" الباب الأول "

تحليل الإجهاد Analysis of Stress

بند (١) : مقدمة : -

لقد سبق لنا تعريف الجسم المتماسك بأنه الجسم الذي تظل المسافة بين جزيئاته المختلفة ثابتة ، مهما أثرت عليه قوى خارجية . ولكن من الناحية العملية فإن جميع الأجسام تعاني تغيراً في الشكل عندما تؤثر عليها قوى خارجية ، فإذا كان هذا التغير طفيفاً فإنه يمكن إهماله واعتبار الجسم متماسكاً ، أما إذا كان التغير ملموساً فإن الجسم يسمى قابل للتشكل Deformable ، وإذا استطاع الجسم أن يستعيد شكله الأصلي بعد زوال القوى الخارجية المؤثرة عليه ، فإنه في هذه الحالة يسمى مرناً Elastic ، أما إذا احتفظ الجسم بجزء من التشكل بعد زوال القوى الخارجية التي أثرت عليه فإنه يسمى لدناً Plastic .

وتعتبر خاصية المرونة من الخواص الأساسية لجميع المواد الموجودة في الطبيعة. ولقد اهتمت الدراسات الرياضية لهذا الموضوع بالحصول على صيغ رياضية يمكن بواسطتها معرفة الإجهاد والانفعال المصاحب له في هذه المواد وكذلك الإزاحة النسبية التي حدثت والتي لها أهمية كبيرة من الناحية العملية عند استخدام مثل هذه المواد في المنشآت وغيرها في حياتنا اليومية وتعتبر نظرية المرونة إحدى فروع ميكانيكا الأوساط المتصلة والقابلة للتشكيل والتي بواسطتها يمكن معرفة حالة الاتزان وكذلك حالة الحركة للأجسام المرنة .

بند (٢) : تعريفات : -

تنقسم القوى الخارجية التي تؤثر على الجسم المرن والتى ينشأ عنها إجهادات في هذا الجسم إلى نوعين أساسيين هما .

القوى السطحية : Surface Forces

هي القوى التي تؤثر على سطح الجسم ويمكن أن توزع بأي طريقة على جزء من سطح الجسم ، مثل قوى الشد Tension ، وقوى الضغط compression ، وتقدر هذه القوى لوحدة المساحات ويكون اتجاهها عمودي على السطح .

القوى الجسمية أو الحجمية : Body Forces

هي التي تؤثر على جميع جزيئات الجسم وتظهر عادةً من قوة الجاذبية Gravitational Force أو القوى الناتجة عن الطرد المركزي Centrifugal Force ، وتقدر هذه القوى لوحدة الحجوم ويكون لها اتجاه محدد .

فإذا كان لدينا جسم حجمه V وبفرض أن القوى المؤثرة على عنصر الحجم dv هي $\vec{\phi} dv$ ، فإن المتجه $\vec{\phi}$ يمثل القوى الحجمية المؤثرة عند النقطة التي إحداثياتها (x, y, z) بالنسبة لمجموعة الإحداثيات الكارتيزية oz, oy, ox ، *وذلك لوحدة الحجم* dv .

في حالة ما إذا كان المتجه $\vec{\phi}$ يمثل قوى الجاذبية فيكون اتجاهه رأسياً إلى أسفل ومقداره ρg حيث ρ كثافة مادة الجسم ، g عجلة الجاذبية الأرضية . بصفة عامة المتجهة $\vec{\phi}$ يعتمد على موضع العنصر dv أو بمعنى آخر على الإحداثيات (x, y, z) لنقطة ما داخل عنصر الحجم dv ، وفي حالة ديناميكا الجسم المرن يعتمد المتجهة $\vec{\phi}$ على الإحداثيات (x, y, z) وكذلك الزمن t .

وبالتالي فإن القوى الحجمية التي تؤثر على الجسم ذي الحجم V يمكن كتابتها في الصورة:

$$\vec{\psi} = \iiint_{v} \vec{\phi} \, dv \qquad (1.1)$$

فإذا كانت Z, Y, X تمثل مركبات المتجه $\vec{\phi}$ في اتجاه المحاورالثلاث oz, oy, ox ، على الترتيب ، أي أن

$$\vec{\phi} = X \, \vec{i} + Y \, \vec{j} + Z \, \vec{k}$$

فإنه عزوم هذه المركبات حول المحاور المناظرة هي كما يلي:

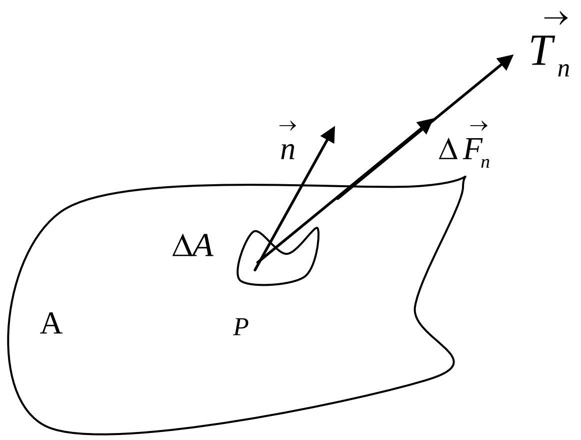
$$M_x = \iiint_{v} (y \, Z - z \, Y) \, dx \, dy \, dz ,$$

$$M_y = \iiint_{v} (z \, X - x \, Z) \, dx \, dy \, dz , \qquad (1.2)$$

$$M_z = \iiint_{v} (x \, Y - y \, X) \, dx \, dy \, dz .$$

بند (٣) : الإجهاد المحصل عند نقطة : -

نعتبر الآن أى سطح داخلى أو خارجى مستوى أو منحنى ، كما هو مبين بشكل (١) ، على عنصر المساحة ΔA المحيط بالنقطة p تؤثر مجموعة من القوى محصلتها $\Delta \vec{F}_n$ والتي اتجاهها ليس من الضروري في اتجاه العمودي $\vec{n}$ للخارج على السطح ΔA .



يعرف خارج القسمة $\frac{\Delta\overrightarrow{F_n}}{\Delta A}$ بالإجهاد المتوسط ،   شكل (١)

عندما $\Delta A \to 0$ فإننا نحصل على الإجهاد المحصل والذي يرمز له بالرمز $\overrightarrow{T_n}$ ، حيث

$$\overrightarrow{T_n} = \lim_{\Delta A \to o} \frac{\Delta\overrightarrow{F_n}}{\Delta A}$$

وخط عمل الإجهاد المحصل $\overrightarrow{T_n}$ منطبق على خط عمل القوة المحصلة $\Delta\overrightarrow{F_n}$ ، (شكل (١)) .

يمكن ، على وجه العموم ، تحليل الإجهاد المحصل $\overrightarrow{T_n}$ إلى مركبتين متعامدتين ، مركبة في الإتجاه العمودي $\vec{n}$ وتعرف بالمركبة العمودية للإجهاد أو الإجهاد العمودي **Normal Stress** ويرمز لها بالرمز σ_n ، والأخرى تسمى بالمركبة المماسية للإجهاد أو الإجهاد القاصي **Shearing Component** ويرمز لها بالرمز τ_n . وبالتالي فإن الإجهاد المحصل $\overrightarrow{T_n}$ يعتمد على إحداثيات النقطة $p\left(x\,,y\,,z\right)$ وكذلك على الإتجاه العمودي على السطح $\vec{n}$ عند النقطة p ، وإذا كان الجسم المرن في حالة حركة فانه يعتمد أيضا على الزمن t .

تقاس وحدات الإجهاد بالنيوتن/ متر٢ أو البسكال **Pascal** ، أي أن $1Pascal = \frac{N}{m^2}$ ، والوحدات الأكبر هي الميجا بسكال $Mpa.$ ، $1Mpa. = 1000Pascal$.

لتعيين الإجهاد عند نقطة ما وتحديد اتجاهه فإنه يلزمنا معرفة مركبات الإجهاد المؤثرة على ثلاث مستويات متعامدة تمر بهذه النقطة. باستخدام الإحداثيات الكارتيزية ، فإن الإجهاد عند أي نقطة يمكن تحليله إلى ثلاث مركبات في اتجاه المحاور $OX\ ,\ Oy\ ,\ OZ$ ، فمثلا إذا أخذنا مستوى العمودي عليه هو المحور ox يكون لدينا المركبات $\sigma_{xx}\ ,\ \tau_{xy}\ ,\ \tau_{xz}$ ، على الترتيب ، وبالمثل إذا أخذنا مستوى العمودي عليه هو المحور oy يكون لدينا المركبات $\tau_{yx}\,,\,\sigma_{yy}\,,\,\tau_{yz}$ ، وإذا أخذنا مستوى العمودي عليه هو المحور oz يكون لدينا المركبات $\tau_{zx}\,,\,\tau_{zy}\,,\,\sigma_{zz}$.

وبالتالي يكون لدينا عند النقطة o من الجسم المرن تسع مركبات كارتيزية يمكن وضعها في مصفوفة تعرف بمصفوفة ممتد الإجهاد عند نقطة o .

المركبة العمودية في اتجاه المحور ox

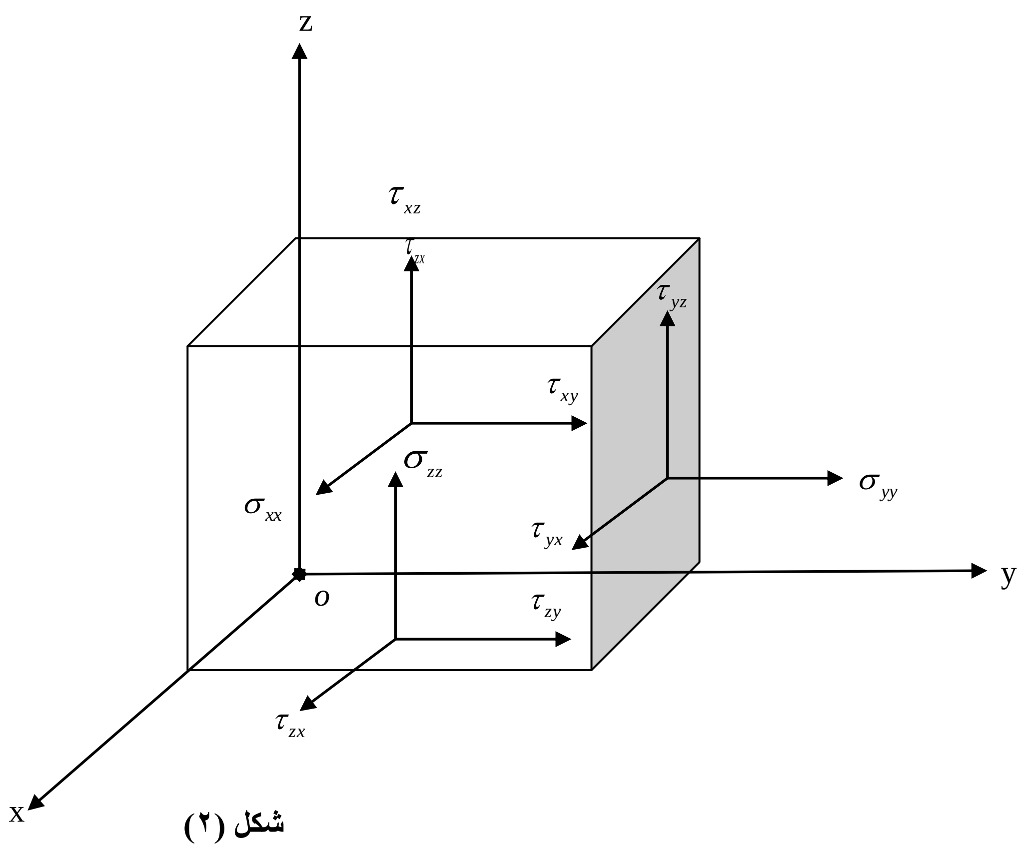
المركبة العمودية في اتجاه المحور oy

المركبة العمودية في اتجاه المحور oz

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

ويمكن وضعهم على أوجه مكعب منشأ على المحاور OZ , Oy , OX من الجسم المرن ، كما هو مبين بشكل (٢) .

نلاحظ أنه في حالة الإجهاد العمودى فإن الاتجاه الموجب يمثل شد **Tension** ، أما الاتجاه السالب فيمثل ضغط **Compression** .

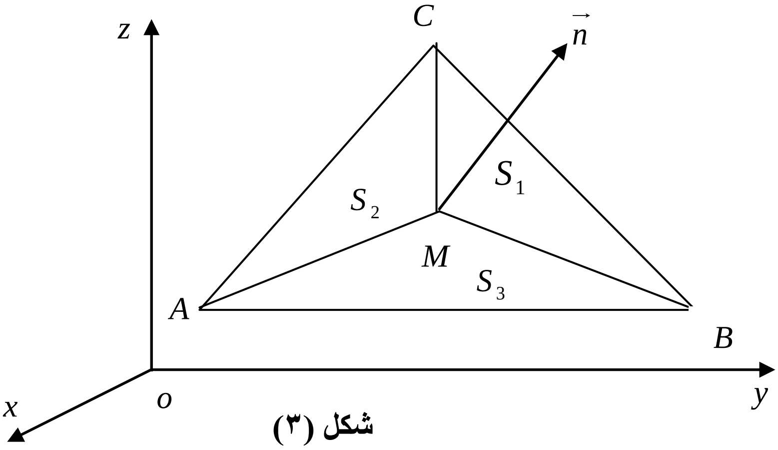


شكل (٢)

بند (٤) : مركبات الإجهاد عند أي نقطة : -

لتعين مركبات الإجهاد T_{nx}, T_{ny}, T_{nz} عند النقطة $M(x, y, z)$ من جسم مرن ، نرسم ثلاث مستويات موازية لمستويات الإحداثيات ومتقاطعة في نقطة M ، ثم نرسم مستوى ، يكون العمودى علية هو $\vec{n}$ ، وعلى بعد h من نقطة M .

وبالتالي نحصل على عنصر من الجسمعلى شكل هرم ثلاثى ، كما بشكل (٣)



شكل (٣)

S_1 مساحة المثلث MBC

S_2مساحة المثلث MAC

S_3 مساحة المثلث MAB

بفرض أن جيوب تمام $\vec{n}$ هى

$\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)$, $\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)$, $\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)$ بالنسبة للمحاور الثلاث OX , Oy , OZ ،

على الترتيب . نلاحظ أن مركبات الإجهاد T_{nx} ,T_{ny} ,T_{nz} تؤثر على المستوى ABC من الهرم ،

وحيث أن العنصر (الهرم) في حالة إتزان ، لذلك بتطبيق المبدأ الأول للإستاتيكا والذي ينص على :

" محصلة مركبات القوى في أي اتجاه تتلاشى "

وحيث أن مركبات القوى في اتجاه المحور ox هي :

١) مركبة القوى الحجمية :

$\left(X+\varepsilon\right)dv$ ، حيث dv عنصر الحجم ، S مساحة المثلث ABC ، ε كمية صغيرة جداً .

٢) مركبات القوى السطحية :

$\left(-\sigma_{xx}+\varepsilon_1\right)S_1$ تمثل مركبة القوى الناتجة من الإجهاد المؤثر على المثلث MBC ،

$\left(-\tau_{yx}+\varepsilon_2\right)S_2$ تمثل مركبة القوى الناتجة من الإجهاد المؤثر على المثلث MAC ،

$\left(-\tau_{zx}+\varepsilon_3\right)S_3$ تمثل مركبة القوى الناتجة من الإجهاد المؤثر على المثلث MAB ،

$\left(T_{nx}+\varepsilon_4\right)S$ تمثـل مركبــة القــوى الناتجــة مــن الإجهــاد المــؤثر علــى المثلــث ABC ،

حيث ε_1 , ε_2 , ε_3 , ε_4 كميات صغيرة جداً .

وحيث أن هذه المركبات جميعها في حالة اتزان ، لذلك فإن محصلتها تتلاشى ، أي أن:

$$\begin{aligned}&\left(X+\varepsilon\right)dv+\left(T_{nx}+\varepsilon_4\right)s+\left(-\sigma_{xx}+\varepsilon_1\right)s_1+\\&\quad+\left(-\tau_{yx}+\varepsilon_2\right)s_2+\left(-\tau_{zx}+\varepsilon_3\right)s_3=0\ ,\end{aligned}\qquad(1.3)$$

ولكن

$$S_1=S\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right),\quad S_2=S\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right),\quad S_3=S\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right),\quad dv=\frac{1}{3}h\,s\ .$$

$$\therefore \ \frac{1}{3} h\, S\, (X + \varepsilon) + (T_{nx} + \varepsilon_4) S + (-\sigma_{xx} + \varepsilon_1) S \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) +$$
$$+ (-\tau_{yx} + \varepsilon_2) S \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + (-\tau_{zx} + \varepsilon_3) S \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right) = 0$$

بإهمال الكميات الصغيرة $\varepsilon, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ \varepsilon_4$ ، وجعل الهرم يؤول إلى نقطة ، وذلك بجعل $h \to 0$ ، نحصل على :

$$T_{nx} = \sigma_{xx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right).$$

وبالمثل يمكن الحصول على المركبات $T_{ny}\ , T_{nz}$ وبالتالي يمكن كتابة مركبات الإجهاد المؤثر على مستوى يمر بالنقطة M والعمودي عليه هو $\vec{n}$ بدلالة مركبات ممتد الإجهاد عند النقطة M كما يلي :

$$\begin{aligned}
T_{nx} &= \sigma_{xx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right), \\
T_{ny} &= \tau_{xy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right), \\
T_{nz} &= \tau_{xz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right). \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

" الصيغ (1.4) أول من حصل عليها هو العالم الفرنسي **A . L. Cauchy** عام 1822 "

وبالتالي فإن الإجهاد المحصلة نحصل عليه من العلاقة :

$$\left|\overrightarrow{T_n}\right| = \sqrt{T_{nx}^2 + T_{ny}^2 + T_{nz}^2} \qquad (1.5)$$

كذلك اتجاه الإجهاد المحصلة يتعين من العلاقات الآتية :

$$\cos\left(\overrightarrow{T_n}, \overrightarrow{ox}\right) = \frac{T_{nx}}{\left|\overrightarrow{T_n}\right|}, \quad \cos\left(\overrightarrow{T_n}, \overrightarrow{oy}\right) = \frac{T_{ny}}{\left|\overrightarrow{T_n}\right|}, \quad \cos\left(\overrightarrow{T_n}, \overrightarrow{oz}\right) = \frac{T_{nz}}{\left|\overrightarrow{T_n}\right|}. \qquad (1.6)$$

كذلك يمكن تعيين كل من المركبة العمودية للإجهاد σ_n والمركبة القاصة τ_n من العلاقات الآتية :

$$\sigma_n = \left|\overrightarrow{T_n}\right| \cos\left(\overrightarrow{T_n}, \vec{n}\right), \qquad \tau_n = \left|\overrightarrow{T_n}\right| \sin\left(\overrightarrow{T_n}, \vec{n}\right), \qquad (1.7)$$

والزاوية بين الإجهاد المحصل $\overrightarrow{T_n}$ والعمودي $\vec{n}$ تعين من العلاقة :

$$\cos\left(\overrightarrow{T_n}, \vec{n}\right) = \cos\left(\overrightarrow{T_n}, \overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \cos\left(\overrightarrow{T_n}, \overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) +$$
$$+ \cos\left(\overrightarrow{T_n}, \overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right). \qquad (1.8)$$

بند (٥) : معادلات الاتزان : -

نعلم من مبادئ الإستاتيكا ، في حالة اتزان جسم ، فإن محصلة القوى وكذلك مجموع عزوم القوى ، حول أي محور تنعدم ، وذلك بالنسبة للجسم المتماسك أى الغير قابل للتشكل ، ولكن إذا طبق هذين المبدأين على الجسم المرن ككل فإننا على أى نتيجة يمكن منها معرفة حالة الاتزان لهذا الجسم . ولذلك سوف نأخذ جزأ من الجسم وليكن حجمه v ومساحة سطحه S ، ثم نقوم بتطبيق المبدأ الأول للاتزان عليه .

فلو أخذنا الاتجاه ox نجد أن القوى المؤثرة على الحجم v هى :

القوى الحجمية $\iiint_v X\,dv$ ، القوى السطحية $\iint_s T_{nx}\,ds$.

وبالتالي فإن :

$$\iiint_v X\,dv + \iint_s T_{nx}\,ds = 0$$

وبالمثل يكون لدينا معادلتين في اتجاه ox , oy . وتصبح معادلات الاتزان هى :

$$\iiint_v X\;dv + \iint_s T_{nx}\;ds = 0\,, \quad \iiint_v X\;dv + \iint_s T_{nx}\;ds = 0\,,$$
$$\iiint_v X\;dv + \iint_s T_{nx}\;ds = 0\,. \qquad (1.9)$$

بالتعويض من المعادلات (1.4) في المعادلات (1.9) ، نحصل على

$$\iint_s \mathrm{T}_{nx}\,ds = \iint_s \Big[\sigma_{xx}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yx}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zx}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)\Big]ds\,,$$
$$\iint_s \mathrm{T}_{ny}\,ds = \iint_s \Big[\tau_{xy}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zy}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)\Big]ds\,,$$
$$\iint_s \mathrm{T}_{nz}\,ds = \iint_s \Big[\tau_{xz}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yz}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)\Big]ds\,.$$

من نظريات جرين التكاملية ، نعلم أن :

$$\oiint_s \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \oiint_s \left(\vec{F}.\vec{n}\right)ds = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{F}\right)dV$$

$$\therefore \iint_s \mathrm{T}_{nx}\,ds = \iiint_v \Big[\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\Big]\,dv\,,$$
$$\iint_s \mathrm{T}_{ny}\,ds = \iiint_v \Big[\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\Big]\,dv\,,$$
$$\iint_s \mathrm{T}_{nz}\,ds = \iiint_v \Big[\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\Big]\,dv\,. \qquad (1.10)$$

بالتعويض من المعادلات (1.10) في (1.9) نحصل على :

$$\iiint_v \Big[X + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\Big]\,dv = 0,$$
$$\iiint_v \Big[Y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\Big]\,dv = 0,$$
$$\iiint_v \Big[Z + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\Big]\,dv = 0.$$

وحيث أن المعادلات السابقة صحيحة لأي جزء اختياري ذو حجم V من الجسم ، لذلك فإن المعادلات السابقة لا تتحقق إلا إذا تلاشت الدوال المكاملة ، وبالتالي نحصل على **معادلات الاتزان** في الصورة :

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\,,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\,,$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+Z=0\,. \tag{1.11}$$

وذلك بفرض أن مركبات الإجهاد وتفاضلاتها دوال متصلة في المتغيرات $x\,,\,y\,,\,z$.

بند (٦) : تماثل مركبات الإجهاد : -

من تطبيق المبدأ الثاني للإتزان والذي ينص على :

" محصلة عزوم القوى حول أي محور تتلاشى "

فلو أخذنا العزوم حول المحور ox ، مثلاً ، نجد أن محصلة عزوم مركبات القوى الحجمية حول المحور ox هي :

$$\iiint_V (Z\,y-Y\,z)\,dv$$

ومحصلة عزوم مركبات القوى السطحية حول المحور ox هي :

$$\iint_s \left(\mathrm{T}_{nz}\,y-\mathrm{T}_{ny}\,z\right)ds$$

وحيث أن الحجم v في حالة الاتزان ، لذلك فإن :

$$\iiint_V (Z\,y-Y\,z)\,dv+\iint_s \left(\mathrm{T}_{nz}\,y-\mathrm{T}_{ny}\,z\right)ds=0\,. \tag{1.12}$$

بالتعويض عن $T_{nz}\,,T_{ny}$ من المعادلات (1.4) وتحويل التكامل السطحى إلى تكامل حجمى نحصل على :

$$\begin{aligned}\iint_s \left(y\,T_{nz}-z\,T_{ny}\right)ds &= \iint_s ([\tau_{xz}\cos(\vec{n},\overrightarrow{ox})+\tau_{yz}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oy})+\sigma_{zz}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oz})]\,y\,- \\ &\quad -[\tau_{xy}\cos(\vec{n},\overrightarrow{ox})+\sigma_{yy}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oy})+\tau_{zy}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oz})]\,z\,)\,ds \\ &= \iint_s [(y\,\tau_{xz}-z\,\tau_{xy})\cos(\vec{n},\overrightarrow{ox})+(y\,\tau_{yz}-z\,\sigma_{yy})\cos(\vec{n},\overrightarrow{oy})+ \\ &\quad +(y\,\sigma_{zz}-z\,\tau_{zy})\cos(\vec{n},\overrightarrow{oz})]\,ds\end{aligned}$$

$$\iint_s \left(y\,T_{nz}-z\,T_{ny}\right)ds=\iiint_v \left[\frac{\partial}{\partial x}(y\,\tau_{xz}-z\,\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(y\,\tau_{yz}-z\,\sigma_{yy})+\frac{\partial}{\partial z}(y\,\sigma_{zz}-z\,\tau_{zy})\right]dv$$

$$\therefore \iint_s \left(y\,T_{nz} - z\,T_{ny} \right) ds = \iiint_v \Big[\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) y + \tau_{yz} - \tau_{zy} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) z \Big] dv$$

$$= \iiint_v \left[(-y\,z + z\,y) + \tau_{yz} - \tau_{zy} \right] dv \qquad (1.13)$$

بالتعويض من المعادلة (1.13) في المعادلة (1.12) نحصل على:

$$\iiint_v \left(y\,Z - z\,Y \right) dv + \iiint_v \left(z\,Y - y\,Z \right) dv + \iiint_v \left(\tau_{yz} - \tau_{zy} \right) dv = 0$$

أي أن:

$$\iiint_v \left(\tau_{yz} - \tau_{zy} \right) dv = 0 .$$

المعادلة السابقة صحيحة لأي حجم اختياري v من الجسم المرن وبالتالي فإنها لا تتحقق إلا إذا تلاشت الدالة المكاملة ، أى تتحقق عندما $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

أى أن المركبة القاصة للإجهاد المؤثر على المستوى العمودي عليه هو oy في اتجاه oz تساوى المركبة القاصة للإجهاد المؤثر على المستوى العمودي عليه هو oz في اتجاه oy .

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\tau_{xy} = \tau_{yx} \;,\; \tau_{xz} = \tau_{zx}$

وبالتالي يمكننا القول بأن مصفوفة ممتد الإجهاد مصفوفة متماثلة ومن ثم يمكن كتابتها في الصورة:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

<u>مثالـــــــــ :</u>

إذا كانت مركبات الإجهاد عند نقطة في جسم مرن مجهد هي :

$$\sigma_{xx} = 500\,Mpa. \,, \quad \tau_{xy} = 500\,Mpa. \,, \quad \sigma_{yy} = 1000\,Mpa. \,,$$
$$\tau_{yz} = -750\,Mpa. \,, \quad \tau_{zx} = 800\,Mpa. \,, \quad \sigma_{zz} = -800\,Mpa.$$

عين مركبات متجه الإجهاد المحصل $\overrightarrow{T_n}$ وكذلك المركبة العمودية للإجهاد σ_n والمركبة المماسية τ_n ، على المستوي المار بالنقطة و العمودي عليه للخارج جيوب تمام اتجاهه هي :

$$\cos(\vec{n}, \overrightarrow{ox}) = \cos(\vec{n}, \overrightarrow{oy}) = \frac{1}{2} \,, \quad \cos(\vec{n}, \overrightarrow{oz}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \,.$$

الحلـــــــ :

$$\because T_{nx} = \sigma_{xx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right).$$

$$\therefore T_{nx} = 500 \times \frac{1}{2} + 500 \times \frac{1}{2} + 800 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 1066\ Mpa.,$$

$$\because T_{ny} = \tau_{xy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right).$$

$$\therefore T_{ny} = 500 \times \frac{1}{2} + 1000 \times \frac{1}{2} - 750 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 220\ Mpa.,$$

$$\because T_{nz} = \tau_{zx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right).$$

$$\therefore T_{nz} = 800 \times \frac{1}{2} - 750 \times \frac{1}{2} - 300 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -187\ Mpa.,$$

$$\left|\overrightarrow{T_n}\right| = \sqrt{T_{nx}^2 + T_{ny}^2 + T_{nz}^2} \cong 1104\ Mpa.$$

$$\because \sigma_n = \left|\overrightarrow{T_n}\right| \cos\left(\overrightarrow{T_n}, \vec{n}\right) = T_{nx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + T_{ny} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + T_{nz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right)$$

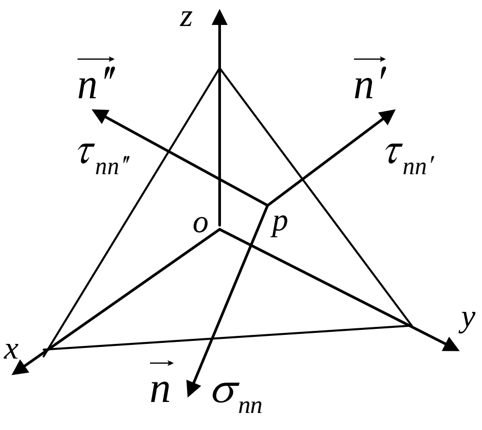
$$\therefore \sigma_n = 1066 \times \frac{1}{2} + 220 \times \frac{1}{2} - 187 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 511\ Mpa.,$$

$$\tau_n = \sqrt{\left|\overrightarrow{T_n}\right|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{(1104)^2 - (511)^2} \cong 979\ Mpa.$$

بند (٧) : قانون التحول للإجهاد : -

أحيانا يكون من الأفضل والأيسر ، أو يكون المطلوب ، عمل تحويل بين مركبات الإجهاد الست وذلك من مجموعة الإحداثيات $o\,x\,y\,z$ إلى مجموعة إحداثيات أخرى ولتكن $o\,x'\,y'\,z'$ وبالتالي نحتاج إلى إيجاد مركبات الإجهاد المنسوبة إلى مجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ بدلالة مركبات الإجهاد المنسوبة إلىمجموعة الإحداثيات $o\,x\,y\,z$ ، أي نحتاج إلى إيجاد

$$\sigma_{xx}\ ,\ \sigma_{yy}\ ,\ \ldots\ ,\ \tau_{zx} \text{ بدلالةالمركبات } \sigma_{x'x'}\ ,\ \sigma_{y'y'}\ ,\ \ldots\ ,\ \tau_{z'x'}$$



وللحصول على ذلك التحويل ، نعتبر عنصرا من الجسم المرن على شكل هرم رأسه عند نقطة أصل الإحداثيات (o) وقاعدته ذات وجه ذات وجه مائل العمودي عليه هو $\vec{n}$ ، كما هو مبين بشكل (٤)، وبذلك يمكن تعيين اتجاهان متعامدان $\vec{n'}, \vec{n''}$ يقعان في المستوى وبالتالي فإن الإجهاد المحصل $\vec{T}_n$ عند نقطة p

واقعة في المستوي يمكن تحليله في اتجاه $\vec{n}, \vec{n'}, \vec{n''}$ شكل (٤)

وبالتالي سوف نحصل على الإجهادات σ_{nn} , $\tau_{nn'}$, $\tau_{nn''}$ ، والتي يمكن تعيينها من العلاقات الآتية :

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn} &= \mathrm{T}_{nx} \cos(\vec{n},\overrightarrow{ox}) + \mathrm{T}_{ny} \cos(\vec{n},\overrightarrow{oy}) + \mathrm{T}_{nz} \cos(\vec{n},\overrightarrow{oz}), \\
\tau_{nn'} &= \mathrm{T}_{nx} \cos(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{ox}) + \mathrm{T}_{ny} \cos(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oy}) + \mathrm{T}_{nz} \cos(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oz}), \\
\tau_{nn''} &= \mathrm{T}_{nx} \cos(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{ox}) + \mathrm{T}_{ny} \cos(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oy}) + \mathrm{T}_{nz} \cos(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oz}).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

بالتعويض في المعادلات (1.14) من المعادلات (1.4) ، مع استخدام خاصية التماثل ، نحصل على :

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn} = \sigma_{xx} \cos^2\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) &+ \sigma_{yy} \cos^2\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz} \cos^2\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right) + \\
&+ 2\tau_{xy} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) + 2\tau_{zx} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) + \\
&+ 2\tau_{yz} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right),
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{nn'} = \sigma_{xx} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{ox}\right) &+ \sigma_{yy} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oy}\right) + \\
&+ \sigma_{zz} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oz}\right) + \\
&+ \tau_{xy} \left[\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) \cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{ox}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)\right] + \\
&+ \tau_{zx} \left[\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right) \cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{ox}\right) + \cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oz}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)\right] + \\
&+ \tau_{yz} \left[\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) \cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos\left(\overrightarrow{n'},\overrightarrow{oy}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)\right],
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{nn''} = \sigma_{xx} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{ox}\right) &+ \sigma_{yy} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oy}\right) + \\
&+ \sigma_{zz} \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oz}\right) + \\
&+ \tau_{xy} \left[\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) \cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{ox}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)\right] + \\
&+ \tau_{zx} \left[\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right) \cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{ox}\right) + \cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oz}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)\right] + \\
&+ \tau_{yz} \left[\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) \cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oz}\right) + \cos\left(\overrightarrow{n''},\overrightarrow{oy}\right) \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)\right],
\end{aligned} \tag{1.17}$$

المعادلات $(1.15),(1.16),(1.17)$ تمكننا من تعيين المركبات العمودية والقاصة عند أى نقطة منسوبة إلى أى مجموعة من الإحداثيات وذلك بمعلومية مركبات الإجهاد المنسوبة إلى مجموعة إحداثيات معينة ، وكذلك جيوب تمام الاتجاه للاتجاهات المطلوب تعيين الإجهاد بالنسبة لها.

لذلك المركبات $\sigma_{x'x'}$, $\sigma_{y'y'}$, . . . , $\tau_{z'x'}$ يمكن الحصول عليها بدلالة المركبات

σ_{xx} , σ_{yy} , . . . , τ_{zx} ، كما يلي :

لتعيين $\sigma_{x'x'}$ نختار مستوى العمودي عليه هو ox' وبذلك يصبح $\overrightarrow{T_n}$ هو $\overrightarrow{T_{x'}}$ وبالتعويض نحصل على:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} = {} & \sigma_{xx}\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy}\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz}\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ & + 2\tau_{xy}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) + 2\tau_{zx}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right) + \\ & + 2\tau_{yz}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right), \qquad (1.18)\end{aligned}$$

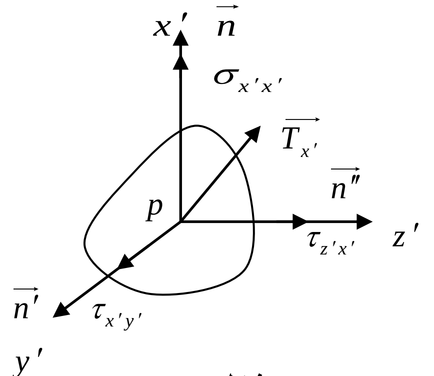
كذلك باختيار $\overrightarrow{n}$ في اتجاه oy' و oz' ، على التوالي ، نحصل على :

$$\begin{aligned}\sigma_{y'y'} = {} & \sigma_{xx}\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy}\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz}\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ & + 2\tau_{xy}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + 2\tau_{zx}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + \\ & + 2\tau_{yz}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right), \qquad (1.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z'z'} = {} & \sigma_{xx}\cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy}\cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz}\cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ & + 2\tau_{xy}\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right) + 2\tau_{zx}\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right) + \\ & + 2\tau_{yz}\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right), \qquad (1.20)\end{aligned}$$

كذلك المركبات القاصة $\tau_{x'y'}\,,\ \tau_{y'z'}\,,\ \tau_{z'x'}$ يمكن الحصول عليها كما يلي :

بالنسبة للمركبة القاصة $\tau_{x'y'}$ يمكن الحصول عليها باختيار مستوى العمودى عليه هو $\overrightarrow{n}$ ، ينطبق على المحور ox' ، والإتجاه $\overrightarrow{n'}$ ينطبق على المحور oy' ، والإتجاه $\overrightarrow{n''}$ ينطبق على المحور oz' ، كما هو موضح بشكل (٥)



شكل (٥)

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} = {} & \sigma_{xx}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + \\ & + \sigma_{zz}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ & + \tau_{xy}\,[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)] + \\ & + \tau_{yz}\,[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)] + \\ & + \tau_{zx}\,[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)]\,. \qquad (1.21)\end{aligned}$$

باختيار كل من $\overrightarrow{n'}$ و $\overrightarrow{n}$ لينطبقان على oy', oz' ثم على oz', ox' نحصل على :

$$\tau_{y'z'} = \sigma_{xx}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right) +$$
$$+\sigma_{zz}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right) +$$
$$+\tau_{xy}\,[\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)] +$$
$$+\tau_{yz}\,[\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)] +$$
$$+\tau_{zx}\,[\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)]. \qquad (1.22)$$

$$\tau_{z'x'} = \sigma_{xx}\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy}\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) +$$
$$+\sigma_{zz}\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right) +$$
$$+\tau_{xy}\,[\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)] +$$
$$+\tau_{yz}\,[\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)] +$$
$$+\tau_{zx}\,[\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right) + \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)]. \qquad (1.23)$$

بند (٨) : الكميات الاتغيرية في حالة الإجهاد : -

بجمع المعادلات $(1.20),(1.19),(1.18)$ **نحصل على:**

$$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \sigma_{xx}\left[\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\right] +$$
$$+\sigma_{yy}\left[\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\right] +$$
$$+\sigma_{zz}\left[\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)\right] +$$
$$+2\tau_{xy}\,[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)+\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)+$$
$$+\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)]+$$
$$+2\tau_{zx}\,[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)+\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)+$$
$$+\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)]+$$
$$+2\tau_{yz}\,[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)+\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)+$$
$$+\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)]. \qquad (1.24)$$

وحيث أن الثلاث (ox', oy', oz') **محاور متعامدة ، لذلك فإن :**

$$\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right) = 1,$$
$$\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right) = 1,$$
$$\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right) = 1. \qquad (1.25)$$

بينما معاملات $\tau_{xz}\,,\,\tau_{yz}\,,\,\tau_{xy}$ **في المعادلة** (1.24) **تتلاشى ، وبالتالي فإن :**

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \Theta . \qquad (1.26)$$

وهذه هى أولى الكميات التى لا تتغير بتغير مجموعة الإحداثيات وهى تدل على أن مجموع المركبات العمودية لمتجه الإجهاد المحصل لا يتغير بتغير المحاور المختارة .

كذلك من المعادلة (1.15) نجد أنه إذا كان $\sigma_{nn} > 0$ فإن الإجهاد يكون عبارة عن شد ، أما إذا كان $\sigma_{nn} < 0$ فإن الإجهاد يكون عبارة عن ضغط . وإذا أدخلنا الدالة $2\Omega(\xi,\eta,\zeta)$ المعرفة كالآتي :

$$2\Omega(\xi,\eta,\zeta) = \sigma_{xx}\,\xi^2 + \sigma_{yy}\,\eta^2 + \sigma_{zz}\,\zeta^2 + 2\tau_{xy}\,\xi\eta + 2\tau_{xz}\,\xi\zeta + 2\tau_{yz}\,\eta\zeta . \qquad (1.27)$$

نجد أن هذه الدالة دالة قياسية متجانسة من الدرجة الثانية في ξ,η,ζ أي أنها عبارة عن صيغة ثنائية Quadratic form في المتغيرات ξ,η,ζ .

إذا ما اخترنا المتجه $\vec{p}$ ، حيث $\vec{P} \equiv (\zeta,\eta,\xi)$ ، بحيث يكون موازيا للعمودي $\vec{n}$ فيكون لدينا

$$\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right) = \frac{\xi}{\left|\vec{\mathrm{P}}\right|}, \qquad \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right) = \frac{\eta}{\left|\vec{\mathrm{P}}\right|}, \qquad \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right) = \frac{\zeta}{\left|\vec{\mathrm{P}}\right|} .$$

بالتعويض من هذه الصيغ في المعادلة (1.15) نحصل على

$$\sigma_{nn} . \left|\vec{P}\right|^2 = \sigma_{xx}\,\xi^2 + \sigma_{yy}\,\eta^2 + \sigma_{zz}\,\xi^2 + 2\tau_{xy}\,\xi\eta + 2\tau_{zx}\,\zeta\xi + 2\tau_{yz}\,\eta\zeta . \qquad (1.28)$$

من المعادلتين $(1.27),(1.28)$ نجد أن :

$$\left|\vec{p}\right|^2 \sigma_{nn} = 2\Omega(\xi,\eta,\zeta) . \qquad (1.29)$$

ونلاحظ من المعادلة (1.29) أن الطرف الأيسر يمثل حاصل ضرب كل من مربع طول المتجه $\left|\vec{\mathrm{P}}\right|$ في المركبة العمودية للإجهاد σ_{nn} و كلاً منهما لا يتغير بتغير المحاور المختارة ، وبالتالي فإن الكمية $2\Omega(\xi,\eta,\zeta)$ لا تتغير بتغير المحاور المختارة وبالتالي إذا كانت مركبات المتجه $\vec{\mathrm{P}}$ بالنسبة لمجموعة الإحداثيات $o\,x'y'z'$ هي ξ',η',ζ' فإن :

$$\Omega(\xi,\eta,\zeta) = \Omega(\xi',\eta',\zeta') . \qquad (1.30)$$

باستخدام المعادلة (1.30) وبمعرفة المعادلات التى تربط بين مركبات المتجه $\vec{\mathrm{P}}$ في مجموعتى الإحداثيات $(\xi,\eta,\zeta),(\xi',\eta',\zeta')$ فإنه يمكن الاستعانة بها في تعيين مركبات الإجهاد بالنسبة لمجموعة الإحداثيات المطلوبة .

بند (٩) : سطح الإجهاد : Stress Surface

بأخذ نقطة أصل الإحداثيات o هي النقطة التي يؤثر عندها الإجهاد المحصل $\vec{T}$ ، وحيث أن المعادلة (1.28) يمكن بواسطتها تعيين المركبة العمودية للإجهاد σ_{nn} التي تؤثر على المستوى العمودي عليه له نفس اتجاه المتجه $\vec{\mathrm{P}}$ ، حيث طول هذا المتجه يمكن اختياره ، وباختيار قيمة معينة لهذا الطول وذلك بوضع :

$$\sigma_{nn}\left|\vec{\mathrm{P}}\right|^{2}=\pm c^{2}\ , \qquad (1.31)$$

حيث C مقدار ثابت اختياري موجب ، وبالتالي فإن

$$\sigma_{nn}=\pm\frac{c^{2}}{\left|\vec{\mathrm{P}}\right|^{2}}\ , \qquad (1.32)$$

الإشارة في الطرف الأيمن تختار بحيث تكون موجبة عندما σ_{nn} تمثل شد ، وتكون سالبة عندما σ_{nn} تمثل ضغط .

من المعادلتين $(1.31),(1.29)$ نجد أن

$$2\Omega(\xi,\eta,\zeta)=\pm c^{2} \qquad (1.33)$$

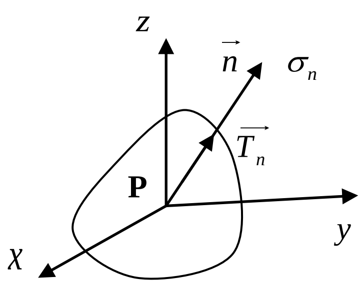
المعادلة(1.33) تمثل معادلة سطح ثنائي مركزه نقطة o ، ويسمى هذا السطح بسطح الإجهاد Stress surface أو سطح كوشي Stress quadric surface of Cauchy ، ونلاحظ أنه بمجرد معرفة سطح الإجهاد لكوشي يمكن تعيين المركبة العمودية σ_{nn} وذلك بمعرفة طول العمودي على المستوى المماس للسطح من نقطة o والذي يمثل طول المتجه $\vec{p}$.

من المعادلة (1.27) ومن تعريف المتجه $\vec{p}$ وبأستخدام المعادلات (1.4) ، نحصل على :

$$T_{nx}=\frac{1}{|\vec{p}|}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\ ,\quad T_{ny}=\frac{1}{|\vec{p}|}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\ ,\quad T_{nz}=\frac{1}{|\vec{p}|}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\ . \qquad (1.34)$$

بند (١٠) : الإجهادات الأساسية : Principal Stresses

وجدنا أن الإجهاد المحصل $\overrightarrow{\mathrm{T}_n}$ عند أي نقطة p يعتمد على اختيار المستوى الذي يؤثر عليه ، فإذا ما أختير المستوى بحيث أن $\overrightarrow{\mathrm{T}_n}$ تنطبق على العمودي $\vec{n}$ ، كما هو موضح بالشكل (٦) ، فيكون واضحا أن الإجهاد القاصي τ_n يتلاشى ، وأن $\overrightarrow{\mathrm{T}_n}, \sigma_n$ ينطبقان على العمودي $\vec{n}$ ، في هذه الحالة المستوى يسمى بالمستوى الأساسي Principal Plane والاتجاه $\vec{n}$ يعرف بالإتجاه الأساسي Principal Direction .



شكل (٦)

<u>مع ملاحظة أن</u> :

في أي حالة من حالات الإجهاد يوجد دائما على الأقل ثلاث مستويات أساسية متعامدة مع بعضها ومرافق لها على الأكثر ثلاث إجهادات أساسية مختلفة .

المعادلات (4) **، في حالة الإجهادات أساسية ، تصبح :**

$$\mathrm{T}_{nx}=\sigma_n\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right),\ \mathrm{T}_{ny}=\sigma_n\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right),\ \mathrm{T}_{nz}=\sigma_n\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right).\quad(1.35)$$

بالتعويض من المعادلات (1.35) **في المعادلات** (1.4) **نحصل على :**

$$\begin{aligned}&(\sigma_{xx}-\sigma_n)\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)+\tau_{xy}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)+\tau_{zx}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,\\&\tau_{xy}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)+(\sigma_{yy}-\sigma_n)\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)+\tau_{yz}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,\\&\tau_{zx}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{ox}\right)+\tau_{yz}\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oy}\right)+(\sigma_{zz}-\sigma_n)\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{oz}\right)=0\,.\qquad(1.36)\end{aligned}$$

واضح من المعادلات (1.36) **أن الحل الغير الصفري لها هو :**

$$\begin{vmatrix}\sigma_{xx}-\sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_n\end{vmatrix}=0.\qquad(1.37)$$

وبفك المحدد نحصل على معادلة من الدرجة الثالثة:

$$\begin{aligned}&\sigma_n^3-(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\sigma_n^{\,2}+\left(\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx}-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2\right)\sigma_n+\\&\quad+\left(\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\tau_{yz}^2-\sigma_{yy}\tau_{zx}^2-\sigma_{zz}\tau_{xy}^2+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}\right)=0.\qquad(1.38)\end{aligned}$$

جذور المعادلة (1.38) **تعطى الاجهادات الأساسية ، و بالتعويض عن القيم الستة لمركبات الإجهاد في المعادلة** (1.38) **يمكن حلها بالنسبة إلى** σ_n **والحصول على ثلاثة جذور حقيقية . وهناك ثلاث حالات محتملة وهي :**

(i) $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ **مختلفة وبالتالي** $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}$ **وحيدة ومتعامدة .**

(ii) $\sigma_1=\sigma_2\neq\sigma_3$ **وبالتالي** $\overrightarrow{n_3}$ **يكون وحيد وأي اتجاه عمودي على** $\overrightarrow{n_3}$ **يكون اتجاه أساس مرافق لـ** σ_1,σ_2 **.**

(iii) **إذا كان** $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ **نحصل على حالة الهيدروستاتيكا للإجهاد وأي اتجاه هو اتجاه أساسي .**

بتعيين الإجهادات الأساسية الثلاثة والتعويض بكل واحد منها مستقلا في المعادلات (1.36) **، نحصل على ثلاث معادلات ، وبحل هذه المعادلات مع أستخدام العلاقة :**

$$\cos^2(\vec{n},\overrightarrow{ox}) + \cos^2(\vec{n},\overrightarrow{oy}) + \cos^2(\vec{n},\overrightarrow{oz}) = 1$$

نحصل على الثلاث اتجاهات الأساسية وذلك بمعلومية جيوب التمام لكل اتجاه .

ولقد لوحظ أنه أثناء دراسة الإجهادات الأساسية من المفيد ترتيبها بحيث تكون $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

وإذا ما رتبت الإجهادات الأساسية بهذه الطريقة فإن σ_1 تكون لها أكبر قيمة عند النقطة المراد ايجاد الإجهادات عندها ، وتكون σ_3 لها أقل قيمة جبرية .

<u>نلاحظ</u> من المعادلة (38) أن الكميات

$$\begin{aligned}
I_1 &= \Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \,, \\
I_2 &= \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \,, \\
I_3 &= \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\,\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\,\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\,\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\,\tau_{yz}\,\tau_{zx} \,. \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

لا تتغير بتغير المحاور ، وتعرف على التوالى بأول وثاني وثالث كمية إجهاد لا تتغير مع تغير المحاور . ونلاحظ كذلك أنه إذا اختيرت مجموعة المحاور $o\,x\,y\,z$ بحيث تنطبق على الاتجاهات الأساسية فان الكميات المعطاه في المعادلة (1.39) تختزل إلى :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\,,\; I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\,,\; I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \,. \qquad (1.40)$$

<u>بند (١٠) : أكبر إجهاد قاصي Maximum Shear Stress</u>

للحصول على المعادلات التى تعطى أكبر إجهاد قاصي نأخذ الحالة الخاصة التى فيها مجموعة المحاور محاور أساسية ، أي الحالة التي فيها $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ، مع ملاحظة أن هذا الاختيار لا يحد من معالجة الحالة العامة ، حيث أن

$$\left|\overrightarrow{T_n}\right| = T_{nx}^2 + T_{ny}^2 + T_{nz}^2 \,, \qquad (1.41)$$

$$T_{nx} = \sigma_1 \cos\left(\vec{n},\vec{n}_1\right),\; T_{ny} = \sigma_2 \cos\left(\vec{n},\vec{n}_2\right),\; T_{nz} = \sigma_3 \cos\left(\vec{n},\vec{n}_3\right). \qquad (1.42)$$

حيث $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ هي المركبات الأساسية للإجهاد في الاتجاهات الأساسية $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$.

بالتعويض من المعادلات (1.42)في المعادلة (1.41) نحصل على :

$$\left|\overrightarrow{T_n}\right|^2 = \sigma_1^2\cos^2\left(\vec{n},\vec{n}_1\right) + \sigma_2^2\cos^2\left(\vec{n},\vec{n}_2\right) + \sigma_3^2\cos^2\left(\vec{n},\vec{n}_3\right), \qquad (1.43)$$

ولكن من المعادلة (1.15) نجد أن σ_{nn} في هذه الحالة تكون في الصورة :

$$\sigma_{nn} = \sigma_1\cos^2\left(\vec{n},\vec{n}_1\right) + \sigma_2\cos^2\left(\vec{n},\vec{n}_2\right) + \sigma_3\cos^2\left(\vec{n},\vec{n}_3\right), \qquad (1.44)$$

وحيث أن

$$\tau_n^2 = \left|\mathrm{T}_n\right|^2 - \sigma_{nn}^2$$

وبالتعويض من المعادلات $(1.43),(1.44)$ في العلاقة السابقة نحصل على :

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 k^2 - \left(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 k^2\right)^2 , \qquad (1.45)$$

حيث $l = \cos\left(\vec{n}, \vec{n}_1\right),\ m = \cos\left(\vec{n}, \vec{n}_2\right),\ k = \cos\left(\vec{n}, \vec{n}_3\right)$

بحذف k بين المعادلة (1.44) والعلاقة التالية :

$$l^2 + m^2 + k^2 = 1 , \qquad (1.46)$$

نحصل على :

$$\tau_n^2 = \left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) l^2 + \left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) m^2 + \sigma_3^2 - [\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) l^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right) m^2 + \sigma_3]^2 . \qquad (1.47)$$

بتفاضل المعادلة (1.47) جزئيا بالنسبة إلى l ثم إلى m نحصل على :

$$l\,[\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) - \left(\sigma_1 - \sigma_3\right) l^2 - \left(\sigma_2 - \sigma_3\right) m^2] = 0 , \qquad (1.48)$$

$$m\,[\frac{1}{2}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right) - \left(\sigma_1 - \sigma_3\right) l^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right) m^2] = 0 . \qquad (1.49)$$

إحدى حلول المعادلتين (1.49) , (1.48) هو $l = m = 0$ ومن العلاقة (1.46) نحصل على $k = \pm 1$

وهى تمثل المستوى الأساسى بإجهاد قاصي صفر .

<u>حلول تختلف عن الصفر لهذه المجموعة من المعادلات:</u>

<u>أولاً :</u> بوضع $m = 0$ فإننا نجد من العلاقة (1.48) أن $l = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ،

ومن العلاقة (1.46) نجد أن $k = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>ثانياً :</u> بوضع $l = 0$ فإننا نجد من العلاقة (1.49) أن $m = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ،

ومن العلاقة (1.46) نجد أن $k = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

بتكرار ذات الطريقة وذلك بوضع m تساوي قيمة معينة ، ثم التعويض في العلاقتين (1.48) , (1.46) نحصل على قيمة لكل من $l\ , k$ والتى تحقق أن الإجهاد القاصي المعطي بالمعادلة (1.45) يكون أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن ، كما يلي :

بالتعويض عن قيم $l = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} , k = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ في المعادلة (1.45) نحصل على :

$$\tau_n^2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_3^2 - \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3)$$

$$\therefore \tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\,. \qquad (1.50)$$

وباستعمال القيم الأخرى لجيوب التمام نحصل على أكبر قيم مناظرة للإجهاد القاصي وهي :

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,, \qquad (1.51)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\,. \qquad (1.52)$$

من الصيغ الثلاث السابقة ، (1.52) , (1.51) , (1.50) ، تكون أكبر قيمة للإجهاد القاصي هي :

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$$

وذلك إذا ما رتبت الإجهادات الأساسية في الصورة $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ، أي أن :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\,. \qquad (1.53)$$

الجدول التالي يوضح قيم $l\ , m\ , k$ التي عندها الإجهاد العمودي والإجهاد القاصي أكبر ما يمكن ، أو أقل ما يمكن .

<u>لاحظ</u> أن الإشارة الموجبة ، في الجدول ، تدل على أن الاتجاهات هي الاتجاهات الموجبة للمحاور وكذلك فإن الإجهادات عبارة عن شد ، أما الإشارة السالبة فتدل على أن الاتجاهات هى السالبة للمحاور وأن الإجهاد عبارة عن ضغط .

l	m	k	τ	σ
0	0	$+1$	0	$\pm\sigma_3$
0	$+1$	0	0	$\pm\sigma_2$
$+1$	0	0	0	$\pm\sigma_1$
0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$
$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$
$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$

ونلاحظ كذلك أن الإجهاد القاصي أكبر ما يمكن في الاتجاهات المنصفة للزوايا بين المحاور الأساسية .

بند (١١) : دائرة موهر -: Mohr's Circle

يمكننا تمثيل النتائج التي حصلنا عليها في بند (١٠) بيانيا والذي يعرف بدائرة موهر Mohr's Circle .

من المعادلات (1.44) , (1.45) , (1.46) نحصل على :

$$l^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \; m^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)},$$

$$k^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \qquad (1.54)$$

وبفرض أن : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ، لذلك فإن $\sigma_1 - \sigma_3 > 0$, $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$ ، وكذلك $l^2 \geq 0$ (المعادلة الأولى في (1.54)) ، وبالتالي فإن :

$$\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3) \geq o. \qquad (1.55)$$

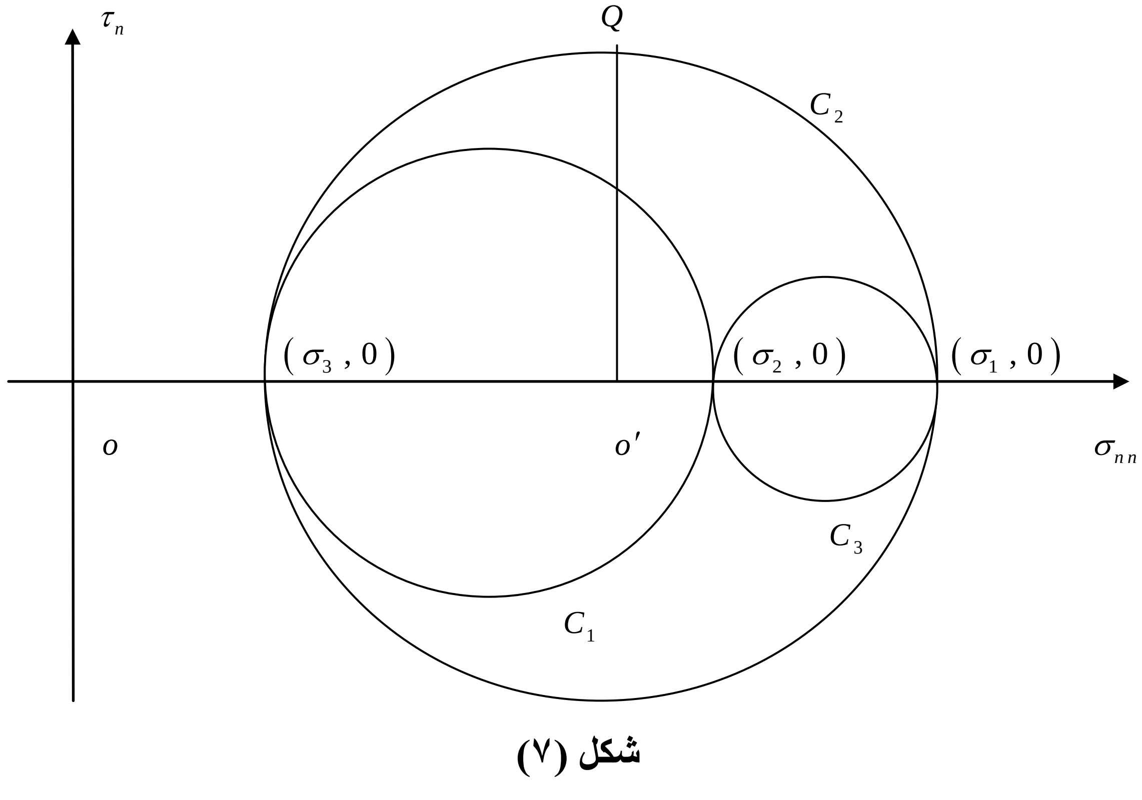
بأخذ محورين الأفقي يمثل σ_{nn} والرأسي يمثل τ_n ، فإن المعادلة

$$\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3) = 0, \qquad (1.56)$$

تمثل معادلة دائرة مركزها يقع على المحور الأفقي وهى الدائرة c_1

وتمر بالنقطتين $(\sigma_2, 0)$, $(\sigma_3, 0)$

وبذلك تكون المنطقة الممثل بالعلاقة (1.55) تقع خارج هذه الدائرة ، كما بشكل (٧) .



شكل (٧)

ومن المعادلة الثانية من (1.54) ، حيث أن $\sigma_2 - \sigma_1 < 0 \;,\; \sigma_2 - \sigma_3 > 0$

فان $(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) < 0$.

ولكن $m^2 > o$ وبذلك يكون لدينا :

$$\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1) \le 0 \qquad (1.57)$$

حيث المعادلة

$$\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1) = 0 \qquad (1.58)$$

تمثل معادلة دائرة تمر بالنقطة $(\sigma_1 \,,\, 0) \,,\, (\sigma_3 \,,\, 0)$ ، كما هو مبين بالشكل (٧) ، وتصبح المنطقة الممثلة بالعلاقة (1.57) تقع داخل الدائرة C_2 .

أيضا من المعادلة الثالثة من (1.54) ، حيث أن $\sigma_3 - \sigma_1 < 0 \;,\; \sigma_3 - \sigma_2 > 0$

فان $(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) < 0$.

ولكن $k^2 \ge 0$ وبذلك يكون لدينا :

$$\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2) \ge 0 \qquad (1.59)$$

المعادلة:

$$\tau_n^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2) = 0 \qquad (1.60)$$

تمثل معادلة دائرة تمر بالنقطتين $(\sigma_2 \,,\, 0) \,,\, (\sigma_1 \,,\, 0)$ كما هو مبين بشكل (٧) . وتصبح المنطقة الممثلة بالعلاقة (1.59) تقع خارج الدائرة C_3 .

مما سبق نجد أن قيم $\sigma_{nn} \,,\, \tau_n$ التي تحقق المعادلات (1.54) مع الأخذ في الاعتبار أن $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ هي القيم التي تقع في المنطقة المظللة والمحددة بالدوائر الثلاث $C_1 \,, C_2 \,, C_3$.

واضح من الرسم أن τ_n أكبر ما يمكن عند نقطة Q . أي أن :

$$(\tau_n)_{\max} = o'o = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

وكذلك قيمة σ_{nn} المناظرة هي عبارة عن oo' وتساوي $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ، بالتعويض بهذه القيم في المعادلات (1.54) نحصل على قيم جيوب تمام الاتجاه الذي فيه τ_n أكبر ما يمكن وهي :

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \,,\; m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \,,\; k = 0 \,.$$

بند (١٢) : حالات خاصة للإجهاد :- Special States of Stress

في التطبيقات العملية توجد غالباً حالتين للإجهاد هما :

إجهاد قاص نقى : ***Pure Shearing Stress*** ، إجهاد هيدروستاتيكي : ***Hydrostatic Stress***

بالنسبة <u>للنوع الأول</u> فإنه يوجد إذا ما اختيرت مجموعة من الإحداثيات $o\,x\,y\,z$ بحيث أن : $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ وهذه المجموعة من الإحداثيات توجد إذا ما تحقق الشرط $\mathrm{I} = \Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$. وفي هذه الحالة تكون مصفوفة ممتد الإجهاد $\overrightarrow{\mathrm{T}_n}$ لها الصورتين :

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zz} & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix} \quad or \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} = -\sigma_{xx} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix}$$

وتلاحظ أن المصفوفة الثانية يمكن تحليلها إلى المصفوفة الأولى وبذلك بدوران المحاور دوراناً خاصاً .

وبالنسبة <u>للنوع الثاني</u> ، فيقال أن حالة الإجهاد هيدروستاتيكي إذا ما تحقق $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\mathrm{P}$

وفي هذه الحالة كل الإجهادات القاصة سوف تتلاشى ، وبالتالي تصبح مصفوفة ممتد الإجهاد في الصورة:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{P} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{P} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{P} \end{pmatrix}$$

هاتان الحالتان للإجهاد لهما خاصية هامة ، وهى أن الحالة العامة للإجهاد يمكن تحليلها إلى الحالتين السابقتين وذلك لأن:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{P} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{P} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + \mathrm{P} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} + \mathrm{P} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} + \mathrm{P} \end{pmatrix}$$

من الواضح أن المصفوفة التى في الطرف الأيسر تمثل الحالة العامة للإجهاد وأن المصفوفة الأولى من الطرف الأيمن تمثل إجهاد هيدروستاتيكي ، بينما المصفوفة الأخيرة تمثل حال إجهاد قاص نقى .

وهذا يتحقق إذا ما كان أول كمية من الكميات التى لا تتغير بتغيرالمحاور تتلاشى ، وهذا يتضمن أن

$$(\sigma_{xx} + \mathrm{P}) + (\sigma_{yy} + \mathrm{P}) + (\sigma_{zz} + \mathrm{P}) = 0 \Rightarrow 3\mathrm{P} + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

أى أن:

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \qquad (1.61)$$

ومن ذلك يتضح أن p في حالة الإجهاد الهيدروستاتيكي تحقق العلاقة (1.61) .

بند (١٣) : الإجهادات منسوبة إلى المحاور الأساسية :-

إذا ما اختيرت مجموعة الإحداثيات $o\,x\,y\,z$ بحيث تنطبق على الثلاث محاور الأساسية $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{n_3}$

وبذلك يكون لدينا $\sigma_{xx} = \sigma_1 \,,\quad \sigma_{yy} = \sigma_2 \,,\quad \sigma_{zz} = \sigma_3 \,,\quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

وهذا يعنى اختزال المركبات الست للإجهاد إلى ثلاث مركبات ، وهذا يؤدى إلى أن مركبات الإجهاد المحصل في اتجاه المحاورتأخذ الصورة

$$\mathrm{T}_{nx} = \sigma_1 \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right), \mathrm{T}_{ny} = \sigma_2 \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right), \mathrm{T}_{nz} = \sigma_3 \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right). \qquad (1.62)$$

كذلك مركبات الإجهاد بالنسبة إلى مجموعة الإحداثيات $o\,x\,y\,z$ تصبح :

$$\begin{aligned}
\sigma_{x'x'} &= \sigma_1 \cos^2\left(\overrightarrow{ox'}, \overrightarrow{ox}\right) + \sigma_2 \cos^2\left(\overrightarrow{ox'}, \overrightarrow{oy}\right) + \sigma_3 \cos^2\left(\overrightarrow{ox'}, \overrightarrow{oz}\right),\\
\sigma_{y'y'} &= \sigma_1 \cos^2\left(\overrightarrow{oy'}, \overrightarrow{ox}\right) + \sigma_2 \cos^2\left(\overrightarrow{oy'}, \overrightarrow{oy}\right) + \sigma_3 \cos^2\left(\overrightarrow{oy'}, \overrightarrow{oz}\right),\\
\sigma_{z'z'} &= \sigma_1 \cos^2\left(\overrightarrow{oz'}, \overrightarrow{ox}\right) + \sigma_2 \cos^2\left(\overrightarrow{oz'}, \overrightarrow{oy}\right) + \sigma_3 \cos^2\left(\overrightarrow{oz'}, \overrightarrow{oz}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{x'y'} &= \sigma_1 \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_2 \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) +\\
&\quad + \sigma_2 \cos\left(\overrightarrow{ox'}, \overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'}, \overrightarrow{oz}\right),\\
\tau_{y'z'} &= \sigma_1 \cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_2 \cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right) +\\
&\quad + \sigma_3 \cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right),\\
\tau_{z'x'} &= \sigma_1 \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right) + \sigma_2 \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) +\\
&\quad + \sigma_3 \cos\left(\overrightarrow{oz'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right). \qquad (1.63)
\end{aligned}$$

بند (١٤) : حالة الإجهاد في بعدين :- The Tow Dimensional Stats of Stress

إذا كان الإجهاد في المستوى $x-y$ فإن مركبات الإجهاد في اتجاه المحور $o\,z$ تتلاشى ، أي أن :

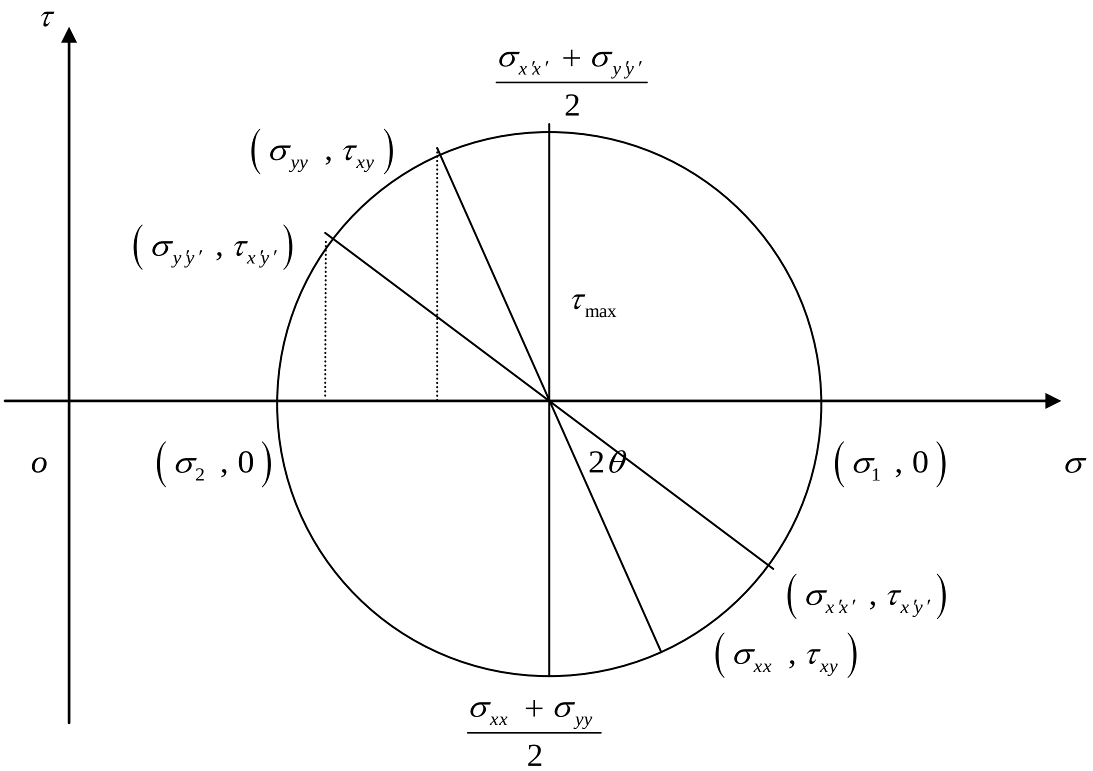
$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0\,, \qquad (1.64)$$

وتصبح مركبات الإجهاد منسوبة للمحاور $o\,x'\,y'$ ، التي تميل على المحاور الأصلية $(o\,x\,y)$ بزاوية θ تعطى بالعلاقات الآتية :

$$\begin{aligned}
\sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx} \cos^2\theta + \sigma_{yy} \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta\cos\theta\\
&= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta,
\end{aligned}$$

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{yy} \cos^2\theta + \sigma_{xx} \sin^2\theta - 2\tau_{xy} \sin\theta\cos\theta$$
$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta,$$
$$\tau_{x'y'} = \sigma_{yy} \cos\theta\sin\theta - \sigma_{xx} \cos\theta\sin\theta + \tau_{xy} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$
$$= \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta,$$
$$\sigma_{z'z'} = \tau_{z'x'} = \tau_{y'z'} = 0 . \tag{1.65}$$

المعادلات(1.65) **يمكن تمثيلها بيانيا بواسطة دائرة موهر ، كما هو مبين بالرسم (شكل (٨)) .**



شكل (٨)

نلاحظ من الشكل أن المركبات العمودية (σ) أخذت أفقيا بينما المركبات القاصة (τ) أخذت رأسياً ، والإجهادات التي تمثل شد وضعت على يمين المحور، بينما التي تمثل ضغط مثلت على اليسار ، كذلك المركبات القاصة التي تعمل على دوران الجسم حول نقطة في اتجاه عقارب الساعة ، وضعت أعلى المحور σ بينما التي تعمل على دوران الجسم ضد عقارب الساعة وضعت أسفل ذلك المحور ، وبهذا التمثيل نجد أن مركبات الإجهاد المرافقة لأي مستوى خلال النقطة تمثل بنقطة على الدائرة .

عندما تكون المحاورأساسية في المستوى $x-y$ ، فإن الإجهادات الأساسية المعطاة بالمعادلة (1.38) تصبح في الصورة :

$$\sigma_n[\sigma_n{}^2 - \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\sigma_n + \left(\sigma_{xx}\,\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2\right)] = 0 \tag{1.66}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_3 = 0 \qquad (1.67)$$

والاتجاهين الأساسيين اللذان يعرفان المستويان الأساسيان يمكن تعيينهما من المعادلة (1.65) **بوضع** $\tau_{x'x'} = 0$ **، فنجد أن**

$$\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\sin 2\theta - 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

ومنها

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \qquad (1.68)$$

حيث θ **هي الزاوية بين المحور** $o\,x$ **والمحور الأساسي الأول ، وبالتالي فإن :**

$$\cos 2\theta = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \, , \, \sin 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \, . \qquad (1.69)$$

كذلك أكبر إجهاد قاص يتعين من العلاقة :

$$\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \, .$$

<u>مثال ١ :</u>

عند نقطة في جسم مرن في حالة إجهاد كانت المركبات الكرتيزية للإجهاد

$$\sigma_{xx} = 6o\ Mpa.,\ \sigma_{yy} = -30\ Mpa.,\ \sigma_{zz} = 30\ Mpa,\ \tau_{xy} = 40\ Mpa.,\ \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

عين كل من المركبة العمودية والقاصة على المستوى العمودي عليه إلى الخارج جيوب تمام اتجاهه هي :

$$\cos(\vec{n}, \vec{ox}) = \frac{6}{11}, \quad \cos(\vec{n}, \vec{oy}) = \frac{6}{11}, \quad \cos(\vec{n}, \vec{oz}) = \frac{7}{11},$$

$$\text{Mpa.} \equiv \text{Mega Pascal}, \quad 1\,\text{Pascal} \equiv \text{Newtons}/\text{m}^2.$$

<u>الحل :</u>

بالتعويض في المعادلات التي تعين $\mathrm{T}_{nx}, \mathrm{T}_{ny}, \mathrm{T}_{nz}$ **نحصل على :**

$$\mathrm{T}_{nx} = 60\times\frac{6}{11} + 40\times\frac{6}{11} + 0 = \frac{360 + 240}{11} = \frac{600}{11}\ Mpa.,$$

$$\mathrm{T}_{ny} = 40\times\frac{6}{11} - 30\times\frac{6}{11} + 0 = \frac{240 - 180}{11} = \frac{60}{11}\ Mpa.,$$

$$T_{nz} = 0 + 0 + 30 \times \frac{7}{11} = \frac{210}{11}\ Mpa.$$

وبذلك تصبح المركبة العمودية هي

$$\begin{aligned}\sigma_n &= T_{nx}\cos(\vec{n},\overrightarrow{ox}) + T_{ny}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oy}) + T_{nz}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oz}) \\ &= \frac{600}{11}\times\frac{6}{11} + \frac{60}{11}\times\frac{6}{11} + \frac{210}{11}\times\frac{6}{11} \\ &= \frac{5430}{121} = 44.9\ Mpa.\end{aligned}$$

والمركبة القاصة تتعين من العلاقة $\tau_n = \sqrt{T_n^2 - \sigma_n^2}$.

ولكن :

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{T_n}\right|^2 &= T_{nx}^2 + T_{ny}^2 + T_{nz}^2 = \frac{(600)^2}{121} + \frac{(60)^2}{121} + \frac{(210)^2}{121} \\ &= \frac{407700}{121}\ MPa.\end{aligned}$$

لذلك فإن :

$$\tau_n = \sqrt{\frac{407700}{121} - \left(44.9\right)^2} = 36.78\ Mpa.$$

<u>مثالـــ ٢ ـــــ :</u>

عند نقطة في جسم مرن مجهد المركبات الكرتيزية للإجهاد هي:

$$\sigma_{xx} = 90\ Mpa\ ,\quad \sigma_{yy} = 60\,Mpa\ ,\quad \sigma_{zz} = 30\ Mpa\ ,$$
$$\tau_{xy} = 30\ Mpa\ ,\quad \tau_{yz} = 30\ Mpa\ ,\quad \tau_{zx} = 60\ Mpa.$$

عين مركبات الإجهاد منسوبة إلى مجموعة إحداثيات حيث جيوب تمام اتجاه محاورها معرفة بالجدول الآتى :

	ox	oy	oz
ox'	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
oy'	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
oz'	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

الحلــــــــــ :

مــــن العلاقـــات التــــى تعطـــى المركبـــات $\sigma_{x'x'} , \sigma_{y'y'}, \sigma_{z'z'} , \tau_{x'y'}, \tau_{z'x'} , \tau_{y'z'}$ **بدلالـــة المركبـــات** $\sigma_{xx} , \sigma_{yy} , \sigma_{zz} , \tau_{xy} , \tau_{xz} , \tau_{yz}$ **نجد أن :**

$$\sigma_{x'x'} = 90\times\frac{4}{9} + 60\times\frac{4}{9} + 30\times\frac{1}{9} + 60\times\frac{4}{9} - 120\times\frac{2}{9} - 60\times\frac{2}{9} = 56.6\ MPa. ,$$

$$\sigma_{y'y'} = 60\times\frac{1}{9} + 30\times\frac{4}{9} + 90\times\frac{4}{9} - 60\times\frac{2}{9} + 120\times\frac{4}{9} - 60\times\frac{2}{9} = 86.6\ MPa. ,$$

$$\sigma_{z'z'} = 30\times\frac{4}{9} + 90\times\frac{1}{9} + 60\times\frac{4}{9} - 120\times\frac{2}{9} - 60\times\frac{2}{9} + 60\times\frac{4}{9} = 36.6\ MPa.$$

$$\tau_{x'y'} = 90\times\frac{4}{9} + 60\times\frac{2}{9} + 30\times\frac{2}{9} + 30\times\left(\frac{2}{9} - \frac{4}{9}\right) + 30\times\left(-\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) + 60\times\left(\frac{2}{9} - \frac{4}{9}\right)$$
$$= -46.6\ MPa. ,$$

$$\tau_{y'z'} = 60\times\frac{2}{9} - 30\times\frac{2}{9} - 90\times\frac{2}{9} + 30\times\left(\frac{2}{9} - \frac{4}{9}\right) + 60\times\left(\frac{2}{9} - \frac{4}{9}\right) + 30\times\left(-\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right)$$
$$= -46.6\ MPa. ,$$

$$\tau_{x'z'} = -30\times\frac{2}{9} + 90\times\frac{1}{9} + 60\times\frac{4}{9} + 60\times\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) + 30\times\left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right) + 30\times\left(-\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right)$$
$$= 66.6\ MPa.$$

مثالــ ٣ ــــ :

عند نقطة في جسم مرن مجهد وُجد أن حالة الإجهاد كالآتي :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 3\ Mpa. , \quad \sigma_{zz} = 2\ Mpa. , \quad \tau_{xy} = 0 , \tau_{xz} = -1\ Mpa. , \quad \tau_{yz} = 1\ Mpa.$$

عين الإجهادات الأساسية ، والأتجاهات الأساسية المناظرة ، وأكبر اجهاد قاصي مناظر ، ثم أثبت أن الاتجاهات الأساسية متعامدة .

الحلــــــــــ :

الاجهادات الأساسية تتعين من المعادلة

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{vmatrix} = 0$$

وبالتعويض بقيم الاجهادات نجد أن

$$\begin{vmatrix} 3 - \sigma & 0 & -1 \\ 0 & 3 - \sigma & 1 \\ -1 & 1 & 2 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

أي أن

$$(3-\sigma)\left[(3-\sigma)(2-\sigma)-1\right]=0 \;\Rightarrow\; (3-\sigma)\left(\sigma^2-5\sigma+4\right)=0$$

$$\therefore (3-\sigma)(\sigma-1)(\sigma-4)=0$$

وبالتالي فإن الإجهادات الأساسية هي :

$$\sigma_1=4\,,\quad \sigma_2=3\,,\quad \sigma_3=1$$

و أكبر اجهاد قاصي هو :

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=1.5\ Mpa.$$

لإيجاد الإتجاهات الأساسية المناظرة ، نستخدم المعادلات (1.36) لإيجاد ذلك ، كما يأتي :

١) الإتجاه الأساسي المناظر للإجهاد الأساسي $\sigma_1=4$ ، نحصل عليه بوضع $\sigma=4$ في المعادلات (1.36) والتعويض بقيم الإجهادات ، فنجد أن الإتجاه الأساسي الأول يحقق المعادلات الآتية :

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right)+\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,\qquad \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right)-\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,$$

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right)-\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right)+2\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right)=0\,.$$

<u>لاحظ</u> أننا بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى ، سوف نحصل على المعادلة الثالثة ، لذلك سوف نقوم بحل المعادلتين الثانية والثالثة معاً ، فنحصل على المعادلة

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right)=-\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right)=-\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right)$$

ولكن

$$\cos^2\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right)=1$$

لذلك من المعادلتين الأخيرتين ، نحصل على

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right)=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right)=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

أي أن الإتجاه الأساسي الأول هو

$$\overrightarrow{n_1}\equiv\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

٢) بالمثل الإتجاه الأساسي المناظر للإجهاد الأساسي $\sigma_2=3$ ، نجد أنه يحقق المعادلات الآتية :

$$\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,\quad \cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right)-\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right)+\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right)=0\,.$$

أي أن

$$\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,\quad \cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right)=\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right)$$

ولكن $$\cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right)=1$$

لذلك فإن

$$\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right)=\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\qquad \cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right)=0\,.$$

أي أن الإتجاه الأساسي الثاني هو $\overrightarrow{n_2}\equiv\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ 0\right)$

٣) كما سبق يمكننا الحصول على الإتجاه الأساسي المناظر للإجهاد الأساسي $\sigma_3=1$ ، والذي يحقق المعادلات الآتية :

$$2\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{ox}\right)-\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,$$
$$2\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right)+\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right)=0\,,$$
$$\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{ox}\right)+\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right)+\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right)=0$$

ومن هذه المعادلات نجد أن

$$\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{ox}\right)=-\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right)$$

ولكن

$$\cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right)+\cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right)=1$$

لذلك فإن

$$\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{ox}\right)=\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\qquad \cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

أي أن الإتجاه الأساسي الثالث هو

$$\overrightarrow{n_3}\equiv\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\ \mp\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

وحيث أن

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}=\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{n_3}=0\,.$$

لذلك فإن الإتجاهات الأساسية الثلاث متعامدة .

<u>مثـالــ ٤ ـــــ :</u>

عند نقطة في جسم مرن مجهد وُجد أن حالة الإجهاد كالآتي :

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=3\ Mpa.\,,\ \sigma_{zz}=6\ Mpa.\,,\ \tau_{xy}=-1\ Mpa.\,,\ \tau_{xz}=2\ Mpa.\,,\ \tau_{yz}=-2\ Mpa.$$

عين الإجهادات الأساسية ، والأتجاهات الأساسية المناظرة ، وأكبر اجهاد قاصي مناظر .

الحلـــــــــــ :

الاجهادات الأساسية تتعين من المعادلة

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_n \end{vmatrix} = 0$$

وبالتعويض بقيم الاجهادات نجد أن

$$\begin{vmatrix} 3-\sigma & -1 & 2 \\ -1 & 3-\sigma & -2 \\ 2 & -2 & 6-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

أي أن

$$\sigma^3 - 12\sigma^2 + 36\sigma - 32 = 0$$

واضح أن جذور هذه المعادلة ، وبالتالي الإجهادات الأساسية هي :

$$\sigma_1 = 8\,, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 2$$

و أكبر اجهاد قاصي هو :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) = 3\ Mpa.$$

إيجاد الإتجاهات الأساسية المناظرة .

١) الإتجاه الأساسي المناظر للإجهاد الأساسي $\sigma_1 = 8$ ، نحصل عليه بوضع $\sigma = 8$ في

المعادلات (1.36) والتعويض بقيم الإجهادات ، فنجد أن الإتجاه الأساسي الأول يحقق المعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} &-5\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right) - \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right) + 2\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right) = 0\,, \\ &\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right) + 5\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right) + 2\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right) = 0\,, \\ &\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right) - \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right) - \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية سوف نحصل على معادلة تكافئ المعادلة الثالثة ، لذلك سوف نقوم بحل المعادلتين الأولى والثانية معاً ، فنحصل على المعادلة

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right)$$

ولكن

$$\cos^2\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right) = 1$$

لذلك من المعادلتين الأخيرتين ، نحصل على

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,, \quad \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}\right) = \mp\frac{1}{\sqrt{6}}\,, \quad \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}\right) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

أي أن الإتجاه الأساسي الأول هو

$$\overrightarrow{n_1} \equiv \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \,,\, \mp\frac{1}{\sqrt{6}} \;,\; \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

<u>لاحظ</u> أن الإجهادات الأساسية ، يوجد منها أثنان متساويان ، ولكن هذا لايعني أنهما متساويان في الإتجاه ، وسوف نوضح كيفية الحصول على الإتجاه الثالث .

٢) الإتجاه الأساسي المناظر للإجهاد الأساسي $\sigma_2 = 2$ ، نجد أنه يحقق ثلاث معادلات تكافئ المعادلة :

$$\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right) - \cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right) + 2\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right) = 0$$

لذلك سوف نقوم بحلها مع المعادلة

$$\cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right) = 1$$

فنجد أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل ، لذلك سوف نفرض قيماً اختيارية لأحد المجاهيل .

بوضع $\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right) = 0$ **، نجد أن**

$$\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{ox}\right) = 2\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right) \;\;\Rightarrow\;\; \cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oz}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \,,\, \cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{oy}\right) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

أي أن الإتجاه الأساسي الثاني هو

$$\overrightarrow{n_2} \equiv \left(0 \,,\, \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \,,\; \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

٣) حيث أن $\sigma_3 = \sigma_2 = 2$ ، لذلك فإن الإتجاه الثالث $\left(\overrightarrow{n_3}\right)$ يكون أي اتجاه عمودي على المستوى الذي يجمع المتجهين $\overrightarrow{n_1} \,,\, \overrightarrow{n_2}$ ويحقق العلاقات الآتية :

$$\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{n_3} = 0 \,,\;\; \overrightarrow{n_2}\,.\,\overrightarrow{n_3} = 0 \,,\;\; \left|\overrightarrow{n_3}\right|^2 = 1$$

أي أن

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{ox}\right) - \cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right) + 2\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right) = 0 \,,\\
&2\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right) = 0 \,,\\
&\cos^2\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{ox}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right) + \cos^2\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right) = 1 \,.
\end{aligned}$$

من المعادلة الأولى والثانية ، نجد أن

$$2\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oz}\right), \quad \cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{ox}\right) = 5\cos\left(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{oy}\right).$$

وبالتعويض في المعادلة الثالثة ، نحصل على الإتجاه الثالث في الصورة

$$\overrightarrow{n_3} \equiv \left(\pm\frac{5}{\sqrt{30}} \,,\, \pm\frac{1}{\sqrt{30}} \,,\, \mp\frac{2}{\sqrt{30}} \right)$$

مثالــ ٥ ــــ :

عند نقطة في جسم مرن مجهد وُجد أن حالة الإجهاد كالآتي :

$(i)\,\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma\ ,\quad \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0\ ,$

$(ii)\,\sigma_{xx} = \sigma\ ,\quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0\ ,$

$(iii)\,\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma\ ,\quad \tau_{xy} = \tau,\quad \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\ .$

عين سطح كوشي للإجهادات في كلٍ من الحالات السابقة

الحلــــــــــ :

بالنسبة لحالة الإجهاد (i) ، معادلة سطح كوشي هي :

$$\sigma\xi^2 + \sigma\eta^2 + \sigma\zeta^2 = \pm c^2 \;\Rightarrow\; \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \pm\frac{c^2}{\sigma}\ ,\ c\ is\ constant\ .$$

وهي تمثل معادلة كرة نصف قطرها $\frac{c}{\sqrt{\sigma}}$.

أما بالنسبة لحالة الإجهاد (ii) ، فإن معادلة سطح كوشي هي :

$$\sigma\xi^2 = \pm c^2 \;\Rightarrow\; \xi^2 = \pm\frac{c^2}{\sigma}$$

وهي تمثل معادلة اسطوانة دائرية نصف قطرها $\frac{c}{\sqrt{\sigma}}$.

أما حالة الإجهاد (iii) ، فإن معادلة سطح كوشي هي :

$$\sigma\xi^2 + \sigma\eta^2 + 2\tau\xi\eta = \pm c^2$$

وهي تمثل معادلة اسطوانة دائرية (في الحالة العامة) في المستوى .

مثالــ ٦ ــــ :

عند نقطة في جسم مرن مجهد وُجد أن حالة الإجهاد كالآتي :

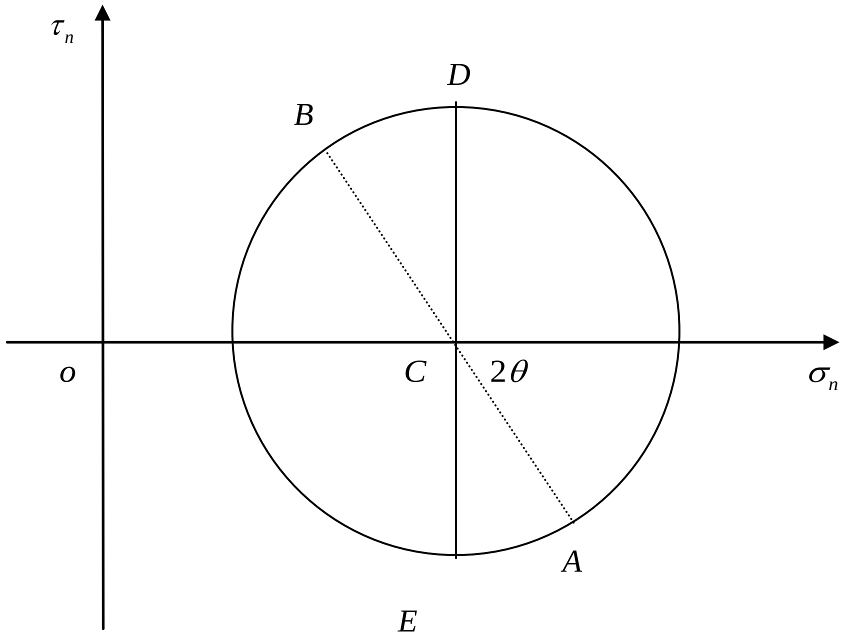
$$\sigma_{xx} = 80\ MPa.\ ,\quad \sigma_{yy} = 40\ MPa.\ ,\quad \tau_{xy} = 30\ MPa.$$

استخدم دائرة موهر في المستوى لتعيين الإجهادات الأساسية مقداراً واتجاهاً، وكذلك أكبر قيمة للإجهاد القاص واتجاهها، وأوجد كذلك الإجهاد العمودي المناظر .

الحلــــــــــ :

لرسم دائرة موهر لحالة الإجهاد الحالية في المستوى نأخذ محورين أحدهما أفقي ، يمثل المركبة العمودية (σ_n) ، والآخر رأسي يمثل المركبة القاصة (τ_n) ، نحدد مركز الدائرة C على المحور

الأفقي على بعد $\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)$ **من نقطة الأصل** o **، ثم نحدد النقطة التي احداثياتها** $(\sigma_{xx} \; , -\tau_{xy})$ **،**
أي النقطة $(80 \; , -30)$ **وسوف نسميها** A **، وكذلك نحدد النقطة التي احداثياتها** $(\sigma_{xx} \; , \tau_{xy})$ **، أي**
النقطة $(80 \; , 30)$ **وسوف نسميها** B **، ثم نرسم دائرة موهر والتي نصف قطرها** $C\,A$ **، وتمر**
بالنقطتين $A\,,B$ **، كما في شكل (٩) .**



شكل (٩)

واضح أن النقاط $A \; , B$ **توضح حالة الإجهاد بالنسبة لمجموعة الاحداثيات** $o\,x\,y$ **وأن النقاط** $A \; , B$ **تمثل أكبر وأقل قيمة للإجهادات الأساسية ، على الترتيب ، حيث تتعينان من العلاقة :**

$$\sigma_{1,2} = 60 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(80-40)^2 + (30)^2} = 60 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(40)^2 + (30)^2}$$
$$= 60 \pm 36.05$$
$$\therefore \sigma_1 = \sigma_{\max} = 96.05 \; MPa. \, ,$$
$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = 23.95 \; MPa.$$

واضح أيضاً أن الخط $A \; , B$ **يمثل حالة الإجهاد التي تميل على المحاور الأصلية بزاوية** 2θ **وحيث أنه في حالة الإجهاد الأساسية فإن الزاوية** 2θ **تتعين من العلاقة :**

$$\tan 2\theta = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2 \times 30}{80-40} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{2} \simeq 28.15^o \quad or \quad \theta \simeq 118.15^o$$

وهي تعطي الإتجاه الأساسي الأولي .

أكبر قيمة للإجهاد القاصي تعينها النقطتان $E\ ,\ D$ ، حيث

$$\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm\sqrt{\frac{1}{4}(80-40)^2 + (30)^2} \simeq \pm 36.05\ MPa.$$

أكبر قيمة للإجهاد القاصي تؤثر في الاتجاه الذي يصنع زاوية مع المحور الأفقي مقدارها

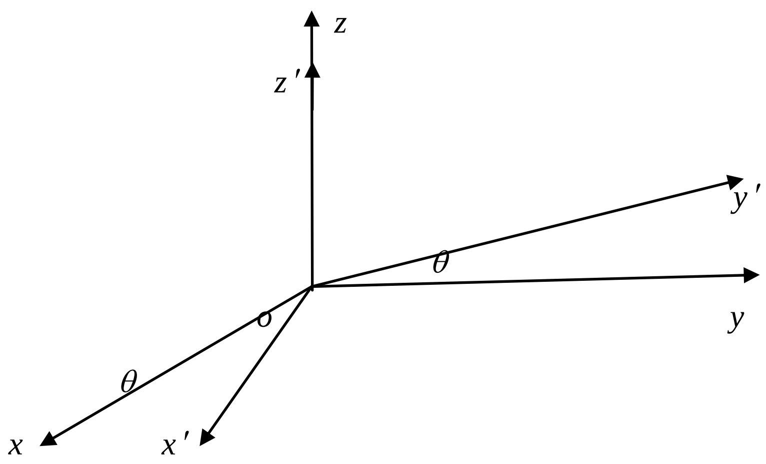
$$28.15^o + 45^o = 73.15^o \quad or \quad 118.15^o + 45^o = 163.15^o$$

الإجهاد العمودي المناظر لأكبر إجهاد قاص يساوياً طول $C\,D$ أي يساوي $60\ Mpa.$.

مثـالــ ٧ ــــ :

أوجد مركبات ممتد الإجهاد في مجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ والتـي تنـتج مـن دوران مجموعـة المحـاور الأصلية $o\,x\,y\,z$ بزاوية θ ، $\left(\theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ حول المحور $o\,z$.

الحلــــــــــ :



شكل (١٠)

حيث أن المحـاور دارت حـول محـور z ، لـذلك فـإن محـور z' سـوف ينطبـق علـى محـور z ، ومحـور y' سـوف يصـنع زاويـة θ مـع محـور y ، ومحـور x' سـوف يصـنع زاويـة θ مـع محـور x ، باسـتخدام المعادلات (1.23) , . . . , (1.19) , (1.18) ، مع الأخذ في الإعتبار الزوايا بين المحاور ، نجد أن :

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \sigma_{zz}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\tau_{xy}\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) +$$
$$+ 2\tau_{yz}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\tau_{xz}\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\cos\theta\sin\theta\ .$$

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{xx} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \sigma_{yy} \cos^2\theta + \sigma_{zz} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\tau_{xy} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos\theta \, +$$

$$+ \, 2\tau_{yz} \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\tau_{xz} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sigma_{xx} \sin^2\theta + \sigma_{yy} \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \cos\theta\sin\theta \, .$$

$$\sigma_{z'z'} = \sigma_{xx} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sigma_{yy} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sigma_{zz} \cos^2(0) + 2\tau_{xy} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \, 2\tau_{yz} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(0) + 2\tau_{xz} \cos(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_{zz} \, .$$

$$\tau_{x'y'} = \sigma_{xx} \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \sigma_{yy} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta + \sigma_{zz} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \, \tau_{xy} \left[\cos^2\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right] +$$

$$+ \, \tau_{yz} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right] +$$

$$+ \, \tau_{xz} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \, .$$

$$\tau_{y'z'} = \sigma_{xx} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sigma_{yy} \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sigma_{zz} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(0) +$$

$$+ \, \tau_{xy} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$

$$+ \, \tau_{yz} \left[\cos\theta\cos(0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + \tau_{xz} \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos(0)\right]$$

$$= \tau_{yz} \cos\theta - \tau_{xz} \sin\theta \, .$$

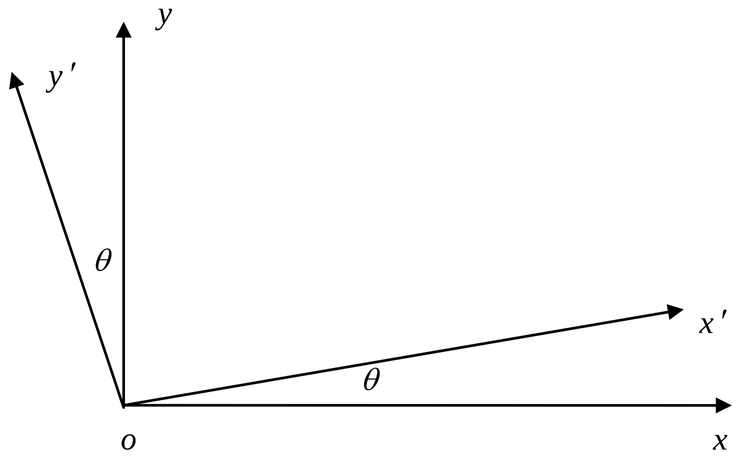
$$\tau_{x'z'} = \sigma_{xx} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta + \sigma_{yy} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \sigma_{zz} \cos(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \, \tau_{xy} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right] +$$

$$+ \, \tau_{yz} \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] + \tau_{xz} \left[\cos(0)\cos\theta + \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \tau_{xz} \cos\theta - \tau_{xy} \sin\theta \, .$$

لاحظ أن المحورين $oz \; , oz'$ عموديين على المستوى الذي يجمع المحاور $ox \; , oy \; , ox' \; , oy'$ ، وبالتالى فإن الزاوية بين أيٍ من المحورين $oz \; , oz'$ وأيٍ من المحاور $ox \; , oy \; , ox' \; , oy'$ تكون زاوية قائمة ، أما باقي الزوايا فيمكن الحصول عليها من الرسم الآتي :



<u>تطبيق :</u>

حل المثال السابق عندما

$$i)\ \theta = \frac{\pi}{4}\ , \qquad ii)\ \theta = \frac{\pi}{3}\ , \qquad iii)\ \theta = \frac{\pi}{2}\ .$$

.

" تمـــــــــارين "

(١) اختبر حالة الإجهاد الآتية ، هل تحقق معادلات الاتزان في حالة غياب القوى الجسمية أم لا ؟

$$\sigma_{xx} = 3x^2 - 3y^2 - z \ , \quad \sigma_{yy} = 3y^2 , \quad \sigma_{zz} = 3x + y - z + \frac{4}{3} ,$$

$$\tau_{xy} = z - \frac{3}{4} , \quad \tau_{yz} = 0 , \quad \tau_{xz} = x + y - \frac{3}{2} .$$

(٢) إذا كانت مركبات ممتد الإجهاد عند نقطة في جسم مرن هي :

$$\sigma_{xx} = x^2 + y + 3z^2 \ , \quad \sigma_{yy} = 2x + y^2 + 2z \ , \quad \sigma_{zz} = -2x + y + z^2 \ ,$$

$$\tau_{xy} = -x\,y + z^3 \ , \quad \tau_{yz} = x^2 - y\,z \ , \quad \tau_{xz} = y^2 - xz \ .$$

أثبت أن هذه الحالة للإجهاد تحقق معادلات الإتزان في حالة تلاشي القوى الجسمية .

(٣) إذا كانت مركبات ممتد الإجهاد عند نقطة في جسم مرن هي :

$$\sigma_{xx} = a\,x + b\,y + c\,z \ , \ \sigma_{yy} = d\,x^2 + c\,y^2 + f\ z^2 \ , \ \sigma_{zz} = 9x^3 + h\,y^3 + i\,z^3 ,$$

$$\tau_{xy} = k \ , \qquad \tau_{yz} = l\,y + m\,z \ , \qquad \tau_{zx} = n\,x^2 + p\,z^2 \ .$$

أوجد مركبات القوى الجسمية التي تحقق معادلات الاتزان لهذه الحالة .

(٤) إذا كانت مركبات ممتد الإجهاد عند نقطة في جسم مرن هي :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma \ , \ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \ .$$

أوجد مركبات متجه الإجهاد المحصل عند هذه النقطة ، إذا كان متجه الوحدة العمودي على الجسم عند هذه النقطة هو $\vec{n}$ ، $\vec{n} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} , 0 \right)$.

(٥) إذا كانت حالة الإجهاد داخل جسم مرن تعطى بالعلاقات:

$$\sigma_{xx} = 2x\,y \ , \quad \sigma_{yy} = 0 , \quad \sigma_{zz} = 0 , \quad \tau_{xy} = 5y^2 , \quad \tau_{yz} = 2x , \quad \tau_{xz} = 0 .$$

عين الإجهاد المحصل ، مقداراً وإتجاهاً ، عند النقطة $\left(2 , 1 , \sqrt{3} \right)$ **، التي تقع على المستوى المماس للاسطوانة** $y^2 + z^2 = 4$.

(٦) إذا كانت مركبات ممتد الإجهاد عند نقطة في جسم مرن هي :

$$\sigma_{xx} = 40\ MPa.,\quad \sigma_{yy} = 60\ MPa.,\quad \sigma_{zz} = 40\ MPa.,$$
$$\tau_{xy} = 80\ MPa.,\quad \tau_{yz} = 50\ MPa.,\quad \tau_{zx} = 60\ MPa.$$

عين المركبة العمودية والمركبة القاصة للإجهاد وكذلك الزاوية بين للإجهاد المحصل $\overrightarrow{T_n}$ والعمودي $\vec{n}$ ، $\vec{n} \equiv \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9} \right)$ ، عند هذه النقطة .

(٧) حل التمرين السابق ، إذا كان العمودي $\vec{n}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات .

(٨) عند نقطة من جسم مرن مجهد ، كانت المركبات الكارتيزية للإجهاد هي :

$$\sigma_{xx} = 70\ MPa.,\quad \sigma_{yy} = 60\ MPa.,\quad \sigma_{zz} = 50\ MPa.,\quad \tau_{xy} = -20\ MPa.,\quad \tau_{zx} = 0\,.$$

عين الإجهاد العمودي والقاص على المستوى العمودي عليه جيوب تمام اتجاهه هي :

$$\cos(\vec{n}, ox) = \frac{12}{25},\quad \cos(\vec{n}, oy) = \frac{15}{25},\quad \cos(\vec{n}, oz) = \frac{16}{25}$$

(٩) إذا كانت حالة الإجهاد ***بالنسبة لمجموعة الإحداثيات*** $o\,x\,y\,z$ هي :

$$\sigma_{xx} = 90\ MPa.,\quad \sigma_{yy} = 60\ MPa.,\quad \sigma_{zz} = 30\ MPa.,$$
$$\tau_{xy} = 30\ MPa.,\quad \tau_{yz} = 30\ MPa.,\quad \tau_{xz} = 60\ MPa.$$

عين هذه الحالة للإجهاد منسوبة إلى مجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ المعرفة بالجدول الآتي :

	I	II	III	IV
$x - x'$	$\pi/4$	$\pi/2$	0	$\pi/2$
$y - y'$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/2$	0
$z - z'$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$

(١٠) إذا كانت مصفوفة ممتد الإجهاد عند نقطة في جسم مرن مجهد هي :

$$I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ II = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & -16 \end{pmatrix},\ III = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & -4 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

عين الإجهادات الأساسية والأتجاهات الأساسية المناظرة وكذلك أكبر إجهاد قاصي ، لكل حالة .

(١١) عند نقطة في جسم مرن مجهد وجد أن الإجهادات الأساسية هي :

$$\sigma_1 = 150\ MPa.,\ \ \sigma_2 = 100\ MPa.,\ \ \sigma_3 = 50\ MPa.$$

عين المركبة العمودية والقاصة للإجهاد عند هذه النقطة إذا كان العمودي للخارج $\vec{n}$ عند هذه النقطة جيوب تمام اتجاهه بالنسبة للإتجاهات الأصلية هي :

$$\cos\left(\vec{n}, \vec{n_1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \cos\left(\vec{n}, \vec{n_2}\right) = 0,\ \ \cos\left(\vec{n}, \vec{n_3}\right) = \frac{1}{2}.$$

(١٢) إذا كانت مركبات ممتد الإجهاد عند نقطة في جسم مرن هي :

$$\sigma_{xx} = 100\ MPa.,\ \ \sigma_{yy} = 80\ MPa.,\ \ \tau_{xy} = 20\ MPa.,\ \sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0.$$

عين الإجهادات الأساسية وكذلك أكبر إجهاد قاصي ، تحليلياً ثم بيانياً باستخدام دائرة موهر .

(١٣) إذا كانت مركبات ممتد الإجهاد عند نقطة في جسم مرن واقع في المستوى $x - y$ هي :

$$\sigma_{xx} = 100\ MPa.,\ \ \ \sigma_{yy} = -80\ MPa.,\ \ \ \tau_{xy} = -40\ MPa.$$

أوجد الإجهادات الأساسية والاتجاهات الأساسية المناظرة واكبر إجهاد قاص مناظر .

(١٤) عند نقطة في جسم مرن مجهد ، كانت الإجهادات الأساسية هي :

$$\sigma_1 = 56\ MPa.,\ \ \ \sigma_2 = 35\ MPa.,\ \ \ \sigma_3 = 14\ MPa.$$

باستخدام دائرة موهر ، عين أكبر إجهاد قاص والإجهاد العمودي المناظر له .

(١٥) إذا كانت حالة الإجهاد عند نقطة في جسم مرن مجهد تعطى من العلاقات الآتية :

$$\sigma_{xx} = -5\ MPa.,\ \ \sigma_{yy} = -6\ MPa.,\ \ \sigma_{zz} = 1\ MPa.,$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0,\ \ \tau_{yz} = -12 MPa.$$

عين مركبات المتجه الإجهاد $\overrightarrow{T_n}$ ، $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ ، محققاً النتائج باستخدم دائرة موهر .

(١٦) أثبت أن معادلات الإتزان للجسم المرن في الإحداثيات القطبية الأسطوانية (ρ, ϕ, z) هي :

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\phi\phi}}{\rho} + F_\rho = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\phi}}{\rho} + F_\phi = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} + F_z = 0.$$

(١٧) أستنتج معادلات الإتزان للجسم المرن في الإحداثيات القطبية الكروية (ρ, θ, ϕ) .

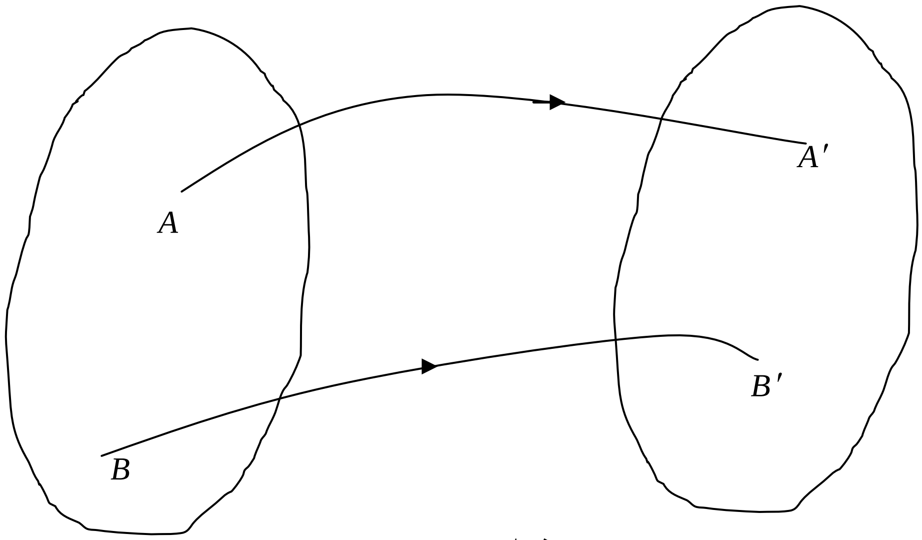
" الباب الثـــــــــانى "

تحليل الانفعال Analysis of Strain

بند (١): مقدمة:

في الباب الأول كان اهتمامنا بتحليل الإجهـــاد ، أما الآن فسوف نهتم بتحليل الانفعال .

بفرض أن لدينا جسم يقع تحت تأثير حمل خارجي ، بحيث أن نقطة مثل A تزاح إلى نقطة أخرى مثل A' ، كذلك نقطة مثل B تزاح إلى نقطة أخرى مثل B' ، وكذلك بالنسبة لجميع نقط الجسم حتى يأخذ الجسم موضعه الجديد ، كما هو مبين بالشكل رقم (١) .



شكل (١)

عندما يأخذ الجسم موضعه الجديد فإن إزاحة أي نقطتين من الجسم مثل $A\ ,\ B$ هما $A\,A'\ ,\ B\,B'$ على الترتيب . وهذه الإزاحة تنتج كنتيجة للانفعال "تغير في الشكل" ، أو تنتج عن حركة جسم متماسك ، انتقال ثم دوران أو خليط من النوعين .

عموماً يقال أن الجسم في حالة انفعال إذا كان الموضع النسبي لنقط الجسم يتغير ، والتغير في الموضع النسبي لنقط الجسم يسمى بالتغير في الشكل . ودراسة هذا الموضوع يسمى بتحليل الانفعال .

إذا فرضنا أن لدينا جسم ما ، حجمه V قبل التغير في الشكل وأن إحداثيات نقطة M من الجسم منسوبة لمجموعة الإحداثيات الكارتيزية $o\,x\,y\,z$ هي $M\,(\,x\,,y\,,z\,)$ وأن إحداثيات ذات النقطة (M) بعد حدوث التغير النسبي في جزئيات الجسم هي $M^*(x^*,y^*,z^*)$ وأن حجم الجسم أصبح V^* . وإذا اقتصرت دراستنا على التغير المستمر في الشكل من الحجم V إلى الحجم V^* ؛ فإن المعادلات التي تصف هذا التغير هي :

$$x^* = f_1(x, y, z)\ ,$$
$$y^* = f_2(x, y, z)\ ,$$
$$z^* = f_3(x, y, z)\ . \qquad (2.1)$$

وسوف نفترض أن المعادلات (2.1) وحيدة القيمة ، أي أنه لكل قيمة $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ في الحجم V يناظرها قيمة وحيدة (x^*, y^*, z^*) في الحجم V^* ، أي لها حل واحد فقط لقيم $(x\ ,\ y\ ,\ z)$. وكذلك كل قيمة (x^*, y^*, z^*) في V^* يناظرها قيمة وحيدة $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ في الحجم V . وبذلك يمكن القول أن المعادلات (2.1) تمثل تحويلة من الحجم V إلى الحجم V^* وتكون العلاقة بين نقاط الحجمين عبارة عن تناظر أحادي (one - to - one) .

<u>لاحظ</u> أن أجزاء من التحويلة (2.1) تمثل حركة جسم متماسك (Rigid body motion) ، وهى عبارة عن إزاحة انتقالية ثم إزاحة دورا نية (Translation& Rotation) للجسم كله ، وهذا النوع من التغير في الشكل لا يحدث تغير في أبعاد الجسم أي أن المتجه الواصل من أي نقطتين من الجسم لا يتغير طوله وهذا النوع من التغير لا يهمنا كثيراً عندما نتعرض لدراسة الانفعال للجسم المرن ، أما الجزء الثاني من التحويلة (2.1) فيمثل ما يسمى تغير خالص في الشكل (Pure Deformation) ، والمهم أن نعرف كيف نحصل على كل منهما وأن نميز بين كلا النوعين من التغير .

سوف نعتبر الحالة البسيطة التي تكون فيها التحويلة (2.1) معطاه في صورة معادلات خطية . أي أن الدوال $f_1(x,y,z)\ ,\ f_2(x,y,z)\ ,\ f_3(x,y,z)$ تكون دوال خطية في المتغيرات $(x\ ,\ y\ ,\ z)$.

<u>بند (٢) : التحويلة المتجانسة : Affine transformation</u>

التحويلة الممثلة بالمعادلات (2.1) تسمى متجانسة Affine إذا ما كانت إحداثيات النقطة M بعد التغير في الشكل دالة خطية في إحداثياتها قبل التغير في الشكل ؛ أي أن x^*, y^*, z^* تكون دوال خطية في $x\ ,\ y\ ,\ z$ ويمكن وضعها في الصورة :

$$x^* = (1 + a_{11})x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a\ ,$$
$$y^* = a_{21}\,x + (1 + a_{22})y + a_{23}\,z + b\ ,$$
$$z^* = a_{31}\,x + a_{32}\,y + (1 + a_{33})z + c\ . \qquad (2.2)$$

حيث $a_{11}\ ,\ a_{12}\ ,\ a_{13}\ ,\ a_{21}\ ,\ a_{22}\ ,\ a_{23}\ ,\ a_{31}\ ,\ a_{32}\ ,\ a_{33}\ ,\ a\ ,\ b\ ,\ c$ ثوابت ، وسوف يتضح فيما بعد السبب الذي من أجله اختيرت العناصر القطرية في الصورة $(1 + a_{11})\ ,\ (1 + a_{22})\ ,\ (1 + a_{33})$.

الشرط اللازم لكي يكون للمعادلات (2.1) حل وحيد هو

" محدد المعاملات لايساوي صفر "

أي أن :

$$\begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1+a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.3)$$

التحويلة المتجانسة (2.2) لها بعض الخواص الهامة وهي :

١) التحويلة العكسية تكون متجانسة ، أي أن $x\ ,\ y\ ,\ z$ تكون دوال خطية في x^*, y^*, z^* ، وتكتب هذه التحويلة في الصورة :

$$\begin{aligned} x &= (1+b_{11})x^* + b_{12}y^* + b_{13}z^* + a' , \\ y &= b_{21}x^* + (1+b_{22})y^* + b_{23}z^* + b' , \\ z &= b_{31}x^* + b_{32}y^* + (1+b_{33})z^* + c' . \end{aligned} \qquad (2.4)$$

حيث $b_{11}\ , b_{12}\ , b_{13}\ , b_{21}\ , b_{22}\ , b_{23}\ , b_{31}\ , b_{32}\ , b_{33}\ , a'\ , b'\ , c'$ **ثوابت .**

٢) أي مجموعة من النقاط التي تقع في مستوى ما وليكن Σ قبل التحويلة ، تقع بعد التحويلة في مستوى آخر وليكن Σ' . وإذا كانت المعادلة $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ تمثل معادلة المستوى Σ ، فإنه باستخدام المعادلات (2.4) نحصل على معادلة المستوى Σ' في الصورة

$$A\,x^* + B\,y^* + C\,z^* + D = 0 \ .$$

٣) النقاط التي تقع على خط مستقيم ما وليكن L قبل التغير في الشكل ، تقع على خط مستقيم آخر L^* وهذا يعنى أن أي مقطع من مستقيم ينقل إلى مقطع آخر من مستقيم آخر. وكذلك أي متجه ينقل إلى متجه آخر.

بفرض أن لدينا المتجه $\vec{P} \equiv (\xi\ , \eta\ , \zeta)$ وبعد للتغير في الشكل أصبح $\overrightarrow{P^*} \equiv (\xi^*\ , \eta^*\ , \zeta^*)$ ، فإذا كانت بداية المتجه $\vec{P}$ هى $M_0(x_o\ , y_o\ , z_o)$ وأن إحداثيات نهايته هى $M\ (x\ , y\ , z)$ ، فإن

$$\xi = x - x_0\ , \eta = y - y_0\ , \zeta = z - z_0\ . \qquad (2.5)$$

وبالنسبة للمتجه $\overrightarrow{P^*}$ ، فإذا كانت احداثيات بدايته هى $M_0^*(x_0^*\ , y_0^*\ , z_0^*)$ و احداثيات نهايته هى $M^*(x^*\ , y^*\ , z^*)$ ، فإن

$$\xi^* = x^* - x_0^*\ , \eta^* = y^* - y_0^*\ , \zeta^* = z^* - z_0^*\ . \qquad (2.6)$$

من المعادلات $(2.6)\ .\ (2.5)\ ,\ (2.2)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \xi^* &= (1+a_{11})\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta\ , \\ \eta^* &= a_{21}\xi + (1+a_{22})\eta + a_{23}\zeta\ , \\ \zeta^* &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + (1+a_{33})\zeta\ . \end{aligned} \qquad (2.7)$$

وهذا يعنى أن المتجه $\overrightarrow{P^*}$ عبارة عن دالة خطية في المتجه $\vec{P}$.

وكذلك من المعادلات (2.7) نجد أن أي متجهين متساويين قبل التغير في الشكل يكونان متساويان بعد التغيير في الشكل ، وكذلك المتجهات المتوازية قبل التغير في الشكل تكون متوازية كذلك بعد التغير في الشكل ، والنسبة بين أطوالهم تظل ثابتة . وكذلك كثير الأضلاع ينقل بعد التغير في الشكل إلى كثير أضلاع أيضاً . وحيث أن أي جسم يمكن القول بأنه يتكون من مجموعة من كثيرات الأضلاع وبالتالي يمكن القول بأن جميع أجزاء الجسم ، بغض النظر عن موضعها ، سوف تتغير بطريقة واحدة ، أي أن التغير في الشكل الناتج عن تحويلة متجانسة يكون متجانس .

بند (٣) : التحويلة المتجانسة المتناهية في الصغر :

التحويلة المتجانسة (2.2) تسمى عادة متناهية في الصغر Infinitesimal ، إذا كانت المعاملات $\left[a_{ij}\ (i\ ,j=1,2,3)\ ,a\ ,b\ ,c\right]$ كميات صغيرة جداً ، ومعنى ذلك أن حاصل ضرب أي أثنين (أو أكثر) منها ، أو مربع إ يٍ منها (أو القوى الأعلى) ، يهمل بالنسبة للكمية ذاتها .

من المعادلات (2.2) نحصل على :

$$\begin{aligned} x^* - x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a\ , \\ y^* - y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b\ , \\ z^* - z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c\ . \end{aligned} \qquad (2.8)$$

ونلاحظ أن هذا الفرق بين إحداثيات نقطة ما قبل التغير في الشكل وإحداثيات ذات النقطة بعد التغير في الشكل يكون مقداراً صغيراً ، لأن هذه التحويلة لا نهائية في الصغر ، و بعمل تحويلة أخرى على النقطة $\left(x^*\ ,y^*\ ,z^*\right)$ لتصبح $\left(x^{**}\ ,y^{**}\ ,z^{**}\right)$ بحيث يمكن كتابتها في الصورة

$$\begin{aligned} x^{**} &= \left(1+b_{11}\right)x^* + b_{12}y^* + b_{13}z^* + a'\ , \\ y^{**} &= b_{21}x^* + \left(1+b_{11}\right)y^* + b_{23}z^* + b'\ , \\ z^{**} &= b_{31}x^* + b_{32}y^* + \left(1+b_{11}\right)z^* + c'\ . \end{aligned} \qquad (2.9)$$

حيث $b_{ij}\ (i\ ,j=1,2,3)\ ,a'\ ,b'\ ,c'$ ثوابت .

أي أنه بواسطة تحويلتين متجانستين ، متناهيتين في الصغر ، أمكن نقل النقطة $(\ x\ ,\ y\ ,\ z\ )$ إلى النقطة $\left(x^{**}\ ,y^{**}\ ,z^{**}\right)$.

من المعادلات $(2.9)\ ,(2.2)$ نستنتج أن

$$\begin{aligned} x^{**} &= \left(1+c_{11}\right)x + c_{12}y + c_{13}z + a''\ , \\ y^{**} &= c_{21}x + \left(1+c_{11}\right)y + c_{23}z + b''\ , \\ z^{**} &= c_{31}x + c_{32}y + \left(1+c_{11}\right)z + c''\ , \end{aligned} \qquad (2.10)$$

حيث :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ , \quad (i\,,j = 1,2,3)$$
$$a'' = a + a' \ , \qquad b'' = b + b' \ , \qquad c'' = c + c' \ . \tag{2.11}$$

وذلك بإهمال حاصل حاصل ضرب أي أثنين منها ، مثل

$$a_{11}b_{11} \ , a_{12}b_{12} \ , a_{13}b_{13} \ , \ldots$$

وهذا يعنى أن محصلة تحويلتين متجانستين متناهيتين في الصغر ، هي تحويلة متجانسة متناهية في الصغر أيضاً .

ويمكن تعميم ذلك على عدد من التحويلات المتجانسة المتناهية في الصغر فتكون محصلتها تحويلة متجانسة متناهية في الصغر أيضاً .

بند (٤) : مركبات التحويلة المتجانسة المتناهية في الصغر :

سوف نقتصر هنا على فصل التحويلة الممثلة بالمعادلة (2.7) إلى مركبتين جزئيتين ، أحداهما يناظر حركة جسم متماسك (جسم صلب) Rigid body والأخرى تناظر ما يسمى بالتغير الخالص (النقي) في الشكل Pure deformation.

ويلاحظة أنه بمعرفة الكميات $a_{ij}\ (i\,,j = 1,2,3)$ ، فإن التحويلة (2.7) سوف تكون معلومة تماماً ، في حين أن التحويلة (2.2) تكون لاتزال غير معلومة تماماً ، وذلك لأن الكميات $a\ ,b\ ,c$ لاتزال غير معلومة ، ولكن في الواقع نجد أن هذه الكميات تناظر إزاحة انتقالية لجسم متماسك .

سوف نبحث الآن الشروط اللازم توافرها في الكميات :

$$a_{ij}\ (i\,,j = 1,2,3) \tag{2.12}$$

لكي تمثل المعادلات

$$\xi^* - \xi = \delta\xi = a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta + a_{13}\,\zeta \ ,$$
$$\eta^* - \eta = \delta\eta = a_{21}\,\xi + a_{22}\,\eta + a_{23}\,\zeta \ ,$$
$$\zeta^* - \zeta = \delta\zeta = a_{31}\,\xi + a_{32}\,\eta + a_{33}\,\zeta \ . \tag{2.13}$$

حركة جسم متماسك فقط ، التي تتكون بدورها من حركة انتقالية ثم حركة دورا نية ، والشرط اللازم والضروري لذلك هو : " طول أي متجه يصل بين نقطتين في الجسم قبل التغير في الشكل يظل مقداراً ثابتاً ، مهما أثر على الجسم قوى خارجية " .

فإذا كان $\left|\vec{P}\right|$ يمثل طول المتجه $\vec{P} \equiv (\xi\ ,\eta\ ,\zeta)$ ، الذي يصل بين نقطتين في الجسم قبل التغير في الشكل ، فان هذا الطول (أو مربعه) يظل مقداراً ثابتاً ، مهما أثر على الجسم قوى خارجية ، أي أن :

$$\left|\vec{\mathrm{P}}\right|^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \ , \tag{2.14}$$

يظل مقداراً ثابتاً دائماً .

من المعادلتين (2.14) , (2.13) نجد أن :

$$\left|\vec{P}\right|\delta\left|\vec{P}\right| = \xi\,\delta\xi + \eta\,\delta\eta + \zeta\,\delta\zeta$$
$$= a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + (a_{12}+a_{21})\xi\eta$$
$$+ (a_{31}+a_{13})\zeta\xi + (a_{23}+a_{32})\eta\zeta \qquad (2.15)$$

لذلك فإن $\delta\left|\vec{P}\right| = 0$ لجميع قيم ξ , η , ζ عندما :

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0\,, \quad a_{12}+a_{21} = a_{31}+a_{13} = a_{23}+a_{32} = 0\,, \qquad (2.16)$$

وبذلك يكون الشرط الازم و الضروري لكي تمثل التحويلة (2.13) حركة جسم متماسك فقط هو أن :

$$a_{ij} = -a_{ji}\,, \; (i, j, =1,2,3)\,,\; i \neq j\,. \qquad (2.17)$$

وفي هذه الحالة تسمى الكميات $a_{ij}\,, \; (i, j, =1,2,3)\,,\; i \neq j$ متخالفة التماثل **Skew- Symmetric**

وبذلك يمكن كتابة التحويلة (2.13) في الصورة :

$$\delta\xi = -a_{21}\eta + a_{13}\zeta\,, \;\; \delta\eta = a_{21}\xi - a_{32}\zeta\,, \;\; \delta\zeta = -a_{13}\xi + a_{32}\eta\,. \qquad (2.18)$$

و كتابة $\delta\left|\vec{P}\right|$ في الصورة :

$$\delta\vec{P} = \vec{w}\times\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} \qquad (2.19)$$

حيث المتجه $\vec{w}$ يمثل متجه الدوران المتناهي في الصغر **Infinitesimal rotation vector** .

(في حالة دوران جسم متماسك بسرعة زاوية $\vec{\Omega}$ فإن العلاقة بينها وبين السرعة الخطية المناظرة لها $(\vec{v})$ ، عند نقطة ما ، هي $\vec{v} = \vec{\Omega}\times\vec{P}$ ، حيث $\vec{P}$ هو متجه موضع هذه النقطة بالنسبة لمركز الدوران) .

أي أن $\delta\vec{P} = \vec{\Omega}\times\vec{P}\,\delta t = \vec{w}\times\vec{P}$ وبذلك فإن $\vec{w} = \vec{\Omega}dt$ ، حيث :

$$w_1 = a_{32} = -a_{23} = \frac{1}{2}(a_{32}-a_{23})\,, \;\; w_2 = a_{13} = -a_{31} = \frac{1}{2}(a_{13}-a_{31})$$
$$w_3 = a_{21} = -a_{12} = \frac{1}{2}(a_{21}-a_{12})\,. \qquad (2.20)$$

المعادلات التي تمثل حركة جسم متماسك في هذه الحالة يمكن الحصول عليها وذلك بملاحظة أن

$$\xi = x - x_o\,, \quad \eta = y - y_o\,, \quad \zeta = z - z_o$$

وبالتالي فإن :

$$\delta\xi = \delta x - \delta x_o\,, \quad \delta\eta = \delta y - \delta y_o\,, \quad \delta\zeta = \delta z - \delta z_o$$
$$Or\;\; \delta x = \delta\xi + \delta x_o\,, \quad \delta y = \delta\eta + \delta y_o\,, \quad \delta z = \delta\zeta + \delta z_o\,.$$

وباستخدام المعادلات (2.18) نجد أن :

$$\delta x = \delta x_o - a_{21}\eta + a_{13}\zeta , \quad \delta y = \delta y_o + a_{21}\xi - a_{32}\zeta ,$$
$$\delta z = \delta z_o - a_{13}\xi + a_{32}\eta . \qquad (2.21)$$

نلاحظ أن الجزء الأول من الطرف الأيمن للمعادلة (2.21) وهو $\delta x_o , \delta y_o , \delta z_o$ يمثل حركة انتقالية للنقطة ذات الإحداثيات (x_o , y_o , z_o) بينما الجزء الباقي يمثل حركة دورانية حول محور يمر بالنقطة (x_o , y_o , z_o) ، ولكن من المعلوم أن أي مجموعة من الكميات $(i , j ,=1,2,3)$, a_{ij} يمكن تحليلها إلى مجموعة متماثلة ومجموعة متخالفة التماثل **Symmetric and Skew-Symmetric** وذلك كالتالي :

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right) \qquad (2.22)$$

وبالتالي تأخذ المعادلات (2.13) الصورة :

$$\delta\xi = \left[\frac{1}{2}(a_{11}+a_{11}) + \frac{1}{2}(a_{11}-a_{11})\right]\xi + \left[\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) + \frac{1}{2}(a_{12}-a_{21})\right]\eta +$$
$$+\left[\frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) + \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31})\right]\zeta ,$$

$$\delta\eta = \left[\frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) + \frac{1}{2}(a_{21}-a_{12})\right]\xi + \left[\frac{1}{2}(a_{22}+a_{22}) + \frac{1}{2}(a_{22}-a_{22})\right]\eta +$$
$$+\left[\frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) + \frac{1}{2}(a_{23}-a_{32})\right]\zeta ,$$

$$\delta\zeta = \left[\frac{1}{2}(a_{31}+a_{13}) + \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13})\right]\xi + \left[\frac{1}{2}(a_{32}+a_{23}) + \frac{1}{2}(a_{32}-a_{23})\right]\eta +$$
$$+\left[\frac{1}{2}(a_{33}+a_{33}) + \frac{1}{2}(a_{33}-a_{33})\right]\zeta .$$

ويمكن كتابتها في الصورة:

$$\delta\xi = e_{11}\xi + w_{11}\xi + e_{12}\eta + w_{12}\eta + e_{13}\zeta + w_{13}\zeta ,$$
$$\delta\eta = e_{21}\xi + w_{21}\xi + e_{22}\eta + w_{22}\eta + e_{23}\zeta + w_{23}\zeta ,$$
$$\delta\zeta = e_{31}\xi + w_{31}\xi + e_{32}\eta + w_{32}\eta + e_{33}\zeta + w_{33}\zeta ,$$
$$w_{21} = w_3 , \quad w_{13} = w_2 , \quad w_{32} = w_1 , \qquad (2.23)$$

حيث . $e_{ii} \equiv a_{ii} , \quad e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} = a_{ji}\right), \quad (i , j = 1,2,3)$

ويمكن وضعها في الصورة :

$$
\begin{aligned}
&\delta\xi = e_{11}\,\xi + e_{12}\,\eta + e_{13}\,\zeta + w_{12}\,\eta + w_{13}\,\zeta\ ,\\
&\delta\eta = e_{21}\,\xi + e_{22}\,\eta + e_{23}\,\zeta + w_{21}\,\xi + w_{23}\,\zeta\ ,\\
&\delta\zeta = e_{31}\,\xi + e_{32}\,\eta + e_{33}\,\zeta + w_{32}\,\xi + w_{32}\,\eta\ ,\\
&w_{11} = w_{22} = w_{33} = 0\ .
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

المركبات $e_{ij}\ ,\ (i\ ,\ j\ = 1,2,3)$ تسمى مركبات ممتد الانفعال وهى متماثلة ، وتمثل تغير خالص (نقي) في الشكل Pure deformation ، أي أن التحويلة المتناهية في الصغر الممثلة بالمعادلة (2.13) تحتوى على جزئين ، احدهمـــــــا يمثل تغير خالص (نقي) في الشكل والأخرى يمثل حركة جسم متماسك (دوران وانتقال) .

<u>ملحوظة</u> : سوف نستبدل الرموز $e_{ij}\ ,\ (i\ ,\ j\ = 1,2,3)$ بالرموز $e_{lm}\ ,\ (\ l\ ,\ m\ = x\ ,\ y\ ,\ z\ )$ لكى تتفق مع الرموز المستخدمة في الباب الأول (تحليل الإجهاد) ، $x\ ,\ y\ ,\ z$ تشير إلى اتجاه المحـاور . لذلك فإن التحويلة الممثلة بالمعادلات (2.24) يمكن كتابتها في الصورة

$$
\begin{aligned}
&\delta\xi = e_{xx}\ \xi + e_{xy}\ \eta\ + e_{xz}\ \zeta\ + w_{12}\,\eta + w_{13}\,\zeta\ ,\\
&\delta\eta = e_{yx}\ \xi + e_{yy}\ \eta + e_{yz}\ \zeta\ + w_{21}\,\xi + w_{23}\,\zeta\ ,\\
&\delta\zeta = e_{zx}\ \xi + e_{zy}\ \eta + e_{zz}\ \zeta\ + w_{31}\,\xi + w_{32}\,\eta\ .
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

لاحظ أن التحويلة (2.25) تم كتابتها بدون الحدود التي تحتوى على $w_{ii}\ ,\ (\ i\ = 1,2,3\ )$ وتسمى بالتحويلة الخالصة المتجانسة Pure homogeneous deformation وهي توصف بواسطة تسع مركبات للانتقال ، كما في حالة ممتد الإجهاد ، لذلك فان ممتد الانفعال (المناظر لممتد الإجهاد) يكون متماثلة ، أي أن :

$$
e_{xy} = e_{yx}\ \ ,\ \ e_{zx} = e_{xz}\ \ ,\ \ e_{yz} = e_{zy}\ \ . \tag{2.26}
$$

وبالتالي يمكن كتابة ممتد الانفعال في الصورة :

$$
\begin{pmatrix}
e_{xx} & e_{xy} & e_{zx}\\
e_{xy} & e_{yy} & e_{yz}\\
e_{zx} & e_{yz} & e_{zz}
\end{pmatrix} . \tag{2.27}
$$

<u>بند (٥) : المعنى الهندسي لمركبات الانفعال :</u>

كل مركبة من مركبات الانفعال التسع (الست نظرا للتماثل) ذات معنى هندسي بسيط ، فمثلا المركبة e_{xx} يمكن الحصول على معناها الهندسي كما يلي :

المعادلة (2.15) ، بعدما عرفنا الانفعال وأن مركباته متماثلة متماثل ، يمكن كتابتها في الصورة :

$$
\left|\vec{\mathrm{P}}\right|.\delta\left|\vec{\mathrm{P}}\right| = e_{xx}\ \zeta^2\ + e_{yy}\ \eta^2\ + e_{zz}\ \zeta^2\ + 2e_{xy}\ \xi\eta\ + 2e_{zx}\ \xi\zeta\ + 2e_{yz}\ \eta\zeta\ . \tag{2.28}
$$

فإذا ما اخترنا المتجه $\vec{P}$ في اتجاه المحور $\overrightarrow{ox}$ وبذلك تصبح مركباته هي $(\zeta , 0 , 0)$ ، وهذا قبل أن يحدث أي تغير في الشكل ، وبذلك تأخذ المعادلة (2.28) الصورة :

$$\left|\vec{P}\right|.\delta\left|\vec{P}\right| = e_{xx}\,\zeta^2 \,, \qquad (2.29)$$

وحيث أن $\left|\vec{P}\right| = \xi$ ، لذلك فإن :

$$e_{xx} = \frac{\delta\left|\vec{P}\right|}{\left|\vec{P}\right|} \qquad (2.30)$$

المعادلة (2.30) الطرف الأيمن منها يمثل الزيادة النسبية في طول المتجه $\vec{P}$ المأخوذ في اتجاه المحور $\overrightarrow{ox}$ قبل التغير في الشكل .

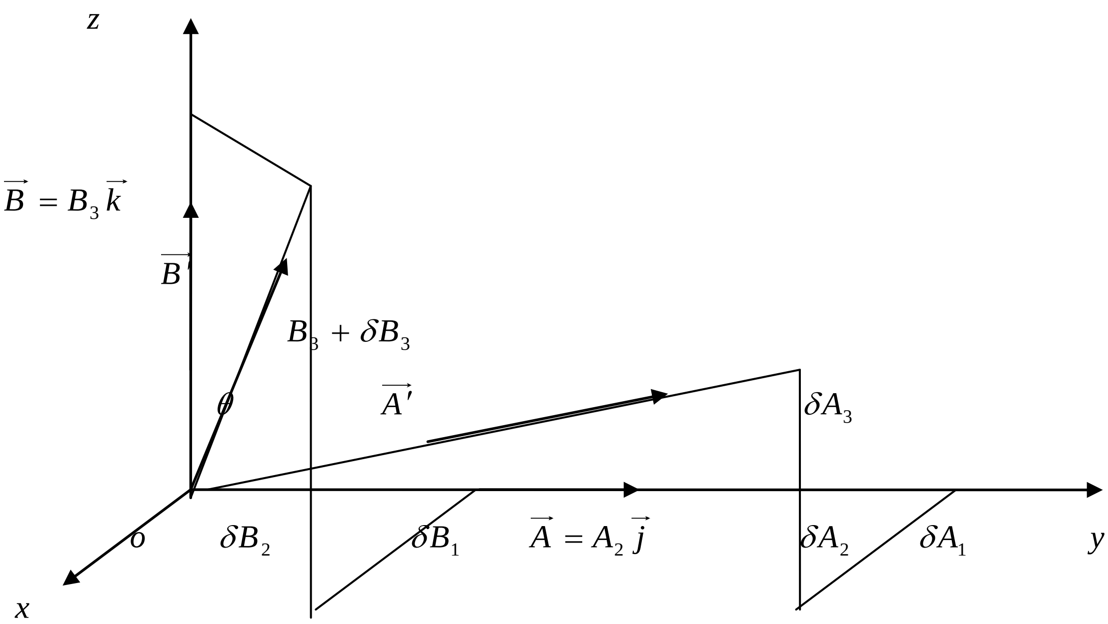
أي أن e_{xx} تمثل التغير في الطول بالنسبة لوحدة الأطوال لمتجه مأخوذ في اتجاه المحور $\overrightarrow{ox}$ ، وبالتالي إذا ما تلاشت جميع مركبات ممتد الانفعال ما عدا e_{xx} فان أي متجه في اتجاه هذا المحور سوف يزيد بمقدار e_{xx} مضروبا في طوله الأصلي إذا كان $e_{xx} > 0$ ، وسوف يقل بمقدار e_{xx} مضروبا في طوله الأصلي إذا كان $e_{xx} < 0$. أي أنه في الحالة الأولى يكون هناك تمدد **Extension** وفي الحالة الثانية يمثل انكماش **Contraction** ، وبالتالي أي مكعب من المادة المرنة يتغير طوله في اتجاه المحور $\overrightarrow{ox}$ ولكن أبعاده في اتجاه كل من المحورين $\overrightarrow{oy}\,,\overrightarrow{oz}$ تظل كما هي ، وبذلك يصبح المكعب بعد التغير في الشكل على هيئة متوازي مستطيلات **Rectangular parallelepiped** ومثل هذه التحويلات تسمى **Simple homogeneous extension** .

وباستخدام ذات الطريقة يمكن تفسير المعنى الهندسي لكل من $e_{yy}\,, e_{zz}$.

إيجاد المعنى الهندسي للمركبات المماسية (الغير قطرية في ممتد الانفعال) ، للحصول على المعنى الهندسي للمركبة e_{yz} ، تعتبر المتجهان $\vec{A}\,,\vec{B}$ ، بحيث أن مركبات $\vec{A}$ هي $(0 , A_2 , 0)$ ومركبات $\vec{B}$ هي $(0 , 0 , B)$ أي أنهما ، قبل التغير في الشكل ، في اتجاه المحورين $\overrightarrow{oy}\,,\overrightarrow{oz}$ ، على التوالي .

بعد التغير في شكل فإن المتجهان $\vec{A}\,,\vec{B}$ يصبحا $\overrightarrow{A'}\,,\overrightarrow{B'}$ ، حيث

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'} &= \delta A_1\vec{i} + \left(A_2+\delta A_2\right)\vec{j} + \delta A_3\vec{k}\,,\\ \overrightarrow{B'} &= \delta B_1\vec{i} + \delta B_2\vec{j} + \left(B_3+\delta B_3\right)\overrightarrow{K}\,.\end{aligned} \qquad (2.31)$$



شكل (٢)

فـإذا كانـت θ هـي الزاويـة بـين المتجهـان $\overrightarrow{A'}\,,\,\overrightarrow{B'}$ ، (كمـا بشـكل (٢)) وسـوف نأخـذها مسـاوية للمقدار $\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_{yz}\right)$ ، حيث ε_{yz} مقدار صغير ، سوف يحدد فيما بعد .

من تعريف حاصل الضرب القياسي لمتجهين نجد أن :

$$\left|\overrightarrow{A'}\right|.\left|\overrightarrow{B'}\right| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{yz}\right) = \overrightarrow{A'}.\overrightarrow{B'}$$
$$= \delta A_1\,\delta B_1 + \left(A_2 + \delta A_2\right)\delta B_2 + \left(B_3 + \delta B_3\right)\delta A_3$$
$$\simeq A_2\delta B_2 + B_3\delta A_3$$

وذلك بإهمال الكميات : $\delta A_1.\delta B_1\;,\;\; \delta A_2.\delta B_2\;,\;\; \delta A_3.\delta B_3$ **.**

وبالتالي فإن

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_{yz}\right)=\frac{A_2\,\delta B_2+B_2\,\delta A_3}{\sqrt{\left(\delta A_1\right)^2+\left(A_2+\delta A_2\right)^2+\left(\delta A_3\right)^2}\sqrt{\left(\delta B_1\right)^2+\left(\delta B_2\right)^2+\left(B_3+\delta B_3\right)^2}}$$
$$=\left(A_2+\delta B_2+B_3\delta A_3\right)\left(A_2+\delta A_2\right)^{-1}\left(B_3+\delta B_3\right)^{-1}$$
$$=\frac{A_2\,\delta B_2\,+B_3\,\delta A_3}{A_2.B_3}=\frac{\delta B_2}{B_3}.\frac{\delta A_3}{A_2}\,. \qquad (2.32)$$

بتطبيق المعادلات (2.25) على المتجهين $\overrightarrow{A} \equiv \left(\,0\,,\,A_2\,,\,0\,\right),\,\overrightarrow{B} \equiv \left(\,0\,,\,0\,,\,B_3\right)$ **، نجد أن :**

$$\delta A_3 = e_{zy}A_2 + w_{32}A_2\;,\quad \delta B_2 = e_{yz}B_3 + w_{32}B_3\,. \qquad (2.33)$$

بالتعويض من (2.33) في (2.32) نحصل على :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_{yz}\right)=\frac{e_{yz}\,B_3+w_{23}B_3}{B_3}+\frac{e_{zy}\,A_2+w_{32}A_2}{A_2}=2e_{yz}\ . \qquad (2.34)$$

وذلك لأن $w_{23}=-w_{32}\ ,\ e_{yz}=e_{zy}$ **.**

وحيث أن ε_{yz} **مقدار صغير ، لذلك فإن :** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_{yz}\right)=\sin\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{yz}$

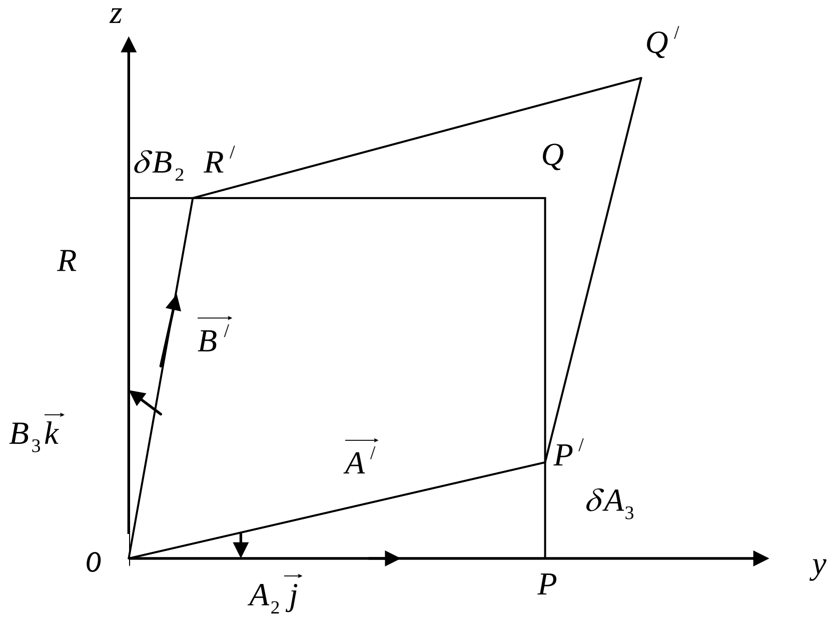
وبالتالي فإن :

$$\varepsilon_{yz}=2e_{yz}\ . \qquad (2.35)$$

أي أن للمقدار $2e_{yz}$ **يمثل النقص في الزاوية بين المتجهين** $\vec{A}\ ,\vec{B}$ **والعمودين المأخوذين ، قبل التغير في الشكل ، في اتجاه المحورين** $\overrightarrow{oy}\ ,\overrightarrow{oz}$ **، على الترتيب ، وبالمثل بالنسبة للكمية** $2e_{zx}\ ,\ 2e_{xy}$ **.**

فإذا اعتبرنا التحويلة الخالصة المتجانسة فإن :

$$\delta A_3=e_{zy}\,A_2\ ,\quad \delta B_2=e_{yz}\,B_3$$



شكل (٣)

ومن شكل(٣) نجد أن المستطيل $O\,P\,Q\,R$ **أصبح بعد التغير في الشكل متوازي الأضلاع** $O\,P'Q'R'$ **.**

وبذلك فإن :

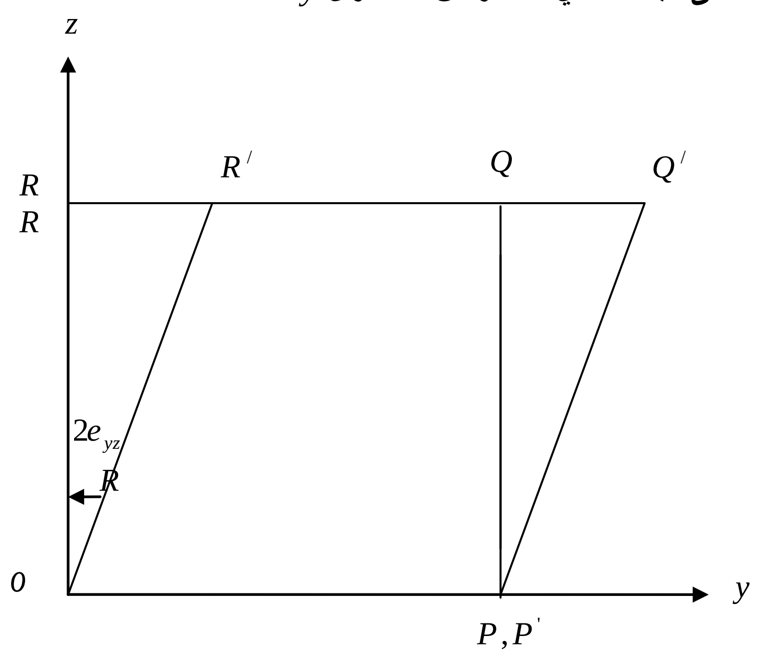
$$R\,R'=\delta B_2\ ,\quad P\,P'=\delta A_3\ ,$$

$$\tan POP'=\frac{\delta \mathrm{A}_3}{\mathrm{OP}}=\frac{\delta \mathrm{A}_3}{\mathrm{A}_2}=e_{zy}\ ,\quad \tan ROR'=\frac{\delta \mathrm{B}_2}{\mathrm{OR}}=\frac{\delta \mathrm{B}_2}{\mathrm{B}_3}=e_{yz}\ , \qquad (2.36)$$

حيث $\angle\,POP'\equiv\angle ROR'\ ,\quad e_{yz}=e_{zy}\ .$

أي أنه بدوران متوازي الأضلاع $O\,P'Q'R'$ **زاوية مقدارها** ε_{YZ} **حول نقطة الأصل يمكن الحصول على شكل (٤) .**

شكل (٤) يبين أن متوازي الأضلاع $O\,P'Q'R'$ نتج بإنزلاق العناصر الموازية للمستوى $x-y$ ، بينما هذا الانزلاق يعتمد على البعد z لأي عنصر من المستوى $x-y$.



شكل (٤)

واضح من شكل (٤) أن مساحة المستطيل تساوي مساحة متوازي الأضلاع ، وبالمثل أي عنصر ذي حجم على شكل مكعب ، قبل التغير في الشكل ، يصبح ، بعد التغير في الشكل ، على شكل متوازي مستطيلات ويكون حجم كل من المكعب ومتوازي المستطيلات متساوي .

هذا النوع من التغير في الشكل يسمى تغير قاصي متجانس بسيط أو تغير قاصي نقي .

بند (٦) : الكميات التى لا تتغير بتغير المحاور وسطح الانفعال :

العلاقة (2.15) يمكن وضعها في الصورة :

$$\left|\vec{\mathrm{P}}\right|\delta\left|\vec{\mathrm{P}}\right| = 2F\left(\,\xi\,,\eta\,,\zeta\,\right), \tag{2.37}$$

حيث

$$2F\left(\,\xi\,,\eta\,,\zeta\,\right) = e_{xx}\,\xi^2 + e_{yy}\,\eta^2 + e_{zz}\,\zeta^2 + \\ + 2e_{xy}\,\xi\eta + 2e_{zx}\,\xi\zeta + 2e_{yz}\,\eta\zeta\,. \tag{2.38}$$

وهذا يعنى أن الدالة $F\left(\xi\,,\eta\,,\zeta\right)$ هي صيغة ثنائية في $\left(\xi\,,\eta\,,\zeta\right)$ وذلك لأن الطرف الأيسر في المعادلة (2.37) لا يتغير بتغير المحاور .

أي أنه إذا كانت $e_{x'x'}\,,e_{y'y'}\,,e_{z'z'}\,,e_{x'y'}\,,e_{y'z'}\,,e_{z'x'}$ تمثل مركبات الانفعال بالنسبة لمجموعة الإحداثيات $o\,x'y'z'$ وكذلك $\xi'\,,\eta'\,,\zeta'$ تمثل مركبات المتجه $\vec{\mathrm{P}}$ بالنسبة لهذه المحاور فان :

$$e_{x'x'}\,\xi'^2 + e_{y'y'}\,\eta'^2 + e_{z'z'}\zeta'^2 + 2e_{x'y'}\,\xi'\eta' + 2e_{z'x'}\,\xi'\zeta' + 2e_{y'z'}\,\eta'\zeta'$$
$$= e_{xx}\,\xi^2 + e_{yy}\,\eta^2 + e_{zz}\,\zeta^2 + 2e_{xy}\,\xi\eta + 2e_{zx}\,\xi\zeta + 2e_{yz}\,\eta\zeta. \qquad (2.39)$$

بالتعويض عن (ξ', η', ζ') بدلالة (ξ, η, ζ) في المعادلة (2.39) يصبح الطرفان متشابهان ، يمكن

منها تعيين كل من $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ بدلالة كل من $e_{x'x'}, e_{y'y'}, e_{z'z'}, e_{x'y'}, e_{y'z'}, e_{z'x'}$

وهذه العلاقات شبيهة تماماً للعلاقات ، التي سبق أن استنتجناها ، بين مركبات الإجهاد بالنسبة للمحاور الجديدة ومركبات الإجهاد بالنسبة للمحاور القديمة .
وكما سبق أن عرفنا سطح الإجهاد المناظر ، يمكن تعريف سطح الانفعال كلآتي :

$$2F(\xi, \eta, \zeta) = \pm c^2$$

أو بالصورة

$$e_{xx}\,\xi^2 + e_{yy}\,\eta^2 + e_{zz}\,\zeta^2 + 2e_{xy}\,\xi\eta + 2e_{zx}\,\xi\zeta + 2e_{yz}\,\eta\zeta = \pm c^2. \qquad (2.40)$$

المعادلة (2.40) تمثل سطح الانفعال Strain surface .

المعادلة (2.37) يمكن كتابتها في الصورة :

$$|\vec{\mathrm{P}}|^2 . \frac{\delta|\vec{\mathrm{P}}|}{|\vec{\mathrm{P}}|} = 2F(\xi, \eta, \zeta)$$

أو

$$|\vec{p}|^2 . e = 2F(\xi, \eta, \zeta)$$

حيث $e = \dfrac{\delta|\vec{p}|}{|\vec{p}|}$ **يمثل الزيادة النسبية في طول المتجه $\vec{\mathrm{P}}$.**

وبذلك إذا ما علم سطح الانفعال المعطي بالعلاقة (2.40) فإنه يمكن تعيين الزيادة النسبة في طول المتجهه (e) . ولهذا يكفي فقط أن نرسم موازيا لهذا المتجه من نقطة الأصل (o) لقطع سطح الانفعال عند نقطة ما ولتكن H مثلا ، وبذلك نجد أن

$$e = \frac{\pm c^2}{|oH|^2}$$

<u>بند (٧) : الانفعالات الأساسية والمحاور الأساسية للانفعال:</u>

إذا ما اختيرت المحاور بأي طريقة ما بحيث تنطبق على المحاور الأساسية للسطح المعطي بالمعادلة (2.38) فإن معادلة سطح الانفعال ، في هذه الحالة ، تصبح في الصورة:

$$e_1\,\xi^2 + e_2\,\eta^2 + e_3\,\zeta^2 = \pm c^2\,, \qquad (2.41)$$

حيث: e_1, e_2, e_3 تمثل قيم e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} ، على الترتيب ، في حالة المحاور الأساسية .

من الطبيعى أنه في حالة المحاور الأساسية فإن المركبات $e_{xy}\ ,\ e_{yz}\ ,\ e_{xz}$ تتلاشى ، وأن الزوايا بين المحاور بعد التغير في الشكل تظل قائمة . ومثل هذه المحاور تسمى بالمحاور الأساسية للانفعال والكميات $e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3$ تمثل المركبات الأساسية للانفعال ، وكما ذكرنا سابقاً يوجد ثلاث محاور أساسية ولكن إذا كان السطح (2.38) يمثل سطح من السطوح الدورانية فانه يكون لدينا ما لا نهاية من المحاور الأساسية .

إذا ما اخترنا المحاور بحيث تكون محاور أساسية فإن التحويلة الخالصة المتجانسة يمكن وضعها في الصورة :

$$\delta\xi = e_1\,\xi\ ,\ \delta\eta = e_2\,\eta\ ,\ \delta\zeta = e_3\,\zeta\ , \qquad (2.42)$$

حيث $e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3$ هي جذور المعادلة :

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} - e & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} - e \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (2.43)$$

وبفك المحدد نحصل على المعادلة :

$$e^3 - \theta e^2 + b\,e - c = 0\ , \qquad (2.44)$$

حيث

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}\ ,\ b = e_{xx}\,e_{yy} + e_{yy}\,e_{zz} + e_{zz}\,e_{xx} - e_{xy}^2 - e_{xz}^2 - e_{yz}^2\ ,$$

$$C = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}. \qquad (2.45)$$

والكمية θ هنا من الكميات التي لا تتغير بتغير المحاور ، أي أن :

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_1 + e_2 + e_3\ . \qquad (2.46)$$

والكمية θ ذات معنى هندسي بسيط ، فإذا ما اعتبرنا متوازي مستطيلات قائم ، ذي حجم $V = l_1\,l_2\,l_3$ ، ومقام على الأضلاع $oA\ ,\ oB\ ,\ oC$ من المحاور الأساسية ، حيث

$$l_1 = oA\ ,\ l_2 = oB\ ,\ l_3 = oC\ .$$

وبعد التغير في الشكل فإن متوازي المستطيلات يظل كما هو متوازي مستطيلات قائم الزاوية ولكن أضلاعه تصبح $l_1(1+e_1)\,,\ l_2(1+e_2)\,,\ l_3(1+e_3)$.

وبذلك يصبح حجمه الجديد هو

$$\begin{aligned} V' &= l_1\,l_2\,l_3\,(1+e_1)(1+e_2)(1+e_3) \\ &= V\,(1 + e_1 + e_2 + e_3) \end{aligned}$$

وذلك بإهمال حاصل ضرب الكميات الصغيرة $(e_1 e_2\ ,\ e_1 e_3\ ,\ e_2 e_3\ ,\ e_1 e_2 e_3)$ ،

وبالتالى فإن :

$$\frac{V' - V}{V} = e_1 + e_2 + e_3 = \theta , \qquad (2.47)$$

أي أن θ تمثل الزيادة النسبية في الحجم وتسمى أحيانا الاستطالة الحجمية **Cubical dilatation** .

بند (٨) : التشويه العام General Deformation

بفرض أن M نقطة ما في جسم قابل للتشكل ، ولها الموضع الإبتدائية (x , y , z) ، ثم تحركت نتيجة التغير الحادث إلى الموضع M^* والذي احداثياته هي (x^* , y^* , z^*) ، حيث

$$x^* = x + u \;,\; y^* = y + v \;,\; z^* = z + w \;. \qquad (2.48)$$

حيث u , v , w تمثل مركبات المتجه $\overrightarrow{M M^*}$ الذي يعبر عن إزاحة النقطة M نتيجة للتشويه الحادث ، وهذ المتجه يسمى متجه الإزاحة البسيطة .

وحيث أن النقط المختلفة من الجسم سوف تزاح بطرق مختلفة وبالتالي المركبات u , v , w سوف تكون دوال في الإحداثيات x , y , z ، والتي تحدد الموضع الابتدائي للنقطة M وبالتالي يمكن كتابة المركبات u , v , w في الصورة :

$$u \equiv u(x , y , z) , v \equiv v(x , y , z) , w \equiv w(x , y , z) . \qquad (2.49)$$

وفي حالة الجسم المتحرك (حالة الديناميكا) تكون u , v , w دوال أيضا في الزمن t .

سوف نفترض أن الدوال u , v , w دوال وحيدة القيمة ومتصلة ، وذات تفاضلات جزئية متصلة حتى الرتبة الثالثة .

بإختار حجم صغير جدا محيط بالنقطة$M(x , y , z)$ثم نفحص تغيره ، نتيجة التغير في الشكل ، ويكفي فقط دراسة تغيربعض المتجهات المتناهية في الصغر ، والتي نقطة البداية لها هي M ونفرض أن $\overrightarrow{M N} = \vec{P}(\xi , \eta , \zeta)$ إحدى هذه المتجهات.

بعد التغير في الشكل النقطة M نتحرك إلى M^* والنقطة N إلى N^* والمتجه $\vec{P}$ يصبح

$\delta\vec{P} = \vec{P^*} - \vec{P}$ ويكون $\vec{P^*} = \overrightarrow{M^* N^*}$

وإحداثيات M^* هي : $x + u(x , y, z) , y + v(x , y , z) , z + w(x , y , z)$

وإحداثيات N هي : $x + \xi , y + \eta , z + \zeta$

وإحداثيات N^* هي :

$$x + \xi + u(x + \xi , y + \eta , z + \zeta) , y + \eta + v(x + \xi , y + \eta , z + \zeta) ,$$
$$z + \zeta + w(x + \xi , y + \eta , z + \zeta) .$$

وبذلك تصبح مركبات المتجه $\overrightarrow{\mathrm{P}^{*}}$ هي :

$$\xi + u\left(x + \xi , y + \eta , z + \zeta\right) - u\left(x , y , z\right),$$
$$\eta + v\left(x + \xi , y + \eta , z + \zeta\right) - v\left(x , y , z\right),$$
$$\zeta + w\left(x + \xi , y + \eta , z + \zeta\right) - w\left(x , y , z\right).$$

وتصبح مركبات المتجه $\delta\vec{\mathrm{P}}$ هي :

$$\delta\xi = u\left(x + \xi , y + \eta , z + \zeta\right) - u\left(x , y , z\right),$$
$$\delta\eta = v\left(x + \xi , y + \eta , z + \zeta\right) - v\left(x , y , z\right),$$
$$\delta\zeta = w\left(x + \xi , y + \eta , z + \zeta\right) - w\left(x , y , z\right). \qquad (2.50)$$

بتطبيق نظرية تيلور على الطرف الأيمن من المعادلات (2.50) نحصل على :

$$\delta\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta + \in_1 , \quad \delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta + \in_2 ,$$
$$\delta\zeta = \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta + \in_3 ,$$

حيث $\in_1 , \in_2 , \in_3$ كميات صغيرة جدا ، تمثل المشتقات التي من الرتبة الثانية والرتب الأعلى ، وبإهمال هذه الكميات نحصل على :

$$\delta\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta , \quad \delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta ,$$
$$\delta\zeta = \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta . \qquad (2.51)$$

وهذه الصيغ توضح أن التغير الحادث في المتجه $\vec{p}$ يمكن تمثيله بواسطة تحويلة متجانسة .

بمقارنة المعادلات (2.13) والمعادلات (2.51) نجد أن :

$$a_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} , a_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} , a_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} , \qquad a_{21} = \frac{\partial v}{\partial x} , a_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} , a_{23} = \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$a_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} , \; a_{32} = \frac{\partial w}{\partial y} , \; a_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} . \qquad (2.52)$$

وكما سبق ، سوف نستبدل الرموز $e_{ij} , \left(i , j = 1,2,3\right)$ بالرموز $e_{lm} , \left(l , m = x , y , z\right)$ ، كما يلي :

$$e_{xx} = a_{11} , e_{yy} = a_{22} , e_{zz} = a_{33} ,$$
$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(a_{12} + a_{21}\right) , e_{xz} = \frac{1}{2}\left(a_{31} + a_{31}\right) , e_{yz} = \frac{1}{2}\left(a_{23} + a_{32}\right) . \qquad (2.53)$$

من الصيغ (2.53) , (2.52) يمكن تعيين مركبات الانفعال بدلالة مركبات الإزاحة u , v , w في الصورة :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \; , \; e_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} \; , \; e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \; ,$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \; e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \; e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right). \qquad (2.54)$$

كذلك يمكن كتابة:

$$w_{32} = w_1 = a_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), w_{13} = w_2 = a_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$w_{21} = w_3 = a_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (2.55)$$

وكذلك $\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$

بند (٩) : تعيين مركبات الإزاحة بدلالة مركبات الانفعال :

في بند (٨) حصلنا مركبات الانفعال بدلالة مركبات الإزاحة $u \,, v \,, w$ كدوال في $x \,, y \,, z$ ، والآن سوف نبحث عن كيفية الحصول على صيغ لمركبات الإزاحة $u \,, v \,, w$ بدلالة مركبات الانفعال $e_{xx} \;, e_{yy} \;, e_{zz} \;, e_{xy} \;, e_{yz} \;, e_{zx}$ عند نقطة ما $x \,, y \,, z$ ، أي أننا سوف نبحث على صيغ لكل دالة من الدوال $u \,, v \,, w$ بحيث تحقق العلاقات الآتية :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$2e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (2.56)$$

حيث $e_{xx} \,, e_{yy} \,, e_{zz} \,, e_{xy} \,, e_{zx} \,, e_{yz}$ دوال وحيدة القيمة عند النقطة $x \,, y \,, z$ وذات تفاضلات متصلة حتى الرتبة الثانية .

لدينا الآن ست معادلات لتعيين المجاهيل الثلاث $u \,, v \,, w$ وهذا يعني أن هذه المعادلات ليس لها حل وحيد إلا إذا وضعت شروط أخرى على الدوال $e_{xx} \,, e_{yy} \,, e_{zz} \,, e_{xy} \,, e_{zx} \,, e_{yz}$.

بفرض أن الحجم V هو المنطقة التي كان يحتلها الجسم قبل التغير في الشكل ، وعند أي نقطة $x \,, y \,, z$ في هذه المنطقة (V) تكون الدوال $e_{xx} \,, e_{yy} \,, e_{zz} \,, e_{xy} \,, e_{zx} \,, e_{yz}$ معلومة .

و سوف نفترض أن الحجم V بسيط الإتصال Simply connected ، أي أن أي منحنى مقفل داخل هذا الحجم يمكن أن يؤول إلى نقطة واحدة بواسطة تغير مستمر بدون أن يخرج هذا المنحنى خارج الحجم .

بفرض أن $M_o(x_0, y_0, z_0)$ أي نقطة من الحجم V وأن $u_o \,, v_o \,, w_o$ هي قيم مركبات متجه الإزاحة لهذه النقطة ، لذلك فإن $w_{10} \,, w_{20} \,, w_{30}$ تكون هي القيم المناظرة للدوران . وبفرض أن

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ أي نقطة أخرى من الحجم V ، وأن M_0M_1 يرمز إلى أي منحنى يصل بين النقطتين M_0 ، M_1 ويقع داخل الحجم V . إذا كانت التفاضلات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}$ معلومة داخل الحجم V ، فإنه يمكن أن نعين الدالة u_1 عند النقطة M_1 من العلاقة

$$u_1 = u(x_1, y_1, z_1) = u_o + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right), \tag{2.57}$$

حيث التكامل مأخوذ على المنحنى M_0M_1 ، ولكن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}\;, \frac{\partial u}{\partial y} = e_{xy} - w_3\;, \frac{\partial u}{\partial z} = e_{zx} + w_2\,, \tag{2.58}$$

حيث

$$w_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\;,\;\; w_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{2.59}$$

بالتعويض من العلاقات (2.58) في المعادلة (2.57) نحصل على :

$$\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_o + \int_{M_0M_1}\left(\mathrm{e}_{xx}\,\mathrm{dx} + \mathrm{e}_{xy}\,\mathrm{dy} + \mathrm{e}_{zx}\,\mathrm{dz}\right) + \int_{M_0M_1}\left(\mathrm{w}_2\;\mathrm{dz} - \mathrm{w}_3\,\mathrm{dy}\right). \tag{2.60}$$

التكامل الثاني في المعادلة (2.60) يمكن وضعه في الصورة :

$$\begin{aligned}\int_{M_0M_1}\left(\mathrm{w}_2\;\mathrm{dz} - \mathrm{w}_3\,\mathrm{dy}\right) &= \int_{M_0M_1}\left(\mathrm{w}_3\;\mathrm{d}(\mathrm{y}_1 - y) - \mathrm{w}_2\,\mathrm{d}(\mathrm{z}_1 - \mathrm{z})\right)\\ &= \mathrm{w}_{20}(z_1 - z_0) - \mathrm{w}_{30}(y_1 - y_0) - \\ &\quad - \int_{M_0M_1}\left((\mathrm{y}_1 - y)\mathrm{dw}_3 - (\mathrm{z}_1 - \mathrm{z})\mathrm{dw}_2\right),\end{aligned} \tag{2.61}$$

حيث

$$\begin{aligned}\mathrm{dw}_3 &= \frac{\mathrm{dw}_3}{\partial x}dx + \frac{\mathrm{dw}_3}{\partial y}dy + \frac{\mathrm{dw}_3}{\partial z}dz\;,\\ \mathrm{dw}_2 &= \frac{\mathrm{dw}_2}{\partial x}dx + \frac{\mathrm{dw}_2}{\partial y}dy + \frac{\mathrm{dw}_2}{\partial z}dz\;.\end{aligned} \tag{2.62}$$

ولكن من العلاقات (2.58) ، نعلم أن $w_3 = e_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ، لذلك فإن

$$\frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

وبالمثل يمكن الحصول على $\frac{\partial w_3}{\partial z}, \frac{\partial w_3}{\partial y}$.

$$\therefore \frac{\partial \mathrm{w}_3}{\partial x} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y} , \quad \frac{\partial \mathrm{w}_3}{\partial y} = \frac{\partial e_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} ,$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}_3}{\partial z} = \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} . \tag{2.63}$$

بالمثل ، يمكن الحصول على العلاقات الآتية :

$$\frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial x} = \frac{\partial e_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial x} , \quad \frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial y} = \frac{\partial e_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} ,$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial z} = \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} . \tag{2.64}$$

من المعادلات (2.64) , (2.63) **، يمكن الحصول على** dw_2 , dw_3 **بدلالة مركبات الإنغعال ، ثم بالتعويض في المعادلة** (2.60) **، نجد أن :**

$$\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}(\mathrm{x}_1 , y_1 , z_1) = \mathrm{u}_o + w_{20}(z_1 - z_0) - w_{30}(y_1 - y_0) +$$
$$+ \int\limits_{M_0 M_1} \left(U_x \,\mathrm{dx} + U_y \,\mathrm{dy} + U_z \,\mathrm{dz} \right) , \tag{2.65}$$

حيث

$$U_x = e_{xx} + (y_1 - y)\left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} \right) + (z_1 - z)\left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) ,$$

$$U_y = e_{xy} + (y_1 - y)\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yy}}{\partial x} \right) + (z_1 - z)\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) ,$$
$$U_z = e_{xz} + (y_1 - y)\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) + (z_1 - z)\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) . \tag{2.66}$$

وبذات الطريقة يمكن الحصول على :

$$v_1 = \mathrm{v}(\mathrm{x}_1 , y_1 , z_1) = v_o + w_{30}(x_1 - x_0) - w_{10}(z_1 - z_0) +$$
$$+ \int\limits_{M_0 M_1} \left(V_x \,\mathrm{dx} + V_y \,\mathrm{dy} + V_z \,\mathrm{dz} \right) ,$$
$$w_1 = \mathrm{w}(\mathrm{x}_1 , y_1 , z_1) = w_o + w_{10}(y_1 - y_0) - w_{20}(x_1 - x_0) +$$
$$+ \int\limits_{M_0 M_1} \left(W_x \,\mathrm{dx} + W_y \,\mathrm{dy} + W_z \,\mathrm{dz} \right) . \tag{2.67}$$

والحصول على صيغ للدوال V_x , V_y , V_z **والدوال** W_x , W_y , W_z **، مشابهه للصيغ** (2.66) **.**

الصيغ (2.67) , (2.65) **تعطى مركبات الإزاحة عند النقطة** $M_1(x_1 , y_1 , z_1)$ **، إذا علمت قيم** u_0 , v_0 , w_0 **، وكذلك قيم** w_{10}, w_{20}, w_{30} **عند نقطة أخرى** $M_0(x_0 , y_0 , z_0)$ **التي يمكن اختيارها .**

بند (١٠) : شروط التوافق الإنفعالى :

لقد لاحظنا في بند (٩) أن الإزاحات تحتوى على تكامل على منحنى $\mathrm{M}_0 M_1$ (المعادلات (2.67) , (2.65)) ، ولكن الدوال $u\ ,v\ ,w$ يجب أن تكون دوال في $x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1$ ولا تعتمد على مسار التكامل ، وهذا يعنى أنه لكى يمكن الحصول على قيم $u\ ,v\ ,w$ عند النقطة $x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1$ يجب أن يكون التكامل الموجود بالمعادلات (2.67) , (2.65) لا يعتمد على مسار التكامل ، وهذا يعنى بالنسبة للمعادلة (2.65) (مثلاً) أن

$$\int_{M_0 M_1} \left(U_x \, \mathrm{dx} + U_y \, \mathrm{dy} + U_z \, \mathrm{dz} \right)$$

يكون مستقبل عن المسار $M_0 M_1$ ، وهذا الشرط يتحقق عندما

$$\frac{\partial U_z}{\partial y} = \frac{\partial U_y}{\partial z} \ , \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial U_z}{\partial x} \ , \quad \frac{\partial U_y}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial y} \ , \qquad (2.68)$$

وبالمثل بالنسبة للتكاملين الموجودين في المعادلات (2.67) ، سوف نحصل منهما على الشروط الواجب توافرها لكى تعتمد هذه المتكاملات على المسار $\mathrm{M}_0 M_1$ ، ونلاحظ أن هذه الشروط يجب أن تتحقق لجميع النقاط $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ الموجودة داخل الحجم V ولجميع قيم $(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$ داخل هذا الحجم .

من العلاقات (2.66) والعلاقات (2.68) ، نحصل على العلاقات الآتية :

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y} \ , \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z} \ , \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial x} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right). \qquad (2.69)$$

العلاقات (2.69) تسمى شروط التوافق الإنفعالي ، أو شروط سان فينان **Saint-Venant's** للتوافق ، وهذه الشروط تمثل الصيغ الرياضية التي يجب أن تتحقق بواسطة مركبات الإنفعال لكى يحدث التشويه بدون عدم اتصال ، ولذلك تسمى هذه الشروط أحيانا بشروط الإتصال **Conditions of continuity** .

مثالـ ١ ـــ :

إذا أعطيت مركبات متجه الإزاحة $\vec{U}(u, v, w)$. عين مركبات ممتد الإنفعال عند النقط المناظرة لكل حالـة من الحالات الآتية :

$$(i)\, u = \left(3x^4 + 2x^2y^2 + x + y + z^3 + 3\right)(10)^{-3},$$
$$v = \left(3xy + y^3 + y^2z + z^2 + 1\right)(10)^{-3},$$
$$w = \left(x^2 + xy + yz + zx + y^2 + z^2 + 2\right)(10)^{-3},$$

عند النقطة $(1, 1, 1)$.

$$(ii)\, u = \left(x^2 + y^4 + 2y^2z + yz\right)(10)^{-3},$$
$$v = \left(xy + xz + 3x^2z\right)(10)^{-3},$$
$$w = \left(y^4 + 4y^3 + 2z^2\right)(10)^{-3},$$

عند النقطة $(2, 2, 2)$.

الحلـــــــ :

مركبات ممتد الانفعال تعرف بدلالة مركبات متجه الإزاحة كالآتي :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},\ e_{yy} = \frac{\partial y}{\partial y},\ e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},\ e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\ e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right). \qquad (1)$$

بالتعويض في هذه العلاقات تعويض مباشر نحصل على :
بالنسبة للحالة (i)

$$e_{xx} = \left(12x^3 + 4xy^2\right)(10)^{-3},\quad e_{yy} = \left(3x + 3y^2 + 2yz\right)(10)^{-3},$$
$$e_{zz} = \left(y + x + 2z\right)(10)^{-3},\qquad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(4x^2y + 3y + 1\right)(10)^{-3},$$
$$e_{zx} = \frac{1}{2}\left(3z^2 + 4x + 2y + 2z\right)(10)^{-3},$$
$$e_{yz} = \frac{1}{2}\left(y^2 + 4y + 2x + 4z\right)(10)^{-3}. \qquad (2)$$

بالتعويض بالنقطة $(1, 1, 1)$ **في العلاقات** (2) **نحصل على :**

$$e_{xx} = (16)(10)^{-3},\quad e_{yy} = 8(10)^{-3},\quad e_{zz} = 4(10)^{-3},$$
$$e_{xy} = 4(10)^{-3},\qquad e_{yz} = \frac{7}{2}(10)^{-3},\quad e_{zx} = \frac{7}{2}(10)^{-3}.$$

بالنسبة للحالة (ii)

$$e_{xx} = 2x\,(10)^{-3}\ ,\quad e_{yy} = x\,(10)^{-3}\ ,\quad e_{zz} = 4z\,(10)^{-3}\ ,$$
$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(4y^3 + 4yz + 2z + y + 6xz\right)(10)^{-3}\ ,$$
$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(2y^2 + y\right)(10)^{-3}\ ,$$
$$e_{yz} = \frac{1}{2}\left(x + 3x^2 + 4y^3 + 12y^2\right)(10)^{-3}\ , \qquad (3)$$

بالتعويض بالنقطة $(2\ ,2\ ,2)$ في العلاقات (3) نحصل على :

$$e_{xx} = 4(10)^{-3},\quad e_{yy} = 2(10)^{-3},\quad e_{zz} = 8(10)^{-3}\ ,$$
$$e_{xy} = 45(10)^{-3},\quad e_{xz} = 5(10)^{-3},\quad e_{yz} = 94(10)^{-3}\ .$$

مثالـــ ٢ ـــــ :

إذا كان متجه الإزاحة $\vec{U}\,(u\ ,v\ ,w)$ لجسم مرن ، يعطى بالعلاقة

$$\vec{U}\,(u,v,w) = \left(3x^2y + 6\right)\vec{i} + \left(y^2 + 6xz\right)\vec{j} + \left(6z^2 + 2yz + 10\right)\vec{k}\ .$$

عين مركبات ممتد الإنفعال ومركبات الدوران ثم أثبت أن شوط التوافق الإنفعالي تكون متحققة .

الحلـــــــــ :

$$\because u = 3x^2y + 6\ ,\quad v = y^2 + 6xz\ ,\quad w = 6z^2 + 2yz + 10\ .$$
$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy\ ,\ \frac{\partial y}{\partial y} = 2y\ ,\ \frac{\partial w}{\partial z} = 12z + 2y\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 6z\ ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial z} = 6x\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2z\ .$$

لذلك فإن مركبات الإنفعال هي :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy\ ,\quad e_{yy} = \frac{\partial y}{\partial y} = 2y\ ,\quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 12z + 2y\ ,$$
$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2 + 6z\right),\ e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0\ ,$$
$$e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(6x + 2z\right) = 3x + z\ .$$

ومركبات الدوران هي :

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(2z - 6x\right) = z - 3x\ ,$$
$$w_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(0 - 0\right) = 0\ ,\ w_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(6z - 3x^2\right).$$

ويمكن بسهولة اثبات أن شروط التوافق الإنفعالي تكون متحققة .

مثالــ ٣ ـــ :

عند نقطة في جسم مجهد المركبات الكرتيزية للانفعال هي :

$$e_{xx} = 600\times(10)^{-6}\ ,\quad e_{yy} = 900\times(10)^{-6}\ ,\quad e_{zz} = 600\times(10)^{-6}\ ,$$
$$e_{xy} = 1200\times(10)^{-6}\ ,\quad e_{zx} = 900\times(10)^{-6}\ ,\quad e_{yz} = 750\times(10)^{-6}\ .$$

عين المركبات الكارتيزية للإنفعال بالنسبة لمجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ مع العلم بأن جيوب التمام لمحاور الإحداثيات الجديدة بالنسبة للمحاور الأصلية هي :

θ	$o\,x$	$o\,y$	$o\,z$
$o\,x'$	$2/3$	$2/3$	$-1/3$
$o\,y'$	$-2/3$	$1/3$	$-2/3$
$o\,z'$	$-2/3$	$2/3$	$2/3$

الحلــــــــ :

العلاقات بين مركبات الانفعال المنسوبة لمجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ و مركبات الانفعال المنسوبة لمجموعة الإحداثيات الأصلية $(\,o\,x\,y\,z\,)$ ، هي نفس العلاقات التي سبق وأن حصلنا عليها في الباب الأول بالنسبة لمركبات الإجهاد ولكن باستبدال مركبات الإجهاد بمركبات الانفعال ، وبذلك نجد أن .

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{xx}\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right) + e_{yy}\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) + e_{zz}\cos^2\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ &\quad + 2e_{xy}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right) + 2e_{zx}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ &\quad + 2e_{yz}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right). \\ &= \left(600\times\frac{4}{9}+900\times\frac{4}{9}+600\times\frac{1}{9}+2400\times\frac{4}{9}-1800\times\frac{2}{9}-1500\times\frac{2}{9}\right)\times10^{-6} \\ &= \left(3900\times\frac{4}{9}+600\times\frac{1}{9}-3300\times\frac{2}{9}\right)\times10^{-6} = \frac{3200}{3}\times10^{-6}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{y'y'} &= e_{xx}\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + e_{yy}\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + e_{zz}\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ &\quad + 2e_{xy}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + 2e_{zx}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \\ &\quad + 2e_{yz}\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right). \\ &= \left(600\times\frac{4}{9}+900\times\frac{1}{9}+600\times\frac{4}{9}-2400\times\frac{2}{9}-1500\times\frac{2}{9}+1800\times\frac{4}{9}\right)\times10^{-6} \\ &= \frac{1700}{3}\times10^{-6}\ , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_{x'y'} &= e_{xx}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right) + e_{yy}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + \\
&\quad + e_{zz}\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos^2\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \\
&\quad + e_{xy}\left[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right) + \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\right] + \\
&\quad + e_{zx}\left[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{ox}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{ox}\right)\right] + \\
&\quad + e_{yz}\left[\cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oy}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oz}\right) + \cos\left(\overrightarrow{ox'},\overrightarrow{oz}\right)\cos\left(\overrightarrow{oy'},\overrightarrow{oy}\right)\right] \\
&= \left(-600\times\frac{4}{9} + 900\times\frac{2}{9} + 600\times\frac{2}{9} - 1200\times\frac{2}{9} - 900\times\frac{2}{9} - 750\times-\frac{5}{9}\right)\left(10^{-6}\right) \\
&= -1150\times\left(10^{-6}\right).
\end{aligned}
$$

بالمثل يمكن الحصول على باقي المركبات ، فنجد أن :

$$
e_{z'z'} = \frac{1400}{3}\times(10)^{-6}\ , \quad e_{y'z'} = -\frac{2900}{3}\times(10)^{-6}\ , \quad e_{z'x'} = \frac{3200}{3}\times(10)^{-6}\ .
$$

مثـــال ٤ ـــــ :

عين مركبات متجه الإزاحة $\vec{U}\,(u\,,v\,,w\,)$ ، إذا علمت أن المركبات الكارتيزية للإنفعال هي :

$$
e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0\ , \quad e_{zx} = -a\,y\ , \quad e_{yz} = a\,x\ .
$$

الحلـــــــــــ :

لتعيين مركبات متجه الإزاحة $\vec{U}\,(u\,,v\,,w\,)$ ، بمعلومية مركبات الانفعال ، يجب أن نتحقق أولاً من كون هذه المركبات تحقق شروط Saint - Venant .

من المركبات المعطاة نجد أن :

$$
\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z} = 0\ ,
$$

$$
\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial x} = 0\ , \quad \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right) = 0\ ,
$$

$$
\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right) = 0\ , \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) = 0\ .
$$

أي أن مركبات الإنفعال المعطاة تحقق شروط Saint - Venant .

من العلاقات التي تربط بين مركبات متجه الإزاحة ومركبات الانفعال ، نجد أن

$$
e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = f\,(y\,,z\,)\ , \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = g\,(x\,,z\,)\ ,
$$

$$
e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = h\,(x\,,y\,)\ ,
$$

$$
e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f\,(y\,,z\,)}{\partial y} + \frac{\partial g\,(x\,,z\,)}{\partial x} = 0\ , \qquad (1)
$$

ومن المعادلة الأخيرة من (1) يتضح أنها تتحقق إذا كان الطرف الأيمن دالة في z فقط ، وبالتالى فإن

$$\frac{\partial f\left(y,z\right)}{\partial y}=-\frac{\partial g\left(x,z\right)}{\partial x}=F(z)\,. \qquad (2)$$

بتكامل المعادلة (2) نحصل على :

$$f\left(y,z\right)=y\,F\left(z\right)+C_1=u\;,\;\; g\left(x,z\right)=x\,F\left(z\right)+C_2=v\;. \qquad (3)$$

كذلك

$$e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h\left(x,y\right)}{\partial y}+\frac{\partial g\left(x,z\right)}{\partial z}\right)=a\,x\;.$$

$$\therefore\;\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}-x\,\frac{df\;(z)}{dz}\right)=a\,x\;. \qquad (4)$$

المعادلة (4) يمكن أن تتحقق إذا كان الطرف الأيسر دالة في x فقط ، أي عندما :

$$\frac{\partial h\left(x,y\right)}{\partial y}=H\left(x\right),\quad \frac{\partial F\left(z\right)}{\partial z}=c_3\;. \qquad (5)$$

من المعادلتين (5) , (4) نحصل على :

$$2a\,x=H\left(x\right)=c_3\,x\;\;\Rightarrow\;\; H\left(x\right)=x\left(2a+c_3\right). \qquad (6)$$

ولكن من (5) نجد أن :

$$\frac{dF\left(z\right)}{dz}=c_3\;\;\Rightarrow\;\; F(z)=c_3\,z+c_4\;. \qquad (7)$$

بالتعويض من المعادلة(7) في المعادلة(3) نحصل على :

$$u=y\left(c_3\,z+c_4\right)+c_1\,,\quad v=-x\left(c_3\,z+c_4\right)+c_2\;. \qquad (8)$$

كذلك

$$w=h\left(x,y\right)=\int H\left(x\right)dy=x\left(2a+c_3\right)dy=\left(2a+c_3\right)x\,y+c_5\,. \qquad (9)$$

وبالتالى يصبح لدينا خمس ثوابت $c_1\,,c_2\,,c_3\,,c_4\,,c_5$ ، ولكن

$$e_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(2a+c_3\right)y+c_3\,y=-a\,y$$

$$\therefore\;2c_3\,y=-a\,y\;\Rightarrow\;c_3=-2\,.$$

بالتعويض عن قيمة c_3 في المركبات $u\,,v\,,w$ نحصل على :

$$u=-2a\,y\,z+c_4\,y+c_1\,,\quad v=2a\,x\,z-c_4\,x+c_2\,,\quad w=c_5\;.$$

مثالـــ ٥ ــــ :

إذا كانت مركبات الإنفعال عند نقطة في جسم مرن مجهد هي :

$$e_{xx} = e_{yy} = 0\ , \quad e_{xy} = -1\times(10)^{-3}\ , \quad e_{yz} = e_{zx} = 2\times(10)^{-3}\ , \quad e_{zz} = 1\times(10)^{-3}\ .$$

أوجد الإنفعالات الأساسية والأتجاهات الأساسية المناظرة ، ثم أوجد الإستطالة الحجمية .

الحلــــــــ :

الإنفعالات الأساسية هي جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} 0-e(10)^3 & -1 & 2 \\ -1 & 0-e(10)^3 & 2 \\ 2 & 2 & 1-e(10)^3 \end{vmatrix} = 0\ , \qquad (1)$$

أي جذور المعادلة

$$e^3(10)^9 - e^2(10)^6 - 9e(10)^3 + 9 = 0\ ,$$

واضح أن جذور هذه المعادلة (الإنفعالات الأساسية) هي :

$$e_1 = 3\times(10)^{-3}\ , \quad e_2 = 1\times(10)^{-3}\ , \quad e_3 = -3\times(10)^{-3}\ .$$

للحصول على الإتجاه الأساسي الأول ، المناظر للإنفعال الأساسي $e_1 = 3$ ، نقوم بالتعويض في المعادلات :

$$\begin{aligned}
(e_{xx} - e_n)\cos(\vec{n},\overrightarrow{ox}) + e_{xy}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oy}) + e_{zx}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oz}) &= 0,\\
e_{xy}\cos(\vec{n},\overrightarrow{ox}) + (e_{yy} - e_n)\cos(\vec{n},\overrightarrow{oy}) + e_{yz}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oz}) &= 0,\\
e_{zx}\cos(\vec{n},\overrightarrow{ox}) + e_{yz}\cos(\vec{n},\overrightarrow{oy}) + (e_{zz} - e_n)\cos(\vec{n},\overrightarrow{oz}) &= 0.
\end{aligned}$$

فنحصل على :

$$\begin{aligned}
-3\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{ox}) - \cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oy}) + 2\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oz}) &= 0,\\
-\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{ox}) - \cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oy}) + 2\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oz}) &= 0,\\
2\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{ox}) + 2\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oy}) - 2\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oz}) &= 0.
\end{aligned}$$

بحل المعادلتين الأولى والثانية معاً ، نحصل على :

$$\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{ox}) = \cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oy}) = \frac{1}{2}\cos(\vec{n}_1,\overrightarrow{oz}), \qquad (2)$$

ونلاحظ أن هذا الحل يحقق المعادلة الثالثة .

وحيث أن $\vec{n}_1$ متجه وحدة ، لذلك فهو يحقق المعادلة :

$$\cos^2(\vec{n}_1,\overrightarrow{ox}) + \cos^2(\vec{n}_1,\overrightarrow{oy}) + \cos^2(\vec{n}_1,\overrightarrow{oz}) = 1 \qquad (3)$$

من المعادلتين (3) , (2) ، نحصل على :

$$\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{ox}) = \cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oy}) = \frac{1}{2}\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{oz}) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \overrightarrow{n_1} \equiv \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}} , \pm\frac{1}{\sqrt{6}} , \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

بالمثل يمكننا الحصول على $\overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{n_2}$ في الصورة

$$\overrightarrow{n_2} \equiv \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} , \mp\frac{1}{\sqrt{2}} , 0\right), \qquad \overrightarrow{n_3} \equiv \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} , \pm\frac{1}{\sqrt{3}} , \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

لإيجادالإستطالة الحجمية (θ) ، نستخدم بالعلاقة $\theta = e_1 + e_2 + e_3$ ، فنحصل على

$$\theta = (3 + 1 - 3)(10)^{-3} = (10)^{-3} .$$

.

" تمـــــــــــــارين "

(١) عين مركبات الانفعال بالنسبة إلى مجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ إذا علمت أن مركبات الانفعال بالنسبة لمجموعة الإحداثيات $o\,x\,y\,z$ هى :

$$e_{xx} = 600\times10^{-6}\ ,\quad e_{yy} = 400\times10^{-6}\ ,\quad e_{zz} = 200\times10^{-6}\ ,$$
$$e_{xy} = 400\times10^{-6}\ ,\quad e_{zx} = 200\times10^{-6}\ ,\quad e_{yz} = 300\times10^{-6}\ .$$

وأن الزوايا بين المحاور الجديدة والمحاور الأصلية معطاة بالجدول الآتى :

θ	I	II	III	IV
$o\,x - o\,x'$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$o\,y - o\,y'$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0
$o\,z - o\,z'$	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

(٢) عند نقطة في جسم مرن مجهد ، كانت المركبات الكارتيزية للإنفعال هى :

$$e_{xx} = 990\times10^{-6}\ ,\quad e_{yy} = 825\times10^{-6}\ ,\quad e_{zz} = 550\times10^{-6}\ ,$$
$$e_{xy} = 330\times10^{-6}\ ,\quad e_{zx} = 660\times10^{-6}\ ,\quad e_{yz} = 275\times10^{-6}\ .$$

عين مركبات الانفعال بالنسبة إلى مجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ ، حيث جيوب التمام بينها وبين مجموعة الإحداثيات الأصلية $(o\,x\,y\,z)$ موضحة بالجدول التالي :

	$o\,x$	$o\,y$	$o\,z$
$o\,x'$	$\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{6}{11}$
$o\,y'$	$\frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{7}{11}$
$o\,z'$	$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{6}{11}$

(٣) عين الانفعالات الأساسية وكذلك أكبر انفعال قاصي عند نقطة مركبات الانفعال عندها هى :

$$e_{xx} = 600\times10^{-6}\ ,\quad e_{yy} = 400\times10^{-6}\ ,\quad e_{zz} = 200\times10^{-6}\ ,$$
$$e_{xy} = 400\times10^{-6},\quad e_{yz} = 300\times10^{-6}\ ,\quad e_{zx} = 200\times10^{-6}\ .$$

(٤) عين الانفعالات الأساسية وكذلك الاتجاهات الأساسية ، عند نقطة مركبات الانفعال عندها هى :

$$e_{xx} = 900\times10^{-6}\ ,\quad e_{yy} = 600\times10^{-6}\ ,\quad e_{zz} = 300\times10^{-6}\ ,$$
$$e_{xy} = 300\times10^{-6}\ ,\quad e_{yz} = 300\times10^{-6}\ ,\quad e_{zx} = -600\times10^{-6}\ .$$

(٥) وضح ما إذا كانت هذه المركبات تحقق شروط **Saint - Venant** أم لا .

$$\begin{aligned}
(i)\ \ & e_{xx} = 3x^2 + 4xy - 8y^2\ , & (ii)\ \ & e_{xx} = 12x^2 - 2y^2 + 4z\ ,\\
& e_{yy} = 2x^2 + xy + 3y^2\ , & & e_{yy} = 12y^2 - 12x^2 + 4z\ ,\\
& e_{zz} = 0\ , & & e_{zz} = 12x + 4y - z + 5\ ,\\
& e_{xy} = -x^2 - 12xy - 4y^2\ , & & e_{xy} = 42 - 48xy - 3\ ,\\
& e_{zx} = 0\ , & & e_{yz} = 0\ ,\\
& e_{yz} = 0\ . & & e_{zx} = 4x + 4y - 6\ .
\end{aligned}$$

(٦) إذا كانت مركبات الانفعال عند نقطة في جسم مرن مجهد هي :

$$e_{xx} = ay\ ,\quad e_{yy} = e_{zz} = by\ ,\quad e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} = 0\ .$$

عين مركبات متجه الإزاحة .

(٧) إذا كانت مركبات الازاحة داخل جسم مرن مجهد هي :

$$u = \left(x^2 + y^4 + 2y^2z + yz\right)(10)^{-3}\ ,$$
$$v = \left(xy + xz + 3x^2z\right)(10)^{-3},$$
$$w = \left(y^4 + 4y^3z + 2z^2\right)(10)^{-3}\ .$$

عين الاستطالة الحجمية عند النقطة $(2\,,1\,,2)$.

(٨) إذا كانت مركبات الإنفعال عند نقطة ما داخل جسم مرن مجهد هي :

$$e_{xx} = 990\times(10)^{-6}\,,\quad e_{yy} = 825\times(10)^{-6}\,,\quad e_{zz} = 550\times(10)^{-6}\,,$$
$$e_{xy} = 330\times(10)^{-6}\,,\quad e_{yz} = 660\times(10)^{-6}\,,\quad e_{xz} = 275\times(10)^{-6}\,.$$

عين الاستطالة الحجمية .

(٩) إذا كانت مركبات متجه الإزاحة داخل جسم مرن مجهد هي :

$$u = \frac{1}{2a}\left[z^2 + \sigma\left(x^2 - y^2 \right) \right],\quad v = \frac{\sigma x\, y}{a}\,,\quad w = -\frac{x\, z}{a}\,.$$

(١٠) إذا كانت مصفوفة ممتد الإنفعال عند نقطة ما في جسم مرن مجهد هي :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \times (10)^{-6}$$

عين ثوابت الانفعال التي لا تتغير بتغير المحاور ، ثم أوجد الإنفعالات الأساسية والإتجاهات الأساسية

المناظرة و كذلك أكبر انفعال قاصي .

(١١) حل التمرين السابق ، إذا كانت مصفوفة ممتد الإنفعال هي :

$$I \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times (10)^{-6}\,,\qquad II \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times (10)^{-6}$$

(١٢) أثبت أن العلاقات بين مركبات ممتد الإنفعال ومركبات متجه الإزاحة $U\left(u\,,v\,,w\right)$ في

الإحداثيات الأسطوانية $(\rho\,,\phi\,,z)$ تكون في الصورة

$$e_{\rho\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,,\qquad e_{\rho\phi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{v}{\rho}\right),\qquad e_{\phi\phi} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} + u\right),$$
$$e_{\phi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \phi}\,,\qquad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}\,,\qquad e_{\rho z} = \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\,.$$

.

" الباب الثالث "

القانون الأساسي لنظرية المرونة والمعادلات الأساسية

The fundamental law of the theory of Elasticity and the basic Equations

بند (١) : مقدمة :

كل ما ذكرناه فى الباب الأول و الثانى يمكن تطبيقه على الأجسام المتصلة **Continuous body** ولكن لكى يمكن الحصول على معادلات يمكن بها معرفة حالة الجسم المرن تماما يجب أن نربط بين ما حصلنا عليه فى الباب الأول من مركبات الإجهاد وما حصلنا عليه فى الباب الثانى من مركبات الانفعال .

بند (٢): قانون هوك المعمم Generalized Hook's law

فى عام ١٦٦٠ وضع روبرت هوك **Robert Hook** أول صيغة غير كاملة للقانون الذى يربط بين الإجهاد والانفعال الحادث فى جسم مرن الذى صاغه فى الصورة :

"التغير فى شكل الجسم المرن يتناسب مع القوى المؤثرة عليه "

ومثل هذه الصيغة سوف تعطى تفسير محدود فى حالة القوة التي تؤثر علي الجسم والتغير الناتج عنها فى شكل الجسم ، ويمكن وصف كل منها بكمية واحدة.

فمثلاً : إذا كان لدينا قضيب اسطواني الشكل رفيع يحدث فيه تمدد نتيجة تأثير قوة محورية فى اتجاه محوره وبذلك يمكن أن تحدد القوة المؤثرة عليه بالمقدار F ، مثلاً ، والتغير فى الشكل بالتمدد $\Delta\ell$ من القضيب . فى هذه الحالة يأخذ قانون هوك الصورة :

$$\Delta L = C\, F \tag{3.1}$$

حيث C ثابت يعتمد على الطول الأصلي للقضيب L ومساحة مقطع القضيب S وكذلك نوع مادة القضيب . ويمكن وضع هذا الثابت فى الصورة :

$$C = \frac{L}{E\, S} \tag{3.2}$$

حيث E ثابت يتوقف على مادة القضيب ويسمى ثابت المرونة .

وقد أثبتت التجارب العملية أن قانون هوك يتفق تماماً مع سلوك كثير من الأجسام بشرط أن التغير الحادث فى الشكل يكون ضئيلاً جداً ، ولكن بالنسبة للتغيرات المحدودة ، الغير ضئيلة ، فإن صيغة القانون تكون غير صالحة تماماً ، كما أنه فى حالة التغيرات الضئيلة فإن قانون هوك ، الذي يعبر عنه رياضياً بالمعادلتين (3.1) ، (3.2) ، لا يعطى صورة حقيقية عما يحدث بالنسبة للجسم ، وذلك لأن حالتي الإجهاد والانفعال توصف كل منهما بواسطة ست مركبات ، كما أن هذه المركبات تتغير من نقطة إلى أخرى ،

ولذلك يمكن القول أننا نتعامل مع مالانهاية من الكميات التي تصف حالة الجسم ولذلك يجب أن يوضع قانون هوك فى صورة شاملة وعامة بحيث يمكن بها التعامل مع هذه الكميات ويكون التعميم الطبيعى لقانون هوك هو جعل العلاقة بين مركبات الإجهاد ومركبات الإنفعال في صورة معادلات خطية .

وينص قانون هوك المعمم على أن :

" مركبات الإجهاد عند أي نقطة من جسم مرن تكون دوال خطية متجانسة فى مركبات الانفعال عند نفس النقطة ، والعكس صحيح ، أي أن مركبات الانفعال عند أي نقطة تكون دوال خطية ومتجانسة فى مركبات الإجهاد عند نفس النقطة " .

وكان أول من صاغ قانون هوك فى صورته المعممة هو كوشى A. L. Cauchy فى عام ١٨٢٢ ، وهذا القانون يعبر عنه رياضياً كالآتي:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy} + c_{13}e_{zz} + 2c_{14}e_{xy} + 2c_{15}e_{zx} + 2c_{16}e_{yz}\ ,\\
\sigma_{yy} &= c_{21}e_{xx} + c_{22}e_{yy} + c_{23}e_{zz} + 2c_{24}e_{xy} + 2c_{25}e_{zx} + 2c_{26}e_{yz}\ ,\\
\sigma_{zz} &= c_{31}e_{xx} + c_{32}e_{yy} + c_{33}e_{zz} + 2c_{34}e_{xy} + 2c_{35}e_{zx} + 2c_{36}e_{yz}\ ,\\
\tau_{xy} &= c_{41}e_{xx} + c_{42}e_{yy} + c_{43}e_{zz} + 2c_{44}e_{xy} + 2c_{45}e_{zx} + 2c_{46}e_{yz}\ ,\\
\tau_{xz} &= c_{51}e_{xx} + c_{52}e_{yy} + c_{53}e_{zz} + 2c_{54}e_{xy} + 2c_{55}e_{zx} + 2c_{56}e_{yz}\ ,\\
\tau_{yz} &= c_{61}e_{xx} + c_{62}e_{yy} + c_{63}e_{zz} + 2c_{64}e_{xy} + 2c_{65}e_{zx} + 2c_{66}e_{yz}\ .
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

حيث الكميات $c_{ij}\ \left(i\ ,j = 1,2,3,...,6\right)$ ثوابت ، وتسمى ثوابت المرونة Elastic constants ، أي أنها لا تعتمد على مركبات الإجهاد والانفعال عند النقطة المأخوذة .

كذلك يمكن التعبير عن مركبات الانفعال $e_{xx}\ ,e_{yy}\ ,e_{zz}\ ,e_{xy}\ ,e_{zx}\ ,e_{yz}$ كدوال خطية متجانسة فى مركبات الإجهاد $\sigma_{xx}\ ,\sigma_{yy}\ ,\sigma_{zz}\ ,\tau_{xy}\ ,\tau_{zx}\ ,\tau_{yz}$.

المعادلات (3.3) يمكن حلها والشرط اللازم لذلك هو $\left|c_{ij}\right| \neq 0$ ، أي أن الشرط اللازم لكي يكون للمعادلات (3.3) حل هو أن تختلف قيمة محدد المعاملات عن الصفر .

إذا تغيرت ثوابت المرونة من نقطة إلى أخرى فى الجسم فيقال أن الجسم غير متجانس Non – Homogenous

أما إذا كانت ثابتة بالنسبة لجميع نقاط الجسم فيقال أن الجسم متجانس Homogenous .

المعادلات (3.3) تحتوى على 36 ثابت مرونة ، ولكن لإعتبارات بنيت على أساس مبدأ ثبوت الطاقة وكون طاقة الوضع تتغير بتغير شكل الجسم ، فإن العلاقة الآتية يجب أن تحقق :

$$c_{ij} = c_{ji}\ \left(i\ ,j = 1,2,...,6\right) \qquad (3.4)$$

أي أن هذه الثوابت متماثلة ، وبذلك يمكن اختزال عدد الثوابت إلى 21 ثابت فقط .

بند (٣) : الأجسام الأيزوتروبك (سوية الخواص) Isotropic Bodies

يقال ان الجسم سوي الخواص (Isotropic) إذا كانت خواص الجسم متشابهة فى جميع الاتجاهات المأخوذة داخل الجسم ، أو ، بمعنى آخر ، إذا ما قطع حجم ما من الجسم الأيزوتروبك على هيئة مكعب مثلاً فإن هذا الحجم لا يختلف عن أي حجم آخر ، له نفس الشكل ، مأخوذ من جزء آخر من الجسم . مثال ذلك بعض أنواع الزجاج وبعض أنواع البلاستك ، بينما الخشب ليس من الأجسام الأيزوتروبك وذلك لأنه إذا ما أخذنا مقطع فى الاتجاه الطولى للألياف فإنه يختلف تماما من ناحية الصفات عن مقطع آخر مأخوذ فى الاتجاه العرضى . ويجب الإشارة إلى أن الأجسام الأيزوتروبك غير موجودة فى الطبيعة ولكن تم الحصول عليها بواسطة التكنولوجيا الحديثة .

يقال للجسم أنه متجانس Homogenous إذا كان صفات عنصر الحجم المأخوذة من أجزاء مختلفة من الجسم واحدة . والجدير بالذكر أن هناك بعض الأجسام التي تحقق صفة ما (الأيزوتروبك أوالتجانس) بالنسبة لخاصية ما (المرونة أو الكثافة) ولكن فى ذات الوقت لاتحققها بالنسبة للخاصية الأخرى .

سوف تقتصر دراستنا هنا على الأجسام الأيزوتروبك والمتجانسة من ناحية سلوكها كمادة مرنة ، ورياضياً يعبر عن هذه الخصائص بأن المعاملات $c_{ij}\ (i\,,\,j=1,2,3,\ldots,6)$ الموجودة فى المعادلات (3.3) لا تتوقف على اتجاه المحاور ولا على موضع النقطة $(\,x\ ,\ y\ ,\ z\,)$ محل الدراسة ، وبناء على هذه الخصائص سوف تأخذ المعادلات (3.3) صورة بسيطة ، كما سنرى .

عند أي نقطة من الجسم الأيزوتروبك المحاور الأساسية للإجهاد والانفعال تكون منطبقة :

بفرض أن المحاور الأساسية للانفعال تكون فى اتجاه محاور الإحداثيات ، أي أن

$$e_{xy}=e_{yz}=e_{zx}=0$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة من المعادلات (3.3) ، نجد أن

$$\tau_{yz}=A\,e_{xx}+B\,e_{yy}+C\,e_{zz}\ , \qquad (3.5)$$

حيث $A\ ,\ B\ ,\ C$ ثوابت . بأخذ المحاور الجديدة $\overrightarrow{o\,x'}\ ,\overrightarrow{o\,y'}\ ,\overrightarrow{o\,z'}$ والتي يمكن الحصول عليها من المحاور الأصلية وذلك بالدوران بزاوية 180° حول المحور $\overrightarrow{o\,z}$. أي أن المحور $\overrightarrow{o\,z'}$ سينطبق على المحور $\overrightarrow{o\,z}$ بينما المحاور $\overrightarrow{o\,x'}\ ,\overrightarrow{o\,y'}$ سوف تكون فى الاتجاه العكسي لكل من $\overrightarrow{o\,x}\ ,\overrightarrow{o\,y}$ ، على التوالي ، وحيث أن الثوابت $A\ ,\ B\ ,\ C$ لا تعتمد على اختيار المحاور ، لذلك يكون لدينا بالنسبة للمحاور الجديدة :

$$\tau_{y'z'}=A\,e_{x'x'}+B\,e_{y'y'}+C\,e_{z'z'}\,. \qquad (3.6)$$

وحيث أن $e_{x'x'}=e_{xx}\ ,\ e_{y'y'}=e_{yy}\ ,\ e_{z'z'}=e_{zz}$ ، لذلك تصبح المعادلة (3.6) فى الصورة :

$$\tau_{y'z'}=A\,e_{xx}+B\,e_{yy}+C\,e_{zz} \qquad (3.7)$$

وحيث أن

$$\tau_{y'z'} = -\tau_{yz} \qquad (3.8)$$

بذلك نحصل من المعادلات(3.8) , (3.7) , (3.6) على

$$A e_{xx} + B e_{yy} + C e_{zz} = -A e_{xx} - B e_{yy} - C e_{zz}$$

وهذه المعادلة لاتتحقق إلا إذا كان $A = B = C = 0$ ، وبالتالي فإن

$$\tau_{yz} = 0 , \qquad (3.9)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0 \qquad (3.10)$$

أي أن المحاور الأساسية للانفعال هي ذاتها المحاور الأساسية للإجهاد .

<u>العلاقة بين المركبات الأساسية للإجهاد والانفعال عند أى نقطة فى الجسم المرن الأيزوتروبك :</u>

من قانون هوك المعمم ، عندما تكون المحاور محاور أساسية ، فإن :

$$\sigma_{xx} = a e_{xx} + b e_{yy} + c e_{zz} , \qquad (3.11)$$

حيث a , b , c ثوابت .

بتدوير المحاور الأساسية زاوية 90° حول المحور $\overrightarrow{o x}$ ، نحصل على :

$$\sigma_{x'x'} = a e_{x'x'} + b e_{y'y'} + c e_{z'z'} . \qquad (3.12)$$

ولكن فى هذه الحالة يكون لدينا :

$$e_{x'x'} = e_{xx} , \; e_{y'y'} = e_{zz} , \; e_{z'z'} = e_{yy} , \; \sigma_{x'x'} = \sigma_{xx} . \qquad (3.13)$$

من(3.13) , (3.12) , (3.11) ، نحصل على $b = c$ ، وبذلك فإن :

$$\sigma_{xx} = a e_{xx} + b\left(e_{yy} + e_{zz}\right) = b\left(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}\right) + (a - b) e_{xx}$$

بوضع $a - b = 2\mu , b = \lambda$ ، في المعادلة السابقة ، نجد أن

$$\sigma_{xx} = \lambda\left(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}\right) + 2\mu e_{xx} = \lambda\theta + 2\mu e_{xx} \qquad (3.14)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu e_{yy} , \; \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu e_{zz} \qquad (3.15)$$

من المعادلات (3.15) , (3.14) ، نستنتج أن

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu e_1 , \; N_2 = \lambda\theta + 2\mu e_2 , \; N_3 = \lambda\theta + 2\mu e_3 , \qquad (3.16)$$

حيث e_1 , e_2 , e_3 هي المركبات الأساسية للانفعال ،

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3 , \qquad (3.17)$$

$N_1 \, , N_2 \, , N_3$ **هي المركبات الأساسية للإجهاد .**

<u>إيجاد العلاقة بين كل من مركبات الإجهاد القاصى ومركبات الانفعال القاصى :</u>

بضرب المعادلات (3.16) **على التوالي بالكميات** $\xi'^2 \, , \, \eta'^2 \, , \, \zeta'^2$ **(حيث** $\xi' \, , \, \eta' \, , \, \zeta'$ **تمثل مركبات المتجه الاختياري** $\vec{\mathrm{P}}$ **بالنسبة إلى مجموعة الإحداثيات** $o\,x'\,y'\,z'$ **) والجمع نحصل على :**

$$N_1 \xi'^2 + N_2 \eta'^2 + N_3 \zeta'^2 = \lambda \theta \left(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \right) + 2\mu \left(e_1 \xi'^2 + e_2 \eta'^2 + e_3 \zeta'^2 \right) \qquad (3.18)$$

وبالنقل من مجموعة الإحداثيات $o\,x'\,y'\,z'$ **إلى مجموعة الإحداثيات** $o\,x\,y\,z$ **، نجد أن الكمية** $N_1 \xi'^2 + N_2 \eta'^2 + N_3 \zeta'^2$ **تنقل إلى** $\sigma_{xx} \, \xi^2 + \sigma_{yy} \, \eta^2 + \sigma_{zz} \, \zeta^2 + 2\tau_{xy} \, \xi\eta + 2\tau_{zx} \, \xi\zeta + 2\tau_{yz} \, \eta\xi$ ،

كذلك الكمية $e_1 \xi'^2 + e_2 \eta'^2 + e_3 \zeta'^2$ **تنقل على**

$$e_{xx} \, \xi^2 + e_{yy} \, \eta^2 + e_{zz} \, \zeta^2 + 2e_{xy} \xi\eta + 2e_{xz} \, \xi\zeta + 2e_{yz} \, \eta\zeta$$

وكذلك $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ، $\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_1 + e_2 + e_3$ **وبالتالي فإن :**

$$\sigma_{xx} \, \xi^2 + \sigma_{yy} \, \eta^2 + \sigma_{zz} \, \zeta^2 + 2\tau_{xy} \, \xi\eta + 2\tau_{zx} \, \xi\zeta + 2\tau_{yz} \, \eta\zeta = \lambda \theta \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right) +$$
$$+ 2\mu \left(e_{xx} \, \xi^2 + e_{yy} \, \eta^2 + e_{zz} \, \zeta^2 + e_{xy} \, \xi\eta + 2e_{zx} \, \xi\zeta + 2e_{yz} \, \eta\zeta \right). \qquad (3.19)$$

المتساوية (3.19) **صالحة لجميع قيم** ξ, η, ζ **، وبمساواة معاملات كل من** $\zeta^2, \eta^2, \xi^2, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta$ **نحصل على :**

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu e_{xx} \;, \; \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu e_{yy} \;, \; \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu e_{zz} \;, \\ &\tau_{xy} = 2\mu e_{xy} \;, \qquad \tau_{zx} = 2\mu e_{zx} \;, \qquad \tau_{yz} = 2\mu e_{yz} \;, \end{aligned} \qquad (3.20)$$

حيث

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \; . \qquad (3.21)$$

المعادلات (3.20) **تعطى العلاقة بين مركبات الإجهاد ومركبات الانفعال بدلالة الثوابت** $\lambda \, , \, \mu$ **، التي تسمى بثوابت المرونة أو ثوابت لامي Lama's constant وهي معلومة لمعظم المواد المرنة سوية الخواص . وبالتالي فإن المعادلات** (3.20) **تمثل قانون هوك المعمم بالنسبة للجسم المرن الأيزوتروبك المتجانس سوي الخواص .**

بجمع الثلاث معادلات الأولى فى (3.20)**نحصل على :**

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = (3\lambda + 2\mu)\theta \, , \qquad (3.22)$$

وهذه المعادلة قابلة للحل بشرط أن $3\lambda + 2\mu \neq 0$ **، وكذلك الثلاث معادلات الأخيرة فى** (3.20) **قابلة للحل بشرط أن** $\mu \neq 0$ **.**

وحيث أن $\lambda > 0$, $\mu > 0$ دائما بالنسبة لجميع المواد المرنة ، بذلك يمكن الحصول من (3.20) , (3.22) على :

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right), \\
e_{yy} &= \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}\right), \\
e_{zz} &= \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right), \\
e_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\tau_{xy}, \quad e_{zx} = \frac{1}{2\mu}\tau_{zx}, \quad e_{yz} = \frac{1}{2\mu}\tau_{yz}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

<u>بند (٤) : المعادلات الأساسية لإستاتيكا الجسم المرن الأيزوتروبك:</u>

من الممكن الآن كتابة مجموعة المعادلات الأساسية لإستاتيكا الجسم المرن الأيزوتروبك وهي تتكون من مجموعة معادلات الاتزان التي حصلنا عليها فى الباب الأول ، ومجموعة المعادلات التي تمثل العلاقة بين مركبات الإجهاد ومركبات الانفعال التي حصلنا عليها فى البند السابق ، وبذلك فإن مجموعة المعادلات الأساسية لإستاتيكا الجسم المرن الأيزوتروبك هي :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu e_{yy}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu e_{zz}, \\
&\tau_{xy} = 2\mu e_{xy}, \quad \tau_{xz} = 2\mu e_{xz}, \quad \tau_{yz} = 2\mu e_{yz},
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

حيث

$$
\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \tag{3.26}
$$

كذلك مركبات الانفعال بدلالة مركبات الإزاحة (u, v, w) هي :

$$
\begin{aligned}
&e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\
&e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

كذلك مركبات الإجهاد المؤثر عند نقطة من مستوى العمودي عليه $\vec{n}$ هي :

$$T_{nx} = \sigma_{xx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \tau_{xy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \tau_{zx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right),$$
$$T_{ny} = \tau_{xy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \sigma_{yy} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \tau_{yz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right),$$
$$T_{nz} = \tau_{zx} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right) + \tau_{yz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right) + \sigma_{zz} \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right). \qquad (3.28)$$

ونلاحظ أن المعادلات (3.25) , (3.24) معادلات خطية ومتجانسة فى مركبات الإزاحة (u, v, w) ، وكذلك مركبات الإجهاد $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \ldots, \tau_{yz}$ وكذلك القوى الحجمية X, Y, Z ، فإذا كان مثلاً

$$u', v', w', \sigma_{x'x'}, \ldots, \tau_{y'z'} \;؛\; u'', v'', w'', \sigma_{x''x''}, \ldots, \tau_{y''z''}$$

تمثلان حلان مختلفان للمعادلات $(3.25),(3.24)$ مناظرة للقوى الحجمية

$$x', y', z', x'', y'', z''$$

فيكون الحل :

$$u = u' + u'', \qquad v = v' + v'', \qquad w = w' + w'',$$
$$\sigma_{xx} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{x''x''}, \qquad \ldots, \qquad \tau_{yz} = \tau_{y'z'} + \tau_{y''z''}.$$

يمثل الحل لذات مجموعة المعادلات $(3.25),(3.24)$ ولكن مناظر للقوى الحجمية

$$X' + X'', \quad Y' + Y'', \quad Z' + Z''$$

ويقال أن هذا الحل حصلنا عليه بواسطة تركيب الحلين الأولين .

<u>بند (٥) : الحالات البسيطة للاتزان المرن والثوابت الأساسية للمرونة :</u>

كثيراً من الحالات البسيطة لاتزان الأجسام المرنة يمكن اعتبارها ، ومنها يمكن معرفة المعنى الطبيعى للثوابت التي تصف خواص الأجسام المرنة .

لوحظ أنه فى حالة غياب القوى الحجمية ، بمعنى أنه إذا كان

$$X = Y = Z = 0 \qquad (3.29)$$

فإن المعادلات الإستاتيكية للجسم المرن يمكن أن تتحقق وخاصة بفرض أن مركبات الانفعال $e_{xx}, \ldots, e_{yz}$ تكون ثوابت اختيارية ، فى الواقع بواسطة المعادلات (3.25) مركبات الإجهاد سوف تكون أيضاً ثوابت ، وبالتالى المعادلات (3.24) سوف تتحقق ، وذلك بفرض أن $X = Y = Z = 0$ وكذلك شروط التوافق المذكورة فى الباب الثانى سوف تحقق أيضا ، وحيث أنه يمكن إيجاد المركبات u, v, w التي تناظر مركبات الانفعال المعطاة ، لذلك نعتبر الآن الحالة البسيطة الآتية :

$$\sigma_{xx} = \mathrm{T} = const., \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0. \qquad (3.30)$$

باستخدام المعادلات (3.23) ، نجد أن

$$e_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\mathrm{T}\,, \quad e_{yy} = e_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\mathrm{T}\,, \tag{3.31}$$

$$e_{xy} = e_{zx} = e_{yz} = 0\,. \tag{3.32}$$

بفرض أن الجسم المأخوذ عبارة عن اسطوانة محورها موازياً للمحور $\overrightarrow{ox}$ **، وقاعدتيها عموديتان على هذا المحور. وبذلك من المعادلات** (3.28) **، نحصل على**

$$\mathrm{T}_{nx} = \mathrm{T}_{ny} = \mathrm{T}_{nz} = 0 \tag{3.33}$$

على السطح الجانبي للاسطوانة لا يوجد إجهاد ، بينما على القاعدة التي العمودي عليها يكون فى اتجاه المحور $\overrightarrow{ox}$ **، فإن**

$$\mathrm{T}_{nx} = \mathrm{T}\,, \quad \mathrm{T}_{ny} = \mathrm{T}_{nz} = 0\,, \tag{3.34}$$

وعلى القاعدة التي العمودي عليها يكون فى الاتجاه السالب للمحور $\overrightarrow{ox}$ **يكون لدينا :**

$$\mathrm{T}_{nx} = -\mathrm{T}\,, \qquad \mathrm{T}_{ny} = \mathrm{T}_{nz} = 0 \tag{3.35}$$

إذا كانت $\mathrm{T} > 0$ **مثل هذه القوى تسبب شدة فى الاسطوانة ، وإذا كانت** $\mathrm{T} < 0$ **فإن هذه القوى تسبب ضغط ، حيث** T **تمثل الشد المؤثر بالنسبة لوحدة المساحات على قاعدتي الاسطوانة .**

من التجارب العملية وجد أن لقيم $\mathrm{T} > 0$ **، فإن الأسطوانة تتمدد فى اتجاه محورها وينكمش نصف قطرها ، أي أنه عندما** $\mathrm{T} > 0$ **، فإننا نجد أن**

$$e_{xx} > 0\,, \quad e_{yy} < 0\,, \quad e_{zz} < 0 \tag{3.36}$$

من المعادلات (3.31) **يكون لدينا**

$$\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} > 0\,, \quad \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} > 0 \tag{3.37}$$

وحيث أن $\lambda + \mu \neq 0$ **، لذلك ينتج من المعادلة** (3.37) **أن** $\dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} > 0$

بإدخال المصطلحات

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\,, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\,, \tag{3.38}$$

حيث σ **،** E **كميات (ثوابت) موجبة ، تسمى** E **معامل ينج Young's modulus ، وتسمى** σ **نسبة بواسون Poisson's ratio .**

من المعادلة الأولى من (3.31) **، نجد أن**

$$\mathrm{T} = E\, e_{xx} \tag{3.39}$$

أي أن المعنى الطبيعى للثابت E **هو النسبة بين الإجهاد المؤثر والانفعال الحادث فى أتجاه محورالاسطوانة**

من المعادلة الثابتة من (3.31) ، نجد أن

$$\frac{|e_{yy}|}{|e_{xx}|} = \frac{|e_{zz}|}{|e_{xx}|} = \delta \qquad (3.40)$$

أي أن المعنى الطبيعى للثابت σ هو النسبة بين الإنفعال العرضى إلى الإنفعال الطولي ، وهي لا تعتمد على شكل مقطع الاسطوانة ولا على مقدار الإجهاد المؤثر .

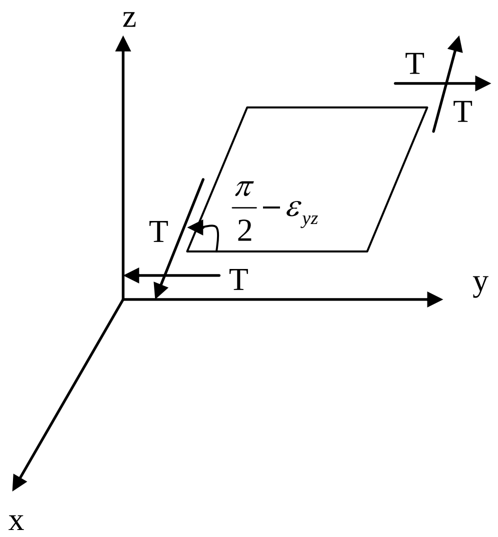
نعتبر حالة أخرى وهي الحالة الخاصة الآتية :

$$\tau_{yz} = \mathrm{T} = const., \qquad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0 \qquad (3.41)$$

من المعادلات (3.23) ، نحصل على :

$$e_{yz} = \frac{1}{2\mu}T \ , \qquad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = e_{zx} = 0 \qquad (3.42)$$

أي أن التشويه عبارة عن تشويه نقي .



فإذا كان الجسم المأخوذ قبل التغير في الشكل عبارة عن متوازي مستطيلات قائم الزاوية وجوانبه موازية لمحاور الإحداثيات ، فإنه من المعادلات (3.42) نجد أن الجوانب

المتعامدة على المحور $\overrightarrow{ox}$ تكون خالية من الاجهادات ، والإجهاد الذي يقع على الجوانب الأخرى من سوف يؤدي إلى قوى قاصة Shearing force ، عندما $T > 0$ ، كما هو موضح بشكل (١) ، حيث أن مقطع واحد فقط مرسوم في المستوى $y - z$ ، والزاوية بين الجوانب التي كانت أصلاً موازية للمستويات $x - y \ , \ y - z$ ، أختلفت عن $\frac{\pi}{2}$ بالمقدار $\varepsilon_{yz} = 2e_{yz}$ ، وبذلك من (3.42) نجد أن

$$\mathrm{T} = \mu\,\varepsilon_{yz} \qquad (3.43)$$

أي أن μ تمثل النسبة بين الإجهاد القاص T والزاوية المناظرة

$$\mu = \frac{\mathrm{T}}{\varepsilon_{yz}} \tag{3.44}$$

ولذلك دائما تسمى μ ثابت المرونة القاصي .

أخيرا نعتبر الحالة الخاصة

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\mathrm{P} = const. , \qquad \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \tag{3.45}$$

فى هذه الحالة نجد أن مركبات الإجهاد التي تؤثر على المستوى العمودي عليه هو $\vec{n}$ تعطى بالمعادلات :

$$\mathrm{T}_{nx} = -\mathrm{P}\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{ox}\right), \ \mathrm{T}_{ny} = -\mathrm{P}\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oy}\right), \ \mathrm{T}_{nz} = -\mathrm{P}\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{oz}\right) \tag{3.46}$$

أي أن متجه الإجهاد $\overrightarrow{\mathrm{T}_n}$ يكون موازياً للعمودي $\vec{n}$ ومقداره $|\vec{\mathrm{P}}|$ ، أي أن المركبة العمودية فقط هي التي تؤثر على المستوى .

إذا كان $\mathrm{P} > 0$ فإن الإجهاد يكون عبارة عن ضغط ، أما إذا كان $\mathrm{P} < 0$ فإن الإجهاد يكون عبارة عن شد .

بجمع الثلاث معادلات الأولى فى (3.20) ، نحصل على :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\theta \tag{3.47}$$

حيث θ تمثل التغير الحجمي ، وبذلك يكون $(-\theta)$ يمثل التقلص الحجمي **Cubical compression** .

بوضع

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{3.48}$$

فإن الثابت k يمثل معامل الضغط **modulus of compression** . من التجارب المعملية وجد أنه لقيم $P > 0$ يحدث تناقص في حجم الجسم ، ولذلك فإن $K > 0$ لجميع المواد .

وبذلك بالإضافة إلى ثوابت المرونة (λ , μ) التي سبق أن عرفناها فى قانون هوك المعمم للجسم المرن الأيزوتروبك ، يكون لدينا الثوابت E , δ , k ويمكن التعبير عن λ , μ بدلالة الثوابت الأخرى في الصورة:

$$\lambda = \frac{E\,\delta}{(1+\delta)(1-2\delta)} , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\delta)} \tag{3.49}$$

وكذلك الثابت k يمكن التعبير عنه بدلالة E , δ فى الصورة :

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} , \tag{3.50}$$

وحيث أن E , k موجبان ، لذلك من المعادلة (3.50) نجد أن :

$$1 - 2\delta > 0 \ \Rightarrow \ \delta < \frac{1}{2}$$

وحيث أن $\delta > 0$ ، لذلك فإن $0 < \delta < \frac{1}{2}$ لجميع المواد .

كذلك من المعادلة (3.49) ، نجد أن $\lambda > 0 \,,\, \mu > 0$ لجميع المواد .

المعادلات (3.23) يمكن كتابتها بدلالة الثوابت $E \,,\, \delta$ فى الصورة :

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \delta\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right], \quad & e_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \delta\left(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\right)\right] \\
e_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \delta\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right], \quad & e_{xy} &= \frac{1+\delta}{E}\tau_{xy} \;, \\
e_{zx} &= \frac{1+\delta}{E}\tau_{zx} \;, & e_{yz} &= \frac{1+\delta}{E}\tau_{yz} \;.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

<u>بند (٦) : المعادلات الديناميكية للأجسام المرنة الأيزوتروبك :</u>

فى حالة ديناميكا الأجسام المرنة نجد أن مركبات الإزاحة لا تكون دالة فى إحداثيات الموضع $(x \,, y \,, z)$ لأي نقطة فقط ، بل تكون أيضاً دالة فى الزمن t ، وبذلك للحصول على المعادلات الديناميكية للأجسام المرنة والتي تسمى معادلات الحركة ، نضيف على معادلات الاتزان المعطاه بالمعادلات (1.4) الموجودة فى الباب الأول ما يشير إلى قوى القصور بالنسبة لوحدة الحجوم ، أي نضيف المقادير

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \,, -\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \,, -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \,, \tag{3.52}$$

حيث ρ تمثل الكثافة الحجمية ، للمعادلات الثلاث ، على الترتيب .

وبذلك يمكن وضع معادلات الحركة فى الصورة:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \,, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \,,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \,.$$

ونلاحظ هنا أن قانون هوك المعمم يظل كما هو فى حالة ديناميكا الجسم المرن ، حيث أن القوى الحجمية لا تظهر فى هذا القانون . لذلك فى حالة الجسم المرن الأيزوتروبك المعادلات $(3.28) \,, (3.27) \,, (3.26) \,, (3.25) \,, (3.24)$ تظل كما هي .

<u>بند (٧) : المعادلات الأساسية بدلالة مركبات الإزاحة :</u>

من المعادلات $(3.27) \,, (3.26) \,, (3.25)$ يمكن كتابة معادلات الاتزان بواسطة مركبات الإزاحة $(u \,, v \,, w)$ ، فى حالة استاتيكا الجسم المرن ، فى الصورة :

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u+X=0\,,\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v+Y=0\,,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w+Z=0\,, \tag{3.54}$$

حيث $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ تسمى مؤثر لابلاس **Lap lace's operator** ، أي أن :

$$\Delta f\left(x,y,z\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \tag{3.55}$$

حيث $f\left(x,y,z\right)$ دالة فى $\left(x,y,z\right)$.

فى حالة ديناميكا الجسم المرن ، معادلات الحركة تأخذ الصورة :

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w+Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,, \tag{3.56}$$

المعادلات(3.56) يمكن وضعها فى الصورة الأتجاهية الآتية :

$$(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{U}\right)+\mu\,\nabla^2\vec{U}+\vec{F}=\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\,, \tag{3.57}$$

حيث

$$\vec{F}\equiv\left(X\,,Y\,,Z\right),\quad \vec{U}=\left(u\,,v\,,w\right),\quad \vec{\nabla}=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\,,$$
$$\vec{\nabla}.\vec{U}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=\theta\,,$$
$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{U}\right)=grad\left(div\,\vec{U}\right),\quad \nabla^2\vec{U}=grad\left(div\,\vec{U}\right)-curl\left(curl\,\vec{U}\right),$$
$$\lambda+\mu=\frac{E\,\delta}{(1+\delta)(1-2\delta)}+\frac{E}{2(1+\delta)}=\frac{E}{2(1+\delta)(1-2\delta)}\,.$$

وبذلك تصبح المعادلة (3.57) فى الصورة :

$$grad\left(div\,\vec{U}\right)-\frac{1-2\delta}{2(1-\delta)}curl\left(curl\,\vec{U}\right)=-\vec{F}\,\frac{(1+\delta)(1-2\delta)}{E\,(1-\delta)}$$

وفى حالة إهمال القوى الحجمية ،أي عندما $\vec{F}=0$ ، تصبح المعادلة فى الصورة :

$$grad\left(div\,\vec{U}\right)-\frac{1-2\delta}{2(1-\delta)}curl\left(curl\,\vec{U}\right)=\vec{0}\,.$$

أو في الصورة :

$$2(1-\delta)\,grad\left(div\,\vec{U}\right)-(1-2\delta)\,curl\left(curl\,\vec{U}\right)=\vec{0}\,.$$

أي أن :

$$2(1-\delta)div\left(grad\left(div\,\vec{U}\right)\right)-(1-2\delta)div\left(curl\left(curl\,\vec{U}\right)\right)=$$
$$=2(1-\delta)\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{U}\right)\right)-(1-2\delta)\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right)\right)=\vec{0}\,.$$

وحيث أن $div\left(curl\left(\vec{A}\right)\right)=\vec{0}$ ، لأي دالة $\vec{A}$ ، لذلك فإن

$$2(1-\delta)\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{U}\right)\right)=2(1-\delta)\nabla^2.\left(\vec{\nabla}.\vec{U}\right)=0\;\Rightarrow\;\nabla^2.\left(\vec{\nabla}.\vec{U}\right)=0$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن الدالة $\vec{\nabla}.\vec{U}\equiv div\,\vec{U}=0$ تمثل دالة توافقية **Harmonic function** .

كذلك من المعادلة (3.57) عندما $\vec{F}=0$ ، وفي حالة الإتزان ، فإن :

$$\nabla^2\vec{U}+\frac{1}{1-2\delta}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{U}\right)=0$$

بالتأثير مرة أخرى بمؤثر لابلاس نجد أن

$$\nabla^2\left(\nabla^2\vec{U}\right)=0$$

وهذا يوضح أنه عند اتزان الجسم المرن الخالي من القوى الجسمية فإن متجه الإزاحة $\vec{U}$ للجسم المرن يحقق المعادلة الثنائية التوافقية .

بند (٨) : المعادلات الأساسية بدلالة مركبات الإجهاد :

أحياناً يكون من المناسب التعامل مع معادلات تحتوى فقط على مركبات الإجهاد ، ليست فقط معادلات الاتزان ومعادلات الحركة ، ولكن باقي المعادلات أيضاً . لذلك فإن المعادلات (3.51) يمكن وضعها فى الصورة:

$$\begin{aligned}
e_{xx}&=\left(\frac{1+\delta}{E}\right)\sigma_{xx}-\frac{\delta}{E}\Theta\,, & e_{yy}&=\left(\frac{1+\delta}{E}\right)\sigma_{yy}-\frac{\delta}{E}\Theta\,,\\
e_{zz}&=\left(\frac{1+\delta}{E}\right)\sigma_{zz}-\frac{\delta}{E}\Theta\,, & e_{xy}&=\left(\frac{1+\delta}{E}\right)\tau_{xy}\,,\\
e_{zx}&=\left(\frac{1+\delta}{E}\right)\tau_{zx}\,, & e_{yz}&=\left(\frac{1+\delta}{E}\right)\tau_{yz}\,,
\end{aligned}\qquad(3.58)$$

حيث $\Theta=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$.

هذه العلاقات يجب أن تحقق شروط التوافق الإنفعالي .

بالتعويض من المعادلات (3.58) في المعادلات (2.69) ، فى الباب الثانى ، نجد أن من المعادلتين الأولى والرابعة من هذه المعادلات ، يمكن كتابتهما في الصورة :

$$\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial y^2}-\frac{\delta}{1+\delta}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)=2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\delta}{1+\delta}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial_z}\right). \qquad (3.59)$$

بالمثل ،بترتيب دوري لكل من $x\,,y\,,z$ ، يمكن الحصول على باقي المعادلات التي تمثل معادلات التوافق الإنفعالي .

المعادلات (3.59) يمكن تبسيطها قليلاً وذلك بمفاضلة المعادلة الثانية بالنسبة إلى y والثالثة بالنسبة إلى z والتعويض فى المعادلات (3.24) والجمع نحصل على :

$$2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

بتفاضل المعادلات الأولى من (3.24) جزئياً بلنسبة لـ x ، نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}$$

بالتعويض من هذه العلاقة فى المعادلة السابقة ، نحصل على :

$$2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2}+2\frac{\partial X}{\partial x}-\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right) \qquad (3.60)$$

بالتعويض من المعادلة (3.60) فى المعادلة الأولى من (3.59) نحصل على :

$$\frac{\partial^2\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)}{\partial y^2}-\frac{\delta}{(1+\delta)}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}=$$

$$=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\frac{\partial X}{\partial x}$$

بالتعويض عن $\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=\Theta-\sigma_{xx}$ ، نحصل على

$$\frac{1}{(1+\delta)}\Delta\Theta-\Delta\sigma_{xx}-\frac{1}{(1+\delta)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\frac{\partial X}{\partial x} \qquad (3.61)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على المعادلتين الأخرتين فى الصورة :

$$\frac{1}{(1+\delta)}\Delta\Theta-\Delta\sigma_{yy}-\frac{1}{(1+\delta)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\frac{1}{(1+\delta)}\Delta\Theta-\Delta\sigma_{zz}-\frac{1}{(1+\delta)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\frac{\partial Z}{\partial z}. \qquad (3.62)$$

بجمع المعادلات الثلاث فى $(3.62)\,,(3.61)$ ، نحصل على

$$\Delta\Theta = -\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right). \qquad (3.63)$$

بالتعويض من المعادلة (3.63) فى المعادلات (3.62) , (3.61) نحصل على :

$$\Delta\sigma_{xx} + \left(\frac{1}{1+\delta}\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x} ,$$

$$\Delta\sigma_{yy} + \left(\frac{1}{1+\delta}\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y} ,$$

$$\Delta\sigma_{zz} + \left(\frac{1}{1+\delta}\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z} . \qquad (3.64)$$

كذلك مرة أخرى بتفاضل المعادلة الثانية بالنسبة إلى z والمعادلة الثالثة بالنسبة إلى y ، من المعادلات (3.24) ، ثم الجمع نحصل على :

$$\frac{\partial^2\tau_{yx}}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial y\,\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right) \qquad (3.65)$$

بإضافة المعادلة (3.65) إلى المعادلة الثانية من (3.59) نحصل على :

$$\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{(1+\delta)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right) \qquad (3.66)$$

وبالمثل يمكن الحصول على المعادلتين الآتيتين

$$\Delta\tau_{zx} + \frac{1}{(1+\delta)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{(1+\delta)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right). \qquad (3.67)$$

أي أن مركبات الإجهاد سوف تحقق المعادلات التسع المبينة في $(3.67),(3.66),(3.64),(3.24)$.

المعادلات $(3.67),(3.66),(3.64)$ تسمى بمعادلات التوافق Compatibility equitation والتي حصل عليها Beltrami- Michel .

<u>بند (٩) : الشروط الأساسية على السطوح :</u>

<u>أولاً : حالة استاتيكا الجسم المرن :</u>

المعادلات الأساسية التي ذكرناها في حالة استاتيكا الجسم المرن تحتوى دائما على الدوال المجهولة $u\ ,v\ ,w\ ,\ \sigma_{xx}\ ,\ \sigma_{yy}\ ,\ .\ .\ .\ ,\tau_{yz}$ وهذه المعادلات تمثل المجموعة الكاملة لمعادلات استاتيكا الجسم المرن وهي تصف وصفاً تماماً حالة الاتزان للجسم المرن إذا ما علمت القوى الخارجية والقوى الداخلية التي تؤثر عليه .

مسائل استاتيكا الجسم المرن تتعرض لكل من :

(١) تعيين حالة الاتزان للجسم المرن إذا ما أعطيت القوى الخارجية التي تؤثر على السطح لهذا الجسم وهذا يعنى تعيين كل من $u , v , w , \sigma_{xx} , \ldots , \tau_{yz}$ والتي تحقق على السطح الشروط الآتية :

$$T_{nx} = f_1 , \quad T_{ny} = f_2 , \quad T_{nz} = f_3 , \tag{3.68}$$

حيث $\vec{n}$ يمثل المتجه العمودي على السطح المحدد للجسم وإلى الخارج ، f_1 , f_2 , f_3 دوال تكون معطاة.

(٢) وصف حالة الاتزان للجسم المرن إذا ما أعطيت الإزاحة للنقاط المكونة لسطح الجسم ، أي أن :

$$u = g_1 , \quad v = g_2 , \quad w = g_3 . \tag{3.69}$$

على السطح ، حيث g_1 , g_2 , g_3 دوال تكون معلومة على السطح المعطي .

(٣) تعيين حالة الاتزان للجسم المرن عندما تعطى مركبات الإجهاد المؤثرة على جزء من سطح الجسم ، ومركبات الإزاحة على جزء آخر من سطح الجسم المرن وتسمى هذه الحالة بالحالة المختلطة من الحالتين (٢) ، (٣) .

ثانياً : حالة ديناميكا الجسم المرن :

المعادلة الأساسية التي حصلنا عليها فى حالة ديناميكا الجسم المرن تحتوى كذلك على تسع دوال يكون مطلوب تعيينهم مع استخدام الشروط التالية على السطح :

(أ) إيجاد الدوال $u(x , y , z) , v(x , y , z) , w(x , y , z)$ والتي تحق معادلات الحركة (3.56)، وتتحقق كذلك الشروط

$$T_{nx} = f_1 , \quad T_{ny} = f_2 , \quad T_{nz} = f_3 \tag{3.70}$$

على سطح الجسم محل الدراسة عند أي لحظة ، وعند $t = t_0$ نجد أن :

$$u = u_0 , v = v_0 , w = w_0 , \frac{\partial u}{\partial t} = u_0^{\cdot} , \frac{\partial v}{\partial t} = v_0^{\cdot} , \frac{\partial w}{\partial t} = w_0^{\cdot} , \tag{3.71}$$

حيث الدوال f_1 , f_2 , f_3 دوال فى الزمن t أيضا ، المعادلات (3.71) تسمى الشروط الحدية **Boundary Conditions** ، بينما المعادلات (3.70) تسمى الشروط الابتدائية **Initial Conditions.**

(ب) الحالة الثانية فى حالة ديناميكا الجسم المرن، تختلف عن الحالة (أ) فى أن الشروط التي على السطح هي :

$$u = g_1 , \quad v = g_2 , \quad w = g_3 , \tag{3.72}$$

حيث g_1 , g_2 , g_3 دوال معروفة على السطح وتكون كذلك دوال فى الزمن t .

(ج) الحالة الثالثة هي خليط من الحالتين السابقتين ، بحيث أن الشروط التي تكون على جزأ من السطح كالآتي :

$$T_{nx} = f_1 \ , \quad T_{ny} = f_2 \ , \quad T_{nz} = f_3 \qquad (3.72)$$

وعلى جزأ آخر من السطح كالآتي :

$$u = g_1 \ , \quad v = g_2 \ , \quad w = g_3 \qquad (3.73)$$

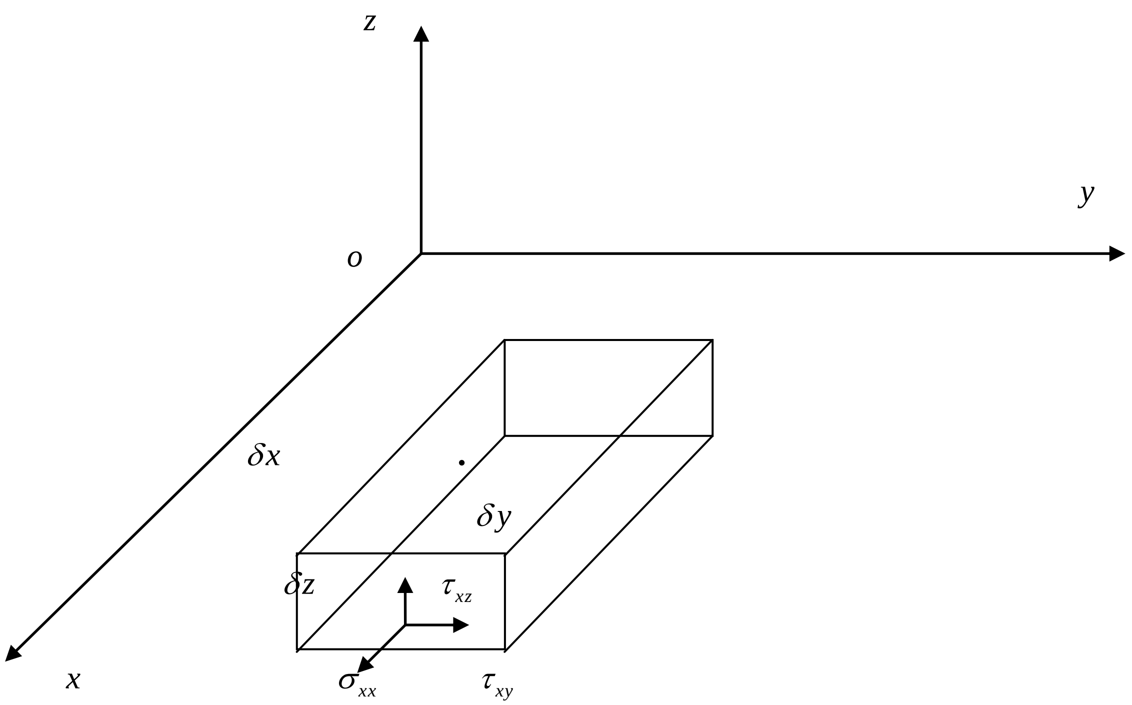
حيث f_1 , f_2 , f_3 ، وكذلك g_1 , g_2 , g_3 دوال معرفة على السطح ، أو على جزء منه ، كما أنها دوال في الزمن t .

بند (١٠) : طاقة جهد الإنفعال :

عندما يتشكل الجسم المرن نتيجة وجود قوى خارجية مؤثرة عليه ، فإن هذه القوى تبذل شغلاً . وإذا فرضنا أن لدينا جسم مثالي المرونة ، أي أنه يعود إلى شكله الأصلي بعد زوال القوى المؤثرة علية ، فإن الجسم يعطي تماماً كمية الشغل التي بذلت بواسطة هذه القوى .

بفرض وجود حالتان انفعاليتان متقاربتان لجسم مرن ، الأولى تتميز بمتجه الإزاحة $\overrightarrow{U} \equiv (u \ , v \ , w)$ ، وممتد الإنفعال $e_{ij} \ (i , j = x , y , z)$ ، والثانية تتميز بمتجه الإزاحة $\overrightarrow{U} + \delta\overrightarrow{U} \equiv (u + \delta u \ , v + \delta v \ , w + \delta w)$ ، وممتد الإنفعال $e_{ij} + \delta e_{ij} \ (i , j = x , y , z)$.

لإيجاد الشغل المبذول لتشكل عنصر صغير على شكل متوازي مستطيلات ابعاده $\delta x \ , \delta y \ , \delta z$ ، وموازية لمحاور الاحداثيات الثلاث $\overrightarrow{ox} , \overrightarrow{oy} , \overrightarrow{oz}$ ، على الترتيب ، كما بشكل (٢) .



شكل (٢)

بفرض أن $\overrightarrow{U}$ هو متجه إزاحة مركز متوازي المستطيلات ، $\tau_{ij}\ ,\ \sigma_{ii}\ \left(i \neq j\ ,\ \left(i\ ,j\ = x\ ,y\ ,z\ \right)\right)$ هي الإجهادات عند مركز متوازي المستطيلات والذي احداثياته هي $\left(x\ ,y\ ,z\right)$.

القوى المؤثرة على الوجه الأمامي $\left(\delta y\ \delta z\right)$ هي :

$$\sigma_{xx} + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\ ,\ \tau_{xy} + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\ ,\ \tau_{xz} + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}$$

وتعمل في إتجاه المحاور الثلاث $\overrightarrow{ox}\ ,\overrightarrow{oy}\ ,\overrightarrow{oz}$ ، على الترتيب .

ومركبات الإزاحة المناظرة هي :

$$u + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\ ,v + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\ ,w + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}$$

القوى المؤثرة على الوجه الخلفي $\left(\delta y\ \delta z\right)$ هي :

$$\sigma_{xx} - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\ ,\ \tau_{xy} - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\ ,\ \tau_{xz} - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}$$

ومركبات الإزاحة المناظرة هي :

$$u - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\ ,v - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\ ,w - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}$$

وبالتالي فإن الشغل المبذوول بهذه القوى هو :

$$\begin{aligned}
&[\left(\sigma_{xx} + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right).\delta\left(u + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\tau_{xy} + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right).\delta\left(v + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\
&+\left(\tau_{xz} + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right).\delta\left(w + \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\sigma_{xx} - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right).\delta\left(u - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \\
&+\left(\tau_{xy} - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right).\delta\left(v - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\tau_{xz} - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right).\delta\left(w - \left(\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)]\delta y\ \delta z\ .
\end{aligned}$$

بالفك والإختصار واهمال الحدود التي من الرتبة الثانية داخل القوس ، نستنتج أن الشغل المبذول بهذه القوى على الوجهين $\left(\delta y\ \delta z\right)$ هو :

$$\left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}.\delta u + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.\delta v + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}.\delta w + \sigma_{xx}.\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \tau_{xy}.\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tau_{xz}.\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\delta x\ \delta y\ \delta z\ .$$

وبذات الطريقة يمكن إيجاد الشغل المبذول بقوى الإجهاد على الوجهين $\left(\delta x\ \delta z\right)$ في الصورة :

$$\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.\delta u + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}.\delta v + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}.\delta w + \tau_{xy}.\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sigma_{yy}.\delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tau_{yz}.\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\delta x\ \delta y\ \delta z\ .$$

وكذلك يمكون الشغل المبذول بقوى الإجهاد على الوجهين $\left(\delta x\ \delta y\right)$ في الصورة :

$$\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}.\delta u+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}.\delta v+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.\delta w+\tau_{xz}.\delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\tau_{yz}.\delta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\sigma_{zz}.\delta\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta x\ \delta y\ \delta z\ .$$

وإذا كانت القوى الحجمية هي $\vec{F}\equiv(X\ ,Y\ ,Z)$ **فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوى هو :**

$$X\ .\delta u+Y\ .\delta v+Z\ .\delta w$$

وبالتالي فإن الشغل المبذول لتشكل العنصر $\delta x\ \delta y\ \delta z$ **هو مجموع الشغل الذي حصلنا عليه ، أي أن :**

$$\begin{aligned}\delta W=[&\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X\right)\delta u+\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y\right)\delta v+\\&+\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+Z\right)\delta w+\sigma_{xx}.\delta(e_{xx})+\sigma_{yy}.\delta(e_{yy})+\\&+\sigma_{zz}.\delta(e_{zz})+2\tau_{xy}.\delta(e_{xy})+2\tau_{xz}.\delta(e_{xy})+2\tau_{yz}.\delta(e_{yz})]\delta v\ ,\end{aligned}$$

حيث δv **هو عنصر الحجم وهو يساوي** $\delta x\ \delta y\ \delta z$ **.**

باستخدام معادلات الإتزان نجد أن :

$$\begin{aligned}\delta W=[&\sigma_{xx}\ \delta u+\sigma_{yy}\ \delta v+\sigma_{zz}\ \delta w+\sigma_{xx}.\delta(e_{xx})+\sigma_{yy}.\delta(e_{yy})+\sigma_{zz}.\delta(e_{zz})+\\&+2\tau_{xy}.\delta(e_{xy})+2\tau_{xz}.\delta(e_{xy})+2\tau_{yz}.\delta(e_{yz})]\delta v\ .\end{aligned}$$

وبالتالي فإن الشغل المبذول العنصر δv **لوحدة الحجوم هو** δU **، حيث**

$$\begin{aligned}\delta U=\frac{\delta W}{\delta V}=&\sigma_{xx}\ \delta u+\sigma_{yy}\ \delta v+\sigma_{zz}\ \delta w+\sigma_{xx}.\delta(e_{xx})+\sigma_{yy}.\delta(e_{yy})+\sigma_{zz}.\delta(e_{zz})+\\&+2\tau_{xy}.\delta(e_{xy})+2\tau_{xz}.\delta(e_{xy})+2\tau_{yz}.\delta(e_{yz})\ .\end{aligned}\qquad(3.74)$$

وحيث أن طاقة جهد الإنفعال تعتمد على الحالة الإنفعالية للجسم المرن ، أي تعتمد على مركبات الإنفعال ، لذلك فإن

$$U=U\left(e_{xx}\ ,e_{yy}\ ,e_{zz}\ ,e_{xy}\ ,e_{zx}e_{yz}\right)$$

بإجراء التفاضل لكلا الطرفين ، نجد أن :

$$\begin{aligned}\delta U=&\frac{\partial U}{\partial e_{xx}}\delta e_{xx}+\frac{\partial U}{\partial e_{yy}}\delta e_{yy}+\frac{\partial U}{\partial e_{zz}}\delta e_{zz}+\\&+2\frac{\partial U}{\partial e_{xy}}\delta e_{xy}+2\frac{\partial U}{\partial e_{zx}}\delta e_{zx}+2\frac{\partial U}{\partial e_{yz}}\delta e_{yz}\ .\end{aligned}\qquad(3.75)$$

لاحظ أنه من التماثل $e_{ij}=e_{ji}\ (i\ ,j=x\ ,y\ ,z)$ **.**

بمقارنة المعادلتين (3.75) , (3.74) **، نجد أن**

$$\sigma_{ii}=\frac{\partial U}{\partial e_{ii}}\ ,\ \tau_{ij}=\frac{\partial U}{\partial e_{ij}}\ ,\ \left((i\ ,j=x\ ,y\ ,z)\ ,\ i\neq j\right).\qquad(3.76)$$

أي أن :

" مركبات ممتد الإجهاد تتعين بتفاضل طاقة جهد الإنفعال لوحدة الكتل ، جزئياً ، بالنسبة لمركبات ممتد الإنفعال ".

تسمى العلاقة (3.76) بعلاقة *جرين* .

بند (١١) : طاقة جهد الإنفعال للأجسام الأيزوتروبك :

لقد أثبتنا في هذا الباب أن المحاور الأساسية للإجهاد والمحاور الأساسية للإنفعال تكون منطبقة عند كل نقطة من نقاط الجسم الجسم المرن الأيزوتروبك ، وبالتالي فإن كل من ممتدي الإجهاد والإنفعال يكون لهما التركيب ذاته .

نستنتج من ذلك أن طاقة الجهد ، لوحدة الحجوم ، للجسم المرن الأيزوتروبك لاتتغير بتغير المحاور ، وبالتالي تكون دالة في الكميات I_1 , I_2 , I_3 التي لاتتغير بتغير المحاور والمعطاه بالمعادلات (1.39) ، في الباب الأول . ومن صيغة جرين المعطاة بالمعادلة (3.76) وقانون هوك المعمم ، المعطي بالمعادلات (3.20) ، يمكن استنتاج أن U دالة تربيعية في مركبات ممتد الإجهاد ، أو مركبات ممتد الإنفعال ، وبالتالي لا تعتمد على I_3 (تحتوي على كميات من الدرجة الثالثة) .

وحيث أن U دالة متجانسة ، لذلك فإنها تأخذ الصورة :

$$U = A\,I_1^2 + B\,I_2 = A\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)^2 + \\ + B\left(\sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2\right), \qquad (3.77)$$

حيث A , B ثوابت .

وهذا يتفق مع ما حصلنا عليه من أن ثوابت المرونة تنخفض إلى اثنين في حالة الأجسام المرنة الأيزوتروبك (سوي الخواص) ، وبالتالي يمكن وضع المعادلة (3.77) في الصورة :

$$U = \left(A + \frac{1}{3}B\right)\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)^2 - \\ - \frac{B}{6}\left[\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2\right)\right]. \qquad (3.78)$$

كذلك يمكن استنتاج أن :

$$e_{ii} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ii}} , e_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \tau_{ij}} , \left(\left(i , j = x , y , z\right) , i \neq j\right). \qquad (3.79)$$

بتفاضل المعادلة (3.78) ، جزئياً بالنسبة لمركبات الإجهاد ، واستخدام المعادلة (3.79) ، نحصل على :

$$e_{xx} = 2A\,\sigma_{xx} + \left(2A + B\right)\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right), \\ e_{yy} = 2A\,\sigma_{yy} + \left(2A + B\right)\left(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\right), \\ e_{zz} = 2A\,\sigma_{zz} + \left(2A + B\right)\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right), \\ e_{xy} = -B\,\tau_{xy} \,,\; e_{zx} = -B\,\tau_{zx} \,,\; e_{yz} = -B\,\tau_{yz} \,. \qquad (3.80)$$

وحيث أن U موجبة دائماً ، لذلك ينتج من المعادلة (3.78) أن

$$\left(A+\frac{1}{3}B\right)>0\ ,\ B<0\Rightarrow A>0$$

بمقارنة المعادلات (3.80) ، (3.51) نستنتج أن

$$A=\frac{1}{2E}\ ,\ B=-\left(\frac{1+\delta}{E}\right)$$

وبالتالي المعادلة (3.78) يمكن كتابتها في الصورة :

$$U=\left(\frac{1-2\delta}{6E}\right)\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{1+\delta}{6E}\right)\left[\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{xx}-\sigma_{zz}\right)^2+\left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{yz}^2\right)\right].\ (3.81)$$

المعادلة (3.81) تعطينا العلاقة بين طاقة الجهد للإنفعال ومركبات الإجهاد في حالة الجسم المرن الأيزوتروبك (سوي الخواص) .

<u>مثالـ ١ ـــ :</u>

إذا كانت مركبات ممتد الانفعال عند نقطة في جسم مرن أيزوتروبك مجهد هي :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\times(10)^{-3}$$

وكانت ثوابت المرونة هي :

$$\delta=0.3\ ,\quad E=208Gpa.$$

عين مركبات ممتد الإجهاد ، ثم أوجد طاقة الجهد للإنفعال .

<u>الحلـــــــــ :</u>

العلاقة بين مركبات والإجهاد ومركبات الإنفعال ، سبق أن حصلنا عليها في الصورة :

$$\sigma_{xx}=\lambda\theta+2\mu e_{xx}\ ,\quad \sigma_{yy}=\lambda\theta+2\mu e_{yy}\ ,\quad \sigma_{zz}=\lambda\theta+2\mu e_{zz}\ ,$$
$$\tau_{xy}=2\mu e_{xy}\ ,\qquad \tau_{xz}=2\mu e_{xz}\ ,\qquad \tau_{yz}=2\mu e_{yz}\ ,$$

حيث

$$\theta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}$$

الثابتان $\lambda\ ,\ \mu$ يمكن تعيينهما ، كالآتي :

$$\lambda = \frac{\delta E}{(1+\delta)(1-2\delta)} = \frac{0.3\times 208}{1.3\times 0.4} = \frac{6240}{52} = 120 Gpa. ,$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\delta)} = \frac{208}{2\times 1.3} = \frac{208}{2.6} = 80 Gpa.$$

بالتعويض بقيمتى λ , μ وقيم مركبات الإنفعال ، في المعادلات السابقة ، نحصل على :

$$\sigma_{xx} = 0.92\ Gpa. , \quad \sigma_{yy} = 1.08\ Gpa. , \quad \sigma_{zz} = 0.6\ Gpa. ,$$
$$\tau_{xy} = 0.16\ Gpa. , \quad \tau_{xz} = 0\ Gpa. , \quad \tau_{yz} = 0.64\ Gpa.$$

وهذه هي مركبات ممتد الإجهاد .

لإيجاد طاقة الجهد للإنفعال (U) ، نعوض بالقيم السابقة في المعادلة

$$U = \left(\frac{1-2\delta}{6E}\right)\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)^2 +$$
$$+\left(\frac{1+\delta}{6E}\right)\left[\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{xx}-\sigma_{zz}\right)^2+\left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{yz}^2\right)\right]$$

فنجد أن

$$U = \left(\frac{0.4}{1248}\right)(2.6)^2 + \left(\frac{1.3}{1248}\right)\left[6\left((0.16)^2 + (0.64)^2\right) + (0.16)^2 + (0.48)^2 + (0.32)^2\right]$$
$$\simeq (5.19)\times(10)^{-3}\ Gpa.$$

<u>مثالــ ٢ ـــ :</u>

إذا كانت مركبات ممتد الاجهاد عند نقطة في جسم مرن أيزوتروبك مجهد هي :

$$\sigma_{xx} = k\,y^2 , \quad \sigma_{yy} = -k\,x^2 , \quad \sigma_{zz} = 0 , \quad \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 ,$$

حيث k مقدار ثابت .

عين مركبات الإزاحة $u(x,y)$, $v(x,y)$.

<u>الحلـــــــــ :</u>

لتعيين مركبات الإنفعال بمعلومية مركبات الإجهاد ، نستخدم العلاقات :

$$e_{xx} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right) ,$$
$$e_{yy} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}\right) , \qquad e_{xy} = \frac{1}{2\mu}\tau_{xy} .$$

بالتعويض بالقيم المعطاه لكل من e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} ، نحصل على

$$e_{xx} = \frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)y^2 + \frac{1}{2}\lambda x^2\right], \; e_{yy} = -\frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)x^2 + \frac{1}{2}\lambda y^2\right].$$

وحيث أن

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)y^2 + \frac{1}{2}\lambda x^2\right],$$

ومنها

$$u = \frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)y^2 x + \frac{1}{6}\lambda x^3\right] + c_1(y)\ ,$$

كذلك

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)x^2 + \frac{1}{2}\lambda y^2\right],$$

ومنها

$$v = -\frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)x^2 y + \frac{1}{6}\lambda y^3\right] + c_2(x)\ ,$$

حيث $c_1(y)\ , c_2(x)$ ثابتا التكامل .

$$\because e_{xy} = \frac{1}{2\mu}\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\ , \left(\tau_{xy} = 0\right)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وحيث أن

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2k\,(\lambda+\mu)x\,y}{\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{d\,c_1(y)}{d\,y}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2k\,(\lambda+\mu)x\,y}{\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{d\,c_2(x)}{d\,x}\ .$$

لذلك فإن

$$\frac{d\,c_1(y)}{d\,y} = -\frac{d\,c_2(x)}{d\,x}$$

وهذا يتحقق عندما $c_1\ , c_2$ يكونان ثابتان عدديان ، أي أن :

$$u = \frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)y^2 x + \frac{1}{6}\lambda x^3\right] + c_1\ ,$$

$$v = -\frac{k}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)x^2 y + \frac{1}{6}\lambda y^3\right] + c_2\ ,$$

" تمـــــــــــــارين "

(١) إذا كانت مركبات متجه الإزاحة ، في جسم مرن مجهد ، تعطى بالعلاقات الآتية :

$$u=\left(x^2+10\right)\times(10)^{-2}\ ,\ v=\left(2x\,y\right)\times(10)^{-2}\ ,\ w=\left(z^2-x\,y\right)\times(10)^{-2}$$

عين مركبات الإنفعال ومركبات الإجهاد عند أي نقطة $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ ، ثم عند النقطة $(0\ ,\ 2\ ,1)$.

وأوجد كذلك طاقة الوضع الداخلي الكلية للإنفعال .

(٢) عند نقطة في جسم مرن مجهد ، كانت النسبة بين مركبات الإنفعال الأساسية هي $3:4:5$ ، فإذا كان أكبر إجهاد أساسي هو $\sigma_1=140\,Mpa.$. أوجد النسبة $\sigma_3:\sigma_2:\sigma_1$ ، وكذلك قيم $\sigma_3\ ,\ \sigma_2$ ، إذا علمت أن ثوابت المرونة لهذا الجسم هي $\delta=0.3\ ,\ E=208\,Gpa.$.

(٣) إذا كانت كانت المركبات الكارتيزية للإنفعال ، في جسم مرن مجهد ، هي :

$$e_{xx}=3x^2\ ,\quad e_{yy}=0\ ,\quad e_{zz}=2z\ ,\quad e_{xy}=3x\,y+z\ ,\quad e_{zx}=e_{yz}=-\frac{1}{2}y\ .$$

وضح م إذا كانت هذه المركبات تحقق شروط التوافق الإنفعالي أم لا ، وإن كانت تحقق ، عين مركبات ممتد الإجهاد بدلالة ثوابت لامي $\lambda\ ,\ \mu$.

(٤) إذا كانت مركبات متجه الإزاحة ، في جسم مرن مجهد ، تعطى بالعلاقات الآتية :

$$u=\frac{\gamma}{2E}\left(2ax-x^2-\delta y^2\right),\quad v=-\frac{\gamma}{2E}(a-x)y\ .$$

عين مركبات الإنفعال والإجهاد عند أي نقطة $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ ، حيث γ هي الوزن النوعي للجسم .

(٥) إذا كانت كانت مركبات الإنفعال ، في قضيب مرن مجهد ، هي :

$$e_{xx}=e_{yy}=e_{zz}=e_{xy}=0\ ,\quad e_{zx}=k\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\ ,\ e_{yz}=-k\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\ ,$$

حيث $\phi\equiv\phi(x\ ,y)$ ، k ثابت ، ثم وضح أن هذة الحالة الإنفعالية هي حالة واقعية (تحقق شروط التوافق الإنفعالي) ، وأوجد طاقة الوضع الداخلي الكلية للإنفعال .

.

" المحتـــويــات :

الباب الأول " تحليل الإجهاد "

الباب الثـانى " تحليل الانفعال "

الباب الثالث " القانون الأساسي لنظرية المرونة والمعادلات الأساسية "

نظرية المرونة

"Elasticity Theory"

إعداد

أ.د/عبدالمعطي محمد عبد الله

أستاذ الرياضيات التطبيقية بكلية
العلوم - جامعة سوهاج

أ.د/ السيد محمد أبودهب

أستاذ الرياضيات التطبيقية بكلية
علوم قنا - جامعة جنوب الوادي