كلية التربية بالغردقة

الجبر المجرد

رياضة بحتة 7

كلية التربية بالغردقة

الباب الأول
المجموعات Sets

مقدمة Introduction:

تُعتبر نظرية المجموعات من أهم ما كشف العقل البشري في الرياضيات. ولا ترجع أهمية نظرية المجموعات إلى مجرد أنها إضافة جديدة إلى مجال الرياضيات ، فحسب بل لأنها علاوة على ذلك أمدت الرياضيين بأسس وأساليب جديدة لمعالجة فروع الرياضيات المختلفة التي كانت قائمة ، كما أتاحت الفرصة لكشف الكثير من الفروع الحديثة ولقد ساعدت لغة ورموز وجبر نظرية المجموعات في دراسة هندسة إقليدس وجبر الأعداد ونظرية الدوال الحقيقية كما أنها أصبحت أداة رئيسية في دراسة المنطق وجبر بوليان والجبر المجرد Boolean & Abstract Algebra والهندسات المختلفة والتوبولوجي Topology. وسوف تقتصر دراستنا في هذا الباب على لغة ورموز وجبر المجموعات.

مفهوم المجموعة The Mathematical Concept of a Set :

هناك أمثلة كثيرة لمفهوم المجموعة في حياتنا اليومية. فكثيراً ما نتحدث عن "مجموعة" الطلاب التي يتكون منها فريق كرة القدم لكلية العلوم بقنا ،و"مجموعة" الدول الأعضاء في هيئة الأمم المتحدة ، و"مجموعة" الحروف الهجائية التي تتكون منها كلمة "المجتهدون" .

إن كلاً من التجمعات السابقة يُطلق عليها لفظ "مجموعة".

وعلى ذلك فإن "المجموعة" هي تجمع من الأشياء. ولعل هذه العبارة تبرز لنا سؤالاً هو ، هل كل تجمع من الأشياء ـ أو العناصر ـ يحدد مجموعة بالمعنى الرياضي؟ فمثلاً هل يمكن أن نطلق لفظ مجموعة على تجمعات مثل: الأعداد المهمة ، الأشكال الهندسية الجميلة، الأعداد الصحيحة الأكبر بكثير من 10 .إن تحديد هذه التجمعات يتوقف أساساً على وجود إجابة محددة للأسئلة: ما هو العدد المهم؟ وما هو الشكل الهندسي الجميل؟ وماذا نعني بأكبر بكثير من؟.

في الواقع أنه ليست هناك إجابة محددة على كل هذه التساؤلات فإن الجمال والأهمية أمور تختلف من ثقافة لأخرى ومن شخص لآخر ، ومن ثم فإنه لا يمكن أن تحدد عبارات مثل الأعداد المهمة مجموعة بالمعنى الرياضي ، لأننا لا نستطيع الحكم بصفة قاطعة عما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذا التجمع أم لا. وبتعبير آخر إن العبارات السابقة تمثل تجمعات من العناصر غير المعرفة تعريفاً جيداً. وعلى العكس من ذلك فإن عناصر

تجمعات مثل فريق كرة القدم بكلية العلوم بقنا ، وزوايا المثلث ABC والأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 7 معرفة تعريفاً جيداً ، حيث إنه في كل حالة يمكن الحكم بصفة قاطعة أن عنصراً ما ينتمي إلى ذلك التجمع أم لا ، ولذلك فإن كلاً منها تمثل مجموعة بالمعنى الرياضي ، وعلى ذلك يمكننا القول بأن:

"المجموعة: هي تجمع من العناصر المعرفة تعريفاً جيداً".

وسوف نصطلح في هذا المقرر على استخدام الحروف الهجائية الكبيرة للتعبير عن المجموعة فمثلاً قد نعتبر:

X هي مجموعة الأعداد الأولية ..... ,2, 3, 5, 7, 11

Y هي مجموعة الألوان الأخضر والأصفر والأزرق

N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, ...\}$

وكذلك سوف نستخدم الحروف الهجائية الصغيرة للتعبير عن العناصر التي تتكون منها المجموعات. فمثلاً نعتبر المجموعة T هي $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ فإن a عنصر ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً كالآتى :

$a \in T$ وتُقرأ a ينتمي إلى T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\in$ للتعبير عن انتماء عنصر إلى مجموعة ونلاحظ مثلاً أن العنصر g لا ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً:

$g \notin T$ وتُقرأ g لا تنتمي إلى المجموعة T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\notin$ للتعبير عن عدم انتماء عنصر إلى مجموعة.

- **<u>التعبير عن المجموعات Set Formulation</u> :**

توجد طريقتان للتعبير عن المجموعات:

1- <u>طريقة السرد Tabulation Method</u> وتُسمى أيضا طريقة الحصر:

ويتم ذلك بكتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة (إذا كان ذلك ممكناً) أوكتابة بعضها بطريقة توضح كيفية استنتاج بقية العناصر، وتُوضع عناصر المجموعة بين قوسين متوسطين وبين كل عنصرين تُوضع فاصلة "," مثال على ذلك:

$X = \{2, 3, 5, 7, 11\}$,
$Y = \{a, b, c, d, e\}$,
$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

ونلاحظ أننا كتبنا بين القوسين الرموز الدالة على جميع العناصر في كل من المجموعات X,Y أما N فقد كتبنا الرموز الدالة على أربع عناصر فقط إذ

يمكن استنتاج باقي العناصر. ونود أن ننبه إلى أن اختلاف ترتيب العناصر بين القوسين في مجموعة لا يغير من المجموعة.

2- طريقة الخاصية المميزة The Rule Method: ويتم ذلك بإعطاء خاصية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر بحيث يمكن باستخدام هذه الخاصية أن نحدد بطريقة قاطعة ما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذه المجموعة أم لا.

فإذا كانت p خاصية معينة فإن { x : x لها الخاصية p } هي المجموعة التي تتكون من جميع العناصر مثل x حيث x تتمتع بالخاصية p . ونلاحظ هنا أن الرمز ":" يقوم مقام كلمة "حيث" مثال على ذلك:

X= { x : x عدد أولى بين 0 ، 12 } وهذه تعني أن

$X = \{2,3,5,7,11\}$.

- **المجموعة الخالية The Empty Set :**

إذا تأملنا المجموعة { x : x عدد زوجى يقع بين 0 ،1 } فإننا نجد أن هذه المجموعة لا تحتوي على أي عناصر ، ويُقال للمجموعة التي لا تحتوى على أي عناصر بأنها "مجموعة خالية" وسنبرهن فيما بعد أن المجموعة الخالية مجموعة وحيدة. وعادة نستخدم الرمز ϕ ويقرأ "فاي" ليدل على المجموعة الخالية وقد يُستخدم الرمز{ } أحياناً.

- **المجموعات المنتهية والمجموعات اللانهائية :**

يُقال لمجموعة ما إنها منتهية Finite إذا كانت خالية أو كانت تحتوى على عدد محدود n من العناصر حيث إن n عدد صحيح موجب ، وفي غير هذه الحالات يُقال للمجموعة أنها لا نهائية Infinite.

- **تساوي مجموعتين :**

يُقال لمجموعتين Y ، X أنهما متساويتين إذا كانتا تتكونان من نفس العناصر بالضبط بغض النظر عن الترتيب ، أي أن المجموعتين X ، Y تكونان متساويتين إذا كانتا مجرد اسمين لمجموعة واحدة $Y = X$.

ومن تعريف تساوي مجموعتين يتضح أن :

1. إذا كانت $Y = X$ فإن كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y وكل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X.
2. إذا كانت Y, X مجموعتين وكل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X وكل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y فإن $Y = X$.

وإذا كانت المجموعة X لا تساوي المجموعة Y فإننا نعبر عن ذلك بأن نكتب $X \neq Y$.

- **الاحتواء Inclusion :**

يُقال أن المجموعة X مجموعة جزئية Subset من المجموعة Y إذا كان كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y ، ويُكتب "$X\subset Y$" ويُقرأ X مجموعة جزئية من Y. وفي بعض الأحيان يُكتب "$Y\supset X$" وتقرأ "Y تحتوى على X" لتدل على أن المجموعة X مجموعة جزئية من Y وإذا كانت X ليست مجموعة جزئية من Y فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $X \not\subset Y$ (وهذا يعني أن هناك عنصراً واحداً على الأقل ينتمي إلى X ولا ينتمي إلى Y).

تعريف:

يُقال للمجموعة غير الخالية X أنها مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة Y إذا كان $X\subset Y$ ، $X\neq Y$ والنظرية التالية تتضمن الخواص الأساسية لمفهوم الاحتواء.

نظرية(1):

1 ـ لأي مجموعة X يكون $X \subseteq X$.

2 ـ لأي مجموعتين X,Y إذا كان $X\subset Y, Y\subset X$ فإن $X=Y$.

3 ـ لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z إذا كان $X\subset Y, Y\subset Z$ فإن $X\subset Z$.

البرهان: سنبرهن الخاصية الثانية فقط ونترك برهان الخاصيتين الأولى والثالثة للطالب.

بما أن $X\subset Y$ إذاً كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y .
(من تعريف المجموعة الجزئية).
وبما أن $Y\subset X$ إذاً كل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X .
(من تعريف المجموعة الجزئية).
إذاً $X=Y$ (من تعريف تساوي مجموعتين).

نتيجة: المجموعتان X,Y تكونان متساويتين إذا وإذا فقط كان $X\subset Y, Y\subset X$.

"إذا وإذا فقط" تعني أن النتيجة وعكسها صحيحة.

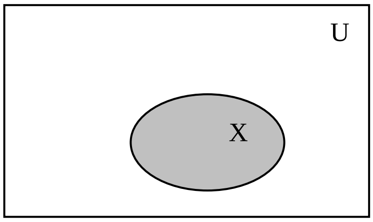
نظرية(2): المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من أي مجموعة.
البرهان: لتكن X أي مجموعة وبفرض أن $\phi \not\subset X$ فهذا يعني أن ϕ تحتوي على عنصر
لا ينتمي إلى المجموعة X ولكن هذا مستحيل لأن المجموعة ϕ لا تحتوي على أية عناصر ، وإذاً $\phi \not\subset X$ فرض خاطئ ، وعلى ذلك فلا بد أن تكون $\phi \subset X$.
نظرية(3): المجموعة الخالية وحيدة.
البرهان: بفرض أن هناك مجموعتين خاليتين هما ϕ_1 , ϕ_2 .
فمن النظرية السابقة تكون ϕ_1 مجموعة جزئية من أي مجموعة ممكن أن تكون ϕ_2 أي أن $\phi_1 \subset \phi_2$.
وبالمثل ϕ_2 مجموعة جزئية من أي مجموعة ولتكن ϕ_1 أي أن $\phi_2 \subset \phi_1$.
ومن نظرية (1) نستنتج أن $\phi_1 = \phi_2$ أي أن المجموعة الخالية وحيدة.
مثال:
إذا كانت المجموعة $X = \{1,2,3\}$ فاكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X.
الحل:
المجموعات الجزئية للمجموعة X هي
$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
ونلاحظ أنه إذا كانتW هي المجموعة التي عناصرها هي كل المجموعات الجزئية للمجموعة X فإن:
$W = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
ونلاحظ أن $X \not\subset W$ وإنما $X \in W$
كما نلاحظ أن $1 \in X$ ولكن $1 \notin W$
وأيضا $\{2\} \notin X$ بينما $\{2\} \in W$
تُسمى المجموعة W بمجموعة المجموعات الجزئية Power set للمجموعة X ويُرمز لها بالرمز $P(X)$ وتُسمى أيضا مجموعة القوى للمجموعة X .

- **المجموعة الشاملة Universal Set :**

إذا كان لدينا عدد من المجموعات فإن المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي على كل عناصر هذه المجموعات ، أو بمعنى آخر أن عناصر هذه المجموعات تنتمي جميعها إلى هذه المجموعة الأم (الشاملة). ويُرمز لها بالرمز U ويمكن تعيين أكثر من مجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات ، ويُفضل تحديد واحدة منها في المسألة.
(اذكر مثال لمجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات؟).

- **أشكال فن Venn Diagram :**

من المفيد دائماً أن يكون لدينا صورة مرئية تمثل محتوى أي مسألة رياضية ، فإن ذلك يساعد على الفهم واقتراح الحلول. لذلك سنمثل دائماً المجموعة الشاملة U بمستطيل في مستوى الورقة على أن نعتبر أن عناصر U هي جميع النقط الواقعة داخل هذا المستطيل وفي هذه الحالة يمكن أن نمثل المجموعات المختلفة بمساحات داخل هذا المستطيل
انظر الشكل:



شكل (1)

تُسمى مثل هذه الأشكال بأشكال فن ويمكن استخدام هذه الأشكال في توضيح العلاقة بين المجموعات المختلفة.
ولكن ينبغى الإشارة إلى أن توضيح مسألة باستخدام أشكال فن لا يمكن أن يُقبل كبرهان لمسائل المجموعات. ويجب التعود على استخدام البرهان المنطقى سواء في برهنة النظريات أو في حل التمارين.

- **التضمين Implication :**

إذا كانت A,B جملتين خبرتين فإن أي واحدة منهما يُحتمل أن تكون صحيحة أو خاطئة. إذا حدث أن صحة الجملة A تستلزم بالضرورة أن تكون الجملة B صحيحة فمعنى هذا أن صحة الجملة A شرط لازم لصحة الجملة B ، أو بعبارة أخرى صحة الجملة B متضمنة في صحة الجملة A

ونكتب ذلك بالصورة الرمزية $A\Rightarrow B$ وتُقرأ A تؤدى إلى B .

مثال: إذا كانت الجملة A هي $x = 3$ وكانت B هي الجملة $x^2 = 9$ في هذه الحالة يكون $A \Rightarrow B$.

وإذا حدث أن $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ فإننا نكتب $B \Leftrightarrow A$ وتُقرأ " A إذا وإذا فقط B " ويُقال في هذه الحالة أن الجملتين A, B متكافئتان.

مثال: $y = 2 \Leftrightarrow 3y + 1 = 7$

وباستخدام مفهوم التضمين يمكننا تعريف احتواء مجموعة لأخرى كما يلي:

$X\subset Y$ إذا كان $a \in X \Rightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

كذلك تعريف تساوي مجموعتين يمكن كتابته كما يلي:

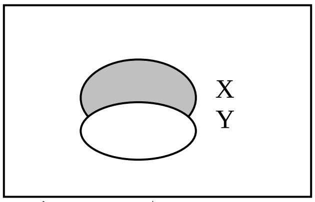
$X = Y$ إذا كان $a \in X \Leftrightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

- **الفروق والمكملات Differences and Complements :**

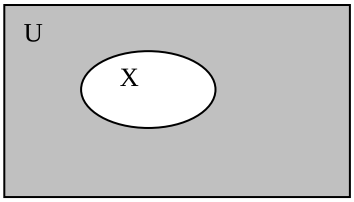
تعريف(1): الفرق بين مجموعتين X,Y هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة X ولا تنتمي إلى المجموعة Y ويُرمز للفرق بين X,Y بالرمز $X - Y$

أي أن $X - Y = \{a : a \in X, a \notin Y\}$

(انظر الشكل) المساحة المظللة تمثل $X - Y$



تعريف(2): إذا كانت $X \subset U$ فإن المجموعة $U - X$ تُسمى مكملة أو متممة المجموعة X بالنسبة للمجموعة الشاملة ، ومجازاً تُسمى "مكملة X" ويُرمز لها بالرمز X^c وأحياناً بالرمز $X^\backslash$ أي أن $X^c = \{a : a \in U, a \notin X\}$ (انظر الشكل):



المساحة المظللة في الشكل السابق تمثل المجموعة X^c (مكملة المجموعة X).

نلاحظ أن لأي عنصر $a \in U$ يكون إما $a \in X$ أو $a \in X^c$

مثال: باعتبار أن Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي المجموعة الشاملة.

(1) أوجد مكملة كل من المجموعات الآتية:

(i) The set of all Even Numbers.

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

(ii) $X = \{x : x \in Z, x < 1\}$.

(iii) $Y = \{y : y \in Z, 4 < y \leq -4\}$.

(2) أوجد: $Z - X^c$ ، $X^c - Y$

الحل: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$

(1) مجموعة الأعداد الزوجية (i) $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots\}$

$\therefore E^c = Z - E = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$.

أي أن مكملة مجموعة الأعداد الزوجية هي مجموعة الأعداد الفردية Odd Numbers.

(ii) $X = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$.

$\therefore X^c = Z - X = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(iii) $Y = \{\dots, -6, -5, -4, 5, 6, 7, \dots\}$.

$\therefore Y^c = Z - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

(2) $X^c - Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z - X^c = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$.

نظرية(4): لأي مجموعة X يكون $(X^c)^c = X$.

البرهان: إذا كان a أي عنصر في المجموعة الشاملة فإن:

$a \in (X^c)^c \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in X.$

لأن أي عنصر إما أن ينتمي إلى المجموعة أو إلى مكملتها،ومن تعريف المجموعة الجزئية:

$\therefore (X^c)^c \subset X.$ (1)

ويكون: $a \in X \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in (X^c)^c$

$\therefore X \subset (X^c)^c.$ (2)

من (1),(2) نستنتج أن:

$(X^c)^c = X$.

<u>ويمكن إثبات نظرية (4) بطريقة جداول الانتماء:</u>

حيث نكون جدول مكون من ثلاث أعمدة هي عمود لكل من $X, X^c, (X^c)^c$
وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوى على المجموعة X

فيكون لدينا احتمالين إما $a \in X$ أو $a \notin X$ فنبدأ بملء الجدول:

بوضع 1 في عمود X إذا كان $a \in X$ ووضع 0 في عمود X إذا كان $a \notin X$
وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول:

X	X^c	$(X^c)^c$
1	0	1
0	1	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأول والثالث متطابقة ،

ومن ثم يكون $(X^c)^c = X$.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

إذا كان X,Y مجموعتين فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمى إلى
إحدى المجموعتين على الأقل تُسمى اتحاد المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز $X\cup Y$
ويُقرأ "X اتحاد Y" ويمكن التعبير رمزياً عن اتحاد المجموعتين X,Y كما يلي:

$$X\cup Y = \{a: a\in X\vee a\in Y\}.$$

حيث "$\vee$" تعني أن $a\in X$ أو $a\in Y$ أو a تنتمي لكل من X,Y .

أما المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة فقط بين المجموعتين X,Y فتمثل تقاطع المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز "$X\cap Y$" وتُقرأ "X تقاطع Y" أي أن :

$$X\cap Y = \{a: a\in X\wedge a\in Y\}.$$

حيث "$\wedge$" تعني أن $a\in X$ و $a\in Y$ (أي تنتمي لكل من X,Y في نفس الوقت).

مثال: إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}\ ,\ Y = \{1, 3, 5, 7\}$

فإن $X\cap Y = \{1, 3\}\ ,\ X\cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

وإذا كانت $X = \{d, e, f\}\ ,\ Y = \{a, b, c\}$ فإن $X\cap Y = \phi$.

ملاحظات: (1) يُقال لمجموعتين X,Y أنهما متباعدتان Disjoint إذا كان:

$$X\cap Y = \phi.$$

(2) إذا كانت U هي المجموعة الشاملة للمجموعة X فإن:

$$X\cup X^c=U\ ,\ X\cap X^c=\phi$$

(3) لأي مجموعتين X,Y يكون:

(i) $a\notin X\cup Y\Leftrightarrow a\notin X\wedge a\notin Y$. (ii) $a\notin X\cap Y\Leftrightarrow a\notin X\vee a\notin Y$.

(iii) $X\subset X\cup Y,\ Y\subset X\cup Y$. (iv) $X\cap Y\subset X\ ,\ X\cap Y\subset Y$.

نظرية(5): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

$$X\subset Y \Leftrightarrow X\cup Y=Y.$$

البرهان: النظرية تنص على أن الجملتين $X\subset Y$، $X\cup Y=Y$ متكافئتان.

أي أنه أولاً: إذا كان $X\subset Y$ فإن $Y=X\cup Y$.

ثانياً: وإذا كان $X\cup Y=Y$ فإن $X\subset Y$.

<u>أولاً: نفرض أن $X\subset Y$ وسنبرهن أن $X\cup Y=Y$ كما يلي:</u>

من الواضح أن:

$$Y\subset X\cup Y. \qquad (1)$$

$a\in X\cup Y \Rightarrow a\in X\vee a\in Y \Rightarrow a\in Y \;\; ; X\subset Y$

$\therefore\ X\cup Y\subset Y. \qquad (2)$

من (1),(2) يكون $X\cup Y=Y$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X\cup Y=Y$ وسنبرهن أن $X\subset Y$:

من الواضح أن:

$X\subset X\cup Y \Rightarrow X\subset Y \;\; ; X\cup Y=Y.$

وهو المطلوب ثانيا.

من أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(6): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

$X\subset Y \Leftrightarrow X\cap Y = X.$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $X\subset Y$ وسنبرهن أن $X\cap Y=X$:

من الواضح أن:

$X\cap Y\subset X. \qquad (1)$

$a\in X\ ,\ X\subset Y \Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \Rightarrow a\in X\cap Y$

$\therefore\ X\subset X\cap Y. \qquad (2)$

من (1),(2) يكون $X\cap Y=X$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X\cap Y=X$ وسنبرهن أن $X\subset Y$:

$a\in X = X\cap Y \Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \Rightarrow a\in Y.$

$\therefore\ X\subset Y.$

وهو المطلوب ثانيا.

ومن أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(7): إذا كانت $X_1\subset X_2\ ,\ Y_1\subset Y_2$ فإن:

(1) $X_1\cup Y_1 \subset X_2\cup Y_2.$

(2) $X_1\cap Y_1 \subset X_2\cap Y_2.$

البرهان:

(1) $a\in X_1\cup Y_1 \Rightarrow a\in X_1\vee a\in Y_1 \Rightarrow a\in X_2\vee a\in Y_2 \;\; ; X_1\subset X_2\ ,Y_1\subset Y_2$

$\therefore\ X_1\cup Y_1 \subset X_2 \cup Y_2.$

(2) $a\in X_1\cap Y_1 \Rightarrow a\in X_1 \wedge a\in Y_1 \Rightarrow a\in X_2 \wedge a\in Y_2 \;\; ; X_1\subset X_2\ ,Y_1\subset Y_2$

$\therefore\ X_1\cap Y_1 \subset X_2\cap Y_2.$

نظرية(8): لأي مجموعة X يتحقق:

(1) $X\cup X = X.$

(2) $X\cap X = X.$

ويُشار إلى هذين القانونين بقانونى اللا نمو Idempotency .

نظرية(9): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

(1) $X \cup Y = Y \cup X.$

(2) $X \cap Y = Y \cap X.$

ويُشار إلى هذين القانونين بقانونى الإبدال Commutative Laws .

نظرية(10): لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

(1) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z).$

(2) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z).$

ويُشار إلى هذين القانونين بقانونى الدمج أو قانوني الترتيب Associative Laws .

نظرية(11): إذا كانت X, Y أي مجموعتين فإن:

$$X - Y^c = X \cap Y.$$

البرهان: باستخدام نتيجة نظرية (1) وهي الطريقة العامة لأي عنصر a من عناصر المجموعة الشاملة ومن تعريف الفرق بين المجموعتين نجد أن:

$a \in (X - Y^c) \Rightarrow a \in X \wedge a \notin Y^c$

$\Rightarrow a \in X \wedge a \in Y$ من تعريف المجموعة المكملة

$\Rightarrow a \in (X \cap Y)$ من تعريف تقاطع مجموعتين

$\therefore\ X - Y^c \subset X \cap Y.$ (1)

وبالعكس يكون:

$$\begin{aligned} a\in(X\cap Y) &\Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \\ &\Rightarrow a\in X \wedge a\notin Y^c \\ &\Rightarrow a\in(X - Y^c) \\ \therefore\ (X\cap Y) &\subset X - Y^c. \qquad (2) \end{aligned}$$

ومن (1),(2) نستنتج أن:

$$(X - Y^c) = (X\cap Y) .$$

ويمكن إثبات ذلك بطريقة جداول الانتماء حيث نكون جدول مكون من خمس أعمدة هي عمود لكل من:

$X, Y, Y^c, (X - Y^c), (X\cap Y)$.

وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوي على المجموعتين X, Y
فيكون لدينا الاحتمالات الآتية:

$a\in X$, $a\in Y$.
$a\in X$, $a\notin Y$.
$a\notin X$, $a\in Y$.
$a\notin X$, $a\notin Y$.

وليس هناك أية احتمالات أخرى.
نبدأ بملء الجدول بأن نضع 1 في عمود X إذا كان $a\in X$ ونضع 0 إذا كان $a\notin X$ وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول الآتي:

X	Y	Y^c	$(X - Y^c)$	$(X \cap Y)$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:

$$(X - Y^c) = X\cap Y .$$

نظرية(12): قانوني دي مورجان De Morgan's Laws :

لأي مجموعتين X, Y يتحقق:

(1) $(X\cap Y)^c = X^c\cup Y^c$.

(2) $(X\cup Y)^c = X^c\cap Y^c$.

البرهان:

سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:

نكون جدول الإنتماء كما يلي:

X	Y	X^c	Y^c	$X\cap Y$	$(X\cap Y)^c$	$(X^c\cup Y^c)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:

$$(X\cap Y)^c = X^c\cup Y^c .$$

وسنبرهن (2) باستخدام الطريقة العامةكما يلي:

(2) إذا كان a عنصر من عناصر المجموعة الشاملة فإن :

$$\begin{aligned} a\in(X\cup Y)^c &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\in X^c\cap Y^c .\end{aligned}$$

$\therefore\ (X\cup Y)^c \subset X^c\cap Y^c .$ (1)

وأيضاً

$$\begin{aligned} a\in(X^c\cap Y^c) &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\in(X\cup Y)^c .\end{aligned}$$

$\therefore\ (X^c\cap Y^c) \subset (X\cup Y)^c .$ (2)

من (1),(2) نستنتج أن

$$(X\cup Y)^c = (X^c\cap Y^c).$$

نظرية(13): قانوني التوزيع Distributive laws :

لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

(1) $X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z)$

(2) $X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$

البرهان:

سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:

X	Y	Z	$X\cap Y$	$X\cap Z$	$Y\cup Z$	$X\cap(Y\cup Z)$	$(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن :

$X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z).$

وسنبرهن (2) بالطريقة العامة كما يلي:

(2) إذا كان a أحد عناصر المجموعة الشاملة فإن:

$a\in(X\cup(Y\cap Z)) \Rightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z).$

فإذا كان:

$a\in X \Rightarrow a\in(X\cap Y),\ a\in(X\cap Z)$

$\Rightarrow a\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z).$

وإذا كان:

$a\in(Y\cap Z) \Rightarrow a\in Y,\ a\in Z$

$\Rightarrow a\in X\cup Y,\ a\in X\cup Z$

$\Rightarrow a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z).$

$\therefore\ X\cup(Y\cap Z)\subset(X\cup Y)\cap(X\cup Z).$ (I)

والعكس نفرض أن:

$a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z) \Rightarrow a\in(X\cup Y)$ (1),

$a\in(X\cup Z)$ (2)

إذا كان $a \notin X$ فإنه من (2) , (1) يكون:

$a\in Y,\ a\in Z \Rightarrow a\in(Y\cap Z).$

$\therefore\ a\in X \vee a\in(Y\cap Z)$

$\therefore\ a\in X\cup(Y\cap Z).$

$\therefore\ (X\cup Y)\cap(X\cup Z)\subset X\cup(Y\cap Z).$ (II)

من (I),(II) يكون :

$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$

ملاحظة: يمكن اختصار الطريقة العامة لإثبات ما سبق كما يلي:

$$\begin{aligned} a\in X\cup(Y\cap Z) &\Leftrightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z) \\ &\Leftrightarrow a\in(X\cap X) \vee a\in(Y\cap Z) \\ &\Leftrightarrow [a\in X \wedge a\in X] \vee [a\in Y \wedge a\in Z] \\ &\Leftrightarrow [a\in X \vee a\in Y] \wedge [a\in X \vee a\in Z] \\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \wedge a\in(X\cup Z) \\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \cap (X\cup Z) \end{aligned}$$

$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$

نتيجة: عملية التقاطع "$\cap$" تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

بينما عملية الإتحاد "$\cup$" لا تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

أي أن لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z يتحقق:

$X\cap(Y-Z) = (X\cap Y)-(X\cap Z).$, $(X-Y)\cap Z = (X\cap Z)-(Y\cap Z).$

$X\cup(Y-Z) \neq (X\cup Y)-(X\cup Z).$, $(X-Y)\cup Z \neq (X\cup Z)-(Y\cup Z).$

تحقق من ذلك؟.

تمرين: باستخدام قوانين التوزيع برهن أن لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

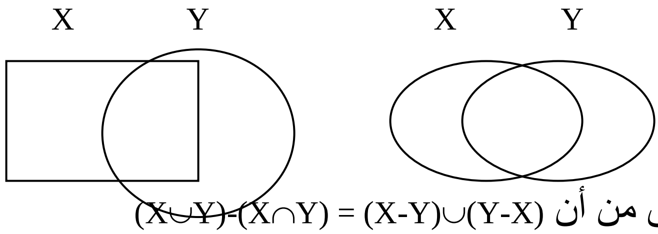
(1) $X\cap(X^c\cup Y) = X\cap Y.$

(2) $X\cup(Y-X) = X\cup Y.$

- **تعريف:** تُعرف مجموعة الفرق المتماثل (أو الاختلاف المتماثل) للمجموعتين X,Y والتي يُرمز لها بالرمز $X\Delta Y$ كما يلي:

$$X\Delta Y = (X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X).$$

وتُمثل كما بالشكل:



تمرين: تحقق من أن $(X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X)$

مثال: إذا كانت $X=\{x : x\in N, 3\le x\le 10\}$, $Y=\{y : y\in N, 5<y<12\}$ فإن $X\Delta Y=\{3,4,5,11\}$ (تحقق من ذلك؟) .

- **تعميم فكرتى الاتحاد والتقاطع Generalization of Union & Intersection:**

يمكن تعميم فكرتى الاتحاد والتقاطع لتشمل أي عدد من المجموعات (سواء كان منتهياً أو غير منته). فإذا كانت $G = \{X, Y, Z, \ldots\}$ عائلة من المجموعات ، أي أن G هي مجموعة عناصرها مجموعات $X, Y, Z, \ldots$ يُعرف اتحاد هذه المجموعات بأنه المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى واحدة على الأقل من هذه المجموعات $X, Y, Z, \ldots$.

ويُرمز لاتحاد هذه المجموعات بالرمز $X \cup Y \cup Z \cup \ldots$

كذلك نعرف تقاطع المجموعات التي تنتمي إلى G بأنه المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين جميع المجموعات $X, Y, Z, \ldots$

ويُرمز لتقاطع هذه المجموعات بالرمز $X \cap Y \cap Z \cap \ldots$

وإذا كان لدينا عدد محدود من المجموعات $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ فإننا نكتب $\cup_{i=1}^{n} X_i$ لاتحاد هذه المجموعات ونكتب $\cap_{i=1}^{n} X_i$ لتقاطع هذه المجموعات.

$\cup_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, some\ i\}$, $\cap_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, all\ i\}.$

- **التجزيء Partition :**

تعريف: يُقال لمجموعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة X أنها تجزيء للمجموعة X إذا كانت هذه المجموعات متباعدة ثنائياً وكان اتحادها هو المجموعة X.

مثال: المجموعة $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}, \ldots\}$ تكون تجزيء لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

كذلك المجموعة $\{\{1,4,7,\ldots\},\{2,5,8,\ldots\},\{3,6,9,\ldots\}\}$ تجزيء آخر لـ N .

بينما المجموعة $\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}, \ldots\}$ ليست تجزيء لـ N .

- **الأزواج (الثنائيات) المرتبة Ordered Pairs :**

ليكن x,y عنصرين في مجموعة . من هذين العنصرين يمكن تكوين ما يُسمى بالزوج المرتب أو الثنائي المرتب ، حيث تُسمى x المركبة الأولى (المسقط الأول) ،وتُسمى y المركبة الثانية (المسقط الثاني) للزوج المرتب . أي أن الزوج المرتب هو مجموعة من عنصرين الترتيب بينهما أساسي ، لذلك يُرمز للزوج المرتب الذي مركبته الأولى x ومركبته الثانية y بالرمز (x,y) .

لاحظ أن $\{x,y\} = \{y,x\}$ في حين أن $(x,y) \neq (y,x)$ ، ويتم التساوي فقط في حالة $x = y$ ، وبوجه عام يمكن القول أن $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

مثال: أوجد x,y إذا علمت أن $(x+2y , 3) = (4 , x+y)$.

الحل: من تعريف تساوي الأزواج المرتبة نجد أن $x+y = 3$, $x+2y = 4$
فبالطرح نجد أن $y = 1$ ، وبالتعويض نجد أن $x = 2$.

- **الحاصل الديكارتي (الضرب الكرتيزي) لمجموعتين**

Cartesian Product of two Sets :

ليكن X,Y مجموعتين غير خاليتين. الحاصل الديكارتي $X\times Y$ هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى تنتمي للمجموعة X ،ومركبتها الثانية تنتمي للمجموعة Y أي أن:

$$X\times Y = \{(x,y) : x\in X \wedge y\in Y\}.$$

مثال(1): ليكن $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ فإن

$A\times B = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)\}$,
$B\times A = \{(x,a), (x,b), (x,c), (y,a), (y,b), (y,c)\}$,
$A\times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$,
$B\times B = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$.

مثال(2): إذا كان $X=\{1,2,3\}$ اكتب $X\times X$.

الحل:

$$X\times X=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

نظرية(14): لأي مجموعات اختيارية A, B, C, D يتحقق:

(i) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.
(ii) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.
(iii) $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$.

الإثبات: سنبرهن (i),(iii) ونترك برهان (ii) للطالب.

(i)
$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(B\cap C) &\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap C\\ &\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge y\in C\\ &\Leftrightarrow (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in A\times C\\ &\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\cap(A\times C).\end{aligned}$$

$\therefore A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

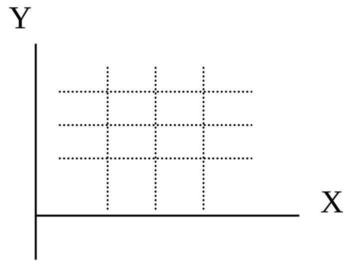
(iii) $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in C\times D$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge x\in C \wedge y\in D$
$\Leftrightarrow x\in A\cap C \wedge y\in B\cap D$
$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).$

$\therefore\ (A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D).$

في بعض الأحيان يُسمى حاصل الضرب الكرتيزي $X\times X$ المربع الكرتيزي ويُرمز له بالرمز X^2 .

- **تمثيل حاصل الضرب الكرتيزى Representation of Cartesian Products :**

يُمثل حاصل الضرب الكرتيزي $X\times Y$ بيانياً برسم محورين المحور الأفقي يمثل عناصر المجموعة X ، والمحور الرأسي يمثل عناصر المجموعة Y ، وتُمثل الأزواج المرتبة (x,y)
(أي عناصر حاصل الضرب الكرتيزي) بنقط في المستوى كما بالشكل:



ملاحظة:

إذا كانت X مجموعة عدد عناصرها m ، وكانت Y مجموعة عدد عناصرها n فإن حاصل الضرب الكرتيزي$X\times Y$ يكون مجموعة عدد عناصرها $m\times n$ (عدد الأزواج المرتبة).

تمارين

1- استخدم طرق التعبير عن المجموعات لتحديد عناصر المجموعات الآتية:

(أ) الأعداد الطبيعية الأقل من 8

(ب) الأعداد الكسرية التي لها البسط يساوي1 ولها المقام الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من7

(ج) الحروف المختلفة المكونة للجملة " مَن جد وجد ومَن زرع حصد " .

2- عبر عن المجموعات الآتية بذكر صفة مشتركة بين عناصر المجموعة:

(أ) { a , e , i , o , u }

(ب) { 10 , 100 , 1000 , 10000 , ...}

(ج) { 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , ...} .

3- عبر عن المجموعات الآتية بطريقة الحصر (السرد):

(أ) X={ x: x is a factor of 6 }

(ب) Y={ y: y is a solution of $y^2=0$ }

(ج) A={ a: a$\in$N, a is odd number,1<a<10}

(د) B={ b: b$\in$N, b is prime number,1<b<12}

حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

4- اعط مثال لمجموعات تحتوي على:

(أ) عنصرين فقط.

(ب) لا تحتوي على عناصر.

(ج) عنصر واحد فقط.

(د) عدد غير محدود من العناصر.

5- بفرض المجموعة{ A = { 3 , 5 , 8 , 9 عبر برموز جبرية عن الآتي:

(أ) 8 عنصر في A

(ب) 4 ليس عنصرا في A

(ج) يوجد فقط ثماني مجموعات جزئية من عناصر A تحتوي العنصر 8

6- حدد أي من المجموعات الآتية تكون منتهية ، وأيها تكون لانهائية:

(أ) $A = \{ x , y , p , q , 6 , 8 \}$

(ب) $B = \{ x : x \text{ is a multiple of } 3 \}$

(ج) مجموعة حروف اللغة العربية

(د) $D = \{ x : x \in R, 0 \le x \le 1\}$ حيث R مجموعة الأعدادالحقيقية.

7- اكتب بعض المجموعات التي تصلح كل منها كمجموعة شاملة للمجموعات:

$A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3,4,5\}$.

8- مالعلاقة بين $1, \{1\}$ ، وبين $\{1, 2, 3\}, \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$

9- بفرض المجموعات:

$A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,5\}$, $E = \{2\}$, $D = \{5, 7, 9\}$.

حدد أي من العبارات الآتية يكون صحيحا ، وأيها خطأ:

(1) $B \subset A$ (2) $E \subset B$ (3) $D \subset A$

(4) $B \in A$ (5) $\phi \subset B$ (6) $\phi \in B$

(7) $E \not\subset A$ (8) $7 \subset D$ (9) $2 = E$

(10) $5 \in A$ (11) $\{5\} \in A$ (12) A finite.

10- اكتب عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لكل من المجموعات الآتية:

(أ) $\{a, b\}$

(ب) $\{a, b, c, d\}$

11- إذا كانت $X = \{a,b,c\}$ بيّن الصواب من الخطأ فيما يلي (وصحح الخطأ):

(1) $\{a\} \in X$ (2) $\{a,b\} \subset P(X)$ (3) $\{\phi\} \in P(X)$

(4) $\{\phi\} = \phi$ (5) $\{a,b\} \subset X$ (6) $\{\{a\}\} \subset X$

(7) $\{d\} \subset P(X)$.

12- بفرض أن $a \in X$, $b \in Y$, $X \subset Y$, $Y \subset Z$

(أ) هل $a \in Z$

(ب) هل $b \in Z$

(ج) هل $a \in Y$

(د) هل كل عنصر من عناصر Z يتطلب أن يكون عنصرا من عناصر كلا من X,Y

(ه) هل كل عنصر من عناصر X يتطلب أن يكون عنصرا من عناصرZ وليسY

13- بفرض أن $A = \{a,b,c,d\}, B = \{c,d,e\}, C = \{c,e,f,g\}, D = \{a,b,e,f\}$
عبر عن المجموعات الآتية:

(i) $A\cup(B\cup C)$.
(ii) $(A\cup B)\cap C$.
(iii) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$.
(iv) $A-B$.
(v) $(A\cup B)-(A\cap B)$.

14- بفرض أن $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$. اكتب عناصر المجموعات الآتية:

(i) $A\times A$. (ii) $A\times B$.
(iii) $B\times A$. (iv) $B\times B$.
(v) $(A\times B)\cup(B\times A)$. (vi) $(A\times A)\cup(B\times A)$.
(vii) $(A\times A)\cup(A\times B)$. (viii) $(A\cup B)\times A$..

15- بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فحدد أي من المجموعات الآتية تكون تجزيئ للمجموعة A وأيها لا تكون (مع ذِكر السبب):

(i) $\{ \{1, 2, 6\}, \{6, 3\} \}$.
(ii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 2\} \}$.
(iii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\} \}$.
(iv) $\{ \{1, 2\},\{3, 4\},\{5, 6\} \}$.

16- لأي ثلاث مجموعات اختيارية A, B, C برهن أن:

(i) $A\cap(B\cap C)^c = (A-B)\cup(A-C)$.
(ii) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$.
(iii) $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$.
(iv) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$.
(v) $(A\times A)\cap(B\times C) = (A\cap B)\times(A\cap C)$.

الباب الثاني
العلاقات Relations

تعريف: إذا كانت X,Y مجموعتان فإن أي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكارتيزي $X \times Y$ تُسمى علاقة $\Re$ بين المجموعتين X,Y.
أي أن $\Re \subseteq X \times Y$ وإذا كان $(a,b) \in \Re$ أو $a\Re b$ يُقال أن a يرتبط بالعنصر b بالعلاقة $\Re$.

ونلاحظ أن:

(1) إذا كان عدد عناصر المجموعة X هو n وكان عدد عناصر المجموعة Y هو m فإن عدد العلاقات المختلفة التي يمكن أن نكونها بين المجموعتين X,Y هو 2^{nm} لأن عدد عناصر المجموعة $X \times Y$ هو nm.
وإذاً عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $X \times Y$ هو 2^{nm}.

(2) تُسمى أي مجموعة جزئية من $X \times X$ بعلاقة على X أو علاقة في X أو علاقة من X إلى X.

(3) إذا كانت $\Re = X \times X$ فإننا نقول أن $\Re$ علاقة ممتلئة Full.

(4) إذا كانت $\Re = \phi$ فإننا نقول أن العلاقة $\Re$ علاقة خالية Empty.

العلاقات الممتلئة والخالية قليلة الأهمية ، ولكن العلاقات الجديرة بالدراسة هي التي تكون فيها $\Re$ مجموعة جزئية فعلية من $X \times Y$ أو من $X \times X$.

مثال(1): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{2, 3, 4, 6\}$ كما يلي:

$$(a,b) \in \Re \Leftrightarrow a \backslash b \quad \forall a,b \in X.$$

($a \backslash b$ تعني أن a تقسم b أو أن b تقبل القسمة على a) فإن مجموعة الثنائيات المرتبة:

$$\{ (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6) \}.$$

تعبر عن هذه العلاقة $\Re$ وواضح أن إحداثيي كل عنصر من هذه المجموعة يجعلان التعبير $a \backslash b$ صحيح. فمثلاً العدد 2 يقسم العدد 2 ، والعدد 3 يقسم العدد 6 ، والعدد 2 يقسم العدد 4 وهكذا ...

نطاق ومدى العلاقة $\Re$ Domain & Range:

إذا كانت $\Re$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y فإننا يمكن أن نميز مجموعتين جزئيتين واحدة من X والأخرى من Y كما يلي:

المجموعة التي تتكون من جميع عناصـر X التي تظهر كإحداثي أول في أحد عناصر $X \times Y$ التي تنتمي إلى $\Re$ تُسمى نطاق العلاقة $\Re$.

والمجموعة التي تتكون من جميع عناصـر Y التي تظهر كأحداثي ثاني في أحد عناصر $X \times Y$ التي تنتمي إلى $\Re$ تُسمى مدى العلاقة $\Re$.

ويُرمز بالرمز $D_\Re$ لنطاق العلاقة R وبالرمز $G_\Re$ لمدى العلاقة $\Re$ أي أن:

$D_\Re = \{x \in X : (x,y) \in \Re\}$, $G_\Re = \{y \in Y : (x,y) \in \Re\}$.

ونلاحظ أن:

$\Re \subseteq D_\Re \times G_\Re \subseteq X \times Y$.

مثال(2): نطاق ومدى العلاقة $\Re$ المعرفة في المثال السابق يكون:

$D_\Re = G_\Re = \{2, 3, 4, 6\}$.

مثال(3): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ كما يلي:

$(a,b) \in \Re \Leftrightarrow a>b \quad \forall a,b \in X.$

فعبر عن $\Re$ كمجموعة ثنائيات مرتبة ، ثم أوجد $D_\Re$, $G_\Re$.

الحل:

$\Re = \{ (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.

$D_\Re = \{2, 3, 4\}$, $G_\Re = \{1, 3, 2\}$.

العلاقات العكسية Inverse Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y فإنه يمكن تعريف علاقة $\Re^{-1}$ من Y إلى X بحيث أن لكل عنصرين $y \in Y, x \in X$ يكون $y\Re^{-1}x$ إذا فقط كان $x\Re y$.

مثال(4): إذا كانت المجموعة X والعلاقة $\Re$ هما الموضحتان في مثال (1) وكانت $\Re^{-1}$ هي العلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ على المجموعة X فإن:

$\Re^{-1} = \{ (2,2), (4,2), (6,2), (3,3), (6,3), 4,4), (6,6)\}$.

لاحظ أن $a\Re^{-1}b$ تعني أن b تقسم a أو أن a يقبل القسمة على b.

تحصيل أو تركيب العلاقات Composition of Relations:

إذا كانت $\Re_1$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y ، وكانت $\Re_2$ علاقة من المجموعة Y إلى المجموعة Z فإنه يمكن تحصيل أو تركيب العلاقة $\Re_2$ مع العلاقة $\Re_1$ لتنتج علاقة من X إلى Z تُعرف كما يلي:

$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{(x,z) : \exists\ y \in Y\ ;(x,y) \in \Re_1\ ,(y,z) \in \Re_2\}.$$

تُسمى $\Re_2 \circ \Re_1$ العلاقة المحصلة أو العلاقة المركبة.

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت:

$$\Re_1 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(2,1)\},\ \ \Re_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}.$$

علاقتين معرفتين على المجموعة A فإن:

$$\Re_1 \circ \Re_2 = \{\ (1,1), (1,3), (1,2), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\ \}\ ,$$
$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{\ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,2), (2,1)\ \}.$$

وواضح أن:

$$\Re_1 \circ \Re_2 \neq \Re_2 \circ \Re_1\ .$$

- **خواص العلاقات :**

أولاً: العلاقة العاكسة Reflective Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة عاكسة (أو علاقة انعكاسية)

إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ a \in A \Rightarrow (a,a) \in \Re.$$

مثال(1): إذا كانت $\Re_1,\Re_2$ علاقتين معرفتين على المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ حيث:

$$\Re_1 = \{\ (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (2,1)\}\ ,$$
$$\Re_2 = \{\ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1)\}.$$

فإن العلاقة $\Re_1$ تكون علاقة عاكسة وذلك لأن $\forall\ a \in A \Rightarrow a\Re a$

بينما العلاقة $\Re_2$ ليست علاقة عاكسة وذلك لأن $3 \in A\ , (3,3) \notin \Re_2$.

نتيجة: يمكن تعريف عدد 2^{n^2-n} من العلاقات العاكسة على المجموعة A والتي تحتوي على عدد n من العناصر.

وذلك لأن عدد عناصر مجموعة حاصل الضرب الكرتيزي AxA هو n^2.
وعدد العناصر التي على الصورة (a,a) هو n وهذه العناصر يجب أن تدخل في تكوين أي علاقة عاكسة.
وعدد بقية العناصر يكون n^2-n. وهذه العناصر يمكننا إضافة أي مجموعة جزئية منها إلى العناصر n الأولى فنحصل على علاقة عاكسة.
وكما نعلم أن عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من $n^2 - n$ من العناصر هو 2^{n^2-n}
وإذاً عدد العلاقات العاكسة التي يمكن تكوينها على المجموعة A التي عدد عناصرها nيكون 2^{n^2-n}.

ثانياً: العلاقة المتماثلة Symmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة تماثل (أو علاقة تناظرية
أو علاقة متماثلة) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\in\Re.$$

مثال(2): إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$ وكانت العلاقة $\Re$ هي:

$$\Re = \{ (1,1), (1,3), (1,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\}.$$

هل $\Re$ علاقة متماثلة أم لا ؟.

الحل: نجد أن

$$(1,1),(1,1)\in\Re\ ,\ (1,3),(3,1)\in\Re\ ,\ (1,4),(4,1)\in\Re\ ,\ (3,3),(3,3)\in\Re\ ,$$
$$(3,4),(4,3)\in\Re,\ (4,4),(4,4)\in\Re.$$

أي أن $\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\in\Re$ ومن ثم تكون $\Re$ علاقة متماثلة.

مثال(3): إذا كانت X هي مجموعة المستقيمات المرسومة في المستوى ،
وكانت $\perp$ هي علاقة "عمودي على" معرفة على المجموعة X.
فإننا نلاحظ أن لكل $L\in X$ لا يمكن أن يكون $L\perp L$.
وإذاً العلاقة $\perp$ ليست علاقة عاكسة.
وإذا كان L_1,L_2 خطين مستقيمين في الجموعة X فإن:

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow L_2 \perp L_1.$$

وإذاً العلاقة $\perp$ تكون علاقة متماثلة.

ثالثاً: العلاقة المتخالفة Asymmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة متخالفة (أو علاقة تخالفية)
إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$$

نلاحظ أن العلاقة المتخالفة لا يمكن أن تحتوي على أي عنصر على الصورة (a,a)
حيث $a\in A$ وعلى ذلك فالعلاقة المتخالفة لا يمكن أن تكون علاقة عاكسة.

مثال(4): إذا كانت $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ علاقات معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3\}$ حيث:

$$\Re_1 = \{\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3)\}.$$
$$\Re_2 = \{\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (2,3)\}.$$
$$\Re_3 = \{\ (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3)\}.$$

فإن العلاقة $\Re_1$ متخالفة وذلك لأن $\forall\ (a,b)\in \Re_1 \Rightarrow (b,a)\notin \Re_1$ ، بينما العلاقة $\Re_2$ ليست متخالفة وذلك لأن $(1,2),(2,1)\in\Re_2$ ، وكذلك العلاقة $\Re_3$ ليست متخالفة ، وذلك لأن $(1,1)\in\Re_3$.

رابعاً: العلاقة عكسية التماثل Anti-Symmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة عكسية التماثل (أو علاقة متخالفة التماثل) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re\ ,\ a \neq b \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$$

أو إذا تحقق الشرط:

$$\text{If } (a,b)\in\Re \text{ and } (b,a)\in\Re \Rightarrow a = b.$$

مثال(5): إذا كانت $\Re_1$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N
كما يلي: $(a,b)\in\Re_1 \Leftrightarrow b = a^2\ \ \forall\ a,b\in N$

$$\therefore \Re_1 = \{\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9),\ (4,16),\ \ldots\}.$$

وتكون العلاقة $\Re_1$ عكسية التماثل وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re_1\ ,\ a \neq b \Rightarrow (b,a)\notin\Re_1.$$

ولكنها ليست متخالفة وذلك لأن $(1,1)\in\Re_1$.

وإذا كانت $\Re_2 = \Re_1 - \{(1,1)\}$ فإن العلاقة $\Re_2$ تكون علاقة عكسية التماثل ، وتكون $\Re_2$ أيضاً علاقة متخالفة (تحقق من ذلك؟).

خامساً: العلاقة الناقلة Transitive relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة ناقلة (أو علاقة متعدية)
إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \text{ and } (b,c)\in\Re \Rightarrow (a,c)\in\Re.$$

مثال(6): إذا كانت $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ علاقات معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3\}$ حيث:

$$\Re_1 = \{ (1,1), (2,2), (3,3)\} ,$$
$$\Re_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1)\} ,$$
$$\Re_3 = \{ (1,2), (1,3)\}.$$

فإن العلاقة $\Re_1$ تكون علاقة ناقلة وذلك لأن $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re_1 \Rightarrow (a,c)\in\Re_1$
بينما العلاقة $\Re_2$ ليست علاقة ناقلة وذلك لأن $(3,1),(1,2)\in\Re_2\ , (3,2)\notin\Re_2$
والعلاقة $\Re_3$ تكون علاقة ناقلة وذلك لعدم وجود ما يمنع ذلك.

مثال(7): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كمايلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow b = a^n \quad \forall a,b,n\in N.$$

فإن العلاقة $\Re$ تكون كما يلي:

$$\Re = \{ (1,1), (2,2), (2,4), (2,8), \ldots$$
$$, (3,3), (3,9), (3,27), \ldots\ldots.$$
$$, (4,4), (4,16), (4,64), \ldots...$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\}.$$

والعلاقة $\Re$ تكون علاقة ناقلة وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re,\ (b,c)\in\Re \Rightarrow b = a^n\ , c = b^m \quad ; n,m\in N.$$
$$\Rightarrow c = b^m = (a^n)^m = a^{nm} = a^r\ ; r = nm\in N$$
$$\Rightarrow (a,c)\in\Re$$

ومن الواضح أن العلاقة $\Re$ تكون عكسية التماثل، وليست متخالفة (تحقق من ذلك؟).

أمثلة عامة:

مثـــال(1): ادرس خصـــائص العلاقـــة $\Re$ المعرفـــة علـــى مجموعـــة الأعـــداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a/b\in N \quad \forall a,b\in N.$$

الحل:

(1) العلاقة $\Re$ عاكسة وذلك لأن:

$$\forall\ a\in N,\ a/a = 1\in N \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

(2) العلاقة $\Re$ ليست متماثلة وذلك لأن:

$$(6,2)\in\Re\ ;\ 6/2 = 3\in N\ ,\ (2,6)\notin\Re\ ;\ 2/6 = 1/3\notin N.$$

(3) العلاقة $\Re$ ليست متخالفة وذلك لأن:

$$(1,1)\in\Re$$

(4) العلاقة $\Re$ عكسية التماثل وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,\ a \neq b &\Rightarrow a/b\in N\ ;\ a/b \neq 1.\\ &\Rightarrow b/a\notin N\\ &\Rightarrow (b,a)\notin\Re.\end{aligned}$$

(5) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,\ (b,c)\in\Re &\Rightarrow a/b\in N,\ b/c\in N\\ &\Rightarrow (a/b)(b/c)\in N\\ &\Rightarrow a/c\in N\\ &\Rightarrow (a,c)\in\Re.\end{aligned}$$

مثال(2): إذا كانت $\Re$ هي العلاقة المعرفة على N كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a/b\in Q \quad \forall\ a,b\in N.$$

(حيث Q هي مجموعة الأعداد النسبية) فادرس خصائص هذه العلاقة؟.

الحل:

(1) العلاقة $\Re$ عاكسة وذلك لأن:

$$\forall\ a\in N\ ;\ a/a\in Q \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

(2) العلاقة $\Re$ متماثلة وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow a/b\in Q \Rightarrow b/a\in Q \Rightarrow (b,a)\in\Re$$

(3) العلاقة $\Re$ ليست متخالفة وذلك لأن $(1,1)\in\Re$

(4) العلاقة $\Re$ ليست عكسية التماثل وذلك لأن:

$1,2\in N,\ 1\neq 2\ ,(1,2),(2,1)\in\Re.$

(5) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a/b,b/c\in Q \Rightarrow (a/b)(b/c) = a/c\ \in Q \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

مثال(3): ادرس العلاقة $\Re$ المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow (a-b)/3\in N \quad \forall a,b\in N.$

(من حيث كونها: عاكسة – متماثلة – ناقلة).

الحل:.

(1) العلاقة $\Re$ ليست عاكسة وذلك لأن:

$1\in N,\ (1,1)\notin\Re\ ;(1-1)/3 = 0/3 = 0\notin N.$

(2) العلاقة $\Re$ ليست متماثلة وذلك لأن:

$(6,3)\in\Re\ ;(6-3)/3 = 1\in N\ ,\ (3,6)\notin\Re\ ;(3-6)/3 = -3/3 = -1\notin N.$

(3) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,(b,c)\in\Re &\Rightarrow (a-b)/3\in N,\ (b-c)/3\in N.\\ &\Rightarrow (a-b)/3+(b-c)/3\in N.\\ &\Rightarrow (a-c)/3\in N.\\ &\Rightarrow (a,c)\in\Re.\end{aligned}$$

ملاحظة: يمكن إعادة صياغة العلاقة $\Re$ السابقةكما يلي:

$$\begin{aligned}(a,b)\in\Re &\Leftrightarrow a - b = 3n\ \ ;\ n\in N.\\ &\Leftrightarrow a = b + 3n\ \ ;\ n\in N.\end{aligned}$$

علاقة التكافؤ وفصول التكافؤ :

Equivalence Relation and Equivalence Classes:

تعريف(1): إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A ، وكانت $\Re$ عاكسة ومتماثلة وناقلة فإنها تُسمى **علاقة تكافؤ**.

وعلاقة التساوي على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N تُعتبر علاقة تكافؤ حيث:

(1) $\forall\ a\in N\ ;\ a = a \Rightarrow (a,a)\in\Re.$

(2) $\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow a = b \Rightarrow b = a \Rightarrow (b,a)\in\Re.$

(3) $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a = b,\ b = c \Rightarrow a = c \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عاكسة ومتماثلة وناقلة ، ومن ثم تكون علاقة تكافؤ.

وبالمثل علاقة التساوي على أي مجموعة من الأعداد تكون علاقة تكافؤ.

مثال(1): إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow (a-b)/n\in Z\ \ ;\ n\in N\ ,\ n\geq 2.$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ.

<u>الحل</u>:

(1) $\forall\ a\in Z\ ;(a-a)/n = 0\in Z \Rightarrow (a,a)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة عاكسة.

(2) $\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (a-b)/n\in Z \Rightarrow (b-a)/n\in Z \Rightarrow (b,a)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة متماثلة.

(3) $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow (a-b)/n\in Z,(b-c)/n\in Z.$

$\Rightarrow (a-b)/n+(b-c)/n\in Z.$

$\Rightarrow (a-c)/n\in Z.$

$\Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة ناقلة.

ومن ثم تكون العلاقة $\Re$ علاقة تكافؤ.

تُسمى هذه العلاقة <u>علاقة التطابق بمقياس العدد الصحيح n</u> ، وتُكتب $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$

تعريف(2): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A . يُعرف **فصل التكافؤ** للعنصر $x\in A$ بأنه المجموعة:

$$[x] = \{y\in A : (x,y)\in\Re\}.$$

مثال(2): أوجد فصول التكافؤ للعلاقة $\Re$ المعرفة على Z كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 5.$$

الحل: فصول التكافؤ لهذه العلاقة تكون هي:

$$[0] = \{\ldots,-10, -5, 0, 5,10, \ldots\}.$$
$$[1] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}.$$
$$[2] = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}.$$
$$[3] = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}.$$
$$[4] = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.$$

وبذلك يكون $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$.

أي أنه تُوجد خمسة فصول تكافؤ فقط لعلاقة التكافؤ $\Re$ وهي $[0], [1], [2], [3], [4]$ ونلاحظ أن كل فصل تكافؤ يتكون من عناصر تتميز بخاصية مشتركة وهي أن باقي قسمة أي عدد منها على العدد الصحيح 5 له نفس الباقي الموجب، ونلاحظ أيضاً كل فصلين منها منفصلان (أي أن تقاطعهما هو المجموعة الخالية) واتحادهم جميعاً يُعطي المجموعة Z ومن ثم تكون مجموعة فصول التكافؤ هذه تجزيء للمجموعة Z .

مثال(3): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow (a-b)/3\in Z \quad \forall a,b\in X.$$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ ، ثم تحقق من أن مجموعة فصول التكافؤ لهذه العلاقة تكون تجزيء للمجموعة X.

الحل: العلاقة $\Re$ تكون هي:

$$\Re = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(0,3),(3,0),(0,6),(6,0),$$
$$(1,4),(4,1),(1,7),(7,1),(3,6),(6,3),(4,7),(7,4),(2,5),(5,2)\}.$$

واضح أن $\Re$ علاقة تكافؤ حيث إنها علاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة (تحقق من ذلك؟).

وفصول التكافؤ تكون هي:

$[0] = \{0, 3, 6\} = [3] = [6].$
$[1] = \{1, 4, 7\} = [4] = [7].$
$[2] = \{2, 5\} = [5].$

أي أنه يوجد ثلاثة فصول تكافؤ فقط هي$\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5\}$.

ومجموعة فصول التكافؤ $\{\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5\}\}$ تكون تجزيء للمجموعة X حيث إنها متباعدة ثنائياً واتحادها جميعا يساوي المجموعة X .

نظرية(1): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن:

$$b\in[a] \Leftrightarrow a\in[b] \quad \forall a,b\in A.$$

البرهان:

$$b\in[a] \Leftrightarrow b\in\{y\in A :(a,y)\in\Re\}$$
$$\Leftrightarrow (a,b)\in\Re \Leftrightarrow (b,a)\in\Re \Leftrightarrow a\in\{y\in A :(b,y)\in\Re\} \Leftrightarrow a\in[b].$$

نظرية(2): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن $a\in[a]\ \forall a\in A$.

البرهان: حيث إن $\Re$ علاقة تكافؤ فهي عاكسة ومن ثم يكون:

$$\forall a\in A \Rightarrow (a,a)\in\Re \Leftrightarrow a\in[a].$$

نظرية(3): إذا كان فصلي التكافؤ $[a],[b]$ متقاطعين فإن $[a] = [b]$.

البرهان:

$$\text{let } c\in[a]\cap[b] \Leftrightarrow c\in[a],\ c\in[b].$$
$$\Leftrightarrow (a,c)\in\Re,\ (b,c)\in\Re.$$
$$\Leftrightarrow (a,c)\in\Re,\ (c,b)\in\Re.$$
$$\Leftrightarrow (a,b)\in\Re.$$
$$\text{let } d\in[a] \Leftrightarrow (a,d)\in\Re,\ (a,b)\in\Re.$$
$$\Leftrightarrow (b,a)\in\Re,\ (a,d)\in\Re$$
$$\Leftrightarrow (b,d)\in\Re$$
$$\Leftrightarrow d\in[b].$$
$$\therefore [a] = [b].$$

وبذلك فإن أي فصلين تكافؤ إما متساويين أو غير متقاطعين.

ولذلك إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإنه يمكن كتابة A على صورة اتحاد مجموعة غير متقاطعة من فصول التكافؤ للعلاقة $\Re$ أي أن:

$$A = \bigcup_{a\in A}[a].$$

ولذلك يُقال أن فصول التكافؤ تجزىء المجموعة إلى أجزاء غير متقاطعة.

علاقة الترتيب الجزئي Partial Ordering:

تعريف(1): إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على المجموعة A بحيث يكون:

1 - $\Re$ عاكسة.

2 – $\Re$ عكسية التماثل.

3 – $\Re$ ناقلة.

فإن $\Re$ تُسمى **علاقة ترتيب جزئي**. يُرمز أحياناً لعلاقة الترتيب الجزئي بالرمز " $\leq$ " .

مثال(1): إذا كانت $\Re$ هي العلاقة $\leq$ (أقل من أو تساوي) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة N . فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الحل: يمكن التعبير عن العلاقة $\Re$ كما يلي: $\forall a,b\in N \; (a,b)\in\Re \Leftrightarrow a\leq b$

$$(1)\ \forall\ a\in N\ ;\ a\leq a \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

وإذاً العلاقة $\Re$ عاكسة.

$$(2)\ \forall\ (a,b)\in\Re,\ a\neq b \Rightarrow a<b \Rightarrow b>a \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$$

وإذاً العلاقة $\Re$ عكسية التماثل.

$$(3)\ \forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a\leq b,\ b\leq c \Rightarrow a\leq c \Rightarrow (a,c)\in\Re.$$

وإذاً العلاقة $\Re$ ناقلة.

وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب جزئي على N .

مثال(2): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة P(A) للمجموعة المنتهية A كمايلي:

$$(X,Y)\in\Re \Leftrightarrow X\subseteq Y \quad \forall\ X,Y\in P(A).$$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

<u>الحل</u>:

$(1)\ \forall\ X\in P(A)\ ;\ X\subseteq X \Rightarrow (X,X)\in\Re.$

وإذاً R علاقة عاكسة.

$(2)\ \forall\ (X,Y)\in\Re,\ X\neq Y \Rightarrow X\subset Y \Rightarrow Y\not\subset X \Rightarrow (Y,X)\notin\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة عكسية التماثل.

$(3)\ \forall\ (X,Y)\in\Re,\ (Y,Z)\in\Re \Rightarrow X\subseteq Y,\ Y\subseteq Z \Rightarrow X\subseteq Z \Rightarrow (X,Z)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة ناقلة. وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب جزئي .

تعريف(2): <u>علاقة الترتيب الفعلي (أو الترتيب الدقيق)</u> <u>Strict Order Relation</u> **:**

إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على المجموعة A بحيث يكون:

1 - $\Re$ عكسية التماثل.

2 – $\Re$ ناقلة.

فإن $\Re$ تُسمى **علاقة ترتيب فعلي**. يُرمز أحياناً لعلاقة الترتيب الفعلي بالرمز " < " .

مثال: إذا كانت $\Re$ هي العلاقة > (أقل من) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة N

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب فعلي.

<u>الحل</u>**:** يمكن التعبير عن العلاقة $\Re$ كما يلي: $(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a<b\ \forall a,b\in N$

$(1)\ \forall\ (a,b)\in\Re,\ a\neq b \Rightarrow a<b \Rightarrow\ b>a\ \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عكسية التماثل.

$(2)\ \forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a<b,\ b<c \Rightarrow a<c\ \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ ناقلة. وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب فعلي على N .

تعريف(3): لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة $\Re$ ، ونفرض أن $B\subset A$.

إذا وُجد عنصر $l\ \in A$ بحيث يكون $b\,\Re\, l$ لجميع العناصر $b\ \in B$.

فإن l يُسمى **حداً سفليا** lower bound للمجموعة B ، وإذا وُجد عنصر $u\ \in A$ بحيث يكون $u\,b\,\Re$ لجميع عناصر $b\ \in B$.فإن u يُسمى **حداً علوياً** upper bound للمجموعة B.

لاحظ أن إننا لم نشترط أن l أو u تنتمي إلى B ولكنها بالطبع عناصر من A.

تعريف(4): إذا كانت $\Re$ علاقـة ترتيـب جزئـي معرفة على المجموعة A وكانت B مجموعة جزئية من A وكان العنصـر l^* يحقق أنه حداً سـفلياً للمجموعة B ويحقق الشرط لأي حد سفلي آخر l للمجموعة B أن $l\, l^* \Re$ فإن l^* يُسمى **أكبر حد سفلي** ويُرمز له بالرمز l^*=inf B ، وإذا كان العنصر u^* يحقق أنه حداً علوياً للمجموعة B

ويحقق الشرط لأي حد علوي آخر u للمجموعة B أن $u\, u^* \Re$ فإن u^* يُسمى **أصـغر حد علوي** ، ويُرمز له بالرمز u^* = sup B .

تعريف(5): إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A وكانت $B \subset A$ وكان l^* هو أكبر حد سفلي لهذه المجموعة بحيث $l^* \in B$ فإن l^* يُسمى **الحد الأدنى** للمجموعة B ، ويُرمز له بالرمز l^* = min B .

وإذا كان u^* هو أصغر حد علوي لهذه المجموعة بحيث $u^* \in B$. فإن u^* يُسمى **الحد الأعظم** ، ويرمز له بالرمز u^* = max B .

ملاحظة: إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A وكانت $B \subset A$ ، وكانت المجموعة B مجموعة محدودة فإن inf B = min B , sup B = max B .

تعريف(6): إذا كانت $\Re$ هي علاقـة ترتيب جزئـي على المجموعة L وكانت M مجموعة جزئية من L تحتوي على الأقل على عنصرين. فإن المجموعة L تُسمى **شـبكة** Lattice إذا كان للمجـموعة الجزئيـة M أكبر حد سـفلي ، وأصـغر حد علوي

(أي يوجد inf M , sup M) ، فإذا كانت M={a,b} فإن:

$$\inf M = a\wedge b \;,\; \sup M = a\vee b \,.$$

وتُسمى $\wedge$ عملية التقاطع أو التلاقي (meet)،وتُسمى $\vee$ عملية الإتحاد أو الوصل(join)

تعريف(7): يُقال عن الشبكة L أنها **شـبكة مكتملة** (Complete Lattice) إذا كان لكل مجموعة جزئية منها أصغر حد علوي.

تعريف(8): يُقال عن الشبكة L أنها **شبكة توزيعية** (Distributive Lattice) إذا كان لكل $a,b,c \in L$ يتحقق: $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$, $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

أمثلة: مجموعة الأعداد الصحيحة تمثل شبكة ليست مكتملة (حيث أنها مرتبة جزئياً بالنسبة للعلاقة " $\leq$" ولا يوجد لكل مجموعة جزئية منها أصغر حد علوي).
أما مجموعة القوى $P(X)$ للمجموعة الإختيارية X تمثل شبكة مكتملة وشبكة توزيعية (حيث أنها مرتبة جزئياً بالنسبة للعلاقة " $\subseteq$" ، وأي مجموعة جزئية منها يكون لها أصغر حد علوي ، وعمليتي الإتحاد والتقاطع يتوزعان على بعضهما البعض).
ولمفهوم الشبكات تطبيقات هامة كما في مجال الهواتف،والحاسبات،والأقمار الصناعية.

تمارين

1- إذا كان a عمره 70 سنة، وله ابن c عمره 40 سنة ، وابنه d عمرها 36 سنة لها ابن e عمره 10 سنوات ، وكان b عمره 65 سنة وهو أخ لـ a .
عبر عن العلاقات الآتية كثنائيات مرتبة:
(أ) العلاقة $\mathfrak{R}_1$ علاقة " أكبر من".
(ب) العلاقة $\mathfrak{R}_2$ علاقة " أخوة ".
(ج) العلاقة $\mathfrak{R}_3$ علاقة " أبوة وبنوة ".
(د) العلاقة $\mathfrak{R}_4$ علاقة " جد وحفيد ".

2- أسرة مكونة من ثلاثة أخوة b_1, b_2, b_3 ، وأختين s_1, s_2 .
عبر عن العلاقات الآتية كثنائيات مرتبة:
(أ) العلاقة $\mathfrak{R}_1$ علاقة " أخت لـ ".
(ب) العلاقة $\mathfrak{R}_2$ علاقة " أخ لـ ".

3- اختبر أي من العلاقات الآتية تكون (عاكسة – متماثلة – عكسية التماثل- ناقلة – علاقة تكافؤ – علاقة ترتيب جزئي):
(أ) علاقة "يوازي" على مجموعة الخطوط المستقيمة في المستوى.
(ب) علاقة "يتعامد مع" على مجموعة الخطوط المستقيمة في المستوى.
(ج) علاقة "أكبر من أو يساوي" على مجموعة الأعداد الطبيعية.
(د) علاقة "أب لـ" على مجموعة أعضاء أسرة ما.
(هـ) علاقة "أخ لـ" على مجموعة أعضاء أسرة ما.

4- لتكن العلاقات $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ معرفة على المجموعة $A=\{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$\mathfrak{R}_1=\{ (1, 3), (2, 4), (1, 1), (4, 3), (4, 4), (3, 1) \}$,
$\mathfrak{R}_2=\{ (2, 4), (1, 1), (3, 1), (4, 3) \}$,
$\mathfrak{R}_3=\{ (2, 3), (1, 2), (3, 4), (4, 1) \}$,
$\mathfrak{R}_4=\{ (1, 4), (2, 2), (3, 2) \}$

فاوجد العلاقات المحصلة $\mathfrak{R}_2 o \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_3 o \mathfrak{R}_2 , \mathfrak{R}_4 o \mathfrak{R}_3 , \mathfrak{R}_3 o \mathfrak{R}_4$.

5- عبر عن العلاقات الآتية كثنائيات مرتبة من $N\times N$ حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، ثم ادرس خصائص كلا منها:

(i) $\mathfrak{R}=\{ (x,y) : x<y \}$.
(ii) $\mathfrak{R}=\{ (x,y) : x\neq y \}$.
(iii) $\mathfrak{R}=\{ (x,y) : x\neq y, y=2 \}$.
(iv) $\mathfrak{R}=\{ (x,y) : x+2y=12 \}$.

6- بفرض أن $X=\{1,2,3\}$ ، والعلاقة $\Re$ معرفة على $P(X)$ كما يلي:

$$A\Re B \Leftrightarrow \#(A) = \#(B) \quad \forall\ A,B\in P(X)$$

حيث $\#(A)$ يرمز لعدد عناصر A . فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ.
ثم حدد فصول التكافؤ بالنسبة لهذه العلاقة.

7- بفرض C هي مجموعة الأعداد المركبة ، والتي الجزء الحقيقي لكل منها لا يساوي الصفر. تحقق من أن العلاقة $\Re$ المعرفة على المجموعة C كما يلي:

$$(a+ib)\Re(c+id) \Leftrightarrow ac>0$$

تكون علاقة تكافؤ.

8- إذا كانت $\Re$ هي العلاقة المعرفة على المجموعة N كما يلي:

$$(x,y)\in\Re \Leftrightarrow y/x\in N.$$

فتحقق من أن العلاقة $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الباب الثالث

الرواسم Mappings (Functions)

تعريف: إذا كانت A,B مجموعتين فإن العلاقة f من المجموعة A إلى المجموعة B تُسمى راسم أو رابط أو تطبيق من A إلي B إذا كان:

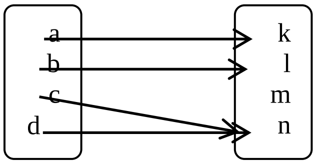
$\forall\ a\in A\ \ \exists|\ \ b\in B\ ;\ afb.$

أي أن لكل عنصر من عناصر المجموعة A يوجد عنصر وحيد من عناصر المجموعة B يرتبط معه بالعلاقة f ويُكتب $f : A \to B$ ويكون $f(a) = b$ حيث $a\in A\ ,\ b\in B$.

وعلى ذلك يمكن القول بأن الراسم من مجموعة إلى أخرى هو علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

مثال(1): في الشكل التوضيحي التالي العلاقة f من المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$ إلى المجموعة $B = \{k, l, m, n\}$ تمثل راسم حيث:

$$f = \{(a,k),(b,l),(c,n),(d,n)\}$$



واضح أن كل عنصر من عناصر المجموعة A يرتبط بعنصر وحيد من عناصر المجموعة B.

مثال(2): إذا كانت f علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R كما يلي:

$f : R \to R\ ,\ f(x) = x^2\ \ \forall\ x\in R.$

فإن f تُعتبر راسم من R إلى R حيث لكل $x\in R$ يوجد x^2 وحيدة تنتمي إلى R.

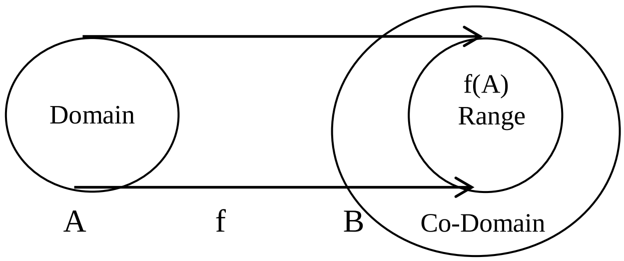
مثال(3): إذا كانت X مجموعة منتهية ، وكانت P(X) مجموعة كل المجموعات الجزئية من X ، وكانت f علاقة معرفة كما يلي:

$f : P(X) \to Z^+\ ,\ f(S) = |\,S\,|\ \ \ \forall\ S\in P(X).$

حيث | S | هو عدد عناصر المجموعة S وحيث Z^+ هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. فإن العلاقة f تُعتبر راسم من P(X) إلى Z^+ حيث إن كل عنصر (مجموعة) من عناصر P(X) يوجد بداخله عدد وحيد من العناصر وهو | S | ينتمي إلى Z^+ .

نطاق ومدى الراسم:

إذا كان f راسم من A إلى B وكان $b = f(a)$ فإن b تُسمى صورة a بالراسم f (Image of a by f)، وتُسمى المجموعة A بنطاق الراسم أو مجال الراسم Domain ويُسمى B بالنطاق المصاحب أو المجال المقابل Co-domain وتُسمى المجموعة التى تمثل صورة المجال بمدى الراسم (Range of f) .



ملاحظة: مدى الراسم يكون مجموعة جزئية من المجال المقابل.

مثال: أوجد المجال والمجال المقابل والمدى للراسم $f : R \to R$ حيث $f(x) = x^2$.

<u>الحل</u>**:** المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية R ، والمدى $f(R)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة R^* .

- **<u>تساوى راسمين:</u>**

إذا كان $f : A \to B$, $g : X \to Y$ راسمين فإن الراسمين f, g يكونا متساويين ويُكتب $f = g$ إذا وإذا فقط كان لهما نفس المعالم (المجال والمجال المقابل والمدي).

أي يكون:

$$A = X,\ B = Y\ ,\ f(a) = g(a)\ \ \forall\ a \in A.$$

- **أنواع الرواسم Types of Mappings :**

(1) الراسم الأحادي (One to One or Injective) :

يُقال للراسم $f : A \to B$ أنه راسم أحادي أو متباين من A إلى B إذا كانت العناصر المختلفة من مجموعة المجال لها صور مختلفة في مجموعة المجال المقابل أي أن:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \quad \forall\ a,b \in A.$$

بمعنى أن (إذا تساوت الصور تساوت الأصول):

$$\text{If } a \neq b \text{ in } A \ \Rightarrow\ f(a) \neq f(b) \text{ in } B.$$

(2) الراسم الفوقي (Onto or Surjective) :

يُقال أن f راسم فوقي أو غامر أو شامل من A إلى B إذا كان مدى الراسم f يساوي المجال المقابل B. أي أن كل عنصر من عناصر B يكون له أصل في A.

أي أن:

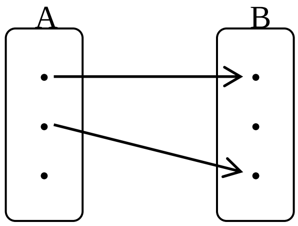
$$\forall\ b \in B\ \ \exists\ a \in A\ ;\ f(a) = b.$$

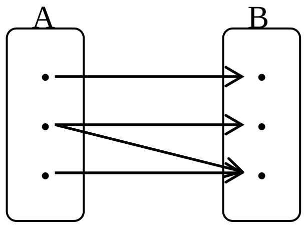
(3) الراسم أحادي التناظر (Bijective or One to One Correspondence) :

يُقال للراسم $f : A \to B$ أنه أحادي التناظر أو تناظر أحادي أو تقابل من A إلى B إذا كان f راسم أحادي وفوقي في نفس الوقت. أي يكون لكل عنصر في A صورة وحيدة في B ، ولكل عنصر في B أصل وحيد في A.

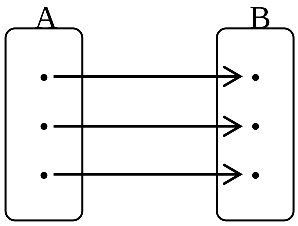
- **<u>أمثلة توضيحية (انظر المخططات السهمية الآتية):</u>**

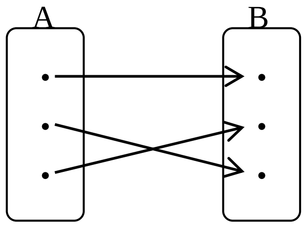
(1) علاقات وليست رواسم:



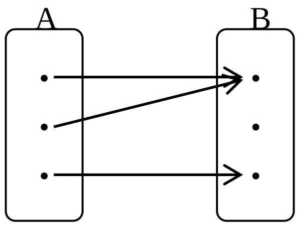


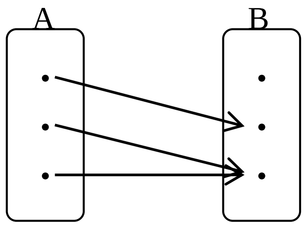
(2) رواسم أحادية:



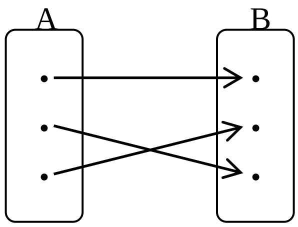


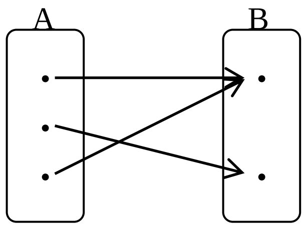
(3) رواسم ليست أحادية:



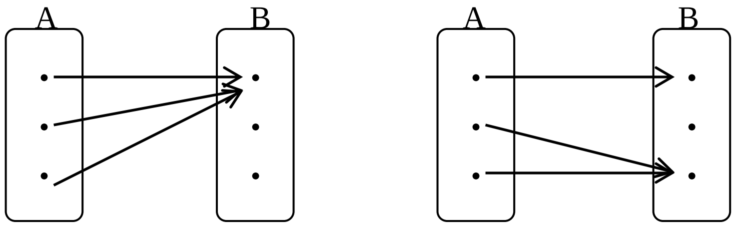


(4) رواسم فوقية:

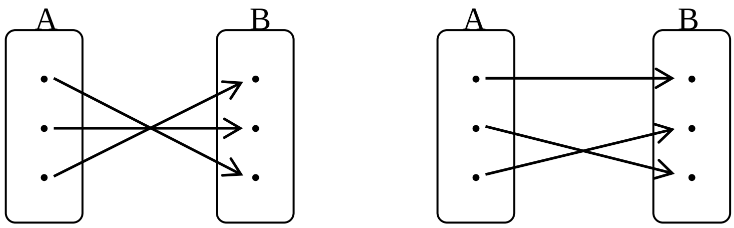




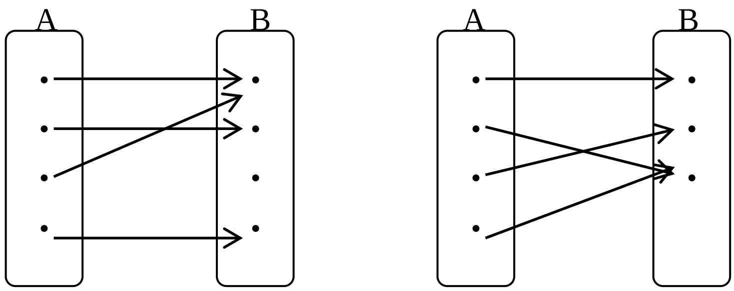
(5) رواسم ليست فوقية:



(6) رواسم أحادية التناظر:



(7) رواسم ليست أحادية التناظر:



- **<u>أمثلة تحليلية:</u>**

مثال(1): إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة فحدد نوع الراسم $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = 2x+1$ لكل $x \in Z$.

<u>الحل:</u>

(1) let $x_1, x_2 \in Z$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1+1 = 2x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

وإذاً f راسم أحادي.

(2) let $y \in Z$, $y=f(x) \Rightarrow y = 2x+1 \Rightarrow x = (y-1)/2 \notin Z$.

وإذاً f راسم ليس فوقي.

مثال(2): إذا كانت R هي مجموعة الأعداد الحقيقية فحدد نوع الراسم $f : R \to R$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} & if \;\; x \neq 0, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad \forall\ x \in R.$$

<u>الحل:</u>

(1) $-1, 1 \in R$, $f(-1) = f(1) = 0$.

وإذاً ليس لكل عنصرين مختلفين في المجال صورتين مختلفتين في المجال المقابل ، ومن ثم فإن f راسم ليس أحادي.

(2) let $y \in R$, $y = f(x)$

فإذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$ حيث $f(0) = 0$ ، وإذا كان $y \neq 0$ فنبحث عن x حيث

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{x} \Rightarrow x^2 - yx - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2+4}\right) \in R.$$

وبذلك كل عنصر غير صفري في المجال المقابل R يكون له أصل في المجال R .

وعلى ذلك فإن الراسم f فوقي.

مثال(3): حدد نوع الراسم $f : R \to R^+ \,, f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \quad \forall x \in R$

حيث R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

الحل:

(1) let $x_1, x_2 \in R$, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) = \sqrt{x_2^2+1}\ .\ \sqrt{x_1^2+1}\ -$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 - 2\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = 1 + x_1x_2.$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2x_2^2 = 1 + x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

أي أنه إذا كانت الصور $f(x_1)$, $f(x_2)$ متساوية فإن الأصول x_1, x_2 تكون متساوية وعلى ذلك فإن f راسم أحادي.

(2) let $y \in R^+ , y = f(x) = x + \sqrt{(x^2+1)}$

$$\Rightarrow (y - x) = \sqrt{(x^2+1)} \Rightarrow y^2 - 2yx + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y} \in R.$$

أي أن لكل عنصر y في المجال المقابل R^+ يوجد أصل x في المجال R وإذاً f راسم فوقي.

من (1),(2) يكون f راسم أحادي التناظر.

مثال(4): إذا كانت Z^* هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة ، وكانت N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فحدد نوع الراسم $f : N \to Z^*$ حيث:

$$f(x) = 2x \quad \forall x \in N.$$

الحل:

(1) let $x_1, x_2 \in N$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

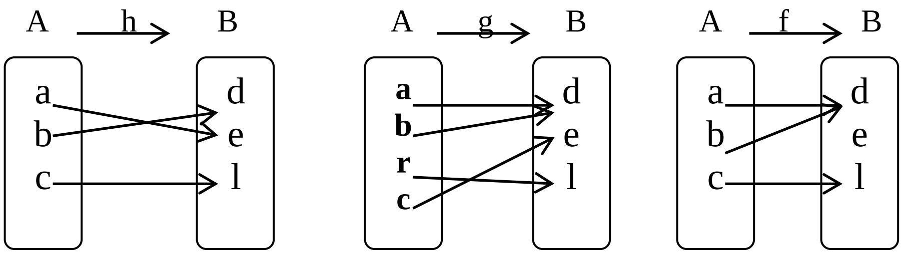
وإذاً f راسم أحادي.

(2) let $y \in Z^*$, $y = f(x) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = (y/2) \in N$.

وإذاً f راسم فوقي. ومن (1),(2) يكون f راسم أحادي التناظر.

- **معكوس الراسم Inverse of the Mapping :**

إذا كان الراسم f معرف من المجموعة A إلى المجموعة B. وكما نعلم أن كل راسم علاقة ، أي أنه يمكن إيجاد العلاقة العكسية للراسم من B إلى A والسؤال الآن هو هل هذه العلاقة تكون راسم ؟ وللإجابة على هذا السؤال نستعرض الأمثلة الآتية:



شكل (ج) شكل (ب) شكل (أ)

في شكل (أ) نجد أن f راسم من A إلى B وأن f^{-1} علاقة وليست راسم من B إلى A لأن العنصر d مرتبط بعنصرين هما a,b ، وأيضاً لأن العنصر e ليس له صور بالعلاقة العكسية

f^{-1} ، ونلاحظ أن f راسم ليس فوقي لأن e ليس لها أصل في A بالراسم f ، وأن f راسم ليس أحادي لأن d لها أصلان في A. ولكى يكون f^{-1} راسم كان يجب أن يكون لكل عنصر في B صورة وحيدة في A بالراسم f^{-1} .

أي أن كل عناصر B تكون صور وحيدة لعناصر A بالراسم f.

ويمكن صياغة ذلك في الشرطين الآتيين:

(1) كل عناصر B يجب أن تكون صور لعناصر A بالراسم f.

(2) كل هذه الصور تكون وحيدة.

ونجد أن الشرط (1) يعني أن الراسم f يجب أن يكون فوقي ، والشرط (2) يعني أن الراسم f يجب أن يكون أحادي.

وبهذا نستنتج أنه لكي تكون العلاقة العكسية للراسم f أيضاً راسم يجب أن يكون الراسم f أحادي التناظر.

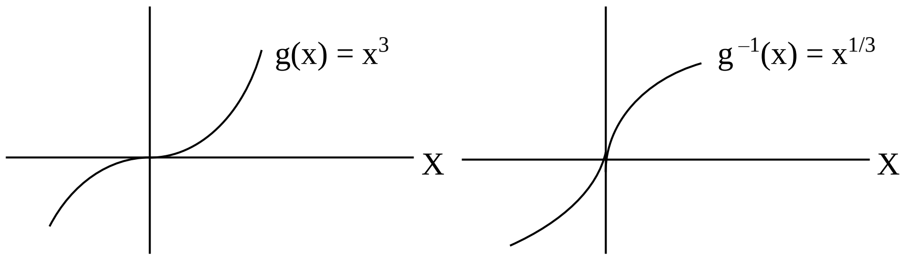
وفي الشكل (ب) الراسم g راسم فوقي ولكنه ليس أحادي لأن كل عناصر B لها صور في A ولكن العنصر d مرتبط بعنصرين في A.

وبهذا نجد أن العلاقة العكسية g^{-1} ليست راسم لأن العنصر d ليس مرتبط بعنصر وحيد في A بالعلاقة العكسية g^{-1}.
وفي الشكل (ج) الراسم h راسم أحادي وفوقي. وبهذا نجد أن العلاقة العكسية h^{-1} تُعتبر راسم لأن كل عنصر في B مرتبط بعنصر واحد فقط في A بالعلاقة العكسية h^{-1}

ملاحظة: إذا كان الراسم f أحادي التناظر فإن الراسم العكسي f^{-1} (إن وُجد) يكون أيضاً أحادى التناظر.

- **أمثلة توضيحية:**

1 – الراسم $g : R \to R$ حيث $g(x) = x^3$ راسم أحادي التناظر. ومن ثم يكون الراسم العكسي g^{-1} معرف كما يلي: $g^{-1} : R \to R$; $g^{-1}(x) = x^{1/3} \quad \forall\, x \in R$

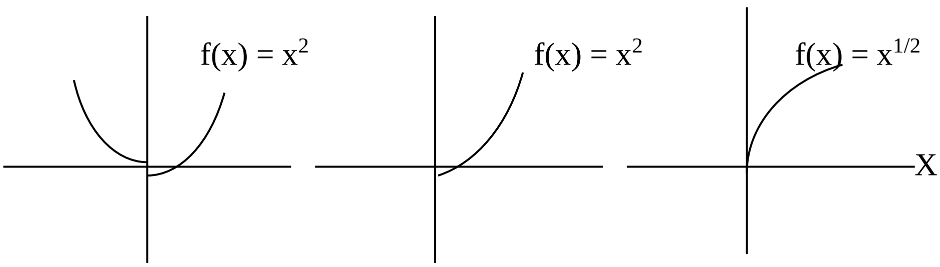


2 – الراسم $f : R \to R$ حيث $f(x) = x^2$ ليس أحادي . ومن ثم يكون الراسم العكسي f^{-1} غير معرف ، ولكن إذا تم تصغير R لتُصبح R^+ فإن:

$f : R^+ \to R^+$; $f(x) = x^2$.

وبذلك يُصبح الراسم f أحادي التناظر . وفي هذه الحالة يكون f^{-1} معرف كما يلي:

$f^{-1} : R^+ \to R^+$; $f^{-1}(x) = x^{1/2} \quad \forall\, x \in R^+$.



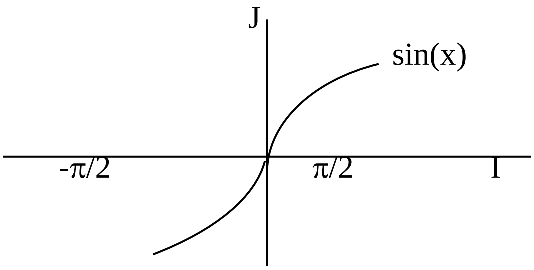
3- نفرض المجموعتين:

1}. ≤x ≤1 -R : ∈, J = {x $I=\left\{x\in R:\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$

والراسم $Sin : I \to J$ المعرف كما يلي:

$\sin x = y\ ,\ \forall\ x\in I\ ,\ y\in J.$

هذا الراسم يكون أحادي التناظر. والراسم العكسي $\sin^{-1} : J \to I$ يكون معرف.



ومن الرسم نلاحظ أن كل نقطة في J يقابلها نقطة وحيدة في I بالراسم العكسي $\sin^{-1}$

4- نفرض المجموعتين:

$I = \{x : x\in R\ ,\ -\pi \le x \le \pi\},\ \ J = \{y : y\in R\ ,\ -1 \le y \le 1\}.$

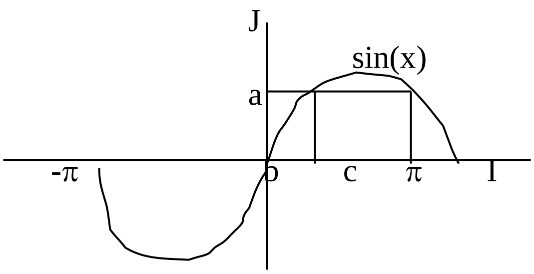
والراسم $\sin : I \to J$ المعرف كما يلي:

$\sin x = y\ \ \forall\ x\in I\ ,\ y\in J.$

هذا الراسم sin ليس أحادي لأن العدد $a\in J$ له أصلان في I هما $b,c\in I$ حيث إن

$\sin b = a\ ,\ \sin c = a$ وهذا الراسم sin أيضاً راسم فوقي لأن كل النقط في J لها أصل في I وبذلك فإن الراسم العكسي $\sin^{-1}$ غير معرف لأن sin لا يكون أحادي التناظر على هذه الفترات.

ولذلك حتى نتعامل مع العلاقة $y = \sin^{-1} x$ يجب أن نحدد المجال والمجال المقابل لهذه العلاقة بالفترات: $-1 \le x \le 1$ ، $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.



- **تحصيل الرواسم Composition of Mappings :**

إذا كان الرواسم g , f معرفة كما يلي:

$f : A \rightarrow B \;,\; g : D \rightarrow C.$

وكانت $f(A) \subset D$. فإنه يمكن تحصيل (تركيب) الراسم g مع الراسم f لينتج الراسم المحصلة (المركبة) $g{\circ}f : A \rightarrow C$ حيث يكون:

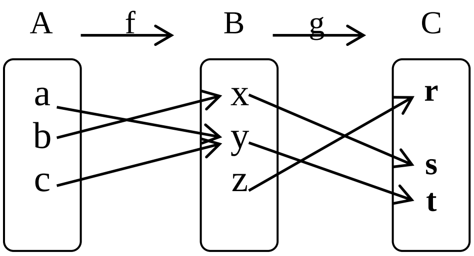
$(g{\circ}f)(a) = g(f(a)) \;\forall\; a \in A.$

وفي حالة $B = D$ فإن الشرط $f(A) \subset D$ يتحقق دائماً ، وبذلك فإنه لأي ثلاث مجموعات A, B, C ولأي راسمين:

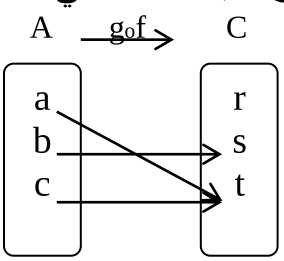
$f : A \rightarrow B \;,\quad g : B \rightarrow C,$

يمكن دائماً تعريف الراسم $g{\circ}f$ ونلاحظ أيضاً أن الراسم $f{\circ}g$ لا يكون معرفاً إلا إذا كان $g(B) \subset A$ ، وعندئذ فليس من الضروري أن يكون $f{\circ}g = g{\circ}f$.

<u>مثال توضيحي:</u> إذا كانت $f : A \rightarrow B \;,\; g : B \rightarrow C$ راسمين مُعرفين كما بالشكل:



فإن الراسم المحصلة $g{\circ}f : A \rightarrow C$ يُعرف بالشكل التالي:



- **أمثلة تحليلية:**

مثال(1): إذا كان $f, g : R \to R$ راسمين حيث:

$g(x) = x^2,\ \ f(x) = 1- x.\ \ \forall\ x\in R.$

فإن:

$(f_\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 - x^2.$
$(g_\circ f)(x) = g(f(x) = g(1 - x) = (1 - x)^2.$
$(f_\circ f)(x) = f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x.$

مثال(2): إذا كان $f, g : R \to R$ راسمين حيث:

$g(x) = 2x-3,\ \ f(x) = x^2+3x+1.\ \ \forall\ x\in R.$

فأوجد: (1) $(f_\circ g)(x)$. (2) $(g_\circ f)(x)$. (3) $(g_\circ g)(x)$. (4) $(f_\circ f)(x)$

الحل:

(1) $(f_\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2+3(2x-3)+1 = 4x^2-6x+1.$
(2) $(g_\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+3x+1) = 2(x^2+3x+1)-3 = 2x^2+6x-1.$
(3) $(g_\circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x-3) = 2(2x-3)-3 = 4x-9.$
(4) $(f_\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+3x+1) = (x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1$
$= x^4+6x^3+14x^2+15x+5.$

نظرية(1): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ \ g : B \to C$ راسمين فوقيين فإن المحصلة $g_\circ f : A \to C$ تكون راسماً فوقياً أيضاً.

البرهان: حيث إن كل من الراسمين f,g فوقي فمن تعريف الراسم الفوقي يكون:

$f(A) = B,\ \ g(B) = C$
$\therefore (g_\circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C.$

أي أن صورة المجال A تكون هي المجال المقابل C للراسم $g_\circ f$ وإذاً الراسم $g_\circ f$ يكون فوقي.

نظرية(2): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ \ g : B \to C$ راسمين أحاديين فإن المحصلة $g_\circ f : A \to C$ تكون راسماً أحادياً أيضاً.

البرهان: حيث إن كلاً من الراسمين أحادي فمن تعريف الراسم الأحادي يكون:

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\ \forall a,b\in A\ ,\quad g(c) = g(d) \Rightarrow c = d\ \forall c,d\in B.$
$\therefore (g_\circ f)(a_1) = (g_\circ f)(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$
$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2\ \forall a_1,a_2\in A.$

وإذاً $(g_\circ f)$ راسم أحادي.

نظرية(3): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ راسمين أحاديين التناظر فإن المحصلة $g_o f$ تكون راسماً أحادي التناظر أيضاً.

نتيجة: إذا كانت $f : A \to B\ ,\ g : B \to C\ ,\ h : C \to D$ ثلاث رواسم.
فأثبت أن $h_o(g_o f) = (h_o g)_o f$ (خاصية الدمج) .

<u>البرهان</u>**:** واضح أن:

$$(h_o g)\,_o f : A \to D\ ,\quad h_o(g_o f) : A \to D.$$

ومن تعريف تساوي راسمين يتبقى لإثبات التساوى أن نثبت أن:

$$(h_o(g_o f))(a) = ((h_o g)\,_o f)(a).\quad \forall\ a\in A.$$

$$\therefore (h_o(g_o f))(a) = h((g_o f)(a)) = h(g(f(a))) = (h_o g)(f(a)) = ((h_o g)\,_o f)(a).$$

تعريف: راسم الوحدة للمجموعة A (Identity map of A) يُعرف كما يلي:

$$i_A : A \to A\ \ ;\ i_A(a) = a.\quad \forall\ a\in A$$

ومن السهل إثبات أنه لأي راسم $f : A \to B$ يكون:

$$i_B{}_o f = f\ ,\ f_o i_A = f.$$

تعريف: يُقال أن الراسم $f : A \to B$ قابل للانعكاس Invertiable إذا وُجد راسم $g : B \to A$ بحيث يكون:

$$g_o f = i_A\ ,\quad f_o g = i_B\ .$$

وفي هذه الحالة يُسمى الراسم g الراسم العكسي للراسم f ويُكتب $g = f^{-1}$.

مثال: الراسم $f : N \to Z^*\ ,\ f(n) = n-1\ \ \forall\ n\in N$ (N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، والمجموعة Z^* هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة) يكون قابل للانعكاس لأنه يمكن إيجاد راسم $g : Z^* \to N\ ,\ g(n) = n+1\ \ \forall\ n\in Z^*$ ويتحقق:

$$(g_o f)(n) = g(f(n)) = g(n-1) = (n-1)+1 = n.\quad \forall\ n\in N\qquad \therefore g_o f = i_N\ .$$
$$(f_o g)(m) = f(g(m)) = f(m+1) = m+1-1 = m\ .\quad \forall\ m\in Z^*\ \ \therefore f_o g = i_{Z^*}\ .$$

تمهيدية: الراسم إن وُجد له معكوس فإن هذا المعكوس يكون وحيد.

<u>البرهان</u>**:** نفرض أن $f : A \to B$ راسم له معكوسان هما $g_1,g_2 : B \to A$.
فمن تعريف المعكوس للراسم يكون:

$$g_1{}_o f = i_A\ ,\ f_o g_2 = i_B\ .$$
$$\therefore\ g_1 = g_1{}_o i_B = g_1{}_o(f_o g_2) = (g_1{}_o f)\,_o g_2 = i_A{}_o g_2 = g_2\ .$$

أي أن المعكوس وحيد .

نظرية(4): الراسم $f : A \rightarrow B$ يكون قابل للانعكاس إذا وإذا فقط كان راسم أحادي التناظر (أي أحادي وفوقي).

<u>البرهان</u>:

<u>أولاً</u>: نفرض أن الراسم قابل للانعكاس وسنثبت أنه أحادي التناظر:

(1) let $x_1,x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$

$\Rightarrow i_A(x_1) = i_A(x_2).$

$\Rightarrow x_1 = x_2$.

وإذاً f راسم أحادي.

(2) let $y \in B$, $y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y)$.

أي أن لكل عنصر $y \in B$ يوجد (أصل) $x \in A$ بحيث $f(x) = y$.

وإذاً f راسم فوقي.

<u>ثانياً</u>: نفرض أن f راسم أحادي التناظر وسنثبت أنه قابل للانعكاس:

حيث إن f أحادي التناظر فيكون:

$\forall\ a \in A\ \exists|\ b \in B\ ;\ f(a) = b,$

$\forall\ b \in B\ \exists|\ a \in A\ ;\ g(b) = a.$

وبالتالي يكون الراسم $g : B \rightarrow A$ مُعرف حيث $g(b) = a$ ويكون:

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a\ .\ \therefore\ g \circ f = i_A$,

$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b\ .\ \therefore\ f \circ g = i_B$.

وإذاً f قابل للانعكاس.

نظرية(5): إذا كانت $f : A \rightarrow B,\ g : B \rightarrow C$ رواسم قابلة للانعكاس فإن الراسم المحصلة $(g \circ f)$ يكون قابل للانعكاس أيضاً ويكون $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

<u>البرهان</u>:

نفرض أن $h = gof$, $k = f^{-1}og^{-1}$ فإذا أثبتنا أن $h \circ k = i_C$, $k \circ h = i_A$ يكون الراسم k معكوس للراسم h :

$\therefore\ h \circ k = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g) = g \circ (i_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = i_C$,

$k \circ h = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (i_B \circ f) = f^{-1} \circ f = i_A$.

$\therefore\ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

تماريــن

1- لتكن العلاقات $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4$ معرفة على المجموعة $A=\{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$\Re_1=\{ (1, 3), (2, 4), (1, 1), (4, 3), (4, 4), (3, 1) \}$,
$\Re_2=\{ (2, 4), (1, 1), (3, 1), (4, 3) \}$,
$\Re_3=\{ (2, 3), (1, 2), (3, 4), (4, 1) \}$,
$\Re_4=\{ (1, 4), (2, 2), (3, 2) \}$

فحدد أي من هذه العلاقات تكون راسم (وما نوعه؟) ، وأيها لا تكون راسم (مع ذِكر السبب)؟.

2- بفرض $f : Z \to Z^*$ راسم حيث $f(x) = x^2 \ \forall x \in Z$ وأن Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، Z^* مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة $\{0, 1, 2, 3,...\}$.

(أ) حدد نوع الراسم f .

(ب) اكتب عناصر المدى $f(Z)$.

3- بفرض أن $g: N \to Y$ راسم حيث $g(x) = x+2 \ \forall x \in N$ ، N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، والمجموعة $Y=\{3,4,5,...\}$.

(أ) حدد نوع الراسم g .

(ب) أوجد العلاقة العكسية g^{-1} .

4- بفرض أن $f, g : R \to R$ (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) راسمان معرفان كما يلي: $f(x) = 3x^3 \ , g(x) = 5x - 5 \ \ \forall x \in R$.

(أ) حدد نوع كلا من هذين الراسمين ؟

(ب) أوجد f^{-1} .

(ج) أوجد $f_o g , g_o f$.

5- بفرض أن $f: R \to R$ راسم حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ، $f(x)=-2x+3 \ \ \forall x \in R$.

فتحقق من أن f يكون أحادي التناظر ، وبفرض أن $A=\{-4, -2, 0, 2, 4\} \subset R$

اكتب عناصر المجموعة $f^{-1}(A)$.

6- بفرض أن $f: R \to R$ راسم حيث $f(x) = 2x-3 \ \forall x\in R$. تحقق من أن f يكون
أحادي التناظر ، ومن ثم أوجد f^{-1} .

7- بفرض أن $f, g: R \to R$ راسمان معرفان كما يلي:
$f(x)=2x+1 , \ g(x)= x^2-2. \ \forall x\in R.$
أوجد صيغة تعريف لكل من $f\circ g , g\circ f$ ، ومن ثم احسب قيمة
$(f\circ g)(4),(g\circ f)(4)$.

8- بفرض أن $f, g: R \to R$ راسمان معرفان كما يلي:
$f(x) = x^2+3x+1 , \ g(x) = 2x-3. \ \forall x\in R.$
أوجد صيغة تعريف لكل من: $f\circ g, \ g\circ f, \ g\circ g, \ f\circ f$.

9- بفرض أن $f: R \to R$ راسم قابل للإنعكاس وأن:
$f(x) = (x-1)/(x+1) , \ f^{-1}(y) = (1+y)/(1-y) \ \ \forall x,y\in R.$
فتحقق من أن $(f^{-1}\circ f)(x) = x \ , (f\circ f^{-1})(y) = y$.

10- إذا كان $f: R \to R$ راسم ، وكانت A_1, A_2 مجموعات جزئية اختيارية من مجموعة
الأعداد الحقيقية R فتحقق من صحة ما يلي:
(i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$
(ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ *in general.*
(Hint: For (ii) second part: let $A_1 = \{-1,0\}, \ A_2 = \{0,1\}, \ f(x) = x^2$)

11- إذا كان $f: R \to R$ راسم قابل للإنعكاس ، وكانت B_1, B_2 مجموعات جزئية
اختيارية من مجموعة الأعداد الحقيقية R فتحقق من صحة ما يلي:
(i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$
(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$

مقدمة في نظرية الزمر

تكتسب الزمر أهمية خاصة في الجبر الحديث لما لها من تطبيقات في علوم أخرى مثل الفيزياء والكيمياء. وسنعرض بمشيئة الله تعالى في هذا المقرر لمفهوم الزمرة ، وبعض الخصائص الأساسية للزمرة، وبعض أنواع الزمر وتطبيقاتها، ومفهوم تشاكل وتماثل الزمر.

- **مفهوم الزمرة Group** :

تعريف(1): لتكن $*$ عملية ثنائية معرفة على المجموعة غير الخالية G

فإن الثنائي $<G,*>$ يُسمى **زمرة Group** إذا تحققت الشروط التالية:

(أ) (شرط الإغلاق) $a*b\in G \ \ \forall a,b\in G$

(ب) (شرط الدمج) $(a*b)*c=a*(b*c) \ \ \forall a,b,c\in G$

(ج) (شرط وجود العنصر المحايد) $\exists\ e\in G\ ;\ e*a=a*e=a \ \ \forall a\in G$

(د) (شرط وجود المعكوس) $\forall a\in G\ \exists\ a^{-1}\in G\ ;\ a^{-1}*a=a*\ a^{-1}=e$

ملاحظة: إذا تحقق الشرطان (أ) ، (ب) فقط فإن $<G,*>$ يُسمى **شبه زمرة Semi-Group** ، وإذا تحققت الشروط (أ) ، (ب) ، (ج) فقط فإن $<G,*>$ يُسمى **شبه زمرة تحتوي على عنصر محايد Monoid** .

(أي أن الزمـرة هي النظام الجبري $<G,*>$ بحيث يكون هذا النظام دامج ،
وذا عنصر محايد ، وذا معكوس).

أمثلة:

مثال(1): النظام $<Z,+>$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، $+$ عملية الجمع العادية يمثل زمرة (وضح ذلك؟).

مثال(2): النظام $<Z,\times>$ حيث $\times$ عملية الضرب العادية يمثل شبه زمرة تحتوي على عنصر محايد (وضح ذلك؟).

مثال(3): النظام $<C^{`},\times>$ حيث $C^{`}=\{C-\{0\}\}$ مجموعة الأعداد المركبة بدون العنصر $0\in C$ وحيث $\times$ عملية الضرب العادية يمثل زمرة (وضح ذلك؟).

تعريف(2): يُقال للزمرة $<G,*>$ أنها **زمرة إبدالية Commutative Group**

إذا تحقق الشرط التالي:

(شرط الإبدال) $a*b=b*a \quad \forall a,b\in G$

الزمرتين في الأمثلة (1) ، (3) إبداليتين ، شبه الزمرة في المثال (2) إبدالية.

تماريـن محلولـة:

1- ادرس الثنائي $<Q,\times>$ (من حيث كونه شبه زمرة – زمرة) حيث Q مجموعة الأعداد النسبية ، $\times$ عملية الضرب .

الحل:

(أ) حيث إن $\forall\ a,b\in Q$ يكون $a\times b\in Q$ أي أن العملية $\times$ مغلقة على Q

(ب) عملية الضـرب العادية $\times$ هي عملية دامجـة (تجميعية) على أي مجموعة

من الأعداد، وعلى ذلك فهي دامجة على المجموعة Q

(ج) يوجد عنصر محايد $1\in Q$ بحيث لأي $a\in Q$ يتحقق: $1\times a=a\times 1=a$

(د) العنصر $0\in Q$ لا يوجد له معكوس بالنسبة لعملية الضرب $\times$

(حيث لا يمكن تعريف 0^{-1}) وأي عنصر خلاف العنصر 0 يوجد له معكوس ضربي ، وعلى ذلك لا يكون لكل عنصر في المجموعة Q معكوس ضربي.

(هـ) لكل $a,b\in Q$ يتحقق: $a\times b=b\times a$ أي أن العملية $\times$ إبدالية على Q

وبالتالي فإن النظام $<Q,\times>$ يكون شبه زمرة إبدالية تحتوي على عنصر محايد.

2- لتكن $A=\{a: a=3^n ; n\in Z\}$ ، $\times$ عملية الضرب العادية. تحقق من أن الثنائي $<A,\times>$ يمثل زمرة إبدالية؟.

الحل:

(أ) لكل $a,b\in A$ حيث $a=3^n , b=3^m ; n,m\in Z$ يكون

$a\times b=3^n\times 3^m=3^{n+m}\in A$ أي أن العملية $\times$ مغلقة على المجموعة A

(ب) لكل $a,b,c\in A$ حيث $a=3^n , b=3^m , c=3^k ; n,m,k\in Z$ يكون:

$$(a\times b)\times c = (3^n\times 3^m)\times 3^k =3^{n+m}\times 3^k =3^{(n+m)+k} =3^{n+(m+k)}$$
$$=3^n\times 3^{m+k} =3^n\times(3^m\times 3^k) = a\times(b\times c).$$

أي أن العملية $\times$ دامجة على A

(ج) ليكن $e\in A$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\times$ حيث $e=3^m ;$ $m\in Z$ وعلى ذلك يكون لأي $a=3^n\in A$ يكون:

$$a\times e=a \Rightarrow 3^n\times 3^m=3^n \Rightarrow 3^{n+m}=3^n \Rightarrow n+m=n \Rightarrow m=0$$
$$\therefore e=3^0=1$$

أي أنه يوجد عنصر محايد بالنسبة للعملية $\times$ هو $1=3^0\in A$

(د) ليكن $a^{-1}\in A$ هو معكوس العنصر $a\in A$ بالنسبة للعملية $\times$ حيث: $a=3^n , a^{-1}=3^k ; n,k\in Z$ وعلى ذلك يكون:

$$a\times a^{-1}=e \Rightarrow 3^n\times 3^k=3^0 \Rightarrow 3^{n+k}=3^0 \Rightarrow n+k=0 \Rightarrow k=-n$$

أي أنه يوجد لكل عنصر $a=3^n\in A$ معكوس بالنسبة للعملية $\times$ هو $a^{-1}=3^{-n}\in A$.

(هـ) لكل $a,b\in A$ حيث $a=3^n, b=3^m ; n,m\in Z$ يكون:

$$a\times b=3^n\times 3^m=3^{n+m}=3^{m+n}=3^m\times 3^n=b\times a$$

أي أن العملية $\times$ إبدالية على المجموعة A

وبالتالي فإن النظام $<A,\times>$ يكون زمرة إبدالية.

3- لتكن $M(A)$ هي مجموعة التقابلات (الرواسم التناظر آحادية) من المجموعة A إلى المجموعة A ، ولتكن"$_o$" هي عملية تحصيل(تركيب) الرواسم. تحقق من أن الثنائي $<M(A) , _o>$ يكون زمرة.

الحل:

(أ) إذا كانت $f,g\in M(A)$ أي أن :

$$f : A \to A ,\ g : A \to A$$

ومن تعريف العملية "$_o$" نجد أن :

$f \circ g : A \to A$

أي أن التحصيل يكون راسم ينتمى إلى $M(A)$ وبذلك فإن عملية التحصيل

"$\circ$" تكون عملية مغلقة على المجموعة $M(A)$.

(ب) ولإثبات خاصية الدمج نفرض أن $f,g,h \in M(A)$ ويجب أن نثبت أن أى

عنصر من عناصر A له نفس الصورة بأي من الراسمين:

$(f \circ g) \circ h \vee f \circ (g \circ h)$,

$$((f \circ g) \circ h) (a) = (f \circ g) h (a) = f (g (h (a))) = f ((g \circ h) (a))$$
$$= (f \circ (g \circ h)) (a)$$

$$\therefore (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

وإذاً "$\circ$" عملية دامجة على المجموعة $M(A)$

(ج) نثبت أن $M(A)$ تحتوى على عنصر محايد بالنسبة للعملية "$\circ$" حيث إن:

$$e : A \to A \ ; e (a) = a \quad \forall a \in A$$

ولأي عنصر $f \in M(A)$ يكون:

$$(f \circ e) (a) = f (e (a)) = f (a)$$
$$\therefore f \circ e = f$$
$$(e \circ f) (a) = e (f (a)) = f (a)$$
$$\therefore e \circ f = f$$

وبذلك فإن $e \in M(A)$ هو الراسم المحايد وهو العنصر المحايد المطلوب.

(د) حيث إن $M(A)$ هي مجموعة الرواسم التناظر آحادية على المجموعة A فكل عنصر (راسم) $f \in M(A)$ يكون له راسم معكوس $f^{-1} \in M(A)$ بحيث:

$$(f \circ f^{-1}) (a) = f (f^{-1} (a)) = e (a)$$
$$\therefore f \circ f^{-1} = e$$
$$(f^{-1} \circ f) (a) = f^{-1} (f (a)) = e (a)$$
$$\therefore f^{-1} \circ f = e$$

وعلى ذلك فإن كل عنصر $f \in M(A)$ يكون له معكوس $f^{-1} \in M(A)$

(هـ) من دراستنا للرواسم نعلم أنه ليس من الضروري أن يكون:

$$f \circ g = g \circ f \quad \forall f,g \in M(A)$$

وإذاً النظام $< M(A) , \circ >$ يكون زمرة.

4- إذا كانت $A =\{x,y\}$ وعرفنا عملية الفرق المتماثل Δ على مجموعة القوى للمجموعة A كما يلى: $X\Delta Y = (X\cup Y)-(X\cap Y) \quad \forall X,Y\in P(A)$
ماذا يكون النظام $<P(A),\Delta>$ ؟.

<u>الحل</u>: $P(A) =\{\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$
والجدول الذي يمثل النظام $<P(A),\Delta>$ يكون كما يلي:

Δ	ϕ	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$
ϕ	ϕ	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$
$\{x\}$	$\{x\}$	ϕ	$\{x,y\}$	$\{y\}$
$\{y\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$	ϕ	$\{x\}$
$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{y\}$	$\{x\}$	ϕ

<u>من الجدول نلاحظ أن</u>:
(أ) جميع العناصر التى ظهرت فى الجدول تنتمى إلى $P(A)$ أى أن Δ عملية ثنائية مغلقة على $P(A)$
(ب) ومن دراستنا لنظرية المجموعات نعلم أن عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق المتماثل هى عمليات دامجة ، وعلى ذلك تكون Δ دامجة.
(ج) بالنظر إلى عناصر الصف الأول نجد أن جميع العناصر لم تتغير بإجراء العملية Δ للعناصر مع ϕ (ϕ على يمين العنصر) وأيضا بالنظر إلى العمود الأول نجد أن العناصر لم تتغير بإجراء العملية Δ للعناصرمع ϕ (ϕعلى يسار العنصر)
ومن ذلك نستنتج أن $\phi\in P(A)$ هي العنصر المحايد بالنسبة للعملية Δ
(د) حتى يكون للعنصر $\{x\}\in P(A)$ مثلاً معكوس بالنسبة للعملية Δ فى $P(A)$
يجب أن يكون محصلة$\{x\}$ مع معكوسه بواسطة العمليةΔ هيϕ(العنصر المحايد)،
ومن الجدول نلاحظ أن كل عنصر هو معكوس نفسه.
(هـ) عناصر الجدول متماثلة حول عناصرالقطر الرئيسى في الجدول أى أن العملية الثنائية Δ إبدالية على المجموعة $P(A)$

وعلى ذلك فإن النظام $<P(A),\Delta>$ يكون زمرة إبدالية.

5- تحقق من أن النظام $<Z_4,\oplus_4>$ يكون زمرة إبدالية.

الحل:

$Z_4=\{0,1,2,3\}$ وعملية الجمع $\oplus_4$ تُعرف كما يلي:

لأي $a,b\in Z_4$ فإن $a\oplus_4 b$ تعني باقي قسمة $a+b$ على 4

فيكون الجدول الممثل للنظام $<Z_4,\oplus_4>$ هو:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ومن الجدول نلاحظ أن:

(أ) جميع العناصر فى الجدول تنتمى إلى المجموعة Z_4 أى أن المجموعة Z_4 مغلقة بالنسبة للعملية $\oplus_4$

(ب) تطابق الصف الأول والعمود الأول (المناظرين للعنصر 0)مع صف وعمود العناصر الأساسية للجدول وعلى ذلك فإن العنصر$0\in Z_4$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\oplus_4$

(ج) لكل عنصر معكوس في Z_4 العنصران 0,2 كل منهما معكوس نفسه، والعنصران 1,3 كل منهما معكوس الآخر.

(د) عناصر الجدول متماثلة حول عناصرالقطر الرئيسى في الجدول أى أن العملية الثنائية $\oplus_4$ إبدالية على المجموعة Z_4

(هـ) يمكن إثبات أن العملية $\oplus_4$ دامجة وذلك بإثبات أن:

$$(a \oplus_4 b) \oplus_4 c = a \oplus_4 (b \oplus_4 c) \quad \forall\ a,b,c\in Z_4$$

على سبيل المثال :

$$(3 \oplus_4 2) \oplus_4 1 = 1 \oplus_4 1 = 2\ ,$$

$$3 \oplus_4 (2 \oplus_4\ ) = 3 \oplus_4 3 = 2$$

ولإثبات ذلك على كل اختبار ممكن لثلاثة عناصر من Z_4 فهي عملية شاقة ، ولذا نستنتج إدماج العملية $\oplus_4$ من كون أن عملية الجمع بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من المجموعة Z_n هي ناتج باقي قسمة

الجمع العادي للعنصرين على n ، وحيث إن عملية الجمع العادية دامجة على أي مجموعة من العناصر ، فبالتالي تكون العملية $\oplus_4$ دامجة على Z_4 .

ملاحظة: الملاحظات السابقة على الجدول الممثل للنظام $<Z_4,\oplus_4>$ يمكن إختصارها لتكون كما يلي:

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر المجموعة Z_4 .

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

(3) يوجد تماثل حول عناصر القطر الرئيسي للجدول.

✓ وهذه الملاحظات الثلاث تكفي ليكون النظام المُمثل بالجدول زمرة إبدالية، والملاحظتان (1)،(2) فقط تكفيان ليكون النظام المُمثل بالجدول زمرة ،

وهكذا بالنسبة لأي نظام مُمثل بجدول.

✓ وبالمناسبة عدم تحقق أيا من هذه الملاحظات لا يكفي للدلالة على أن النظام

لا يمثل زمرة ، وإنما يجب ذِكر الشرط الذي لا يتحقق من الشروط الأصلية التي وردت في تعريف الزمرة.

==

تمارين:

1- حدد أي من الثنائيات الآتية يكون زمرة،وأيها لايكون زمرة مع ذكر السبب:

$$(1)\quad <A,\times> \ ; A=\{1,\omega,\omega^2 : \omega=\sqrt[3]{1}\ \}.$$

$$(2)\quad <A,\times> \ ; A=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega&0\\0&\omega^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega^2&0\\0&\omega\end{pmatrix}:\omega^3=1\}.$$

$$(3)\quad <A,\times> \ ; A=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}:i^2=-1\}.$$

$$(4)\quad <A,\times> \ ; A=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\}.$$

$$(5)\quad <A,\times> \ ; A=\{\begin{pmatrix}x&0\\0&y\end{pmatrix}: x,y\ real, xy=1\}.$$

$$(6)\quad <A,\times> \ ; A=\{\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}: x,y\ real, x^2+y^2\neq 0\}.$$

$$(7)\quad <A,\times> \ ; A=\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}: x,y\ real, y\neq 0\}.$$

2- تحقق من أن النظام $<M_{2\times 2}(R)\ ,\times>$ يكون زمرة؟
حيث $M_{2\times 2}(R)$ هي مجموعة المصفوفات غير المفردة من النوع 2×2 ذات العناصر الحقيقية ، $\times$ هي عملية ضرب المصفوفات. وهل هذه الزمرة إبدالية (ولماذا؟).

3- تحقق من أن النظام $<Q-\{0\},\times>$ يكون زمرة إبدالية؟
حيث Q مجموعة الأعداد النسبية.

▪ بعض الخصائص الأساسية للزمرة:

ليكن $<G,*>$ زمرة فإن الخصائص التالية تكون متحققة:

(1) العنصر المحايد في الزمرة يكون وحيد:

نفرض e_1,e_2 عنصرين محايدين في الزمرة $<G,*>$

$\therefore e_1 = e_1*e_2$ (باعتبار e_2 عنصر محايد)

$\therefore e_2 = e_1*e_2$ (باعتبار e_1 عنصر محايد)

$\therefore e_1=e_2$

أي أن العنصر المحايد في الزمرة وحيد.

(2) معكوس أي عنصر في الزمرة يكون وحيد:

نفرض أن b,c معكوسان للعنصر $a\in G$ وأن $e\in G$ هو العنصر المحايد للزمرة $<G,*>$

$\therefore a*b = b*a = e ,$

$a*c = c*a = e$

$c = c*e = c*(a*b) = (c*a)*b$ (خاصية الدمج)

$= e*b = b.$

أي أن المعكوس في الزمرة وحيد.

(3) خاصيتي الحذف من اليمين والحذف من اليسار:

لكل $a,x,y\in G$ يتحقق:

$x*a = y*a \Rightarrow x = y,$

$a*x = a*y \Rightarrow x = y .$

<u>البرهان</u>:

$x*a = y*a \Rightarrow (x*a)*a^{-1} = (y*a)*a^{-1}$

$\Rightarrow x*(a*a^{-1}) = y*(a*a^{-1})$ (من خاصية الدمج)

$\Rightarrow x*e = y*e$

$\Rightarrow x = y .$

وبالمثل يمكن إثبات خاصية الحذف من اليسار.

(4) حل المعادلات في الزمرة:

إذا كان للمعادلة $a*x = b$ حل في الزمرة فيكون هذا الحل وحيد على الصورة

كذلك يكون للمعادلة $x*a = b$ حل وحيد على الصورة $x = a^{-1}*b$ $x=b*a^{-1}$

البرهان:

يكون $x = a^{-1}*b$ حل للمعادلة $a*x = b$ إذا حققها:

$$L.H.S = a*x = a*(a^{-1}*b) = (a^{-1}*a)*b = e*b = b = R.H.S.$$

وإذاً $x = a^{-1}*b$ يكون حل للمعادلة $x*a = b$

ويتبقى إثبات أن هذا الحل يكون وحيد كما يلي:

نفرض أن للمعادلة $a*x = b$ حلان هما x_1,x_2 (أي يحققاها) وإذاً:

$$a*x_1 = b \ , \ a*x_2 = b$$

$$\therefore a*x_1 = a*x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(من خاصية الحذف من اليسار)

أي أن الحل يكون وحيد.

وبالمثل يمكن إثبات أن $x=b*a^{-1}$ هو الحل الوحيد للمعادلة الثانية $x*a = b$

أمثلة:

(1) حل المعادلة $2x = 3$ في الزمرة $< Z_4,\oplus_4 >$ يكون:

$$2 \oplus_4 x = 3 \Rightarrow x = 2^{-1} \oplus_4 3 = 2 \oplus_4 3 = 1.$$

(انظر جدول الزمرة $< Z_4,\oplus_4 >$ في مثال5).

(2) النظام $< Z,* >$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، والعملية $*$ معرفة على Z كما يلي: $a*b = a+b-3 \ \forall a,b \in Z$ يكون زمرة إبدالية (تحقق من ذلك؟). وحل المعادلة $5x = -2$ في هذه الزمرة يكون:

$$5*x = -2 \Rightarrow x = 5^{-1}*(-2) = (6-5)*(-2) = 1*(-2) = 1+(-2)-3 = -4.$$

(حيث معكوس العنصر a يكون $(6-a)$ في هذه الزمرة.

(5) معكوس المعكوس في الزمرة هو العنصر الأصلي:

$$(a^{-1})^{-1} = a .$$

البرهان:

let $(a^{-1})^{-1} = b$

$\therefore a^{-1} * b = e$

$\Rightarrow a*(a^{-1} * b) = a*e \Rightarrow (a*a^{-1})*b = a \Rightarrow e*b = a \Rightarrow b = a.$

$\therefore (a^{-1})^{-1} = a .$

نتيجة: لأي عنصرين a,b في الزمرة يتحقق:

$(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$.

البرهان:

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = a*(b*(b^{-1}*a^{-1}))$$
$$= a*((b*b^{-1})*a^{-1})$$
$$= a*(e*a^{-1})$$
$$= a*a^{-1}$$
$$= e$$
$$\therefore (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} .$$

(6) الرفع إلى قوى صحيحة:

لأي عنصر $a\in G$ يكون $a*a*a=a^3\in G$ ، $a*a=a^2\in G$ ، وهكذا ...حتى يكون

$a*a*\ldots*a$ (n من المرات) فيكون:

$a*a*\ldots*a = a^n\in G \quad , \quad a^0 = e\in G \quad \forall a\in G.$

وإذا كان $a^{-1}\in G$ هو معكوس $a\in G$ فيكون:

$a^{-1}*a^{-1} = a^{-2}$,
$a^{-1}*a^{-1}*a^{-1} = a^{-3}$
… … … …
$a^{-1}*a^{-1}*\ldots*a^{-1} = a^{-n}$. (n-times)

وفي الحالة العامة يكون:

$a^n*a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm} \quad \forall a\in G ,\forall n,m\in Z$ (مجموعة الأعداد الصحيحة)

ملحوظة: في الحالة العامة يكون: $(a*b)^r \neq a^r*b^r \; ; r\in Z$. وسنكتب ab بدلا من $a*b$ من باب التخفيف والإيجاز.

نظرية: إذا كانت G زمرة إبدالية فإن: $(ab)^n = a^nb^n \quad \forall a,b\in G , n\in Z^+$

البرهان: باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي:

(i) at n=1 $\therefore (ab)^1 = a^1b^1$.

أي أن العلاقة صحيحة في حالة n=1

(ii) let n=k , $(ab)^k = a^kb^k$.
(iii) at n=k+1,

$$\text{L.H.S.} = (ab)^{k+1} = (ab)^k(ab)^1$$
$$= (a^kb^k)(ab) \qquad (\text{من}\ (ii))$$
$$= ((a^kb^k)a)b \qquad (\text{الدمج})$$
$$= (a^k(b^ka))b \qquad (\text{الدمج})$$

$= (a^k(ab^k))b$ (الإبدال)

$= ((a^k a)b^k)b$ (الدمج)

$= (a^{k+1}b^k)b$

$= a^{k+1}(b^k b)$ (الدمج)

$= a^{k+1}b^{k+1} = R.H.S.$

أي أن العلاقة صحيحة في حالة n=k+1 بفرض صحتها في حالة n=k وهي صحيحة في حالة n=1 وعلى ذلك فهي صحيحة لأي عدد صحيح موجب n

ملاحظات:

(1) إذا كانت العملية الثنائية المعرفة في الزمرة G هي عملية الجمع "+" فإن:

$a+a+\ldots+a = na$, (عدد المرات وهو عدد صحيح موجب n)

$-a-a-\ldots-a = -na$,

$(n+m)a = na+ma$, (n,m أعداد صحيحة)

$n(ma) = (nm)a$.

(2) عدد عناصر الزمرة يُسمى رتبة الزمرة the order of a group وإذا كان عدد عناصر الزمرة منته فإننا نقول أن الزمرة منتهية finite group وإذا كان عدد عناصر الزمرة غير منته فإننا نقول أن الزمرة لا نهائية infinite group .

- **تمارين:**

1- تحقق من أن النظام $<R,*>$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية، ولكل $x,y\in R$ يكون $x*y=x+y-5$ يمثل زمرة إبدالية.
ثم أوجد حل المعادلة $4x=-3$ في هذه الزمرة.

2- لتكن $X=R-\{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن $*$ عملية معرفة على المجموعة X كما يلي: $a*b=a+b-ab \ \forall a,b\in X$
تحقق من أن النظام $<X,*>$ يكون زمرة إبدالية.
ثم أوجد حل المعادلة $3x=5$ في هذه الزمرة.

3- إذا كانت $<X,*>$ زمرة حيث $x=x^{-1}$ لكل $x\in X$
فتحقق من أن $<X,*>$ تكون زمرة إبدالية.

4- إذا كانت $<X,*>$ زمرة حيث $(x*y)^{-1}=x^{-1}*y^{-1}$ لكل $x,y\in X$

فتحقق من أن $< X,* >$ تكون زمرة إبدالية.
5- بيّن أن أي زمرة محتوية فقط على ثلاث عناصر تكون إبدالية.
==
==========

▪ أنواع خاصة من الزمر:

(1) زمر التبديلات(أو زمر التماثل) Permutation groups (Symmetric groups)**:**

رأينا فيما سبق أن النظام <M(A), o> يمثل زمرة .حيث M(A) هي مجموعة التقابلات(الرواسم أحادية التناظر من A إلى A) والعملية "o" هي عملية تحصيل الرواسم.

فإذا كانت A مجموعة منتهية finite فإن M(A) تُسمى **زمرة التبديلات** الممكن إجراءها على عناصر المجموعة A وإذا كان عدد عناصر المجموعة A هو n

فإن عدد التبديلات على A يكون مساوياً n!

وعلى سبيل المثال إذا كانت:

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

وكانت α∈M(A) (تبديلة) فإن α تُعرف بالعلاقة:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \alpha(a_1) & \alpha(a_2) & \ldots & \alpha(a_n) \end{pmatrix}.$$

حيث $\alpha(a_1), \alpha(a_2), \ldots, \alpha(a_n) \in A$ وإذا كانت:

$A=\{1,2,\ldots,n\}$

فإن $M_n(A)$ تُسمى **زمرة التبديلات من درجة n** ويُرمز لها بالرمز S_n

حيث $\alpha \in S_n$ تُعرف بالعلاقة:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \ldots & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

ملاحظات ونتائج:

(1) إذا كان $\alpha, \beta, \gamma \in S_4$ حيث:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

فإنه يمكن التعبير عن α,β,γ بأكثر من طريقة كما يلي:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2&3&4&1\\3&1&2&4\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}4&1&2&3\\2&4&3&1\end{pmatrix}\equiv(1\ 4\ 2\ 3)\,,$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\equiv(1\ 4\ 2)(3)\equiv(1\ 4\ 2)\,,$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\equiv(1\ 3)(2\ 4)\,.$$

كلا من التعبيرات $(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 2),(1\ 3)(2\ 4)$ يُسمى **التعبير الدائري** للتبديلات α,β,γ على الترتيب. وبالطبع عدد عناصر S_4 يكون مساوياً $4!=24$

(2) ولحساب التبديلة المحصلة $\alpha\circ\beta$ نكتب أولاً α بعد إعادة ترتيب الصف الأول في α بنفس ترتيب الصف الثاني في β مع مراعاة أن العنصر يُنقل بصورته، فتكون المحصلة $\alpha\circ\beta$ هي التبديلة التي صفها الأول هو الصف الأول في التبديلة β وصفها الثاني هو الصف الثاني في التبديلة α بعد الترتيب المشار إليه أي أن:

$$\alpha\circ\beta=\begin{pmatrix}4&1&3&2\\2&4&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=(1\ 2\ 4\ 3).$$

(3) ومعكوس التبديلة يكون هو التبديلة التي صفها الأول هو الصف الثاني في التبديلة الأصلية ، وصفها الثاني هو الصف الأول في التبديلة الأصلية فمثلاً:

$$\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}4&3&1&2\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2\ 4)..$$

(4) والتبديلة $I=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ تُسمى تبديلة الوحدة في S_4

(5) وإذا كان $\dfrac{\alpha(i)-\alpha(j)}{i-j}<0\ \forall i<j$ فإننا نقول أنه يوجد انقلاب inversion

في التبديلة $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&.....&n\\\alpha(1)&\alpha(2)&.....&\alpha(n)\end{pmatrix}$

وعدد الانقلابات للصورة $\alpha(i)$ في التبديلة α يكون مساويا لعدد الصور $\alpha(j)$ التالية لهذه الصورة بحيث يكون $i<j$, $\alpha(j)<\alpha(i)$
ويُرمز للعدد الكلي لانقلابات التبديلة α (عدد انقلابات صورها) بالرمز $inv(\alpha)$ أو بالرمز V_α . فمثلاً للتبديلات α,β,γ المعطاه في (1) يكون:

$$V_\alpha=3+2+0+0=5,\ V_\beta=3+0+1+0=4,\ V_\gamma=2+2+0+0=4$$

ملاحظة: عند حساب عدد انقلابات التبديلة لابد أن تكون في الصورة الأصلية.

مثال(1): لتكن S_3 هي مجموعة التبديلات من الدرجة الثالثة للمجموعة $\{1,2,3\}$

فإن النظام $<S_3,\circ>$ يكون زمرة ،حيث "$\circ$" عملية تحصيل الرواسم.

الإثبات: حيث إن عدد عناصر المجموعة $\{1,2,3\}$ هو 3 فإن عدد عناصر مجموعة التبديلات من الدرجة الثالثة للمجموعة $\{1,2,3\}$ يساوي 6=!3 وهذه العناصر هي:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

أي أن $S_3=\{I,(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3)\}$.

وحيث إن المجموعة S_3 محدودة فيمكن تمثيل النظام $<S_3,\circ>$ بجدول كما يلي:

$\circ$	I	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
I	I	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	I	(1 3)	(2 3)	(1 2)
(1 3 2)	(1 3 2)	I	(1 2 3)	(2 3)	(1 2)	(1 3)
(1 2)	(1 2)	(2 3)	(1 3)	I	(1 3 2)	(1 2 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 2 3)	I	(1 3 2)
(2 3)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	(1 3 2)	(1 2 3)	I

من الجدول نلاحظ أن :

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر S_3

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

وعلى ذلك فإن النظام $< S_3, \circ >$ يمثل زمرة.

<u>التبديلات الزوجية والتبديلات الفردية:</u>

إذا كان عدد التقاطعات عندما يصل كل عنصر في الصف الأول للتبديلة إلى نفس العنصر في الصف الثاني عدد زوجي فإن التبديلة تُسمى **تبديلة زوجية** ، وإذا كان عدد التقاطعات عدد فردي فإن التبديلة تُسمى **تبديلة فردية**.

أو إذا كان عدد انقلابات التبديلة عدد زوجي فإن التبديلة تُسمى تبديلة زوجية ، وإذا كان عدد انقلابات التبديلة عدد فردي فإن التبديلة تُسمى تبديلة فردية.

وعدد التبديلات الزوجية على n من العناصر يساوي عدد التبديلات الفردية على n من العناصر.

ومحصلة تبديلتين زوجيتين تكون تبديلة زوجية، ومحصلة تبديلتين فرديتين تكون تبديلة زوجية . أما محصلة تبديلتين واحدة زوجية والأخرى فردية يكون تبديلة فردية.

فإذا أخذنا مجموعة التبديلات من الدرجة الثالثة للمجموعة $\{1,2,3\}$ وهي S_3

فإن S_3 بها ثلاث تبديلات زوجية هي:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}=I,\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3),\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2).$$

وبها ثلاثة تبديلات فردية هي:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}=(1\ 2),\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}=(1\ 3),\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}=(2\ 3)..$$

ويُرمز لمجموعة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة بالرمز S_3^+ ولمجموعة التبديلات الفردية من الدرجة الثالثة بالرمز S_3^-

- **تمارين:**

1- لتكن $\alpha,\beta,\gamma \in S_6$ حيث:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&3&6&5\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&2&4&3&1&6\end{pmatrix}.$$

(أ) اكتب كلا من α,β,γ بالتعبير الدائري.

(ب) احسب $\alpha\circ\beta,\ \alpha^2\circ\beta,\ \alpha\circ\gamma\circ\alpha^{-1}$

2- حدد أي من التبديلتين الآتيتين فردية وأيها زوجية:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&6&9&7&2&5&8&1&3\end{pmatrix},\ (1\ 2\ 3)\circ(2\ 4\ 6)\circ(5\ 4\ 3\ 2).$$

3- تحقق من أن الثنائي $<S_3^+,\circ>$ يمثل زمرة إبدالية،بينما $<S_3^-,\circ>$ لا يمثل زمرة.

4- إذا كانت $X=\{I,(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2)\}\subset S_4$

فتحقق من أن الثنائي $<X,\circ>$ يمثل زمرة إبدالية؟.

==

==========

(2) الزمر الدائرة Cyclic groups:

لتوضيح مفهوم الزمرة الدائرة ندرس النظام $<A,\times>$

حيث $A=\{1,-1,i,-i\};i=\sqrt{-1}$ ، "$\times$" عملية الضرب العادية.

نكون جدول يمثل النظام كما يلي:

$\times$	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

نلاحظ من الجدول أن:

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر A

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

(3) يوجد تماثل حول عناصر القطر الرئيسي في الجدول.

وعلى ذلك فإن النظام $<A,\times>$ يمثل زمرة إبدالية.

فإذا أخذنا قوى العنصر $i\in A$ فإننا نلاحظ أن:

$i^1=i,\ \ i^2=-1,\ \ i^3=-i,\ \ i^4=1$

وبذلك نكون قد حصلنا على جميع عناصر المجموعة A كقوى للعنصر i

يُقال في هذه الحالة أن الزمرة $<A,\times>$ مولدة بالعنصر i

أو أن العنصر i **مولد للزمرة** The Generator of a Group

ونلاحظ أن العنصر $-i\in A$ هو مولد آخر للزمرة حيث :

$(-i)^1=-i,\ \ (-i)^2=-1,\ \ (-i)^3=i,\ \ (-i)^4=1$

والعنصران $1,-1\in A$ لا يكونا مولدات للزمرة.

مثل هذه الزمرة $<A,\times>$ تُسمى زمرة دائرة مولداها $i,-i\in A$

تعريف: يُقال أن الزمرة G **زمرة دائرة** أو **زمرة دائرية** مولدة **بالعنصر** $a\in G$

إذا وإذا **فقط** كان:

$\forall x\in G\ \exists n\in Z;x=a^n.$

(أو $x = na$ في حالة عملية الجمع).
ويُعبر عن الزمرة في هذه الحالة بدلالة مولدها بالرمز $G =< a >$
لذا الزمرة $< A, \times >$ يُعبر عنها هكذا $A =< i >$ أو $A =< -i >$
مثال(1): الزمرة $< \{1,-1\}, \times >$ زمرة دائرة مولدها الوحيد هو -1
مثال(2): النظام $< Z_2, \oplus_2 >$ زمرة دائرة مولدها العنصر 1
مثال(3): الزمرة $< \{1, \omega, \omega^2\}, \times >$ زمرة دائرة مولداها العنصران ω, ω^2
حيث $1, \omega, \omega^2$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
مثال(4): النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ زمرة دائرة مولداتها العناصر $1,2$
مثال(5): إذا كانت $X = \{I, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$
فإن النظام $< X, \circ >$ يكون زمرة دائرة مولداتها $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)$
مثال(6): النظام $< Z_7 - \{0\}, \otimes_7 >$ زمرة دائرة مولداتها العناصر $3,5$
مثال(7): النظام $< Z, + >$ زمرة دائرة مولداتها العناصر $1,-1$
مثال(8): الزمرة $< X, \otimes_8 > ; X = \{1,3,5,7\} \subset Z_8$ ليست دائرية حيث ليس لها مولدات.
تمرين: تحقق من صحة الأمثلة السابقة؟.

- **تكوين وخصائص الزمرة الدائرة:**

لتكن G زمرة دائرة مولدة بالعنصر a أي أن $G=<a>$ ومن ثم تكون G على الصورة $G=\{...,a^{-2},a^{-1},a^{0}=e,a^{1},a^{2},...\}$ ويكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كانت جميع العناصر في الزمرة $G=<a>$ مختلفة فإن الزمـرة تكون لانهائية infinite (أي عدد عناصرها غير محدود)، وفي هذه الحالة إذا كان للزمرة مولدات أخرى ولتكن a^{m} مثلاً فإنه يوجد عدد صحيح $r\in Z$ بحيث:

$$a^{1}=(a^{m})^{r}=a^{mr}\Rightarrow mr=1\Rightarrow m=1\wedge r=1 \quad\vee\quad m=-1\wedge r=-1$$

أي أنه إذا كان a مولد للزمرة اللانهائية فإن العنصر a^{-1} يكون مولد آخر لها فقط.

الحالة الثانية: إذا كانت العناصر في الزمرة $G=<a>$ ليست جميعها مختلفة فإن الزمـرة تكون منتهية finite (أي عدد عناصرها محدود ويكون $a^{n}=a^{0}=e$) وفي هذه الحالة إذا كان للزمرة مولدات أخرى فتكون على الصورة a^{m} حيث m عدد أولي بالنسـبة لعدد عناصـر الزمـرة المحدود وليكن n مثلاً (أي لا يوجد بين m,n عامل مشترك سوى الواحد الصحيح) كما ستوضح النظرية التالية.

نظرية: لتكن $G=<a>$ وليكن $|G|=n$ فإن $G=<a^{m}>\Leftrightarrow (m,n)=1$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $(m,n)=1$ (أي أن العامل المشترك الأعلى بين m,n هو 1) وسنثبت أن $G=<a^{m}>$ كما يلي:

حيث إن العامل المشترك الأعلى بين m,n هو 1 فيمكن كتابة:

$$1=\alpha m+\beta n \quad ;\alpha,\beta\in Z$$

$$\therefore a=a^{1}=a^{\alpha m+\beta n}=a^{\alpha m}a^{\beta n}=(a^{m})^{\alpha}(a^{n})^{\beta}$$

$$=(a^{m})^{\alpha}(e)^{\beta}=(a^{m})^{\alpha}e=(a^{m})^{\alpha}$$

ولأي عنصر في الزمرة G وليكن $x=a^{r}\in G$ حيث $r\in Z$ يكون:

$$x=a^{r}=[(a^{m})^{\alpha}]^{r}=(a^{m})^{\alpha r}=(a^{m})^{k} \quad ;k=\alpha r\in Z$$

وإذاً يكون $G=<a^{m}>$

ثانيا: نفرض أن $G=<a^{m}>$ وسنثبت أن $(m,n)=1$ كما يلي:

لأي عنصر في الزمرة G وليكن $a \in G$ يمكن التعبير عنه بدلالة مولد الزمرة a^m كما يلي:

$$a = (a^m)^\alpha \quad ; \alpha \in Z$$
$$\therefore a^1 = a^{\alpha m} \Rightarrow a^{1-\alpha m} = a^0 = e = e^\beta = (a^n)^\beta = a^{\beta n}$$
$$\therefore 1 - \alpha m = \beta n \Rightarrow \alpha m + \beta n = 1$$
$$\therefore (m, n) = 1 \ .$$

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

مثال(8): لتكن $A = \{1 = \omega^8, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7\}$ مجموعة الجذور الثامنة للواحد الصحيح فإن $< A, \times >$ تكون زمرة دائرة مولدها العنصر ω وحيث إن عدد عناصر هذه الزمرة محدود وهو 8 فطبقا للنظرية السابقة لبحث المولدات الأخرى لهذه الزمرة نستبعد العناصر $\omega^2, \omega^4, \omega^6$ حيث إن بين قواها $\{2,4,6\}$ وبين عدد عناصر الزمرة 8 عامل مشترك خلاف الواحد الصحيح ، ومن ثم تكون المولدات الأخرى لهذه الزمرة هي $\omega^3, \omega^5, \omega^7$

أي أن $A = < \omega > = < \omega^3 > = < \omega^5 > = < \omega^7 >$

- **رتبة العنصر في الزمرة:**

تعريف: إذا كانت G زمرة فإنه يُقال أن **رتبة العنصر** $a\in G$ هي (أو تساوي) n (ويُكتب $|a|=n$) إذا كان n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^n = e$ حيث $e\in G$ هو العنصر المحايد للزمرة.
وإذا كان $a^n\neq e$ قيل أن العنصر a في الزمرة ليس له رتبة أو أن رتبته تساوي الصفر
وبديهي أن رتبة العنصر المحايد في الزمرة هي الواحد الصحيح حيث $e^1=e$

مثال(1): الزمرة $<Z,+>$ زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو 0 (رتبته1)
وأي عنصر آخر في Z خلاف 0 ليس له رتبة (أو أن رتبته هي 0) .

مثال(2): الزمرة $<S_3,\circ>$ رتب عناصرها تكون كالتالي:

العنصر	I	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
الرتبة	1	3	3	2	2	2

(تحقق من ذلك؟).

مثال(3): الزمرة $<Z_3,\oplus_3>$ رتب عناصرها تكون كالتالي:

العنصر	0	1	2
الرتبة	1	3	3

(تحقق من ذلك؟).

من هذه الأمثلة يتضح أنه توجد بعض الزمر جميع عناصرها لها رتبة ، كما توجد بعض الزمر لبعض عناصرها رتب وليس للباقين من عناصرها رتب.
والنظرية التالية تحدد الحالة التي يكون فيها لعناصر الزمرة رتب.

نظرية: إذا كانت G زمرة عدد عناصرها محدود فإن جميع عناصرها لها رتب.

البرهان: نفرض أن $a \in G$ ونكون المجموعة:

$$X = \{a^0 = e, a^1, a^2, a^3, ...\} \subseteq G$$

وحيث إن عدد عناصر G محدود وليكن m فإن عناصر المجموعة الجزئية X لا يمكن أن تكون جميعها مختلفة وإلا كان عدد عناصرها لانهائي مما يناقض كونها مجموعة جزئية من مجموعة محدودة، فإذا كان $a^r = a^m$ حيث $m > r$ فإنه بضرب طرفي المتساوية $a^r = a^m$ في a^{-r} من ناحية اليمين نجد أن:

$$a^r a^{-r} = a^m a^{-r} \Rightarrow e = a^{m-r} = a^h \; ; h = m - r \in Z^+$$

أي أنه يوجد عدد صحيح موجب h بحيث $a^h = e$ يتبقى أن نتأكد أن هذا العدد h هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^h = e$

لتكن مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة h_i التي تحقق العلاقة $a^{h_i} = e$

هي المجموعة:

$$Y = \{h_i \in Z^+ : a^{h_i} = e\}$$

ومن خصائص مجموعات الأعداد نعلم أن كل مجموعة عناصرها أعداد صحيحة موجبة لها حد أصغر وهو أصغر عدد صحيح موجب فيها ، وواضح أن $h_1 = 0$ أحد عناصر المجموعة Y يكون أصغر عدد يحقق العلاقة $a^{h_i} = e$

وإذاً رتبة العنصر a هي h_1 وعلى ذلك فإن لأي $a \in G$ يمكن إيجاد عدد صحيح موجب h يحقق العلاقة $a^h = e$

ومن ثم يكون لجميع عناصر الزمرة المحدودة رتب.

- **تمارين:**

1- ابحث رتب عناصر كل من الزمر:

(1) $< S_3^+, \circ >$.

(2) $< G, \times >\ ;\ G = \{1, -1, i, -i\}\ \ ;\ i = \sqrt{-1}.$

(3) $< A, \times >\ ;\ A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\}\ ;\ i^2 = -1.$

(4) $< X, \otimes_8 >\ ;\ X = \{1,3,5,7\} \subset Z_8.$

2- تحقق من أن

$$< A, \times >\ ;\ A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

يمثل زمرة دائرية ، وأوجد رتب عناصرها؟.

3- تحقق من أن النظام $< X, \otimes_{10} >\ ;\ X = \{2,4,6,8\} \subset Z_{10}$ يمثل زمرة دائرية ،
وأوجد رتب عناصرها؟.

==
=========

- **الزمرة الجزئية** Subgroup:

لنأخذ الزمرة $<G,\times>$ حيث $G=\{1,-1,i,-i\}; i=\sqrt{-1}$ ، "$\times$" عملية الضرب العادية.
الممثلة بالجدول:

$\times$	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

نلاحظ أن الجدول الجزئي بالركن الأعلى الأيسر وهو:

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

يمثل النظام $<\{1,-1\},\times>$ والذي بدوره يكون زمرة أيضاً ، وحيث إن $\{1,-1\}$ مجموعة جزئية من المجموعة $G=\{1,-1,i,-i\}$
فإنه في هذه الحالة نقول أن $<\{1,-1\},\times>$ زمرة جزئية من الزمرة $<G,\times>$
ونلاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من G مع العملية "$\times$" تكون زمرة جزئية من الزمرة $<G,\times>$. فمثلاً $<\{1,i\},\times>$ لا تمثل زمرة أصلاً وبالتالي لا تكون زمرة جزئية من الزمرة $<G,\times>$
<u>تعريف</u>: لتكن $<G,*>$ زمرة ، ولتكن $H\subseteq G$ فإذا كان $<H,*>$ زمرة أيضاً فإننا نقول أن H **زمرة جزئية** من G ويُرمز لذلك جبرياً بالرمز $H\le G$

ملاحظة: لأي زمرة G توجد دائماً زمرتان جزئيتان تُسميان بالزمرتين غير الفعليتين أو الزمرتين الواضحتين trivial subgroups وهما G, $\{e\}$ وعلى ذلك

نقول أن H زمرة جزئية فعلية من الزمرة G إذا كانت

$$H \neq \{e\}, H \neq G$$

مثال(1): الزمرة $< S_3^+, \circ >$ زمرة جزئية من الزمرة $< S_3, \circ >$ (تحقق من ذلك؟).

الإثبات:

$$S_3 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\},$$
$$S_3^+ = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

واضح أن $S_3^+ \subset S_3$

نكون الجدول الممثل للنظام $< S_3^+, \circ >$ كما يلي:

$\circ$	I	(1 2 3)	(1 3 2)
I	I	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	I
(1 3 2)	(1 3 2)	I	(1 2 3)

من الجدول نلاحظ أن :

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر S_3^+ .

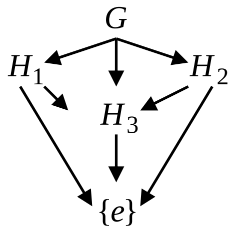
(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

وعلى ذلك فإن النظام $< S_3^+, \circ >$ يمثل زمرة، وبالتالي يكون $S_3^+ \leq S_3$

مثال(2): إذا كانت $a \in G$ فإن أي زمرة مولدة بالعنصر a تكون زمرة جزئية من G (أي أن $< a > \leq G$).

تمثيل الزمر الجزئية بالشكل العنقودي Lattice diagram:

لتكن G زمرة ، ولتكن H_1, H_2, H_3 زمر جزئية فعلية من الزمرة G ، ولتكن H_3 زمرة جزئية فعلية من كل من الزمرتين H_1, H_2 فيمكن تمثيل مجموعة الزمر الجزئية الفعلية H_1, H_2, H_3 بالإضافة إلى الزمرتين غير الفعليتين $\{e\}, G$ بالشكل العنقودي التالي:



ويُفهم من الشكل العنقودي أن أي مجموعة (زمرة) تقع في صف من الصفوف للشكل تكون مجموعة جزئية (زمرة جزئية) من أي مجموعة (زمرة) تقع في صف أعلى منه.

مثال: اكتب جميع الزمر الجزئية من الزمرة S_3 وارسم شكلاً عنقوديا لها.

الحل:

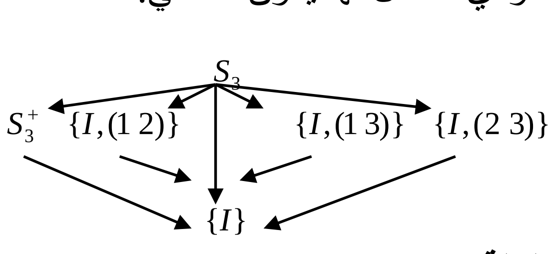
المجموعات الجزئية الفعلية من مجموعة التبديلات S_3 والتي تمثل كل منها زمرة مع عملية تحصيل التبديلات "$\circ$"

هي $S_3^+, \{I,(1\ 2)\}, \{I,(1\ 3)\}, \{I,(2\ 3)\}$

وتوجد زمرتان جزئيتان غير فعليتان للزمرة S_3 هما $\{I\}, S_3$ وعلى ذلك فإن جميع الزمر الجزئية من الزمرة S_3 تكون:

$S_3, \{I\}, S_3^+, \{I,(1\ 2)\}, \{I,(1\ 3)\}, \{I,(2\ 3)\}$

والشكل العنقودي الممثل لها يكون كالتالي:



تمارين محلولة:

1- إذا كانت $H_1 = \{1,2,4,5,7,8\},\ H_2 = \{1,4,7\},\ H_3 = \{1,8\}$

تحقق من أن:

1. كلاً من $<H_1,\otimes_9>,<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$ تكون زمرة.
2. كلاً من $<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$ تكون زمرة جزئية

من $<H_1,\otimes_9>$

<u>الحل</u>:

1. نكون الجداول الممثلة

للأنظمة $<H_1,\otimes_9>,<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$

كما يلي:

الجدول الممثل للنظام $<H_1,\otimes_9>$:

$\otimes_9$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

والجدول الممثل للنظام $<H_2,\otimes_9>$:

$\otimes_9$	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

والجدول الممثل للنظام $<H_3,\otimes_9>$:

$\otimes_9$	1	8

1	1	8
8	8	1

من الجداول نلاحظ أن :

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر المجموعة الممثلة .

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

وعلى ذلك فإن كلاً من $<H_1,\otimes_9>,<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$ تكون زمرة.

2. واضح أن $H_2 \subset H_1\,, H_3 \subset H_1$ وأثبتنا أن $<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$ كلاهما يكون زمرة .

فإذاً كلاً من $<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$ تكون زمرة جزئية من $<H_1,\otimes_9>$

2- اكتب جميع الزمر الجزئية للزمرة $A=\{1=\omega^8,\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5,\omega^6,\omega^7\}$ بدلالة مولداتها. ثم ارسم شكلاً عنقودياً لها.

<u>الحل</u>:

المجموعات الجزئية الفعلية من مجموعة الجذور الثامنة للواحد الصحيح والتي تمثل كل منها زمرة مع عملية الضرب هي $\{1,\omega^4\},\{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\}$ وتوجد زمرتان جزئيتان غير فعليتان للزمرة A هما $A,\{1\}$ وعلى ذلك فإن جميع الزمر الجزئية من الزمرة A تكون:

$$A\ ,\{1\},\{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\},\{1,\omega^4\}$$

وببحث مولدات هذه الزمر الجزئية تكون كالتالي:

$$A=<\omega>=<\omega^3>=<\omega^5>=<\omega^7>,$$
$$\{1\}=<1>,$$
$$\{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\}=<\omega^2>=<\omega^6>,$$
$$\{1,\omega^4\}=<\omega^4>.$$

والشكل العنقودي الممثل لها يكون كالتالي:

$$A=<\omega>=<\omega^3>=<\omega^5>=<\omega^7>$$
$$\downarrow$$
$$\{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\}=<\omega^2>=<\omega^6>$$
$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \{1,\omega^4\} = <\omega^4> \\ \quad\downarrow \\ \{1\} = <1> \end{array}$$

3- اكتب جميع الزمر الجزئية للزمرة S_3 بدلالة مولداتها. ثم ارسم شكلاً عنقوديا لها.

<u>الحل</u>:

المجموعات الجزئية الفعلية من مجموعة التبديلات S_3 والتي تمثل كل منها زمرة مع عملية تحصيل التبديلات "$\circ$"

هي $S_3^+, \{I,(1\ 2)\}, \{I,(1\ 3)\}, \{I,(2\ 3)\}$

وتوجد زمرتان جزئيتان غير فعليتان للزمرة S_3 هما $\{I\}, S_3$ وعلى ذلك فإن جميع الزمر الجزئية من الزمرة S_3 تكون:

$S_3, \{I\}, S_3^+, \{I,(1\ 2)\}, \{I,(1\ 3)\}, \{I,(2\ 3)\}.$

وببحث مولدات هذه الزمر الجزئية تكون كالتالي:

$\{I\} = <I>,$

$S_3^+ = <(1\ 2\ 3)> = <(1\ 3\ 2)>,$

$\{I,(1\ 2)\} = <(1\ 2)>,$

$\{I,(1\ 3)\} = <(1\ 3)>,$

$\{I,(2\ 3)\} = <(2\ 3)>.$

والشكل العنقودي الممثل لها يكون كالتالي:

$$\begin{tikzcd}
 & & S_3 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
<(1\ 2\ 3)> = <(1\ 3\ 2)> \arrow[drr] & <(1\ 2)> \arrow[dr] & & <(1\ 3)> \arrow[dl] & <(2\ 3)> \arrow[dll] \\
 & & \{I\} = <I> & &
\end{tikzcd}$$

- **<u>خصائص الزمرة الجزئية:</u>**

(1) أي زمرة جزئية من زمرة إبدالية تكون إبدالية ، ولكن إذا كانت الزمرة الجزئية إبدالية فليس من الضروري أن تكون الزمرة الأصلية إبدالية.

(مثال: الزمرة S_3^+ زمرة إبدالية وهي كما نعلم زمرة جزئية من الزمرة S_3 الغير إبدالية).

(2) العنصر المحايد في أي زمرة جزئية يكون هو نفس العنصر المحايد في الزمرة الأصلية .

<u>ولإثبات ذلك على وجه العموم:</u>

نفرض أن $<H,*>$ زمرة جزئية من الزمرة $<G,*>$ وأن العنصر المحايد في الزمرة G هو e_1 وأن العنصر المحايد في الزمرة الجزئية H هو e_2 وعلى ذلك يكون:

$$a*e_1 = a \quad \forall a \in H \subseteq G,$$
$$a*e_2 = a \quad \forall a \in H \subseteq G$$
$$\therefore a*e_1 = a*e_2 \Rightarrow e_1 = e_2.$$

(3) معكوس أي عنصر في الزمرة الجزئية هو معكوسه في الزمرة الأصلية.

<u>ولإثبات ذلك:</u>

نفرض أن $<H,*>$ زمرة جزئية من الزمرة $<G,*>$ وأن معكوس العنصر $a \in H$ هو العنصر b ، وأن معكوس العنصر $a \in H \subseteq G$ في الزمرة G هو العنصر c وعلى ذلك يكون:

$$a*b = e\,,\ a*c = e \quad \forall a \in H \subseteq G, e \in H \subseteq G,$$
$$\therefore a*b = a*c \Rightarrow b = c.$$

نظرية(1): لتكن H مجموعة جزئية من G حيث $<G,*>$ زمرة فإن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$ إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $a*b \in H \ \ \forall a,b \in H,$

(ii) $a^{-1} \in H \ \ \forall a \in H.$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $<H,*>$ زمرة جزئية من $<G,*>$ وبالتالي تكون $<H,*>$ زمرة أي تحقق شروط الزمرة ، وإذاً يتحقق الشرطان (i),(ii) .

ثانياً: نفرض تحقق الشرطان (i),(ii) ، وسنثبت أن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$ كما يلي:

(أ) من الشرط (i) نجد أن العملية "$*$" مغلقة على H

(ب) حيث إن جميع عناصر H تنتمي إلى G والعملية "$*$" دامجة على G لأن G زمرة فتكون العملية "$*$" دامجة على H

(ج) من الشرطين (i),(ii) نجد أن: $a*a^{-1}=e\in H \quad , a,a^{-1}\in H$

أي يوجد عنصر محايد $e\in H$

(د) من الشرط (ii) لكل $a\in H$ يوجد معكوس $a^{-1}\in H$

وإذاً $<H,*>$ تحقق شروط الزمرة ومن المعطيات $H\subseteq G$

وعلى ذلك فإن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$

نظرية(2): لتكن H مجموعة جزئية من G حيث $<G,*>$ زمرة فإن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$a*b^{-1}\in H \ \forall a,b\in H .$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $<H,*>$ زمرة جزئية من $<G,*>$ وبالتالي فإن:

$$a,b\in H \Rightarrow a^{-1},b^{-1}\in H \Rightarrow a*b^{-1}\in H .$$

ثانياً: نفرض أن $a*b^{-1}\in H \ \forall a,b\in H$ وسنثبت أن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$:

(أ) لكل $a\in H$ يكون $a*a^{-1}\in H \Rightarrow e\in H$ أي أنه يوجد عنصر محايد.

(ب) لكل $a\in H$ يكون $e*a^{-1}\in H \Rightarrow a^{-1}\in H$ أي أنه يوجد معكوس.

(ج) لكل $a,b\in H$ يكون $a,b^{-1}\in H \Rightarrow a*(b^{-1})^{-1}\in H \Rightarrow a*b\in H$

أي أن العملية $*$ مغلقة على H.

(د) حيث إن العملية $*$ دامجة على G وأن $H\subseteq G$ فهي دامجة على H

وإذاً النظام $<H,*>$ يحقق شروط الزمرة ، ومن المعطيات $H\subseteq G$

وعلى ذلك فإن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$

نظرية(3): ليكن H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G فإن $H_1 \cap H_2$ تكون زمرة جزئية من G

البرهان:

$$\text{Let } \; a,b \in H_1 \cap H_2$$
$$\Rightarrow a,b \in H_1 \wedge a,b \in H_2$$
$$\Rightarrow a*b^{-1} \in H_1 \wedge a*b^{-1} \in H_2 \quad (\text{من نظرية}(2))$$
$$\Rightarrow a*b^{-1} \in H_1 \cap H_2 .$$
$$\Rightarrow H_1 \cap H_2 \le G \quad (\text{من نظرية}(2)).$$

ملاحظة: إذا كانت H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G فليس من الضرورة

أن يكون $H_1 \cup H_2$ زمرة جزئية من G كما يتضح في المثال التالي:

مثال: $H_1 = \{I,(1\,2)\}, H_2 = \{I,(1\,3)\}$ زمرتين جزئيتين من الزمرة S_3 بينما $H_1 \cup H_2 = \{I,(1\,2),(1\,3)\}$ لا تكون زمرة (تحقق من ذلك؟) .

ومن ثم لا تكون زمرة جزئية من الزمرة S_3

- **المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية** Co-sets:

تعريف: لتكن $<H,*>$ زمرة جزئية من الزمرة $<G,*>$ وليكن $a \in G$ فإن المجموعتين: $Ha = \{h*a : h \in H\}$, $aH = \{a*h : h \in H\}$

تُسميان **المجموعة المرافقة** (أو المصاحبة أو المشاركة) **اليمينية** Right Co-set و**المجموعة المرافقة** (أو المصاحبة أو المشاركة) **اليسارية** Left Co-set للزمرة H بالنسبة للعنصر a على الترتيب0

مثال(1): لنأخذ الزمرة $<G,\times>$ حيث $G=\{1,-1,i,-i\};i=\sqrt{-1}$ ، "$\times$" عملية الضرب العادية ، والزمرة الجزئية $<H,\times>$ حيث $H=\{1,-1\}$ من الزمرة $<G,\times>$

فإن المجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة H بالنسبة للعنصر $i\in G$ تكون:

$$Hi=\{1\times i,-1\times i\}=\{i,-i\},$$
$$iH=\{i\times 1,i\times -1\}=\{i,-i\}.$$

مثال(2): المجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة الجزئية S_3^+ (زمرة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة) من الزمرة S_3 (زمرة التبديلات من الدرجة الثالثة) بالنسبة للعنصر $(1\ 2)\in S_3$ تكون:

$$\begin{aligned}S_3^+(1\ 2)&=\{I\circ(1\ 2),(1\ 2\ 3)\circ(1\ 2),(1\ 3\ 2)\circ(1\ 2)\}\\&=\{(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3)\}.\\(1\ 2)S_3^+&=\{(1\ 2)\circ I,(1\ 2)\circ(1\ 2\ 3),(1\ 2)\circ(1\ 3\ 2)\}\\&=\{(1\ 2),(2\ 3),(1\ 3)\}.\end{aligned}$$

نلاحظ أن $S_3^+(1\ 2)=(1\ 2)S_3^+=S_3^-$

والمجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة الجزئية S_3^+ (زمرة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة) بالنسبة للعنصر $(1\ 2\ 3)\in S_3$ تكون:

$$\begin{aligned}S_3^+(1\ 2\ 3)&=\{I\circ(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 3)\circ(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\circ(1\ 2\ 3)\}\\&=\{(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),I\}.\\(1\ 2\ 3)S_3^+&=\{(1\ 2\ 3)\circ I,(1\ 2\ 3)\circ(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 3)\circ(1\ 3\ 2)\}\\&=\{(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),I\}.\end{aligned}$$

نلاحظ أن $S_3^+(1\ 2\ 3)=(1\ 2\ 3)S_3^+=S_3^+$

تمرين: كون المجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة الجزئية $H=\{I,(1\ 2)\}$ من الزمرة S_3 بالنسبة للعناصر $a=(1\ 3),b=(1\ 2)$ حيث $a,b\in S_3$

الحل:

$$\begin{aligned}Ha&=\{I\circ(1\ 3),(1\ 2)\circ(1\ 3)\}\\&=\{(1\ 3),(1\ 3\ 2)\}.\end{aligned}$$

$$aH = \{(1\,3)\circ I, (1\,3)\circ(1\,2)\}$$
$$= \{(1\,3), (1\,2\,3)\}.$$
$$Hb = \{I\circ(1\,2), (1\,2)\circ(1\,2)\}$$
$$= \{(1\,2), I\}.$$
$$bH = \{(1\,2)\circ I, (1\,2)\circ(1\,2)\}$$
$$= \{(1\,2), I\}.$$

نلاحظ أن $Ha \neq aH\,,\ Hb = bH = H$

مما سبق نستنتج الملاحظات الآتية:

ملاحظات: إذا كانت $a \in G\ ,\ H \leq G$ فإن:

(1) $aH = Ha$ عندما تكون G إبدالية .

(2) من الممكن ألا يكون Ha أو aH زمرة جزئية من G

- **<u>خصائص المجموعات المرافقة:</u>**

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G فإن الخصائص التالية تتحقق:

(1) $Ha = H \Leftrightarrow a \in H \quad , \quad aH = H \Leftrightarrow a \in H\,.$

<u>الإثبات:</u>

<u>أولاً</u>: نفرض أن $a \in H$ وسنثبت أن $Ha = H$:

$$h_1 \in Ha \Rightarrow h_1 = ha \in H \quad \forall h, a \in H$$
$$\therefore Ha \subseteq H \qquad \text{(i)}$$
$$h \in H \Rightarrow h = he = h(a^{-1}a) = (ha^{-1})a = h_1 a \in Ha \quad ; h_1 = ha^{-1}$$
$$i.e\ \ h \in H \Rightarrow h \in Ha.$$
$$\therefore H \subseteq Ha \qquad \text{(ii)}$$

من (i),(ii) ينتج أن $Ha = H$

ثانياً: نفرض أن $Ha=H$ وسنثبت أن $a\in H$ كما يلي:
من تعريف المجموعة المرافقة اليمينية يكون:
$$Ha=\{ha:h\in H\}=H.$$
ويحدث هذا فقط إذا كان $a\in H$
من أولاً وثانياً نستنتج أن $Ha=H\Leftrightarrow a\in H$
وبالمثل يمكن إثبات أن $aH=H\Leftrightarrow a\in H$

(2) $Ha=Hb\Leftrightarrow ba^{-1}\in H \;\;,\;\; aH=bH\Leftrightarrow a^{-1}b\in H$.

الإثبات:
$$\begin{aligned}Ha=Hb &\Leftrightarrow (Ha)a^{-1}=(Hb)a^{-1}\\ &\Leftrightarrow H(aa^{-1})=H(ba^{-1})\\ &\Leftrightarrow He=H(ba^{-1})\\ &\Leftrightarrow H=H(ba^{-1})\\ &\Leftrightarrow ba^{-1}\in H. \quad (from\ (1))\end{aligned}$$
وبالمثل يمكن إثبات أن $aH=bH\Leftrightarrow a^{-1}b\in H$.

(3) $Ha\cap Hb\neq\phi\Leftrightarrow Ha=Hb \;\;,\;\; aH\cap bH\neq\phi\Leftrightarrow aH=bH$.

(أي أن أي مجموعتين مختلفتين من المجموعات المرافقة تكونا منفصلتين).

الإثبات:
$$\begin{aligned}c\in Ha\cap Hb &\Leftrightarrow c\in Ha\wedge c\in Hb\\ &\Leftrightarrow c=h_1a\wedge c=h_2b\ ; h_1,h_2\in H\\ &\Leftrightarrow h_1a=h_2b\\ &\Leftrightarrow ba^{-1}=h_2^{-1}h_1\in H\\ &\Leftrightarrow Ha=Hb. \quad (from\ (2))\end{aligned}$$
وبالمثل يمكن إثبات أن $aH\cap bH\neq\phi\Leftrightarrow aH=bH$

(4) $\exists\ 1-1\ corrosponding\ \ f:Ha\to Hb\ ;\ f(ha)=hb\ \ \forall\, ha\in Ha$,
$\exists\ 1-1\ corrosponding\ \ g:aH\to bH\ ;\ g(ah)=bh\ \ \forall\, ah\in aH$.

(أي يوجد تقابل(راسم تناظر أحادي) بين أي مجموعتين مرافقتين يمينيتين أو يساريتين للزمرة الجزئية H من الزمرة G وبعبارة أخرى أي عدد العناصر في كل منهما متساوي).

الإثبات:

لإثبات أن الراسم $f:Ha\rightarrow Hb$ تناظر أحادي نثبت أنه أحادي وفوقي:

$$h_1a,h_2a\in Ha\ ,\ f(h_1a)=f(h_2a)$$
$$\Leftrightarrow h_1b=h_2b$$
$$\Leftrightarrow h_1=h_2$$
$$\Leftrightarrow h_1a=h_2a.$$

وإذاً f يكون أحادي.

$$x\in f(Ha)\Leftrightarrow x=hb\Leftrightarrow x\in Hb$$
$$\therefore\ f(Ha)=Hb.$$

وإذاً f يكون فوقي.

وعلى ذلك فإن الراسم $f:Ha\rightarrow Hb$ تناظر أحادي .

وبالمثل يمكن إثبات أن الراسم $g:aH\rightarrow bH$ تناظر أحادي .

(5) $\bigcup\limits_{a\in G}Ha=G\ ,\ \bigcup\limits_{a\in G}aH=G.$

(أي اتحاد جميع المجموعات المرافقة اليمينية أو اليسارية للزمرة الجزئية H يساوى الزمرة الأصلية G).

<u>الإثبات:</u>

$$x\in\bigcup_{a\in G}Ha\Leftrightarrow x=ha\in Ha\ ;a\in G,H\le G\Leftrightarrow x\in G$$
$$\therefore\bigcup_{a\in G}Ha=G.$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $\bigcup\limits_{a\in G}aH=G$

<u>تمرين:</u> تحقق من صحة الخصائص السابقة على المجموعات المرافقة اليسارية0

- **نظرية لاجرانج للزمر:**

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ، وليكن عدد عناصر G محدود(n مثلاً)، وعدد عناصر H محدود (m مثلاً) فإن n تقبل القسمة على m

البرهان: لتكن $Ha_1, Ha_2, ..., Ha_l$ هي كل المجموعات المرافقة اليمينية المختلفة للزمرة H حيث إن أحد العناصر $a_1, a_2, ..., a_l$ لابد أن يكون هو العنصر المحايد $e \in G$ وليكن $a_1 = e$ ومن الخاصيتين (3),(5) للمجموعات المرافقة نستنتج أن المجموعة $\{He, Ha_2, ..., Ha_l\}$ تكون تجزيء للمجموعة G وعلى ذلك يكون:

$$G = He \cup Ha_2 \cup ... \cup Ha_l .$$

$$\therefore |G| = |He| + |Ha_2| + ... + |Ha_l|.$$

وحيث إن عدد عناصر أي مجموعة مرافقة للزمرة الجزئية H يكون مساوياً لعدد عناصر H وعلى ذلك يكون:

$$|G| = |H| + |H| + ... + |H|. \quad (l - times)$$

$$\therefore n = lm.$$

وإذاً n تقبل القسمة على m

مثال: الزمرة $< H_1, \otimes_9 >$ حيث $H_1 = \{1,2,4,5,7,8\}$ عدد عناصرها $|H_1| = 6$ ، والزمرة $< H_2, \otimes_9 >$ حيث $H_2 = \{1,4,7\}$ عدد عناصرها $|H_2| = 3$ ، والزمرة $< H_3, \otimes_9 >$ حيث $H_3 = \{1,8\}$ عدد عناصرها $|H_3| = 2$ ،

وواضح أن H_2, H_3 زمر جزئية من H_1 وأن 6 تقبل القسمة على كل من 2,3

ملاحظة: عكس نظرية لاجرانج غير صحيح في الحالة العامة. أي إذا كان عدد عناصر الزمرة G محدود (n مثلاً) ، وكان هذا العدد يقبل القسمة على العدد m فليس بالضرورة أن نجد زمرة جزئية من الزمرة G عدد عناصرها m

مثال: الزمرة $< S_4^+, \circ >$ حيث S_4^+ مجموعة التبديلات الزوجية من الدرجة الرابعة:

$$S_4^+ = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

واضح أن $|S_4^+| = 12$ ولكن لا توجد زمرة جزئية منها عدد عناصرها يساوي 6

- **الزمر الجزئية القياسية(الناظمة)** Normal Sub-groups:

تعريف: لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G فإذا كان $aH = Ha$ لكل $a \in G$ فإن H تُسمى **زمرة جزئية قياسية (أو زمرة جزئية ناظمة)** على الزمرة G

ويُرمز لذلك بالرمز $H \lhd G$

مثال(1): الزمرة S_3^+ تكون زمرة جزئية قياسية على الزمرة S_3 وذلك لأن:

$$IS_3^+ = S_3^+ I \ ,$$
$$(1\ 2\ 3)S_3^+ = S_3^+(1\ 2\ 3) \ ,$$
$$(1\ 3\ 2)S_3^+ = S_3^+(1\ 3\ 2) \ ,$$
$$(1\ 2)S_3^+ = S_3^+(1\ 2) \ ,$$
$$(1\ 3)S_3^+ = S_3^+(1\ 3)$$
$$(2\ 3)S_3^+ = S_3^+(2\ 3) \ .$$

أي أن $aS_3^+ = S_3^+ a \ \forall a \in S_3$ (تحقق من ذلك؟).

مثال(2): الزمرة $H = \{I, (1\ 2)\}$ ليست زمرة جزئية قياسية على الزمرة S_3

وذلك لأن $(1\ 3)H \neq H(1\ 3)$ (تحقق من ذلك؟).

مثال(3): إذا كانت $< G, \times >$ زمرة حيث $G = \{1, -1, i, -i\}$

وكانت $H = \{1, -1\}$ زمرة جزئية من G فتحقق من أن $H \lhd G$

الحل:

$$1H = \{1\times 1, 1\times -1\} = \{1\times 1, -1\times 1\} = H1 \ ,$$
$$(-1)H = \{-1\times 1, -1\times -1\} = \{1\times -1, -1\times -1\} = H(-1) \ ,$$
$$iH = \{i\times 1, i\times -1\} = \{1\times i, -1\times i\} = Hi \ ,$$
$$(-i)H = \{-i\times 1, -i\times -1\} = \{1\times -i, -1\times -i\} = H(-i).$$

أي أن لكل $a \in G$ يتحقق $aH = Ha$ وإذاً $H \lhd G$

نظرية(1): $H \lhd G \Leftrightarrow aHa^{-1} = H \quad \forall a \in G$ (أي أن الزمرة الجزئية H تكون زمرة قياسية على الزمرة G إذا وإذا فقط كان $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$).

البرهان: أولاً: نفرض أن $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$ وسنثبت أن $H \lhd G$:

$$h \in H = aHa^{-1} \Rightarrow h = aha^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow ah = ha$$
$$\Rightarrow aH = Ha$$

$\therefore H \lhd G.$

ثانياً: نفرض أن $H \lhd G$ وسنثبت أن $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$:
حيث إن H زمرة قياسية على الزمرة G فيكون $aH = Ha$ لكل $a \in G$
وهذا يؤدي إلى أن $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$
من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

- **الزمرة البسيطة** Simple group:

تعريف: إذا كانت الزمرة G لا تحتوي على أي زمر جزئية قياسية سوى الزمرتين غير الفعليتين $\{e\}, G$ فإنها تُسمى **زمرة بسيطة**.

مثال: كلا من الزمرتين $< \{1,-1\}, \times >$, $< \{I,(1\ 2)\}, \circ >$ زمرة بسيطة.
وكلا من الزمرتين $< Z_4, \oplus_4 >$, $< Z,+ >$ زمرة ليست بسيطة (تحقق من ذلك؟)

ملاحظة: إذا كانت G زمرة إبدالية فإن أي زمرة جزئية منها تكون زمرة قياسية عليها، والعكس ليس صحيحا في الحالة العامة، وذلك لأنه توجد زمرة جزئية قياسية من زمرة غير إبدالية كما في المثال التالي:

مثال: زمرة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة S_3^+ زمرة جزئية قياسية على الزمرة S_3 الغير إبدالية.

نظرية(2): إذا كانت G زمرة وكانت H زمرة جزئية قياسية على G وكانت $T=\{Ha : a\in G\}$ هي مجموعة كل المجموعات المرافقة اليمينية للزمرة الجزئية H
وعرفنا العملية "$*$" على T بالعلاقة:

$$Ha * Hb = Hab \quad \forall a,b\in G$$

فإن النظام $<T,*>$ يكون زمرة عدد عناصرها $|T|=|G|/|H|$

البرهان:

حيث إن T مجموعة كل المجموعات المرافقة اليمينية للزمرة الجزئية القياسية H على الزمرة G فإن $aH=Ha$ لأي $a\in G$ ومن نظرية لاجرانج يكون $|G|=|T||H|$

أي أن $|T|=|G|/|H|$

ولإثبات أن $<T,*>$ زمرة نتبع الآتي:

(أ) حيث إن لأي $a,b\in G$ يمكن كتابة $a=h_1a_1\ ,b=h_2b_1$
حيث $a_1,b_1\in G, h_1,h_2\in H\subseteq G$ فيكون لأي $Ha,Hb\in T$:

$$\begin{aligned}
Ha * Hb = Hab &= H(h_1a_1)(h_2b_1)\\
&= Hh_1(a_1(h_2b_1))\\
&= H(a_1(h_2b_1)) \ \ ;H \lhd G\\
&= H((a_1h_2)b_1)\\
&= H((h_2a_1)b_1) \ ;H \lhd G\\
&= Hh_2(a_1b_1)\\
&= Ha_1b_1 \quad ;H \lhd G\\
&= Hc\in T \ \ ;c=a_1b_1\in G.
\end{aligned}$$

وإذا تكون العملية "$*$" مغلقة على T

(ب) العملية "$*$" دامجة على T حيث لأي $Ha,Hb,Hc\in T$ نجد أن:

$$\begin{aligned}
(Ha * Hb) * Hc = (Hab) * Hc &= H(ab)c\\
&= Ha(bc) = Ha * Hbc = Ha * (Hb * Hc).
\end{aligned}$$

(ج) العنصر $He \in T$ يمثل العنصر المحايد بالنسبة للعملية "$*$" حيث لأي $Ha \in T$ نجد أن:

$$Ha * He = Hae = Ha\,,$$
$$He * Ha = Hea = Ha\,.$$

(د) لأي عنصر $Ha \in T$ يوجد معكوس بالنسبة للعملية "$*$" هو $Ha^{-1} \in T$ بحيث:

$$Ha * Ha^{-1} = Haa^{-1} = He\,,$$
$$Ha^{-1} * Ha = Ha^{-1}a = He\,.$$

وعلى ذلك فإن النظام $< T,* >$ يحقق شروط الزمرة .

وتُسمى هذه الزمرة **الزمرة العاملة** Factor group

(أو زمرة التقسيم Quotient group) ويُرمز لها بالرمز G/H

- **التشاكل والتشابه النمطي بين الزمر** Isomorphism between groups: مفهوم التشاكل والتشابه النمطي بين الأنظمة الجبرية من أشهر المفاهيم الأساسية

في الرياضيات الحديثة ، ويُستخدم مفهوم التشاكل والتشابه في دراسة نظام جبري معقد نوعاً ما عن طريق نظام جبري آخر أسهل منه يشابهه ، ولذلك سنبحث فيما يلي تشاكل وتشابه الزمر.

تعريف(1): إذا كانت $<G_1,*>, <G_2,\#>$ زمرتين. فإن الراسم $f: G_1 \to G_2$ يُسمى **راسم حافظ (أو تشاكل)** Homomorphism بين الزمرتين G_1, G_2 إذا كان يحافظ على العملية في كل من الزمرتين أي إذا تحقق الشرط:

$$f(a*b) = f(a)\# f(b)\ \forall a,b \in G_1 .$$

- إذا كان $G_1 = G_2$ فإن الراسم f يُسمى تشاكل داخلي Endomorphism
- وإذا كان f أحادي فإن f يُسمى تشاكل أحادي Monomorphism
- وإذا كان f فوقي فإن f يُسمى تشاكل فوقي Epiomorphism

مثال(1): نعلم أن $<Z,+>$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة، "+" عملية الجمع العادية تكون زمرة ابدالية، والمجموعة $A=\{1,-1,i,-i\}$ حيث $i=\sqrt{-1}$ تكون زمرة مع عملية الضرب العادية.
فإذا عرفنا الراسم $f: Z \to A$ كما يلي:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & if\ n\ even, \\ -1 & if\ n\ odd. \end{cases} \quad \forall n \in Z.$$

فإن f يكون راسم حافظ.
<u>الإثبات</u>: نفرض $m,n \in Z$ فتوجد ثلاث حالات:
<u>أولاً</u>: إذا كان كلا من m,n أعداد زوجية فإن مجموعهما $m+n$ يكون عدد زوجي

$$\therefore\ f(m)=1,\ f(n)=1,$$
$$f(m+n)=1=1\times 1 = f(m)\times f(n).$$

ثانياً: إذا كان كلا من m,n أعداد فردية فإن مجموعهما $m+n$ يكون عدد زوجي

$$\therefore\ f(m)=-1,\ f(n)=-1,$$
$$f(m+n)=1=-1\times-1=f(m)\times f(n).$$

ثالثاً: إذا كان أحد العددين m,n عدد زوجي، والآخر عدد فردي فإن مجموعهما $m+n$ يكون عدد فردي،

$$\therefore\ f(m)=1,\ f(n)=-1\ \vee\ f(m)=-1,\ f(n)=1\ ,$$
$$f(m+n)=-1=1\times-1=f(m)\times f(n),$$
$$f(m+n)=-1=-1\times1=f(m)\times f(n).$$

مما سبق نجد أنه في كل الحالات $f(m+n)=f(m)\times f(n)$

ومن ثم فإن الراسم f يكون راسم حافظ.

<u>ومن المثال السابق نلاحظ أن:</u>

(1) $f(0)=1$

(2) إذا عرفنا الراسم $f:Z\to A$ كما يلي: $\forall n\in Z$

$$f(n)=\begin{cases}-1 & if\ \ n\ \ even,\\ \ \ 1 & if\ \ n\ \ odd.\end{cases}$$

فإن f لا يكون راسم حافظ حيث $2,4\in Z$ ومن ثم يكون:

$$f(2)=-1,\ f(4)=-1,$$
$$f(2+4)=f(6)=-1,$$
$$f(2)\times f(4)=-1\times-1=1$$
$$\therefore\ f(2+4)\neq f(2)\times f(4).$$

مثال(2): الراسم $f:<S_3,\circ>\to<Z_6,\oplus_6>$ المعرف كما يلي:

$$f(I)=f((1\ 2\ 3))=f((1\ 3\ \ 2))=0,$$
$$f((1\ 2))=f((1\ 3))=f((2\ 3))=3.$$

يكون راسم حافظ (تحقق من ذلك؟).

<u>ومن المثال السابق نلاحظ أن:</u>

(1) $f(I)=0$

(2) $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}\ \forall x\in S_3$ حيث x^{-1} هو معكوس x بالنسبة للعملية "$\circ$"

(تحقق من ذلك؟).

(3) الزمرة $<S_3,\circ>$ زمرة ليست ابدالية بينما الزمرة $<Z_6,\oplus_6>$ زمرة ابدالية.

ومن الأمثلة السابقة نستنتج النظرية التالية:

نظرية(1): إذا كان f راسم حافظ بين الزمرتين $<G_1,*>,<G_2,\#>$ وكان e_1,e_2 هما العنصران المحايدان في الزمرتين G_1,G_2 على الترتيب فإن:

(1) $f(e_1)=e_2.$

(2) $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}\ \ \forall x\in G_1.$

الإثبات:

(1) $let\ x\in G_1\ ,\ f(x)\in G_2.$

$$\therefore\ f(x)=f(x*e_1)\Rightarrow f(x)\#e_2=f(x)\#f(e_1)\Rightarrow e_2=f(e_1).$$

(2) $\because\ f(e_1)=e_2$

$$\therefore\ f(x*x^{-1})=e_2\Rightarrow f(x)\#f(x^{-1})=e_2$$

$$\Rightarrow [f(x)]^{-1}\#[f(x)\#f(x^{-1})]=[f(x)]^{-1}\#e_2$$

$$\Rightarrow [[f(x)]^{-1}\#f(x)]\#f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$$

$$\Rightarrow e_2\#f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$$

$$\Rightarrow f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}.$$

▪ **نواة ومدى الراسم الحافظ:**

The Kernel and Image of a Homomorphism:

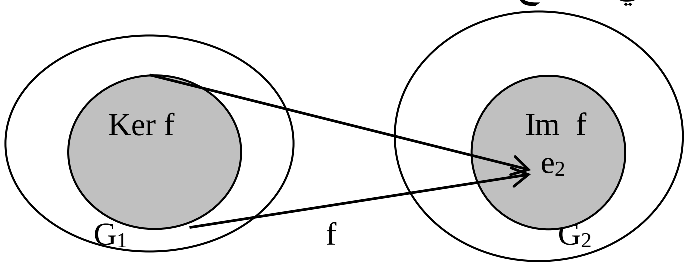
تعريف(2): إذا كان $f:G_1\to G_2$ راسم حافظ بين الزمرتين G_1, G_2 فإن نواة f تُعرف كما يلي:

$$\ker f=\{x : x\in G_1 , f(x)=e_2\}\subset G_1.$$

كذلك مدى f يُعرف كما يلي:

$$\operatorname{Im} f=\{y : y\in G_2 ,\exists x\in G_1 ; f(x)=y\}\subset G_2.$$

والشكل التالي يوضح هذين المفهومين:



مثال(3): نواة ومدى الراسم الحافظ $f:Z\to A$ المعرف في مثال(1) تكونان:

$$\ker f=\{n : n\in Z ,\ n\ \ even\}=\{0,\pm2,\pm4,...\}\subset Z,$$
$$\operatorname{Im} f=\{1,-1\}\subset A.$$

(تحقق من ذلك؟).

مثال(4): الراسم $f:<S_3,\circ>\to<Z_4,\oplus_4>$ والمعرف كما يلي:

$$f(I)=f((1\ 2\ 3))=f((1\ 3\ \ 2))=0,$$
$$f((1\ 2))=f((1\ 3))=f((2\ 3))=2.$$

هو راسم حافظ بين الزمرتين S_3, Z_4 (تحقق من ذلك؟) ويكون:

$$\ker f=\{I,(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}\subset S_3,$$
$$\operatorname{Im} f=\{0,2\}\subset Z_4.$$

مثال(5):إذا كانت $A=\{a,b\}$ فإن $<P(A),\Delta>$ تكون زمرة ابدالية حيث Δ الفرق المتماثل ، وإذا كانت $B=\{1,-1,i,-i\}$ حيث $i=\sqrt{-1}$ فإن $<B,\times>$ تكون زمرة ابدالية أيضاً.
نعرف الراسم $f:P(A)\to B$ كما يلي:

$$f(X)=1 \quad \forall\ X\in P(A).$$

فإن f يكون راسم حافظ (تحقق من ذلك؟)
ويكون $\ker f=P(A)\ ,\ \operatorname{Im} f=\{1\}$

نظرية(2): إذا كان f راسم حافظ بين الزمرتين $<G_1,*>,<G_2,\#>$ وكان أن e_1,e_2 هما العنصران المحايدان في الزمرتين G_1,G_2 على الترتيب فإن:

(1) $\ker f\le G_1$ (أي أن $\ker f$ تكون زمرة جزئية من الزمرة G_1).
(2) $\operatorname{Im} f\le G_2$ (أي أن $\operatorname{Im} f$ تكون زمرة جزئية من الزمرة G_2).

<u>الإثبات:</u>

(1) لكي تكون $\ker f$ زمرة جزئية من الزمرة G_1 يجب أن يتحقق الشرط:

$$x_1*x_2^{-1}\in\ker f\quad \forall x_1,x_2\in\ker f.$$
$$let\ x_1,x_2\in\ker f\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=e_2\ ,$$
$$\because\ f(x_2^{-1})=[f(x_2)]^{-1}=[e_2]^{-1}=e_2\ ,$$
$$\therefore\ f(x_1*x_2^{-1})=f(x_1)\#f(x_2^{-1})=e_2\#e_2=e_2\Rightarrow x_1*x_2^{-1}\in\ker f.$$
$$\therefore \ker f\le G_1.$$

(2) ولكي تكون $\operatorname{Im} f$ زمرة جزئية من الزمرة G_2 يجب أن يتحقق الشرط:

$$y_1\#y_2^{-1}\in\operatorname{Im} f\quad \forall y_1,y_2\in\operatorname{Im} f.$$
$$let\ y_1,y_2\in\operatorname{Im} f\Rightarrow\exists\ x_1,x_2\in G_1\ ;\ f(x_1)=y_1\ ,\ f(x_2)=y_2\ ,$$
$$\therefore y_1\#y_2^{-1}=f(x_1)\#[f(x_2)]^{-1}=f(x_1)\#f(x_2^{-1})=f(x_1*x_2^{-1})\in\operatorname{Im} f.$$
$$\therefore \operatorname{Im} f\le G_2.$$

نظرية(3): إذا كان f راسم حافظ بين الزمرتين $<G_1,*>,<G_2,\#>$ وكان أن e_1,e_2 هما العنصران المحايدان في الزمرتين G_1,G_2 على الترتيب فإن:

الراسم f يكون أحادي إذا وإذا فقط كان $\ker f=\{e_1\}$

الإثبات:

أولاً: نفرض أن f أحادي، وسنثبت أن $\ker f=\{e_1\}$ كما يلي:

$$\begin{aligned} x\in\ker f &\Rightarrow f(x)=e_2\ ,\ f(e_1)=e_2 \\ &\Rightarrow f(x)=f(e_1) \\ &\Rightarrow x=e_1. \end{aligned}$$

وإذاً تكون $\ker f=\{e_1\}$

ثانياً: نفرض أن $\ker f=\{e_1\}$ وسنثبت أن f راسم أحادي كما يلي:

$$\begin{aligned} x_1,x_2\in G_1\ ,\ f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow f(x_1)\#[f(x_2)]^{-1}=f(x_2)\#[f(x_2)]^{-1} \\ &\Rightarrow f(x_1)\#f(x_2^{-1})=e_2 \\ &\Rightarrow f(x_1*x_2^{-1})=e_2 \\ &\Rightarrow x_1*x_2^{-1}\in\ker f=\{e_1\} \\ &\Rightarrow x_1*x_2^{-1}=e_1 \\ &\Rightarrow x_1=x_2. \end{aligned}$$

وإذاً f راسم أحادي .

تعريف(3): إذا كانت $<G_1,*>,<G_2,\#>$ زمـرتين فإن الراسـم الحافظ $f:G_1\to G_2$ يُسمى **تماثل (أو تشـابه نمطي)** Isomorphism بين الزمرتين G_1,G_2 إذا كان f تناظـر أحادي (أحادي وفوقي)، وفي هذه الحالة يُقال أن الزمرتين G_1,G_2 متماثلتان (أو متشابهتان نمطياً) Isomorphic

ويُرمز لذلك جبرياً بالرمز $G_1\cong G_2$

مثال(6): الزمرتين $<Z,+>,<E,+>$ متشابهتان نمطيا حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة، E مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، "+" عملية الجمع العادية.

<u>الإثبات</u>:

<u>أولاً</u>: نعرف راسم $f:Z\to E$ بالعلاقة $f(x)=2x\ \forall x\in Z$

<u>ثانياً</u>: نثبت أن هذا الراسم يكون راسم حافظ كما يلي:

$$\begin{aligned}
&x_1,x_2\in Z\\
&\therefore\ f(x_1+x_2)=2(x_1+x_2)\\
&\qquad\qquad\quad=2x_1+2x_2\\
&\qquad\qquad\quad=f(x_1)+f(x_2).
\end{aligned}$$

<u>ثالثاً</u>: نثبت أن الراسم f تناظر أحادي (أحادي وفوقي) كما يلي:

(1) $x_1,x_2\in Z,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

وإذاً f يكون راسم أحادي.

(2) $y\in E\ \ ,y=f(x)\Rightarrow y=2x\Rightarrow x=\dfrac{y}{2}\in Z$.

وإذاً f يكون راسم فوقي.

يتضح من أولاً وثانياً وثالثاً أن f تشابه نمطي بين الزمرتين

$<Z,+>,<E,+>$

أي أن $Z\cong E$

<u>تمرين محلول</u>: إذا كانت $A=\{a : a=3^n \ , n\in Z\}$ فتحقق من أن الزمرة $<A,\times>$ تشابه نمطياً الزمرة $<Z,+>$

<u>الحل</u>:

نعرف الراسم $f : Z \to A$ بالعلاقة $f(n)=3^n \ \ \forall n\in Z$

ونثبت أن f راسم حافظ وتناظر أحادي كما يلي:

$(1)\ \ m,n\in Z \ \ , f(m+n)=3^{m+n}=3^m\times 3^n = f(m)\times f(n).$

$(2)\ \ m,n\in Z \ \ , f(m)=f(n)\Rightarrow 3^m=3^n \Rightarrow m=n.$

$(3)\ \ \forall 3^n\in A \ \ \exists n\in Z \ ;3^n = f(n).$

وعلى ذلك فإن الراسم f راسم حافظ وتناظر أحادي .

ومن ثم يكون $A\cong Z$.

<u>ملاحظة</u>: لبحث التشاكل والتشـابه النمطي بين زمرتين عدد عناصركل منهما محدود: نكون الجدولين الممثلين لكل منهما فإذا كان الجدولان الممثلان للزمرتين متشابهين تماماً (أي أن تركيبهما متشابه تماماً) بحيث يمكن اعتبار أحدهما ناتج

من الأخر أو أن كلاً منهما تعبير مختلف لتركيب واحد.

فإنه في هذه الحالة نقول أن الزمرتين متشابهتان نمطيا.

مثال(7): ابحث تشاكل وتشابه الزمرتين: $<S_3^+,\circ>, <Z_3,\oplus_3>$

<u>الحل</u>: $S_3^+=\{I,(1\,2\,3),(1\,3\,2)\},\ Z_3=\{0,1,2\}$

نكون الجدولين الممثلين للزمرتين كما يلي:

جدول الزمرة $<S_3^+,\circ>$:

$\circ$	I	(1 2 3)	(1 3 2)
I	I	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	I
(1 3 2)	(1 3 2)	I	(1 2 3)

وجدول الزمرة $<Z_3,\oplus_3>$:

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2

1	1	2	0
2	2	0	1

ونلاحظ أنه إذا عرفنا الراسم $f : S_3^+ \to Z_3$ بالعلاقة:

$$f(I) = 0\ ,\ f((1\ 2\ 3)) = 1\ ,\ f((1\ 3\ 2)) = 2.$$

فيكون هذا الراسم حافظ ويكون تناظر أحادي.

كما نلاحظ أن:

إذا استبدلنا في الجدول الأول العنصر I بالعنصر 0 و العنصر $(1\ 2\ 3)$ بالعنصر 1 والعنصر $(1\ 3\ 2)$ بالعنصر 2 فإننا نحصل مباشرة على الجدول الثاني.

ولذلك يمكن تكوين جدول واحد يشمل الجدولين السابقين كما يلي:

$\circ$ $\oplus_3$	I 0	(1 2 3) 1	(1 3 2) 2
I 0	I 0	(1 2 3) 1	(1 3 2) 2
(1 2 3) 1	(1 2 3) 1	(1 3 2) 2	I 0
(1 3 2) 2	(1 3 2) 2	I 0	(1 2 3) 1

ونلاحظ من هذا الجدول أن:

(1) العنصر المحايد للزمرة الأولى وهو I يجاور العنصر المحايد للزمرة الثانية وهو 0 .

(2) العنصر الثاني في الزمرة الأولى وهو $(1\ 2\ 3)$ يجاور العنصر الثاني في الزمرة الثانية وهو 1 .

(3) العنصر الثالث في الزمرة الأولى وهو (2 3 1) يجاور العنصر الثالث في الزمرة الثانية وهو 2 .
أي أن العناصر المتناظرة في الزمرتين متجاورة في خانات الجدول.
ومن ثم يكون $S_3^+ \cong Z_3$

- **<u>ملاحظات على التشاكل بين الزمر:</u>**

عند بحث تشاكل أو تشابه زمرتين يجب أولاً التأكد مما يلي:
(1) إذا كانت إحدى الزمرتين ابدالية فلابد أن تكون الأخرى ابدالية.
(2) إذا كانت إحدى الزمرتين ليست ابدالية فلابد أن تكون الأخرى ليست ابدالية.
(3) إذا كانت إحدى الزمرتين دائرية فلابد أن تكون الأخرى دائرية، وفي هذه الحالة يجب أن يكون مولد إحداهما هو صورة لمولد الأخرى، ومن ثم يكون للزمرتين الدائرتين المتشاكلتين نفس العدد من المولدات.
(4) أي زمرة دائرية منتهية رتبتها n تماثل الزمرة $< Z_n, \oplus_n >$
وأي زمرة دائرية غير منتهية تماثل الزمرة $< Z, + >$.

<u>تمارين:</u>

(1) حدد أي من الرواسم الآتية يكون تشاكل داخلي على زمرة الأعداد الصحيحة $< Z, + >$ وإذا كان الراسم تشاكل عين نواة ومدى هذا الراسم.

(1) $f(n) = n + 1.$

(2) $f(n) = 2n.$

(3) $f(n) = 1.$

(2) ليكن f راسم من زمرة الأعداد المركبة $< C, \times >$ إلى زمرة الأعداد الحقيقية $< R, \times >$ معرف كما يلي:

$f(a+ib)=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}.$

فتحقق من أن f يكون راسم حافظ غير أحادي وغير شامل.

(3) ليكن $f:<R,+>\to<R^+,\times>$ راسم معرف كما يلي:

$f(x)=e^x \quad \forall x\in R.$

فتحقق من أن f يكون تشابه نمطي.

(4) ليكن f راسم من الزمرة $<X,\oplus>$ إلى الزمرة $<Y,\otimes>$ معرف كما يلي:

$f(n)=-n \quad \forall n\in X.$

حيث:

$x\oplus y=x+y+xy.\ \forall x,y\in X=R-\{-1\},$

$a\otimes b=a+b-ab.\ \forall a,b\in Y=R-\{1\}.$

R the set of all real numbers.

فتحقق من أن $X\cong Y$

(5) ليكن $X=Z_5-\{0\},Y=\{1,i,-i,-1\}$ فإن كلا من $<X,\otimes_5>,<Y,\times>$ يكون زمرة دائرية (تحقق من ذلك؟) وتحقق من أن $X\cong Y$

==