جبر خطى

رياضة بحتة 8

كلية التربية بالغردقة

الباب الأول

أنظمة المعادلات الخطية

Systems of linear equations

مفهوم المعادلة الخطية: المعادلة $a_1x+a_2y=b$ تُسمى معادلة خطية في (مجهولين) متغيرين x, y .

وبشكل أعم تُعرف المعادلة الخطية في عدد n من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ بأنها معادلة على الصورة :

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b \qquad (1)$$

حيث $a_1, a_2, ..., a_n, b$ ثوابت حقيقية.

ملاحظة: نلاحظ أن المعادلة الخطية لا تشتمل على أي حواصل ضرب أو جذور للمتغيرات، ولا تظهر كدلائل لدوال مثلثية أو لوغاريتمية أو أسية.

أمثلة: المعادلات الآتية:

$$x+3y=7 \;,\; x_1+x_2-3x_3+x_4=5 \;,\; y=\frac{1}{2}x+3z+1$$

معادلات خطية.

بينما المعادلات الآتية:

$$x+3y^2=7 \;,\; y-\sin x=0 \;,\; \sqrt{x}+2y+xz=0$$

ليست خطية.

حل المعادلة الخطية: $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$ هو متتابعة من n من الأعداد $s_1, s_2, ..., s_n$ تحقق المعادلة عند إجراء التعويض:

$$x_1=s_1 \,, x_2=s_2 \,, ..., x_n=s_n .$$

تُسمى الفئة المكونة من كل حلول المعادلة الخطية بفئة الحل لها .

وتُسمى أي مجموعة منتهية من معادلات خطية في المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نظام مجموعة المعادلات الخطية System of Linear Equations

وتُسمى متتابعة الأعداد $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ حل للنظام إذا كان التعويض $x_1 = s_1 , x_2 = s_2 , \ldots, x_n = s_n$ يحقق كل معادلة في هذا النظام.

ويُسمى نظام المعادلات الخطية الذي ليس له أي حل **نظام متناقضاً(غير متآلف)** أما إذا وُجد للنظام حل واحد على الأقل فيسمى **نظاما متآلفاً** (**أو متسق) consistent** .

فمثلاً النظام: $3x - 6y = 1 \; , \; 2x - 4y = 5$ غير متآلف ومن ثم فليس له حل (حيث لا توجد قيم للمتغيرين x, y تحقق المعادلات في آن واحد).

وكذلك النظام: $x - 2y + 3z = 2 \; , \; 2x + 3y - 2z = 5 \; , \; 4x - y + 4z = 1$ غير متآلف ومن ثم فليس له حل.

أما النظام: $x + y = 1 \; , \; x + 8y = 1$ فهو نظام متآلف وله الحل $x = 1 \; , y = 0$

وكذلك النظام: $x + y + 2z = 9 \; , \; 2x + 4y - 3z = 1 \; , \; 3x + 6y - 5z = 0$ نظام متآلف وله الحل $x = 1 \; , y = 2 \; , z = 3$

وأي نظام اختياري لعدد m من المعادلات الخطية في n من المتغيرات يُكتب في الصورة:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (2)$$

حيث المتغيرات هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، وأن $a_{ij} \, , b_i \;\; , 1 \le i \le m \;\; , \; 1 \le j \le n$ تدل على ثوابت معلومة لدينا .

ويُمكن التعبير عن نظام مجموعة المعادلات(2) في الصورة المصفوفية:

$$AX = B \qquad (3)$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;,\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

المصفوفة A تُسمى **مصفوفة المعاملات coefficient matrix** المناظرة لنظام المعادلات الخطية(2) ، والمصفوفة $(A:B)$ وتُكتب:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

تُسمى **المصفوفة الممتدة augmented matrix** المناظرة لنظام المعادلات الخطية(2)

مثال: مصفوفة المعاملات والمصفوفة الممتدة لنظام المعادلات:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

تكون هي على الترتيب:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

ملاحظة:عند بناء المصفوفة الممتدة لمجموعة المعادلات الخطية يجب كتابة المتغيرات بنفس الترتيب في كل معادلة.

وفيما يلي سنبحث طرق الحل لنظام مجموعة المعادلات الخطية $AX = B$:

١- طريقة المحددات: تُنسب هذه الطريقة إلى **كرامر Krammer** وهذه الطريقة تصلح فقط عندما يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد المتغيرات وتكون مصفوفة المعاملات A المناظرة للنظام $AX = B$ غير مفردة (أي محددها لا يساوي الصفر) ويكون للنظام حل وحيد في الصورة:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}\ ,\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}\ ,\ \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

حيث إن A_j هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بالتعويض بالمصفوفة العمودية B بدلا من العمود j في المصفوفة A .

وكحالة خاصة إذا كانت المصفوفة $|A| \neq 0$, $B = (0)$ فإن الحل الوحيد للمعادلة $AX = B$ يكون هو الحل الصفري $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

مثال: بطريقة المحددات أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + z = 4$$
$$x + y + 2z = 4$$

الحل: واضح أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل ومصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ ,\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

وعلى ذلك حل مجموعة المعادلات يُعطى من العلاقة:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}\ ,\ y = \frac{|A_2|}{|A|}\ , z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

حيث:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ , \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ , \ |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore \ x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1, \ y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1 \, , z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$$

وعلى ذلك فإن فئة (مجموعة) الحل للمعادلات تكون $\{1,1,1\}$.

٢- طريقة المعكوس الضربي: وهذه الطريقة أيضاً تصلح فقط عندما يكون عدد المعادلات مســـاوياً لعدد المتغيرات وتكون مصفوفة المعاملات A المناظرة للنظام $AX = B$ قابلة للانعكاس ويكون للنظام حل وحيد في الصورة $X = A^{-1}B$

والمعكوس الضربي للمصفوفة A يُحسب كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{(\widetilde{A})^t}{|A|} .$$

حيث $adjA$ هي المصفوفة القرين $adjugate$ للمصفوفة A وهي تساوي مدور مصفوفة المعاملات المرافقة $co - factors(a_{ij}) = (\Delta_{ij})$ لعناصر المصفوفة A .

مثال: بطريقة المعكوس الضربي أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + z = 4$$
$$x + y + 2z = 4$$

الحل: الشكل المصفوفي المناظر لمجموعة المعادلات يكون $AX = B$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

وحيث إن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \, .$$

وإذاً يكون للمعادلة المصفوفية $AX = B$ حل وحيد هو $X = A^{-1}B$.

نوجد الآن المصفوفة A^{-1} كما يلي:

نحسب عناصر مصفوفة المعاملات المرافقة للمصفوفة A وهي $\widetilde{A} = (\Delta_{ij})$

كما يلي:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\therefore \widetilde{A} = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ adjA = \widetilde{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ومن ثم يكون:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

وعلى ذلك فإن مجموعة الحل للمعادلات تكون $\{1,1,1\}$.

٣- طريقة الاختزال بالحذف The Reduction Method:

تُنسب هذه الطريقة إلى **جاوس-جوردان Gauss-Jordan** وهذه الطريقة تصلح في جميع الأحوال لإيجاد الحل لأي نظام متآلف من المعادلات الخطية ، وتتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام إلى ما يُسمى بالشكل الصفي المتدرج المختزل Reduced Row-Echelon Form وذلك بإجراء مجموعة من العمليات (أو الخطوات) على صفوف المصفوفة الممتدة وهذه العمليات تُسمى بالعمليات الأولية وهي:

(١) ضرب صفا بأكمله في ثابت غير صفري.

(٢) إبدال صفين.

(٣) إضافة مضاعف صف لصف آخر.

ثم بعد الاختزال وبالنظر إلى المصفوفة المختزلة الأخيرة يمكن الحصول على الحل بمجرد النظر (كما سيتضح فيما بعد في الأمثلة).

ولكي تكون المصفوفة في الشكل الصفي المتدرج المختزل يجب أن تتوافر لها الخواص التالية:

(١) إذا لم يكن الصف في المصفوفة مكونا بكامله من أصفار ، يكون الواحد هو العنصر الأول غير الصفري في الصف (يُسمى هذا العنصر بالواحد المتقدم).

(٢) إذا وُجدت أي صفوف مكونة بكاملها من أصفار لتجمع معا في قاع (أسفل) المصفوفة .

(٣) في أي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار يوجد الواحد المتقدم في الصف الأسفل على يمين الواحد المتقدم في الصف الأعلى.

(٤) يكون بالعمود المحتوى على الواحد المتقدم أصفار في كل مكان عدا هذا العنصر .

✓ **تمرين فصلي**: حدد أي من المصفوفات الآتية في الشكل الصفي المتدرج المختزل؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✓ ملاحظات:

(١) فكرة اختزال المصفوفة مبنية على أساس جعل المصفوفة تحتوي على أكبر عدد ممكن من الأصفار، ويُفضل اختزال المصفوفة بطريقة منظمة توفيرا للوقت والجهد.

(٢) عدد الآحاد المتقدمة في القطر الرئيسي للمصفوفة المختزلة يساوي رتبة المصفوفة الأصلية.

✓ وفيما يلي ملخص لتنفيذ طريقة الاختزال:

أولاً: بجعل أول عنصر غير صفري في الصف الأول واحد صحيح ، ثم نجعل ما تحته أصفارا ، وهكذا في الصفوف التالية على الترتيب.

ثانياً: نجعل ما فوق الآحاد المتقدمة أصفارا على الترتيب.

✓ **أمثلة:**

مثال(١): اختزل المصفوفة الآتية إلى الشكل الصفي المتدرج المختزل.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/7)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✓ **تمرين فصلي**: تحقق من صحة ما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 26 & 10 \\ 2 & -7 & 30 & 9 \\ 3 & -12 & 43 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

مثال(٢): اختزل المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

الحل:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 = r_1]{r_1 = r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/2)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/2)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{5r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -23/2 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(23/2)r_3 + r_1]{(7/2)r_3 + r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

مثال(٣):بطريقة الاختزال بالحذف أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x+y+2z=9$$
$$2x+4y-3z=1$$
$$3x+6y-5z=0$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&9\\2&4&-3&1\\3&6&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&2&-7&-17\\0&3&-11&-27\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/2)r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&1&-7/2&-17/2\\0&3&-11&-27\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&1&-7/2&-17/2\\0&0&-1/2&-3/2\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&9\\0&1&-7/2&-17/2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&11/2&35/2\\0&1&-7/2&-17/2\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[(-11/2)r_3+r_1]{(7/2)r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}.$$

وبالنظر إلى المصفوفة المُختزلة الأخيرة نلاحظ أن العمود الأول فيها يناظر معاملات x والعمود الثاني يناظر معاملات y ، والعمود الثالث يناظر معاملات z .

وبالتالي فإن المعادلات المناظرة للمصفوفة المختزلة الأخيرة تكون:

$x=1$,
$y=2$,
$z=3.$

وعلى ذلك فإن فئة الحل لمجموعة المعادلات تكون $\{(x,y,z)=(1,2,3)\}$.

مثال(٤): ابحث حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}
&x_1+3x_2-2x_3+2x_5=0\\
&2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6=-1\\
&5x_3+10x_4+15x_6=5\\
&2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6=6
\end{aligned}$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\2&6&-5&-2&4&-3&-1\\0&0&5&10&0&15&5\\2&6&0&8&4&18&6\end{pmatrix}\underset{-2r_1+r_4}{\overset{-2r_1+r_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&-1&-2&0&-3&-1\\0&0&5&10&0&15&5\\0&0&4&8&0&18&6\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&5&10&0&15&5\\0&0&4&8&0&18&6\end{pmatrix}\underset{-4r_2+r_4}{\overset{-5r_2+r_3}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&6&2\end{pmatrix}\underset{r_4=r_3}{\overset{r_3=r_4}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&6&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/6)r_3}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&1&1/3\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&0&4&2&6&2\\0&0&1&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&1&1/3\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{-6r_3+r_1}{\overset{-3r_3+r_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&3&0&4&2&0&0\\0&0&1&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1/3\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{aligned}&x_1+3x_2+4x_4+2x_5=0\\&x_3+2x_4=0\\&x_6=1/3\end{aligned}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{aligned}&x_1=-3x_2-4x_4-2x_5\,,\\&x_3=-2x_4\,,\\&x_6=1/3\end{aligned}$$

واضح أنه يمكن تعيين x_3 بدلالة x_4 وتعيين x_1 بدلالة x_2,x_4,x_5 (المتغيرات الحرة) ، ويمكن التعويض عن هذه المتغيرات الحرة بأي قيم اختيارية ، وعلى ذلك يكون للمعادلات عدد لانهائي من الحلول.

المعادلات الخطية المتجانسة Homogeneous Linear Equations:

مجموعة المعادلات الخطية تسمى متجانسة إذا كانت الحدود الثابتة أصفار أي أن المجموعة تكون في الصورة:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

وهذه المعادلات الخطية المتجانسة تكون دائماً متآلفة لأن

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

هو دائما حل لها ويُسمى هذا الحل بالحل الصفري (الحل التافه) ، وإذا وُجدت حلول أخرى فتُسمى هذه الحلول بالحلول غير الصفرية.

وحيث إن أي مجموعة من المعادلات الخطية المتجانسة يجب أن تكون متآلفة ، فلذلك يُوجد لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة إما حل وحيد وهو الحل الصفري أو عدد لا نهائي من الحلول.

وتوُجد حالة واحدة يتأكد عندها وجود حل خلاف الحل الصفري لنظام المعادلات المتجانسة – بالتحديد – عندما تكون مصفـــوفة المعاملات المناظرة للنظام غير قابلة للانعكاس (أي محددها متلاشي)

أو عندما يحوي النظام عدد من المجاهيل أكثر من عدد المعادلات.

✓ **أمثلة:**

مثال(١):بطريقة الاختزال أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

$$x+2y-3z=0$$
$$3x-y+5z=0$$
$$4x+y-2z=0$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\3 & -1 & 5 & 0\\4 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_1+r_3]{-3r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\0 & -7 & 14 & 0\\0 & -7 & 10 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1/7)r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & -7 & 10 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1/4)r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3+r_1]{2r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

وبالتالي فإن المعادلات المناظرة للمصفوفة المختزلة الأخيرة تكون:

$$x=0\ ,$$
$$y=0\ ,$$
$$z=0$$

وعلى ذلك يكون لمجموعة المعادلات حل وحيد هو الحل الصفري.

مثال(٢): بطريقة الاختزال ابحث حل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

$$x+3y-2z=0$$
$$x-8y+8z=0$$
$$3x-2y+4z=0$$

الحل: نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & 8 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/11)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -10/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/11 & 0 \\ 0 & 1 & -10/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \quad \begin{matrix} x+(8/11)z=0 \\ y-(10/11)z=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=-(8/11)z \\ y=(10/11)z \end{matrix}$$

واضح أنه يمكن تعيين كلا من x, y بدلالة z (المتغير الحر) ،

باختيار $z=0$ نحصل على الحل الصفري ،

وباختيار $z=11$ تكون $x=-8, y=10$ (حل خلاف الحل الصفري) ، وباختيار قيمة أخرى للمتغير z نحصل على حل أخر خلاف الحل الصفري ، وهكذا ...

ومن ثم يكون للمعادلات أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

مثال(٣): بطريقة الاختزال ابحث حل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

الحل:

نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)r_2]{r_1=r_3\,,\,r_3=r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_3]{-r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/3)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3+r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_4+r_2]{2r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2=r_3\,,\,r_3=r_2]{r_2=r_4\,,\,r_4=r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_5 = 0 & & x_1 = -x_2 - x_5 \\ \therefore\ & x_3 + x_5 = 0 & \Rightarrow\ & x_3 = -x_5 \\ & x_4 = 0 & & x_4 = 0 \end{aligned}$$

واضح أنه يمكن تعيين x_3 بدلالة x_5 وتعيين x_1 بدلالة x_2, x_5 (المتغيرات الحرة) ، ومن ثم يكون للمعادلات أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

✓ **<u>تمرين فصلي</u>**: تحقق من أن مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\\
&x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\\
&2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 0\\
&4x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 0
\end{aligned}
$$

يكون لها أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

تماريـــــــن

١. تحقق من أن مجموعة المعادلات الخطية الآتية يكون لها حل غير الحل الصفري:

$$2x - y + 3z = 0$$
$$4x + 5y - z = 0$$
$$x + 3y - 2z = 0$$

٢. تحقق من أن فئة الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

تكون هي $\{\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$.

٣. تحقق من أن فئة الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + y + z = 2$$
$$2x + y + z = 3$$
$$3x + 2y - 5z = 5$$

تكون هي $\{1,1,0\}$.

٤. تحقق من أن مجموعة المعادلات الخطية الآتية يكون لها عدد لا نهائي من الحلول:

$$x + y + z = 3$$
$$2x + 3y + 4z = 9$$
$$3x + 4y + 5z = 12$$

٥. تحقق من أن حل مجموعة المعادلات الخطية:

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

يكون هو $x_1 = -1, x_2 = 0.6, x_3 = 0.4$.

٦. ابحث الحل لكل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x-2y+3z&=2\\ 2x+3y-2z&=5\\ 4x-y+4z&=1 \end{aligned} \quad ,$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=3\\ 2x+3y+8z&=4\\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned} \quad ,$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=1 \end{aligned}$$

الباب الثاني

الفضاءات المتجهة Vector Spaces

في هذا الباب سنتناول بمشيئة الله دراسة: الفضاء النوني ، والحقل ، والفضاء الخطي والفضاء الجزئي ، ومفهوم التركيبة الخطية والارتباط والاستقلال الخطي ، ومفهوم الأساس والبعد للفضاءات المتجهة ، وبالتالي سنقسم هذا الباب إلى خمسة فصول:

١- فضاء الإحداثيات النوني R^n:

تعريف(١): الثلاثي المرتب (x_1, x_2, x_3) يمكن النظر إليه كنقطة الفضاء R^3 وفي هذه الحالة تكون x_1, x_2, x_3 هي إحداثياتها ، ويمكن النظر إليه كمتجه وفى هذه الحالة تكون x_1, x_2, x_3 هي مركباته .

وعموماً القوس النوني المرتب $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ordered n-tuple يمكن أن يُنظر إليه كتعميم للنقطة أو كتعميم للمتجه ويكون الاختلاف جبريا غير ذي أهميه. تُسمى مجموعة الأقواس النونية المرتبة **الفضاء النوني** ويُرمز لها بالرمز R^n .

تعريف(٢): إذا كان $u,v \in R^n$ حيث

$$u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \ , \ v = (v_1,v_2, \ldots,v_n)$$

فإن المجموع $u+v$ يُعرف كما يلي:

$$u+v = (u_1+v_1,u_2+v_2, \ldots,u_n+v_n).$$

وإذا كان k أي عدد قياسي فإننا نعرف ku كما يلي:

$$ku = (ku_1,ku_2, \ldots,ku_n).$$

تُسمى عمليتا الجمع والضرب في عدد قياسي في هذا التعريف بالعمليتين القياسيتين على الفضاء النوني R^n .

ونعرف المتجه الصفري في R^n بأنه المتجه $0 = (0,0, \ldots,0)$

وإذا كان $u = (u_1,u_2, \ldots,u_n)$ أي متجه في R^n فإن معكوس u بالنسبة للجمع يُرمز له بالرمز $-u$ ويكون $-u = (-u_1,-u_2, \ldots,-u_n)$

ونعرف الفرق:

$$u-v = u+(-v) = (u_1,u_2, ...,u_n)+(-v_1,-v_2 , ...,-v_n)$$
$$= (u_1-v_1,u_2-v_2, ...,u_n-v_n) \quad \forall\ u,v\in R^n$$

نظرية(١): إذا كانت

$u = (u_1,u_2, ...,u_n),\ v = (v_1,v_2 , ...,v_n),\ w = (w_1,w_2, ...,w_n)$

ثلاث متجهات في R^n وكان k_1, k_2 عددين قياسيين فإن الخواص الآتية تكون صحيحة:

(1) $u+v = v+u.$
(2) $u+(v+w) = (u+v)+w.$
(3) $\exists\ 0\in R^n\ ;\ u+0 = 0+u = u.$
(4) $\exists -u \in R^n\ ;\ u +(-u) = 0.$
(5) $k_1(u+v) = k_1u+k_1v.$
(6) $(k_1+k_2)u = k_1u+k_2u.$
(7) $(k_1k_2)u = k_1(k_2u) = k_2(k_1u).$
(8) $1u = u.$

الإثبات: يترك للطالب.

ملاحظة: تمكننا هذه النظرية من التعامل مع متجهات الفضاء النوني R^n بدون التعبير عن المتجهات بدلالة المركبات، بنفس الطريقة التي نتعامل بها مع الأعداد الحقيقية .

فمثلا لحل معادلة المتجهات $x+u=v$ بالنسبة إلى x يمكننا إضافة ($-u$) إلى كل من الطرفين كما يلي:

$$(x+u)+(-u) = v+(-u)$$
$$\therefore\ x+(u-u) = v-u$$
$$\therefore\ x+0 = v-u$$
$$\therefore\ x = v-u$$

تعريف(٣): إذا كان $u=(u_1, u_2, \dots , u_n),v=(v_1, v_2 , \dots , v_n)$ متجهين في الفضاء النوني R^n فإن **حاصل الضرب القياسي Scalar product** أو **حاصل الضرب الداخلي Inner product للمتجهين u,v** يُعرف كما يلي:

$$u.v = u_1v_1+u_2v_2+ \dots +u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

ويكون حاصل الضرب القياسي عبارة عن عدد وليس متجه .

نظرية(٢): إذا كان u,v,w ثلاث متجهات في R^n وكان c أي عدد قياسي فإن:

(1) $u.v = v.u$
(2) $(u+v).w = u.w+v.w$
(3) $(cu).v = u.(cv) = c\,(u.v)$
(4) $u.u \geq 0$, $u.u = 0 \Leftrightarrow u=0$

الإثبات:

(1) let $u = (u_1,u_2, \dots ,u_n)$, $v = (v_1,v_2 , \dots ,v_n)$

$$\therefore u.v = \sum_{j=1}^{n} u_jv_j = \sum_{j=1}^{n} v_ju_j = v.u$$

(2) let $u = (u_1,u_2, \dots ,u_n)$, $v = (v_1,v_2 , \dots ,v_n)$, $w = (w_1,w_2 , \dots ,w_n)$

$$\therefore (u+v).w = \sum_{j=1}^{n} (u_j+v_j)w_j = \sum_{j=1}^{n} (u_jw_j + v_jw_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_jw_j + \sum_{j=1}^{n} v_jw_j = u.w +v.w$$

(3) $cu = (cu_1,cu_2 , \dots,cu_n)$

$$\begin{aligned}\therefore \underline{(cu).v} &= (cu_1)v_1+(cu_2)\,v_2+ \dots +(cu_n)v_n \\ &= u_1(cv_1)+u_2(cv_2)+ \dots +u_n(cv_n)= \underline{u.(cv)} \\ &= c\,(u_1v_1)+c(u_2v_2)+ \dots +c(u_nv_n) \\ &= c\,(u_1v_1+u_2v_2+ \dots +u_nv_n) = \underline{c(u.v)}\end{aligned}$$

$$(4)\ u.u = (u_1)^2+(u_2)^2+ \dots +(u_n)^2 \qquad (*)$$

فإننا نلاحظ أنه إذا كان أحد الإحداثيات(وليكن u_i) من u لا يساوى الصفر فإنـــه يوجد الحد $u^2_i\neq 0$ أي أن $u^2_i>0$ وفي حاصل الضرب القياسي(*)كل حد يكون أكبر من أو يساوي الصفر فإنه ينتج أن $u.u\geq 0$ والمتساوية تتحقق إذا وإذا فقط كان:

$$u_1= u_2 = \dots = u_n = 0$$

أي إذا وإذا فقط كان $u=0$.

ملاحظة: النظرية السابقة تسمح لنا بإجراء العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الداخلي (القياسي) في الفضاء النوني R^n بنفس الطريقة تماماً والتي تُجرى بها العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الحسابي العادي .

فمثلا إذا كانت $u,v \in R^n$ فإن:

$$\begin{aligned}(3u+2v).(4u+v) &= (3u).(4u+v) + (2v).(4u+v)\\ &= (3u).(4u) + (3u).(v) +(2v).(4u) + (2v).(v)\\ &= 12(u.u) + 3(u.v) + 8(v.u) + 2(v.v)\\ &= 12(u.u) +11(u.v) + 2(v.v).\end{aligned}$$

وحاصل الضرب القياسي للمتجه مع نفسه $u.u$ يُرمز له بالرمز u^2

وينتج من ذلك صحة العبارتين الآتيتين:

$$(1)\ \ (u+v)^2 = u^2+2u.v+v^2$$
$$(2)\ \ (u-v)^2 = u^2-2u.v+v^2$$

تعريف(٤): يُقال أن المتجهين $u,v\in R^n$ **متعامدان Orthogonal** إذا كان حاصل ضربهما القياسي متلاشياً أي $u.v=0$

مثال: المتجهين $u=(2,1,-4/3), v=(1,2,3)$ في الفضاء الثلاثي R^3 متعامدان حيث:

$$u.v = (2)(1)+(1)(2)+(-4/3)(3) = 2+2-4 = 0.$$

ومتجهات الوحدة في الفضاء النوني R^n وهي:

$$E_1 = (1,0,0, \dots,0),\ E_2 = (0,1,0, \dots,0),\ \dots,\ E_n =(0,0,0, \dots,1)$$

تكون متعامدة مثنى مثنى أي أن $E_i.E_j = 0 \ \ \forall i\neq j$

تعريف(٥): المركبة u_i من المتجه u تُعطى من العلاقة $u_i = u.E_i$

وهى ناتجة من حاصل الضرب القياسي للمتجه u مع متجه الوحدة E_i في اتجاه i

تعريف(٦): المعيار Norm أو الطول Length للمتجه u في الفضاء النوني R^n

يُعرف كما يلي:

$$||u|| = (u.u)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2})^{1/2}$$

ويكون:

$||u|| = ||-u||$, $||u||^2 = u^2$, $||cu|| = |c|\ ||u||$; c scalar.

تعريف(٧): المسافة distance بين المتجهين $u,v \in R^n$ تعرف كما يلي:

$$d(u,v) = ||u-v|| = (\ (u-v).(u-v)\ )^{1/2} = (\ \sum_{i=1}^{n} (u_i-v_i)^2\ )^{1/2}$$

نظرية(٣): لأي $u,v \in R^n$ يتحقق:

(1) $||u+v||^2 = ||\ u-v||^2 \Leftrightarrow u.v = 0.$

(2) $||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2$ if $u.v = 0.$

الإثبات:

$$\begin{aligned}
(1)\ \ ||u+v||^2 = ||u-v||^2 &\Leftrightarrow (\ u+v).(u+v) = (u-v).(u-v) \\
&\Leftrightarrow (u+v)^2 = (u-v)^2 \\
&\Leftrightarrow u^2+2u.v+v^2 = u^2-2u.v+v^2 \\
&\Leftrightarrow 4\ u.v = 0 \\
&\Leftrightarrow u.v = 0\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\ \ ||u+v||^2 &= (u+v).(u+v) \\
&= u.u + u.v + v.u + v.v \\
&= ||u||^2 + 2(u.v) + ||v||^2 \\
&= ||u||^2 + ||v||^2 \ \ \text{if}\ \ u.v = 0.
\end{aligned}$$

ملاحظات ونتائج:

(١) لأي $u \in R^n$ يكون $E = u/||u||$ حيث E متجه الوحدة في اتجاه u.

(٢) يُقال أن المتجهين غير الصفريين u,v في اتجاهين متضادين

in the opposite direction إذا وُجد عدد قياسي $c<0$ بشرط أن

$cu=v$ أو $cv=u$ ويُقال أنهما في نفس الاتجاه in the same direction

إذا وُجد عدد قياسي $c>0$ بشرط أن $cu=v$ أو $cv=u$.

(٣) إذا كان $(u-p).v = 0$ فإن p تُسمى مسقط المتجه u فوق المتجه v .

(٤) المقدار $(u.v)/||v||^2$ يُسمى مركبة u فوق v (component u over v).

نظرية(٤): متباينة كوشي− شفارتز Cauchy–Schwartz Inequality:

$$|u.v| \le \|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in R^n$$

الإثبات:

إذا كانت $u = 0$ فإن $\|u\| = 0$ وأن $u.v = 0$ وإذاً المتباينة تتحقق ،

وكذلك إذا كانت $v = 0$ فإن $\|v\| = 0$ وأن $u.v = 0$ وإذاً المتباينة أيضا تتحقق.

أما إذا كان كلا من u, v لا يساوي الصفر فسنثبت صحة المتباينة كما يلي:

$$|u.v| = |u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n| \le |u_1v_1| + |u_2v_2| + ... + |u_nv_n|.$$

وحيث إن لأي عددين حقيقيين x, y يكون:

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow 2xy \le x^2 + y^2 \quad (*).$$

وباعتبار $y = \frac{|v_i|}{\|v\|}$, $x = \frac{|u_i|}{\|u\|}$ لأي i وبالتعويض في (*) يكون:

$$2[\frac{|u_i|}{\|u\|}\frac{|v_i|}{\|v\|}] \le \frac{|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{|v_i|^2}{\|v\|^2} \Rightarrow 2[\frac{\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|}{\|u\|\|v\|}] \le \frac{\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2}{\|v\|^2}$$

$$\Rightarrow 2[\frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}] \le \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 2 \Rightarrow \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|} \le 1$$

$$\therefore |u.v| \le \|u\|\|v\|.$$

نظرية(٥): متباينة المثلث Triangle Inequality:

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in R^n$$

الإثبات:

$$\|u+v\|^2 = (u+v).(u+v) = u.u + 2(u.v) + v.v$$
$$= \|u\|^2 + 2(u.v) + \|v\|^2$$
$$\le \|u\|^2 + 2|u.v| + \|v\|^2$$

وباستخدام متباينة كوشي − شفارتز نحصل على:

$$\|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$
$$\therefore \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|.$$

ملاحظة: ننهي هذا الجزء من الفصـــل الحالي بملاحظة أنه يمكن استخدام المصفوفة:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

بدلاً من القوس النوني $u = (u_1,u_2, ...,u_n)$ ليدل على المتجهات في R^n

ويبرر ذلك أن عمليتي الجمع والضرب في عدد قياسي على المصفوفات وهي كما يلي:

$$u+v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \quad ku = k\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{pmatrix}$$

تُعطى نفس النتائج مثل عمليات جمع وضرب المتجهات وهي كما يلي:

$u+v = (u_1,u_2, \dots ,u_n) + (v_1,v_2, \dots ,v_n) = (u_1+v_1, \dots ,u_n+v_n),$
$ku = k(u_1,u_2, \dots ,u_n) = (ku_1, ku_2, \dots , ku_n).$

ويكون الفرق الوحيد هو أن النتائج تكتب رأسية في حالة منهما وأفقية في الحالة الأخرى وإننا سوف نستخدم كلا الرمزين من حين إلى آخر .

تمارين

١- إذا كان $u,v,w \in R^4$ حيث:

$$u = (3,0,1,2),\ v = (-1,2,7,-3),\ w = (2,0,1,1)$$

فاحسب قيمة ما يلي:

(1) $\|u+v\|$ (2) $\|u\|+\|v\|$ (3) $\|-2u\|+2\|u\|$

(4) $\|3u-5v+w\|$ (5) $(1/\|w\|)w$ (6) $\|(1/\|w\|)w\|$

٢- إذا كان $u,v,w \in R^n$ وكانت u عمودية على كلا من v,w

فاثبت أن u تكون عمودية على أي متجه في الصورة $rv+sw$

حيث r,s أعداد قياسية .

٣- إذا كان $u,v,w \in R^n$ وكان $u.v = u.w$ حيث $u \neq 0$

فاثبت أن $v = w$

٤- إذا كان $u,v \in R^n$ كمصفوفتين من النوع $nx1$ فتحقق من أن:

$$(u.v) = u^T v$$

٥- إذا عُرفت المسافة بين المتجهين u,v في الفضاء R^n بالعلاقة:

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

فلأي $u,v,w \in R^n$ تحقق من أن:

(1) $d(u,v) \geq 0$ (2) $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

(3) $d(u,v) = d(v,u)$ (4) $d(u,w) \leq d(u,v)+d(v,w)$

٦- لأي متجهين $u,v \in R^n$ أثبت أن:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

٧- لأي متجهين $u,v \in R^n$ أثبت أن:

$$u.v = (1/4)\ \|u+v\|^2 - (1/4)\ \|u-v\|^2 .$$

٣- الفضاء المتجه والفضاء الجزئي Vector Space & Subspace:

تعريف(١):(مفهوم الفضاء الخطي)

ليكن K أي حقل اختياري. تُسمى المجموعة غير الخالية V بـــ **الفضاء الاتجاهي** (أو **الفضاء المتجه** أو **الفضاء الخطي**) **فوق الحقل K**

Vector (Linear) Space over K.

إذا عرفنا عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية.

أي أنه إذا كانت $u,v,w\in V,\lambda,\mu\in K$ فإن الشرطين الآتيين يتحققان:

(1) $u+v\in V$ (2) $\lambda u\in V$

بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

(VA1) $u+v = v+u.$

(VA2) $u+(v+w) = (u+v)+w.$

(VA3) $\exists\ 0\in V\ ;\ u+0 = 0+u = u.$

(VA4) $\forall\ u\in V\ \exists\ (-u)\in V\ ;\ u+(-u) = (-u)+u = 0.$

(VM1) $\lambda\ (\mu u) = (\lambda\mu)u.$

(VM2) $1u = u\ ;\ 1\in K.$

(VD1) $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v.$

(VD2) $(\lambda+\mu)u = \lambda u+\mu u.$

الخصائص (VA1-VA4) تُسمى قواعد الجمع ،

والخاصيتين (VM1,VM2) تُسميان بقاعدتي الضرب ،

وأما الخاصيتين (VD1,VD2) فتُسميان بقاعدتي التوزيع .

إذا كان الحقل K= R فإن الفضاء المتجه V يُسمى بالفضاء المتجه فوق R وعناصر الحقل K تُسمى القيم الحقيقية أو القيم القياسية Scalars .

وقد يكون من الضروري في بعض التطبيقات أن نتداول فضاءات خطية بحيث تكـــون القيم القياســـية أعداد مركبة بدلا من الأعداد الحقيقية ، مثل هذه الفضاءات تُـــسمى بالفضاءات المتجهة المركبة ، وفي هذا المقرر سنتناول بصفة خاصة الفضاءات المتجهـــة التي عناصرها حقيقية.

ويجدر بنا أن ننبه إلى أنه في تعريف الفضاءات المتجهة لا يوجـــد تخـــصيص لطبيعـــة المتجهات أو للعمليتين . فأي نوع من الأشياء مهما كانت يمكن أن تصلح كمتجهات وكل ما هو مطلوب أن تحقق فروض الفضاء المتجه ، والأمثلة الآتية توضح ذلك .

ملاحظات:

(١) إذا كان u,v أي متجهين في أي فضاء متجه اختياري V فإننا نكتب $-v$ بدلاً من $(-1)v$ ونكتب أيضاً $u-v$ بدلاً من $u+(-1)v$

(٢) إذا كان $V=\{0\}$ أي أن V تحتوي فقط على العنصر 0 فإن جميع شروط وخصائص الفضاء الخطي تتحقق على V مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياســية ، ومن ثم فإن $V=\{0\}$ تكون فضاء خطي ، يُسمى هذا الفضاء المتجه بالفضاء للمتجه الصفري.

أمثلة:

١- الفضاء النوني R^n يكون فضاء متجه مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفتين على R^n حيث تتحقق شروط وخصائص الفضاء المتجه.

٢- مجموعة كل المصفوفات من النوع $m{\times}n$ ذات العناصر الحقيقية مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية للمصفوفات تكون فضاء متجه .

المصفوفة الصفرية من النوع $m{\times}n$ تكون هي المتجه الصفري 0 . وإذا كان المتجه u هو المصفوفة A من النوع $m{\times}n$ فإن المصفوفة $-A$ تكون هي المتجه $-u$ وتتحقق باقي الخصائص من نظريات المصفوفات.

يُرمز لهذا الفضاء المتجه بالرمز $M_{m\times n}(R)$ أو بالرمز $M_{mn}(R)$.

٣– إذا كانت V هي المجموعة المكونة من كل الدوال الحقيقية المعرفة على R وكانت $f(x),g(x)$ أي دالتين وكان k أي عدد حقيقي فإننا نعرف دالة المجموع $f+g$ وحاصل الضرب kf كما يلي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ (kf)(x)=kf(x).$$

فإن V تكون فضاءاً متجهاً بالنسبة لهاتين العمليتين ، ويكون المتجه الصفري لهذا الفضاء هو الدالة الثابتة الصفرية ، أي هو الدالة التي يكون رسمها البياني هو المستقيم الأفقي المار بنقطة الأصل ، ويمكن التحقق من باقي الخصائص بسهولة .

٤– إذا كانت V هي مجموعة كل النقاط التي تقع على المستوى الذي يمر بنقطة الأصل في الفضاء R^3 فإن V تكون فضاءا متجها بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية للمتجهات في الفضاء R^3 كما يتضح فيما يلي:

المستوى الذي يمر بنقطة الأصل تكون معادلته على الصورة:

$$Ax+By+Cz = 0 \quad ;\ A,B,C \text{ constants.}$$
$$\therefore V=\{(x,y,z):Ax+By+Cz=0\}$$

وبفرض أن $u=(u_1,u_2,u_3),v=(u_1,u_2,u_3)\in V$ فيكون:

$$Au_1+Bu_2+Cu_3 = 0\ ,$$
$$Av_1+Bv_2+Cv_3 = 0$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على:

$$A(u_1+v_1)+B(u_2+v_2)+C(u_3+v_3) = 0.$$

أي أن $ku\in V$.

وبفرض أن k عدد قياسي فيكون $ku = (ku_1, ku_2,ku_3)$ وإذاً يكون:

$$A(ku_1)+B(ku_2)+C(ku_3) = k(Au_1+Bu_2+Cu_3) = k0 = 0$$

أي أن $ku\in V$. ومن المثال الأول علمنا أن الفضاء النوني R^n يكون فضاء متجه ومن ثم يكون الفضاء الثلاثي R^3 أيضاً فضاء متجه، وعلى ذلك فإن الخصائص (VA1),(VA2),(VM1),(VM2),(VD1),(VD2) تكون جميعها محققة على V (حيث أنها مجموعة جزئية من R^3)

فيتبقى التحقق من صحة الخاصيتين (VA3),(VA4) كما يلي:

بضرب المعادلة $Au_1+Bu_2+Cu_3 = 0$ في 0 نحصل على:

$$A(0u_1)+B(0u_2)+C(0u_3) = A(0)+B(0)+C(0) = 0$$

وإذاً $V\in(0,0,0) = 0$ وهذا يحقق الخاصية (VA3) .

وبضرب $Au_1+Bu_2+Cu_3 = 0$ في 1- نحصل على:

$$A(-u_1)+B(-u_2)+C(-u_3) = 0$$

وإذاً $V\in(-u_1,-u_2,-u_3) = -u$ وهذا يحقق الخاصية (VA4) .

٥– إذا كانت $V=\{ (x,y):x\geq 0,y\geq 0\}$ هي مجموعة النقاط (x,y) في الفضاء R^2 التي تقع في الربع الأول معرف عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية كما يلي:

(1) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)$

(2) $k(x,y) = (kx,ky)$

فإن المجموعة V لا تكون فضاءاً متجهاً لأن $u=(1,1)$ تقع في V بينما $-u=(-1,-1)$ لا تقع في V وبذلك فإن الخاصية (VA4) لا تتحقق .

٦– لتكن V مجموعة كل الثلاثيات المرتبة من الأعداد الحقيقية (x,y,z) معرف عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية كما يلي:

(1) $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

(2) $k(x,y,z) = (kx,y,z)$

فمن الواضح أن شرطي الفضاء الخطي (2),(1) محققان، وكذلك خصائص الجمع (VA1),(VA2),(VA3),(VA4) تكون جميعها محققة ، ويتبقى التحقق من صحة الخصائص (VM1),(VM2),(VD1),(VD2) كما يلي:

Let $u,v\in V$; $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$,and let λ,μ scalars

- $\lambda(\mu u) = \lambda(\mu(x_1,y_1,z_1)) = \lambda(\mu x_1,y_1,z_1) = ((\lambda\mu)x_1,y_1,z_1)$,
  $(\lambda\mu)u = (\lambda\mu)(x_1,y_1,z_1) = ((\lambda\mu)x_1,y_1,z_1)$.

$\therefore \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.

ومن ثم تكون الخاصية (VM1) محققة.

- $1u = 1(x_1,y_1,z_1) = (1x_1,y_1,z_1) = (x_1,y_1,z_1) = u$.

ومن ثم تكون الخاصية (VM2) محققة.

- $\lambda(u+v) = \lambda[(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)]$
$$= \lambda(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$
$$= (\lambda(x_1+x_2),y_1+y_2,z_1+z_2)$$
$$= (\lambda x_1+\lambda x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$
$$= (\lambda x_1,y_1,z_1)+(\lambda x_2,y_2,z_2)$$
$$= \lambda(x_1,y_1,z_1)+ \lambda(x_2,y_2,z_2) = \lambda u+\lambda v.$$

ومن ثم تكون الخاصية (VD1) محققة.

- $(\lambda+\mu)u = (\lambda+\mu)(x_1,y_1,z_1) = ((\lambda+\mu)x_1,y_1,z_1)$,
$$\lambda u+\mu u = \lambda(x_1,y_1,z_1)+ \mu(x_1,y_1,z_1) = (\lambda x_1,y_1,z_1)+(\mu x_1,y_1,z_1)$$
$$= ((\lambda+\mu)x_1,2y_1,2z_1).$$

$\therefore\ (\lambda+\mu)u \neq \lambda u+\mu u$.

ومن ثم تكون الخاصية (VD2) غير محققة. وعلى ذلك V لا تكون فضاء خطي.

٧– إذا كانت $V=\{(x,y):x,y\in R\}$ معرف عليها عمليتي الجمع والضـــرب في أعداد قياســـية كما يلي:

(1) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)$
(2) $k(x,y) = (k^2x,k^2y)$

فحدد ما إذا كانت V فضاء خطي أم لا (مع ذِكر السبب)؟ .

الحل: يُترك للطالب.

نظرية(١): ليكنV فضاء متجه ، $u\in V$ وليكن k عدد قياسي فإن:

(1) $0u = 0$.
(2) $k0 = 0$.
(3) $(-1)u = -u$.
(4) $ku = 0 \Rightarrow u = 0 \vee k = 0$.

الإثبات:

(1) $0u = (0+0)u = 0u+0u$

وبإضافة 0u- إلى الطرفين يكون:

$$0u+(-0u) = [0u+0u]+(-0u\ )$$
$$= 0u + [0u+(-0u\ )]$$
$$\therefore\quad 0\ = 0u+0 = 0u.$$

إثبات آخر للعلاقة (1):

$0 = u+(-u) = 1u+(-1)u = [1+(-1)]u = 0u.$

(2) $k0 = k(u+(-u)) = ku+k(-u) = ku+(-k)u = (k+(-k))u = 0u = 0.$

(3) $u+(-1)u = 1u+(-1)u = [1+(-1)]u = 0u = 0.$

$\therefore\ (-1)u = -u.$

(4) let $ku = 0$, $k \neq 0$.

وسنثبت أن $u = 0$ كما يلي:

$0 = (1/k)0 = (1/k)(ku) = [(1/k)k]u = 1u = u.$

let $ku = 0$, $u \neq 0$.

وسنثبت أن $k = 0$ كما يلي:

$ku = 0 , 0u = 0 \Rightarrow k = 0.$

تعريف(٢):(مفهوم الفضاء الجزئي)

إذا كانت V فضاء خطي فإن المجموعة الجزئية غير الخالية W من V تُسمى فضاء جزئي من الفضاء V (Subspace of V) إذا كانت W تحقق شروط وخصائص الفضاء المتجه بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفتين على V .

ولكل فضاء متجه V على الأقل فضاءان جزئيان هما الفضاء V نفسه والفضاء المتجه الصفري {0} واللذان يسميان الفضاءين الجزئيين غير الفعليين Trivial Subspaces وأي فضاء جزئي أخر (إن وُجد) من V يُسمى فضاء جزئي فعلي من V

Non-trivial Subspace of V.

نظرية(٢): المجموعة الجزئية غير الخالية W من V تكون فضاء جزئي من الفضاء V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(1) $u+v\in W \quad \forall u,v\in W$,

(2) $ku\in W \quad \forall u\in W$, k scalar.

الإثبات:

(أولاً) نفرض أن W فضاء جزئي منV وسنثبت صحة الشرطين (2),(1):

حيث إن W فضاء جزئي من V فإن W تحقق شروط وخصائص الفضاء المتجه بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفتين علىV ومن ثم يتحقق الشرطان(2),(1).

(ثانياً) نفرض تحقق الشرطان (2),(1) وسنثبت أن W فضاء جزئي منV :

الشرطان (2),(1) المحققان هما الشرطان الأساسيان للفضاء المتجه والخصائص (VA1,VA2,VM1,VM2,VD1,VD2) تتحقق على V (لأنه فضاء متجه) وكل عنصر من عناصر W هو عنصر من عناصر V (لأن W مجموعة جزئية من V) فتكون هذه الخصائص أيضاً محققة على W

يتبقى التحقق من صحة الخاصيتين (VA3,VA4) على W من الشرط $ku\in W$ (2)

put $k=0 \Rightarrow 0u=0\in W$

i.e. $\exists\ 0\in W$; $o+u=u+0=u \ \forall\ u\in W$,

put k=-1 $\Rightarrow$ (-1)u=-u$\in$W
i.e. $\forall$ u$\in$W $\exists$ -u$\in$W ; (-u)+u=u+(-u)=0.

وإذاً الخاصيتين(VA3,VA4) تتحققان على W

وعلى ذلك تكون W فضاء جزئي منV.

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

أمثلة:

١- إذا كانت $W=\{w\in R^3:w.u=0 ,u\in R^3\}$ فإن W تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 (وضح ذلك؟).

الحل: واضح أن $W\subset R^3$ وسنتحقق من صحة الشرطين:

(1) u+v$\in$W $\forall$u,v$\in$W,
(2) ku$\in$W $\forall$u$\in$W , k scalar.

كما يلي:

(1) let $w_1,w_2\in W$, $u\in R^3$
$\therefore\ w_1.u = 0\ ,\ w_2.u = 0 \Rightarrow w_1.u + w_2.u = 0$
$\Rightarrow (w_1+w_2).u = 0$
$\Rightarrow w_1+w_2\in W.$

(2) let $w\in W$, $u\in R^3$, k scalar
$\therefore\ w.u = 0 \Rightarrow k(w.u) = 0$
$\Rightarrow (kw).u = 0$
$\Rightarrow kw\in W.$

وإذاً W فضاء جزئي من R^3 .

٢- إذا كانت $W=\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}: a,b\in R\}$ فإن W تكون فضاء جزئي من فضاء المصفوفات $M_{2\times 2}(R)$ (وضح ذلك؟).

الحل: واضح أن $W\subset M_{2\times 2}(R)$ وسنتحقق من صحة الشرطين (2),(1) كما يلي:

(1) let $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}\in W$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & a \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

(2) let $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in W$, k scalar

$$\therefore k\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ka \\ kb & 0 \end{pmatrix} \in W$$

وإذاً W فضاء جزئي من الفضاء $M_{2\times2}(R)$.

٣– إذا كانت $W = \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} : a,b \in R\}$ فإن W لا تكون فضاء جزئي من فضاء المصفوفات $M_{2\times2}(R)$ (وضح ذلك؟).

<u>**الحل**</u>: يُترك للطالب.

٤– إذا كانت $W = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in R\}$ فإن W تكون فضاء جزئي من الفضاء $M_{2\times3}(R)$ (وضح ذلك؟).

<u>**الحل**</u>: يُترك للطالب.

٥– إذا كانت

$W_1 = \{(a,b,c) \in R^3 : b = a + c\}$,
$W_2 = \{(a,b,c) \in R^3 : b = a + c + 1\}$.

فتحقق من أن W_1 تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 بينما W_2 لا تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 .

<u>**الحل**</u>: واضح أن $W_1 \subset R^3, W_2 \subset R^3$

(1) let $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2) \in W_1 \Rightarrow b_1 = a_1 + c_1, b_2 = a_2 + c_2$

$$\therefore (a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \in W_1 \ ;$$
$$b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2).$$

(2) let $(a,b,c) \in W_1$, k scalar $\Rightarrow b = a + c$

$$\therefore k(a,b,c) = (ka,kb,kc) \in W_1 \ ; \ kb = ka + kc$$

وإذاً W_1 تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 .

$(1,4,2),(1,3,1) \in W_2$ but $(1,4,2)+(1,3,1)=(2,7,3) \notin W_2$

وإذاً W_2 لا تكون فضاء جزئي من الفضاء R^3 .

٦- إذا كانت $W=\{(a,b,c) \in R^3 : b=2a\}$

فحدد ما إذا كانت W فضاء جزئي من الفضاء R^3 أم لا (مع ذِكر السبب)؟

الحل: يُترك للطالب.

٧- إذا كانت W هي مجموعة حلول نظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$

حيث A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن W تكون فضاء جزئي من الفضاء النوني R^n

يُسمى هذا الفضاء الجزئي بالفضاء الصفري للمصفوفة A

Null Space of a Matrix A.

ويُرمز له بالرمز $N(A)$.

وفيما يلي سنبحث كيفية إيجاد الفضاء الصفري لأي مصفوفة:

- الفضاء الصفري للمصفوفة $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ نحصل عليه باختزال المصفوفة

الممتدة المناظرة لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_3, \\ x_2 = -x_3 \end{array}$$

$$\therefore N(A)=\{(x_1,x_2,x_3)=x_3(1,-1,1) : x_3 \in R\}.$$

- والفضاء الصفري للمصفوفة $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ نحصل عليه باختزال المصفوفة

الممتدة المناظرة لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

$$\therefore N(A)=\{(0,0)\}=\{0\}.$$

- والفضاء الصفري للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\3&1&1\end{pmatrix}$ نحصل عليه باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\3&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{matrix}x_1+x_3=0,\\x_2-2x_3=0\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}x_1=-x_3,\\x_2=2x_3\end{matrix}$$

$$\therefore\ N(A)=\{(x_1,x_2,x_3)=x_3(-1,2,1):x_3\in R\}.$$

تمرين: أوجد الفضاء الصفري لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\3&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&3\\7&2&3\end{pmatrix}$$

الحل: يُترك للطالب.

تمارين

١– اعطِ مثال عددي يوضح أن كلا من المجموعات التالية مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعطَيتين لا تكون فضاء خطي.

(1) $V = \{(x, y) \in R^2 : x = 2\}$,
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $k(x, y) = (kx, ky)$.

(2) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$,
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_2, y_1 + y_2, z_2)$, $k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$.

٢– فيما يلي المجموعة V معرف عليها عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية المعطَيتين. حدد ما إذا كانت V تمثل فضاء خطي أم لا؟

(واذكر جميع الفروض التي لا تتحقق بالنسبة للمجموعات التي لا تكون فضاء خطي).

(1) $V = \{(x, y) : x, y \in R\}$,
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $k(x, y) = (2kx, 2ky)$.

(2) $V = \{(x, 0) : x \in R\}$,
$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$, $k(x, 0) = (kx, 0)$.

(3) $V = \{(x, y) : x, y \in R\}$,
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $k(x, y) = (0, 0)$.

(4) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$,
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,
$k(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

(5) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$,
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,
$k(x, y, z) = (kx, y, z)$.

(6) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$,
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_2, y_1 + y_2, z_2)$,
$k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$.

(7) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$,
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,
$k(x, y, z) = (kx, 1, kz)$.

(8) $V = \{(0, 0, z) : z \in R\}$,
$(0, 0, z_1) + (0, 0, z_2) = (0, 0, z_1 + z_2)$, $k(0, 0, z) = (0, 0, kz)$.

٣- إذا علمت أن المجموعة الجزئية غير الخالية W من الفضاء الخطي V تكون فضاءاً جزئياً من V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $u+v \in W \ \forall u,v \in W$, (ii) $ku \in W \ \forall u \in W, k \ scalar$.

فحدد أي من المجموعات الآتية تكون فضاءاً جزئياً من الفضاء R^3

(1) $W=\{(a,0,0): a \in R\}$.

(2) $W=\{(a,1,1): a \in R\}$.

(3) $W=\{(a,b,c) \in R^3 : b=2a\}$.

(4) $W=\{(a,b,c) \in R^3 : b=a^2\}$.

(5) $W=\{(a,b,c) \in R^3 : a \geq 0\}$.

٤- إذا علمت أن المجموعة الجزئية غير الخالية W من الفضاء الخطي V تكون فضاءاً جزئياً من V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $u+v \in W \ \forall u,v \in W$, (ii) $ku \in W \ \forall u \in W, k \ scalar$.

فحدد أي من المجموعات الآتية تكون فضاءاً جزئياً من فضاء المصفوفات $M_{2\times2}(R)$

(1) $W=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in R \ , a+d=0\}$.

(2) $W=\{A \in M_{2\times2}(R) : A=A^T\}$.

(3) $W=\{A \in M_{2\times2}(R) : |A|=0\}$.

٥- إذا علمت أن المجموعة الجزئية غير الخالية W من الفضاء الخطي V تكون فضاءاً جزئياً من V إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $u+v \in W \ \forall u,v \in W$, (ii) $ku \in W \ \forall u \in W, k \ scalar$.

فحدد أي من المجموعات الآتية تكون فضاءاً جزئياً من الفضاء R^4

(1) $W=\{(a,b,c,d) \in R^4 : a-b=2\}$.

(2) $W=\{(a,b,c,d) \in R^4 : c=a+2b, d=a-3b\}$.

(3) $W=\{(a,b,c,d) \in R^4 : a=0, b=-d\}$.

(4) $W=\{(a,b,c,d) \in R^4 : a=b=0\}$.

(5) $W=\{(a,b,c,d) \in R^4 : a=1, b=0, c+d=1\}$.

٦- أوجد الفضاء الصفري لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

٧- إذا كان W_1, W_2 فضاءين جزئيين من الفضاء R^n فتحقق من أن مجموعة التقاطع $W_1 \cap W_2$ تكون أيضا فضاء جزئي من الفضاء R^n .

الإجابة:

1- (1) $(2,0)+(2,1)=(4,1) \notin V$

(2) $[(1,2,3)+(3,4,5)=(3,6,5)] \neq [(1,6,3)=(3,4,5)+(1,2,3)]$

2- (1) (VM1),(VM2) ×

(2) ✓

(3) (VM2) ×

(4) (VM2) ×

(5) (VD2) ×

(6) (VA1),(VA3),(VA4),(VD2) ×

(7) (VM2),(VD1),(VD2) ×

(8) ✓

3- (1) ✓

(2) × [e.g.(1,1,1),(-1,1,1)$\in$W, but (1,1,1)+(-1,1,1) = (0,2,2)$\notin$W].

(3) ✓

(4) × [e.g. (1,1,2), (-1,1,3)$\in$W, but (1,1,2)+(-1,1,3) = (0,2,5)$\notin$W].

(5) × [e.g. k = -1, (1,-2,-3)$\in$W, but (-1)(1,-2,-3) = (-1,2,3)$\notin$W].

4- (1) ✓

(2) ✓

$A, B \in W, k \ scalar \Rightarrow A = A^T, B = B^T \Rightarrow A + B = A^T + B^T = (A+B)^T$

$\therefore A + B \in W, \ kA = kA^T = (kA)^T \ \ \therefore kA \in W.$

(3) × [e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W \ but \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$].

5- (1) × (2) ✓ (3) ✓ (4) ✓ (5) ×

٤- الارتباط الخطى والاستقلال الخطى:

Linear Dependence and Linear Independence:

تعريف(١):(مفهوم التركيبة الخطية Linear Combination)

يُقال أن المتجه v تركيبة خطية من المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ في الفضاء الخطي (المتجه) V إذا أمكن إيجاد أعداد قياسية $c_1, c_2, ..., c_n$ عندما يكون:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i .$$

وتُسمى هذه التركيبة تركيبة خطية غير تافهة إذا كانت المعاملات $c_1, c_2, ..., c_n$ ليست جميعها أصفارا.

أمثلة:

١- عبر عن المتجه $(-2,2) \in R^2$ كتركيبة خطية من المتجهات $(-1,1), (2,4), (0,1)$

الحل:

let $(-2,2) = c_1(-1,1) + c_2(2,4) + c_3(0,1)$; c_1, c_2, c_3 *scalars.*

$$\therefore \begin{aligned} -2 &= -c_1 + 2c_2 , \\ 2 &= c_1 + 4c_2 + c_3 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2, c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/6)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{aligned} c_1 + (1/3)c_3 &= 2 \\ c_2 + (1/6)c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 2 - (1/3)c_3 \\ c_2 &= -(1/6)c_3 \end{aligned}$$

put $c_3 = 3 \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = -(1/2)$

$\therefore\ (-2,2) = (-1,1) + (-1/2)(2,4) + 3(0,1).$

٢- تحقق من أن المتجه $w_1 = (9,2,7)$ يكون تركيبة خطية من المتجهات:

$u = (1,2,-1)\ , v = (6,4,2)$

بينما المتجه $w_2 = (4,-1,8)$ لا يكون تركيبة خطية منهما.

الحل:

$$\text{let } w_1 = c_1 u + c_2 v \ ; \ c_1, c_2 \ \textit{scalars}.$$

$$\therefore (9,2,7) = c_1(1,2,-1) + c_2(6,4,2)$$

$$\begin{aligned} 9 &= c_1 + 6c_2\,, \\ \therefore 2 &= 2c_1 + 4c_2\,, \\ 7 &= -c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/8)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[-6r_2+r_1]{-8r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ c_1 = -3\ ,\ c_2 = 2\ \ ,\ \therefore\ w_1 = -3u + 2v.$$

$$\text{let } w_2 = c_1 u + c_2 v \ ; \ c_1, c_2 \ \textit{scalars}.$$

$$\therefore (4,-1,8) = c_1(1,2,-1) + c_2(6,4,2)$$

$$\begin{aligned} 4 &= c_1 + 6c_2\,, \\ \therefore -1 &= 2c_1 + 4c_2\,, \\ 8 &= -c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ c_1 + 6c_2 = 4\ ,\ 8c_2 = 9\ ,\ 8c_2 = 12$$

وواضح انه لا توجد قيمة لـــ c_2 تحقق هذه المعادلات في آن واحد ، ومن ثم فإن مجموعة المعادلات السابقة غير متآلفة ولذلك ليس لها حل وبالتالي لا يمكن إيجاد c_1, c_2 بحيث يكون $w_2 = c_1 u + c_2 v$ وإذاً w_2 لا يكون تركيبة خطية من u, v .

٣- تحقق من أن المتجه $v=(2,1,5,-5)$ يكون تركيبة خطية من المتجهات:

$u_1=(1,2,1,-1)\ ,\ u_2=(1,0,2,-3)\ ,\ u_3=(1,1,0,-2)$

الحل:

let $v=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3$; c_1,c_2,c_3 *scalars.*

$\therefore (2,1,5,-5)=c_1(1,2,1,-1)+c_2(1,0,2,-3)+c_3(1,1,0,-2)$

$$\therefore\quad \begin{aligned} 2&=c_1+c_2+c_3\,, \\ 1&=2c_1+c_3\,, \\ 5&=c_1+2c_2\,, \\ -5&=-c_1-3c_2-2c_3. \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ c_1=1\ ,\ c_2=2\ ,\ c_3=-1$$

$\therefore v=u_1+2u_2-u_3\,.$

٤- عبر عن الدالة $f(x)=2x^2-6x+3$ حيث $x\in[2,5]$ كتركيبة خطية من الدوال:

$f_1(x)=x^2\ ,\ f_2(x)=2x-1\ ,\ f_3(x)=\sin x.$

الحل:

let $f=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3$; c_1,c_2,c_3 *scalars.*

$\therefore 2x^2-6x+3=c_1x^2+c_2(2x-1)+c_3\sin x.$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نقارن معاملات قوى x في الطرفين فنحصل على:

$$\therefore\quad \begin{aligned} 2&=c_1\,, \\ -6&=2c_2\,, \\ 3&=-c_2+c_3\sin x. \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} c_1&=2, \\ c_2&=-3, \\ c_3&=0. \end{aligned}$$

$\therefore\ f=2f_1-3f_2+0f_3.$

تمرين: عبر عن المتجه $v=(1,-2,5)$ كتركيبة خطية من المتجهات:
$u_1=(1,1,1)\ ,\ u_2=(1,2,3)\ ,\ u_3=(2,-1,1).$

الحل: يُترك للطالب.

تعريف(٢):(**مفهوم فضاء العمود للمصفوفة Column Space of a Matrix**)

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m\times n$ فإن الفضاء الجزئي من الفضاء R^m والمتكون من مجموعة المتجهات $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ بحيث يكون لنظام المعادلات $AX=B$ حل يُسمى فضاء العمود للمصفوفة A ويُرمز له بالرمز $C(A)$.

تعريف مكافئ: فضاء العمود للمصفوفة A هو الفضاء المتكون من كل التركيبات الخطية من متجهات أعمدة المصفوفة A .

ولإيجاد متجهات فضاء العمود للمصفوفة A ولتكن هذه المتجهات هي $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام $AX=B$ حتى نحصل على علاقة تربط مركبات B وبعضها البعض ، ولذلك فضاء العمود للمصفوفة يوصف بدلالة مركبات متجهاته.

أمثلة:

١ – صِف فضاء العمود لكل من المصفوفات الآتية:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل: لإيجاد فضاء العمود للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\2&1\end{pmatrix}$ نختزل المصفوفة الممتدة:

$$\begin{pmatrix}2&1&b_1\\0&1&b_2\\2&1&b_3\end{pmatrix}$$

كما يلي:

$$\begin{pmatrix}2&1&b_1\\0&1&b_2\\2&1&b_3\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/2)r_1}\begin{pmatrix}1&1/2&b_1/2\\0&1&b_2\\2&1&b_3\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&1/2&b_1/2\\0&1&b_2\\0&0&b_3-b_1\end{pmatrix}$$

وإذاً فضاء العمود للمصفوفة A يكون عبارة عن كل المتجهات $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

والتي يتحقق لها الشرط $b_3=b_1$ أي أن: $C(A)=\{(b_1,b_2,b_3)\in R^3:b_3=b_1\}$.

- وبالمثل لإيجاد فضاء العمود للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-4&-8&4\end{pmatrix}$

نختزل المصفوفة الممتدة:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&b_1\\2&4&-2&b_2\\-4&-8&4&b_3\end{pmatrix}\xrightarrow[4r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&0&0&b_3+4b_1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ C(A)=\{(b_1,b_2,b_3)\in R^3:b_2=2b_1,b_3=-4b_1\}.$$

- ووصف فضاء العمود للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\3&3&1\end{pmatrix}$ (يُترك للطالب)؟.

٢– تحقق من أن المتجه $(-3,12,12)$ يقع في فضاء العمود للمصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

الحل: لكي يقع (يكون) المتجه $(-3,12,12)$ في فضاء العمود للمصفوفة المعطاه يجب أن يكون تركيبة خطية من متجهات أعمدتها ، ومن ثم يجب أن توجد أعداد قياسية c_1, c_2, c_3 ليست جميعها أصفاراً عندما يكون:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -3 = -c_1 + c_3 \\ 12 = 3c_1 + 2c_2 \\ 12 = c_1 + 4c_2 + 2c_3 \end{array}$$

ولإيجاد c_1, c_2, c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 12 \\ 1 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} c_1 = 2, \\ \therefore c_2 = 3, \\ c_3 = -1 \end{array}$$

وعلى ذلك يكون المتجه $(-3,12,12)$ تركيبة خطية من متجهات أعمدة المصفوفة ومن ثم يقع في فضاء العمود لها.

٣– صِف فضاء العمود للمصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. ثم حد أي من المتجهات $(-1,2,4), (1,2,3), (2,5,1), (-1,0,2)$ يقع في فضاء العمود لهذه المصفوفة وأيها لا يقع؟

الحل: نوجد فضاء العمود للمصفوفة وذلك باختزال المصفوفة الممتدة:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & b_1 \\ 3 & 4 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b_1 \\ 3 & 4 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b_1 \\ 0 & 4 & 3 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 4 & 3 & b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b_1 \\ 0 & 4 & 3 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \end{pmatrix}, \therefore C(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \in R^3 : b_3 = b_2 - 2b_1\}.$$

ومن ثم:

$$\begin{array}{ll} (-1,2,4) \in C(A) \ ; \ 4 = 2 - (2)(-1), & (1,2,3) \notin C(A) \ ; \ 3 \neq 2 - (2)(1), \\ (2,5,1) \in C(A) \ ; \ 1 = 5 - (2)(2), & (-1,0,2) \notin C(A) \ ; \ 3 \neq 0 - (2)(-1) \end{array}$$

تعريف(٣):(مفهوم الفضاء المُنشأ)

يُقال أن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ تنشئ أو تولد الفضاء الخطي V إذا كان كل متجه من متجهات V يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من هذه المتجهات. وفي هذه الحالة يُقال أن الفضاء V مُنشأ أو مُولد بالمتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ ويُكتب $V = \{\{v_1, v_2, ..., v_n\}\}$.

أمثلة:

١ – متجهات الوحدة $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ تولد أو تنشئ الفضاء R^2 حيث إن أي متجه اختياري من R^2 وليكن (x, y) يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من المتجهات e_1, e_2:

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$$

وكذلك المتجهات $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ تنشئ الفضاء R^3

وعموماً متجهات الوحدة:

$$e_1 = (1,0,0,...,0,0), e_2 = (0,1,0,...,0,0), \ ... \ , e_n = (0,0,0,...,0,1)$$

تنشئ الفضاء R^n.

٢ – حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S = \{v_1, v_2\}$ حيث $v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,0,2)$ تنشئ الفضاء R^3 أم لا؟ .

الحل:

ليكن $(x, y, z) \in R^3$ متجه اختياري.

والآن سنتأكد ما إذا كان هذا المتجه الاختياري تركيبة خطية من متجهات S أم لا:

$$\text{let } (x, y, z) = c_1(1,2,1) + c_2(1,0,2) \ ; \ c_1, c_2 \ \ scalars.$$

$$\begin{aligned} & x = c_1 + c_2 \ , \\ \therefore \ & y = 2c_1, \\ & z = c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1, c_2 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1&1&x\\2&0&y\\1&2&z\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&x\\0&-2&y-2x\\0&1&z-x\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3=r_2]{r_2=r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&z-x\\0&-2&y-2x\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&z-x\\0&0&-4x+y+2z\end{pmatrix}.$$

وواضح أنه ليس كل متجه $(x,y,z)\in R^3$ يكون تركيبة خطية من متجهات S

وإنما فقط المتجهات التي يتحقق لها الشرط: $-4x+y+2z=0$

فمثلاً المتجه $(1,2,3)\in R^3$ لا يكون تركيبة خطية من متجهات S (تحقق من ذلك؟)

وعليه فإن مجموعة المتجهات S لا تنشئ الفضاء R^3 .

٣- حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$

حيث $v_1=(1,1,2)\,,v_2=(1,0,2)\,,v_3=(1,1,0)$ تنشئ الفضاء R^3 أم لا؟ .

الحل: لكي تنشئ S الفضاء R^3 يجب أن يكون أي متجه اختياري $(x,y,z)\in R^3$ تركيبة خطية من متجهات S ومن ثم توجد أعداد قياسية c_1,c_2,c_3 ليست كلها أصفاراً عندما يكون: $(x,y,z)=c_1(1,1,2)+c_2(1,0,2)+c_3(1,1,0)$

$$\begin{aligned}&x=c_1+c_2+c_3\ ,\\ \therefore\ &y=c_1+c_3\ ,\\ &z=2c_1+2c_2\end{aligned}$$

ولكي توجد c_1,c_2,c_3 يجب أن تكون مجموعة المعادلات السابقة متآلفة ، وشرط ذلك هو أن مصفوفة المعاملات المناظرة لها تكون قابلة للانعكاس (أي محددها لا يساوي الصفر) ونبحث تحقيق هذا الشرط بحساب قيمة محدد مصفوفة المعاملات كما يلي:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\2&2&-2\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&-2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

وإذاً مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس وعليه فإن S تنشئ الفضاء R^3 .

ملاحظة: مصفوفة المعاملات المناظرة لمجموعة المعادلات في المثال السابق هي المصفوفة التي أعمدتها متجهات المجموعة S.

٤- حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$

حيث $v_1=(1,1,2)\,,v_2=(1,0,1)\,,v_3=(2,1,3)$ تنشئ الفضاء R^3 أم لا؟ .

الحل: بنفس الطريقة كما في المثال السابق نجد أن مصفوفة المعاملات المناظرة غير قابلة للانعكاس وعليه فإن S لا تنشئ الفضاء R^3 (تحقق من ذلك؟).

٥- أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ فضاء الحل لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} x_1-3x_2+x_3&=0\\ 2x_1-6x_2+2x_3&=0\\ x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

الحل: نوجد فضاء الحل لمجموعة المعادلات المعطاه وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix}1&-3&1&0\\2&-6&2&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{?}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\therefore\quad \begin{aligned}x_1&=-4x_3\,,\\ x_2&=-x_3\end{aligned}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x_3\\-x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

واضح أن المتجه الاختياري $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ من فضاء الحل يكون تركيبة خطية من المتجهين $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ وإذاً مجموعة المتجهات $\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ تنشئ فضاء الحل للمعادلات.

٦- أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^4 تنشئ فضاء الحل لمجموعة المعادلات الخطية:

$$x_1+2x_3+x_4=0$$
$$2x_1+x_2+x_3-x_4=0$$

الحل: نوجد فضاء الحل لمجموعة المعادلات المعطاه باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\2&1&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&-3&-3&0\end{pmatrix}\quad\therefore\ \begin{matrix}x_1=-2x_3-x_4\ ,\\ x_2=3x_3+3x_4\end{matrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_3-x_4\\3x_3+3x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ تنشئ فضاء الحل لمجموعة المعادلات.

٧– أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ الفضاء الصفري للمصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}$$

الحل: نوجد الفضاء الصفري للمصفوفة A وذلك بحل مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة $AX=0$ كما يلي:

$$\therefore\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\Rightarrow\ x_1+2x_2-x_3=0\Rightarrow\ x_1=-2x_2+x_3$$

$$\therefore N(A)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_2+x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

وإذاً مجموعة المتجهات $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ تنشئ $N(A)$.

تعريف(٤):(مفهوم فضاء الصف للمصفوفة Row Space of a Matrix)

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن الفضاء الجزئي من الفضاء R^n والمنشأ بواسطة متجهات صفوف المصفوفة A يُسمى فضاء الصف للمصفوفة A ويُرمز له بالرمز $R(A)$.

تعريف مكافئ: فضاء الصف للمصفوفة A هو الفضاء المتكون من كل التركيبات الخطية من متجهات صفوف المصفوفة A .

ولإيجاد مجموعة المتجهات التي تنشئ فضاء الصف للمصفوفة A نختزلها لتصبح في الصورة المثلثية العليا (وليس بالضرورة لتصبح في الشكل الصفي المتدرج المختزل) فتكون متجهات الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة هي المتجهات التي تنشئ $R(A)$.

مثال: أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ فضاء الصف للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

الحل: نختزل المصفوفة A كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-7r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وإذاً مجموعة المتجهين $\{(1,2,-1),(0,-6,5)\}$ تنشئ $R(A)$.

ملاحظة: متجه أي صف من صفوف المصفوفة A يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من متجهات المجموعة التي تنشئ $R(A)$ والعكس صحيح (بمعنى أن كل متجه من متجهات المجموعة التي تنشئ $R(A)$ يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من متجهات صفوف المصفوفة A).

✓ في المثال السابق تحقق من أن كل متجه من متجهات المجموعة التي تنشئ $R(A)$ يكون تركيبة خطية من متجهات صفوف المصفوفة A .

تمرين: أوجد مجموعة متجهات في الفضاء R^3 تنشئ فضاء الصف للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

تعريف(٥):(مفهوم الارتباط والاستقلال الخطي)

يُقال أن مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ معتمدة أو مرتبطة خطياً في الفضاء المتجه V إذا وُجدت أعداد قياسية $c_1,c_2,\dots,c_n$ ليست جميعها (كلها) أصفاراً عندما يكون $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n=0$.

وخلاف ذلك يُقال أن S مستقلة خطياً (أي إذا وُجدت أعداد قياسية $c_1,c_2,\dots,c_n$ جميعها أصفاراً وفقط عندما يكون $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n=0$).

أمثلة:

١ - حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ مرتبطة أم مستقلة خطيا في الفضاء R^4 حيث $v_1=(2,-1,0,3),v_2=(1,2,5,-1),v_3=(7,-1,5,8)$.

الحل: بفرض $c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$ حيث c_1,c_2,c_3 *scalars*

$$\therefore c_1(2,-1,0,3)+c_2(1,2,5,-1)+c_3(7,-1,5,8)=0$$

$$\therefore \begin{array}{l} 2c_1+c_2+7c_3=0, \\ -c_1+2c_2-c_3=0, \\ 5c_2+5c_3=0, \\ 3c_1-c_2+8c_3=0. \end{array}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ c_1=-3c_3\ ,\ c_2=-c_3$$

واضح أن لمجموعة المعادلات السابقة أكثر من حل خلاف الحل الصفري.

فمثلاً باختيار $c_3=1$ يكون $c_1=-3\ ,\ c_2=-1$ وإذاً S مرتبطة خطيا.

٢– حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ مرتبطة أم مستقلة خطيا في الفضاء R^4 حيث $v_1=(1,0,1,2)\,,v_2=(0,1,1,2)\,,v_3=(1,1,1,3)$.

الحل:

$$\text{let } c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0\;;\; c_1,c_2,c_3 \;\; scalars.$$

$$\therefore c_1(1,0,1,2)+c_2(0,1,1,2)+c_3(1,1,1,3)=0$$

$$\therefore \begin{aligned} c_1+c_3&=0,\\ c_2+c_3&=0,\\ c_1+c_2+c_3&=0,\\ 2c_1+2c_2+3c_3&=0. \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 2&2&3&0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \therefore\; c_1=c_2=c_3=0$$

وإذاً S مستقلة خطيا.

٣– ابحث ارتباط أو استقلال مجموعة متجهات كثيرات الحدود $S=\{p_1,p_2,p_3\}$ في فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 2 في المتغير x حيث:

$$p_1(x)=1-x\,,\,p_2(x)=5+3x-2x^2\,,\,p_3(x)=1+3x-x^2$$

الحل:

$$\text{let } c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3=0\;;\; c_1,c_2,c_3 \;\; scalars.$$

$$\therefore c_1(1-x)+c_2(5+3x-2x^2)+c_3(1+3x-x^2)=0$$

وبمقارنة معاملات قوى x في الطرفين نحصل على:

$$\begin{aligned} -2c_2-c_3&=0,\\ -c_1+3c_2+3c_3&=0,\\ c_1+5c_2+c_3&=0. \end{aligned}$$

ولإيجاد c_1,c_2,c_3 نختزل المصفوفة الممتدة المناظرة فتكون كما يلي (تحقق من ذلك؟):

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ c_1 = (3/2)c_3\ ,\ c_2 = (-1/2)\,c_3$

put $c_3 = 2 \Rightarrow c_1 = 3\ ,\ c_2 = -1$

وإذاً S مرتبطة خطيا.

٤– ابحث ارتباط أو استقلال مجموعة متجهات الدوال $S = \{e^t, e^{2t}\}$ في فضاء الدوال في المتغير t .

الحل:

let $c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0\ ;\ c_1, c_2\ \ scalars.\quad (1)$

وبالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على:

$$c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} = 0 \qquad (2)$$

وبطرح(1) من(2) نحصل على:

$$c_2 e^{2t} = 0 \Rightarrow c_2 = 0\ ; e^{2t} \neq 0$$

وبالتعويض في(1) نحصل على: $c_1 = 0$

وإذاً S مستقلة خطيا.

تمرين: ابحث ارتباط أو استقلال كلا من متجهات الدوال الآتية في فضاء الدوال في المتغير x :

(i) $\{1, x, x^2\}$ (ii) $\{1, \sin x, \cos x\}$

✓ **نظرية**: لتكن $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مجموعة من المتجهات غير الصفرية في الفضاء المتجه V فإن S تكون مرتبطة خطياً إذا وإذا فقط كانت إحدى متجهاتها تركيبة خطية من باقي المتجهات في S.

البرهان:

(أولاً) نفرض أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S وسنثبت أن S تكون مرتبطة خطياً:

$$\text{let } v_j = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_{j-1}v_{j-1} + c_{j+1}v_{j+1} + ... + c_nv_n$$

$$\therefore c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_{j-1}v_{j-1} + (-1)v_j + c_{j+1}v_{j+1} + ... + c_nv_n = 0$$

واضح أن أحد الأعداد القياسية (وهو معامل v_j) لا يساوي الصفر (أي وُجدت أعداد قياسية ليست جميعها أصفارا) وإذاً S مرتبطة خطياً وهو المطلوب إثباته.

(ثانياً) نفرض أن S مرتبطة خطياً وسنثبت أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S:

حيث إن S مرتبطة خطياً فتوجد أعداد قياسية $c_1,c_2,...,c_n$ ليست جميعها أصفارا عندما يكون:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_{j-1}v_{j-1} + c_jv_j + c_{j+1}v_{j+1} + ... + c_nv_n = 0$$

$$\therefore -c_jv_j = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_{j-1}v_{j-1} + c_{j+1}v_{j+1} + ... + c_nv_n$$

وباعتبار $c_j \neq 0$

$$\therefore v_j = (\frac{c_1}{-c_j})v_1 + (\frac{c_2}{-c_j})v_2 + ... + (\frac{c_{j-1}}{-c_j})v_{j-1} + (\frac{c_{j+1}}{-c_j})v_{j+1} + ... + (\frac{c_n}{-c_j})v_n$$

أي أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S وهو المطلوب إثباته.

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

مثال: باستخدام النظرية السابقة حدد ما إذا كانت مجموعة المصفوفات $S=\{M_1,M_2,M_3\}$ مرتبطة أم مستقلة خطياً في فضاء المصفوفات $M_{2\times 2}(R)$ حيث:

$$M_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

الحل: واضح أن $M_3=M_1+M_2$ أي أن إحدى متجهات S تركيبة خطية من باقي المتجهات في S وطبقاً للنظرية فإن S تكون مرتبطة خطياً.

تمرين: ابحث ارتباط أو استقلال مجموعة المصفوفات $S=\{M_1,M_2,M_3\}$ في فضاء المصفوفات $M_{2\times 2}(R)$ حيث:

$$M_1=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 8 & 3\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}-5 & -8\\ -16 & 4\end{pmatrix}.$$

نتيجة: التركيبات الخطية من مجموعة متجهات مستقلة خطياً في أي فضاء متجه تكون وحيدة.

البرهان: لتكن $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة من متجهات مستقلة خطياً في الفضاء المتجه V ولتكن $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i=0$, $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i=0$ تركيبتين خطيتين من متجهات S

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} c_i v_i=\sum_{i=1}^{n} k_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i v_i-\sum_{i=1}^{n} k_i v_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(c_i-k_i)v_i=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(c_i-k_i)=0.$$

حيث S مستقلة خطياً ومن ثم يكون $c_i=k_i \;\forall i=1,2,\ldots,n.$

أي أن التركيبات الخطية من مجموعة متجهات مسـتقلة خطياً في أي فضاء متجه تكون وحيدة.

تمارين

١- حدد ما إذا كان المتجه (0,1) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-1,1)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٢- حدد ما إذا كان المتجه (2,3,5) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,1,-5)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٣- حدد ما إذا كان المتجه (2,5,1) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,2,4)$, $v_2 = (-2,3,-1)$, $v_3 = (3,-2,4)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٤- حدد ما إذا كان المتجه (3,2,1) تركيبة خطية من المتجهات:

$v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (5,-1,2)$, $v_3 = (4,2,3)$, $v_4 = (-13,5,-4)$

أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

٥- عبر عن المتجه (1,0,0,0) كتركيبة خطية من المتجهات:

$v_1=(-1,1,1,1)$, $v_2=(1,-1,1,1)$, $v_3=(1,1,-1,1)$, $v_4=(1,1,1,-1)$

٦- عبر عما يلي كتركيبة خطية من كثيرات الحدود:

$P_1 = 2+t+4t^2$, $P_2 = 1-t+3t^2$, $P_3 = 3+2t+5t^2$.

(1) $5 + 9t + 5t^2$.

(2) $2 + 6t^2$.

(3) $2 + 2t + 3t^2$.

٧- حدد أي مما يلي يكون تركيبة خطية من المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} , \ C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1- $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.   2- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.   3- $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$.

٨- صِف فضاء العمود لكل من المصفوفات الآتية:

1- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.   2- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

٩- حدد ما إذا كان المتجه (3,9,12) يقع في فضاء العمود للمصفوفة
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ أم لا؟ (مع ذِكر السبب).

١٠- حدد أي المجموعات التالية من المتجهات تنشئ الفضاء R^2 .

(1) {(1,2) , (-1,1)} .
(2) {(0,0) , (1,1) , (-2,-2)} .
(3) {(1,3) , (2,-3) , (0,2)} .

١١- حدد أي المجموعات التالية من المتجهات تنشئ الفضاء R^3 .

(1) {(1,-1,2), (0,1,1), (-3,-2,1)} .
(2) {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)} .
(3) {(5,0,0), (-1,2,0)} .

١٢- حدد أي من المجموعات التالية من المتجهات تنشئ الفضاء R^4 .

(1) {(1,0,0,0) , (1,1,0,0) , (1,1,1,0) , (1,1,1,1)} .
(2) {(0,1,1,0) , (1,1,1,1) , (-1,1,-1,1) , (1,2,3,4)} .
(3) {(1,1,0,0) , (1,2,-1,1) , (0,0,1,1) , (2,1,2,1)} .

١٣- حدد ما إذا كانت كثيرات الحدود التالية تنشئ فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي2 في المتغير t .

$p_1 = 1 + 2t - t^2$, $p_2 = 3 + t^2$,
$p_3 = 5 + 4t - t^2$, $p_4 = 2 + 2t - 2t^2$.

١٤- أوجد مجموعة المتجهات التي تنشئ الفضاء الصفري لكل من المصفوفات الآتية:

$$1\text{-} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}. \qquad 2\text{-} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad 3\text{-} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4\text{-} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \qquad 5\text{-} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

١٥- حدد أي من المجموعات التالية من المتجهات في الفضاء R^3 تكون مرتبطة خطياً وأيها تكون مستقلة خطيا.

(1) {(2,-1,4) , (3,6,2) , (2,10,-4)} .
(2) {(3,1,1) , (2,-1,5) , (4,0,-3)} .
(3) {(1,3,3) , (0,1,4) , (5,6,3) , (7,2,-1)} .

١٦- حدد أي من المجموعات التالية من المتجهات في الفضاء R^4 تكون مرتبطة خطياً وأيها تكون مستقلة خطيا ، وفي حالة ما إذا كانت مرتبطة خطياً اكتب إحداها في صورة تركيبة خطية من باقي المتجهات.

(1) {(4,4,0,0) , (0,0,6,6) , (-5,0,5,5)} .
(2) {(1,2,1,-2) , (0,-2,-2,0) , (0,2,3,1) , (3,0,-3,6)} .
(3) {(1,0,3,1) , (-1,1,0,1) , (2,3,0,0) , (1,1,6,3)} .

١٧- أثبت أنه إذا كانت مجموعة المتجهات $\{v_1,v_2,v_3\}$ مستقلة خطياً في الفضاء المتجه V فإن كل من مجموعة المتجهات الآتية:

(1) $\{2v_1 , v_1+v_2 , -v_1+v_2\}$.
(2) $\{v_1+v_2 , v_2+v_3 , v_3+v_1\}$.
(2) $\{v_1 , v_1+v_2 , v_1+v_2+v_3\}$.

تكون أيضاً مستقلة خطياً .

١٨- حدد أي من مجموعتي المصفوفات الآتية تكون مستقلة خطياً:

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}.$

(2) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$
