مقرر تطبيقية (2)

ديناميكا & استاتيكا

طلاب الفرقة الأولى

رياضيات شعبة عربي

كلية التربية

الحركة التوافقية البسيطة (SIMPLE HARMONIC MOTION)

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وفي الباب الثاني علـى حركـة الجسيم في المستوى ، وبعد ذلك في الباب الثالث درسنا نوع من أنواع الحركة في مسـتوى مثل حركة المقذوفات. في هذا الباب سنتعرف على نوع آخر من أنـواع الحركـة في خـط مستقيم تسمى " الحركة التوافقية البسيطة ".

تعريف : يُقال أن جسيم يتحرك في خط مستقيم حركة توافقية بسيطة إذا كانت القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً متجهه نحو نقطة ثابتة على هذا المسار ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناسب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفـرض أن O هـي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذى سيمثله المحور Ox وأن موضع الجسيم عند اللحظـة t هو p حيث $Op = x$

من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x ; \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{1}$$

والاشارة سالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الحركة O. ولإيجاد سرعة الجسيم عند أى موضع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \tag{2}$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج

$$v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + c \qquad (3)$$

حيث c مقدار ثابت يمثل ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج الى شروط ابتدائية ولذلك سنفرض أن أقصى مسافة للجسم هى a والتى عندها يسكن الجسم (أى أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c = \frac{1}{2}\omega^2 a^2$ ونكتب المعادلة (3) فى الصورة .

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \qquad or \qquad v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

$$v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الإشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجسم متحركاً في الاتجاه الموجب (أى في اتجاه Ox – تزايد x) وسنعتبر الإشارة السالبة إذا كان الجسم متحركاً في الاتجاه المضاد.

ولمعرفة موضع الجسم عند أى لحظة نضع $v = \frac{dx}{dt}$ في المعادلة (4) (على اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل يكون

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega\int dt \, , \qquad \therefore \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad (5\ a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل يسمى " زاوية الطور " ويعيّن من الشروط الأبتدائية للحركة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$\therefore x = a\sin\left(\omega t + \epsilon\right) \qquad (5\ b)$$

وهذه المعادلة تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالة الاشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $\left|\sin\left(\omega t + \epsilon\right)\right| \le 1$ و من المعادلة (5 b) يكون

$$|x| = |a\sin(\omega t + \epsilon)| = |a||\sin(\omega t + \epsilon)| \le a \qquad \Rightarrow -a \le x \le a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x = a$ و $x = -a$ ولذلك فإن a تسمى سعة الحركة.

ويمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x = \pm a$ ، كما تكون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x = 0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x أو $-x$ متساو.

الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية هي حركة تذبذبية، فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويعرف الزمن الدورى على أنه الزمن الذى يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من $x = a$ الى $x = -a$ ثم العودة مرة ثانية الى النقطة $x = a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبة كاملة وحيث أن

$$x = a\sin(\omega t + \epsilon) = a\sin(\omega t + \epsilon + 2\pi)$$

$$= a\sin\left(\omega\underbrace{\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'} + \epsilon\right)$$

$$= a\sin(\omega t' + \epsilon). \qquad t' = t + \frac{2\pi}{\omega}$$

أى أن x عند الزمن t هى نفسها عند الزمن $t' = t + \frac{2\pi}{\omega}$ وذلك يعنى أن النقطة تعود الى وضعها الأول بعد زمن $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وهو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدورى).

ولأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن وهو ما يُعرف بالتردد.

التردد Frequency

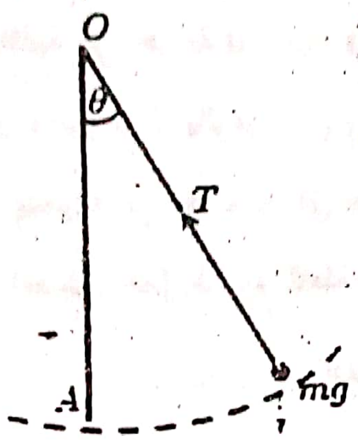
يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) (سنرمز له ν)– وهو مقلوب الزمن الدوري – أى أن

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (6)$$

البندول البسيط

إذا عُلقت كتلة صغيرة في طرف خيط غير مرن (ساق خفيفة) مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما باشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تُركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O ونصف قطرها هو طول الخيط l. حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg وقوة شد الخيط T ،

باستعمال قانون نيوتن فإن معادلة الحركة في اتجاه المماس لقوس الدائرة



$$m\,l\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

وعندما تكون الأزاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\sin\theta \cong 1$ ومن ثم المعادلة السابقة تأخذ الصورة

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta, \qquad Or \quad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. المعادلة الأخيرة تمثل حركة توافقية بسيطة زمنها الدورى يتعين من

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهذه العلاقة تستخدم في علم الطبيعة لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول معلوم ℓ. كما أن البندول الذى تستغرق ذبذبته ثانيتين أى بسجل ثانية واحدة في المشوار الواحد يعرف بـ "بندول الثواني".

قانون هوك

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. والصيغة الرياضية لهذا القانون هي $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه وعدد لفاته الى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell}x$$

حيث λ ثابت ويسمى بمعامل المرونة للخيط أو الزنبرك ، x تمثل الأستطالة الحادثة ، ℓ الطول الطبيعي للخيط ، T قوة الشد في الخيط. (الأستطالة الحادثة هى الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي)

كما ذكرنا ما يسرى على الخيط المرن يسرى على الزنبرك في حالة الأستطالة فقط. أما في حالة الأنضغاط فتختفى قوة الخيط خلافاً لحالة الزنبرك وهذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم إغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

مثال ١

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت العجلة التي يتحرك بها هى $4\ ft\sec^{-2}$ عندما يكون بعد الجسيم عن مركز الذبذبة $2\ ft$ فأوجد زمن الذبذبة . وإذا كانت السرعة عند مركز الذبذبة هي $8\ ft\sec^{-1}$ فأوجد سعة الذبذبة ؟

الحل

حيث أن $\ddot{x} = -\omega^2 x$ وكانت $\ddot{x} = 4$ عندما $x = 2$ وبالتالي يكون $\boxed{\omega^2 = 2}$ (لاحظ أن مقدار العجلة $|\ddot{x}| = \omega^2|x|$) وكما أن زمن الذبذبة يعطى بـ $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ فإن $\tau = \sqrt{2}\pi \sec$.

وحيث أن $v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$ ومن المعطيات فإن $v = 8$ عندما $x = 0$ ومن ثم

$$64 = 2(a^2 - 0). \qquad \Rightarrow a = 4\sqrt{2}\ ft$$

وهي تمثل سعة الذبذبة.

<u>مثال ٢</u>

يتحرك جسم تبعاً للعلاقة $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. اثبت أن حركة الجسم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وزاوية الطور؟ .

الحل

حيث أن $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ بإجراء التفاضل بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = -wA\sin(\omega t) + wB\cos(\omega t)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة للزمن

$$\ddot{x} = -w^2\underbrace{\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)}_{x}$$

$$\boxed{\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x}$$

المعادلة الأخيرة تعنى أن حركة الجسم هي حركة توافقية بسيطة.

وحيث أنه من المعادلة (5b) يكون

$$x = a\sin\left(\omega t + \epsilon\right) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\therefore a\sin(\omega t)\cos\epsilon + a\cos(\omega t)\sin\epsilon = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلة الأخيرة ، نجد أن

$$a\sin\epsilon = A, \qquad a\cos\epsilon = B$$

ومن هاتين العلاقتين يمكن الحصول على زاوية الطور ϵ بقسمة العلاقتين $\tan\epsilon = \dfrac{A}{B}$ و

للحصول على سعة الذبذبة ، بتربيع العلاقتين والجمع نحصل على $a^2 = A^2 + B^2$ أو $a = \sqrt{A^2 + B^2}$.

مثال ٣

إذا تعينت سرعة جسيم يتحرك في خط مستقيم من العلاقة $v^2 = n^2\left(8ax - x^2 - 12a^2\right)$ فاثبت أن حركة الجسيم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وأوجد الزمن اللازم للحركة من $x = 4a$ الى $x = 6a$ ؟

الحل

حيث أن $v^2 = n^2\left(8ax - x^2 - 12a^2\right)$ بإجراء التفاضل بالنسبة الى x نحصل على

$2v\frac{dv}{dx} = n^2(8a - 2x)$

$$v\frac{dv}{dx} = n^2\left(4a - x\right)$$

ومنها $\ddot{x} = n^2(4a - x)$ أى أن عجلة الجسيم تتناسب طرديا مع بعده عن نقطة ثابتة (مركز الذبذبة) هي $4a$، كما أن $\omega = n$

(توضيح افترض أن $y = 4a - x$ فإن المعادلة $\ddot{x} = n^2(4a - x)$ تأخذ الصورة $\ddot{y} = -n^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أى عند $x = 4a$)

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v = 0$ في العلاقة $v^2 = n^2\left(8ax - x^2 - 12a^2\right)$ ومنها

$$x^2 - 8ax + 12a^2 = 0. \quad \Rightarrow \left(x - 2a\right)\left(x - 6a\right) = 0. \quad \Rightarrow x = 2a,\ x = 6a$$

وهي أطراف الذبذبة أى ان سعة الذبذبة $2a$ والزمن T اللازم للحركة من $x = 4a$ الى $x = 6a$ يمثل ربع الزمن الدورى

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{n}. \qquad \Rightarrow T = \frac{1}{4}\tau = \frac{\pi}{2n}.$$

مثال ٤

إذا كانت v, f, τ ترمز الى سرعة وعجلة و زمن الذبذبة لنقطة مادية تتحرك حركة توافقية بسيطة فاثبت أن $f^2\tau^2 + 4\pi^2 v^2$ مقدار ثابت ثم أوجد القيمة العددية لهذه الكمية الثابتة إذا كان زمن الذبذبة 2 sec وسعة الذبذبة 2 ft ؟

الحـــل

حيث أن $f = -\omega^2 x$ ، وأيضاً $v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$ والزمن الدوري $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ومن تلك العلاقات

$$f^2\tau^2 = \omega^4 x^2\left(\frac{4\pi^2}{\omega^2}\right) = 4\pi^2\omega^2 x^2. \qquad 4\pi^2 v^2 = 4\pi^2\omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

وبجمع هاتين العلاقتين $f^2\tau^2 + 4\pi^2 v^2 = 4\pi^2\omega^2 a^2 = const.$ والآن عنـــدما $a = 2\,ft.$ $\tau = 2$ sec. فإن $\omega = \tau$ ونجد أن القيمة العددية للكمية الثابتة السابقة هى

$$f^2\tau^2 + 4\pi^2 v^2 = 4\pi^2\omega^2 a^2 = 4\pi^2\left(\pi^2\right)4 = 16\pi^4$$

مثال ٥

عن موضعين ما

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u_1, u_2 سرعتي الجسيم على بعدين b_1, b_2 من مركز الذبذبة . أثبت أن الزمن الدوري يكون مساوياً $2\pi\sqrt{\dfrac{b_2^2 - b_1^2}{u_1^2 - u_2^2}}$ ؟

u_1 u τ

a_1 a_2

الحـــل

حيث أن $v^2 = w^2\left(a^2 - x^2\right)$ حيث a هى سعة الحركة ولكن من معطيات المسألة نجد أن

$$u_1^2 = \omega^2\left(a^2 - b_1^2\right), \qquad u_2^2 = \omega^2\left(a^2 - b_2^2\right)$$

ومن العلاقتين السابقتين نحصل على

$$u_1^2 - u_2^2 = \omega^2\left(b_2^2 - b_1^2\right). \qquad Or \qquad \omega^2 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{b_2^2 - b_1^2}$$

ومن ثم يكون الزمن الدورى $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{b_2^2 - b_1^2}{u_1^2 - u_2^2}}$ وهو المطلوب.

مثال ٦

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة أثناء جزء من الحركة — مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الحركة — هى y_1, y_2, y_3 عند نهايات ثلاث ثوانٍ متتالية

ثالث أن زمن الذبذبة هو $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{y_1+y_3}{2y_2}\right)}$ ؟

الحـــل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركـــة التوافقيـــة البـــسيطة هـــى $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$

ونفرض أن زمن وصول الجسيم الى الموضع y_1 هو t وبالتالى زمن وصوله الى الموضع y_2 هو $t+1$ وزمن وصوله الى y_3 هو $t+2$ وبالتالى يكون .

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a\sin(\omega t + \epsilon) \\
y_2 &= a\sin(\omega(t+1) + \epsilon) \\
y_3 &= a\sin(\omega(t+2) + \epsilon)
\end{aligned}
$$

ومن المعادلات الثلاث السابقة ، بجمع الاولى والثالثة نجد أن

$$
\begin{aligned}
y_1 + y_3 &= a\left\{\sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon)\right\} \\
&= 2\underbrace{a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{y_2}\cos\omega \\
&= \boxed{2y_2\cos\omega}
\end{aligned}
$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$$\therefore \quad \cos\omega = \frac{y_1+y_3}{2y_2}. \qquad Or \quad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{y_1+y_3}{2y_2}\right)$$

ولكن الـــزمن الـــدورى يعطـــى بـــ $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ وبـــالتعويض عـــن قيمـــة ω يكـــون

$\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{y_1+y_3}{2y_2}\right)}$ ونلاحظ أنه يجب أن يتحقق الشرط $-2y_2 \le y_1 + y_3 \le 2y_2$.

مثال ٧

يعمل بندول بسيط 21 ذبذبة كاملة كل 44 sec وإذا قصر طوله بمقدار 47.6875 فإنه يعمل 21 ذبذبة كاملة كل 33 sec . أوجد مقدار عجلة الجاذبية عند مكان البندول ؟

الحل

بفرض أن طول البندول هو ℓ وأن الطول الجديد هو $\ell' = \ell - 47.6875$ وحيث أن الزمن الدوري في الحالة الاولى يعطى بـ $\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = \frac{44}{21}$ وفي الحالة الثانية يعطى بـ $\tau_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} = \frac{33}{21}$ وبتربيع هاتين العلاقتين والطرح نجد أن

$$\frac{4\pi^2}{g}(\ell' - \ell) = \frac{44^2 - 33^3}{21^2}, \qquad \ell' - \ell = 47.6875$$

$$g = \frac{21 \times 21 \times 4\pi^2 \times 47.6875}{11 \times 77} \simeq 9.81\ m\,\text{sec}^{-2}$$

مثال ٨

زنبرك طوله الطبيعي ℓ ومعامل مرونته λ . ربط في أحد طرفيه جسم كتلته m وثبت الطرف الآخر من الزنبرك على منضدة أفقية ملساء. فإذا شد هذا الجسم في اتجاه الزنبرك ثم ترك ليتحرك. أثبت أن الحركة توافقية بسيطة ، وأوجد زمنها الدوري؟

الحل

نفرض أن النقطة المثبتة من الزنبرك هي A ، وأن الجسم أزيح من النقطة O (موضع الاتزان) مسافة ما ثم ترك ليتحرك. القوة الوحيدة المؤثرة على حركة الجسم في اتجاه المحور Ox هي الشد T فقط وتكون معادلة حركة الجسم عندما يكون على بعد x من مركز الحركة O هي

$$m\ddot{x} = -T$$

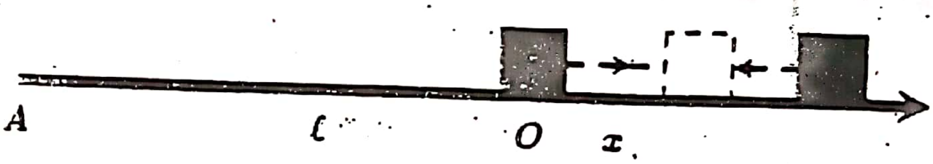
وحيث أن معامل المرونة للزنبرك هو فطبقاً لقانون هوك فإن

$$T = \frac{\lambda}{\ell}(\ell + x - \ell) = \frac{\lambda}{\ell}x$$

وبالتالي نحصل على

$$\ddot{x} = -\omega^2 x; \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m\ell}}$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة وزمنها الدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{\lambda}}$.



مثال ٩

عُلِّق جسيم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زُحزح الجسيم من موضع أتزانه مسافة رأسية صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبة في الثانية . فإذا كان طول الخيط عند موضع الأتزان هو ℓ ، أوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الأستطالة مساوية للطول الطبيعي هو $m\left(4\pi^2 n^2 \ell - g\right)$ ؟

الحـــل

حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الأتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط وأن T° هو قيمة قوة الشد في الخيط عند الأتزان، في حالة الأتزان تؤثر على الخيط قوتي الــوزن والشد فقط ومن قانون هوك

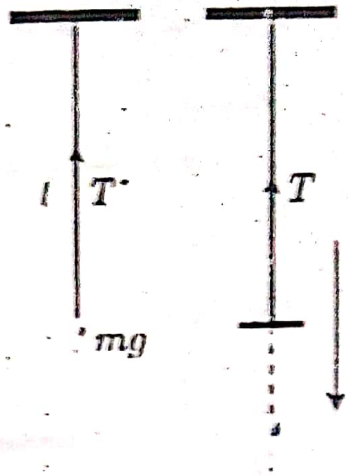
$$mg = T^\circ = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \tag{1}$$

فإذا أعطينا الجسيم ازاحة x بعيداً عن موضع الأتزان في هذه الحالة تكون معادلة حركته هي

$$m\ddot{x} = mg - T \tag{2}$$

حيث T هو الشد في الخيط ويساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + x - \ell_0)$ ، $\ddot{x}$ هي عجلة الجسم ،

بالتعويض عن قيمة الشد في المعادلة (2) وباستخدام المعادلة (1)



$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + x - \ell_0)$$

$$= mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) - \frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$= \cancel{mg} - \cancel{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$= -\frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{\lambda}{m\ell_0}x = -\omega^2 x. \qquad \omega^2 = \frac{\lambda}{m\ell_0}$$

المعادلة الأخيرة هي معادلة حركة توافقية بسيطة وزمنها الدوري يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell_0}{\lambda}}$ والتردد يتعين من $n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{m\ell_0}}$ ونجد من هذه العلاقة $\frac{\lambda}{\ell_0} = (2\pi n)^2 m$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$mg = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4n^2\pi^2 m(\ell - \ell_0)$$

$$\ell - \ell_0 = \frac{g}{4n^2\pi^2}. \qquad \Rightarrow \ell_0 = \ell - \frac{g}{4n^2\pi^2}$$

وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعيين قيمة الشد نستخدم قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4n^2\pi^2 m\ell_0$$

$$= 4n^2\pi^2 m\left(\ell - \frac{g}{4n^2\pi^2}\right)$$

$$\therefore T = 4n^2\pi^2 m\ell - mg = m\left(4n^2\pi^2\ell - g\right)$$

وهي قيمة الشد المطلوبة.

الخلاصة

- الحركة التوافقية البسيطة هي مسقط حركة جسم يدور في دائرة بسرعة زاوية منتظمة ω إذا أسقطت هذه الحركة على قطر من أقطار الدائرة ، معادلات الحركة التوافقية .

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

$$x = a\sin\left(\omega t + \epsilon\right), \quad Or \quad x = a\cos\left(\omega t + \epsilon'\right)$$

- يخضع المتحرك حركة توافقية بسيطة يتردد بين الموضعين $x = \pm a$ لقوة تتناسب تناسباً طردياً مع بعده عن مركز الذبذبة ومتجهة دائماً إلى المركز .
- تنعدم السرعة عند أطراف الحركة وتبلغ حدها الأقصى ωa في مركز الذبذبة
- الزمن الدوري للذبذبة $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ كما أن الزمن الدوري للبندول البسيط هو $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.
- تخزن حركة جسم متأثر بقوى زنبركية مستخدمين قانون نيوتن الأساسي للحركة نحصل على المعادلة التفاضلية التي تمثل الحركة.

تمارين

(١) إذا كانت سرعة جسيم يتحرك على خط مستقيم تعطى بالعلاقة $v^2 + 4x^2 - 2x - 6 = 0$ حيث x بعد الجسيم عن نقطة ثابتة فاثبت أن هذه الحركة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد مركزها وسعتها وزمنها الدوري ؟

(٢) إذا كانت سرعة جسيم يتحرك على خط مستقيم تعطى بالعلاقة $v^2 = -16x^2 + 32x + 48$ حيث x بعد الجسيم عن نقطة ثابتة فاثبت أن هذه الحركة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد مركزها وسعتها وزمنها الدوري وأكبر قيمة للسرعة وأكبر قيمة للعجلة ؟

(٣) في حركة توافقية بسيطة كانت السرعة $8\ ft\,sec^{-1}$ وكانت العجلة $-16\ ft\,sec^{-2}$ عندما كانت الإزاحة $4\ ft$ عن مركز الحركة. أوجد السعة والزمن الدوري ؟

(٤) عند نهايات ثلاث أزمنة متتالية كانت المسافات التي قطعتها نقطة تتحرك حركة توافقية بسيطة هي $1, 5, 5$ مُقاسة في نفس الاتجاه من مركز الحركة. اوجد زمن الذبذبة الكاملة ؟

(٥) تتحرك نقطة مادية حركة توافقية بسيطة متسع الحركة لها هو a والزمن الدوري τ. أثبت أن النقطة المادية سوف تكون على مسافة x من المركز الجاذب والذي بدأت منه الحركة بعد زمن قدره $\frac{\theta\tau}{2\pi}$ وتكون سرعتها حينئذ $\frac{2\pi a\cos\theta}{\tau}$ حيث $x = a\sin\theta$ ؟

(٦) نقطة مادية كتلتها m ، تتحرك على المحور Ox تحت تأثير قوة مركزية umx متجهة نحو نقطة الأصل ، عندما كانت $t = 2\ sec$ فإن النقطة المادية تمر بنقطة الأصل ، وعندما كانت $t = 4\ sec$ فإن سرعتها $4\ ft\,sec^{-1}$ عيّن الحركة. وإذا كان الزمن الدوري $16\ sec$ فاوجد السعة؟

(٧) تعين الأزاحة لجسيم يتحرك على المحور Ox بدلالة الزمن من العلاقة $x = 45\cos\frac{\pi t}{4} - 28\sin\frac{\pi t}{4}$. أثبت أن الحركة توافقية بسيطة ، وأوجد سعتها ، وزاوية الطور ، وأكبر سعة ، وأكبر عجلة ، وزمنها الدوري؟

(٨) علق جسم كتلته m في خيط مرن طوله الطبيعي ℓ_0 ومعامل مرونته λ ، فإذا أزيح الجسم من موضع اتزانه مسافة رأسية الى أسفل. فاثبت أنه يتحرك حركة توافقية بسيطة ، وأوجد زمنها الدوري؟

(٩) ثبت أحد طرفي خيط مرن طوله الطبيعي ℓ_0 ومعامل مرونته λ في نقطة A وربط في طرفه الآخر جسم كتلته m . فإذا قذف الجسم رأسياً لأسفل بسرعة u. اثبت أن أكبر عمق يصل إليه الجسم أسفل A هو $\ell_0\left(2+\sqrt{3+\dfrac{u^2}{g\ell_0}}\right)$ ؟

(١٠) ربط جسم كتلته m بأحد طرفي خيط مرن معامل مرونته λ وطوله الطبيعي ℓ_0 وربط الطرف الآخر للخيط في نقطة ثابتة A على مستوى أفقي أملس وبدأ الجسم حركته من A بسرعة ثابتة u . أثبت أن الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة ، وأوجد المسافة التي يقطعها من A حتى يسكن أول مرة ، ثم أثبت أنه يعود مرة أخرى الى A بعد زمن قدره $\dfrac{2\ell_0}{u}+\pi\sqrt{\dfrac{m\ell_0}{\lambda}}$ ؟

(١١) علق جسم كتلته m في منتصف خيط مرن C مثبت طرفاه في نقطتين A, B ، يقعان في مستوى أفقي واحد . وفي وضع اتزان الجسم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية $60°$ مع الرأسي ويكون طول كل منهما ℓ_0 ، معامل مرونة الخيط يساوي mg ، فإذا زُحزح الجسم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي وترك ليتذبذب . اوجد زمن ذبذبته ؟

$$\left\{Ans.\quad 2\pi\sqrt{\frac{2\ell_0}{5g}}\right.$$

(١٢) عُلِّق جسم كتلته m بأحد طرفي خيط مرن معامل مرونته $\frac{1}{2}mg\tan^2\alpha$ حيث زاوية α حادة موجبة ، وطوله الطبيعي ℓ_0 وربط الطرف الآخر للخيط في نقطة ثابتة A إذا ترك الجسم ليسقط من السكون من النقطة A . برهن على أن أقصى عمق يصل إليه أسفل النقطة A هو $\ell_0\cot^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ وأنه يصل الى هذا العمق بعد مضي زمن قدره

Projectile Motion - حركة المقذوفات

حركة المقذوفات واحد من التطبيقات على حركة الجسيمات في المستوى. والمقذوف هو جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير الجاذبية. وهناك ثلاثة حالات يمكن دراستها لهذا المقذوف

1- مع إهمال تأثير مقاومة الهواء.

2- مع اعتبار تأثير مقاومة الهواء.

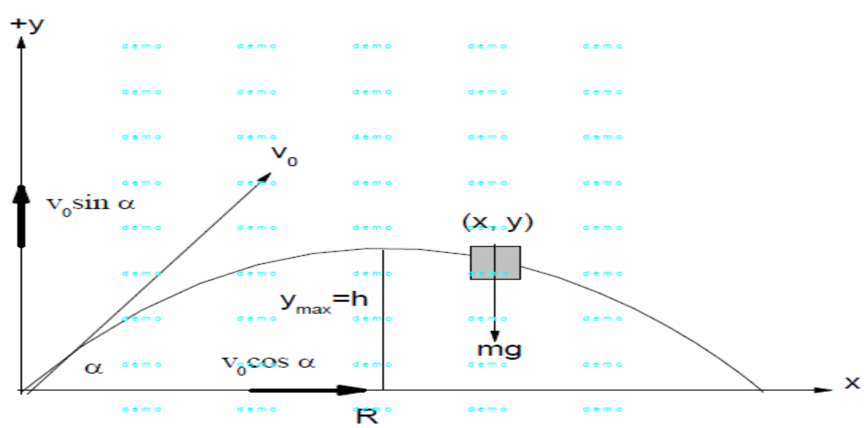
3- حركة المقذوف على مستوى مائل مع إهمال تأثير مقاومة الهواء.

في أنواع الحركة الثلاثة السابقة سوف نهمل دوران الأرض على الحركة كذلك سوف نعتبر أن الجسيم قد بداء بسرعة ابتدائية ما (ولتكن v_0) وتميل هذه السرعة على الأفقي بزاوية ما (ولتكن α). وفى دراستنا الحالية سوف نبدأ بالحالة الأولى.

اولاً حركة المقذوف مع إهمال تأثير مقاومة الهواء

<u>وصف الحركة</u>

نفرض ان الجسيم قذف من النقطة o بسرعة ابتدائية v_0 تسمى سرعة القذف وتميل على الأفقى المار بنقطة القذف o بزاوية α و تسمى بزاوية القذف كما فى الشكل المقابل



نختار ox المحور الأفقي و oy هو المحور الرأسي إلى أعلى. نفرض أنه عند زمن t كان الجسيم عند النقطة (x,y) والقوة الوحيدة التي تؤثر على الجسيم هي وزنه mg رأسيا إلى أسفل. ويكون مسار الجسيم كما بالشكل حيث يتحرك الجسيم فى الاتجاه الأفقى كما أنه سوف يتحرك فى نفس الوقت الى أعلى حيث يستمر فى هدة الحركة حتى يصل الى أقصى ارتفاع ثم يعود الى اسفل مع وجود الحركة الافقية حتى يقع على المحور الأفقي وقد يتوقف وقد يتحرك أسفل المحور الأفقى أو على المحور الأفقى والذى يهمنا هنا هو دراسة حركته الجسيم من بداية الحركة عند النقطة o حتى يصل مرة أخرى لهذا المحور. وعند وصف الحركة كما سبق يتبين لنا أن الجسيم بمجرد بداية الحركة فإنه سوف يتحرك فى اتجاه أفقى وكذلك اتجاه رأسي حتى يصل الى أقصى ارتفاع سوف نرمز له بالرمز $h = y_{\max.}$ وعند ذلك يكون قد استغرق زمن يسمى بزمن الوصل لأقصى ارتفاع وسوف نرمز له بالرمز $t_{y=y_{\max}} = t$ ثم يعود حتى يقع على المحور الأفقي ويكون قد قطع مسافة أفقي تسمى المدى وسوف نرمز لها بالرمز R ويكون قد استغرق زمن يسمى بزمن الطيران وسوف نرمز له بالرمز $t_{x=R.} = T$. وحيث أن للجسم حركة افقية وأخرى رأسية فسوف نكتب معادلات الحركة فى هذين الاتجاهين باستخدام قانون نيوتن الثاني على النحو التالي .ومع ملاحظة أن الجسيم قد قذف من النقطة o أي أن $((x_0, y_0) = (0,0))$ و بسرعة ابتدائية v_0 وتميل على الأفقي المار بنقطة القذف o بزاوية α عند ذلك يكون للسرعة الابتدائية مركبتين بالصورة $(v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\alpha,\ v_0 \sin\alpha)$.

<u>معادلة الحركة في الاتجاه الأفقي هي</u>

$$m\ddot{x} = 0 \quad Or \quad \ddot{x} = 0 \qquad (1)$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل على

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \rightarrow \dot{x} = c_1$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_1 بالصورة $c_1 = v_0 \cos\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \qquad (2)$$

وبتكامل المعادلة (2) بالنسبة للزمن نحصل على

$$x = \mathrm{v}_0 t \cos\alpha + c_2$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_2 = 0$ ويكون بذلك

$$x = \mathrm{v}_0 t \cos\alpha \qquad (3)$$

<u>معادلة الحركة فى الاتجاه الراسى هى</u>

$$m\ddot{y} = -mg \quad Or \quad \ddot{y} = -g \qquad (4)$$

وبتكامل المعادلة (4) نحصل على

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \quad \rightarrow \dot{y} = -g\,t + c_3$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_3 بالصورة $c_3 = \mathrm{v}_0 \sin\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt \qquad (5)$$

وبتكامل المعادلة (5) بالنسبة للزمن نحصل على

$$y = \mathrm{v}_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + c_4$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_4 = 0$ ويكون بذلك

$$y = \mathrm{v}_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (6)$$

المعادلتين (3), (6) تسميان بالمعادلات البارامترية للمسار

<u>خصائص المقذوف</u>

<u>(1)- زمن أقصى ارتفاع:</u> وهو الزمن الذى يستغرقه الجسيم للوصول لأقصى مسافة رأسية ثم يتوقف ليعود للحركة لأسفل.

وللحصول على زمن أقصى ارتفاع و نضع $\dot{y} = 0$ فى المعادلة (5) وعند ذلك يكون

$$t_{y=y_{\max}} = t = \frac{\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{g} \qquad (7)$$

(2) أقصــي ارتفـاع (Greatest Height): وهـى أقصــى مسـافة رأسـية يمكـن أن يتحركها لأعلى

وللحصول على أقصى ارتفاع نعوض عن قيمة t_h من المعادلـة (7) فـى المعادلـة (6) نحصل على

$$y_{\max.} = h = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \ (\text{Maximum Height Formula}) \qquad (8)$$

. وعند ذلك يعطى الإحداثي الأفقى x بالصورة

$$(x)_{t_h} = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin\alpha\ \cos\alpha}{g} = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \qquad (9)$$

وعلى ذلك فإن الإحداثي المقابل لزمن أقصى ارتفاع يعطى بالصورة

$$\left(x_{t_h}, y_{\max.}\right) = \left(\frac{\mathrm{v}_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \ \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right) \qquad (10)$$

(3)- زمن الطيران (زمن التحليق Time of Flight or total time) :

على وجهه العموم لإيجاد الزمن الذى بأخذة مقذوف من لحظة قذفه من النقطة o حتى يصيب هدفاً معيناً فإنـه يلزمنـا تحديد الإحداثي الأفقـى x من العلاقـة (3) أو الإحداثي الرأسي y من العلاقة (6) لهذا الهدف وعند ذلك يمكن القول بأن هذا الزمن يعطى من العلاقة

$$t^* = \frac{x}{\mathrm{v}_0 \cos\alpha} \qquad (11)$$

أو من العلاقة

$$y = \mathrm{v}_0 t^* \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^{*2} \qquad (12)$$

أما إذا كان هذا الهدف يقع على المحور الأفقى المار بنقطة القذف فإن هذا الزمن يسمى بزمن الطيران وللحصول على هذا الزمن نضع $y=0$ فى المعادلة (6) وعند ذلك يكون

$$t_{x=R.} = t_F = T = \frac{2\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{g} \tag{13}$$

وهكذا فإننا نعرف زمن الطيران بأنه هو الزمن الذى يستغرقه الجسيم منذ بداية الحركة عند النقطة حتى يقع على المحور الأفقى.

وواضح من المعادلتين (7), (13) أن زمن الطيران ضعف زمن الوصول لأقصى ارتفاع أي أن $(T=2t)$

<u>(4) المدى (Range):</u> وهى أكبر مسافة يتحركها الجسيم على المحور الأفقى

وللحصول على المدى نعوض عن قيمة $t_{x=R.}=t_F$ من المعادلة (13) فى المعادلة (3) نحصل على

$$R = x_{t_{x=R.}=t_F.} = \frac{2\mathrm{v}_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{\mathrm{v}_0^2\sin 2\alpha}{g} \tag{14}$$

<u>ملاحظات على المدى:</u>

<u>1- خاصية نفس المدى</u>

إذ قذفت قذيفتان من مدفع واحد بزاويتين α والأخرى $\frac{\pi}{2}-\alpha$ فإننا نحصل على نفس المدى.(أى أنه يمكن الحصول على نفس المدى بسرعة قذف معينة إذا قذفنا فى اتجاهين أحدهما يميل على الرأسى بنفس زاوية ميل الآخر على الأفقى). ففى المعادلة (14)

$$R_1 = \frac{\mathrm{v}_0^2\sin 2\alpha}{g} \tag{15}$$

$$R_2 = \frac{\mathrm{v}_0^2\sin 2(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{g} = \frac{\mathrm{v}_0^2\sin(\pi-2\alpha)}{g} = \frac{\mathrm{v}_0^2\left\{\underbrace{\sin\pi}_{0}\cos 2\alpha - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\sin 2\alpha\right\}}{g}$$

وواضح أن

$$R_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (16)$$

وواضح من المعادلتين (15) , (16) تساوي المديين وعلى سبيل المثال فإنه للزاويتين القذف $\alpha = 30^o$, $\alpha = 60^o$ فإننا نحصل على نفس المدى الأفقى.

2- خاصية أقصى المدى

أقصى (أكبر) مدى بسرعة قذف معينة v_0 يحدث عندما تأخذ $\sin 2\alpha$ أكبر قيمة لها وهذا يحدث عندما $\sin 2\alpha = 1$ ومنها $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^o$ وعند ذلك يعطى أقصى مدى لقذيفة بالصورة

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (17)$$

(5) سرعة الجسيم:

لاحظ أن المعادلتين (3), (5) تمثلان مركبتان السرعة فى الاتجاه الأفقى و الرأسي على الترتيب وحيث أن

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 &= v_0^2 \cos^2 \alpha, \\
\dot{y}^2 &= (v_0 \sin\alpha - gt)^2 = v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g t v_0 \sin\alpha + (gt)^2 \\
&= v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \right) \\
&= v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g y
\end{aligned}$$

وعند ذلك تعطي قيمة السرعة عند أى نقطة بمسار الجسيم بالصورة:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g y} =$$
$$\sqrt{v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2g y} = \sqrt{v_0^2 - 2g y}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g y} \qquad (18)$$

واتجاه السرعة يعطى بالعلاقة

$$\tan\theta = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{y}^2}} = \frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{(v_0\sin\alpha - gt)^2}} = \frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2g\,y}}$$

وهكذا فإن زاوية ميل السرعة على الأفقى (θ) تعطى من

$$\tan\theta = \pm\frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2g\,y}} \qquad (19)$$

حيث يتم اعتبار الإشارة الموجبة أثناء الصعود بينما الإشارة السالبة أثناء الهبوط.

لا حظ كذلك يمكن كتابة زاوية ميل السرعة على الأفقى بالصورة

$$\cos\theta = \pm\frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2g\,y}} \qquad (20)$$

<u>(6) معادلة المسار:</u> هى معادلة تجمع بين إحداثيات الحركة خالية من الزمن

و تتعين هذه المعادلة من حذف البارامتر t بين المعادلتين البارامتريتين (3) , (6) وذلك بالتعويض من (3) عن t فى (6) فنحصل على

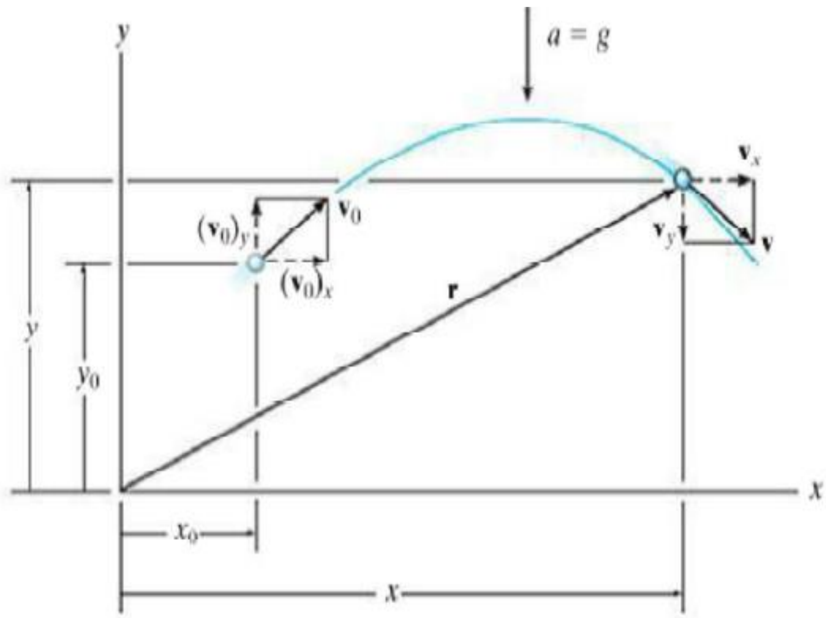
$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}g t^2 = v_0\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

$$y = x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}\sec^2\alpha \qquad (21)$$

وهى تمثل معادلة قطع مكافئ يمر بقطة الأصل ومحورة رأسي ومفتوح لأسفل .

حركة جسيم من نقطة اختيارية بخلاف نقطة الأصل

بقرض أن الجسيم قد قذف من نقطة ما (x_0, y_0) و بسرعة ابتدائية v_0 وتميل على الأفقى المار بنقطة القذف o بزاوية α عند ذلك يكون للسرعة الابتدائية مركبتين بالصورة $(v_{0x}, v_{0y}) = (v_0\cos\alpha,\ v_0\sin\alpha)$ كما بالشكل المقابل



وعند ذلك تكون معادلات الحركة على النحو التالى:

<u>معادلة الحركة فى الاتجاه الأفقى هى</u>

$$m\ddot{x} = 0 \quad Or \quad \ddot{x} = 0 \tag{22}$$

وبتكامـــــــــــل هـــــــــــذه المعادلـــــــــــــة نحصــــــــــــل علـــــــــــى

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \rightarrow \dot{x} = c_1$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_1 بالصورة $c_1 = \mathrm{v}_0 \cos\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{x} = \mathrm{v}_0 \cos\alpha \tag{23}$$

وبتكامل المعادلة (23) بالنسبة للزمن نحصل على

$$x = \mathrm{v}_0 t \cos\alpha + c_2$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_2 = x_0$ ويكون بذلك

$$x = x_0 + \mathrm{v}_0 t \cos\alpha \tag{24}$$

<u>معادلة الحركة فى الاتجاه الراسى هى</u>

$$m\ddot{y} = -mg \quad Or \quad \ddot{y} = -g \tag{25}$$

وبتكامل المعادلة (25) نحصل على

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \quad \rightarrow \dot{y} = -g\,t + c_3$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_3 بالصورة $c_3 = \mathrm{v}_0 \sin\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt \tag{26}$$

وبتكامل المعادلة (26) بالنسبة للزمن نحصل على

$$y = \mathrm{v}_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 + c_4$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_4 = y_0$ ويكون بذلك

$$y = y_0 + \mathrm{v}_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 \tag{27}$$

امـثلـــــــــــة

مثـال: ـ أثبـت أنـه لسرعة قذف ثابتـة v_0 لمقذوف مـا يوجد اتجـاهين مختلفين لإصـابة هدف ما؟

الحـــــــــــل

من معادلة المسار

$$y = x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2\mathrm{v}_0^2}\sec^2\alpha == x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2\mathrm{v}_0^2}\left\{1+\tan^2\alpha\right\}$$

بالضرب فى $\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}$ نحصل على

$$\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}\, y = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}\, x\tan\alpha - \left\{1+\tan^2\alpha\right\}$$

$$\tan^2\alpha - \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x}\tan\alpha + \left(1 + \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}\, y\right) = 0$$

نضع $a=1,\ b=\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x},\quad c=\left(1+\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}\,y\right)$ نحصل على $a\tan^2\alpha+b\tan\alpha+c=0$

وهى معادلة من الدرجة الثانية فى $\tan\alpha$ وحلها على الصورة

$$\tan\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

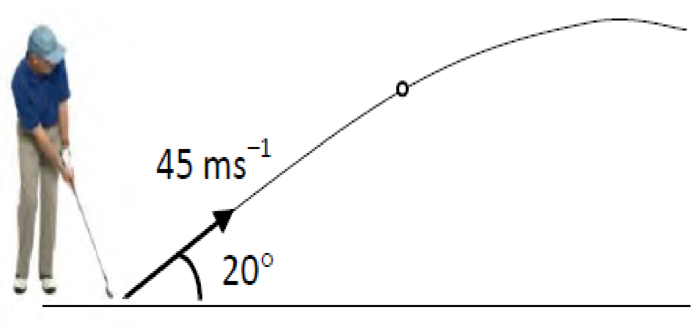
$$\tan\alpha=\frac{-\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x}\pm\sqrt{\left(\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x}\right)^2-4\left(1+\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}\,y\right)}}{2}$$

ويكون بذلك زاويتين القذف هما

$$\tan\alpha_1=\frac{\mathrm{v}_0^2}{g\,x}+\sqrt{\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{g\,x}\right)^2-\left(1+\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}\,y\right)},\qquad \tan\alpha_2=\frac{\mathrm{v}_0^2}{g\,x}-\sqrt{\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{g\,x}\right)^2-\left(1+\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\,x^2}\,y\right)}$$

مثال: - ركل لاعب كرة جولف كرة الجولف بسرعة ابتدائية مقدارها $\mathrm{v}_0=45\,m/\sec$ وبزاوية مقدرها 20^o مع الاتجاه الافقي. ادرس حركة الكرة في المراحل التالية؟

الحـــــــــــل



كما هو راسخ في أذهننا بأن الكرة سوف تتحرك الى أعلى حيث تستمر فى هذه الحركة حتى يصل الى أقصى ارتفاع ثم تعود الى اسفل وتتحرك حتى تقع على الأرض (المحور الأفقى) وقد تتوقف وقد يتحرك على الأرض. حيث سرعتها الابتدائية $\mathrm{v}_0=45\,m/\sec$ وزاوية قذفها هى $\alpha=20^o$.

تتحرك الكرة حتى تصل الى أقصى ارتفاع والذى يعطى من

$$y_{max.}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{(45)^2(\sin 20^o)^2}{2(9.8)}=\frac{(45)^2(0.342)^2}{19.6}=\frac{(2025)(0.117)}{19.6}=\frac{236.925}{19.6}=12.08m$$

وتكون قد استغرقت زمن يعطى من

$$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}=\frac{45\sin 20^O}{9.8}=\frac{(45)(0.342)}{9.8}=\frac{15.39}{9.8}=1.57\ \sec$$

ثم تعود للسقوط على الأرض وتكون قد استغرقت زمن قدره

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{2(45)\ \sin 20^O}{4.9}=\frac{(45)(0.342)}{4.9}=\frac{15.39}{4.9}=3.14\ \sec$$

وتكون قد قطعت مسافة أفقية (المدى) تعطى من

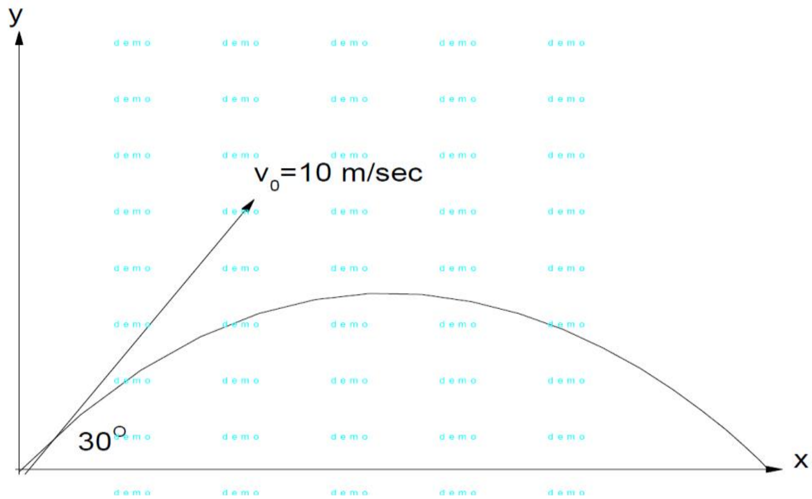
$$R=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{(45)^2\sin 2(20)}{9.8}=\frac{(45)^2\sin 40}{9.8}=\frac{(2025)(0.643)}{9.8}=\frac{1301.645}{9.8}=132.82m$$

و زمن الطيران يعطى من

$$t_{x=R.}=t_F=T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=2t=10\sec$$

مثال: - قذف جسيم بسرعة ابتدائية $v_0=100\ m/\sec$ وبزاوية قدرها 30^o مع الاتجاه الافقي احسب كل من أقصى ارتفاع – زمن أقصى ارتفاع – المدى- زمن الطيران- معادلة المسار للمقذوف و احسب سرعة الجسيم عندما يكون على إرتفاع $10, 25, 50,75, 100, 125\ m$ وذلك باعتبار أن عجلة الجاذبية الأرضية هى $g=10\ m/\sec^2$ ؟

الحـــــــــل



من المعلومات المعطاة $v_0 = 100 m/\sec$ وكذلك زاوية القذف الابتدائية $\alpha = 30^o$ وعلى ذلك فإن:

زمن أقصى ارتفاع يعطى من

$$t_{y=y_{\max}} = t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{100 \sin 30^O}{10} = \frac{10}{2} = 5 \ \sec$$

ويعطى أقصى ارتفاع من

$$y_{\max.} = h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{(100)^2 (\frac{1}{2})^2}{2(10)} = \frac{1000}{8} = 125m$$

والمدى يعطى من

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(100)^2 \sin 60}{10} = 1000\frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3}\,m$$

و زمن الطيران يعطى من

$$t_{x=R.} = t_F = T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 2t = 10\sec$$

معادلة المسار للمقذوف تعطى بالصورة

$$y = x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}\underbrace{\sec^2\alpha}_{\cos^2\alpha} = x\tan 30^O - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}\frac{1}{(\cos 30^O)^2} = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{10x^2}{2(100)^2}\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{1500}x^2$$

سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع $10, 50, 100m$ (حيث $v=\sqrt{v_0^2-2gy}$) تعطى من

$$v(y=10)=\sqrt{10000-2(10)(10)}=\sqrt{10000-200}=\sqrt{9800}$$

$$v(y=25)=\sqrt{10000-2(10)(25)}=\sqrt{10000-500}=\sqrt{9500}$$

$$v(y=50)=\sqrt{10000-2(10)(50)}=\sqrt{10000-1000}=\sqrt{9000}$$

$$v(y=75)=\sqrt{10000-2(10)(75)}=\sqrt{10000-1500}=\sqrt{8500}$$

$$v(y=100)=\sqrt{10000-2(10)(100)}=\sqrt{10000-2000}=\sqrt{8000}$$

$$v(y=125)=\sqrt{10000-2(10)(125)}=\sqrt{10000-2500}=\sqrt{7500}=\sqrt{3(2500)}=50\sqrt{3}$$

وواضح أن مركبة السرعة تتناقص بزيادة الارتفاع لأعلى. وكما أنه من المعروف بأن المركبة الأفقية للسرعة تعطى من $\dot{x}=v_0\cos\alpha$ وعند أقصى ارتفاع تصبح

$$\dot{x}=100\cos30^O=100\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}\,m/\sec$$

وواضح من العلاقات السابقة بأنه عند أقصى ارتفاع يتبقى فقط مركبة السرعة الأفقية .

مثال: لاعب قفز يترك سطح الأرض بزاوية 20^O وبسرعة $v_0=11m/\sec$ لعمل قفزة ما. ما هو أقصي ارتفاع يمكن يصل اليه وما هى أقصى مسافة يمكن أن يصل اليها والزمن اللازم لذلك؟

الحـــــــــــل

يعطى أقصى إرتفاع يمكن أن يصل اليه اللاعب بالصورة

$$y_{\max.}=h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{(11)^2(\sin20^O)^2}{2(9.8)}=\frac{(11)^2(0.342)^2}{19.6}=\frac{(11)^2(0.116964)}{19.6}=\frac{14.152644}{19.6}=0.722m$$

بينما تعطى أقصى مسافة (المدى) يمكن أن يصل اليها اللاعب بالصورة

$$R=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}=\frac{(11)^2\sin40^O}{9.8}=\frac{(11)^2(0.64279)}{9.8}=\frac{77.777}{9.8}=7.94m$$

ويعطى الزمن اللازم لقطع هذه المسافة بالصورة (زمن الطيران)

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{2(11)\sin20^O}{9.8}=\frac{2(11)(0.342)}{9.8}=\frac{2(11)(0.342)}{9.8}=0.7677\sec$$

مثال: فى ملعب لكرة القدم يركل فيه لاعب الكرة من نقطة على بعد $36\ m$ (حوالي 40 yards ياردة) من المرمى، ونصف الحشد الموجود يأمل بأن الكرة تلمس العارضة والتى ترتفع $2.44\ m$ عن سطح الأرض إذا ركل اللاعب الكرة من على الأرض بسرعة $20\ m/s$ وبزاوية مقدارها $53^O\ m$ مع أفقي.

1- هل الكرة تصل الى العارضة أم لا؟

2- أين تسقط الكرة؟

الحـــــــــل

من المعطيات: المسافة الأفقية التى يمكن للكرة أن تصل اليها $x=36\ m$.

السرعة الابتدائية $v_0=20\ m/\sec$. و زاوية القذف للكرة $\alpha=53^O\ m$.

ومن المعُرف بأنه يمكن إيجاد المسافة الرأسية من العلاقة

$$y=v_0\,t\,\sin\alpha-\frac{1}{2}g\,t^2 \qquad (1)$$

وهنا يلزمنا إيجاد الزمن الذى تستغرقه الكرة للتحرك مسافة $x=36\ m$ على الأفقى والذى يعطى من العلاقة

$$x=v_0\,t\cos\alpha \qquad (2)$$

ومنها

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}=\frac{36}{(20)\cos53^O}=\frac{36}{(20)(0.6)}=\frac{36}{12}=3\sec$$

ولكن حتى الأن لانعرف هل الكرة سوف ترتفع الى العارضة أم لا. وبالتعويض فى (1) نحصل على

$$y=(20)(3)\ \sin 53^{O}-\frac{1}{2}(9.8)(3)^{2}$$
$$=(20)(3)(0.8)-\frac{1}{2}(9.8)(3)^{2}=48-\frac{88.2}{2}==48-44.1=3.9\,m$$

وواضح أن الكرة بعد ثلاثة ثوانى سوف تكون عند نقطة إحداثيتها هي $(x,y)=(36,3.9)$
وواضح أن ألأحداثي الرأسي $y=3.9\,m$ يرتفع عن العارضة بمقدار
$d=3.9-2.44=1.46m$ والذى يشير بأن الكرة سوف تتخطى العارضة من أعلى وتسقط بعدها.

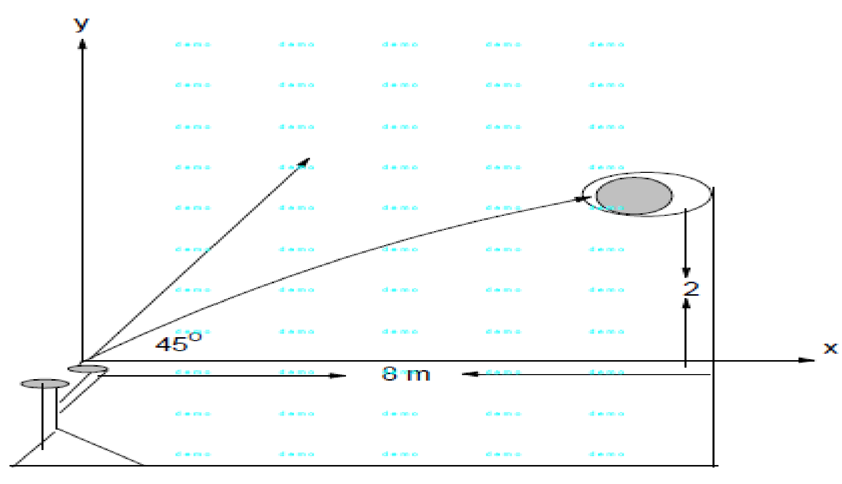
ويمكن إيجاد مدى (أين تسقط) هذه الكرة من العلاقة $R=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ بالصورة

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{(20)^2\sin 106^{O}}{9.8}=\frac{(400)(0.96)}{9.8}=\frac{384.5}{9.8}=39.2346m$$

وهذا يشير الى أن الكرة سوف تسقط بعد الشبكة بحوالي $39.2346-36=3.2346m$.

مثال: أوجد السرعة الابتدائية اللازمة للاعب كرة سلة لكى يرمى الكرة فى رمية صحيحة وذلك بفرض أن زاوية القذف هى 45^{o} مع الاتجاه الأفقي وأن ارتفاع السلة من مستوى القذف هو $2m$ وأن بعد السلة الأفقى عن موضع القذف هو $8m$ وذلك باعتبار أن عجلة الجاذبية الأرضية هى $g=10m/\sec^2$ والزمن اللازم لذلك؟

الحـــــــــــل



من المعلومات المعطاة نجد أن أحداثي السلة هو $(x, y) = (8, 2)$ وكذلك زاوية القذف الابتدائية وهى $\alpha = 40^o$ وعلى ذلك فإن المعادلة المناسبة لإيجاد السرعة الابتدائية هى معادلة المسار:

$$y = x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2\mathrm{v}_0^2}\sec^2\alpha == x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2\mathrm{v}_0^2\cos^2\alpha}$$

ومنها يكون

$$2 = (8)\tan(45^O) - \frac{(10)(8)^2}{2\mathrm{v}_0^2(\cos(45^O))^2}$$

$$2 = 8(1) - \frac{(10)(64)}{2\mathrm{v}_0^2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 8 - \frac{640}{\mathrm{v}_0^2} \rightarrow 2 = 8 - \frac{640}{\mathrm{v}_0^2} \rightarrow 6 = \frac{640}{\mathrm{v}_0^2} \rightarrow \mathrm{v}_0^2 = \frac{640}{6} = 106.6666$$

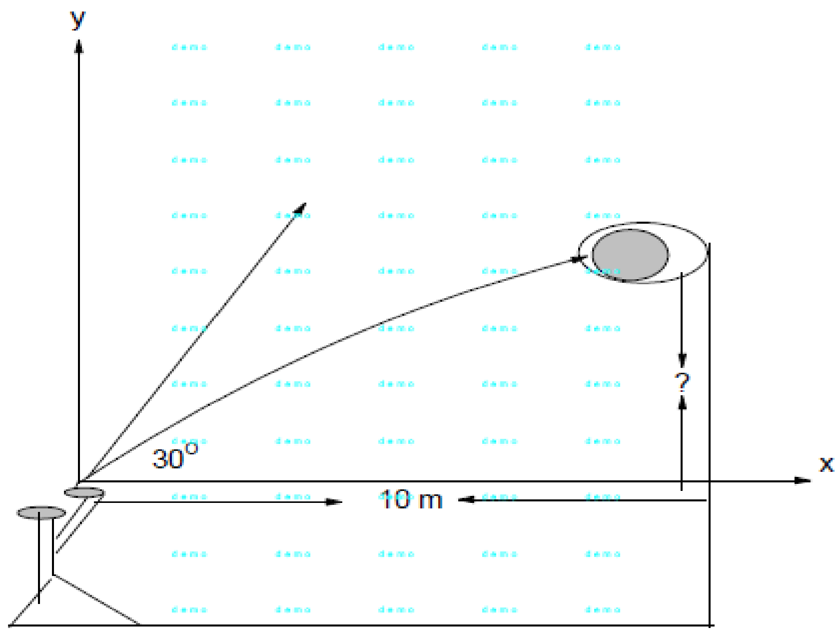
$$\mathrm{v}_0 = 10.3\,m/\sec$$

ويعطى الزمن اللازم لذلك من العلاقة $x = \mathrm{v}_0\,t\cos\alpha$ وعلى ذلك يكون

$$t = \frac{x}{\mathrm{v}_0\cos\alpha} = \frac{8}{(10.3)\,\cos45^O} = \frac{8}{(10.3)\,(\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{6}{(10.3)(0.707)} = \frac{6}{7.3} = 0.821\sec$$

مثال: أوجد ارتفاع سلة من مستوى القذف اللازم للاعب كرة سلة لكى يقذف الكرة فى رمية صحيحة وذلك بفرض أن زاوية القذف هى 30^o مع الاتجاه الافقي وأن بعد السلة الأفقى عن موضع القذف هو $10m$ و أن السرعة الابتدائية للقذف هى $\mathrm{v}_0 = 12m/\sec$ وذلك باعتبار أن عجلة الجاذبية الأرضية هى $g = 10m/\sec^2$ والزمن اللازم لذلك؟

الحـــــــــل



من المعلومات المعطاة نجد أن أحداثي السلة وهو $(x,y)=(8,\ y)$ وكذلك زاوية القذف الابتدائية وهى $\alpha=30^o$ السرعة الابتدائية للقذف هى $v_0=12m/\sec$ وعلى ذلك فإن المعادلة المناسبة لإيجاد إرتفاع السلة من مستوى القذف هى معادلة المسار:

$$y=x\tan\alpha-\frac{g\,x^2}{2v_0^2}\sec^2\alpha==x\tan\alpha-\frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

ومنها يكون

$$y=(10)\tan(30^O)-\frac{(10)(10)^2}{2(12)^2(\cos(30^O))^2}=(10)\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{(10)(10)^2}{2(12)^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{10}{1.73}-\frac{1000}{2(144)(\frac{3}{4})}$$

$$=\frac{10}{1.732}-\frac{1000}{2(144)(\frac{3}{4})}=5.774-\frac{1000}{(72)(3)}=5.774-\frac{1000}{216}=5.774-\frac{1000}{216}==5.774-4.63$$

$$y=1.144m$$

ويعطى الزمن اللازم لذلك من العلاقة $x=v_0\,t\cos\alpha$ وعلى ذلك يكون

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}=\frac{10}{(12)\cos30^O}=\frac{10}{(12)\,(\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{5}{(3)(1.732)}=\frac{5}{5.19}=0.963\sec.$$

مثال: من قمة صخرة على شاطئ بحر ارتفاعها $98\,m$ أطلقت قذف جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها $49\,m/\sec$ فى اتجاه يصنع مع الأفقي زاوية مقدارها $\alpha=30^O$ أوجد المسافة الأفقية من قاعدة الصخرة إلى نقطة اصطدام الجسيم بالماء والزمن اللازم لذلك.

الحـــــــــــل

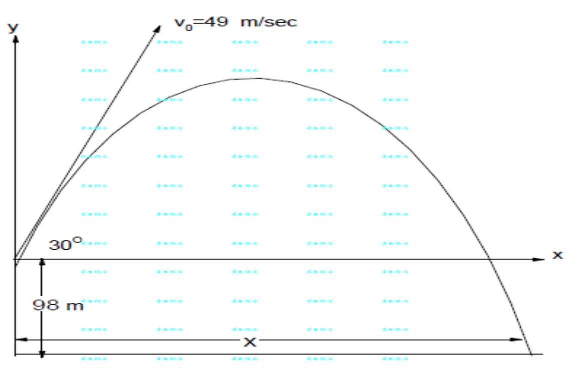
من المعلومات المعطاة نجد أن الإحداثي المعطى هو $y_0=98m$ وكذلك زاوية القذف الابتدائية هى $\alpha=45^o$ والسرعة الابتدائية للقذف هى $v_0=49\,m/\sec$. و المعادلة المناسبة لإيجاد المسافة الأفقية من قاعدة الصخرة إلى نقطة اصطدام الجسيم بالماء هى المعادلة

$$x=x_0+v_0\,t\cos\alpha \qquad (1)$$

حيث $x_0=0$ و يلزم لذلك إيجاد الزمن والذى يمكن الحصول عليه من العلاقة

$$y=y_0+v_0\,t\,\sin\alpha-\frac{1}{2}g\,t^2 \qquad (2)$$

حيث $y=0$ عند اصطدام الجسيم بالماء. وبالتعويض فى المعادلة (2) نحصل على



$$y=y_0+v_0\,t\,\sin\alpha-\frac{1}{2}g\,t^2$$

$$0=98+49t\sin45^O-\frac{1}{2}(9.8)t^2$$

$$-98=(\frac{49}{\sqrt{2}})t-\frac{98}{20}t^2 \quad \Rightarrow \quad -1=(\frac{1}{2\sqrt{2}})t-\frac{1}{20}t^2 \quad \Rightarrow -20=(\frac{20}{2\sqrt{2}})t-t^2 \quad \Rightarrow$$

$$t^2-(\frac{10}{\sqrt{2}})t-20=0$$

$$t=\frac{(\frac{10}{\sqrt{2}})\pm\sqrt{\frac{100}{2}-4(-20)}}{2} \quad =\frac{1}{2}\left\{\frac{10}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{50+80}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{10}{1.4142}\pm\sqrt{130}\right\}=\frac{1}{2}\left\{7.07\pm11.4\right\}$$

$$t=9.235\sec$$

وبالتعويض فى العلاقة (1) نجد أن

$$x=0+(49)(9.235)\cos45^O=(49)(9.235)\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{(49)(9.235)}{1.4142}\cong 320\,m$$

مثال :تم رمى حجر من أعلى مبنى ارتفاعه $45m$ فوق سطح الأرض وذلك بزاوية مقدارها 30^O درجة مع الأفقي بسرعة ابتدائية مقدارها $20m/\sec$.

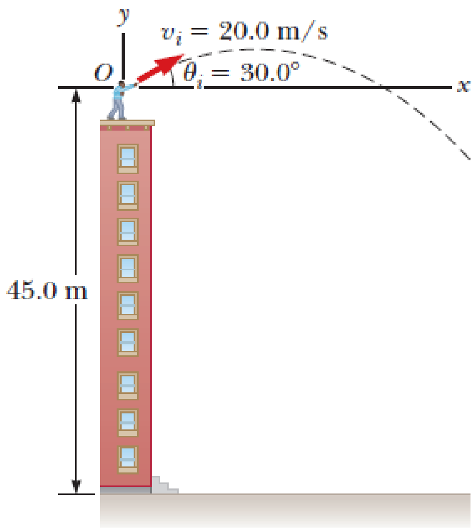
1- ماهى المسافة الأفقية من قاعدة المبنى الى مكان وصول الحجر الى الأرض؟

2- كم من الوقت يستغرق الحجر للوصول إلى الأرض؟

3- ما هي سرعة الحجر قبل وقوعها على الأرض؟

الحـــــــــــل

من المعلومات المعطاة نجد أن الإحداثي المعطى هو $y=-45m$ وكذلك زاوية القذف الابتدائية وهى $\alpha=30^o$ السرعة الابتدائية للقذف هى $v_0=20m/\sec$.



من المعلومات المعطاة نجد أن الإحداثي المعطى هو $y_0 = 45m$ وكذلك زاوية القذف الابتدائية هى $\alpha = 30^o$ والسرعة الابتدائية للقذف هى $v_0 = 20\ m/\sec$.

و المعادلة المناسبة لإيجاد المسافة الأفقية من قاعدة الصخرة إلى نقطة اصطدام الجسيم بالماء هى المعادلة

$$x = x_0 + v_0 t \cos\alpha \qquad (1)$$

حيث $x_0 = 0$ و يلزم لذلك إيجاد الزمن والذى يمكن الحصول عليه من العلاقة

$$y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

حيث $y = 0$ عند اصطدام الجسيم بالماء. وبالتعويض فى المعادلة (2) نحصل على

$$y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 45 + 20 t \sin 30^O - \frac{1}{2}(9.8) t^2$$

$$-45 = (\frac{20}{2}) t - \frac{98}{20} t^2 \quad \Rightarrow \quad -45 = 10t - 4.9\, t^2 \quad \Rightarrow \quad 4.9 t^2 - 10 t - 45 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(4.9)(-45)}}{2(4.9)} = \frac{1}{9.8}\left\{10 \pm \sqrt{100 + 882}\right\} = \frac{1}{9.8}\left\{10 \pm \sqrt{982}\right\} = \frac{1}{9.8}\left\{10 \pm 31.337\right\}$$

$$t = 4.21 \sec$$

وبالتعويض فى العلاقة (1) نجد أن

$$x = 0 + (20)(4.2)\cos 30^{O} = (20)(4.21)(0.866) = 72.9172\, m$$

تعطى مركبات السرعة بالصورة

$$\left(\dot{x},\ \dot{y}\right) = \left(\mathrm{v}_0 \cos\alpha,\ \mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt\right),$$

وقبل أن يصل الى الأرض مباشرة يكون قد أستغرق زمن أقل بقليل جداً من الزمن الذى يستغرقه حتى يصل الى الأرض وليكون هذا الزمن هو $t = 4.1 \sec$

$$\mathrm{v} = \sqrt{(\mathrm{v}_0 \cos\alpha)^2 + (\mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{\left(20\cos 30^{O}\right)^2 + \left(20\sin 30^{O} - 10t\right)^2}$$

$$= \sqrt{(20(0.866))^2 + (20\sin(0.5) - 10\ (4.1))^2} = \sqrt{(17.32)^2 + (10-41)^2}$$

$$= \sqrt{(17.32)^2 + (-31)^2} = \sqrt{300+961} = \sqrt{1261} = 35.51 m/\sec$$

مثال: - اطلقت قذيفة على هدف معين فى مستوى أفقى يمر بنقطة بزاوية α فسقطت قبل الهدف بمسافة a وعندما قذفت بنفس السرعة بنقطة و بزاوية β فسقطت بعد الهدف بمسافة b أثبت أن الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف هى $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$ ؟

الحـــــــــل

عندما تسقط القذيفة على المستوى الأفقي يكون هذا هو المدى لها والذى يعطى بالصورة . الأن بفرض أن المدى لإصابة الهدف هو R ويكون المدى فى الحالة الاولى هو $R-a$ وفى الحالة الثانية هو $R+b$ وبرفض أن زاوية القذف الصحيحة هى

φ وأن سرعة القذف فى الثلاث حالات هى u. وحيث أن المدى يعطى من $R=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ فيكون لدينا

الحالة الأولى $$R-a=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$
(1)

حاله إصابة الهدف $$R=\frac{u^2\sin 2\varphi}{g}$$
(2)

الحالة الثانية $$R+b=\frac{u^2\sin 2\beta}{g}$$
(3)

ولإيجاد الزاوية الصحيحة φ للقذف يجب علينا التخلص عن كل من R, u فى المعادلة (2). وبضرب المعادلة (1) فى b والثالثة فى a والجمع نحصل على

$$R=\frac{u^2}{g(a+b)}\left(b\sin 2\alpha+a\sin 2\beta\right) \qquad (4)$$

وبالتعويض عن R من (4) فى (2) نحصل على

$$\frac{u^2\sin 2\varphi}{g}=\frac{u^2}{g(a+b)}\left(b\sin 2\alpha+a\sin 2\beta\right)$$

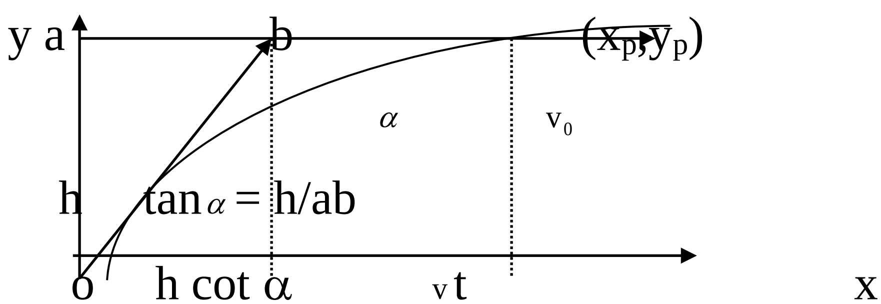
$$\sin 2\varphi=\frac{b\sin 2\alpha+a\sin 2\beta}{a+b} \rightarrow 2\varphi=\sin^{-1}\left(\frac{b\sin 2\alpha+a\sin 2\beta}{a+b}\right)$$

ومنها $$\varphi=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin 2\beta+b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$$

ملاحظة: حل المسألة السابقة هو ا لأساس لعمل رجال المدفعية حيث يكون للمدفع سرعة واحدة لجميع القذائف ولإصابة الأهداف المختلفة يغير رجل المدفعية من زاوية التصويب.

مثال: تطير طائرة بسرعة منتظمة v على ارتفاع h ثابت من سطح الأرض. صوب صاروخ نحو الطائرة عندما كانت زاوية ارتفاعها بالنسبة إلى موضع منصة الصاروخ (المستقيم الواصل بين الطائرة و موضع منصة الصاروخ) α وأطلقت قذيفة بسرعة v_0 عند هذه اللحظة. اثبت أن القذيفة ستصيب الطائرة إذا كان $g\,h = 2v\,(v_0 \cos\alpha - v)\tan^2\alpha$

الحـــــــــل



من المعلوم أنه إذا بدأنا القياس من عند النقطة (o) فإنه لكي تصيب القذيفة الطائرة يجب أن يتساوى الإحداثي الكرتيزي لكل من الطائرة والقذيفة ونفرض أن نقطة التلاقي هى (x_p, y_p). وأنهما التقيا بعد زمن قدرة t_p من بداية حركة القذيفة (بداية القياس).

<u>بالنسبة للقذيفة</u>

حركتها يمكن وصفها من العلاقات

$$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad (1)$$

$$y = v_0\, t\, \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad (2)$$

<u>بالنسبة لطائرة</u>

حركتها يمكن وصفها من العلاقات

$$x = h\cot\alpha + \mathrm{v}t \tag{3}$$

$$y = h = \text{constant} \tag{4}$$

كما أشارنا سابقا فإنه لكى يلتقيا كل من القذيفة والطائرة يجب ان تتساوى الإحداثيات ويكون كذلك الزمن المستغرق للحركة واحد وليكن t_p وبمساوات العلاقات السابقة نحصل على

$$\mathrm{v}_0 t_p \cos\alpha = h\cot\alpha + \mathrm{v}t_p \tag{5}$$

$$\mathrm{v}_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = h \tag{6}$$

من العلاقة (5) نجد أن $t_p = \dfrac{h\cot\alpha}{\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}}$ وبالتعويض عن t_p فى (6) نحصل على

$$\mathrm{v}_0\left(\frac{h\cot\alpha}{\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{h\cot\alpha}{\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}}\right)^2 = h$$

وبالضرب فى $\dfrac{(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v})^2}{h\cot^2\alpha}$ نحصل على

$$\mathrm{v}_0\left(\frac{h\cot\alpha}{\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}}\right)\frac{(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v})^2}{h\cot^2\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{2}g\,h = h\frac{(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v})^2}{h\cot^2\alpha}$$

$$\frac{1}{2}g\,h = \mathrm{v}_0\,(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v})\frac{1}{\cot\alpha}\sin\alpha - \frac{(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v})^2}{\cot^2\alpha}$$

$$\frac{1}{2}g\,h = (\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v})\left\{\mathrm{v}_0\,\frac{1}{\cot\alpha}\sin\alpha - \frac{(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v})}{\cot^2\alpha}\right\}$$

$$\frac{1}{2}g\,h = \frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}}{\cot^2\alpha}\left\{\mathrm{v}_0\cot\alpha\sin\alpha - \left(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2}g\,h=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha-\mathrm{v}}{\cot^2\alpha}\left\{\mathrm{v}_0\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin\alpha-\left(\mathrm{v}_0\,\cos\alpha-\mathrm{v}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2}g\,h=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha-\mathrm{v}}{\cot^2\alpha}\left\{\mathrm{v}_0\,\cos\alpha-\mathrm{v}_0\,\cos\alpha-\mathrm{v}\right\}$$

$$\frac{1}{2}g\,h=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha-\mathrm{v}}{\cot^2\alpha}\;(\mathrm{v})$$

ومنها يكون $g\,h=2\mathrm{v}\left(\mathrm{v}_0\cos\alpha-\mathrm{v}\right)\,\tan^2\alpha$

ثانياً حركة المقذوف مع الأخذ فى الاعتبار تأثير مقاومة الهواء

وصف الحركة

نفرض ان الجسيم قذف من النقطة o بسرعة ابتدائية v_0 وتميل على الأفقى المار بنقطة القذف o بزاوية α وبالأخذ فى الاعتبار مقاومة الهواء والتى سوف نعتبرها تتناسب مع سرعة الجسيم. (مع الأخذ فى الاعتبار وصف المسائلة كما هو مدون أعلاه للحالة الأولى) .ومع ملاحظة أن الجسيم قد قذف من النقطة o أى أن ($(x_0,y_0)=(0,0)$) و بسرعة ابتدائية v_0 وتميل على الأفقى المار بنقطة القذف o بزاوية α عند ذلك يكون للسرعة الابتدائية مركبتين بالصورة $(\mathrm{v}_{0x},\mathrm{v}_{0y})=(\mathrm{v}_0\cos\alpha,\ \mathrm{v}_0\sin\alpha)$. حينئذ فإن معادلة الحركة في هذه الحالة سوف تكتب بالصورة

$$m\vec{a}=m\vec{g}-R$$

وحيث أن

$$R\;\alpha\;\mathrm{v}\;\rightarrow\;R=k\mathrm{v}$$

وبفرض أن $k=m\lambda$ فإن

$$m\vec{a}=m\vec{g}-m\lambda\vec{\mathrm{v}}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}=\vec{g}-\lambda\vec{\mathrm{v}}\qquad(1)$$

وهذه المعادلة سوف تكتب مرة فى اتجاه المحور الأفقي x والأخرى فى اتجاه المحور الرأسي y مع الأخذ فى الاعتبار لمسألتنا أن $\vec{g}=(0,-g)$.

معادلة الحركة فى الاتجاه الأفقى هى

من المعادلة (1) نكتب معادلة الحركة فى اتجاه المحور x بالصورة

$$\ddot{x} = -\lambda\,\dot{x} \qquad (2)$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل على

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\lambda\frac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; \dot{x} = -\lambda\,x + c_1$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_1 بالصورة $c_1 = \mathrm{v}_0\cos\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{x} = \mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda\,x \qquad (3)$$

وبتكامل المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda x \;\Rightarrow\; \frac{1}{-\lambda}\int\frac{-\lambda}{\mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda x}dx = \int dt$$

$$\frac{1}{-\lambda}\ln(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda\,x) = t + c_2$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_2 = \frac{1}{-\lambda}\ln(\mathrm{v}_0\cos\alpha)$ ويكون بذلك

$$\frac{1}{-\lambda}\ln(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda\,x) = t - \frac{1}{\lambda}\ln(\mathrm{v}_0\cos\alpha)$$

$$\ln(\mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda\,x) = -\lambda t + \ln(\mathrm{v}_0\cos\alpha)$$

$$\ln\left(\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda\,x}{\mathrm{v}_0\cos\alpha}\right) = -\lambda t$$

$$\mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda\,x = \mathrm{v}_0\cos\alpha\,e^{-\lambda t}$$

$$\mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}_0\cos\alpha\,e^{-\lambda t} = \lambda\,x$$

$$x = \frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) فى (3)

$$\dot{x} = \mathrm{v}_0\cos\alpha - \lambda\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) = \mathrm{v}_0\cos\alpha - \mathrm{v}_0\cos\alpha\,(1 - e^{-\lambda t})$$

$$\dot{x} = \mathrm{v}_0\cos\alpha\;e^{-\lambda t} \qquad (5)$$

كذلك يمكن كتابة العجلة فـى اتجـاه المحـور x كدالـة فـى الـزمن t وذلك بـالتعويض مـن المعادلة (5) فى (2)

$$\ddot{x} = -\lambda \dot{x} = -\lambda \mathrm{v}_0 \cos\alpha \; e^{-\lambda t} \tag{6}$$

<u>معادلة الحركة في الاتجاه الراسي هي</u>

من المعادلة (1) نكتب معادلة الحركة فى اتجاه المحور y بالصورة

$$\ddot{y} = -g - \lambda \dot{y} \tag{7}$$

وبتكامل المعادلة (7) نحصل على

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -g - \lambda \frac{dy}{dt} \;\rightarrow \dot{y} = -g\,t - \lambda\, y + c_3$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_3 بالصورة $c_3 = \mathrm{v}_0 \sin\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt - \lambda\, y \tag{8}$$

وبضرب المعادلة (8) فى $e^{-\lambda t}$ يمكننا كتابتها بالصورة

$$\dot{y} e^{\lambda t} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha\, e^{\lambda t} - gte^{\lambda t} - \lambda\, y e^{\lambda t}$$
$$(\dot{y} + \lambda\, y) e^{\lambda t} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha\, e^{\lambda t} - g\,t\,e^{\lambda t}$$
$$\frac{d}{dt}\left(y e^{\lambda t}\right) = \mathrm{v}_0 \sin\alpha\, e^{\lambda t} - g\,t\,e^{\lambda t}$$
$$d\left(y e^{\lambda t}\right) = (\mathrm{v}_0 \sin\alpha\, e^{\lambda t} - g\,t\,e^{\lambda t})dt$$

وبتكامل المعادلة السابقة نحصل على

$$\int d\left(y e^{\lambda t}\right) = \mathrm{v}_0 \sin\alpha \int e^{\lambda t} dt - g \int t\, e^{\lambda t} dt$$
$$\int d\left(y e^{\lambda t}\right) = \mathrm{v}_0 \sin\alpha \int e^{\lambda t} dt - \frac{g}{\lambda} \int t\, d(e^{\lambda t})$$
$$y e^{\lambda t} = \frac{\mathrm{v}_0}{\lambda} \sin\alpha\; e^{\lambda t} - \frac{g}{\lambda}\left\{ t\, e^{\lambda t} - \int e^{\lambda t}\, dt \right\} + c_3$$
$$y e^{\lambda t} = \frac{\mathrm{v}_0}{\lambda} \sin\alpha\; e^{\lambda t} - \frac{g}{\lambda}\left\{ t\, e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \right\} + c_3$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $t=0, y=0$ ويكون لدينا

$$(0)e^{\lambda(0)} = \frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha\, e^{\lambda(0)} - \frac{g}{\lambda}\left\{(0)e^{\lambda(0)} - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda(0)}\right\} + c_3$$

$$c_3 = -(\frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha + \frac{g}{\lambda^2})$$

وبالتعويض عن قيمة c_3 نحصل على

$$ye^{\lambda t} = \frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha\, e^{\lambda t} - \frac{g}{\lambda}\left\{t e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\right\} - (\frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha + \frac{g}{\lambda^2})$$

$$y = \frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha - \frac{g}{\lambda}\left\{t - \frac{1}{\lambda}\right\} - (\frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha + \frac{g}{\lambda^2})e^{-\lambda t}$$

$$y = \frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha\,(1-e^{-\lambda t}) + \frac{g}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda t}) - \frac{gt}{\lambda}$$

$$y = (\frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha + \frac{g}{\lambda^2})\,(1-e^{-\lambda t}) - \frac{gt}{\lambda} \qquad (9)$$

من المعادلتين (8), (9) نحصل على

$$\dot{y} = \text{v}_0\sin\alpha - gt - \lambda\left\{(\frac{\text{v}_0}{\lambda}\sin\alpha + \frac{g}{\lambda^2})\,(1-e^{-\lambda t}) - \frac{gt}{\lambda}\right\}$$

$$= \text{v}_0\sin\alpha - gt - \left\{(\text{v}_0\sin\alpha + \frac{g}{\lambda})\,(1-e^{-\lambda t}) - gt\right\}$$

$$= \text{v}_0\sin\alpha - gt - \text{v}_0\sin\alpha\,(1-e^{-\lambda t}) - \frac{g}{\lambda}\,(1-e^{-\lambda t}) + gt$$

$$= \text{v}_0\sin\alpha\, e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda}\,(1-e^{-\lambda t})$$

$$\dot{y} = (\text{v}_0\sin\alpha + \frac{g}{\lambda})e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda} \qquad (10)$$

مـرة ثانيـة يمكننـا كـذلك كتابـة العجلـة فـى اتجـاه المحـور y كدالـة فـى الـزمن t وذلـك بالتعويض من المعادلة (10) فى (2)

$$\ddot{y} = -g - \lambda\dot{y} = -g - \lambda(\text{v}_0\sin\alpha + \frac{g}{\lambda})e^{-\lambda t} + g = -(\lambda\text{v}_0\sin\alpha + g)e^{-\lambda t} \qquad (11)$$

يعطى اتجاه السرعة بالصورة

$$\tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})e^{-\lambda t}-\frac{g}{\lambda}}{\mathrm{v}_0\cos\alpha\ \ e^{-\lambda t}}\right)$$

ويعطى مقدار السرعة بالصورة

$$\mathrm{v}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{e^{-2\lambda t}(\mathrm{v}_0^2\cos^2\alpha+\mathrm{v}_0^2\sin^2\alpha+\frac{g^2}{\lambda^2}+2\mathrm{v}_0\frac{g}{\lambda}\sin\alpha)+\frac{g^2}{\lambda^2}-2\frac{g}{\lambda}(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})e^{-\lambda t}}$$

$$\mathrm{v}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{e^{-2\lambda t}(\mathrm{v}_0^2+\frac{g^2}{\lambda^2}+2\mathrm{v}_0\frac{g}{\lambda}\sin\alpha)+\frac{g^2}{\lambda^2}-2\frac{g}{\lambda}(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})e^{-\lambda t}}$$

بينما يعطى اتجاه العجلة بالصورة

$$\tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-(\lambda\mathrm{v}_0\sin\alpha+g)e^{-\lambda t}}{-\lambda\mathrm{v}_0\cos\alpha\ \ e^{-\lambda t}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\lambda\mathrm{v}_0\sin\alpha+g}{\lambda\mathrm{v}_0\cos\alpha}\right)=\text{constant}$$

ويعطى مقدار العجلة بالصورة

$$f=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{e^{-2\lambda t}(\mathrm{v}_0^2\lambda^2\cos^2\alpha+\mathrm{v}_0^2\lambda^2\sin^2\alpha+g^2+2\mathrm{v}_0\lambda g\sin\alpha)}$$

$$f=\sqrt{e^{-2\lambda t}(\mathrm{v}_0^2\lambda^2+g^2+2\mathrm{v}_0\lambda g\sin\alpha)}=\sqrt{\mathrm{v}_0^2\lambda^2+g^2+2\mathrm{v}_0\lambda g\sin\alpha}\ \ e^{-\lambda t}=f_0\,e^{-\lambda t}$$

حيث $f_0=\sqrt{\mathrm{v}_0^2\lambda^2+g^2+2\mathrm{v}_0\lambda g\sin\alpha}$

حل المعادلة (7):

$$\ddot{y}=-g-\lambda\dot{y}\ \Rightarrow\ \frac{d\dot{y}}{dt}=-g-\lambda\dot{y}\Rightarrow\ \int\frac{\lambda\,d\dot{y}}{g+\lambda\dot{y}}=-\lambda\int dt$$

$$\ln(g+\lambda\dot{y})=-\lambda t+c$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c بالصورة $c=\ln(g+\lambda\mathrm{v}_0\sin\alpha)$ ويكون بذلك

$$\ln(g+\lambda\dot{y})=-\lambda t+\ln(g+\lambda\mathrm{v}_0\sin\alpha)\ \Rightarrow$$

<u>خصائص المقذوف</u>

(1)- للحصول على زمن أقصى ارتفاع نضع $\dot{y}=0$ فى المعادلة (9) وعند ذلك يكون

$$\dot{y}=(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})e^{-\lambda t}-\frac{g}{\lambda}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{-\lambda t}=\frac{g}{\lambda(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})}$$

$$\frac{\lambda}{g}(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})=e^{\lambda t} \quad\Rightarrow\quad (\frac{\lambda}{g}\mathrm{v}_0\sin\alpha+1)=e^{\lambda t}$$

$$t_h=\frac{1}{\lambda}\ln(1+\frac{\lambda}{g}\mathrm{v}_0\sin\alpha) \tag{10}$$

(2) أقصى ارتفاع (Greatest Height):

للحصول على أقصى ارتفاع نعوض عن قيمة t_h من المعادلة (10) فى المعادلة (8) نحصل على

$$\begin{aligned}
y_{\max.}=h&=(\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2})\,(1-e^{-\lambda t})\,-\frac{gt}{\lambda}\\
&=(\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2})\,(1-\frac{g}{\lambda(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})})\,-\frac{g}{\lambda}\,\frac{1}{\lambda}\ln(1+\frac{\lambda}{g}\mathrm{v}_0\sin\alpha)\\
&=\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})\frac{g}{\lambda(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})}-\frac{g}{\lambda^2}\ln(1+\frac{\lambda}{g}\mathrm{v}_0\sin\alpha)\\
&=\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2}-\frac{g}{\lambda^2}-\frac{g}{\lambda^2}\ln(1+\frac{\lambda}{g}\mathrm{v}_0\sin\alpha)
\end{aligned}$$

$$y_{\max.}=h=\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha-\frac{g}{\lambda^2}\ln(1+\frac{\lambda}{g}\mathrm{v}_0\sin\alpha) \tag{11}$$

وعند ذلك يعطى الإحداثي الأفقى x من المعادلة (4) بالصورة .

$$(x)_{t_h}=x=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\lambda}(1-\frac{g}{\lambda(\mathrm{v}_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda})}) \tag{12}$$

(3)- زمن الطيران (زمن التحليق Time of Flight) :

كما عرفنا سابقاً لإيجاد الزمن الذى بأخذة مقذوف من لحظة قذفه من النقطة o حتى يصيب هدفاً معيناً فإنه يلزمنا تحديد الإحداثي الأفقى x من العلاقة (4) أو الإحداثي الرأسي y من العلاقة (8) لهذا الهدف وعند ذلك يمكن القول بأن هذا الزمن يعطى من العلاقة

$$x=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) \;\Rightarrow\; e^{-\lambda t}=1-\frac{\lambda}{\mathrm{v}_0\cos\alpha}x \;\Rightarrow\; e^{-\lambda t}=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha-\lambda x}{\mathrm{v}_0\cos\alpha}$$

$$e^{\lambda t}=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\mathrm{v}_0\cos\alpha-\lambda x} \;\Rightarrow\; \lambda t=\ln\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\mathrm{v}_0\cos\alpha-\lambda x}$$

$$t^*=\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\mathrm{v}_0\cos\alpha-\lambda x}\right\} \tag{13}$$

أو من العلاقة

$$y=(\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2})\,(1-e^{-\lambda t^*})\;-\frac{g\,t^*}{\lambda} \tag{14}$$

اما إذا كان هذا الهدف يقع على المحور الأفقى المار بنقطة القذف فإن هذا الزمن يسمى بزمن الطيران وللحصول على هذا الزمن نضع $y=0$ فى المعادلة (8) وعند ذلك يكون

$$y=0=(\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2})\,(1-e^{-\lambda t})\;-\frac{gt}{\lambda}$$

وعند ذلك يعطى زمن الطيران من حل المعادلة

$$T=\frac{\lambda}{g}(\frac{\mathrm{v}_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2})\,(1-e^{-\lambda T}) \tag{15}$$

<u>(4) المدى (Range):</u>

للحصول على المدى نعوض عن قيمة T من المعادلة (15) فى المعادلة (4) فيكون

$$R=\frac{\mathrm{v}_0\cos\alpha}{\lambda}(1-e^{-\lambda T}) \tag{16}$$

(6) معادلـة المســار: كمـا عرفنـا سـابقا بـأن معادلـة المســار هـى معادلـة تجمـع بـين إحـداثيات الحركـة خاليـة مـن الـزمن. والمعادلتـان (4), (9) تسـميان بالمعـادلات البارامتريـة للمســار و تتعـين معادلـة المســار مـن حـذف البـارامتر tبـين هـاتين المعادلتين وذلك بالتعويض من المعادلة (4) عن t فى المعادلة (9) فنحصل على

$$\begin{aligned}
x &= \frac{v_0\cos\alpha}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})\\
\therefore\ 1-e^{-\lambda t} &= \frac{\lambda}{v_0\cos\alpha}x\\
e^{-\lambda t} &= 1-\frac{\lambda}{v_0\cos\alpha}x \qquad (17)\\
-\lambda t &= \ln\left(1-\frac{\lambda}{v_0\cos\alpha}x\right)\\
\therefore\ \frac{-gt}{\lambda} &= \frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1-\frac{\lambda}{v_0\cos\alpha}x\right)
\end{aligned}$$

وبالتعويض عن قيم t فى المعادلة (9) نحصل على

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{v_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2}\right)(1-e^{-\lambda t})-\frac{gt}{\lambda}\\
&= \left(\frac{v_0}{\lambda}\sin\alpha+\frac{g}{\lambda^2}\right)\frac{\lambda}{v_0\cos\alpha}x+\frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1-\frac{\lambda}{v_0\cos\alpha}x\right)
\end{aligned}$$

$$y = \left(v_0\sin\alpha+\frac{g}{\lambda}\right)\frac{x}{v_0\cos\alpha}+\frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1-\frac{\lambda}{v_0\cos\alpha}x\right) \qquad (18)$$

ثالثاً حركة المقذوف مع على مستوى مائل

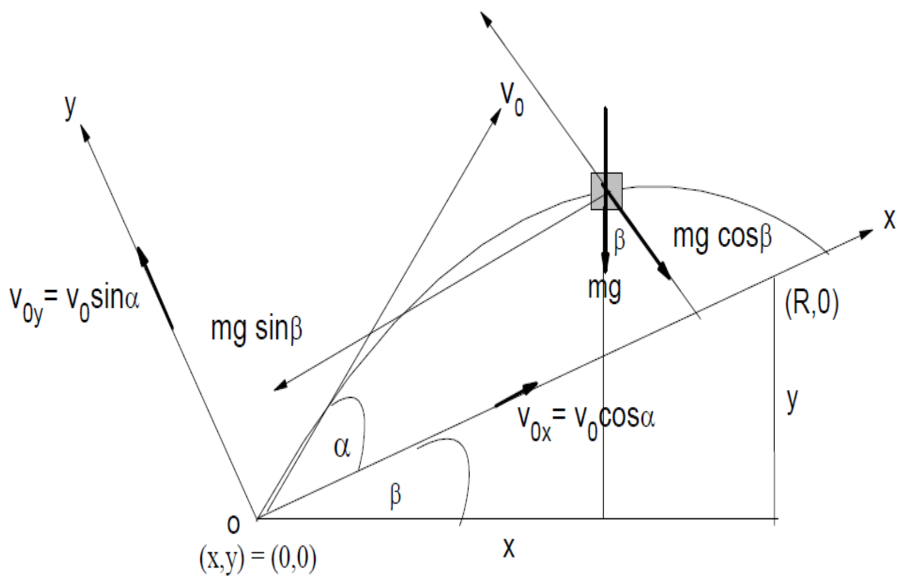
سوف نقسم الحركة على المستوى المائل الى

1- فى حالة المستوى المائل على الأفقى بزاوية ما بحيث يكون المحور ox فـى اتجـاه المستوى المائل والمحور oy عمودي على المحور ox.

2-فى حالة المستوى المائل على الأفقي بزاوية ما والمحور الرأسي عمودي على المحور الأفقي

<u>الحالة الأولى:</u>

فى حالة المستوى المائل على الأفقي بزاوية ما بحيث يكون المحور ox فى اتجاه المستوى المائل والمحور oy عمودى على المحور ox.



ومعادلة الحركة من قانون نيوتن الثانى تكتب بالصورة

$$m\vec{a}=\vec{F} \qquad (1)$$

<u>معادلة الحركة فى الاتجاه الأفقى هى</u>

من المعادلة (1) نكتب معادلة الحركة فى اتجاه المحور x بالصورة

$$m\ddot{x}=-mg\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}=-g\sin\beta \qquad (2)$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل على

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=-g\sin\beta \rightarrow \dot{x}=-g\,t\sin\beta+c_1$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_1 بالصورة $c_1=\mathrm{v}_0\cos\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{x} = \mathrm{v}_0 \cos\alpha - g\,t\sin\beta \qquad (3)$$

وبتكامل المعادلة (3) بالنسبة للزمن نحصل على

$$x = \mathrm{v}_0\ t\cos\alpha - \frac{1}{2}t^2 g\sin\beta + c_2$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_2 = 0$ ويكون بذلك

$$x = \mathrm{v}_0\ t\cos\alpha - \frac{1}{2}t^2 g\sin\beta \qquad (3)$$

<u>معادلة الحركة فى الاتجاه الراسى هى</u>

من المعادلة (1) نكتب معادلة الحركة فى اتجاه المحور y بالصورة

$$m\ddot{y} = -mg\cos\beta \quad Or \quad \ddot{y} = -g\cos\beta \qquad (4)$$

وبتكامل المعادلة (4) نحصل على

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -g\cos\beta \quad \rightarrow \dot{y} = -g\,t\cos\beta + c_3$$

ومن الشروط الابتدائية يعطى c_3 بالصورة $c_3 = \mathrm{v}_0 \sin\alpha$ ويكون بذلك

$$\dot{y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha - g\,t\cos\beta \qquad (5)$$

وبتكامل المعادلة (5) بالنسبة للزمن نحصل على

$$y = \mathrm{v}_0 t\ \sin\alpha - \frac{1}{2}g\,t^2\cos\beta + c_4$$

ومن الشروط الابتدائية يكون $c_4 = 0$ ويكون بذلك

$$y = \mathrm{v}_0 t\ \sin\alpha - \frac{1}{2}g\,t^2\cos\beta \qquad (6)$$

المعادلتين (3), (6) تسميان بالمعادلات البارامترية للمسار

<u>خصائص المقذوف</u>

(1)- زمن أقصى ارتفاع: للحصول على زمن أقصى ارتفاع و نضع $\dot{y}=0$ فى المعادلة (5) وعند ذلك يكون

$$t_{y=y_{\max}}=t=\frac{v_0\sin\alpha}{g\cos\beta} \tag{7}$$

(2) أقصى ارتفاع (Greatest Height): وهى أقصى مسافة رأسية يمكن أن يتحركها لأعلى

وللحصول على أقصى ارتفاع نعوض عن قيمة t_h من المعادلة (7) فى المعادلة (6) نحصل على

$$y_{\max.}=h=v_0\,t\,\sin\alpha-\frac{1}{2}g\,t^2\cos\beta=v_0\frac{v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\sin\alpha-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2\cos\beta$$

$$=\frac{v_0^2\sin\alpha}{g\cos\beta}\sin\alpha-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2\cos\beta=\frac{v_0^2\sin\alpha}{2g\cos\beta}\sin\alpha$$

$$y_{\max.}=h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g\cos\beta} \tag{8}$$

(3)- زمن الطيران (زمن التحليق Time of Flight) :

للحصول على زمن الطيران نضع $y=0$ فى المعادلة (6) وعند ذلك يكون

$$y=0=v_0\,t\,\sin\alpha-\frac{1}{2}g\,t^2\cos\beta=0\Rightarrow\ v_0\,t\,\sin\alpha=\frac{1}{2}g\,t^2\cos\beta$$

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\beta} \tag{9}$$

وواضح من المعادلتين (7), (9) أن زمن الطيران ضعف زمن الوصول لأقصى ارتفاع أى أن $(T=2t)$

(4) المدى (Range): وهى أكبر مسافة يتحركها الجسيم على المحور الأفقي

وللحصول على المدى نعوض عن قيمة $t_{x=R.}=t_F$ من المعادلة (9) فى المعادلة (3) نحصل على

$$x=R=\mathrm{v}_0\ t\cos\alpha-\frac{1}{2}t^2 g\sin\beta=\mathrm{v}_0\ \frac{2\mathrm{v}_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\cos\alpha-\frac{1}{2}\left(\frac{2\mathrm{v}_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2 g\sin\beta$$

$$R=\frac{2\mathrm{v}_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\beta}-\frac{2\mathrm{v}_0^2\sin^2\alpha}{g\cos^2\beta}\sin\beta=\frac{2\mathrm{v}_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$R=x_{t_{x=R.}=t_F.}=\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\cos^2\beta}\sin\alpha\ \cos(\alpha+\beta) \qquad (10)$$

ملاحظات على المدى:

1- خاصية نفس المدى

يمكن الحصول على نفس المدى لقذيفتين قذفا من مدفع واحد بزاويتين α_1,α_2 وذلك إذا كان

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\beta \qquad (11)$$

2- خاصية أقصى المدى

يمكن إيجاد أقصى مدى لقذيفة بالصورة بالتالية

$$\frac{dR}{d\alpha}=\frac{2\mathrm{v}_0^2}{g\cos^2\beta}\left\{\cos\alpha\ \cos(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\ \right\}=0$$

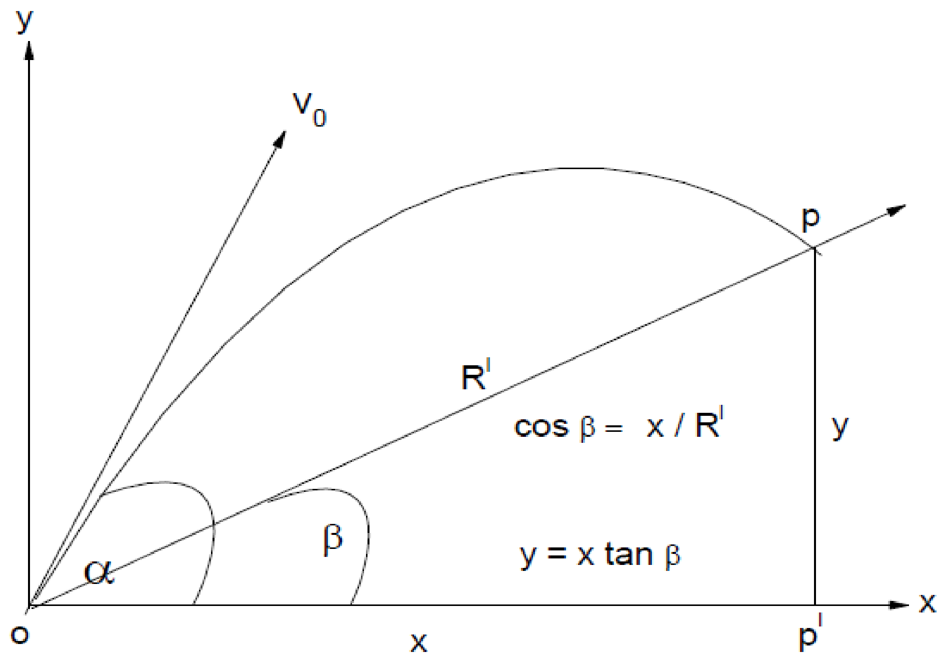
$$\left\{\cos\alpha\ \cos(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\ \right\}=0\ \Rightarrow\cos(\alpha+\alpha+\beta)=\cos(2\alpha+\beta)=0$$

$$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\ \ \Rightarrow\ 2\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta\Rightarrow\ \alpha=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\beta\right\}$$

وبالتعويض فى المعادلة (10) عن الزاوية α نحصل على أقصى مدى.

الحالة الثانية:

فـى حالـة المسـتوى المائـل علـى الأفقـي بزاويـة مـا والمحـور الرأسـي عمـودي علـى المحور الأفقي



من الرسم واضح أن المدى على المستوى المائل يعطى من

$$R' = \frac{x}{\cos\beta} = x\sec\beta \qquad (1)$$

كذلك من الرسم واضح أن

$$y = x\tan\beta \qquad (2)$$

ونلاحظ أنه إذا أكمل المقذوف حركته وسقط على المحور ox فإن معادلة المسار يمكن كتابتها بالصورة

$$y = x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}\sec^2\alpha \qquad (3)$$

من المعادلتين (2), (3) يكون لدينا

$$y == x\tan\beta = x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2\mathrm{v}_0^2}\sec^2\alpha$$

$$x\left\{\tan\beta - \tan\alpha + \frac{g\,x}{2\mathrm{v}_0^2}\sec^2\alpha\right\} = 0$$

$$\therefore\quad x = 0, \qquad x = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\cos^2\alpha\left(\tan\alpha - \tan\beta\right) \qquad (4)$$

نلاحظ أن $x = 0$ تمثل نقطة تماس المقذوف مع المستوى opp' فى بداية الحركة بينما نقطة التماس الأخرى عندما يقع الجسيم على المستوى opp' تكون هى $x = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\cos^2\alpha\left(\tan\alpha - \tan\beta\right)$ وهذه النقطة تحقق المعادلة (1) وبالتعويض فى هذه المعادلة نحصل على

$$R' = x\sec\beta = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\cos^2\alpha\left(\tan\alpha - \tan\beta\right)\sec\beta = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\cos^2\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\sec\beta$$

$$= \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\frac{\cos^2\alpha\,\sec\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}\left(\sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha\right) = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\cos\alpha\,\sec^2\beta\left(\sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha\right)$$

ويعطى المدى على المستوى المائل yop بالصورة

$$R' = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\sin(\alpha - \beta)\cos\alpha\,\sec^2\beta \qquad (5)$$

$$R' = \frac{2\mathrm{v}_0^2}{g}\sec^2\beta\left(\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos^2\alpha\right)$$

$$= \frac{\mathrm{v}_0^2}{g}\sec^2\beta\left(2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\beta.\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)\right)$$

$$= \frac{\mathrm{v}_0^2}{g}\sec^2\beta\left(\sin2\alpha\cos\beta - \sin\beta - \sin\beta\cos2\alpha\right)$$

$$= \frac{\mathrm{v}_0^2}{g}\sec^2\beta\left(\sin2\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos2\alpha - \sin\beta\right)$$

وهكذا فإنه يمكن إعادة صياغة المدى بالصورة

$$R' = \frac{\mathrm{v}_0^2}{g}\sec^2\beta\,\left(\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta\right) \qquad (6)$$

ومن المعادلة (6) يعطى أكبر مدى عندما يكون $\sin(2\alpha-\beta)$ أكبر ما يمكن حيث الزاوية β ثابتة وبالتالي فإن كل من $\sin\beta$, $\sec^2\beta$ تكون قيم ثابتة .ويكون $\sin(2\alpha-\beta)$ أكبر ما يمكن إذا كان $\sin(2\alpha-\beta)=1$ وعند ذلك يكون $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ أو $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$. وهكذا يتضح أن أكبر مدى على مستوى مائل يحدث عندما ينصف اتجاه القذف بين الرأس والمستوى المائل وفى هذه الحالة يعطى أكبر مدى بالصورة

$$R'_{\max}=\frac{v_0^2}{g}\sec^2\beta\,(1-\sin\beta)=\frac{v_0^2}{g}\;\frac{(1-\sin\beta)}{\cos^2\beta}=\frac{v_0^2}{g}\;\frac{(1-\sin\beta)}{1-\sin^2\beta}=\frac{v_0^2}{g}\;\frac{(1-\sin\beta)}{(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)}$$

وعند ذلك يعطى أكبر مدى بالصورة

$$\therefore\quad R'_{\max}=\frac{v_0^2}{g}\;\frac{1}{1+\sin\beta}\qquad(7)$$

الاحتكاك

في كثيرٍ من الاحيان نعتبر سطح التلامس بين الاجسام المعنية بالدراسة املسا تماما وبناء عليه تكون قوة الفعل ورد الفعل المتبادلة بين اي جسمين عمودية على المماس المشترك للجـ ـسمين عند نقطة التلامس. وهذا حقيقة مخالف للطبيعة حيث ان اي سطح في الحياة العملية به درجة من الخشونة ولذلك فإنه يجب ان ناخذ في الاعتبار وجود مركبة مماسة علاوة علـــى قـــوة رد الفعل هذه المركبة المماسة تسمى قوة الإحتكاك.

ومما هو معروف ان قوى الإحتكاك تلعب دورا هاما في حياتنا اليومية فبدون قوة الإحتكاك لما استطاع الانسان ان يحفظ توازنه (تمنعه من الإنزلاق) اثناء السير ولولاها ما تحركت عجلات العربات إلى الامام ولظلت تدور حول نفسها وفي موضعها. ولدراسة باب الإحتكاك يلـــزم معرفة بعض التعاريف.

قوة رد الفعل

هو قوة تنشا من تلامس سطحين وإذا كان السطح املسا فإن قوة رد الفعل تكون في الجـــاه عمودي على السطح عند نقطة التلامس اما إذا كان سطح التلامس خشنا فلا تكون قوة رد الفعل عمودية في هذه الحالة وإنما مائلة (تسمى بقوة رد الفعل المحصل R) والتي يمكن تحليلها في اتجاه عمودي على السطح (تسمى رد الفعل العمودي N) واخرى في اتجاه سطح التماس (تسمى بقوة الإحتكاك F)

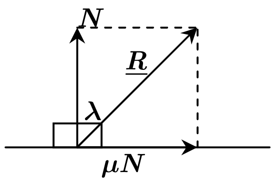
قوة الإحتكاك

تعرف بانها تلك القوة الخفية التي تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خـــشن. هـــذا وتعمل قوة الإحتكاك على الدوام في إتجاه يعاكس حركة الجسم وتكون بالقدر الكافي لوقف حركة الجسم حيث ان قوة الإحتكاك تزداد تدريجيا حتى يصل مقدار قوة الإحتكاك إلى حدٍ لا تتعداه $0 \leq F \leq F_{\max}$ وعندئذٍ يصبح الجسم على وشك الحركة او حالة الإتزان النـــهائي ويسمى الإحتكاك في هذه الحالة بالإحتكاك النهائي.

معامل الإحتكاك الاستاتيكي

تعرف النسبة بين مقداري قوة الإحتكاك النهائي ورد الفعل العمودي بمعامل الاحتكاك ويرمز له μ وهده النسبة تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما.

زاوية الإحتكاك

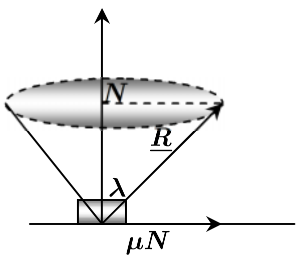


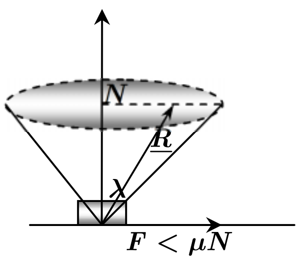
حينما يكون الجسم على وشك الحركة اي ان قوة الإحتكاك تكون نهائية $F_{\max}$ فإن محصلة رد الفعل عليه R تحلل إلى مركبة رد الفعل العمودي N وقوة الإحتكاك $F_{\max} = \mu N$ ، كذلك فإن الزاوية λ والتي يصنعها رد الفعل المحصل R مع رد الفعل العمودي N تسمى بزاوية الإحتكاك حيث

$$\tan \lambda = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

اي ان معامل الاحتكاك يساوي ظل زاوية الاحتكاك.

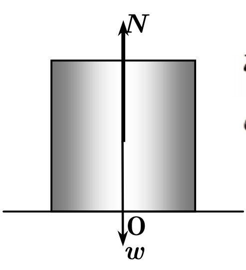
مخروط الإحتكاك





هو مخروط دائري قائم ، يعرف مخروط الاحتكاك على انه المخروط الدي راسه نقطة التماس المشتركة بين الجسمين الخشنين المتلامسين ، وينطبق محورة على قوة رد الفعل العمودية وعندما يكون الجسم في حالة الاتزان الحرج (قوة الاحتكاك بلغت قيمتها النهائية) فإن رد الفعل المحصل ينطبق على احد رواسم مخروط الإحتكاك (سطح المخروط) وإذا لم يصل الإحتكاك إلى النهاية العظمى فإن رد الفعل المحصل يقع داخل المخروط ، و نصف زاوية راسه هي زاوية الإحتكاك λ.

الإتزان على مستوى افقي خشن



إذا وضع جسم على سطح افقي خشن بدون التاثير عليه باي قوة خارجية فإن الجسم يتزن تحت تاثير وزنه w ورد الفعل العمودي N وتكون هاتان القوتان على خط عمل واحد ويمران بالنقطة O كما بالشكل.

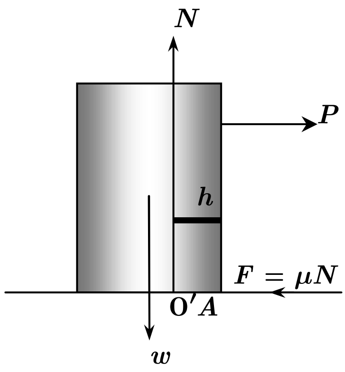
ولندرس الان الحالة عندما نحاول تحريك الجسم وذلك عن طريق التاثير عليه بقوة افقيـــة P مثلا . بمجرد التاثير عليه يحدث شيئان في ذات الوقت

■ تتولد قوة الاحتكاك F بحيث تحاول ان تمنع الجسم من الانزلاق وتكون قيمتها $F = P$.

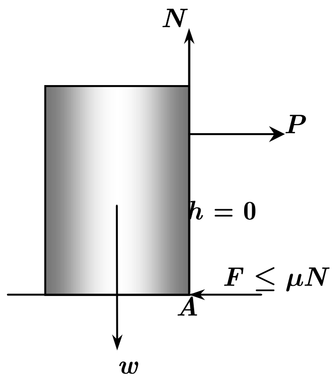
■ يتحرك رد الفعل العمودي N من النقطة O إلى نقطة جديدة O' وذلك لمنع الجسم من الانقلاب او الدوران.

والان بمحاولة تحريك الجسم وذلك عن طريق زيادة قيمة القوة P ، نجد ان F تزداد بزيادة القوة P بينما h (هي المسافة بيننقطة تاثير رد الفعل ونهاية الجسم $O'A$) تقل ومع زيـــادة هذه القوة يمكن حدوث احد الاحتمالات الاتية.

- تصل قيمة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى $F = \mu N$ قبل ان يصل رد الفعل N إلى طرف الجسم عند النقطة A $(h > 0)$ وعندئذ يبدا الجـــسم في الانـــزلاق قبـــل الانقلاب.
- يصل خط عمل رد الفعل N إلى النقطة A $(h = 0)$ قبل ان تصل قوة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى $(F < \mu N)$ وعندئذ يبدا الجسم في الانقلاب حول النقطة A قبل الانزلاق.
- تصل قيمة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى $F = \mu N$ في نفس اللحظة التي يصل فيها خط عمل N إلى النقطة A وعندئذ يبدا الجسم في الانزلاق والانقلاب معا.



الحالة ١



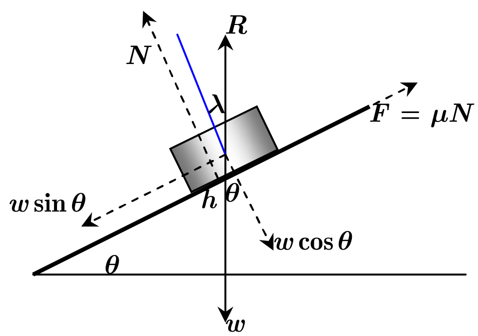
الحالة ٢

الإتزان على مستوى مائل خشن

نعتبر إتزان جسم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الافقي بزاوية ما فإن هدا الجسم يكون متزنا تحت تاثير وزنه w راسيا لاسفل ويؤثر عند مركز ثقله ، قوة رد الفعل المحصل R والدي يجب ان يكون راسيا لاعلى لحفظ الإتزان اي ان $R = w$.
وبفرض زيادة الزاوية التي يميل بها المستوى على الافقي حتى اصبح الجسم على وشك الحركة إلى اسفل وبفرض ان الزاوية في هده الحالة كانت θ وبكتابة معادلات الاتزان في اتجاه المستوى المائل والعمودي عليه يكون

$$w\sin\theta = \mu N, \qquad w\cos\theta = N, \qquad \Rightarrow \tan\theta = \mu = \tan\lambda \qquad \therefore \theta = \lambda$$

اي ان الاحتكاك لجسم موضوع على مستوى مائل خشن يكون نهائيا عندما تكون زاوية ميل المستوى θ مساوية لزاوية الاحتكاك λ.

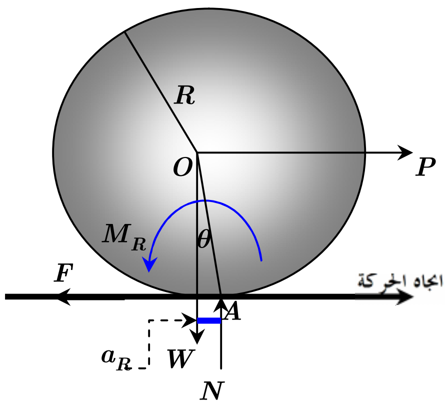


والسؤال الان ماذا يحدث في حالة عدم تساوي زاوية الاحتكاك λ مع زاوية ميل المستوى θ، يكون لدينا الثلاث حالات التالية عندما $F = \mu N$ ، $h > 0$

- إذا كانت $\theta = \lambda$ فإن الجسم يظل متزنا ويكون على وشك الحركة
- إذا كانت $\theta < \lambda$ فإن الجسم يظل متزنا دون ان يكون على وشك الحركة.
- إذا كانت $\theta > \lambda$ فإن الجسم يتزلق إلى اسفل المستوى.

وهدا يحدث الانزلاق طالما ان قوة رد الفعل العمودية لم تؤثر في نقطة عند نهاية الجسم.

مقاومة التدحرج



تنتج مقاومة التدحرج من الانبعـــاج الناشـــئ في السطح الذي تتدحرج عليه الكرة او الاسطوانة. فإذا سحب جسم اسطواني او كروي على ارض خشنة فإنه لا يتزلق بل يتدحرج بمعنى ان يتقـــدم ويدور في نفس الوقت وفي حالة التدحرج المثـــالي تلمس نقط المحيط الدائري الارض على التتـــابع دون إنزلاق وتتساوى المسافة المقطوعة إلى الامام وطول القوس المقطوع على محيط الدائرة و هذه الحالة المثالية تحدث عندما يكون الجسم المتدحرج او السطح الذي يتدحرج عليه تام الصلابة بحيث يحدث التلامس بينهما في نقطة واحدة او راسم واحد وتكون P اقـــل قـــوة كافيـــة لإحداث التدحرج. ولكن الواقع ان هناك نقصا في صلابة الجسم المتدحرج والسطح مما ينتج عنه قدر من التفرطح بحيث يكون التماس في مساحة محدودة ، ويؤثر رد الفعل العمودي N عند نقطة A تسبق مسقط المركز O على السطح مسافة صغيرة a_R كما بالشكل وهـــذه المسافة تسمى ذراع مقاومة التدحرج ويتوقف مقدارها على مقدار صلابة الجسم المتـــدحرج والسطح وهو لا يتعدى كسر من المليمتر في حالة تدحرج عجلات القطار على القضبان.

ويحدث التدحرج بإنقلاب الجسم حول النقطة A والتي تثبت لحظيا ليدور الجسم حولها ولهذا فالإحتكاك لا يبلغ قيمته النهائية μN طالما ان الإنزلاق لم يحدث.

يمكن نقل رد الفعل العمودي N موازيا لنفسه إلى مركز الجسم وذلك بعد إضـــافة ازدواج M_R يسمى بعزم التدحرج ويتعين من العلاقة $M_R = Na_R$. وعلى ذلك فإن ردود فعـــل السطح الخشن على الجسم المتدحرج تتكون من رد الفعل العمودي N ، قوة الإحتكاك F وعزم مقاومة التدحرج M_R وهو عزم مضاد لاتجاه دوران العجلة.

كذلك بكتابة معادلات الاتزان للشكل السابق فإن

$$F = P, \qquad N = W$$

و باخد العزوم حول A فإن

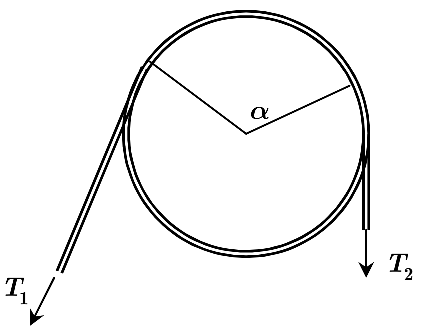
$$PR\cos\theta = Wa_R \qquad \Rightarrow P = \frac{Wa_R}{R\cos\theta} = \frac{Wa_R}{R}$$

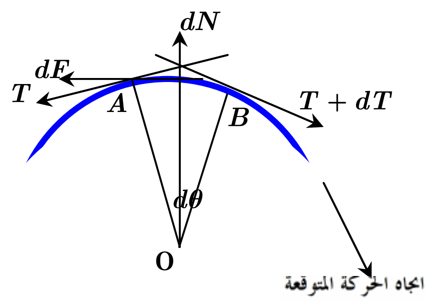
حيث θ صغيرة فإن $\cos\theta \simeq 1$ وقيمة القوة P هي اقل قوة تكفي لحدوث التدحرج.

إحتكاك الحبال و السيور

إذا تصورنا حبلا او سيرا يلتف حول محيط اسطوانة خشنة ثابتة بحيث يحصر زاوية α عند المركز و كان الشد في احد طرفيه T_1 وفي الطرف الثاني T_2 ومعامل الاحتكاك بين الحبل والاسطوانة μ. إذا زادت قوة الشد T_2 عن T_1 بحيث اصبح الحبل على وشك الانزلاق على سطح الاسطوانة في اتجاه T_2 فإن العلاقة بين T_1, T_2 تتعين من $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$.

ترجع اهمية السيور والحبال إلى استخدامها في نقل الحركة وفرملة الاجزاء الدوارة ومن ثم فتتولد قوى إحتكاكية من السير والجسم الدي يلتف حوله وذلك لخشونة سطحيهما. ولاثبات العلاقة السابقة نعتبر جزء صغير من الحبل يحصر زاوية $d\theta$ ومن الشكل فإن





هدا الجزء من الحبل متزن تحت تاثير الشدين $T+dT, T$ في اتجاهي المماس كما بالشكل و مركبتي رد الفعل المحصل وهما رد الفعل العمودي dN في اتجاه العمودي على المماس عند منتصف $\overset{\frown}{AB}$ وقوة الإحتكاك dF حيث $dF = \mu dN$ وتعمل في اتجاه المماس عند منتصف $\overset{\frown}{AB}$ (وذلك على اعتبار ان الحبل على وشك الإنزلاق على السطح الاسطواني).

و بكتابة معادلات الإتزان في اتجاهي المماس والعمودي عند منتصف $\overset{\frown}{AB}$ فإن

$$(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2}-T\cos\frac{d\theta}{2}-dF=0 \qquad \text{where} \quad dF=\mu dN$$

$$dN-(2T+dT)\sin\frac{d\theta}{2}=0$$

وباعتبار ان الزاوية $d\theta$ صغيرة فيمكن استخدام التقريبات التالية $\cos\frac{d\theta}{2}\simeq 1,$ ، $\sin\frac{d\theta}{2}\simeq\frac{d\theta}{2}$ وباهمال الكميات الصغيرة $dTd\theta$ من المعادلات السابقة نحصل على

$$dT=\mu dN, \qquad dN=Td\theta \qquad \Rightarrow \frac{dT}{T}=\mu d\theta$$

وبتكامل العلاقة الاخيرة من A إلى B

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}=\mu\int_0^{\alpha}d\theta \qquad \Rightarrow \ln\left\{\frac{T_2}{T_1}\right\}=\mu\alpha \qquad \therefore\ T_2=T_1e^{\mu\alpha}$$

ومما يجدر الإشارة إليه انه إذا كان السطح الاسطواني املسا (اي ان $\mu=0$) فإن $T_1=T_2$ اي ان الشد لا يتغير عند اي موضع من الحبل.

قاعدة هامة :

إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان الجسم على وشك الحركة فإن قياس زاوية الإحتكاك يساوي قياس زاوية ميل المستوى مع الافقي.

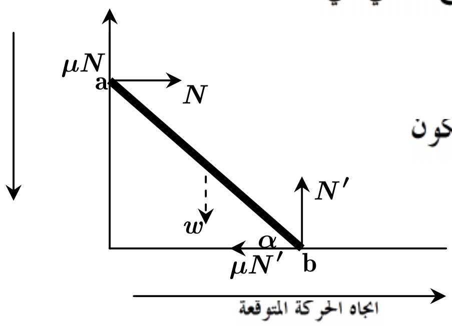
واخيرا تنحصر المسائل التي تدرس اتزان الاجسام المعرضة لقوى الاحتكاك بالاضافة إلى القوى الاخرى المؤثرة على الاجسام إلى نوعين

■ مسائل يكون المطلوب فيها هو تحديد القوى التي تجعل الجسم محل الدراسة على وشك الحركة. في هده الحالة نضع قوة الاحتكاك مساوية لقوة الاحتكاك النهائي $F=F_{\max}$ كما يمكن في هده الحالة تطبيق معادلات الاتزان.

■ مسائل لا تكون الحركة فيها وشيكة اي $F<F_{\max}$ وتكون فيها القوى المؤثرة على الجسم معلومة والمطلوب هو تحديد قوى الاحتكاك عند الاسطح المتلامسة اي انه مطلوب تعيين نوعية اتزان الجسم هل هو حرج ام لا ، وفي مسائل اخرى من هدا النوع يكون المطلوب هو تعيين وضع الاتزان الحرج الدي يتخده الجسم.

﴿ مثـ ١ ـال ﴾

سلم طوله L ووزنه w . سند على حائط راسي وعلى ارض افقية (معامل الاحتكاك بـــين السلم والحائط هو نفسه معامل الاحتكاك بين السلم والارض) اوجد معامل الاحتكاك اللازم لتحقيق الاتزان إذا كانت الزاوية التي يصنعها السلم مع الافقي هي α ؟



﴿ الحـــــل ﴾

بكتابة معادلات الاتزان في الاتجاهين الافقي والراسي يكون

$$N = \mu N'$$

$$N' + \mu N = w \quad \therefore N'(1+\mu^2) = w$$

باخد العزوم حول النقطة a يكون

$$\mu N' L \sin\alpha + \frac{1}{2} wL\cos\alpha - N'L\cos\alpha = 0$$

وبالتعويض من $N' = \dfrac{w}{1+\mu^2}$ في المعادلة الاخيرة نحصل على

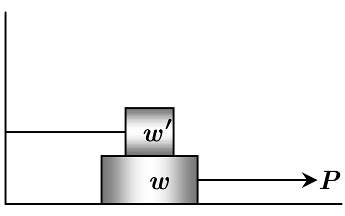
$$2\cancel{wL}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right) = (1+\mu^2)\cancel{wL}\cos\alpha$$

$$\therefore \mu^2 + 2\mu\tan\alpha - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \mu_{1,2} = -\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + 1} = -\tan\alpha \pm \sec\alpha$$

والقيمة الصحيحة لمعامل الاحتكاك هي القيمة الموجبة اي ان $\mu = \sec\alpha - \tan\alpha$

﴿ مثـ ٢ ـال ﴾

كتلة وزنها w تستقر على سطح افقي ومعامل الاحتكـــاك بينها وبين السطح يساوي μ . وضعت كتلة اخـــرى w' فوق الكتلة الاولى وربطت بواسطة خيط افقي كما بالشكل ، معامل الاحتكاك بين الكتلتين μ' ، عين اقل قوة P افقية تلزم لتحريك الكتلة ثم اوجد الشد في الخيط عندئذ ؟

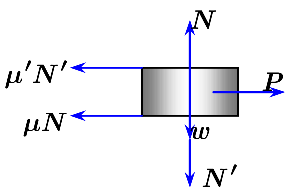


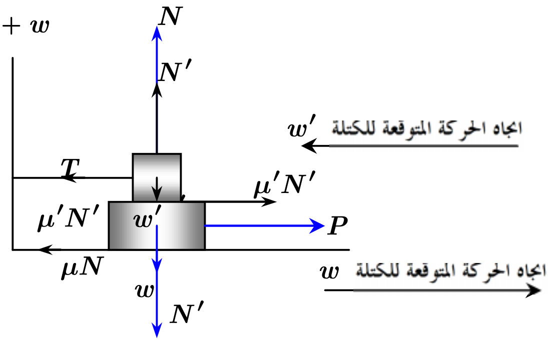
﴿ الحـــــل ﴾

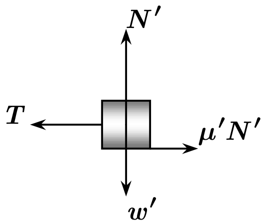
الشكل التالي يوضح كيفية ظهور ردود الافعال على الكتلتين

من اتزان الكتلة w تكون معادلات الاتزان في الاتجاهين الافقي والراسي هي

$$P = \mu N + \mu' N', \qquad N = N' + w$$







من التحليل الراسي لاتزان الكتلة w' يكون $N' = w'$

وبالتالي $P = \mu N + \mu' N' = \mu(w + w') + \mu' w'$

ولايجاد الشد في الخيط ندرس اتزان الكتلة w'

$$T = \mu' N' = \mu' w' \qquad \text{where} \quad N' = w'$$

﴿ مثـال ـ ٣ ﴾

اوجد قيمة القوة التي تميل بزاوية 15° مع المستوى المائل والتي تجعل الكتلة 10 والموضوعة على مستوى مائل بزاوية 30° تبدا الحركة إلى اعلى. إذا علمت ان معامل الاحتكاك بين الكتلة والمستوى المائل هي $\mu = 0.25$ ؟

﴿ الحــل ﴾

لقد قمنا بتحليل قوة الوزن إلى مركبتين كما بالشكل ، كذلك تم تحليل القوة F إلى مركبتين بكتابة معادلات الاتزان في اتجاه المستوى المائل والعمودي عليه نحصل على مع ملاحظة ان الجسم سيكون على وشك الحركة إلى اعلى (اتزان حرج)

$$F\cos 15 - 10g\sin 30 - 0.25N = 0 \qquad (\mu = 0.25)$$

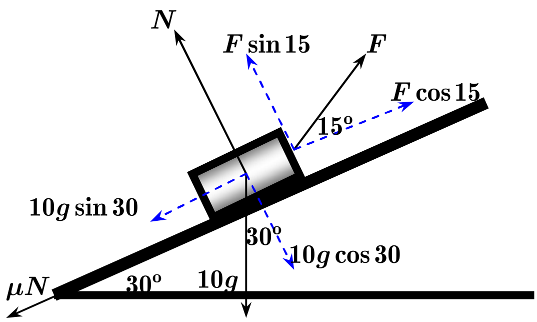
$$N + F\sin 15 - 10g\cos 30 = 0 \qquad \Rightarrow \quad N = 10g\cos 30 - F\sin 15$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على القوة المجهولة F في الصورة

$$F\cos 15 - 10g\sin 30 - 0.25(10g\cos 30 - F\sin 15) = 0$$

$$F(\cos 15 + 0.25 \sin 15) = 10g \sin 30 + 2.5g \cos 30$$

$$\therefore\ F = \frac{10g \sin 30 + 2.5g \cos 30}{\cos 15 + 0.25 \sin 15} \cong 68.2 \qquad (g = 0.981)$$

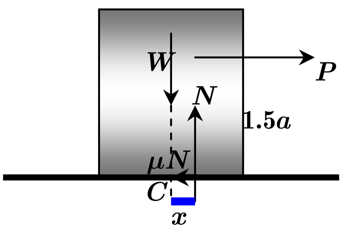


﴿ مثـ ٤ ـال ﴾

مكعب منتظم طول ضلعه $2a$ ووزنه W يؤثر على وجهه الايمن قوة افقية P تزداد بانتظام تدريجيا وعلى بعد $1.5a$ من ارضية افقية خشنة $(\mu = 0.7)$ بحيث تجعل المكعب على وشك الحركة. هل ينقلب ام يتزلق المكعب؟

﴿ الحـــــل ﴾

➤ حالة وشك الإنزلاق



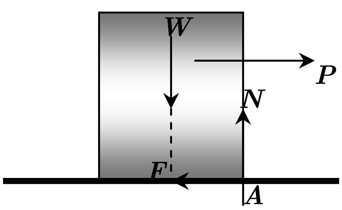
عندما يكون المكعب على وشك الإنزلاق تكون القوى المؤثرة عليه كما هو مبين بالشكل ومن شروط الإتزان

$N = W\,,$ $\qquad P = \mu N = \mu W$

$Nx = P(1.5a)$ $\qquad$ باخذ العزوم حول C

ومن المعادلات السابقة نجد ان $x = 1.05a$. وهذا لا يمكن ان يتحقق حيث ان x يجـــب ان تكون اقل من او تساوي a

➤ حالة وشك الإنقلاب



عندما يكون المكعب على وشك ان ينقلب

من شروط الإتزان $N = W, \qquad F = P$

باخذ العزوم حول A $\quad Na = P(1.5a) = Wa$

ومن هذه المعادلات نجد ان $F / N = 0.666 < \mu$ اي ان فرض ان المكعب سينقلب تحت تاثير القوة P هو الصحيح. وبالتالي سينقلب المكعب عندما تصل القوة إلى القيمة $0.666W$.

﴿ مثـ ٥ ـال ﴾

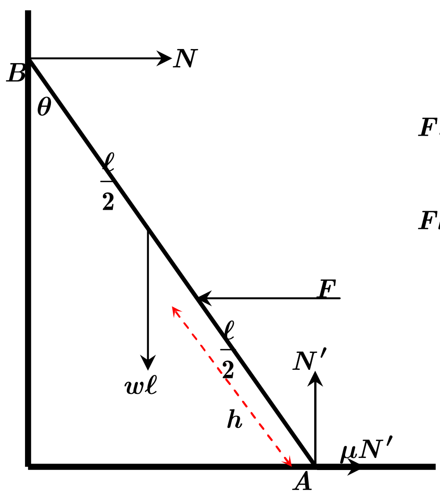
سلم طوله ℓ ووزن وحدة الاطوال منه w ، يرتكز على حائط راسي املس وارض افقيـة خشنة ويميل على الراسي بزاوية α. اثرت قوة F عند نقطة من السلم على بعـد h مـن اسفل نقطة في السلم بحيث تدفع اسفل نقطة نحو الحائط. إذا كان μ هو معامل الإحتكاك بين السلم والارض فاثبت ان F يجب ان تزيد عن $\dfrac{w\ell^2}{\ell - h}\left\{\mu + \dfrac{1}{2}\tan\alpha\right\}$ ؟

﴿ الحـــل ﴾

السلم متزن تحت تاثير القوى الموضحة بالشكل وهي قوة رد الفعل العمودية على الحائط N عند B ، وزن السلم $w\ell$ راسيا لاسفل ويؤثر في منتصفه ، رد الفعل المحصل R عنـد A ومر كبتاه رد الفعل العمودي N' و قوة الإحتكاك $\mu N'$ ، القوة F وتـصبح معـادلات الإتزان هي

$$N' = w\ell \qquad (1)$$

$$N + \mu N' = F \qquad (2)$$



باخذ العزوم حول A نحصل على

$$F.h\cos\theta + w\ell.\frac{\ell}{2}\sin\theta - N.\ell\cos\theta = 0$$

$$Fh\cos\theta + \frac{1}{2}w\ell^2\sin\theta - N\ell\cos\theta = 0 \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) ، (2) فإن $N = F - \mu w\ell$

وبالتعويض في المعادلة (3) نجد ان

$$Fh\cos\theta + \frac{1}{2}w\ell^2\sin\theta - (F - \mu w\ell)\ell\cos\theta = 0$$

بالقسمة على $\cos\theta$ فإن

$$F(\ell - h) = w\ell^2\left(\mu + \frac{1}{2}\tan\theta\right)$$

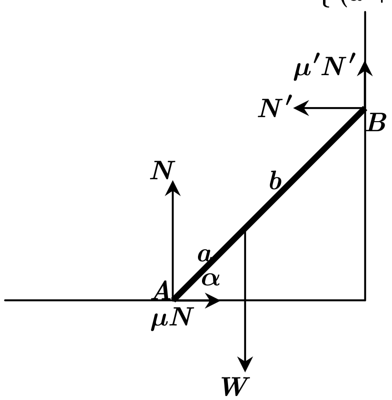
او

$$F = \frac{w\ell^2}{\ell - h}\left(\mu + \frac{1}{2}\tan\theta\right)$$

وهي القوة اللازمة لحفظ الإتزان بحيث تكون الحركة المتوقعة للنقطة A نحو الحائط ولكي تبدا النقطة A الحركة نحو الحائط يجب ان تزيد القوة F عن القيمة التي حصلنا عليها سابقا.

﴿ مثـ ٦ ـال ﴾

يرتكز قضيب وزنه W بطرفه A على ارض افقية خشنة وبطرفه الاخر B علـى حـائط راسي خشن. فإذا كان بعد مركز ثقله عن الطرف A هو a ويبعد عن الطرف B مـسافة b و كان معامل إحتكاك الارض هو μ ومعامل إحتكاك الحائط هو μ' فاثبت ان القـضيب يصنع زاوية مع الافقي تتعين في وضع الإتزان من $\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{a - b\mu\mu'}{(a+b)\mu}\right\}$؟



﴿ الحـــــل ﴾

بالتحليل افقيا وراسيا نحصل على

$$N' = \mu N \qquad (1)$$

$$\mu'N' + N = W \qquad (2)$$

وباخد العزوم حول النقطة A نجد ان

$$N'(a+b)\sin\alpha + \mu'N'(a+b)\cos\alpha = Wa\cos\alpha \qquad (3)$$

بالتعويض عن W من المعادلة (1) وعن N' من المعادلة (2) في المعادلة (3) نجد ان

$$\mu N(a+b)\sin\alpha + \mu\mu'N(a+b)\cos\alpha = (N + \mu\mu'N)a\cos\alpha$$

بالقسمة على $N\cos\alpha$ يكون

$$\mu(a+b)\tan\alpha + \mu\mu'(a+b) = (1 + \mu\mu')a$$

$$\mu(a+b)\tan\alpha = a - b\mu\mu' \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}$$

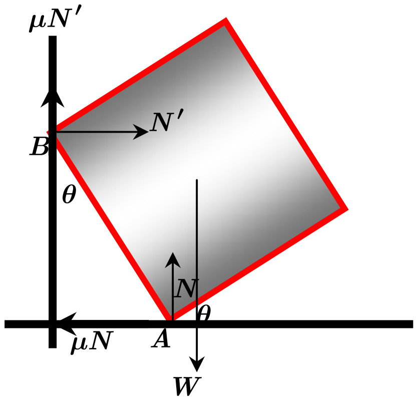
$$\therefore\ \alpha = \tan^{-1}\left\{\frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right\}$$

وهو المطلوب اثباته.

﴿ مثـ ٧ ـال ﴾

مكعب وزنه W وطول ضلعه ℓ يرتكز على ارض افقية وحائط راسي خشن معامل إحتكاكهما كما هو مبين بالشكل. اوجد الزاوية θ في حالة الإتزان الحرج ؟

﴿ الحـــل ﴾



بالتحليل افقيا وراسيا

$$N' = \mu N$$
$$N + \mu N' = W$$

ومن المعادلتين السابقتين نجد ان

$$N = \frac{W}{1+\mu^2}, \qquad N' = \frac{\mu W}{1+\mu^2}$$

باخد العزوم حول النقطة A فإن

$$N'\ell\cos\theta + \mu N'\ell\sin\theta - W\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

بالتعويض عن قيمة N, N' نحصل على

$$\mu\cos\theta + \mu^2\sin\theta - \left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mu^2\right)\left\{\cos\theta - \sin\theta\right\} = 0, \qquad \therefore\ \tan\theta = ...?$$

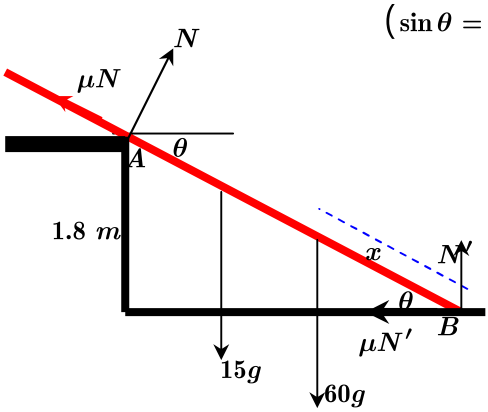
﴿ مثـ ٨ ـال ﴾

لوح منتظم كتلته $15\ Kg$ وطوله $4\ m$ يستقر على سطحين عند A, B المسافة بينهما $3\ m$ وهما نفس معامل الإحتكاك عين اقصى مسافة يصعدها رجل كتلته $60\ Kg$ بسرعة منتظمة قبل ان يتزلق اللوح $(\mu = 0.2)$؟

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض ان الرجل يصعد مسافة قبل ان يتزلق اللوح اي يكون اللوح على وشك الإنزلاق

القوى المؤثرة على اللوح مبينة بالشكل $\left(\sin\theta = \frac{1.8}{3}\right)$



باخد العزوم حول النقطة B

$$15g(2\cos\theta) - 3N + 60g(x\cos\theta) = 0$$

ومن هده المعادلة نجد ان

$$N = 8g(1 + 2x)$$

بالتحليل افقيا

$$N\sin\theta - \mu N\cos\theta - \mu N' = 0$$

وبالتعويض عن قيمة N في المعادلة السابقة نحصل على $N' = 170g(1 + 2x)$

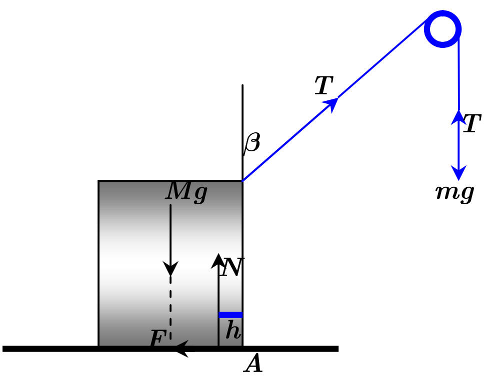
وبالتحليل راسيا $N\cos\theta + \mu N\sin\theta - 75g + N' = 0$

وبالتعويض في هده المعادلة عن قيمة كل من N, N' نحصل على $x = 1.0277\ m$

﴿ مثـ ٩ ـال ﴾

وضع مكعب كتلته M على مستوى افقي خشن زاوية إحتكاكه λ تم ربط بخـيـط عنـد منتصف احد احرفه العليا ومر الخيط على بكرة مثبتة عند نقطة بحيث يتدلى من طرفه الاخر كتلة m . فإذا كان الخيط عمودي على الحرف ويميل على الراسي بزاوية β . اثبـــت ان المكعب ينقلب قبل ان يتزلق إذا كان $\cot\lambda + \cot\beta < 2$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾



نفرض ان طول ضلع المكعب $2a$.

من إتزان الكتلة المدلاة في الخيط $T = mg$

من إتزان المكعب في الاتجاه الراسي

$$N = Mg - T\cos\beta = Mg - mg\cos\beta$$

وفي الاتجاه الافقي $F = T\sin\beta = mg\sin\beta$

وباخذ العزوم حول نقطة تاثير رد الفعل N وباعتبار ان المسافة بين هذه النقطة والنقطة A هي h نجد ان

$$T\sin\beta(2a) = T\cos\beta(h) + Mg(a-h)$$

$$m\sin\beta(2a) = m\cos\beta(h) + M(a-h) \qquad \therefore h = \frac{m\sin\beta(2a) - Ma}{m\cos\beta - M}$$

شرطي الإنزلاق هما $F = \mu N,\ h > 0$ وبالتالي

$$F = T\sin\beta = mg\sin\beta = \mu N \qquad \Rightarrow m\sin\beta = \mu(M - m\cos\beta)$$

$$\therefore m = \frac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}$$

ومن الشرط $h > 0$ يكون

$$h = \frac{m\sin\beta(2a) - Ma}{m\cos\beta - M} > 0 \qquad \therefore \frac{2\left\{\dfrac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}\right\}\sin\beta - M}{\left\{\dfrac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}\right\}\cos\beta - M}$$

وبـاجراء الاختـصارات للعلاقـة الاخـيرة نحـصل علـى $\mu\cot\beta > 2\mu - 1$ او $\cot\beta > 2 - \dfrac{1}{\mu} = 2 - \cot\lambda$ او $\cot\beta + \cot\lambda > 2$ وهو شـرط الإنـزلاق حيـث $(\mu = \tan\lambda)$

وشرطي الإنقلاب هما $F < \mu N,\ h = 0$ وبالتالي

$$h = \frac{m\sin\beta(2a) - Ma}{m\cos\beta - M} = 0 \qquad \therefore 2m\sin\beta = M \qquad \Rightarrow m = \frac{M}{2\sin\beta}$$

$$F = T\sin\beta = mg\sin\beta < \mu N \qquad \Rightarrow mg\sin\beta < \mu(M - m\cos\beta)g$$

$$\therefore m < \frac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta} \qquad \Rightarrow \frac{M}{2\sin\beta} < \frac{\mu M}{\sin\beta + \mu\cos\beta}$$

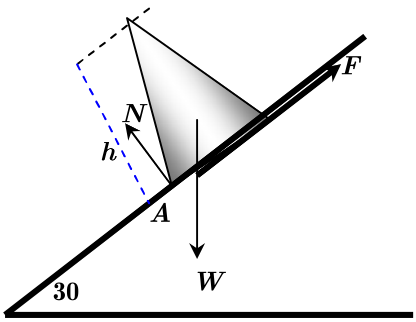
وباجراء الاختصارات للعلاقة الاخيرة نحصل على شرط الإنقلاب $\cot\beta + \cot\lambda < 2$ حيث $(\mu = \tan\lambda)$.

﴿ مثـ ١٠ ـال ﴾

وضع مخروط دائري قائم بقاعدته على مستوى خشن مائل بزاوية $\frac{\pi}{6}$ على الافقي . اثبت انه ينقلب عندما يكون نسبة ارتفاعه إلى نصف قطر قاعدته كنسبة $4\sqrt{3} : 1$ ثم اوجد اقل قيمة لمعامل الإحتكاك بحيث يحث سقوطه قبل إنزلاقه؟

﴿ الحـــــل ﴾

عندما يكون المخروط على وشك الإنقلاب فإن رد الفعل العمودي يؤثر عند اسفل نقطة من قاعدة المخروط A وتكون معادلات الإتزان هي



$$F = W\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}W,$$

$$N = W\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}W$$

وباخد العزوم حول النقطة A فإن

$$\therefore W\sin\frac{\pi}{6}.\frac{h}{4} = W\cos\frac{\pi}{6}.a \qquad \therefore \frac{h}{a} = 4\sqrt{3}$$

حيث h تمثل ارتفاع المخروط بينما a تمثل نصف قطر قاعدته اي ان المخروط ينقلب عندما يكون نسبة ارتفاعه إلى نصف قطر قاعدته كنسبة $4\sqrt{3} : 1$، ولكي يحدث الإنقــلاب قبــل الإنزلاق يجب ان يؤثر رد الفعل عند اسفل نقطة A وايضا يجب ان تكون قــوة الإحتكـــاك $F < \mu N$ ومن ثم

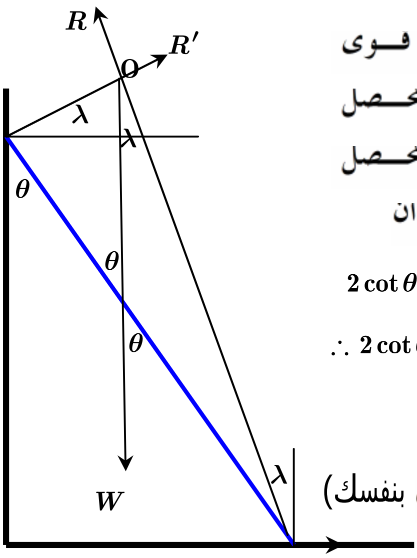
$$\therefore \frac{W}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}\mu W \qquad \therefore \mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وهي اقل قيمة لمعامل الإحتكاك بحيث ينقلب المخروط قبل الإنزلاق.

﴿ مثـ ١١ ـال ﴾

قضيب ثقيل منتظم يستند باحد طرفية على حائط راسي خشن والطرف الثاني على مستوى افقي خشن متساويان في معامل الإحتكاك ويقع في مستوى راسي عمودي على الحائط والمستوى و كان القضيب على وشك الإنزلاق. اوجد زاوية ميل السلم على الراسي؟

﴿ الحــــل ﴾



كما بالشكل فإن القضيب متزن تحت تاثير ثلاث قوى متلاقية عند النقطة وهي الوزن W ، رد الفعل الحصل للمستوى الافقي على القضيب R ، رد الفعل الحصل للحائط على القضيب R' ومن هندسة الشكل نجد ان

$$2\cot\theta = \cot\lambda - \cot\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$$

$$\therefore\ 2\cot\theta = \cot\lambda - \tan\lambda = 2\cot 2\lambda \qquad \therefore\ \theta = 2\lambda$$

حيث λ هي زاوية الإحتكاك وهو المطلوب.

يمكن استنتاج هده العلاقة من هندسة الشكل (حاول بنفسك)

﴿ مثـ ١٢ ـال ﴾

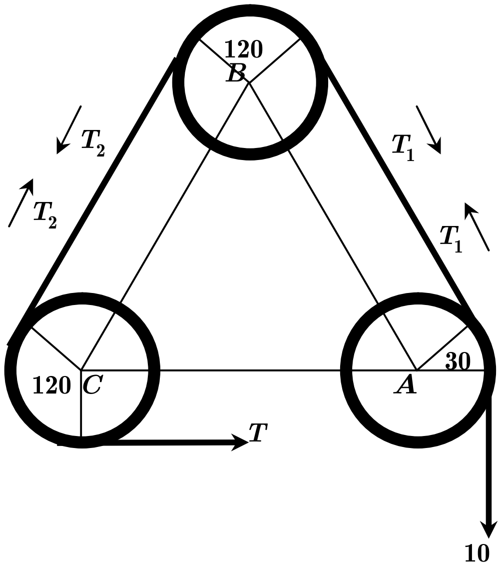
يلتف خيط يحمل في طرفه ثقلا قدره 10 حول ثلاث بكرات خشنة متماثلة موضوعة عند رؤوس مثلث متساوي الاضلاع كما بالشكل ، إذا كان معامل الاحتكاك يساوي 0.25 فاوجد الشد (كما بالشكل) في الطرف الاخر من الخيط حتى لا يتزلق؟

﴿ الحــــل ﴾

هنا سنستخدام المعادلة $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$ بالنسبة لجميع البكرات

اولا بالنسبة للبكرة A فإن الجزء من الخيط والدي يلامس الدائرة في زاوية $(\pi / 6)$

وبالتالي يكون $T_1 = 10e^{\mu\frac{\pi}{6}}$



وبالنسبة للبكرة B فإن الخيط يلامس الدائرة ويحصر زاوية $\frac{2\pi}{3}$ ومنها يكون

$$T_2 = T_1 e^{\mu\frac{2\pi}{3}} = 10e^{\mu\frac{5\pi}{6}} ،$$

وبالنسبة للبكرة C فإن الخيط يلامس الدائرة ويحصر زاوية $\frac{2\pi}{3}$ و من ثم

$$T = T_2 e^{\mu\frac{2\pi}{3}} = 10e^{\mu\frac{9\pi}{6}} = 10e^{\mu\frac{3\pi}{2}} = 10e^{\frac{3\pi}{8}}$$

﴿ مثـ ١٣ ـال ﴾

وضع قضيب منتظم طوله 2ℓ داخل كرة نصف قطرها a في المستوى الراسي المار بمركـــز الكرة. إذا كانت λ هي زاوية الإحتكاك بين القضيب والكرة. اوجد اكبر ميل للقضيب على الافقي إذا كانت $\ell < a\cos\lambda$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

القضيب واقع تحت تاثير وزنه W إلى اسفل وردي الفعل المحصلين عند نهايته R_1, R_2 ويصنع كل منهما مع العمودي على المماس (المار بالمركز) زاوية الإحتكاك λ، يمكن تحليل كل مـن ردي الفعل R_1, R_2 إلى مركبتيهما في اتجاه المركز والمماس كما هو موضح بالشكل وبتطبيق شروط الإتزان و بالتحليل في اتجاه القضيب والعمودي عليه نحصل على

$$(N_1 - N_2)\cos\alpha + \mu(N_1 + N_2)\sin\alpha - W\sin\theta = 0$$

$$(N_1 + N_2)\sin\alpha + \mu(N_2 - N_1)\cos\alpha - W\cos\theta = 0$$

α هي الزاوية بين رد الفعل العمودي والقضيب ،

بحذف N_1, N_2 من هاتين العلاقتين نجد ان

$$N_1 + N_2 = \frac{W(\mu\sin\theta + \cos\theta)}{\left(1+\mu^2\right)\sin\alpha}$$

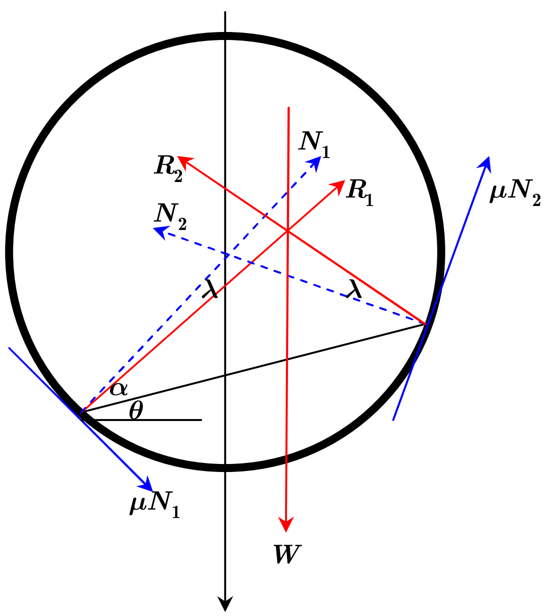
باخد العزوم حول مركز الكرة نجد ان

$$\mu(N_1 + N_2)a = W\sqrt{a^2 - \ell^2}\,\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mu \cancel{W}(\mu\sin\theta + \cos\theta)a}{\left(1+\mu^2\right)\sin\alpha} = \cancel{W}\sqrt{a^2 - \ell^2}\,\sin\theta$$

وباستخدام $\cos\alpha = \dfrac{\ell}{a}$, and $\mu = \tan\lambda$

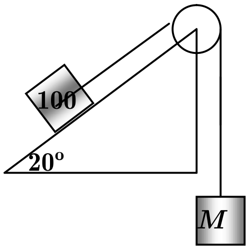
و بعد الاختصارات نحصل على $\tan\theta = \dfrac{a^2\sin\lambda\cos\lambda}{a^2\cos^2\lambda - \ell^2}$ وهو اكبر ميل القضيب على الافقي. ويمكن استخدام طريقة (مثـ ١١ ـال) في هده المسالة. (حاول ذلك بنفسك)



الخلاصـــــــــــــــة

- إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الحركة فـإن قيـاس زاويـة الإحتكاك يساوي قياس زاوية ميل المستوى على الافقي.
- رد الفعل المحصل يمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودي وقوة الإحتكـاك وتعمـل قـوة الإحتكاك عكس اتجاه الحركة المتوقعة للجسم.
- الزاوية بين رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودي هي زاوية الإحتكاك λ وظلـها هـو معامـل الإحتكاك.اي ان $\mu = \tan\lambda$.
- هناك انواع كثيرة من الإحتكاك منها إحتكاك الإنزلاق ، الإنقلاب ، التدحرج ، الحبال والسيور ، المفاصل.
- شرط حدوث الإنزلاق قبل الإنقلاب هو $h > 0, \quad F = \mu N$ اما شرط هو الإنقـلاب قبـل الإنزلاق هو $h = 0, \quad F < \mu N$.
- المعادلة التي تتعامل مع الحبال والسيور هي $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$

تمـــــارين



(١) اوجد مدى قيم الكتلة M بحيث لا تستطيع الكتلة 100 والموضحة بالشكل ان تتحرك إلى اعلى او إلى اسفل المستوى والذي يميل بزاوية 20^o مع الافقي علما بان معامل الاحتكاك بين المستوى والكتلة هو 0.3 ، والبكرة ملساء؟

(٢) وضع جسم وزنه w على مستوى خشن مائل بزاوية α اكبر من زاوية الإحتكاك λ. اوجد اقل واكبر قيمة للقوة التي تؤثر على الجسم في اتجاه خط اكبر ميل للمستوى بحيث يكون الجسم على وشك الحركة؟

(٣) بين ان اقل قوة تحرك جسيم وزنه W على إمتداد مستوى افقي خشن هي $W\sin\lambda$ حيث λ هي زاوية الإحتكاك بين المستوى والجسيم؟

(٤) اسطوانة منتظمة ارتفاعها 2ℓ ونصف قطر مقطعها a . وضعت بقاعدها على مستوى خشن مائل معامل الإحتكاك بينهما μ . اثبت ان الاسطوانة تنقلب قبل ان تنزلق إذا كان $\mu > \frac{a}{\ell}$؟

(٥) قضيب منتظم وزنه W يرتكز باحد طرفيه على حائط راسي املس وبطرفه الاخر على مستوى خشن ينحدر من الحائط ويميل على الافقي بزاوية α . اثبت انه إذا كان القضيب على وشك الإنزلاق فإن الزاوية θ و التي يميل بها على الحائط تعطى من $\tan\theta = 2\tan(\lambda-\alpha)$ حيث λ هي زاوية الإحتكاك ثم اوجد رد الفعل المحصل بين القضيب والمستوى؟

(٦) وضعت كتلتان متساويتان على مستويين خشنين يميلان على الافقي بزاويتين $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$ واتصلتا بخيط غير مرن يمر على بكرة ملساء عند خط اتصال المستويين فإذا كانت الكتلتان على وشك الحركة فاثبت ان معامل الإحتكاك يساوي $2-\sqrt{3}$؟

(٧) وضعت نصف اسطوانة نصف قطرها a على قاعدها المستوية على مستوى افقي خشن ووضع قضيب منتظم طوله ℓ ووزنه W عمودي على محور الاسطوانة وهايته الاخرى على

الارض الافقية ، إذا كانت α هي زاوية ميل القضيب مع الافقي في وضع الإتزان ومعامل الإحتكاك بين القضيب والارض يساوي معامل الإحتكاك بين القضيب والاسطوانة فاثبت ان $\ell \sin^2 \alpha = a \sin 2\lambda$ حيث λ زاوية الإحتكاك؟

(٨) اسطوانة منتظمة تستقر على مستوى افقي خشن بحيث كان محورها افقيا. استقرت عليها لوحة وإحدى نهايتيها على المستوى الافقي ، إذا كانت اللوحة على وشك الإنزلاق على الاسطوانة فاثبت ان معامل الإحتكاك بينهما يساوي $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ حيث α زاوية ميل اللوحة على المستوى الافقي؟

(٩) وضع جسيم وزنه 5 على مستوى مائل خشن معامل إحتكاكه $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ويميل على الافقي زاوية 45^o . ثبت طرف خيط غير مرن عند الجسيم تم سحب الخيط بقوة شد T إلى اعلى في اتجاه المستوى. احسب اقل قيمة للشد تكفي لتحريك الجسيم اعلى المستوى؟

(١٠) قضيب منتظم متزن في مستوى راسي يستند باحد اطرافه على حائط خشن ، والطرف الاخر على ارض افقية خشنة لها نفس معامل احتكاك الحائط. إذا كان الاحتكاك عند طرفي القضيب نهائيا ، و كان القضيب يميل على الافقي بزاوية α . اوجد زاوية الاحتكاك؟

(١١) وضع مربع على مستوى خشن مائل بزاوية α على الافقي بحيث كان مستواه راسيا وانطبق احد اضلاعه على خط اكبر ميل ، ربط خيط في راس المربع العليا وشد في اتجاه يوازي خط اكبر ميل إلى اعلى المستوى اثبت انه إذا زاد الشد بالتدرج فاوجد شرط انزلاق او انقلاب المربع إذا كان μ معامل الإحتكاك؟

(١٢) قضيب منتظم وزنه W وطوله $2a$ يستند بنقطة منه على وتد خشن وبطرفه الاسفل على حائط راسي مساوٍ للوتد في الخشونة بحيث كان القضيب في مستوى راسي عمودي على الحائط ، فإذا كانت b بعد الوتد عن الحائط و كان القضيب على وشك الإنزلاق إلى اسفل فاثبت ان $\sin^2\theta \sin(\theta + 2\lambda) = \dfrac{b}{a}\cos^2\lambda$ حيث θ ميل القضيب على الراسي ، λ زاوية الإحتكاك؟

(١٣) سلم AB منتظم وزنه W يستند بطرفه A على ارض افقية خشنة وبطرفه الاخر على حائط راسي املس بحيث يقع السلم في مستوى راسي ويميل على الحائط بزاوية 45^o . فإذا كان السلم متزنا فاثبت ان معامل الإحتكاك بين السلم والارض لا يمكن ان يكون اقل من 0.5. وإذا كان معامل الإحتكاك يساوي $\frac{2}{3}$ فإن مقدار القوة الافقية التي تؤثر عند A وتجعله على وشك الحركة نحو الحائط تعادل $\frac{7}{6}W$؟

(١٤) وضعت صفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل بحيث كان مستواها راسيا واحد احرفها منطبق على خط اكبر ميل لمستوى خشن يميل على الافقي بزاوية 30^o. اثرت قوة افقية عند اعلى نقطة في الصفيحة بحيث كانت تعمل إلى اعلى المستوى فإذا زيدت هده القوة تدريجيا فاثبت ان الصفيحة تنقلب دون ان تنزلق إذا كان معامل الإحتكاك اكبر من $\frac{3-\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}}$؟

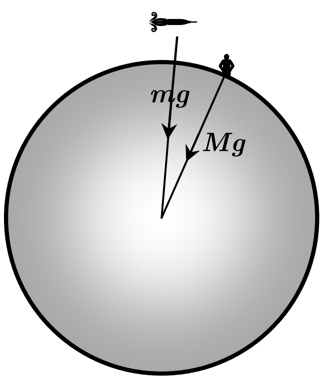
(١٥) قضيب منتظم موضوع في حالة إتزان نهائي داخل فجوة كروية خشنة بحيث يقابل زاوية 2α عند مركز الفجوة. إذا كانت λ هي زاوية الإحتكاك بين ان الزاوية التي يصنعها القضيب مع الراسي تعطى من $\tan^{-1}\left\{\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\lambda}{\sin 2\lambda}\right\}$؟

(١٦) ثلاثة اوتاد متساوية نصف قطر كل منها ℓ وضعت عند رؤوس المثلث المتساوي الاضلاع ABC بحيث كان BC افقيا والراس A اعلى BC . لف خيط حول الثلاثة اوتاد واثر في احد اطرافه الوزن W. اوجد القوة F التي يجب ان تؤثر في الطرف الاخر من الخيط حتى لا ينزلق؟

مركز الثقل (الجذب)

من المعروف ان الجسيم ما هو الا جسم يمكن إعتباره مركزا في نقطة ، والجسم من الوجهــه الميكانيكية يمكن تقسيمه إلى عدد من الاجزاء وكل جزء من هده الاجزاء يعتــبر جــسيما ، والجسم الدي تكون فيه المسافات الفاصلة بين اي جسيمين من الجسيمات المكونة له ثابتـة يطلق عليه الجسم المتماسك او الجاسئ.

حيث - كما ذكرنا - فإن اي جسم يمكن إعتباره مكونا من مجموعة من الجسيمات الصغيرة وبالتالي يكون تاثير الجاذبية الارضية (والتي تساوي كتلة الجسم في عجلة الجاذبية الارضـــية mg) على هدا الجسم هو ناتج تاثيراها على الجسيمات المكونة له وكما هو معلوم فإن كل جسيم من هده الجسيمات يقع تحت تاثير قوة جدب تساوي عدديا وزن هدا الجسيم وتعمل في الخط المستقيم المار بهدا الجسيم وبمركز الكرة الارضية ونظرا لان بعد الجسم المتماسك عن مركز الارض يكون كبيرا جدا إذا ما قورنت بالمسافات بين الجسيمات المكونة للجسم ومن تم يمكننا إعتبار خطوط عمل اوزان الجسيمات المكونة للجسم متوازية كلها وعلى ذلك يمكن إيجاد قوة وحيدة هي محصلة هده القوى وهي تساوي عدديا مجموع اوزان هده الجسيمات و تعمل راسيا لاسفل نحو مركز الارض. وهده المحصلة تسمى وزن الجسم وتعمل راسيا لاسفل وموجهه نحو مركز الارض ومقدارها هو وزن الجسم او ثقله بينما نقطة تاثيرهـــا (المحـــصلة) تسمى مركز ثقل الجسم.



ويعرف مركز ثقل الجسم الجاسئ على انه تلك النقطة من الفراغ والتي يمر بها دائما خط عمل وزن هدا الجسم مهمـا تغــير وضعه بالنسبة لسطح الارض.

اهمية تحديد مركز الثقل

■ حمل الاجسام كالماكينات والمحركات او رفعها او تعليقها ونقلها بسهولة وامان حيث يجب ان يقع خطاف الة الرفع اعلى مركز ثقل الجسم مباشرة حتى لا ينتج عزم غير متزن يسبب ميل الجسم.

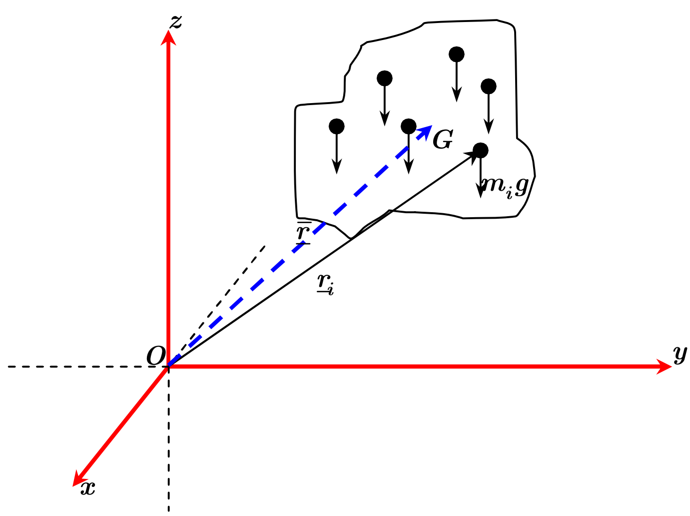
■ الحصول على الاتزان الاستاتيكي المستقر للالات عند تثبيتها على سطح افقي او مائل وذلك بان يقع الخط الراسي المار بمركز الثقل في حدود قاعدة الجسم. وهناك العديد من الفوائد في الحياة العملية.

مركز ثقل مجموعة من الجسيمات

إذا كان هناك عدة جسيمات عددها n كتلها هي $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ موضوعة عند النقط التي متجهات الموضع لها $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, ...\underline{r}_n$ على الترتيب كما بالشكل فإن مركز ثقل هده المجموعة هو النقطة والتي متجه الموضع لها $\overline{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$

نفرض ان الكتل $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ مرقمة هكذا $1, 2, 3, ..., n$ وان اوزانها $m_1 g, m_2 g, m_3 g, ..., m_n g$ وهي كلها راسيا لاسفل حيث g عجلة الجاذبية ولدا فإن محصلة هده الاوزان هي

$$m_1 g + m_2 g + m_3 g + ... + m_n g = g\sum_{i=1}^{n} m_i = Mg$$



ونفرض ان هذا الوزن Mg يؤثر عند نقطة متجه الموضع لها هو $\underline{\bar{r}}$ وحيث ان مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة الاصل يساوي عزم محصلة هده القوى حول نقطة الاصل. باخد العزوم حول نقطة الاصل نجد ان

$$\underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3 + \dots\dots\dots\dots\dots + \underline{r}_n \wedge \underline{F}_n = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

حيث

$$\underline{F}_1 = -m_1 g\hat{k},\ \underline{F}_2 = -m_2 g\hat{k}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\ \underline{F}_n = -m_n g\hat{k},\ \underline{F} = -Mg\hat{k}$$

بفرض ان احداثيات متجهات موضع الجسيمات كالتالي

$$\underline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \underline{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),\ \dots\dots,\ \underline{r}_n = (x_n, y_n, z_n),\ \underline{\bar{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & -m_1 g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & -m_2 g \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_n & y_n & z_n \\ 0 & 0 & -m_n g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 0 & 0 & -Mg \end{vmatrix}$$

بمساواة مركبات الطرفين نحصل على

$$-m_1 g y_1 - m_2 g y_2 - m_3 g y_3 - \dots\dots\dots\dots - m_n g y_n = -Mg\bar{y}$$

$$m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \dots\dots\dots\dots + m_n g x_n = Mg\bar{x}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad \textbf{and}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

بالمثل إذا ادرنا المحاور فلن يتغير موضع الكتل او مركز الكتله ونحصل علـــى صـــيغة مماثلـــة للمقدار $\bar{z}$ في الصورة

$$\bar{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

ومن ثم يكون متجه الموضع لمركز ثقل المجموعة يتعين من

$$\underline{\bar{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

ومن هذا القانون يمكن إيجاد مركز ثقل جسم مكون من عدة جسيمات (معـــروف مراكـــز ثقلها)

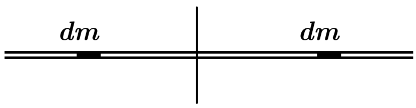
خاصية هامة ١: يوجد مركز ثقل واحد للجسم الجاسئ.

خاصية هامة ٢: مركز ثقل الجسم الجاسئ يقع عند نقطة ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الارض.

خاصية هامة ٣: إذا وجد محور (نقطة) تماثل للجسم فإن مركز الثقل للجسم يقع على محور (نقطة) التماثل.

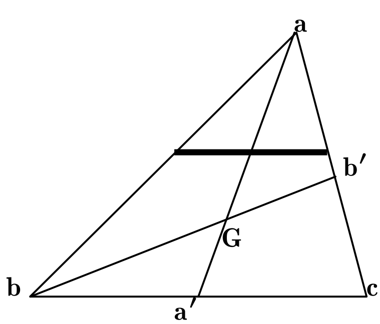
مركز ثقل بعض الاجسام الجاسئة البسيطة

➤ مركز ثقل قضيب منتظم هو منتصفه وذلك بتقسيم القضيب إلى عناصر صغيرة متـــساوية وتحصيل وزن كل عنصرين متساويي البعد عن الطرفين إلى وزن منتصف القضيب. كـذلك القضيب متماثل حول نقطة المنتصف وبالتالي فهي مركز ثقله.



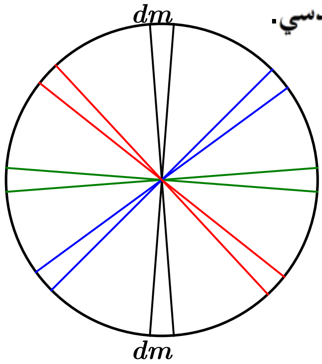
➤ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على هيئة مربع او معين او مستطيل او متوازي اضلاع هو مركزها الهندسي اي نقطة تلاقي القطرين و ذلك بتقسيم الـــصفيحة إلى شرائح طولية متساوية (تم عرضية) ويمكن إعتبار كل شريحة على هيئة قضيب رفيع منـــتظم (مركز ثقله في المنتصف).

➤ مركز ثقل صفيحة رقيقـــة منتظمـــة السمك والكثافة على شكل مثلث عنـد نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث. وذلك بتقسيم الصفيحة المثلثية abc إلى شرائح موازية للضلع bc فإن مركز ثقل كل شريحة يقع عند منتصفها وبالتالي فإن مركز ثقل الصفيحة يقع على المـــستقيم المتوسط aa' ، وبالمثل فإن مركز ثقـــل الصفيحة يقع على المستقيم المتوسط bb' وعلى ذلك فإن مركز ثقـــل الـــصفيحة المثلثية يقع عند نقطة تلاقي المتوسطات.



➤ مركز ثقل حلقة دائرية منتظمة السمك والكثافة هو مركزها الهندسي و ذلك بتقسيم الحلقة إلى عناصر متساوية فنجد ان كل عنصرين متقابلين مركز كتلتهم يكون عند مركز الحلقة ، وبذلك فإن مركز كتلة جميع هذه العناصر يكون في المركز الهندسي للحلقة ونلاحظ ان مركز الكتلة للجسم يقع خارج الجسم.

وكذلك حيث ان الحلقة متماثلة بالنسبة للمركز فإن مركز ثقل الحلقة يقع على المركز الهندسي.



➤ مركز ثقل اسطوانة مصمتة او مفرغة منتظمة السمك والكثافة وحيث ان الاسطوانة تكون متماثلة حول محورها و كذلك حول المستوى المار بمنتصف المحور ويوازي قاعدتيها فإن مركز ثقل الاسطوانة الدائرية المصمتة او المفرغة يقع عند منتصف المحور.وكذلك مركز ثقل المنشور هو منتصف محوره.

➤ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على هيئة قرص دائري هو مركزها الهندسي و ذلك بتقسيم الصفيحة إلى شرائح كل منها عبارة عن قضيب رفيع وموازية لاحد الاقطار ومن ثم فإن مراكز ثقل هذه الشرائح جميعها يقع على القطر الذي يتعامد مع القطر الاول. مرة اخرى نقسم الصفيحة إلى شرائح موازية لقطر اخر فمراكز ثقلها يقع على قطر متعامد معه وبذلك نجد ان مركز ثقل الصفيحة لابد ان يقع على تقاطع القطرين اي يقع على مركز الدائرة. كذلك فإن اي قطر في الدائرة هو محور تماثل ومن ثم فإن مركز الثقل يقع على جميع الاقطار (والنقطة التي تحقق هذه الخاصية هي نقطة المركز).

وبطريقة اخرى يمكن تقسيم الصفيحة إلى حلقات دائرية متحدة المركز ومن المعروف ان مركز كل حلقة هو هو المركز الهندسي للصفيحة وعلى ذلك فإن مركز ثقل الصفيحة هو مركزها الهندسي.

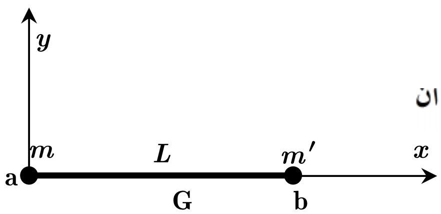
➤ مركز ثقل قشرة كروية او الكرة المصمتة منتظمة الكثافة هو مركزها الهندسي و ذلك لان كل من القشرة او الكرة المصمتة متماثلتان حول المركز الهندسي.

﴿ مثـ ١ ـال ﴾

اوجد مركز ثقل نقطتين ماديتين كتلتيهما m, m' وتفصل بينهما مسافة L؟

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض ان الكتلتين تقعان على المحور x ومن ثم فإن احداثيات مركز ثقل النقطتين الماديتين هو $(0,0),\ (L,0)$ كما بالشكل



ومن القانون السابق الخاص بحساب مركز الثقل نجد ان

$$\bar{x} = \mathrm{Ga} = \frac{m \times 0 + m' \times L}{m + m'} = \frac{m'L}{m + m'}$$

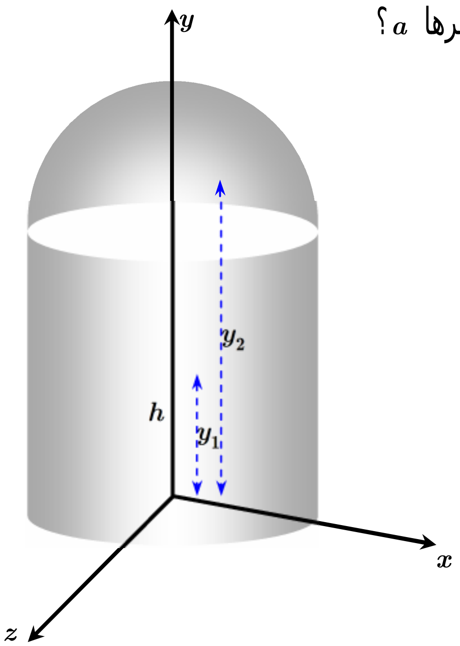
و $$\bar{y} = \frac{m \times 0 + m' \times 0}{m + m'} = \frac{0}{m + m'} = 0$$

اي ان مركـــز الثقـــل يقـــسم المـــسافة بـــين النقطـــتين المـــاديتين ab بنـــسبة $\mathrm{Ga}:\mathrm{Gb} \equiv \frac{m'L}{m + m'} : L - \frac{m'L}{m + m'} = m' : m$ اي بنسبة عكسية لكتلتيهما.

﴿ مثـ ٢ ـال ﴾

اوجد المركز المتوسط لجسم صلب كثافته ثابتة ويتكون من اســطوانة نــصف قطرهـــا a وارتفاعها h يعتليها نصف كرة مصمتة نصف قطرها a؟

﴿ الحـــــل ﴾



نلاحظ ان المحور y هو محور تماثل ومـــن ثم يقع مركز الثقل عليه ، كتلة الاسطوانة تتعين من $M = \pi a^2 h \rho$ و كتلة نـــصف الكرة هي $m = \frac{2}{3}\pi a^3 \rho$ حيث ρ هي الكثافة الحجمية لكل من

الاسطوانة ونصف الكرة كذلك مركز ثقل الاسطوانة هو $y_1 = \frac{1}{2}h$ ومركز ثقل نصف الكرة هو $y_2 = \frac{3}{8}a + h$ (مثـ ٩ ـال) وبالتالي فإن مركز ثقل الجسم كله يتعين من

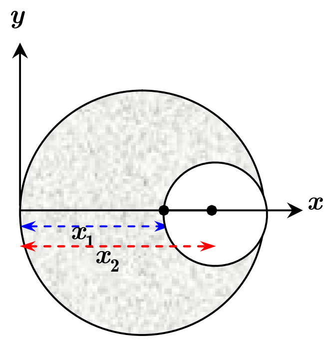
$$\because \bar{y} = \frac{My_1 + my_2}{M + m}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\left(\pi a^2 h\rho\right)\left\{\frac{1}{2}h\right\} + \left(\frac{2}{3}\pi a^3\rho\right)\left\{\frac{3}{8}a + h\right\}}{\left(\pi a^2 h\rho\right) + \left(\frac{2}{3}\pi a^3\rho\right)}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3a^2 + 8ah + 6h^2}{8a + 12h}$$

﴿ مثـ ٣ ـال ﴾

ثقب دائري نصف قطره a قطع في حيز دائري نصف قطره $2a$ كما هو موضح بالـشكل. اوجد المركز المتوسط للمنطقة المظللة؟



﴿ الحـــل ﴾

نلاحظ ان المحور x هو محور تماثل ومن ثم يقع مركز الثقل على المحور x اي ان $\bar{y} = 0$ كتلـة الصفيحة الدائرية الكبرى تتعين من $M = \pi(2a)^2\sigma = 4\pi a^2\sigma$ و كتلة الثقب الدائري تتعين من $m = \pi a^2\sigma$ حيث σ هـي الكثافة السطحية للصفيحة

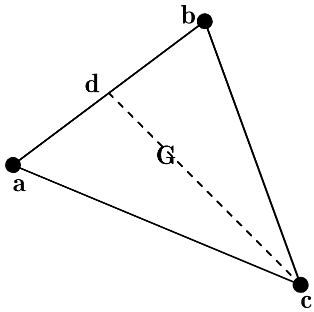
كذلك مركز ثقل الصفيحة الكبرى هو $x_1 = 2a$ ومركز ثقل الثقب الدائري هو $x_2 = 3a$ وبالتالي فإن مركز ثقل الجزء المظلل هو

$$\bar{x} = \frac{Mx_1 - mx_2}{M - m} = \frac{(4\pi a^2\sigma)(2a) - (\pi a^2\sigma)(3a)}{(4\pi a^2\sigma) - (\pi a^2\sigma)} = \frac{5\pi a^3\sigma}{3\pi a^2\sigma} = \frac{5}{3}a$$

﴿ مثـ ٤ ـال ﴾

اثبت ان مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها $3m$ محدودة بمثلث يتكافئ مع مركز ثقـــل ثلاث كتل متساوية (كتلة كل منها m) موضوعة عند رءوس المثلث؟

﴿ الحـــــل ﴾



من الشكل محصلة الكتلتين الموضوعتان عند a, b هي الكلتة $2m$ وتقع في منتصف المسافة بين a, b ولتكن عند النقطة d كذلك محصلة القوتين m الموضوعة عند النقطة c ، الكتلة $2m$ الموضوعة

عند النقطة d هي كتلة مقدارها $3m$ وتقع بين النقطتين c, d ولتكن عند النقطة G وتقسم المـــــسافة بينـــــهما بنـــــسبة عكـــــسية لكتلتيهمـــــا اي ان $Gc = 2, Gd = 1$

معنى ذلك ان النقطة تقع على المتوسط cd وتقسمه بنسبة $1 : 2$ من ناحية الراس اي انهـــا تنطبق مع مركز ثقل الصفيحة المثلثة.

خاصية هامة ٤: إذا علق جسم تعليقا حرا من إحدى نقطه فإنه يتزن بحيث يمر الخط الراسي من نقطة التعليق بمركز ثقل الجسم ، وذلك لانه بفرض ان O هي مركز ثقلـــه وان نقطـة التعليق A فإن الجسم يتزن تحت تاثير قوتين R, mg وهاتان القوتان متساويتان في المقـــدار ومتضادتان في الاتجاه وخط عملهما على استقامة واحده في الاتجاه الراسي.

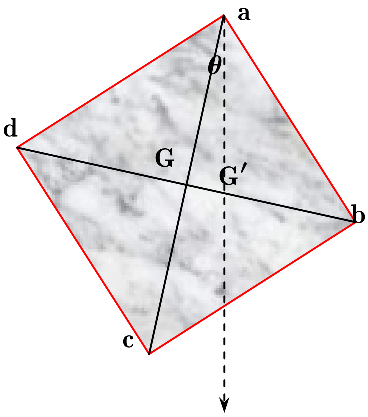
﴿ مثـ ٥ ـال ﴾

علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها $40\ Ib$ تعليقا حرا من الراس a وثبت عند الراس b ثقل قدره $10\,Ib$. اوجد قياس زاوية ميل القطر ac على الراسي في وضع الاتزان؟

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض ان G هو مركز ثقل الصفيحة وهو نقطة تلاقي قطريها ونفرض ان G' هو مركز ثقل

المجموعة المكونة من الصفيحة والثقل عند b . عند وضع الاتزان تكون النقطة G' واقعة على الخط الراسي المار بنقطة التعليق كما بالشكل و كذلك تكون $G' \in \overline{Gb}$ بحيث ان



$$10 \times G'b = 40 \times GG'$$

$$\therefore GG' = \frac{1}{4}G'b, \quad \text{Or} \quad GG' = \frac{1}{5}Gb = \frac{1}{5}Ga$$

وفي المثلث $GG'a$ يكون $\tan\theta = \dfrac{GG'}{Ga}$

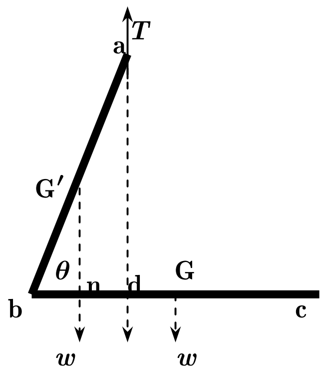
$$\therefore \tan\theta = \frac{Ga}{5Ga} = \frac{1}{5} \qquad \therefore \theta = \tan^{-1}(0.2)$$

حيث θ هي زاوية ميل القطر ac على الخط الراسي.

﴿ مثـ ٦ ـال ﴾

ثني قضيب منتظم abc طوله 2ℓ من نقطة منتصفه b ثم علق من الطرف a تعليقا حرا فإذا علم ان $\overline{bc}$ كان افقيا في وضع الاتزان فاوجد قياس زاوية $a\hat{b}c$ ؟

﴿ الحـــل ﴾



حيث ان a هي نقطة التعليق ، $\overline{bc}$ افقيا وبرسم $\overline{bc} \perp \overrightarrow{ad}$ فنجد ان مركز الثقل يقع على $\overrightarrow{ad}$ (حتى يتزن مع قوة الـــشد) وبفرض ان وزن الجزء bc من القضيب يساوي w ويؤثر عند منتصفه G وايضا وزن الجزء ab يساوي w ويؤثر عند منتصفه G' وبالتالي

$$w \times Gd = w \times nd \quad \text{(See Ex.1)} \quad \text{but} \quad nd = nb = \frac{1}{2}\ell\cos\theta \quad \text{and}$$

$$Gd = Gb - db \;\therefore Gd = \ell\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right)$$

$$\therefore \cancel{w} \times \cancel{\ell}\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right) = \cancel{w} \times \frac{1}{2}\cancel{\ell}\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \quad \text{Or} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

إيجاد مركز الثقل بالتكامل

مما سبق يتضح انه يمكن ايجاد مركز ثقل بعض الاجسام وذلك إما بتقسيمها إلى عناصر صغيرة وإيجاد مركز ثقل كل عنصر وبعد ذلك بجري عملية تجميع لمراكز ثقل هده العناصر لنحصل على مركز ثقل الجسم الكلي. وهد الطريقة تكون مفيدة في حالة الاجسام التي لها نقطة او محور تماثل. اما الطريقة العامة لايجاد مركز ثقل اي جسم مهما كان شكله هو تقسيمه إلى عدد كبير جدا لانهائي من العناصر وعندما تزداد هده العناصر إلى مالانهاية فإن كتلة العنصر ستؤول إلى الصفر ومن ثم تؤول علامة الجمع إلى علامة تكامل ويصبح احداثيات مركز الثقل في الصورة

$$\bar{x}=\frac{\int xdm}{\int dm},\qquad \bar{y}=\frac{\int ydm}{\int dm},\qquad \bar{z}=\frac{\int zdm}{\int dm}$$

والامثلة التالية ستوضح طريقة حساب مركز الثقل باستخدام التكامل:

﴿ مثـ ٧ ـال ﴾

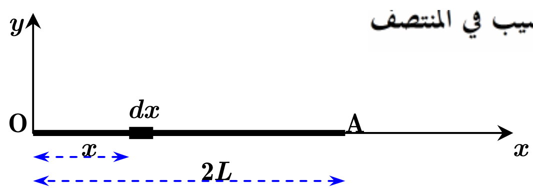
اوجد مركز ثقل قضيب منتظم طوله $2L$ باستخدام التكامل؟

﴿ الحـــــل ﴾

باخد عنصر صغير من القضيب طوله dx بحيث ان صغره يكون كافيا حيث تكون الكثافة على طوله ثابتة تقريبا وليكن هدا العنصر على بعد x من الطرف O والدي سوف يتخد كنقطة اصل حيث OA هو محور x والعمودي عليه هو المحور y وتكون كتلة العنصر $dm=\lambda dx$ حيث λ ثابت كدلك مركز هدا العنصر هي النقطة $(x,0)$ ويتعين مركز ثقل القضيب من

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int_0^{2L}\lambda xdx}{\int_0^{2L}\lambda dx}=\frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2L}}{\left[x\right]_0^{2L}}=\frac{2L^2}{2L}=L$$

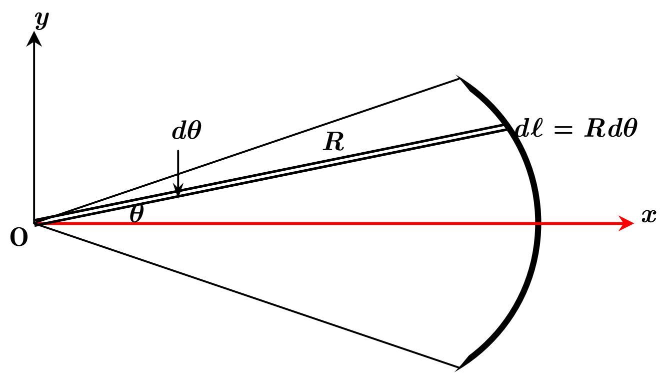
اي ان مركز ثقل القضيب في المنتصف



﴿ مثـ ٨ ـال ﴾

اوجد مركز ثقل سلك رفيع على هيئة قوس دائري نصف قطره R ويصنع زاوية 2α عنـد مركزه الهندسي؟

﴿ الحــــل ﴾



واضح ان السلك متماثل حول المحور Ox وبالتالي فإن مركز ثقل السلك يقع عليـــه اي ان $\bar{y}=0$ ولحساب $\bar{x}$ بفرض ان ρ هي كتلة وحدة الاطوال من السلك وبتقسيم السلك إلى عناصر ونعتبر احد هده العناصر عند الموضـــع (R,θ) فـــإن كتلـــة هـــدا العنـــصر هـــي $dm=\rho d\ell=R\rho d\theta$ وبالتالي فإن

$$\bar{x}=\frac{\int x dm}{\int dm}=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}(R\cos\theta)(R\rho d\theta)}{\int_{-\alpha}^{\alpha}R\rho d\theta}=\frac{R\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta}=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

حالة خاصة : في حالة سلك على شكل نصف دائرة اي ان $\alpha=\frac{\pi}{2}$ فإن

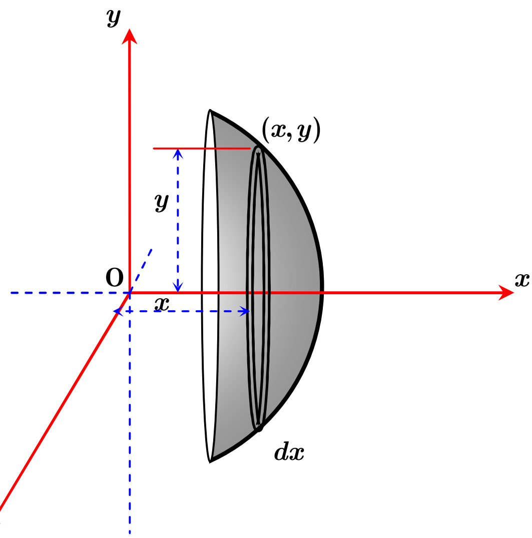
$$\bar{x}=\frac{R\sin(\pi/2)}{\pi/2}=\frac{2R}{\pi}$$

﴿ مثـ ٩ ـال ﴾

عين مركز ثقل قطعة كروية مصمتة ارتفاعها h ونصف قطر كرتها a؟

﴿ الحـــــل ﴾

نلاحظ ان المحور Ox هو محور تماثل وبالتالي $\bar{y} = \bar{z} = 0$



باخذ عنصر عبارة عن قرص كتلته $dm = \pi y^2 \rho dx$ (سمكه dx) ومركز ثقله $(x, 0, 0)$

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int\limits_{a-h}^{a} \pi x y^2 \rho dx}{\int\limits_{a-h}^{a} \pi y^2 \rho dx} = \frac{\int\limits_{a-h}^{a} x\left(a^2 - x^2\right) dx}{\int\limits_{a-h}^{a} \left(a^2 - x^2\right) dx} = \frac{\left[\frac{1}{2} a^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4\right]_{a-h}^{a}}{\left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right]_{a-h}^{a}}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3(2a - h)^2}{4(3a - h)}$$

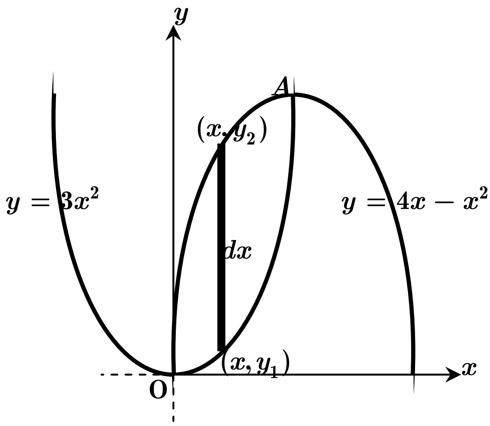
حالة خاصة : نصف الكرة هي قطعة كروية ارتفاعها a اي ان $h = a$ ويكون $\bar{x} = \frac{3}{8} a$.

﴿ مثـ ١٠ ـال ﴾

اوجد مركز ثقل المساحة المحصورة بين القطعين المكافئين $y = 4x - x^2 \quad y = 3x^2,$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

من المهم في هده الحالة إيجاد نقــاط تقــاطع المنحنيين وبالتعويض من إحدى المعــادلتين في الاخرى نجد ان



$$3x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow x\left(x-1\right) = 0$$
$$\therefore\ x = 0 \quad \text{Or} \quad x = 1$$

وبالتـــالي فـــإن نقـــط التقـــاطع هـــي $O(0,0),\ A(1,3)$ دعنا ناخد عنصرا يوازي المحور y وهـــو محـــصور بـــين النقطـــتين $(x, y_1), (x, y_2)$ وسمكه dx وعليه فمساحة العنصر هي $\left(y_2 - y_1\right)dx$ وتكون كتلتـــه dm ويمكن حسابها كالتالي

$$dm = \sigma\left(y_2 - y_1\right)dx = \sigma\left\{4x - x^2 - 3x^2\right\}dx = 4\sigma\left\{x - x^2\right\}dx$$

ومركز ثقل هده الشريحة هو $\left(x, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(x, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{2}\right)$ اي $\left(x, 2x + x^2\right)$

$$\therefore\ \overline{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^1 \left\{x^2 - x^3\right\}dx}{\int_0^1 \left\{x - x^2\right\}dx} = \frac{\left.\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]\right|_0^1}{\left.\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]\right|_0^1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \overline{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int_0^1 \left\{2x + x^2\right\}\left\{x - x^2\right\}dx}{\int_0^1 \left\{x - x^2\right\}dx} = \frac{\int_0^1 \left\{2x^2 - x^3 - x^4\right\}dx}{\int_0^1 \left\{x - x^2\right\}dx}$$

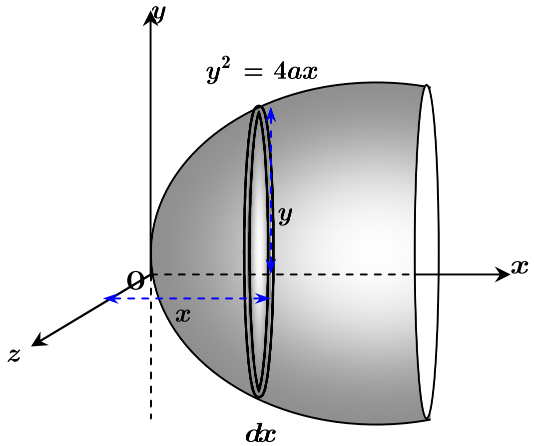
$$\therefore\ \overline{y}=\frac{\left\{\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right\}\Big|_0^1}{\left\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right\}\Big|_0^1}=\frac{13}{10}$$

اي ان مركز ثقل المساحة المحصورة هو $\left(\frac{1}{2},\frac{13}{10}\right)$

﴿ مثـ ١١ ـال ﴾

اوجد مركز كتلة السطح الناتج من دوران المنحنى $y^2=4ax$ حــول المحــور Ox بـين المستويين $x=0\quad x=a,$ ؟

﴿ الحـــل ﴾



واضح ان المنحنى متماثل حول المحور Ox وبالتالي فإن مركز الثقل يقع عليــه اي ان $\overline{y}=\overline{z}=0$ وباخذ عنصر من المــنحنى طوله $d\ell$ عند النقطة (x,y) على المنحنى فينتج عن دوران هدا العنصر حول المحور Ox عنصر مساحة (حلقة نصف قطرهـا y) ومن ثم فإن احداثيات مركــز ثقــل السطح المتولد عن الدوران هو (حيـث $dm=2\pi y\rho d\ell$)

$$\overline{x}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\cancel{2\pi\rho}\int xyd\ell}{\cancel{2\pi\rho}\int yd\ell}$$

ولكن $d\ell=\sqrt{1+\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2}dx$ ، بتفاضل معادلة القطع $y^2=4ax$ بالنـسبة إلى x فنجد ان $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$ ومن ثم يكون

$$\therefore\ d\ell=\sqrt{1+\frac{4a^2}{y^2}}dx=\sqrt{1+\frac{4a^2}{4ax}}dx=\sqrt{\frac{x+a}{x}}dx$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد ان

$$\bar{x} = \frac{\int xyd\ell}{\int yd\ell} = \frac{\int_0^a x\sqrt{x+a}\,dx}{\int_0^a \sqrt{x+a}\,dx}$$

حيث التكاملين في البسط والمقام يمكن حسابهما كالاتي

تكامل البسط يمكن حسابه بسهوله

$$\int_0^a \sqrt{x+a}\,dx = \frac{2}{3}\left(x+a\right)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{2}{3}\left\{(2a)^{3/2} - a^{3/2}\right\} = \frac{2}{3}a^{3/2}\left\{2\sqrt{2}-1\right\}$$

لحساب تكامل المقام نستخدم التعويض $r = \sqrt{x+a}$ ومنها $x = r^2 - a$ ومنها $dx = 2rdr$ ونجد ان

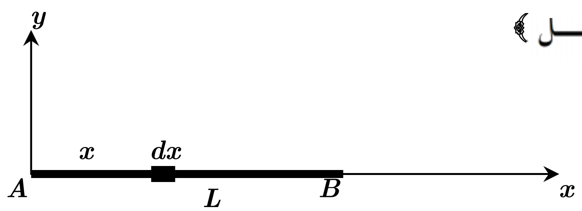
$$\int_0^a x\sqrt{x+a}\,dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}} (r^2 - a)\,r\,(2rdr) = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}} (r^4 - ar^2)\,dr = 2\left[\frac{r^5}{5} - \frac{ar^3}{3}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}}$$

$$= \frac{4}{15}a^{5/2}\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad \therefore\ \bar{x} = \frac{2a}{5}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\right)$$

﴿ مثـال ١٢ ﴾

حبل سميك غير منتظم تتناسب كثافته الطولية مع البعد عن احد طرفيه وضع الحبل في وضع افقي وعلى استقامه واحدة. اثبت ان مركز ثقله يقسمه بنسبة $1:2$ من هذا الطرف؟

﴿ الحـــل ﴾



نفرض ان الحبل هو AB وان طوله L وان الكثافة تتناسب مع البعد عن الطرف A ، باخذ عنصر صغير من الطول dx بحيث ان صغره يكون كافيا حيث تكون الكثافة على طوله ثابتة تقريبا وليكن هذا العنصر على بعد x من الطرف A والذي سوف يتخذ كنقطة اصل حيث AB هو محور x والعمودي عليه هو المحور y وتكون كتلة العنصر $dm = \lambda x dx$

حيث λ ثابت كدلك مركز هدا العنصر هي النقطة $(x,0)$ ويتعين مركز ثقل الحبل G من

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int_0^L \lambda x^2dx}{\int_0^L \lambda xdx}=\frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^L}{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^L}=\frac{2}{3}L$$

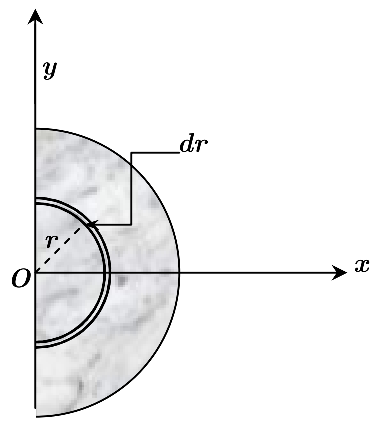
لاحظ التماثل حول المحور x يؤدي إلى $\bar{y}=0$. وعليه فإن النسبة المطلوبة هي

$$\frac{AG}{GB}=\frac{(2/3)L}{(1/3)L}=\frac{2}{1}$$

﴿ مثـ ١٣ ـال ﴾

إذا كانت الكثافة السطحية لصفيحة نصف دائرية تتناسب مع بعدها من المركز O. اوجـــد مركزثقلها ، نصف قطرها a ؟

﴿ الحـ ـل ﴾



نقسم الشكل إلى شرائح صغيرة وهـــده الشرائح تاخد شـــكل اقـــواس متحـــدة المركز. باعتبار إحدى هـــده الـــشرائح وليكن نصف قطرها r و سمكهـــا dr وبفرض ان كثافة مادة الشريحة هـــي μ وحيث ان $\mu=\lambda r$ Or $\mu\propto r$

و كتلة الشريحة هي $dm=\pi r\mu dr=\pi\lambda r^2dr$ ومركز ثقل الشريحة على إعتبار انها قوس نصف قطره r هو $\left(\frac{2r}{\pi},0\right)$ (مثـ ٨ ـــال) حيث ان الجسم متماثـــل حـــول المحـــور Ox

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^a 2r^3 dr}{\pi \int_0^a r^2 dr} = \frac{\left[\frac{1}{2}r^4\right]_0^a}{\pi\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a} = \frac{3a}{2\pi}$$

اي ان مركز الثقل يتعين من $\left(\frac{3a}{2\pi},0\right)$

﴿ مثـ ١٤ ـال ﴾

استخدم التكامل لإيجاد مركز ثقل مخروط اجوف ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a ؟

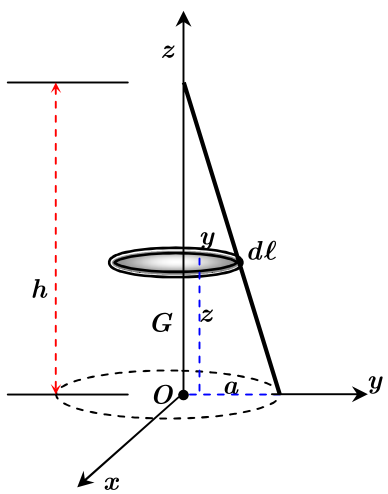
﴿ الحـــــل ﴾

نقسم المخروط إلى عناصر كل منها عبارة عن حلقة موازية لقاعدة المخروط سمكها $d\ell$ (نختار محاور الاحداثيات كما بالشكل) كتلة العنصر هي $dm = 2\pi y \sigma d\ell$ ونلاحظ ان المحـــور z هو محور تماثل اي ان $\bar{x} = \bar{y} = 0$ اي ان مركز الثقل يقع على المحور z ويتعين من

$$OG = \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\cancel{2\pi\sigma}\int yz d\ell}{\cancel{2\pi\sigma}\int y d\ell} \quad \textbf{where} \quad d\ell = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\, dz$$

حيث y هو نصف قطر العنصر والموجود علـــى ارتفـــاع z ، مـــن الـــشكل نجـــد ان $hy + az = ah$ وبالتالي بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلى z يكون

$\frac{dy}{dz} = -\frac{a}{h}$ وبالتعويض في معادلة مركز الثقل



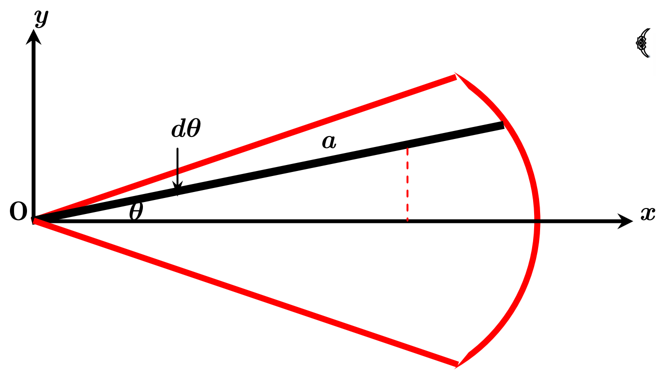
$$\therefore \bar{z} = \frac{\int_0^h \left(hz - z^2\right) dz}{\int_0^h (h - z) dz} = \frac{\left[\frac{1}{2}hz^2 - \frac{1}{3}z^3\right]_0^h}{\left[hz - \frac{1}{2}z^2\right]_0^h} = \frac{1}{3}h$$

اي ان مركز الثقل G يتعين من $\left(0,0,\frac{h}{3}\right)$

﴿ مثـ ١٥ ـال ﴾

اوجد مركز ثقل صحيفة منتظمة رقيقة على هيئة قطاع دائري يقابل زاوية 2α نصف قطـر دائرتة a ؟

﴿ الحـــل ﴾



واضح ان المحور Ox هو محور تماثل اي ان $\bar{y}=0$ و كذلك مركز ثقل العنصر الماخوذ وهو عبارة عن مثلث يتعين مـــن $\left(\frac{2}{3}a\cos\theta,\frac{2}{3}a\sin\theta\right)$ وايـــضا كتلـــة هـــذا العنـــصر هـــي $dm=\frac{1}{2}a^2\rho\sin d\theta\simeq\frac{1}{2}a^2\rho d\theta$ ويحسب مركز الثقل $\bar{x}$ كالتالي

$$\bar{x}=\frac{\frac{2}{3}a\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta}=\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}a$$

➤ وإذا كان القطاع عبارة عن نصف قرص (اي ان $\alpha=\frac{\pi}{2}$) يكون مركز الثقل

$$\bar{x}=\frac{\frac{2}{3}a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{3\frac{\pi}{2}}a=\frac{4a}{3\pi}$$

يمكن إعادة حل هذا المثال باخذ الشريحة عبارة عن قوس نصف قطر دائرته r وسمكه dr.

نظريتا بابوس السكندري Pappus

النظرية الاولى

إذا دار جزء من منحنى مستو حول محور في مستواه غير قاطع له خلال زاوية ما فإن المساحة الجانبية للسطح الدوراني المتولد يساوي طول المنحنى مضروبا في المسافة التي دارهـا مركـز ثقله.

النظرية الثانية

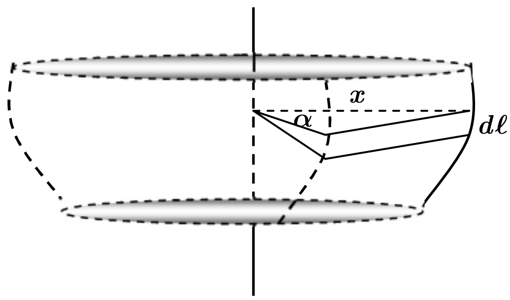
إذا دارت مساحة مستوية حول محور في مستواها غير قاطع لها خلال زاوية ما فـإن الحجـم الدوراني المتولد يساوي المساحه مضروبه في المسافة التي دارها مركز ثقلها.

البرهـــــان

نفرض ان $d\ell$ عنصرا صغيرا من عناصر المنحنى ونفرض ان المنحنى قد دار خلال زاويـة α وان العنصر $d\ell$ على بعد x من محور الدوران ومن ثم فإن العنصر $d\ell$ يرسم شريطا صغيرا اثناء دورانه مولدا عنصر المساحه dS حيث $dS = x\alpha d\ell$

المساحة الكلية الناتجة من دوران المنحنى تتعين من

$$S = \int dS = \int x\alpha d\ell = \alpha \int x d\ell \qquad (1)$$



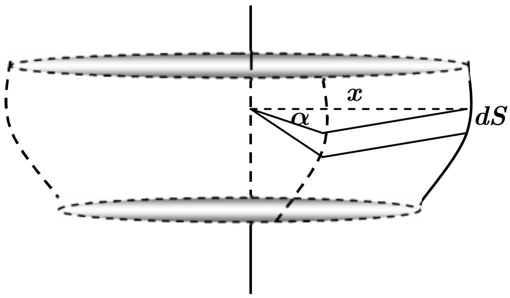
ولكن إذا كان مركز ثقل المنحنى يقع على بعد $\bar{x}$ من المحور فإن

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\rho \int x d\ell}{\rho \int d\ell} = \frac{\int x d\ell}{\ell} \qquad \therefore \int x d\ell = \ell \bar{x} \qquad (2)$$

حيث ρ الكثافة الطولية للمنحنى ، ℓ هو طول المنحنى المعلوم. ومـــن المعـــادلتين (1) ، (2) يكون $S = \ell\alpha\bar{x}$. ونلاحظ انه إذا كانت $\alpha = 2\pi$ ، اي انه إذا دار المنحنى دورة كاملـــة فإن المساحة تساوي $S = \left(2\pi\bar{x}\right)\ell$ اي ان المساحة الناتجة تساوي طول المنحنى مـــضروبا في محيط الدائرة التي يرسمها مركز ثقل المنحنى.

لاثبات الجزء الثاني من النظرية ناخذ عنصر مساحة صغير dS من المساحة الكلية S وانـه على بعد x من محور الدوران وبفرض ان المساحة S قد دارت خلال زاوية α وبالتالي فإن دوران العنصر dS ينتج عنه انبوبة صغيرة طولها αx ومساحة مقطعها dS ويكون حجـــم العنصر الناشئ بالدوران $\alpha x dS$ والحجم الكلي الناشئ بدوران المساحة S يتعين من

$$V = \int \alpha x dS = \alpha \int x dS \qquad (3)$$



ولكن إذا كان مركز ثقل هذه المساحة على بعد من محور الدوران نجد ان

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\cancel{\sigma}\int x dS}{\cancel{\sigma}\int dS} = \frac{\int x dS}{S} \qquad \therefore \int x dS = S\bar{x} \qquad (4)$$

حيث σ هي الكثافة السطحية للمساحة المعلومـــة ، ومـــن المعـــادلتين (3) ، (4) يكـــون $V = S\alpha\bar{x}$. ونلاحظ انه إذا كانت $\alpha = 2\pi$ ، اي انه إذا دارت المساحة دورة كاملة فإن الحجم يساوي $V = \left(2\pi\bar{x}\right)S$ ، اي ان الحجم الناتج يساوي المساحة مـــضروبة في محـــيط الدائرة التي يرسمها مركز ثقلها.

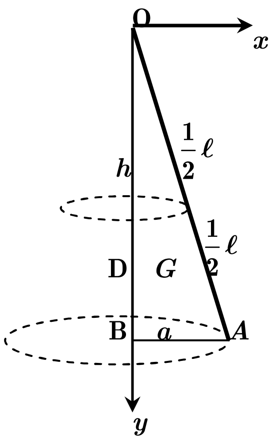
﴿ مثـ ١٦ ـال ﴾

باستخدام نظريتا بابوس اوجد حجم ومساحة سطح مخروط دائري قائم؟

﴿ الحــــل ﴾

يمكن اعتبار المخروط على انه ناتج من دوران القطعة المستقيمة OA حول المحور Oy دوره كاملة فينشا المخروط المطلوب إيجاد مساحته ، وحيث ان مر كز ثقل القطعة المستقيمة يقع عند منتـ ـصفها ، بفـــرض ان $OA = \ell$ وان $ab = a$ وان $OB = h$ كمـ ـا بالـ ـشكل

$$\because S = 2\pi\bar{x}\ell, \qquad \bar{x} = \frac{1}{2}a \qquad \therefore S = \pi a\ell$$



حيث S هي المساحة الجانبية للمخـــروط وحـــساب حجم المخروط بدوران المثلـــث OAB دورة كاملـــة حول Oy فإن حجم المخروط يساوي

$$\because V = 2\pi\bar{x}S' \quad \therefore V = 2\pi(\mathrm{DG})\left(\frac{1}{2}ah\right)$$

اي ان

$$V = 2\pi.\frac{1}{3}a.\frac{1}{2}ah = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

حيث S' هي مساحة المثلث OAB

﴿ مثـ ١٧ ـال ﴾

استخدم نظرية بابوس لإيجاد مر كز ثقل صفيحة على شكل نصف دائرة نصف قطرها a؟

﴿ الحــــل ﴾

عند دوران مساحة مستوية على شكل نصف دائرة نصف قطرها a تنشا كرة مصمتة نصف قطرها a والتي حجمها $\frac{4}{3}\pi a^3$ و كذلك مساحة الصفيحة النصف دائرية $\frac{1}{2}\pi a^2$ وباستخدام نظرية بابوس نجد ان

$$V = 2\pi\bar{x}S \qquad \Rightarrow \frac{4}{3}\pi a^3 = 2\pi\bar{x}\left(\frac{1}{2}\pi a^2\right) \qquad \therefore \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

الخلاصـــــــــــة

- مركز ثقل الجسم الجاسئ هو تلك النقطة من الفراغ والتي يمر بها دائما خط عمل وزن هذا الجسم مهما تغير وضعه بالنسبة لسطح الارض.
- يتعين مركز ثقل مجموعة من الجسيمات عددها n من العلاقات

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} m_i \,,$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} m_i \,,$$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} m_i$$

- اما في حالة الاجسام المتصلة تؤول عملية الجمع إلى عملية تكامل

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{\int dm}, \qquad \bar{y} = \frac{\int ydm}{\int dm}, \qquad \bar{z} = \frac{\int zdm}{\int dm}$$

- اي محور او نقطة تماثل للجسم فإن مركز ثقل الجسم يقع على المحور او نقطة التماثل.
- إذا علق جسم تعليقا حرا من إحدى نقطه فإنه يتزن بحيث يمر الخط الراسي من نقطة التعليق بمركز ثقل الجسم.
- يوجد مركز ثقل واحد للجسم الجاسئ.
- مركز ثقل الجسم الجاسئ يقع عند نقطة ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجســـم بالنسبة لسطح الارض.

تمارين

(١) اوجد مركز ثقل صفيحة رقيقة على شكل مستطيل متصل بمثلث متساوي الساقين وقاعدته تساوي طول الضلع المشترك مع المستطيل؟

(٢) جسم متجانس مكون من نصف كرة ومخروط (نصف قطر دائرة قاعدة المخروط تساوي نصف قطر الكرة).اثبت ان مركز ثقله يقسم المحور بنسبة $1:2$ من جهة راس المخروط حيث ان زاوية راس المخروط $\frac{\pi}{4}$؟

(٣) اوجد مركز ثقل نصف كرة مصمتة نصف قطرها ℓ،ماذا لو كان نصف الكرة مجوف؟

(٤) اوجد مركز ثقل المساحة المحصورة بين القطعين المكافئين $y = 4x - x^2 \quad y = 3x^2,$ ؟

(٥) قرص دائري نصف قطره $12\ cm$ ، عمل به ثقب دائري يبعد مركزه مسافة $6\ cm$ عن مركز القرص ونصف قطره $2\ cm$. عين مركز ثقل الجزء المتبقي؟

(٦) abc سلك رفيع منتظم الكثافة الطولية على شكل مثلث قائم الزاوية في b فيه $\mathrm{ab} = 6\ cm, \mathrm{bc} = 8\ cm$ اوجد بعد مركز ثقل السلك عن كلٍ من $\overline{\mathrm{bc}}, \overline{\mathrm{ba}}$

(٧) صفيحة منتظمة السمك والكثافة على شكل مثلث abc مركزه O وقائم الزاوية في b حيث $\mathrm{ab} = 9\ cm$ ، $\mathrm{bc} = 6\ cm$ فصل المثلث ade والدائرة التي مركزها O ونصف قطرها الوحدة ، حيث d نقطة تقع على ab ، $\mathrm{ad} = 3\ cm$ ونقطة e هي تقاطع ac مع الموازي من d للقاعدة bc . فإذا علق الجزء المتبقي من b تعليقا حرا فاتزن بحيث اصبح ab يصنع زاوية α مع الراسي. اثبت ان $3(20-\pi)\tan\alpha = 2(26-\pi)$ ؟

(٨) ازيل من اسطوانة دائرية منتظمة مخروط دائري قائم تنطبق قاعدته مع قاعدة الاسطوانة ، اوجد ارتفاع المخروط بحيث يكون مركز كتلة الجزء الباقي من الاسطوانة يقع عند راس المخروط؟

(٩) عين مركز ثقل قطعة دائرية منتظمة السمك والكثافة تقابل زاوية 2α عند المركز ثم استنتج مركز ثقل صفيحة نصف دائرية؟

(١٠) إذا كانت الكثافة السطحية لصفيحة دائرية تتناسب مع مربع بعدها من نقطة على المحيط O. اثبت ان مركز ثقلها يقسم القطر بنسبة $1:2$ من O؟

(١١) صفيحة منتظمة على شكل مثلث ، علقت تعليقا حرا من احد الاركان بحيث اصبحت القاعدة افقية برهن ان الصفيحة متساوية الاضلاع؟

(١٢) استخدم نظريتا بابوس لتعيين مركز ثقل قوس على هيئة نصف دائرة نصف قطرها a وكذلك لتعيين مركز ثقل مساحة على هيئة نصف قرص دائري نصف قطره b؟

(١٣) قطاع كروي محيط قاعدته دائرة قطرها يقابل زاوية 2α عند مركز الكرة. عين حجم هذا القطاع بفرض ان القطاع ماخوذ من كرة نصف قطرها a ؟

(١٤) طبق نظريتا بابوس لايجاد مساحة وحجم مخروط ناقص بدلالة ارتفاعه ونصفا قطرا قاعدتيه؟

(١٥) اوجد مركز ثقل السطح الناشئ عن دوران جزء المنحنى $y^2 = 4x$ المحصور بين $x = 0$ ، $x = 1$ حول المحور x دورة كاملة؟

(١٦) عين مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة السطحية على شكل قطاع دائري نصف قطره ℓ وزاويته المركزية 2φ؟

مبدأ الشغل الافتراضي واستقرار الاتزان

خلال دراستنا في الابواب السابقة لاتزان منظومة ميكانيكية بتاثير مجموعة من القيود كان يتم عزل كل جسم على حدة باستبدال القيود المفروضة عليه بقوى رد فعل خارجية مجهولة تم كتابة معادلات الاتزان لكل جسم ، و كلما زاد عدد الاجسام في المنظومة زادت المعادلات وزاد معها الحل صعوبة. ولذا سوف نلجا لدراسة طريقة اخرى للحل تعطى شروط الاتزان دفعة واحدة. وتعرف هذه الطريقة باسم مبدا الشغل الافتراضي، وهي تعتمد اساسا على استعمال المبادئ الديناميكية للمنظومة وذلك بحساب الشغل المبذول بالقوى المؤثرة على المنظومة خلال إزاحة افتراضية ناتجة عن اضطراب افتراضي للاتزان (وهي تخالف الفكرة القائمة على استبدال القيود على المجموعة بقوى مجهولة تم كتابة معادلات الاتزان).

مبدا الشغل الافتراضي

في هذا الجزء نحاول الحصول على معادلة الشغل الافتراضي لاي جسم متماسك في وضع الاتزان. لنفرض ان جسما متماسكا متزنا تحت تاثير مجموعة من القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, ..., \underline{F}_n$ وان هذه المجموعة من القوى قد امكن اختزالها إلى قوة وحيدة $\underline{F}$ تؤثر عند نقطة ما وازدواج متجه عزمه $\underline{M}$ ، ولنفرض ان الجسم قد ازيح ازاحة عامة (انتقالية ودورانية) صغيرة. إذن فإن هناك شغلا قد بذل في ازاحة هذا الجسم بواسطة قوة المحصلة $\underline{F}$ والازدواج $\underline{M}$ ، معادلة هذا الشغل هي

$$\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} + \underline{M}.\delta\underline{\theta}$$

وحيث ان الجسم متزن اصلا فإن هذا الشغل المبذول يكون افتراضيا ويساوي صفرا ، اي ان معادلة الشغل الافتراضي تاخذ الصورة

$$\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} + \underline{M}.\delta\underline{\theta} = 0 \qquad (1)$$

ويمكن التدليل على ان الجزء $\underline{M}.\delta\underline{\theta}$ من المعادلة السابقة يمثل شغلا حيث اننا نعرف سابقا $\underline{M} = \underline{r} \wedge \underline{F}$ ومن تم فإن $\underline{M}.\delta\underline{\theta} = \left(\underline{r} \wedge \underline{F}\right).\delta\underline{\theta}$ وبتطبيق قاعدة التبديل لحاصل الضرب الثلاثي القياسي نجد ان

$$\underline{M}.\delta\underline{\theta} = (\underline{r} \wedge \underline{F}).\delta\underline{\theta} = \underline{F}.(\delta\underline{\theta} \wedge \underline{r}) = \underline{F}.\delta\underline{s}$$

حيث $\delta\underline{s}$ هي الازاحة الخطية الناتجة عن الدوران.

وسوف نبرهن فيما يلي ان الشرط الضروري والكافي لاتزان المنظومة تلاشي الشغل δW

اولا الشرط ضروري: إذا كانت المنظومة متزنة فإن شرطي الاتزان هما $\underline{F} = \underline{0},\ \underline{M} = \underline{0}$ اي تلاشي محصلة القوى المؤثرة ومحصلة العزوم بالنسبة لنقطة في الفراغ وبالتعويض في المعادلة (1) يكون $\delta W = 0$ وهو المطلوب.

ثانيا الشرط كافٍ: اي إذا علم ان $\delta W = 0$ فإن المنظومة تكون متزنة

$$\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} + \underline{M}.\delta\underline{\theta} = 0 \qquad (2)$$

وبما ان الازاحة الافتراضية اختيارية فيمكن اختيار الإزاحة بحيث ان $\delta\underline{\theta} = \underline{0}$ وبذلك من المعادلة السابقة يكون $\delta W = \underline{F}.\delta\underline{r} = 0$ وهذه لا تتحقق الا إذا كان $\underline{F} = \underline{0}$ (لان $\delta\underline{r}$ اختيارية) اي ان محصلة القوى الخارجية تنعدم.

من ناحية اخرى إذا اختيرت الازاحة الافتراضية بحيث ان $\delta\underline{r} = \underline{0}$ فيكون $\delta W = \underline{M}.\delta\underline{\theta} = 0$ ولكي يتحقق ذلك لجميع قيم $\delta\underline{\theta}$ (لانها اختيارية) يجب ان يتلاشى $\underline{M}$ اي ان $\underline{M} = \underline{0}$ وهذا يعني ان محصلة العزوم للقوى والازدواجات الخارجية تساوي صفرا اي ان $\underline{F} = \underline{0},\ \underline{M} = \underline{0}$.

عند استخدام مبدا الشغل الافتراضي في حل مسائل الاتزان يراعي الاتي:

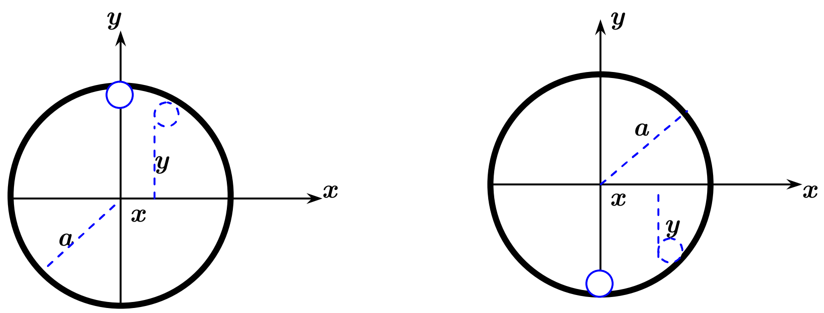
- ينعدم الشغل الذي يبدله الفعل و رد الفعل المتبادلين بين نقطتين إذا لم تتغير المسافة بين النقطتين اثناء الازاحة.
- ردود الافعال على الاسطح الملساء لا تبدل شغل حيث ان رد الفعل يكون عموديا على اتجاه الازاحة.
- الشد في الخيوط غير المرنة لا يبدل شغل ومن ثم نسقطها عند حساب الشغل الافتراضي.
- إذا كانت الازاحة صغيرة فينعدم الشغل المبدول بواسطة رد الفعل المتبادل بين سطحين يتدحرج كل منهما على الاخر.
- نقط التاثير الثابتة كالمفاصل نهمل ردود الافعال عندها حيث تنعدم الازاحة.

➤ كما يجب مراعاة الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات المختارة واتجاهات القوى الفعالة.

الان ، إن تحديد نوع الاتزان لمنظومة ميكانيكية من حيث انه مستقر من عدمه له مدلولاته العملية الهامة. وسوف نتعرض فيما يلي لمفاهيم الموضوع بطريقة مبسطة.

الاتزان المستقر

إذا ازحنا الجسم إزاحة صغيرة عن وضع الاتزان ففي حالة الاتزان المستقر يتدبدب الجسم وتخمد هده الدبدبة حتى يعود إلى وضع اتزانه الاول. ويحدث هدا الاتزان حينما تكون طاقة الوضع اقل ما يمكن ،(توضيح: نفرض ان طاقة الجهد نهاية عظمى وازيح الجسم إزاحة صغيرة فإن طاقة حركته تزداد ومن ثم تقل طاقة جهده تبعا لمبدا ثبوت الطاقة (مجموع طاقتي الحركة والجهد مقدار ثابت) ويبتعد بدلك الجسم عن موضع الاتزان ويكون الاتزان في هده الحالة غير مستقر). في الشكل التالي (شكل ١) وضعت خرزة عند اسفل السلك الاملس المنثني على شكل دائرة. وبالنظر يتضح ان هدا المكان هو توازن مستقر مع طاقة وضع للخرزة اقل ما يمكن لان اي إزاحه سوف يتبعها عوده إلى نفس المكان. وباستخدام محور x كاساس فإن طاقة الوضع للخرزة عند اي مكان تحت محور x تتعين من $V = -wy = -w\sqrt{a^2 - x^2}$ وبوضع $\dfrac{dV}{dx} = 0$ لايجاد مكان الاتزان يكون $0 = \dfrac{wx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{dV}{dx}$.



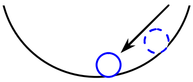
اتزان مستقر شكل ١ اتزان غير مستقر شكل ٢

والحل المطلوب للعلاقة الاخيرة هو $x = 0$ (الموضع للخرزة عند قاع الدائرة) ولإيجاد نوع الاتزان من الضروري ايجاد $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ عند موضع الاتزان، وبالتالي

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{w}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{wx^2}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}$$

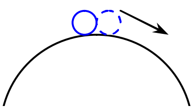
وعند $x = 0$ فإن $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{w}{a} > 0$ وهدا يعني ان الاتزان مستقر.

اتزان مستقر



الاتزان غير المستقر

في هده الحالة إذا ازحنا الجسم إزاحة صغيرة عن وضع الاتزان فإن الجسم لا يعود إلى وضع اتزانه الاول وانما يبتعد عنه، و يحدث الاتزان غير المستقر حينما تكون طاقة الوضع اكبر ما يمكن ، كما في الشكل السابق (شكل ٢)، الخرزة عند قمة السلك الدائري فبالنظر نجد ان هدا المكان هو اتزان غير مستقر ، وباستخدام محور x كاساس فإن طاقة الوضع للخرزة عند اي مكان فوق محور x تتعين من $V = wy = w\sqrt{a^2 - x^2}$ وبوضع $\frac{dV}{dx} = 0$ لايجاد موضع الاتزان يكون $\frac{dV}{dx} = -\frac{wx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$.



اتزان غير مستقر

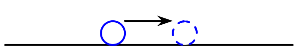
والحل المطلوب هنا هو $x=0$ (الخرزة عند قمة الدائرة) كذلك

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{w}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{wx^2}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}$$

وعند $x = 0$ فإن $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{w}{a} < 0$ وهدا يعني ان الاتزان غير مستقر.

الاتزان المتعادل (المحايد)

إذا اعطي الجسم إزاحة صغيرة واخد وضع اتزان جديد مشابه لوضعه الاول فإن الاتزان في هده الحالة يسمى اتزان محايد (متعادل). كمثال ، الخرزة ممكن وضعها عند اي نقطة على سلك افقي وستبقى كدلك.



اتزان متعادل

خلاصة الاتزان

لتعيين قيم المتغيرات لنظام متزن. استنتج طاقة الوضع V للنظـــام كدالـــة في المـــتغيرات في المناقشة السابقة كانت x هي المتغير. دع $\frac{dV}{dx}=0$ لتعيين قيم للاتزان ويكون

$\frac{d^2V}{dx^2}>0$ اتزان مستقر

$\frac{d^2V}{dx^2}<0$ اتزان غير مستقر

$\frac{d^2V}{dx^2}=0$ اتزان متعادل

اتزان التدحرج

نفرض جسم A متزن على جسم اخر B ثابت بحيث يكون سطحي التلامس جزئين مـــن كرتين خشنتين نصفا قطريهما b,a ونقطة التلامس d ومركز ثقل الجسم العلوي هـــو o حيث $\text{od}=h$. الان لمعرفة نوع الاتزان نزيح الجسم A ازاحة صغيرة يتدحرج خلالهـــا الجسم A على السطح الكروي B كما بالشكل، ولتكن e هي نقطة التلامس الجديدة بعد الازاحة الصغيرة. نفرض ان الاحتكاك كافي بحيث تكون حركة الجسم A على B حركـة تدحرجية بحتة ومن ثم فإن $\widehat{\text{de}}=\widehat{\text{ed}'}$ اي ان

$$b\theta=a\phi \qquad (3)$$

وباعتبار الافقي المار بمركز الكرة السفلى مستوى قياس الجهد نجد ان دالة الجهد تعطى مـــن العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} V &= w\left\{(a+b)\cos\theta-(a-h)\cos(\theta+\phi)\right\} \\ &= w\left\{(a+b)\cos\theta-(a-h)\cos(1+\frac{b}{a})\theta\right\} \end{aligned}$$

وذلك باستخدام المعادلة (3) ويتعين موضع الاتزان من :

$$\frac{dV}{d\theta}=-w\left\{(a+b)\sin\theta-(a-h)(1+\frac{b}{a})\sin(1+\frac{b}{a})\theta\right\}=0$$

احد حلول هذه المعادلة هو $\theta=0$ اي الموضع الاصلي للجسم ويكون الاتزان مـــستقرا إذا تحقق الشرط

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{\theta=0} > 0$$

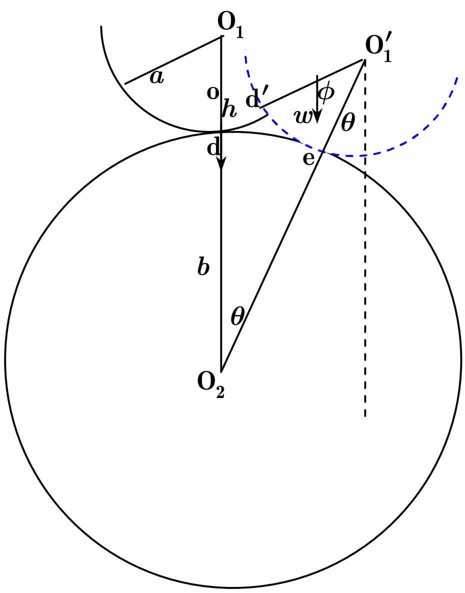
$$\because \frac{d^2V}{d\theta^2} = -w\left\{(a+b)\cos\theta - (a-h)(1+\frac{b}{a})^2\cos(1+\frac{b}{a})\theta\right\}$$

$$\therefore \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = -w\left\{(a+b) - (a-h)(1+\frac{b}{a})^2\right\} > 0$$

وبعد الاختصارات نجد ان شرط ان يكون الاتزان مستقر هو

$$ab-(a+b)h > 0 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{h} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (4)$$

وهو شرط استقرار اتزان التدحرج



او الاتزان غير مستقر فإن

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} < 0 \qquad \Rightarrow ab-(a+b)h > 0 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{h} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (5)$$

او الاتزان يكون متعادل

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = 0 \qquad \Rightarrow ab-(a+b)h = 0 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (6)$$

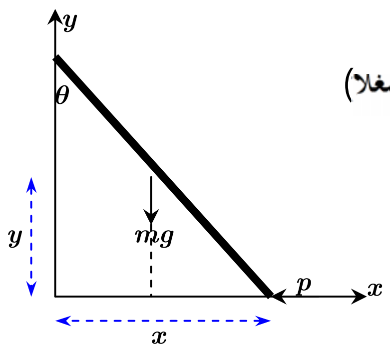
حالات خاصة:

➤ إذا كان تقوس الجسم الثابت السفلي إلى اعلى ، اي كان الجسم السفلي مقعرا فإن شرط الاتزان المستقر يكون $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>\frac{1}{h}$ وغير المستقر $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}<\frac{1}{h}$ والمتعادل $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{h}$.

➤ إذا كان الجسم الثابت السفلي مستويا فإن $b\to\infty$ ويكون الاتزان مستقرا إذا كـــان $h<a$ وغير مستقر $h>a$ ومتعادل $h=a$ اما إذا كان الجسم العلوي مـــستويا فـــإن $a\to\infty$ ويكون الاتزان مستقرا إذا كان $h<b$ وغير مستقر $h>b$ ومتعادل $h=b$.

﴿ مثـ ١ ـال ﴾

سلم منتظم كتلته m وطوله ℓ ، اتزن تحت تاثير القوة الافقية p كمـا مـبين بالـشكل باستخدام مبدا الشغل الافتراضي اوجد القوة p ؟



﴿ الحـــــل ﴾

معادلة الشغل الافتراضي هي (ردود الافعال لا تبدل شغلا)

$$-mg\,\delta y - p\,\delta x = 0$$

والاشارات سالبة لان كل من القوتين w, p تعملان على انقاص x , y من الشكل نجد ان

$$y=\frac{1}{2}\ell\cos\theta \qquad \text{and} \qquad x=\ell\sin\theta$$

$$\therefore\ \delta x=\ell\cos\theta\,\delta\theta \qquad \text{and} \qquad \delta y=-\frac{1}{2}\ell\sin\theta\,\delta\theta$$

بالتعويض عن هده القيم في معادلة مبدا الشغل الافتراضي نحصل على

$$\left\{mg(-\frac{1}{2}\ell\sin\theta)+p(\ell\cos\theta)\right\}\delta\theta=0$$

وحيث ان $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$mg(-\frac{1}{2}\ell\sin\theta)+p(\ell\cos\theta)=0 \qquad \Rightarrow p=\frac{1}{2}mg\tan\theta$$

وهي القوة المطلوب تعيينها.

﴿ مثـ ٢ ـال ﴾

قضيب ab منتظم طوله $2L$ ووزنه w، يرتكز بطرفه b على حائط راسي املس ويستند كذلك على وتد ثابت املس يبعد مسافه h عن الحائط. اثبت باستخدام مبدا الشغل الافتراضي ان القيب يميل على الافقي في وضع الاتزان بزاوية $\cos^{-1}\left\{\sqrt[3]{\frac{h}{L}}\right\}$ ؟

﴿ الحـل ﴾

القوى التي تبدل شغل فقط قوة الوزن w اما قوى رد الفعل لا تبدل شغلا وبألتالي معادلة مبدا الشغل الافتراضي

$$w\,\delta y = 0 \quad \Rightarrow \delta y = 0$$

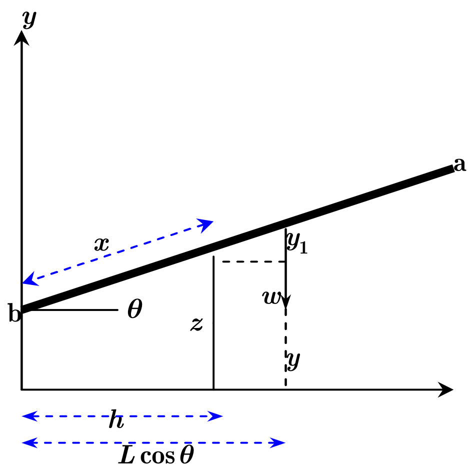
من هندسة الشكل نجد ان $x = h\sec\theta$ ، كذلك ارتفاع مركز ثقل القضيب يعطى من

$$y = z + y_1$$

حيث z طول الوتد وهو ثابت اي ان $\delta z = 0$ ومن ثم

$$y = z + (L - x)\sin\theta = (L - h\sec\theta)\sin\theta + z = z + L\sin\theta - h\tan\theta$$

$$\therefore\ \delta y = \left\{L\cos\theta - h\sec^2\theta\right\}\delta\theta$$



وحيث ان $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$L\cos\theta - h\sec^2\theta = 0$$

$$\therefore\ h\sec^2\theta = L\cos\theta \quad \Rightarrow \cos^3\theta = \frac{h}{L} \quad \text{Or} \quad \theta = \cos^{-1}\left\{\sqrt[3]{\frac{h}{L}}\right\}$$

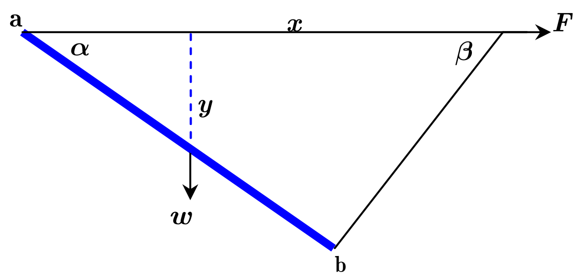
﴿ مثـ ٣ ـال ﴾

قضيب ab قابل للحركة حول a، وطرفه الاخر b مربوط بخيط متصل بحلقة تنزلق علــى سلك افقي املس عند a . اثبت ان القوة الافقية اللازمة لحفظ الحلقة في حالة اتزان تساوي $\dfrac{w\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ حيث w وزن القضيب ، α زاوية ميل القضيب على الافقي ، β زاويــة ميل الخيط على الافقي ؟

﴿ الحــــل ﴾

بفرض ان x هو بعد الحلقة عن a ، y عمق مركز ثقل القضيب عن السلك فإن معادلــة الشغل الافتراضي تتعين من $w\,\delta y + F\,\delta x = 0$

بفرض ان h طول الخيط ، 2ℓ طول القضيب فمن هندسة الشكل نحصل على



$$y = \ell\sin\alpha \qquad \text{and} \qquad x = 2\ell\cos\alpha + h\cos\beta, \qquad 2\ell\sin\alpha = h\sin\beta$$

$$\delta y = \ell\cos\alpha\;\delta\alpha, \qquad \delta x = -2\ell\sin\alpha\,\delta\alpha - h\sin\beta\,\delta\beta, \qquad 2\ell\cos\alpha\,\delta\alpha = h\cos\beta\,\delta\beta$$

$$\therefore\; \delta x = -2\ell\sin\alpha\,\delta\alpha - \sin\beta\left\{\frac{2\ell\cos\alpha}{\cos\beta}\right\}\delta\alpha = -\frac{2\ell\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\delta\alpha$$

بالتعويض عن قيم كل من $\delta x, \delta y$ في معادلة مبدا الشغل الافتراضي

$$\left\{w\,\ell\cos\alpha - F\frac{2\ell\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\right\}\delta\alpha = 0$$

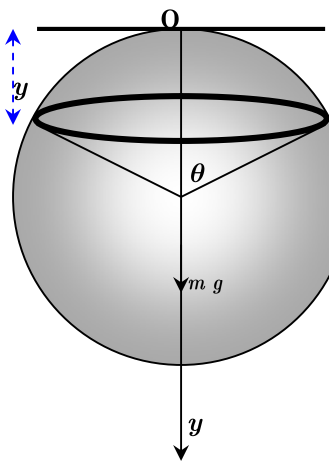
وحيث ان $\delta\alpha$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$w\,\ell\cos\alpha - F\frac{2\ell\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = 0 \qquad \Rightarrow F = \frac{w\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

﴿ مثـ ٤ ـال ﴾

حلقة مرنة رفيعة كتلتها m ونصف قطرها الطبيعي $\frac{1}{2}\ell$ ومعامل مرونتها λ ، وضعت ومستواها افقي على كرة ملساء نصف قطرها ℓ وتستطيل تحت تاثير وزنها. اثبت انه في وضع الاتزان فإن $2\pi\lambda(2\sin\theta - 1) = mg\tan\theta$ حيث 2θ هي الزاوية التي يحصرها اي قطر في الحلقة عند مركز الكرة ؟

﴿ الحـــل ﴾



معادلة مبدا الشغل الافتراضي تتعين من

$$w\,\delta y - T\,\delta L = 0$$

حيث L هو طول الحلقة والاشارة السالبة لان الشد يعمل على ارجاع الحلقة الى وضعها الاصلي ، y ارتفاع مركز ثقل الحلقة عن الخط الثابت ، من هندسة الشكل نجد ان طول الحلقة يتعين من

$$L = 2\pi\ell\sin\theta$$

ومنها يكون

$$\delta L = 2\pi\ell\cos\theta\,\delta\theta$$

كذلك $y = \ell - \ell\cos\theta$ ومنها $\delta y = \ell\sin\theta\,\delta\theta$

بالتعويض من هده العلاقات في معادلة الشغل الافتراضي نحصل على

$$w\,\ell\sin\theta\,\delta\theta - 2\pi\ell T\cos\theta\,\delta\theta = 0 \qquad \text{Or} \qquad \left(w\,\ell\sin\theta - 2\pi\ell T\cos\theta\right)\delta\theta = 0$$

وحيث ان $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$w\,\ell\sin\theta - 2\pi\ell T\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow mg\tan\theta = 2\pi T \qquad (w = mg)$$

ولكن الشد T يمكن تعيينه من قانون هوك (الطول الاصلي للحلقة $\pi\ell$)

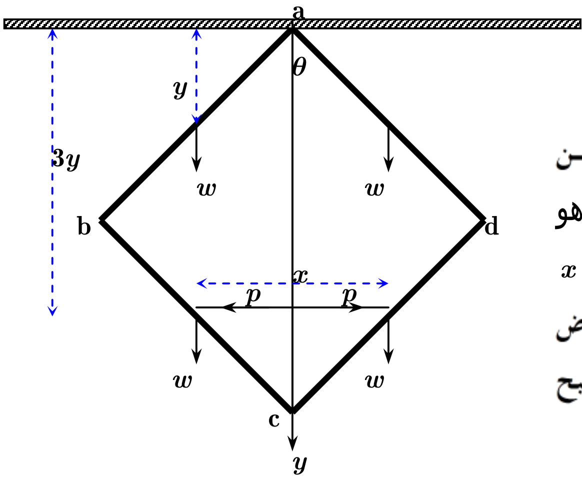
$$T = \frac{\lambda}{\pi\ell}(L - \pi\ell) = \frac{\lambda}{\pi\ell}(2\pi\ell\sin\theta - \pi\ell) = \lambda(2\sin\theta - 1)$$

بالتعويض عن قيمة الشد في العلاقة الاخيرة نحصل على

$$mg\tan\theta = 2\pi T \qquad \Rightarrow mg\tan\theta = 2\pi\lambda(2\sin\theta - 1)$$

﴿ مثـ ٥ ـال ﴾

اربعة قضبان متساوية منتظمة وزن كل منها w متصلة ببعضها اتصالا مفصليا لتكون المعين abcd ، إذا وضع هذا المعين في مستوى راسي و كان قطره ac راسيا وعلق من a وحفظ في هذا الوضع ليكون المربع بواسطة قضيب خفيف يصل بين منتصفي القضيبين cd, bc ، اوجد الضغط في هذا القضيب ؟



﴿ الحـــل ﴾

بفرض ان عمق مركز ثقل القضيبين عن المستوى الافقي المار بنقطة التعليق a هو y، ان طول القضيب الخفيف يساوي x ولاستخدام مبدا الشغل الافتراضي نفرض ان الهيكل ازيح ازاحة اختيارية لتصبح الزاوية $\hat{cad} = \theta$

معادلة الشغل الافتراضي هي $8w\,\delta y + p\,\delta x = 0$

من هندسة الشكل نجد ان $x = 2\ell \sin\theta$ and $y = \ell\cos\theta$

حيث 2ℓ طول اي قضيب من المعين

$$\therefore\ \delta y = -\ell\sin\theta\,\delta\theta \qquad \text{and} \qquad x = 2\ell\cos\theta\,\delta\theta$$

بالتعويض من المعادلة الاخيرة في معادلة الشغل الافتراضي نجد ان

$$-8w\,\ell\sin\theta\,\delta\theta + 2\ell p\cos\theta\,\delta\theta = 0 \qquad \text{Or} \qquad \left(-8w\,\ell\sin\theta + 2\ell p\cos\theta\right)\delta\theta = 0$$

وحيث ان $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر

$$\therefore\ -8w\,\ell\sin\theta + 2\ell p\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow p = 4w\tan\theta$$

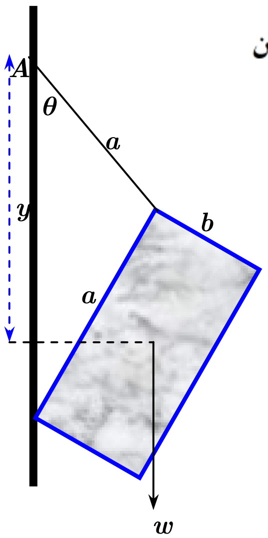
وفي وضع الاتزان فإن الهيكل يكون مربع الشكل ومن ثم $(\theta = \pi / 4)$ وبالتالي فإن الضغط في القضيب الذي يصل بين منتصفي القضيبين cd, bc يتعين من

$$p = 4w\tan(\pi / 4) = 4w$$

﴿ مثـ ٦ ـال ﴾

إطار مستطيل الشكل ومستند على حائط راسي املس بطرفه السفلي ومعلق مـــن عرضـــه العلوي من نقطتين بواسطة خيطين متوازيين طول كل منهما a ويساوي طول الاطار. اثبت انه في وضع الاتزان فإن الخيط يميل على الراسي بزاوية $\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{3a}\right)$ حيث b سمك الاطار ؟

﴿ الحـــــل ﴾



نفترض ان نقطة تعليق الحبل A ، θ زاوية ميل الخيط على الراسي من هندسة الشكل فإن انخفاض مركز الثقل عن نقطة التعليق هو y حيث

$$y = \frac{1}{2}\left\{3a\cos\theta + b\sin\theta\right\}$$

بفرض إزاحة افتراضية δy ينخفض فيها مركز الثقل لاسفل فإن معادلة الشغل الافتراضي في هده الحالة هي

$$w\,\delta y = 0 \qquad \Rightarrow \delta y = 0$$

ولكن $\delta y = \left\{b\cos\theta - 3a\sin\theta\right\}\delta\theta$ وحيث ان $\delta\theta \neq 0$

ومن ثم $b\cos\theta - 3a\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{b}{3a}$

﴿ مثـ ٧ ـال ﴾

قضيب منتظم ab منتظم طوله $2L$ يستند بطرفيه على مـــستويين مـــائلين علـــى الافقـــي بالزاويتين في جهتين مختلفتين ويتقاطعان في خط افقي. اوجد باستخدام مبدا الشغل الافتراضي الزاوية التي يميل بها القضيب على الافقي في وضع الاتزان ؟

﴿ الحـــــل ﴾

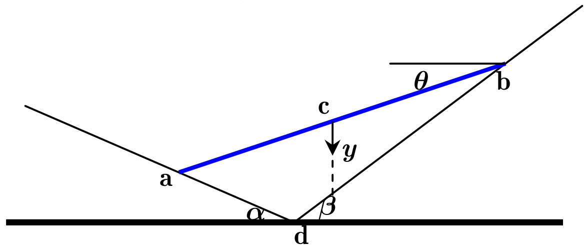
القوى التي تبدل شغلا هي قوة الوزن فقط بينما ردود الافعال نسقطهما عند استخدام مبـــدا الشغل الافتراضي ويكون $-w\,\delta y = 0 \qquad \Rightarrow \delta y = 0$

حيث y هـــو ارتفـــاع مركـــز الثقـــل عـــن المـــستوى الافقـــي والـــدي يـــتعين مـــن

$$y = L\sin\theta + \text{ad}\sin\alpha$$

حيث يمكن حساب الطول ad من قاعدة الجيب للمثلث abd ومنها

$$\frac{\text{ad}}{\sin(\beta-\theta)}=\frac{2L}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}$$



$$\therefore\ \text{ad}=\frac{2L\sin(\beta-\theta)}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \Rightarrow y=L\sin\theta+\frac{2L\sin(\beta-\theta)}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha$$

$$\therefore\ \delta y=\left\{L\cos\theta-\frac{2L\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\beta-\theta)\right\}\delta\theta=0$$

وحيث ان $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$L\cos\theta-\frac{2L\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\beta-\theta)=0\ \Rightarrow \cos\theta\sin(\alpha+\beta)-2\cos(\beta-\theta)\sin\alpha=0$$

$$\therefore\ (\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\cos\theta-2(\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\sin\theta)\sin\alpha=0$$

$$\therefore\ \sin\beta\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta=0$$

بالقسمة على $\cos\theta$ ينتج ان

$$\therefore\ \underbrace{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}_{\sin(\beta-\alpha)}=2\sin\alpha\sin\beta\tan\theta$$

$$\Rightarrow \sin(\beta-\alpha)=2\sin\alpha\sin\beta\ \tan\theta$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta} \qquad \text{Or} \qquad \theta=\tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta}\right\}$$

وهي الزاوية التي يميل بها القضيب على الافقي في وضع الاتزان.

﴿ مثـ ٨ ـال ﴾

قضيبان ab, bc متساويان طولا يتصلان اتصالا املس سهل عند نقطة b . وزن القضيب ab هو w بينما وزن القضيب bc هو $2w$. القضيبان موضوعان في مستوى راسي بحيث تكون

الزاوية بين القضيبين قائمة ، وطرفاهما a,c على مستوى افقي املس ، ويتصل هدان الطرفان بخيط لحفظ الاتزان. اوجد الشد في الخيط ؟

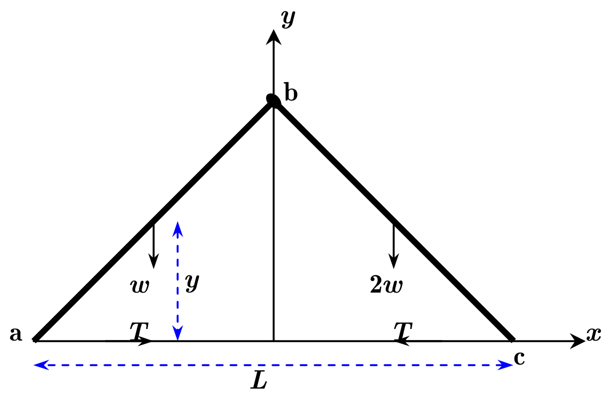
﴿ الحـــــل ﴾

نفرض ان طول اي من القضيبين هو 2ℓ ، كما نفرض ان المجموعة حدثت لها إزاحة بـــسيطة بحيث ان ac قد استطال قليلا ، نلاحظ ان ردود الافعال عند a,c وعند المفـــصل b مـن القوى لا تبدل شغلا وبالتالي معادلة مبدا الشغل الافتراضي تتعين من

$$-w\,\delta y-2w\,\delta y-T\,\delta L=0 \qquad \text{Or} \qquad -3w\,\delta y-T\delta L=0$$

حيث y ارتفاع مركز ثقلي القضيبين L طول الخيط ، كذلك

$$y=\ell\sin\theta, \qquad L=4\ell\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \delta y=\ell\cos\theta\,\delta\theta, \qquad \delta L=-4\ell\sin\theta\,\delta\theta$$



وبالتعويض في معادلة مبدا الشغل الافتراضي يكون

$$-3w\ell\cos\theta\,\delta\theta-T(-4\ell\sin\theta\,\delta\theta)=0 \qquad \text{Or} \quad \left\{4T\sin\theta-3w\cos\theta\right\}\delta\theta=0$$

وحيث ان $\delta\theta$ ازاحة اختيارية صغيرة لا تساوي الصفر فإن

$$4T\sin\theta-3w\cos\theta=0 \qquad \Rightarrow T=\frac{3}{4}w\cot\theta$$

وعند وضع الاتزان فإن $\theta=\frac{\pi}{4}$ ومنها مقدار الشد $T=\frac{3}{4}w\cot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}w$.

﴿ مثـ ٩ ـال ﴾

جسيمان متساويا الوزن متصلتان بخيط خفيف غير مرن يمر على سلك دائري املس راسـي. ادرس اوضاع الاتزان (مستقر ، غير مستقر ، متعادل) طول الخيط اقل من نصف محيط الدائرة ؟

﴿ الحـــل ﴾

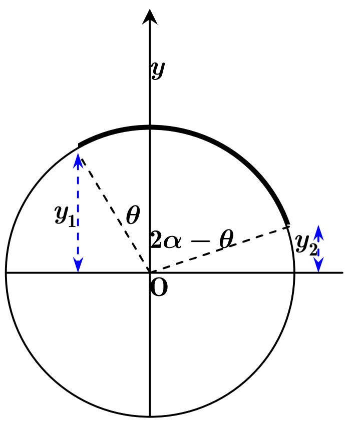
بفرض ان ℓ طول الخيط ، a نصف قطر السلك ، باختيار الافقي المار بمركز السلك مستوى قياس فإن طاقة الجهد (الوضع) V تتعين من

$$V = wy_1 + wy_2 = w(y_1 + y_2)$$

حيث y_1, y_2 هما ارتفاعا الجسمين عن مستوى القياس ، من هندسة الشكل فإن

$$y_1 = a\cos\theta, \quad y_2 = a\cos(2\alpha - \theta)$$

على اعتبار ان الخيط يقابل زاوية 2α عند المركز وبالتالي



$$V = wa\left\{\cos\theta + \cos(2\alpha - \theta)\right\} \qquad \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = -wa\left\{\sin\theta - \sin(2\alpha - \theta)\right\}$$

عند وضع الاتزان يكون $\frac{dV}{d\theta} = 0$ ومنها

$$\sin\theta - \sin(2\alpha - \theta) = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

وهذا هو وضع الاتزان ، ولمعرفة نوع الاتزان نوجد $\frac{d^2V}{d\theta^2}$

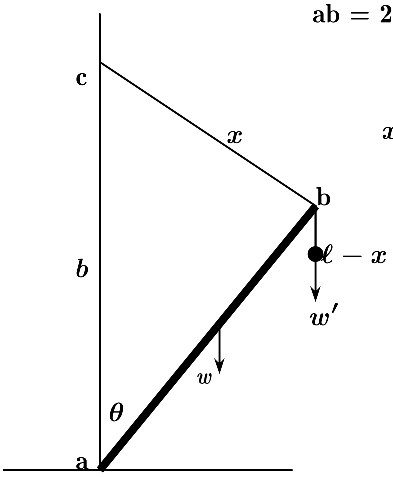
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -wa\left\{\cos\theta + \cos(2\alpha-\theta)\right\} \qquad \therefore \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\alpha} = -2wa\cos\alpha < 0$$

اي ان طاقة الجهد تكون نهاية عظمى ومن ثم فإن الاتزان غير مستقر.

﴿ مثـ ١٠ ـال ﴾

قضيب ab وزنه w يتحرك بسهوله حول المفصل a ، المفصل مثبت في حائط راسـي. إذا ربط خيط من نقطة c راسيا اعلى a ومر خلال ثقب في b من حاملا وزنا w' في طرفه الحر اثبت انه في وضع الاتزان المائل للقضيب فإن bc=$\dfrac{w'\mathrm{ac}}{w'+0.5w}$ وبين نوع الاتزان ؟

﴿ الحـــل ﴾



بفرض ان طول الخيط هو ℓ وان $\mathrm{ab}=2a,\quad \mathrm{ac}=b,\quad \mathrm{bc}=x$

مع اخد المستقيم الافقي المار بالنقطة a مستوى قياس

من هندسة الشكل نجد ان $x^2 = b^2 + 4a^2 - 4ab\cos\theta$

وتتعين طاقة الجهد من

$$V = w'\left\{2a\cos\theta - (\ell - x)\right\} + wa\cos\theta$$

وبالتعويض من المعادلة الاولى في الثانية يكون

$$V = -w'(\ell - x) + \frac{1}{4b}(w+2w')(b^2+4a^2-x^2)$$

عند وضع الاتزان يكون $\dfrac{dV}{d\theta}=0$ ومنها

$$\frac{dV}{dx} = w' - \frac{1}{2b}(w+2w')x = 0 \ \Rightarrow x = \mathrm{bc} = \frac{2bw'}{w+2w'}$$

وهدا هو وضع الاتزان ، ولمعرفة نوع الاتزان نوجد $\dfrac{d^2V}{d\theta^2}$

$$\because \frac{d^2V}{d\theta^2} = -\frac{1}{2b}(w+2w') \qquad \therefore \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{x=\mathrm{bc}} = -\frac{1}{2b}(w+2w') < 0$$

اي ان طاقة الجهد تكون نهاية عظمى ومن ثم فإن الاتزان غير مستقر.

﴿ مثـ ١١ ـال ﴾

اسطوانة مصمتة ارتفاعها ℓ متحدة القاعدة مع نصف كرة مصمتة في قاعدها المـــستوية إذا كان نصف قطر الكرة a والجسم منتظم وموضوع بسطحه الكروي على مـــستوى ، مـــتى يكون الاتزان مستقرا ؟

﴿ الحــــــل ﴾

شرط استقرار الاتزان كما راينا يأخذ الصورة $\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ حيث h تمثل ارتفاع مركـــز ثقل الجسم العلوي وفي مسالتنا هنا $b \to \infty$ وبالتالي يصبح الشرط الـــسابق في الـــصورة $h < a$ ، وبفرض ان m', m هما كتلتي نصف الكرة و الاسطوانة فإنه (من المعلوم ان مركز ثقل نصف كرة مصمتة يقع على بعد $\frac{3}{8}$ من القاعدة المستوية مثـ ٨ ـال باب مركز الثقل)

$$\therefore h = \frac{\frac{5}{8}am + (a + \frac{\ell}{2})m'}{m + m'} < a \quad \Rightarrow \frac{5}{8}am + (a + \frac{\ell}{2})m' < a(m + m')$$

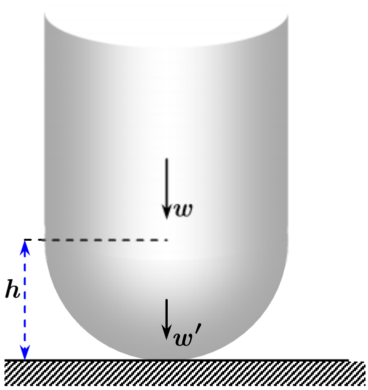
وباجراء الاختصارات نحصل على $\frac{m'}{m} < \frac{3}{4}\frac{a}{\ell}$ ولكن

$$\frac{m'}{m} = \frac{\pi \rho a^2 \ell}{\frac{2}{3}\pi \rho a^3} = \frac{3\ell}{2a}$$

$$\therefore \frac{m'}{m} = \frac{3\ell}{2a} < \frac{3a}{4\ell} \quad \Rightarrow \quad 2\ell^2 < a^2$$

$$\text{Or} \qquad \sqrt{2}\ell < a$$

وهو شرط استقرار الاتزان.



﴿ مثـ ١٢ ـال ﴾

نصف كرة مجوفة وزنها $2w$ ونصف قطرها ℓ ، علق وزن w في نقطة على حافتها وترتكز نصف الكرة بسطحها المنحني على كرة ثابتة نصف قطرها 2ℓ عند اعلى نقطة. ادرس نوع الاتزان ؟

﴿ الحـــــل ﴾

شرط استقرار الاتزان كما راينا ياخد الصورة $\dfrac{1}{h} > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ حيث h تمثل ارتفاع مركز ثقل الجسم العلوي.

والان لإيجاد مركز ثقل الجسم المكون من وزن نصف الكرة $2w$ والثقل w ، نفرض ان هدا المركز يقع على المستقيم co وبالتالي يكون $w(\mathrm{bo}') = 2w(\mathrm{o}'\mathrm{d})$

ولكن $\mathrm{bo}' = a\cos\theta, \quad \mathrm{o}'\mathrm{d} = \dfrac{a}{2}\sin\theta$ ومنها يكون

$$wa\cos\theta = 2w\frac{a}{2}\sin\theta \qquad \therefore \tan\theta = 1 \qquad \text{Or} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

ومن قانون حساب مركز الثقل يكون $\left(\mathrm{Ac} = h\right)$

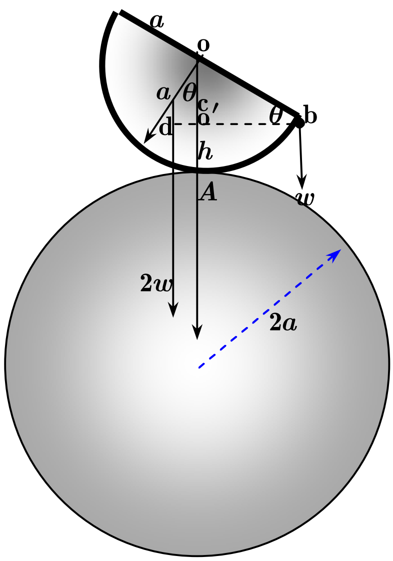
$$\therefore h = \frac{(a - a\sin\theta)m + (a - \frac{a}{2}\cos\theta)2m}{m + 2m} = \left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}a, \qquad \left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$$

حيث m كتلة الوزن $w = mg$ و $2m$ كتلة وزن نصف الكرة $2w = 2mg$

وحيث ان شرط الاتزان المستقر $\dfrac{1}{h} > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

$$\therefore \frac{1}{a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)} > \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \qquad \Rightarrow \sqrt{2} > 1$$

وهدا صحيح اي ان الاتزان مستقر.



الخلاصـــــــــــة

- يستخدم مبدا الشغل الافتراضي في حل مسائل الاتزان مع مراعاة بعض القواعد والتي ذكرت.
- انواع الاتزان مستقر ، غير مستقر ، متعادل وإذا كانت V دالة الجهد فإن

$\frac{d^2V}{dx^2} > 0$ اتزان مستقر ، $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ اتزان غير مستقر ،

$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ اتزان متعادل

تماريـــــــــن

(١) قضيب طوله L يتصل بمفصل سهل في حائط راسي بينما طرفه الاخر مربوط بخيط مرن طوله الطبيعي a ومعامل مرونته λ ، إذا ربط الطرف الاخر للخيط في نقطة على ارتفاع ما من المفصل. اوجد طول الخيط في حالة الاتزان ؟

(٢) خيط مرن طوله الطبيعي $2\pi a$ ووزنه w ومعامل مرونته λ على شكل حلقة. وضـــع على السطح الخارجي لمخروط محوره راسي لكي يصبح مستوى الحلقة افقيا. اوجد نـــصف قطر الحلقة في حالة الاتزان علما بان نصف زاوية راس المخروط هي α؟

(٣) خرزتان وزناهما w, w' تنزلقان على سلك دائري في مستوى راسي ومربوطتان بخـــيط يحصر زاوية 2β عند المركز عندما تكونان الخرزتان في حالة اتزان على الجزء العلوي مـــن السلك. اثبت ان ميل الخيط على الافقي يعطى من $\tan\theta = \frac{w'-w}{w'+w}\tan\beta$؟

(٤) إطار مكون من اربعة قضبان متساوية وزن اي منها w ومتصلة اتصالا املس عند نهايتها علق من احد اركانه وحوفظ على الشكل بواسطة خيط مرن طوله الطبيعي a ومعامل مرونته λ مربوط في ركنيه العلوي والسفلي ، اوجد ميل اي من القضيبين على الراسي ؟

(٥) قضيب ab طوله $2a$ وزنه w يتحرك بسهوله حول مفصل ثابت a ، والنهاية الاخرى متصلة بخيط غير مرن يمر في حلقة ملساء على بعد $2a$ من a وفي نفس المستوى الافقي مع a وفي النهاية الاخرى للخيط وزن $\frac{w}{12}$ اثبت ان الاتزان مستقر واوجد الزاوية التي يميل بها القضيب على الافقي ؟

(٦) يتكون الشكل الرباعي abcd من اربعة قضبان منتظمة ومتصلة ببعضها بمفصلات ملساء في اطرافها ، وبحيث يكون ab=ad ووزن اي منهما w كذلك cb=cd ووزن اي منهما w'. علق الهيكل في نقطة a ، وربط الطرف a بالطرف c بواسطة خيط خفيف بحيث ان الزاوية $a\hat{b}c$ اصبحت قائمة. اثبت ان الشد في الخيط في وضع الاتزان $T = w' + (w + w')\sin^2 \theta$؟

(٧) علقت نصف كرة مصمتة على حافة قاعدها المستوية ، والطرف الاخر من الخيط مثبت في نقطة على حائط راسي املس بحيث يكون الجزء المنحني من الكرة ملاصقا للحائط. إذا كانت θ,ϕ هما زاويتا ميل الخيط والقاعدة المستوية على الراسي اثبت ان $\tan \phi - \tan \theta = \frac{3}{8}$؟

(٨) جسم مكون من مخروط مصمت دائري قائم ونصف كرة مصمتة لهما نفس القاعدة ذات نصف القطر ℓ اوجد اكبر ارتفاع للمخروط حتى يصبح اتزان الجسم مستقرا إذا وضع على مستوى افقي وراس المخروط إلى اعلى. اوجد ايضا ارتفاع المخروط إذا كان الاتزان متعادلا؟

(٩) تستقر نصف كرة مصمتة على سطح كروي مساوٍ في نصف القطر. اثبت ان الاتزان غير مستقرإذا تلامس السطحان الكرويان ويكون الاتزان مستقرا إذا تلامست القاعدة المستوية مع السطح الكروي ؟

(١٠) شكل سداسي منتظم مكون من ستة قضبان متساوية وزن كل منها w متصلة اتصالا مفصليا. اتصل راسين متقابلين بخيط افقي و كان احد القضبان مستقرا على مستوى افقي تم وضع وزن w' في منتصف القضيب المقابل له. اثبت ان الشد في الخيط يساوي $\sqrt{3}(w + w')$ ؟