفراغ يكون له ثلاث مركبات مأخوذة في إتجاه المحاور الكارتيزية.

و المركبة E_x ، لشدة المجال الكهربي في إتجاه المحور x ، تتعين من

$$E_x = \frac{Q\,x}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$= \frac{Q\,x}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

بتفاضل هذه المركبة بالنسبة لـ x نحصل على

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}\right)$$

وكذا بالنسبة لكل من $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ يكون لهما نفس القيمات ولكن

مع استبدال x بكل من y , z على نفس الترتيب . وبجمع المركبات المختلفة

نحصل من المركبة على النتيجة التالية

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{r^5}\right) = 0$$

أى أن تباعد المجال الكهربى الناتج عن شحنة نقطية (موضوعة عند نقطة

أصل الإحداثيات الكارتيزية) تساوى صفر .

أما فى حالة الإحداثيات الكروية — وذلك على إعتبار أنه يوجد لدينا توزيع

حجمى منتظم للشحنات فى حجم كروى نصف قطره a — فإنه فى المنطقة $r > a$

تكون كثافات الشحنات لها قيمة صفرية . وشدة المجال الكهربى $\vec{E}$ يكون

لها مركبة فى إتجاه نصف القطر حيث $\vec{E} = E_r \vec{r}_0$.

وتباعد شدة المجال الكهربى عند كل منطقة (داخل وخارج الحجم الكروى) تتعين من

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\sigma_v r}{3\epsilon_0}\right)\right] = \frac{\sigma_v}{\epsilon_0} \quad ; \quad r \le a$$

أما فى المنطقة $r > a$ نجد أن تباعد المجال الكهربى يتعين من

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \quad ; \quad r < a$$

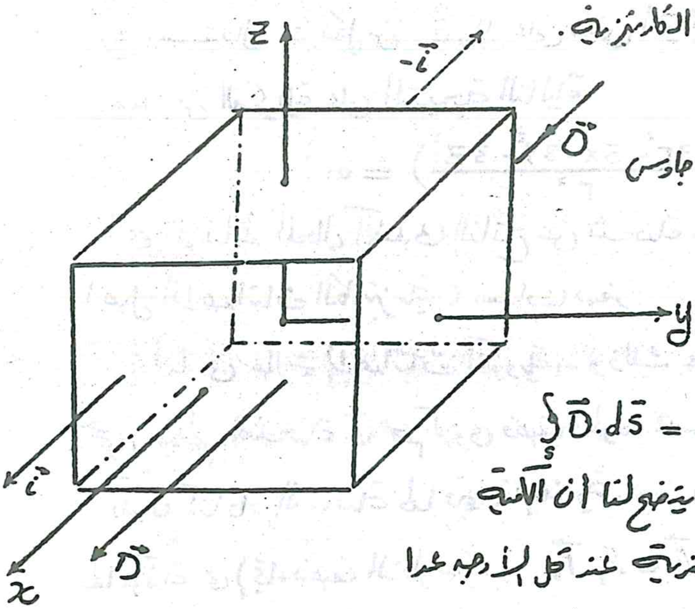
* وضح هذه النتيجة الأخيرة لتباعد المجال ؟

كذلك فى أى نظام للإحداثيات يمكن إثبات النتيجة السابقة (الخاصة

بتلاشى تباعد المجال الكهربى فى المناطق الخالية من أى توزيع للشحنات الكهربية

مثال :

إذا علمت أن كثافة الفيض $\vec{D}=5e^{2x}\,\vec{i}$. حقق نظرية التباعد لجاوس وذلك بالنسبة للمكعب طول ضلعه $2m$ ومركزه عند نقطة الأصل وجوانبه موازية لمحاور الإحداثيات الكارتيزية .



الحل ــــــ .

ان الصيغة العامة لنظرية جاوس تتحدد من العلاقة

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_v (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,dv$$

ومن المعطى لقيمة $\vec{D}$ يتضح لنا ان الكمية $\vec{D}\cdot d\vec{s}$ لانها صفرية عند كل الأوجه عدا الوجهين $x=-1$ ، $x=1$

$$\therefore \oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{\substack{front\\x=1}} \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_{\substack{back\\x=-1}} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 5e^{2}\,dy\,dz - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 5e^{-2}\,dy\,dz$$

وبإجراء التكامل نحصل في النهاية على أن

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = 40\sinh 2$$

والآن علينا إيجاد التكامل الحجمي للطرف الثاني في نظرية جاوس فنحصل على أن

$$\int (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 10\,e^{2x}\,dx\,dy\,dz = 40\sinh 2$$

وبمقارنة نتيجتي التكاملين السطحي والحجمي نجد أنهما يحققان نظرية جاوس.

1 - إذا أعطيت الدوال المتجهة :

$= r^2\sin\theta\,\vec{r}_o + 13\phi\,\vec{\theta}_o + 2r\,\vec{\phi}_o$ ، $\vec{A} = 2\rho\cos^2\phi\,\vec{\rho}_o + 3r^2\sin z\,\vec{\phi}_o + 4z\sin^2\phi\,\vec{k}$

أوجد تباعد كل منها

2 - أوجد تباعد الدالة المتجهة $\vec{A}$ عند نقطة الأصل حيث

$$\vec{A} = e^{5x}\,\vec{i} + 2\cos y\,\vec{j} + 2\sin z\,\vec{k}$$

3 - أوجد $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ للدوال المتجهة التالية

$\vec{A} = \frac{10}{\rho^2}\vec{\rho}_o + 5e^{-2z}\,\vec{k}$ at the point $(2, \phi, 1)$

$\vec{A} = \left(\frac{10\sin^2\theta}{r}\right)\vec{r}_o$ at the point $(2, \pi/4, \phi)$

4 - أوجد كثافة الشحنة في الإحداثيات الكروية حيث كثافة الفيض $\vec{D}$ تعطى من

$$\vec{D} = \frac{10}{r^2}\left[1 - e^{-2r}(1 + 2r + 2r^2)\right]\vec{r}_o$$

5 - أوجد تباعد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناشئ عن خط شحنة لانهائي منتظم.

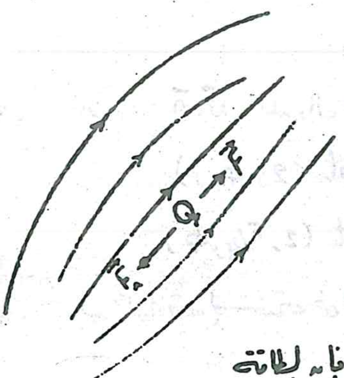
6 - إذا كانت كثافة الفيض $\vec{D} = \frac{r^3}{5}\vec{r}_o$ في الإحداثيات الكروية. حقق نظرية التباعد لجاوس وذلك للحجم المحتوى بـ $r = 1$ و $r = 2$. أعد حل هذه المسألة وذلك في الإحداثيات الإسطوانية وذلك للحجم المحدود بـ $z = 10$ ، $z = 0$ ، $r = 2$

7 - في المنطقة $r \leq 1$ (في الإحداثيات الكروية) : $\vec{D} = \left(\frac{4r}{3} - \frac{r^3}{5}\right)\vec{r}_o$

وفي المنطقة $r > 1$: $\vec{D} = \frac{5}{r^2}\vec{r}_o$. أوجد كثافة الشحنة في كلا المنطقتين.

بند 26 : الشغل المبذول (الطاقة المستنفذة) في تحريك شحنة نقطية في مجال كهربي .

* سبق لنا تعريف شدة المجال الكهربي على أنها القوة التي تؤثر على وحدة الشحنات الموجبة النقطية التي نرمز لمقدارها بنفس رمز شدة المجال .



عند وجود شحنة نقطية Q في مجال كهربي $\vec{E}$ فإن هذه الشحنة تكون واقعة تحت تأثير قوة تحركها في إتجاه المجال.

إذا حاولنا تحريك هذه الشحنة في إتجاه عكس المجال فيجب التأثير على هذه الشحنة بقوة مساوية للقوة المبذولة بواسطة قوة المجال الكهربي ولكنها في الإتجاه المضاد وذلك يتطلب بذل شغل. أما إذا حركنا الشحنة في إتجاه المجال فإن الطاقة المستنفذة تكون سالبة لأن قوى المجال هي التي ستبذل شغلا.

القوة التي تؤثر على شحنة نقطية Q لكي تحركها مسافة معينة dl في إتجاه المجال الكهربي $\vec{E}$ هي

$$\vec{F}_e = Q\vec{E} \qquad (3.10)$$

حيث $\vec{F}_e$ هي القوة الناتجة عن المجال الكهربي $\vec{E}$. والقوة الخارجية التي يجب أن نطبقها على هذه الشحنة النقطية حتى تظل في حالة إتزان تحت تأثير قوة المجال $\vec{E}$ هي

$$\vec{F} = -Q\vec{E} \qquad (3.11)$$

والشغل هو عبارة عن القوة المؤثرة خلال إزاحة معينة. لذلك فإن العنصر التفاضلي للشغل dW يمكن الحصول عليه بتطبيق القوة المؤثرة على الجسيم المشحون والذي يتحرك بسرعة ثابتة خلال عنصر تفاضلي للإزاحة dl .

والشغل المبذول قد يكون موجب أو سالب على حسب إتجاه عنصر الإزاحة المتناظرة للشحنة Q

وذلك بالنسبة للقوة التي تم تطبيقها $\vec{F}_a$

وعندما تكون القوة ليست في إتجاه واحد مع الإزاحة dl فيجب أن نستعمل هنا مركبة القوة في إتجاه الإزاحة حيث ...

$$dW = F\cos\theta\, dl = \vec{F}.d\vec{l}$$

$$= Q\vec{E}.d\vec{l} \qquad (3.12)$$

والشغل المبذول بمؤثر خارجي في المجال الكهربي $\vec{E}$ هو

$$dW = -Q\vec{E}.d\vec{l} \qquad (3.13)$$

والشغل الكلي المطلوب لتحريك شحنة مسافة محدودة يتحدد من التكامل

$$W = -Q\int_{init}^{final}\vec{E}.d\vec{l} = -Q\int_A^B\vec{E}.d\vec{l} \quad \text{joules} \qquad (3.14)$$

وهذا التكامل الخطي في المعادلات السابقة يعبر عن الشغل المبذول لتحريك شحنة نقطية Q من موضع لآخر في المجال وهو تكامل على طول مسار محدد لحاصل الضرب القياسي للمجال المتجه وطول المسار المتجه التفاضلي. النقطتان A و B هما نقطتي البداية والنهاية على طول المسار المختار. وإذا كان المجال الكهربي منتظمي (له قيمة ثابتة) فإن

$$W = -Q\vec{E}.\int_A^B d\vec{l} \qquad (3.15)$$

دبند 27: فرق الجهد الكهربي بين نقطتين.

* يمكن تعريف جهد النقطة B بالنسبة للنقطة A على أنه الشغل المبذول في تحريك وحدة الشحنات الموجبة Q_u من النقطة A الى النقطة B حيث

$$V_{BA} = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{l} \quad \text{volt} \qquad (3.16)$$

ويجب أن نلاحظ أن الموضعين الإبتدائي والنهائي للشحنة يتحددان على النهاية السفلى والعليا من التكامل (3.16) ، هذا التكامل له قيمة ثابتة لا تعتمد على المسار الذي يصل

النقطتين A، B لأن المجال الإلكتروستاتيكي هو مجال محافظ، حيث تعتمد طاقة الجهد على موضع الشحنة ولا تعتمد على المسار. أي أن طاقة الجهد عند نقطة ما لها متجه الموضع $\vec{r}$ يمكن كتابتها $Q\,V(r)$. حيث الدالة $V(r)$ تسمى بدالة الجهد الإلكتروستاتيكي.

إن الشغل المبذول بالقوة الإلكتروستاتيكية يمثل بالطاقة الجهد المفقودة للشحنة، والتي لها

$$(\text{طاقة الجهد عند } A) - (\text{طاقة الجهد عند } B) = -Q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.17)$$

بفرض أن $\vec{r}_A$، $\vec{r}_B$ هما متجهات الموضع للموضعين A، B على الترتيب، فإن الفرق في طاقة الجهد بين الموضعين A، B يصبح

$$Q\,V(r_B) - Q\,V(r_A) = -Q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.18)$$

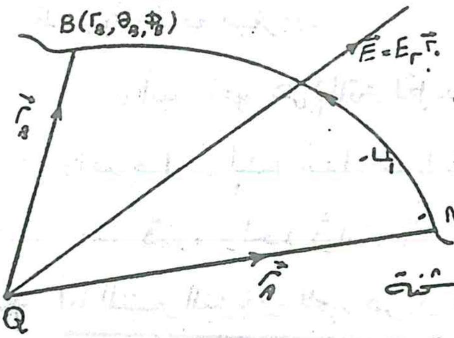
وأخذ القسمة للطرفين في هذه المعادلة على Q نحصل على

$$V(r_B) - V(r_A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.19)$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن الجهد هو دالة قياسية في الموضع وأن قيمته تتعين عند أي نقطة معطاة. فعندما تكون فرق الجهد في المعادلة (3.19) موجباً فإنه يجب بذل شغل لتحريك الشحنة من الموضع A إلى الموضع B. وعندئذ يقال أن جهد النقطة B أعلى من جهد النقطة A.

ومن الممكن أن نعرف مرجعاً صفرياً للجهد عند اللانهاية وذلك باختيار قيمة صفرية للجهد عند اللانهاية وذلك لنظام معزول من الشحنات. أي أنه لشحنة نقطية معزولة عند نقطة الأصل يمثلنا تعيين الجهد $V(r)$ من الشغل المبذول لنقل شحنة نقطية من اللانهاية إلى نقطة لها متجه موضع $\vec{r}$.

ومن الملاحظ أن الشغل المبذول تعتمد على قيمة r وليس على المتجه $\vec{r}$. ويمكن فحص التعريف السابق لفرق الجهد لشحنة نقطية وذلك بأخذ مسافات نصف قطرية r_A، r_B وذلك كمثال للتعبير عن شحنة نقطية Q موضوعة عند نقطة الأصل حيث



$$\vec{E} = E_r \vec{r}_\circ \qquad (3.20)$$

أما عنصر المسافة الإتجاهية من الفراغ عند الإنتقال من الموضع الإبتدائي A الى الموضع النهائي B ، وذلك في مجال الشحنة النقطية Q الموضوعة عند نقطة الأصل، فيتعين من

$$\vec{dl} = dr\,\vec{r}_\circ + r\,d\theta\,\vec{\theta}_\circ + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{\phi}_\circ \qquad (3.21)$$

$$V(r_B) - V(r_A) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ}\int_A^B \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad (3.22)$$

فإذا كانت $r_A > r_B$ فإن النتيجة في تلك المعادلة تكون موجبة وبذلك يكون فرق الجهد بين الموضعين A ، B موجباً . والنتيجة المستنتجة بتلك المعادلة تعني أن الطاقة المبذولة بواسطة المجال الخارجي قد أُستنفذت في إحضار الشحنة الموجبة (شحنة الإختبار) من r_A إلى r_B وذلك في مجال الشحنة النقطية Q .

فإذا تحركت النقطة A إلى اللانهاية، فإن النتيجة السابقة تصبح

$$V(r_B) = Q/4\pi\epsilon_\circ r_B \qquad (3.23)$$

وهذه النتيجة تمكننا بسهولة من تعريف ما يسمى "المرجع الصفري للجهد" وهو أن نعتبر $V(r_A) = 0$ (عندما تتراجع النقطة A إلى اللانهاية). وفي الحالة العامة نجد أن قيمة الجهد المطلق منسوبة لنقطة إسناد محددة، لها جهداً صفرياً، تتعين من

$$V(r) = Q/4\pi\epsilon_\circ r \qquad (3.24)$$

هذه المعادلة تعطي تعريفاً الجهد المتناسب عند أي نقطة على مسافة قدرها r من

شحنة نقطية Q موضوعة عند نقطة الأصل وذلك على إعتبار أننا سنأخذ الجهد عند اللانهاية كمرجع صفرى.

إن أبعاد الجهد هى الطاقة لكل وحدة شحنة ، ووحدة الجهد هى الفولت.

واحد جول من الشغل يبذل عندما تتحرك شحنة مقدارها واحد كولوم خلال فرق جهد قدره واحد فولت.

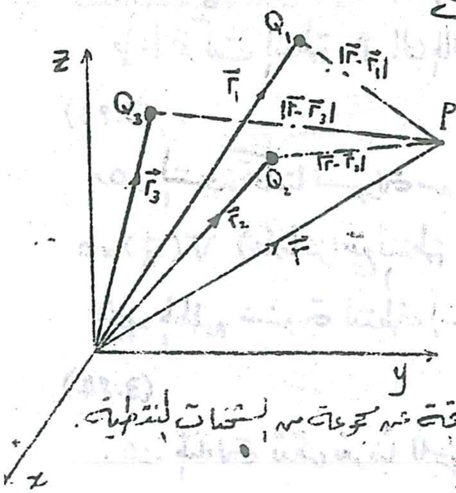
* أما المعنى الفيزيائى للجهد هو أن $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ Joules من الشغل يجب أن يبذل لحمل أو نقل وحدة الشحنات "شحنات مقدارها واحد كولوم" من مالانهاية الى أى نقطة على بعد r meter من الشحنة Q.

هناك أيضا طريقة أخرى للتعبير عن الجهد $\phi(r)$ بدون إختيار مرجع صفرى خاص حيث يمكن كتابة الجهد بإضافة مقدار ثابت إختيارى (مرجع صفرى) يعين بطريقة غير مباشرة حيث

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C \quad , \text{where } C \text{ is a constant} \qquad (3.25)$$

مع ملاحظة أن فرق الجهد بين نقطتين ليس دالة فى الثابت C.

بند 28: الجهد لتوزيع معين من الشحنات



سبق لنا تعريف الجهد عند نقطة بأنه "الشغل المبذول فى نقل وحدة الشحنات الموجبة من مالانهاية إلى هذه النقطة (المراد تعيين شدة المجال عندها).

, المجال عنصر الشحنة لأنه يمكن تطبيق مبدأ التراكب على مجموعة من المجالات الناتجة عن مجموعة من الشحنات النقطية.

نفرض أنه لدينا نظام معين من الشحنات له مجال معين عند أي نقطة لا يعتمد على المسار المأخوذ في حمل الشحنة إلى تلك النقطة.

قيمة الجهد الناشئ عن الشحنة Q_1 الموضوعة عند $\vec{r}_1$ تشتمل على المسافة $|\vec{r}-\vec{r}_1|$ من Q_1 إلى النقطة P والتي لها متجه موضع $\vec{r}$ حيث نوجد قيمة الجهد $V(r)$ وأن

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|} \tag{3.26}$$

أما الجهد الناشئ عن شحنتين نقطيتين Q_1 ، Q_2 على مسافتين $|\vec{r}-\vec{r}_1|$ ، $|\vec{r}-\vec{r}_2|$ من Q_1 و Q_2 إلى نقطة المجال P فيعطى من

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_2|} \tag{3.27}$$

وهكذا لعدد n من الشحنات فإننا نجد أن

$$V(r) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_m|} \tag{3.28}$$

أما إذا مُثلت كل شحنة نقطية على أنها عنصر صغير لتوزيع متصل للشحنة الحجمية $\rho\,\Delta v$ فإن الجهد الكلي في هذه الحالة يمكن كتابته كالآتي

$$V(r) = \frac{\rho(r_1)\Delta v_1}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{\rho(r_2)\Delta v_2}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_2|} \cdots\cdots + \frac{\rho(r_n)\Delta v_n}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_n|} \tag{3.29}$$

وعندما نجري المجموع على أن يصبح عدد العناصر الشحنية لانهائياً فإننا نحصل على

$$V(r) = \int_{vol} \frac{\rho(r')\,dv'}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{3.30}$$

حيث $\rho(r')$ هي كثافة الشحنة الحجمية و dv' هو عنصر الحجم التفاضلي. وحاصل ضرب هذين المتغيرين يحدد العنصر التفاضلي للشحنة $\rho(r')\,dv'$ عند نقطة r'.

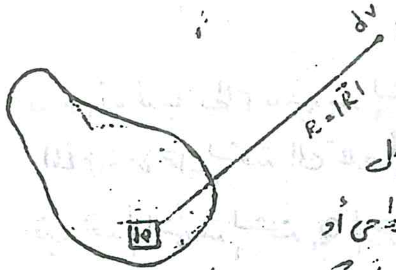
المسافة $|\vec{r}-\vec{r}'|$ هي المسافة من عنصر الشحنة (المنبع) إلى نقطة المجال.

والمعادلات السابقة (4.30) يمكن إعادة صياغتها كالآتي

$$V(r) = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon R} = \int \frac{\rho\,dv}{4\pi\epsilon R} \tag{3.31}$$

...شحنة من هذه الحالة لها توزيع

حجمي معين له الكثافة $\rho\ (C/m^3)$ حيث



$dQ = \rho\, dv$. ويجب أن نلاحظ هنا أن R

تتغير من موضع لآخر خلال الحجم المأخوذ عليه التكامل

السابق . أما إذا كانت الشحنة لها توزيع سطحي أو

خطي فإن العلاقة السابقة (3.31) تكون صحيحة أيضاً ولكن مع

استبدال الكثافة الحجمية ρ بكثافة سطحية ρ_s أو خطية ρ_l . ومما هو جدير بالذكر

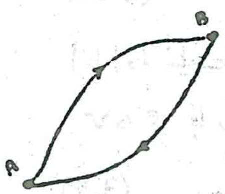
أن قيمة الجهد السابقة الجهد $V(P)$ عند نقطة خارجية منسوبة على أساس أن الجهد

صفر بالنسبة إلى مرجع جهد صفري عند ما لا نهاية وهو مقياس مضبوط للشغل المبذول

في إحضار وحدة الشحنات من ما لا نهاية إلى نقطة في المجال عند P حيث يوجد الجهد.

والشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية من موضع ما

ولتكن A إلى نقطة أخرى B في مجال كهربي ساكن $\vec{E}$



له نفس القيمة على أي مسار آخر بين نفس هذين الموضعين

A, B . فإذا كان الشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية Q

عبر مسار مغلق يساوي الصفر حيث

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = zero \qquad (3.32)$$

فإن هذا المجال الإتجاهي $\vec{E}$ يطلق عليه مجال محافظ.

والمعادلة السابقة (3.32) صحيحة في حالة المجالات الإستاتيكية بينما تكون هذه

النتيجة غير صحيحة عندما يتغير أي من المجال الكهربي $\vec{E}$ أو المجال المغناطيسي H

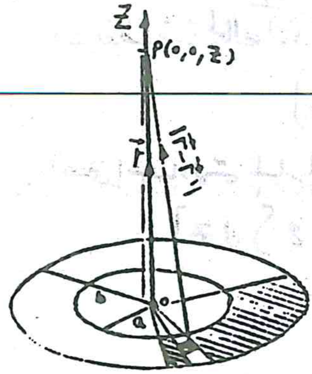
مع الزمن

مثال : أوجد الجهد عند النقطة $P(0,0,z)$ في الفضاء الحر لكل من توزيعات الشحنة الآتية في المستوى $z = 0$: (أ) ρ_s منتظمة على القرص $0 \le \rho \le a$

(ب) ρ_s منتظمة على حلقة مستوية حيث $a \le \rho \le b$.

(جـ) ρ_s منتظمة على القطاع $0 \le \rho \le a$ ، $\alpha \le \phi \le \beta$

الحل :



(أ) لتعيين الجهد عند النقطة P والناتج عن القرص المنتظم الشحنة نجد أنه يتعين من العلاقة

$$V = \int_s \frac{\rho_s \, \rho \, d\rho \, d\phi}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

فنحصل في النهاية على

$$V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + a^2} - z \right\}$$

(ب) في هذه الحالة نجد أن حدود التكامل سوف تختلف عن تلك التي في النتيجة السابقة وذلك لاستبدال القرص بالحلقة المعرفة هنا ، حيث تصبح

$$V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + b^2} - \sqrt{z^2 + a^2} \right\}$$

(جـ) باستخدام حدود القطاع المعرفة هنا نجد أن

$$V = \int_s \frac{\rho_s \, \rho \, d\rho \, d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{(\beta - \alpha)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

وبإجراء التكامل نحصل في النهاية على

$$V = \frac{(\beta - \alpha)\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + a^2} - z \right\}$$

من الملاحظ هنا أنه يمكن تطبيق تلك النتائج التي حصلنا عليها في الأجزاء الثلاثة السابقة لأي قيم للبارامترات المختلفة المعطاة والممثلة بكل من z و a و ρ_s وكذلك β و α ، والحصول على القيم العددية المناظرة للقيم المعطاة .

إذا كانت أن شدة المجال $\vec{E}$ هي $\vec{E} = 10y\,\vec{i} + 10x\,\vec{j} - 2\vec{k}$ V/m

أوجد الشغل المبذول في حمل شحنة مقدارها 3C من $(0,-2,8)$ إلى $(5,3,23)$

على طول المسار: (أ) $z = 2x^2 - y$ ، $y^2 = x + 4$ (ب) الخط المستقيم المباشر.

الحل:

(أ) الشغل المبذول في نقل شحنة قدرها QC من موضع لآخر في الفراغ يتحدد من

$$W = -Q \int_{init}^{final} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

حيث تعطى شدة المجال الكهربي بدلالة الإحداثيات الكارتيزية وبذلك تصبح W كالآتي

$$W = -3\left(\int 10y\,dx + \int 10x\,dy - \int 2\,dz\right)$$

وباستخدام معادلتي المسار المعطاة في (أ) نجد أن هذه التكاملات تصبح

$$W = -3\left\{10\int 2y^2\,dy + 10\int (y^2-4)\,dy - 2\int dz\right\}$$

$$= -3\left(10\int_{-2}^{3}(3y^2-4)\,dy - 2\int_{8}^{23} dz\right)$$

$$W = -3\left[10\left(y^3 - 4y\right)\Big|_{-2}^{3} - 2\,z\Big|_{8}^{23}\right]$$

$$\therefore W = -3\left[150 - 30\right] = -360\ \text{J}$$

نلاحظ أن هذه النتيجة نفسها يمكن الحصول عليها باستخدام معادلتي المسار في (أ) ولكن بإجراء التكاملات على متغيرات أخرى باستعمال التعويضات المناسبة.

(ب) في هذه الحالة لإيجاد الشغل المبذول بواسطة المجال تم لنقل الشحنة المعطاة من الموضع الابتدائي إلى الموضع النهائي على مسار الخط المستقيم المباشر بين هذين الموضعين، يجب علينا أولاً أن نعين معادلات الخط المستقيم. ومن الواضح أن أي اثنين من المعادلات الثلاث الآتية لمستويات مارة بالخط تكونان كافيتين لتعريف الخط، حيث

$$x = y + 2 \quad , \quad 3x = z - 8 \quad , \quad 3y = z - 14$$

وباستعمال الصيغة التكاملية السابقة للشغل المبذول مع إستخدام التعويض المناسب نجد

$$W = -Q\left[10\int(x-2)\,dx + 10\int(y+2)\,dy - 2\int dz\right]$$

$$W = -3\left[10\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^5 + 10\left(\frac{y^2}{2}+2y\right)\Big|_{-2}^{3} - 30\right]$$

وبالتعويض بحدود التكامل المعطاة نحصل من النتيجة على أن

$$W = -3\left[10\left(\frac{5}{2}\right)+10\left(\frac{21}{2}+2\right)-30\right]$$

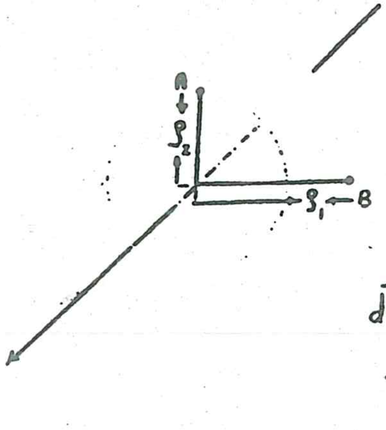
$$\therefore W = -3[25+125-30] = -360\ J$$

وهاتين النتيجتين في الجزئين (أ) و(ب) تعطيان نفس القيمة للشغل على الرغم من إختلاف شكل المسار في كلا الحالتين. وهذا يدل على أن الشغل المبذول لا يعتمد على المسار المعطى ولكن يتوقف على الموضعين الإبتدائي والنهائي فقط.

مثال:

خط شحنة منتظم، منطبق على محور x، وكثافات الشحنة الطولية هي $\sigma_\ell = 200\ \mu C/m$. فإذا كان ρ_1 و ρ_2 هما أنصاف أقطار مسارين دائريين مركزيهما عند خط الشحنة، فاوجد الشغل المبذول في نقل شحنة ما ولتكن Q المسار الدائري لأي من المسارين المعروفين. أوجد كذلك فرق الجهد بين نقطتين على

الحل:



الشغل المبذول من نقل الشحنة Q حول أي من المسارين الدائريين يساوي صفر، حيث

$$W = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

حيث $\vec{E}$ و $d\vec{\ell}$ يتحددان من

$$d\vec{\ell} = \rho\, d\phi\, \vec{\phi}_0 ,\quad \vec{E} = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0\rho}\vec{\rho}_0$$

أما فرق الجهد بين نقطتين على السطحين فهو يعطى من

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_B^A \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0 \rho}\, d\rho$$

$$V_{AB} = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0 \rho}\, d\rho = -\frac{}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_2/\rho_1)$$

وعليه نضع V_{AB} في الصيغة التالية

$$V_{AB} = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_1/\rho_2)$$

ونلاحظ أن إشارة فرق الجهد تختلف باختلاف الموضعين الابتدائي والنهائي اللذان بينهما فرق الجهد.

أما قيمة الشغل المبذول في نقل شحنة موجبة Q من B الى A فهي تساوي

$$W = \frac{Q\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_1/\rho_2)$$

وله قيمة موجبة نظراً لأن $\rho_1 > \rho_2$.

بند 29: تدرج الجهد

مما سبق نجد أنه توجد طريقتين مختلفتين لتعيين الجهد: إحداهما من خلال التكامل الخطي على متجه شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ والثانية من خلال التكامل الحجمي للشحنة لو حصلنا على إننا أنه يوجد لها توزيع حجمي.

هاتين الطريقتين ليستا عمليتين في أغلب الأحيان لأن كل من شدة المجال أو التوزيع الحجمي للشحنة غالباً ما يكونا غير معروفين.

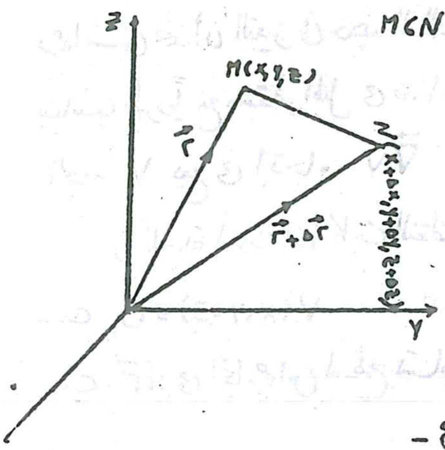
وهدفنا الحالي هو استنتاج شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ من الجهد وذلك من خلال العلاقة العامة للتكامل الخطي بين كل من شدة المجال الكهربي والجهد الكهربي حيث

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.33)$$

وهذه العلاقة تمكن أن نستخدم بسهولة في الاتجاه الطردي أو العكسي لإيجاد $\vec{E}$ أو V. والمعادلة (3.33) يمكن أن تطبق بسهولة لإيجاد فرق الجهد بين نقطتين متجاورتين بينهما مسافة صغيرة جداً. وبتفاضل الصيغة التكاملية للجهد نحصل بالنسبة لأخرى صادرة لها جزءاً

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.34)$$

حيث دالة الجهد V مأخوذة على أنها دالة قياسية في الموضع V(x,y,z)، $\vec{E}$ هو مجال حافظ. ومن الشكل الموضح أمامنا نجد أن النقطتين M، N المتجاورتين في المنطقة، والتي فيها الدالة القياسية للجهد، معرفة تماماً.

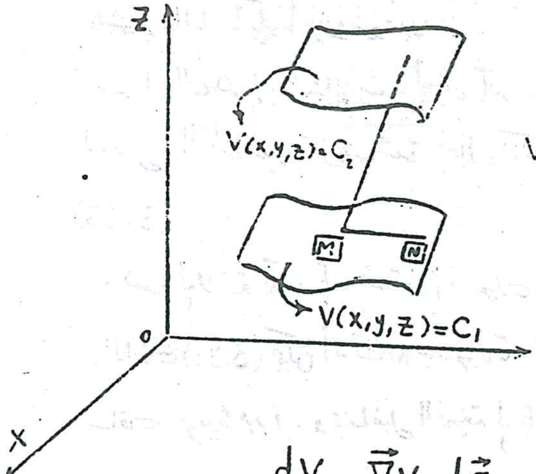


فمتجه $d\vec{r}$ التي تصل بين هذين الموضعين M، N يعرف من الإحداثيات الكارتيزية كالآتي

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

مع ملاحظة أن المعادلة التكاملية (3.33) لها خاصية أنها يمكن تطبيقها على مسار قصير جداً أو لذى على أساس أن تكون $\vec{E}$ ثابتة مؤدية إلى تزايد في فرق الجهد بين الموضعين المتجاورين. لكن حسب المتجهات نجد أن التغير في الجهد بين نقطتين M ، N يعطى بالعلاقة

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (3.36)$$



حيث يعطى المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ من

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (3.37)$$

كذلك ميل الدالة القياسية $V(x,y,z)$ يعطى من

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \qquad (3.38)$$

وبمقارنة المعادلات (3.35) و (3.36) و (3.38) نجد أن

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \qquad (3.39)$$

حيث $\vec{\nabla} V$ هو ميل أو تدرج الدالة القياسية V ، ويسمى أيضاً بالمجال الاتجاهي.

ومما سبق نجد أن التغير في جهد الدالة القياسية V ، لقيم $|d\vec{r}|$ الثابتة ، في اتجاه $d\vec{r}$ يتناسب طردياً مع مسقط الميل في هذا الاتجاه. وكذلك نجد أن أقصى تزايد موجب لدالة الجهد V يقع في اتجاه $\vec{\nabla} V$

ومن ناحية أخرى إذا كانت النقطتان M ، N تقعان على سطح واحد لتساوي الجهد حيث $V(x,y,z)=C_1$ عندئذ $dV=0$ ، وهذا يعني أن $\vec{\nabla} V$ يكون عمودياً على $d\vec{r}$ حيث $d\vec{r}$ في اتجاه مماس لسطح تساوي الجهد C_1. وفي الواقع نجد أنه باختيار مناسب

خوصي للنقطة M نجد أن dl تميل لمماس أذيب عند النقطة M مارا بأي نقطة M.
لذلك نجد أن ميل الدالة البناسية V يجب أن يكون عموديا على السطح الخارج عند النقطة
حيث أن الميل $\vec{\nabla} V$ في إتجاه تزايد V وتشير من $V(x,y,z)=c_1$ إلى $c_2=(x,y,z)$
حيث $c_2 > c_1$. أي أن التدرج في دالة الجهد الوسيطة هو مجال متجه وتكون عموديا على
سطح تساوي الجهد.

بمقارنة المعادلات (3.34) و(3.39) مع الأخذ في الإعتبار إلى أن $dr = dl$ هي إزاحة
صغيرة إفتراضية نجد في النهاية أن

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (3.40)$$

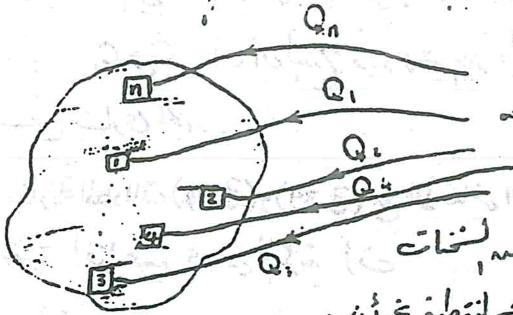
ونلاحظ أن الميل في الإحداثيات المختلفة كالإسطوانية، الكروية يمكن إشتقاقه في ضوء
دراستنا للتفاضل المتجهات. حيث كل حد في الميل يحتوي على المشتقة الجزئية للدالة V
بالنسبة للمسافة في الإتجاه الخاص بمتجه الوحدة.

ومن النتيجة (3.40) نجد أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ تساوي ميل الدالة الجهدية V ولكن بإشارة سالبة

بند 30 : تعيين الطاقة المستنفذة في المجالات الكهربية الإستاتيكية.
من تعريف مفهوم الشغل نجد أنه يمثل الطاقة المستنفدة في تحريك شحنة نقطية (شحنة
إختبار) في مجال كهربي. ومن ذلك نجد أن إحضار شحنة موجبة من مالانهاية
في مجال شحنة أخرى موجبة مثبتة، بواسطة مؤثر خارجي، يتطلب بذل شغل بواسطة
المؤثر عند حمل الشحنة النقطية حتى موضع قريب من الشحنة الثابتة ثم يمسك بها هناك.
إن الطاقة المستنفذة في إحضار هذه الشحنة لموضع الجديد تمثل طاقة جهد مبذولة بالمؤثر
الخارجي. وعند زوال ذلك المؤثر الخارجي فإن هذه الشحنة تكتسب عجلة مبتعدة عن الشحنة الثابتة
مكتسبة طاقة حركية لذاتها وتكون لها المقدرة على بذل شغل نتيجة للطاقة التي تحتفظ بها.

لإيجاد طاقة الجهد الموجودة في نظام معين من الشحنات لابد أن نعين أولاً الشغل المبذول

بجزء خارجي في وضع هذه الشحنات في أماكنها. كالتالي :



نفترض أن لدينا فراغ صفر (خالي من الشحنات)

حيث شدة المجال الكهربي $E = 0$

خلال هذا الفراغ.

ولإيجاد الشغل المطلوب لنقل عدد معين من الشحنات

ولتشكيل توزيع معين ولتكن n من الشحنات النقطية نجد أن :

الشغل المبذول في نقل الشحنة النقطية الأولى Q_1 من ما لا نهاية إلى الموضع $\boxed{1}$ يساوي صفر نظراً لعدم وجود مجال هناك. أما الشغل المبذول في نقل الشحنة الثانية Q_2 من ما لا نهاية إلى الموضع رقم $\boxed{2}$ يساوي حاصل ضرب الشحنة Q_2 والجهد الناشئ عن تلك الشحنة نتيجة لوجود الشحنة Q_1. كذلك الحال الشغل الناتج عن نقل الشحنة Q_3 من ما لا نهاية إلى الموضع رقم $\boxed{3}$ يساوي حاصل ضرب هذه الشحنة والجهد الكلي الناتج عن هذه الشحنة نتيجة لوجود الشحنات Q_1, Q_2 وهكذا بالنسبة لبقية الشحنات ، أي أنه يمكن كتابة :

الشغل الناتج لوضع $Q_1 = \text{Zero}$ أو $W_1 = 0$

الشغل الناتج لوضع $Q_2 = Q_2 V_{2,1}$ حيث $V_{2,1}$ هو الجهد عند موضع الشحنة Q_2 نتيجة لوجود الشحنة Q_1 عند الموضع رقم $\boxed{1}$ وهكذا حيث

الشغل الناتج لوضع $Q_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$. ومن النهاية نجد أن الشغل الكلي لوضع عدد n من الشحنات يساوي طاقة جهد المجال الكلي $= W_E$

$$\therefore W_E = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n$$

$$= 0 + Q_2 V_{2,1} + (Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}) + (Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}) + \cdots \quad (4.$$

حيث W_E هي عبارة عن الطاقة الكلية المختزنة في المجال الكهربي لتوزيع الشحنات المعطاة
وإذا كانت هذه الشحنات قد تم ترتيبها في مواضع عكسية بالنسبة للمواضع السابقة بمعنى أن

$$W_2 = Q_2 V_{2,1} = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{21}} = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_{1,2} \qquad (3.42)$$

وهكذا بالنسبة لبقية الشحنات نجد في النهاية أن المعادلة (3.41) يمكن صياغتها كالآتي

$$W_E = 0 + Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \cdots\cdots \qquad (3.43)$$

بجمع النتيجتين (3.41) و (3.43) يمكن صياغتها كالآتي

$$\begin{aligned} W_E = {} & \frac{1}{2} Q_1 \left(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + V_{1,5} + \cdots\cdots \right) \\ & + \frac{1}{2} Q_2 \left(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + V_{2,5} + \cdots\cdots \right) \\ & + \frac{1}{2} Q_3 \left(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + V_{3,5} + \cdots\cdots \right) \\ & + \frac{1}{2} Q_4 \left(V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3} + V_{4,5} + \cdots\cdots \right) + \cdots\cdots \qquad (3.44) \end{aligned}$$

ومن هنا ملاحظة أن الجهود التي بين الأقواس تمثل كل منها مجموع الجهود الناتجة عن توزيع
هذا الشحنة عند النقطة التي يوجد عندها هذا الجهد المحصل، أي أن

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + V_{1,5} + \cdots\cdots \qquad (3.45)$$

وهذه النتيجة (3.45) تمثل الجهود الكلية عند الشحنة Q_1 نتيجة لوجود الشحنات
$Q_2, Q_3, Q_4, \cdots\cdots$، وهكذا بالمثل بالنسبة لبقية الأقواس وفي النهاية يمكننا كتابة المعادلة
(3.44) في الصيغة التالية

$$W_E = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \cdots\cdots \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} Q_m V_m \qquad (3.46)$$

وعندما يكون توزيع الشحنة متصلاً فإن الطاقة الكلية المختزنة في منطقة توزيع الشحنة يمكن لنا
كتكامل على عنصر حجمي للشحنة وفي النهاية نجد أن الطاقة الكلية المختزنة يمكن كتابتها في الصورة:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho V \, dv \qquad (3.46)$$

وهذه صيغة خاصة للطاقة المختزنة لأي نموذج شحنة آخر مختلف يؤخذ له في الإعتبار كأن يكون له توزيع سطحي منتظم مثلاً .

من الممكن إشتقاق صيغ مناظرة للنتيجة (3.46) حيث يمكن التعبير عن الطاقة المختزنة بدلالة الشحنة ، بدلالات شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ أو كثافة الفيض $\vec{D}$ باستعمال تحليل المتجهات حيث يمكن كتابتها

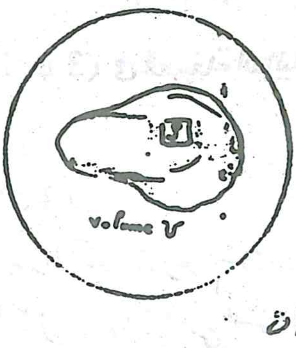
$$\vec{\nabla}\cdot(V\vec{D}) = V(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \vec{D}\cdot(\vec{\nabla} V)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} (\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) V \, dv = \frac{1}{2} \int_{vol} [\vec{\nabla}\cdot(V\vec{D}) - \vec{D}\cdot(\vec{\nabla} V)] \, dv \qquad (3.47)$$

باستخدام نظرية جاوس يمكن تحويل التكامل الحجمي الأول إلى تكامل على السطح الذي يحد ذلك الحجم حيث

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\substack{spherical \\ surface}} (V\vec{D})\cdot d\vec{s} - \frac{1}{2} \int_{vol} [\vec{D}\cdot(\vec{\nabla} V)] \, dv \qquad (3.48)$$

حيث التكامل السطحي الأول مأخوذ على سطح كروي نصف قطره R وهذا السطح يحتوي على الحجم v المأخوذ له بالإعتبار في التكامل (4.48) والذي يحتوي بداخله على الشحنة الكلية التي لها كثافة توزيع منتظمة ρ .



فعندما يكون السطح الكروي كبير جداً نجد أن الشحنة الحجمية المحتواة بداخله تبدو وكأنها شحنة نقطية . وحيث أن كثافة الفيض $\vec{D}$ تتناسب عكسياً مع R^2 ، والجهد V يتناسب عكسياً مع R بينما عنصر السطح للتكامل سيظهر أكثر فأكثر كجزء من السطح الكروي ويتزايد مع زيادة R^2 لذلك نجد أن

المقدار المتكامل يقترب من الصفر باتجاه للمقدار $1/R$. وأخيراً نجد أن التكامل والتكامل الأول قيمته للصفر عندما نزداد بحيث تظهر السطح الكروي تزايداً لانهائيا ..

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\substack{spherical \\ surface}} (V\vec{D}) \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (3.49)$$

$$W_E = -\frac{1}{2}\int_{vol}[\vec{D}\cdot(\vec{\nabla} V)]dv = \frac{1}{2}\int_{vol}[\vec{D}\cdot\vec{E}]dv \quad ، \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (3.50)$$

وهذه النتيجة التكاملية للطاقة الكلية المخزونة من المجال الكهربي لتوزيع الشحنات فقط يمكن كتابتها كالآتي

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2}\int_{vol} \frac{D^2}{\epsilon} dv \qquad (3.51)$$

وهذه النتيجة تعني أنه يمكن تعيين الطاقة الكلية المخزونة في المجال الكهربي الناتج من توزيع الشحنات ، إما بدلالة شدة المجال الكهربي أو كثافة الفيض مع الأخذ في الاعتبار انفاذية الوسط .

مثال :

أوجد الطاقة المختزنة في نظام مكون من شحنتين نقطيتين حيث $Q_1 = 5nC$ و $Q_2 = 3nC$ ، ومفصولتين بمسافة قدرها $d = 0.5 m$.

الحل :

حيث أن الشحنات هنا هي توزيعات نقطية فإن

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2$$
$$= Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d}\right) + Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d}\right)$$
$$\therefore W_E = Q_1Q_2/4\pi\epsilon_0 d$$

وبالتالي فإن القيمة العددية للطاقة المختزنة تتعين من

$$W_E = -270 \ nj$$

وذلك بعد التعويض بقيم الكميات المعطاة في المسألة.

قد يكون من غير المألوف أن تكون الطاقة المختزنة هنا لها قيمة سالبة

مع أن القيمة التكاملية للطاقة وكذلك $\frac{1}{2} \in E^2$ تكون بالضرورة موجبة.

وضح ذلك ؟

مثال :

أوجد قيمة الطاقة المختزنة في نظام مكون من أربعة شحنات نقطية موجبة، مثبتة

عند رؤوس مربع طول ضلعه $5m$، ومقدار كل منها $10 \ nC$. أوجد كذلك

قيمة الطاقة في حالة وجود شحنتين فقط منها وتقعان على نهايتي أحد قطريه.

الحل :

الطاقة المختزنة في هذه الحالة تتعين من

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + Q_4V_4 = \frac{20 \times 10}{4\pi\in_0}\left[\frac{2}{5} + \frac{1}{5\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4Q_1V_1 = 4Q_1\left[\frac{Q_2}{4\pi\in_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\in_0 d\sqrt{2}} + \frac{Q_4}{4\pi\in_0 d}\right]$$

$$\therefore W_E = 2Q_1V_1 = 974.56 \ nj \quad : d = 5$$

أما في الحالة الثانية، يمكننا الإستعانة بالمثال السابق، فنحصل من المعادلة على

$$W_E = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\in_0 R_{13}}$$

وبعد التعويض نحصل في النهاية على

$$W_E = 127.28 \ nj$$

تمارين

1- أوجد الشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية $Q=-20\,\mu C$ من نقطة الأصل إلى النقطة $(4,2,0)$ في المجال

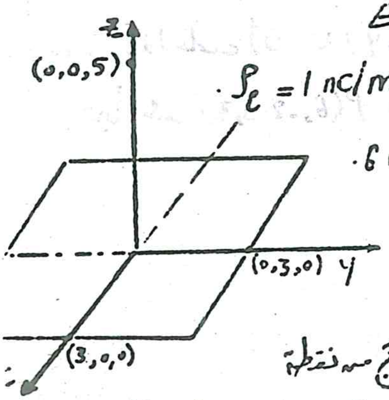
$$\vec{E} = 2(x+4y)\vec{i} + 8x\,\vec{j}$$

وذلك من خلال المسار $x^2 = 8y$.

2- أوجد الفرق في كمية الشغل المطلوب لإحضار شحنة نقطية $Q = 2\,nC$ من ما لا إلى $r = 2m$. وكذلك من اللانهاية إلى $r=4m$ ، في المجال الكهربي $\frac{10^5}{r}\vec{r}_0\,(V/m)$

3- أوجد الشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية $Q = 3\,\mu C$ من $(\ldots,\pi,0)$ إلى النقطة $(2,\frac{\pi}{2},2)$ ، في الإحداثيات الإسطوانية ، وذلك في المجال الكهربي

$$\vec{E} = \frac{10^3}{\rho}\vec{\rho}_0 + 10^3 z\,\vec{k}$$



4- شحنة خطية منتظمة الكثافة حيث $\rho_\ell = 1\,nC/m$.

وضع خط الشحنة في شكل مربع طول ضلعه $6\,m$.

أوجد الجهد عند النقطة $(0,0,5)m$ ، أنظر الشكل .

5- إشتق صيغة للجهد عند نقطة على بعد d من الأمتار في إتجاه نصف القطر الدائري الخارج من نقطة متوسط خط شحنة نهائي طوله ℓ من الأمتار وله كثافة شحنة خطية منتظمة (C/m)

6- خط شحنة منتظم كثافة الشحنة الطولية له هي $\rho_\ell = 2nC/m$. ويقع في المستوى $z=0$ وموازياً للمحور x عند النقطة $y = 3m$. أوجد فرق الجهد Φ_{BA} بين A , B حيث $A(0,0,0)$ ، $B(10,0,4)$

٧- إذا أعطيت المجال الكهربي $\vec{E} = -5e^{-\rho/6}\,\vec{\rho}_o$ في الإحداثيات الإسطوانية

أوجد الطاقة المخزونة في الحجم $\rho \le 2a$ ، $0 \le z \le 5a$.

٨- إذا كان الجهد $V = 3x^2 + 4y^2$ V أوجد الطاقة المخزونة في الحجم $1 \le x \le 1m$

$0 \le y \le 1m$ ، $0 \le z \le 1m$

٩- يعطى مجال جهد كهروستاتيكي بالعلاقة $V = 1000\sqrt{r}$ V . ما هو مقدار الطاقة المخزونة داخل كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها عند نقطة الأصل في فضاء حر.

١٠- إذا علمت أن $V = 2x^2y + 20z - 4\ln(x^2+y^2)$ V في فضاء حر ما عليه فجد عند $P(6,-2.5,3)$ لـ: (أ) V ، (ب) $\vec{E}$ ، (جـ) $\vec{D}$ ، (د) ρ .