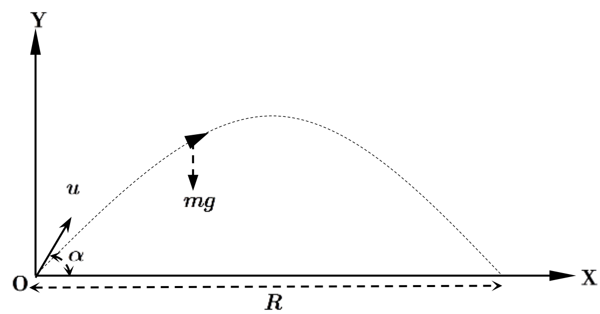
حركة المقذوفـــات

Projectiles Motion

تُعتبر حركة المقذوفات من اهم التطبيقات على الحركة المستوية للنقطة المادية (الجسيم). مـــن المعلوم أن المقذوفات تتعرض اثناء حركتها لجذب الأرض وكذلك مقاومـــة الهـــواء وبدايـــةً سنهمل مقاومة الهواء وسنعتبر أيضاً أن عجلة الجاذبية ثابتة في المقدار خلال حركة المقـــذوف وذلك للحصول على صورةٍ تقريبيةٍ لحركة المقذوف والتي بدورها تلقي ضوءاً لا بأس به على الحركة الحقيقية . وتُستخدم الاحداثيات الكارتيزية عادةً لدراسة هذا النوع مـــن الحركـــة- حيث نستخدم محورين متعامدين ثابتين هما غالباً OX, OY – على أن تُستكمل دراسة حركة المقذوفات مع الأخذ في الاعتبار مقاومة الهواء لاحقاً – إن شاء الله تعالى.

■ معادلات الحركة Equations of Motion

نعتبر الآن حركة مقذوف قُذف من نقطة O بسرعة مقدارها u وفي اتجاه يصنع زاوية α مع المحور الأفقي. كما ذكرنا آنفاً ستحرك الجسيم تحت تأثي قوة الوزن فقط (مقاومـــة الهـــواء أُهملت) وهي – كما نعلم – قوة رأسية إلى أسفل. من الواضح أم مسار المقذوف واقـــع في مستوى رأسي لذلك من المناسب استعمال الاحداثيات الكارتيزية – كما ذكرنـــا ســـالفاً – ولتكن نقطة الأصل هي نقطة القذف O . نفرض أن الجسيم يصل إلى سطح الأرض عنـــد النقطة A بعد زمن ما ومن ثم سنأخذ المحور OX في اتجاه OA والمحـــور OY هـــو المحـــور العمودي على OX في مستوى الحركة كما هو موضح بالشكل.



نفرض أن المقذوف بعد زمن t كان يشغل الموضع P والذي احداثياته (x, y) ومن ثم بكتابة قانون نيوتن الأساسي في الاتجاهين الأفقي والرأسي يكون:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \text{and} \qquad m\ddot{y} = -mg \qquad (1)$$

بالقسمة على m وتكامل جزئي (1) المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = c_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = c_2 - gt \qquad (2)$$

حيث c_1, c_2 ثابتا التكامل واللذان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائيــة للحركــة. عنــد $t = 0$ يكون $\dot{x} = u\cos\alpha,\ \dot{y} = u\sin\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = u\cos\alpha$ و $c_2 = u\sin\alpha$ وبالتالي تأخذ المعادلة (2) الصورة الرياضية

$$\dot{x} = u\cos\alpha \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt \qquad (3)$$

مرةً أخرى بأجراء التكامل بالنسبة للزمن لشقيّ المعادلة (3) ينتج أن

$$x = (u\cos\alpha)t + c_3 \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4 \qquad (4)$$

ايضاً الثابتان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة حيث عند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = 0,\ y = 0$ ومنها نجد أن $c_3, c_4 = 0$ و المعادلة (4) تصبح

$$x = (u\cos\alpha)t \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (5)$$

وبذلك نكون قد أوجدنا مركبتا سرعة المقذوف عند أي لحظة زمنية من جزئي المعادلــة (3) وأيضاً موضع المقذوف يتعين عند أي لحظة من جزئي المعادلة (5) ونلاحظ من الشق الأول من المعادلة (3) نجد أن المركبة الأفقية للسرعة $\dot{x}$ دائماً ثابتة و تساوي $u\cos\alpha$ أمــا المركبــة الرأسية $\dot{y}$ فتعتمد على الزمن . ويُسمى جزئا المعادلة (5) بالمعــادلتين البــارامتريتين لمســار القذيفة.

أهم خصائص حركة المقذوفات

■ أقصى ارتفاع للمقذوف Maximum Height

كما علمنا أن المركبة الأفقية للسرعة تظل ثابتة بينما تتناقص المركبة الرأسية حتى تنعدم عند موضع ما والذي يُمثل أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف ، عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الشق الثاني من المعادلة (3) نحصل على زمن الوصول إلى اقصى ارتفاع وليكن T وهو

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} \qquad (6)$$

ونحصل على أقصى ارتفاع Y بأن نضع $t = T$ في الجزء الثاني من المعادلة (5) أي أن أقصى ارتفاع يتعين من

$$Y = (u\sin\alpha)T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \qquad (7)$$

■ زمن الطيران (التحليق) Time of flight

يُعرف زمن الطيران بأنه الزمن المنقضي بين لحظة اطلاق القذيفة وحتى لحظة مرورها بالمستوى الأفقي المار بنقطة القذف (عند النقطة A) وسنرمز له بالرمز $T^\star$ وحيث أنه عند النقطة A يكون $y = 0$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الجزء الثاني من المعادلة (5) يكون

$$0 = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (8)$$

المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية في الزمن t وجذراها هما

$$T^\star = 0, \qquad T^\star = \frac{2u\sin\alpha}{g} \qquad (9)$$

الجذر الأول $T^\star = 0$ عند بداية قذف الجسيم عند نقطة الأصل والجذر الثاني يُمثل زمن التحليق ومن الملاحظ من المعادلتين (6) و (9) نجد أن $T^\star = 2T$ وهذا يعني أن الزمن الذي يأخذه المقذوف من لحظة اطلاقه حتى وصوله الى اقصى ارتفاع يساوي زمن وصول المقذوف من أقصى ارتفاع غلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف.

■ مدى القذيفة على المستوى الأفقي Range

ويُقصد به طول المستقيم الواصل من نقطة القذف وحتى النقطة A (في نفس مستوى نقطة القذف) ولحساب المدى R نضع $t = T^*$ في الجزء الأول من المعادلة (5) ، أي أنه للحصول على صيغة رياضية للمدى على المستوى الأفقي نعوض عن الزمن بقيمة زمن التحليق في الجزء الأول من المعادلة (5) ومنها

$$R = (u\cos\alpha)T \qquad \Rightarrow R = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \tag{10}$$

و واضح أن المدى R يبلغ أقصى قيمة له – عند قيمة معينة للسرعة – عندما $\sin 2\alpha = 1$ أي عندما $\alpha = \pi / 4$ ويكون المدى حينئذ مساوياً

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \tag{11}$$

من المعادلة (10) نلاحظ أن المدى الأفقي يمكن الحصول عليه بقيمتين لزاوية القذف هما $(\alpha, \pi / 2 - \alpha)$ وذلك لأن $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

■ معادلة المسار لمقذوف Path Equation

بحذف البارامتر t بين جزئي المعادلة (5) نحصل على ما يُعرف بمعادلة المسار الكارتيزية في الصورة الرياضية

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \tag{12}$$

و يتضح من المعادلة السابقة أنه لقيمة معينة للسرعة توجد زاويتان لإصابة الهدف.

ايضاً يمكن وضع المعادلة (12) في الصورة

$$y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2u^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2$$

ومنها نلاحظ أن مسار القذيفة هو قطع مكافئ رأســـه النقطـــة $\left(\dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$

ومحوره رأسي إلى أسفل وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\dfrac{g}{2u^2 \cos^2 \alpha}$

■ مدى القذيفة على مستوى مائل Inclined Range

لإيجاد مدى القذيفة على مستوى مائل. نفرض أن الجسيم قُذف من نقطـــة O بســـرعة u وزاوية قذف α مع الأفقي أعلى مستوى مائل– يميل على الأفقي بزاوية φ – كما بالشكل وأن اتجاه القذف يقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى المائـــل ، نفـــرض أن الجسيم يصطدم بالمستوى المائل عند النقطة M ولتكن احداثياهما (x, y) . فإذا كان $R^\star$ هو المدى على المستوى المائل – المطلوب تعيينه – فإن

$$x = R^\star \cos\varphi, \qquad y = R^\star \sin\varphi$$

ونعلم أن هذين الاحداثيين يحققان معادلة المسار (12) وعلى ذلك وبالتعويض في معادلة المسار ينتج أن

$$R^\star \sin\varphi = R^\star \cos\varphi \tan\alpha - \frac{gR^{\star 2}\cos^2\varphi}{2u^2}\sec^2\alpha$$

ومن هذه المعادلة إما $R^\star = 0$ وهو مناظر لنقطة الأصل أو

$$R^\star = \frac{2u^2}{g}\ \cos\varphi\tan\alpha - \sin\varphi\ \cos^2\alpha\sec^2\varphi$$

$$= \frac{2u^2\cos\alpha}{g\cos^2\varphi}\ \cos\varphi\sin\alpha - \sin\varphi\cos\alpha\ = \frac{2u^2\cos\alpha}{g\cos^2\varphi}\sin(\alpha-\varphi) \qquad (13)$$

هذه المعادلة تُعطي المدى لقذيفة على مستوى مائل. كما يتضح من المعادلة أيضاً أن أقصـــى مدى على المستوى المائل (بزاوية φ) يحدث عندما تكون $\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)$ أكبر ما يمكن وحيث أنه من المعلوم من حساب المثلثات

$$2\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi) = \sin(2\alpha-\varphi) - \sin\varphi$$

وعلى هذا فإن اقصى مدي على المســـتوى المائـــل يمكـــن الحصـــول عليـــه هـــو عنـــدما $\sin(2\alpha-\varphi) = 1$ أي عندما

$$2\alpha-\varphi=\frac{\pi}{2}\qquad \text{Or}\qquad \alpha-\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\text{Or}\quad \alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\qquad \text{Or}\qquad \alpha=\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\tag{14}$$

أي أننا نحصل على أقصى مدى على المستوى المائل عندما ينصف اتجاه القذف الزاويـــة بـــين الراسي والمستوى المائل ويكون اقصى مدى هو

$$R^{\star}_{\max}=\frac{u^2}{g\cos^2\varphi}\ \ 1-\sin\varphi\ \ =\frac{u^2}{g(1+\sin\varphi)}\tag{15}$$

ونلاحظ أنه بوضع $\varphi=0$ في المعادلتين (14) ، (15) نحصل على النتائج المنـــاظرة في حالـــة المستوى الأفقي. تنبيه للحصول على المدى لمستوى مائل لأسفل نضع $-\varphi$ بدلا من φ.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

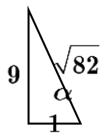
رصدت حركة مقذوف فوجد أن اقصى ارتفاع له فوق المستوى الأفقي المار بنقطة القذف هو 900 ft و أن مداه على المستوى الأفقي 400 ft عيّن سرعة القذف مقداراً واتجاهاً.

الحـــــــل

حيث أن اقصى ارتفاع والمدى يعينان من المعادلتين

$$Y = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ومنها بالتعويض بالقيم المعطاة



$$900 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad 400 = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

بقسمة المعادلتين نحصل على

$$\frac{9}{4} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Big/ \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{\tan \alpha}{4} \quad \therefore \tan \alpha = 9$$

وهي اتجاه سرعة القذف ومقدار السرعة يتعين بالتعويض في أي من المعادلتين ويكون

$$900 = \frac{u^2}{2g} \times \frac{81}{82} \Rightarrow u^2 = \frac{1800 \times 82 \times 32.2}{81} \quad \text{Or} \quad u \cong 242.23 \quad (g = 32.2 \text{ ft sec}^{-2})$$

حيث أن $\tan \alpha = 9$ فإن $\sin \alpha = \frac{9}{\sqrt{82}}$ كما بالشكل.

مثـــ ٢ ـــال

قذف جسيم من نقطة بسرعة ابتدائية مقدارها $3\sqrt{gh}$ لتصيب هدفاً عنـــد النقطـــة $(3h, h)$ بالنسبة إلى محورين متعامدين مارين بنقطة القـــذف. أوجـــد زاويـــتي القـــذف الممكنـــتين لإصابةالهدف.

الحـــــل

حيث أن الهدف عند النقطة $(3h, h)$ ومن ثم فهذه النقطة تحقق معادلة المسار أي أن

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ h = 3h\tan\alpha - \frac{g(3h)^2}{2(9\,gh)\cos^2\alpha} \quad \text{Or} \quad 1 = 3\tan\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha}$$

$$2 = 6\tan\alpha - \sec^2\alpha \Rightarrow 2 = 6\tan\alpha - (1+\tan^2\alpha) \quad \therefore\ \tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 3 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\alpha$ وجذراها هما

$$\tan\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \quad \text{i.e.}\quad \tan\alpha_1 = 3+\sqrt{6},\ \ \tan\alpha_2 = 3-\sqrt{6}$$

وهما الزاويتان الممكنتان لإصابة الهدف.

مثـــ ٣ ـــال

إذا كان T هو زمن وصول قذيفة إلى نقطة P على مسارها وكان T' هو زمن وصولها من تلك النقطة إلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف أوجد ارتفاع النقطة P عن المستوى الأفقي للقذف.

الحـــــــــل

حيث أن زمن الطيران هو الزمن من لحظة انطلاق القذيفة وحتى وصولها الى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف وكما رأينا فإن

$$\text{Time of Filght} = \frac{2u\sin\alpha}{g} = T + T' \qquad \therefore\ u\sin\alpha = \frac{1}{2}g\ \ T + T'$$

ولحساب ارتفاع النقطة P حيث $y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ولذلك

$$y_{\text{P}} = y\big|_{t=T} = (\underbrace{u\sin\alpha}_{\frac{1}{2}g(T+T')})T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g(T+T')T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gTT'$$

مثـــ ٤ ـــال

أطلقت قذيفة على هدف معين في مستوى أفقي يمر بنقطة القذف فسقطت قبل الهدف بمسافة ℓ عندما كانت زاوية القذف 15^0 وعندما قُذفت بنفس السرعة وضوعفت زاوية القـــذف سقطت بعد الهدف بمسافة ℓ. أوجد الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف.

الحـــــــل

باعتبار أن سرعة القذف هي u وأن هو المدى الصحيح لإصابة الهدف هو R وبناءً عليه فإن المدي في الحالة الأولى هو $R-\ell$ والمدى في الحالة الثانية هو $R+\ell$ وحيث أن معادلة المدي هي

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

في الحالة الأولى

$$R-\ell=\frac{u^2\sin 30}{g}=\frac{u^2}{2g}$$

في الحالة الثانية

$$R+\ell=\frac{u^2\sin 60}{g}=\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$$

من هاتين المعادلتين ينتج أن – بالجمع –

$$2R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{2} \qquad \text{Or} \qquad R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{4} \qquad (1)$$

وبفرض أن هي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف θ وبالتالي يكون (2) $R=\dfrac{u^2\sin 2\theta}{g}$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن $\sin 2\theta=\dfrac{(1+\sqrt{3})}{4}$ أي أن

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

وهي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف

مثـــ ٥ ـــال

أطلقت قذيفة من نقطة الأصل فوجد أنها تمر بالموضعين $(12,0)$,$(8,2)$ على مسارها أوجـــد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً واحسب الزمن الذي تأخذه القذيفة لتمر بالموضعين الســـابقين وسرعتها عند هذين الموضعين.

الحـــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y=x\tan\alpha-\dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(12,0)$,$(8,2)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة $(8,2)$ فإن $2 = 8\tan\alpha - \dfrac{g(8)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

بالنسبة للنقطة $(12,0)$ فإن $0 = 12\tan\alpha - \dfrac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

بضرب المعادلة الأولى في 9 والثانية في 4 والطرح نحصل على

$$18 = 24\tan\alpha \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

وهي اتجاه سرعة القذف مع الأفقي و لتعيين مقدار السرعة بالتعويض في أي من المعادلتين

$$\Rightarrow 12\tan\alpha = \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha} \quad \therefore u^2 = \frac{g(12)^2}{24\tan\alpha\cos^2\alpha} = \frac{6g}{\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{2}g$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{25}{2}g}$$

<u>علي الدارس أن يكمل الحل</u>

مثـــ ٦ ـــال

قُذفت نقطة مادية لتمر بالموضعين $(a,b),(b,a)$ على مسارها حيث $a > b$. اثبت أن المدى على المستوى الأفقي يساوي $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ و أن زاوية القذف أكبر من $\tan^{-1}3$.

الحـــــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(a,b),(b,a)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة (b,a) فإن $a = b\tan\alpha - \dfrac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

بالنسبة للنقطة (a,b) فإن $b = a\tan\alpha - \dfrac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

بضرب المعادلة الأولى في a والثانية في b والطرح نحصل على

$$\underbrace{a^2-b^2}_{(a+b)\cancel{(a-b)}}=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\cancel{(a-b)}$$

$$\text{Or}\qquad a+b=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\qquad\qquad \text{Or}\qquad \frac{ab}{a+b}=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$$

مرةً أخرى بضرب المعادلة الأولى في a^2 والثانية في b^2 و الطرح نحصل على

$$\underbrace{a^3-b^3}_{(a^2+ab+b^2)\cancel{(a-b)}}=ab\cancel{(a-b)}\tan\alpha\qquad \Rightarrow ab\tan\alpha=a^2+ab+b^2$$

ولكن معادلة المدي تُعطى من

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{2u^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

$$=\underbrace{\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}}_{ab/(a+b)}\tan\alpha=\frac{ab}{a+b}\tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وهو المطلوب $\therefore R=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

وحيث أننا أثبتنا أن $\tan\alpha=\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab}$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\pm 3=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}+3=\frac{(a-b)^2}{ab}+3$$

و حيث أن المقدار $\dfrac{(a-b)^2}{ab}>0$ فإن $\tan\alpha>3$ أو $\alpha>\tan^{-1}3$

مثـــ ٧ ـــال

أطلقت قذيفة بسرعة h من سطح الأرض بحيث تمر بنقطة أقصى بعد لها A في نفس المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. اثبت أنه لكي يصيب المقذوف هدفاً على ارتفاع h فوق النقطة A بحيث أن زاوية القذف في الحالتين واحدة فإن سرهة القذف يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$.

الحـــــل

واضح أن أقصى بعد حينما تكون الزاوية 45^0 ويكون المدى أي بعد النقطة A هو $R=\dfrac{u^2}{g}$

ولكي تصيب القذيفة الهدف B و الذي يقع على ارتفاع h فوق النقطة A نفترض أن السرعة أصبحت v ومن ثم يجب أن تكون النقطة $B=\left(\dfrac{u^2}{g},h\right)$ تحقق معادلة المسار

$$h=\frac{u^2}{g}\tan 45-\frac{g\ \left(u^2\ /\ g\right)^2}{2v^2\cos^2 45}\qquad \Rightarrow h=\frac{u^2}{g}-\frac{u^4}{gv^2}\quad \text{Or}\quad \frac{u^4}{gv^2}=\frac{u^2}{g}-h$$

$$\frac{u^4}{gv^2}=\frac{u^2-gh}{g}\quad \text{Or}\quad v^2=\frac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}>u$$

أي أن السرعة يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$

مثـــال ٨

قذف جسيم بسرعة $64\ \text{ft}\sec^{-1}$ وفي اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الأفقي أوجد المدى على مستوى يميل بزاوية 30^0 على الأفقي إذا قذف الجسيم أعلى المستوى أو أسفل المستوى.

الحـــل

حيث أن المدى على المستوى المائل يتعين من – $g=32.2\ \text{ft}\sec^{-2}$ –

$$R=\frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

حيث $u=64\ \text{ft}\sec^{-1}$ ، $\varphi=30^0$ ، $\alpha=45^0$ نجد أن المدى على المستوى المائل لأعلى

$$R=\frac{2(64)^2\cos 45\sin(45-30)}{32.2\cos^2 30}=\frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \left(\sqrt{3}-1\right)\ \cong\ 62.08\ \text{ft}$$

ثم بالتعويض عن $\varphi=-30^0$ نحصل على المدى على المستوى المائل إلى أسفل

$$R=\frac{2(64)^2\cos 45\sin(45+30)}{32.2\cos^2(-30)}=\frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \left(\sqrt{3}+1\right)\ \cong\ 231.7\ \text{ft}$$

مثـــال ٩

إذا كانت النسبة بين مقداري سرعة جسيم مقذوف عند أقصى ارتفاع و عندما يكون على ارتفاع يساوي نصف اقصى ارتفاع هي $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ فاثبت أن زاوية القذف هي 30^0.

الحـــــــل

حيث أن الاحداثي الرأسي عند أي لحظة يتعين من $y = (u\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2$

وحيث أن أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة A هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

وعند ارتفاع يساوي نصف أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة B هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{4g}$

الزمن الذي يأخذه الجسيم من لحظة انطلاقه حتى يصل إلى النقطة B يتعين من

$$\frac{u^2\sin^2\alpha}{4g} = (u\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$2(gt)^2 - 4(gt)u\sin\alpha + u^2\sin^2\alpha = 0 \qquad \Rightarrow gt = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha$$

مركبتا سرعة الجسيم عند النقطة B هما

$$\dot{x}_B = u\cos\alpha, \quad \dot{y}_B = u\sin\alpha - gt = u\sin\alpha - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha$$

ويكون مقدار السرعة عند B هو

$$v = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha\right)^2} = \frac{u}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$$

عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}_A = 0$ أي أن $\dot{x}_A = u\cos\alpha,$

$$v = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = u\cos\alpha$$

وحيث أن $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{6}{7}}$ وبالتالي

$$\frac{\sqrt{2}u\cos\alpha}{u\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \qquad \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{Or} \quad \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{3}{7}$$

$$7\cos^2\alpha = 3 + 3\cos^2\alpha \qquad \Rightarrow 4\cos^2\alpha = 3 \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \alpha = 30^0$$

وهو المطلوب

مثـ ١٠ ـــال

اطلقت كرة من نقطة على سطح الأرض تبعد مسافة a من قاعدة حائط رأسي ارتفاعـــه b إذا كانت زاوية القذف مع الافقي α والكرة مرت بحافة الحائط اثبت أن أقصـــى ارتفـــاع للكرة هو $\dfrac{a^2 \tan^2 \alpha}{4(a\tan\alpha - b)}$.

الحـــــــــل

نفترض أن سرعة القذف هي u وحيث أن الكرة تمس الحائط ومن ثم فإن النقطة (a,b) تقع على مسار الكرة ومن ثم فهي تحقق معادلة المسار

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Or} \qquad a\tan\alpha - b = \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore u^2 = \frac{ga^2}{2(a\tan\alpha - b)\cos^2\alpha}$$

والآن أقصى ارتفاع للكرة

$$\begin{aligned} Y &= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \\ &= \frac{\sin^2\alpha}{2g}\frac{ga^2}{2(a\tan\alpha - b)\cos^2\alpha} \\ &= \frac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha - b)} \end{aligned}$$

■ حركة مقذوف مع اعتبار مقاومة الهواء

درسنا في الجزء السابق حركة المقذوف مع اهمال مقاومة الهواء وهي حالة مثالية حيث أنه في الواقع توجد مقاومة لحركة الجسيم المقذوف وهي مقاومة الهواء ، دعنا نفترض أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسيم وهي $\gamma m\underline{v}$ (حيث γm ثابت التناسب) والآن بكتابة قانون نيوتن الاساسي وبالتحليل في الاتجاهين الأفقي و الرأسي نحصل على

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\gamma\cancel{m}\dot{x} \quad \text{and} \quad \cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g - \gamma\cancel{m}\dot{y} \qquad (1)$$

لاحظ أن $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ و $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ وبتكامل شقي المعادلة (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\ln\dot{x} = c_1 - \gamma t \quad \text{and} \quad \ln\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) = c_2 - \gamma t \qquad (2)$$

حيث c_2, c_1 ثابتا التكامل و اللذان يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية للحركة وهي عند $t = 0\dot{x} = u\cos\alpha$ يكون $\dot{y} = u\sin\alpha, \dot{x} = u\cos\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = \ln u\cos\alpha$ و $c_2 = \ln\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$ بالتعويض عن قيمة الثابتين تأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha\ e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \qquad (3)$$

وجزئي هذه المعادلة يعينان مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة زمنية. مرةً أخرى بإجراء التكامل بالنسبة للزمن لجزئي المعادلة (3) يكون

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ e^{-\gamma t} + c_3 \quad \text{and} \quad y = -\frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}t + c_4 \qquad (4)$$

ايضاً الثابتان c_4, c_3 يمكن تعيين قيمتهما من الشرط الابتدائي للحركة فعند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = y = 0$ ومنها نجد أن

$$c_3 = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}, \qquad c_4 = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$$

وتأخذ المعادلة السابقة (4) الصورة

$$x = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ \ 1 - e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)\ 1 - e^{-\gamma t}\ \ - \frac{g}{\gamma}t \qquad (5)$$

وجزئا هذه المعادلة يعينان موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

و للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نضع $\dot{y} = 0$ في المعادلة (3) ومن ثم

$$T = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right) \tag{6}$$

ويتعين أقصى ارتفاع من المعادلة (5) أي أن

$$y = \frac{u\sin\alpha}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 + \frac{\gamma u \sin\alpha}{g}\right)$$

زمن الطيران T' يتعين بوضع $y = 0$ في الشق الثاني من المعادلة (5)

$$T' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)\ 1 - e^{-\gamma T'}$$

أما معادلة المسار فتتعين بحذف البارامتر بين جزئي المعادلة وتأخذ الصورة

$$y = \frac{g}{\gamma u \cos\alpha}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)x + \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{u\cos\alpha}\right)$$

وأخيراً يجب أن نلاحظ أن الحركة التي سبق دراستها عند اهمال مقاومة الهواء هي حالة خاصة من هذه الحالة ويمكن الحصول على جميع النتائج والمعادلات التي سبق الحصول عليها (عند اهمال مقاومة الهواء) بجعل $\gamma \to 0$ فمثلاً للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نستخدم المفكوك اللوغاريتمي

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .....$$

هذا المفكوك صحيح بشرط أن $|x| < 1$ والآن بجعل $\gamma \to 0$ في المعادلة (6) نجد أن

$$\begin{aligned} T &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} - \frac{\gamma^2 u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma^3 u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{\gamma u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) = \frac{u\sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

وهو نفسه زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع والذي سبق الحصول عليه عند اهمال مقاومة الهواء (المعادلة (6)) ونترك للقارئ كتمرين الحصول على بقية النتائج في حالة اهمال مقاومة الهواء.

مثـ ١١ ـــال

قذف جسيم كتلته m بسرعة u و في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاومتــه تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب يساوي μm . اثبت أن اتجاه حركته يصنع زاويــة مقدارها α مع الأفقي بعد مضي زمن $\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu u}{g}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.

الحـــــــل

بكتابة معادلتي الحركة للجسيم في الاتجاهين OX, OY والتكامل واستخدام الشروط الابتدائية للحركة كما سبق أن اوضحنا بالتفصيل نحصل على مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة في الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha\ e^{-\mu t} \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}$$

حيث أن زاوية القذف هي α وأن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة مع المحور الأفقي تتناقص حتى تنعدم عند أقصى ارتفاع ثم يعكس الجسيم اتجاه حركته لتصبح الزاوية α لأسفل. يصنع اتجاه الحركة زاوية α بعد زمن t يتعين من

$$\tan\ -\alpha\ = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}}{u\cos\alpha\ e^{-\mu t}} = -\tan\ \alpha$$

أي أن

$$\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu} = -u\sin\alpha\ e^{-\mu t} \ \Rightarrow \left(2u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} = \frac{g}{\mu}$$

$$\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right) = e^{\mu t} \qquad \Rightarrow t = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right)$$

وهو المطلوب.

■ مســـــائل Problems ■

قُذف جسيم بسرعة $\underline{u} = a\,\hat{\imath} + b\,\hat{\jmath}$ من نقطة A لتصطدم بسقف منزل ارتفاعـــه ℓ عـــن المستوى الأفقي المار بالنقطة A . فإذا كان أقصى ارتفاع للجسيم يساوي 2ℓ . فاثبـــت أن سرعة الجسيم عند أصطدامه بسقف المترل تتعين من $\underline{u}_A = a\,\hat{\imath} - \sqrt{b^2 - 2g\ell}\,\hat{\jmath}$.

الحركـــة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، ثم حركة جسيم في مســـتوى ثم تناولنا في الباب الذي يليه حركة المقذوفات وهي نوع مـــن أنـــواع الحركـــة في المســـتوى وسنتعرف بمشيئة الله في هذا الباب على نوع له أهميه من أنواع الحركة تُســـمى " الحركـــة التوافقية البسيطة " أو الحركة الموجية. إذا تحرك جسيم متذبذباً حول موضع اتزانـــه (وهـــو الوضع الذي إذا زُحزح الجسيم عنه وهو متزن عاد إليه مرةً أخرى) سُميت حركة الجســـيم بالحركة الاهتزازية أو الحركة الدورية وهناك أنواع مختلفة من الإهتزازات منها

♦الإهتزاز الحر أو الحركة التوافقية البسيطة وهى ما سندرسه بالتفصيل.

♦الإهتزاز القسري إذا أثرت قوة قاسرة دورية على جسيم يُقال أن الحركة إهتزاز قسري.

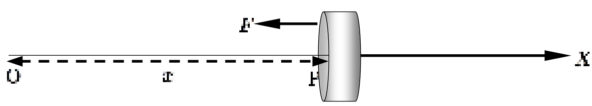
♦الإهتزاز المخمد الحر وفيها يكون الجسيم لقوة مقاومة مثل الاحتكاك والتي تجعـــل ســـعة الذبذبة تتناقص تدريجياً حتى تنعدم ومن ثم يتوقف الجسيم عن الحركة.

♦الإهتزاز القسري المخمد وهذه الحالة تمثل الحالتين السابقتين معاً وفيها يتلاشى تأثير المقاومة تدريجياً مع الزمن ويتبقى تأثير الذبذبة القسرية.

الإهتزاز الحر يُقال أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة وفيها يتحرك الجسيم متذبـــذباً حول موضع اتزانه دون أن تتغير سعة الذبذبة أو الزمن الدوري لها كما أن القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً تتجه نحو نقطة ثابتة أثناء الحركة ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناســـب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تُسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفـــرض أن O هـــي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذي سيمثله المحور OX وأن موضع الجسيم عند اللحظة t هو P حيث $\mathrm{OP} = x$ كما بالشكل. من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = k/m \qquad\qquad \text{....(1)}$$



والاشارة السالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الذبذبة ولإيجاد سرعة الجسيم عند أي موضع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad ....(2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج أن $v\dfrac{dv}{dx} = -\omega^2 x$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$v^2 = c_1 - \omega^2 x^2 \qquad ....(3)$$

حيث c_1 هو ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج إلى شروط أبتدائية ولذلك سنعتبر أن أقصى مسافة للجسيم هي a والتي عندها يسكن الجسيم (أي أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c_1 = \omega^2 a^2$ وتُكتب المعادلة (3) في الصورة

$$v^2 = \omega^2 a^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 \ \ a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad .....(4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الأشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه الموجب (أي في اتجاه OX — تزايد x) وسنعتبر الأشارة السالبة إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه المضاد.

والآن لمعرفة موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية نضع $v = dx/dt$ في المعادلة (4) (على اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \omega dt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad ....(5a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل ويُسمى " زاوية الطور " ويُعيّن من الشروط الأبتدائية للحركة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$x = a\sin \ \ \omega t + \epsilon \qquad ......(5b)$$

وهذه المعادلة تُمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالة الأشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $\left|\sin \ \omega t+\epsilon \ \right| \leq 1$ ومن المعادلة (5 b) يكون

$$\left|x\right| = \left|a \sin \ \omega t+\epsilon \ \right| = \left|a\right| \left|\sin \ \omega t+\epsilon \ \right| \leq a \qquad \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x = a$ ، $x = -a$ لذلك فإن a تُسمى سعة الحركة التوافقية.

كما يمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x = \pm a$ ، كما تكون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x = 0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x و $-x$ متساوٍ.

■ الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية ، ومن ثم فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويُعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من أحد أطراف الذبذبة $x = +a$ إلى الطرف الآخر $x = -a$ ثم العودة مرة أخرى $x = +a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبةً كاملةً وحيث أن

$$\begin{aligned} x &= a\sin(\omega t+\epsilon) = a\sin(\omega t+\epsilon+2\pi) \\ &= a\sin\left(\omega \underbrace{\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'} + \epsilon\right) \\ &= a\sin(\omega t'+\epsilon), \qquad\qquad \left(t' = t+\frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned}$$

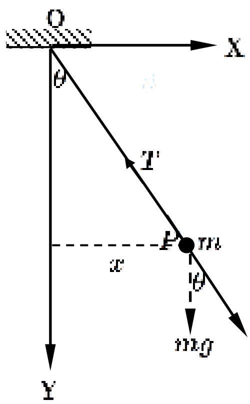
أي أن x عند الزمن t هي نفسها عند الزمن $t' = t+\frac{2\pi}{\omega}$ و ذلك يعني أن الجسيم يعود إلى وضعه الأول بعد زمن $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ و هو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري).

و لأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملـــها الجسيم في وحدة الزمن و هو ما يُعرف بالتردد.

■ التردد Frequency

يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) وسنرمز له بالرمز ν وهو مقلوب الزمن الدوري أي أن $\nu = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طـــرف خـــيط غـــير مـــرن (ساق خفيفة) طولها L مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طـــول الخيط L . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحـــت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومـــن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في الاتجاه الأفقي OX هى (بتحليل قوة الشد) بفرض أن $\angle \text{YOP} = \theta$

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ddot{x} = -T\frac{x}{L}$$

وحيث أن θ صغيرة جداً فيمكن اعتبار أن الحركـــة هـــي حركـــة أفقيـــة فقـــط أي أن $T\cos\theta = mg$ ومن ثم تصبح المعادلة السابقة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L\cos\theta}$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\cos\theta \cong 1$ ومن ثم تؤول المعادلـــة السابقة إلى الصورة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -\frac{g}{L}\,x$$

هذه المعادلة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من – حيث – $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

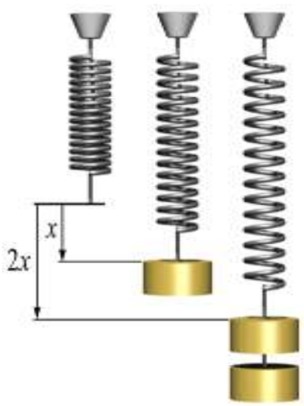
و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـ " بندول الثواني ".

■ قانون هوك Hooke's Law

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب تناسباً طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. الصيغة الرياضية لهذا القانون هي $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه و عدد لفاته إلى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell}x$$

حيث λ ثابت يُسمى معامل المرونة للخيط و الزنبرك ، x مُثل الأستطالة الحادثة ، ℓ لطول الطبيعي للخيط ، T وة الشد الناشئة في الخيط. (الأستطالة الحادثة هي الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي).



كما ذكرنا ما يسري على الخيط المرن يسري على الزنبركات في حالة الأستطالة فقط أما في حالة الأنضغاط فتختفي القوة الناشئة في الخيط خلافاً لحالة الزنبرك و هذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم اغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ فاثبت أن حركة هذا الجسيم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن الدوري لها.

الحـــــــــل

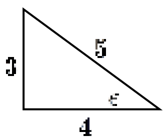
حيث أن موضع الجسيم يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على

$\dot{x} = -6\sin 2t + 8\cos 2t,$ again differentiating $\therefore \ddot{x} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$

Or $\therefore \ddot{x} = -4(\underbrace{3\cos 2t + 4\sin 2t}_{x}) = -2^2 x$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $\omega = 2$ حيث أن العجلة تتناسب مع المسافة و زمنها الدوري τ يتعين من $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ وسعة الحركة يمكن الحصول عليه كالآتي

$$3\cos 2t + 4\sin 2t = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\sin 2t\right)$$
$$= 5\ \ \sin\epsilon\, cos2t + \cos\epsilon \sin 2t \ = 5\sin(2t + \epsilon)$$



ومن ثم فإن سعة الذبذبة هي 5

مثـــ ٢ ـــال

إذا تعينـــت ســـرعة نقطـــة ماديـــة تتحـــرك في خـــط مســـتقيم مـــن العلاقـــة $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ فاثبت أن حركة هذه النقطة هي حركـــة توافقيـــة بســـيطة وأوجد سعتها والزمن اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$.

الحـــــــــل

حيث أن $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ و باجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير x ينتج أن

$$v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \Rightarrow 2v\frac{dv}{dx} = n^2(4b - 2x) \quad \text{Or}$$
$$\underbrace{v\frac{dv}{dx}}_{\text{accel}} = -n^2(x - 2b) \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -n^2(x - 2b)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها مركز الذبذبة $4b$ و $n = \omega$

(توضيح: بوضع $y = x - 2b$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -n^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = 2b$).

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v = 0$ ومنها

$$0 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \quad \Rightarrow (x-2b)(x-6b) = 0 \quad \text{i.e.} \;\; x = 2b, \; x = 6b$$

وهذه القيم تمثل أطراف الذبذبة ومن ثم فتكون سعة الذبذبة هي $2b$ والزمن T اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$ يمثل ربع الزمن الدوري أي أن

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \because T = \frac{1}{4}\tau \qquad \Rightarrow T = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u, u' سرعتي الجسيم على بعدين b, b' من مركز الذبذبة على الترتيب. أوجد الزمن الدورى لها.

الحـــــــــل

حيث أن السرعة لجسيم يتحرك حركة توافقية هي $v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ حيث أن سعة الحركة هي a وعند الموضعين المذكورين يكون

$$u^2 = w^2(a^2 - b^2), \qquad u'^2 = w^2(a^2 - b'^2)$$

من العلاقتين نحصل على – بالطرح –

$$u'^2 - u^2 = w^2(b^2 - b'^2), \qquad Or \qquad \omega^2 = \frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2}}$$

ومن ثم يكون الزمن الدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b^2 - b'^2}{u'^2 - u^2}}$ وهو المطلوب

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = \mu - \mu\cos 2t$ حيث μ ثابت فاثبـــت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة واوجد زمنها الدوري ومركزها.

الحــــــــل

حيث أن موضع الجسيم المتحرك $x = \mu - \mu\cos 2t$ وبالتفاضل مرتين للحصــــول علـــى العجلة نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\sin 2t \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\underbrace{\mu\cos 2t}_{\mu - x} = 4(\mu - x) = -4(x - \mu)$$

وهي معادلـــة حركـــة توافقيـــة بســـيطة مركزهـــا النقطـــة $x = \mu$ وزمنـــها الـــدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ حيث $\omega = 2$.

(توضيح: بوضع $y = x - \mu$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -2^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = \mu$).

(على الدارس ايجاد سعة الذبذبة).

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة اثناء جزء من الحركة – مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الذبذبة – هي X_1, X_2, X_3 عند نهايات ثلاث ثوانٍ متتالية عيّن الزمن الدوري للحركة.

الحــــــــل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركة التوافقيـــة البســـيطة هـــي $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$ و سنفرض أن زمن وصول الجسيم إلى الموضع X_1 هو t وبالتالي زمن وصوله إلى الموضع X_2 هو $t+1$ وزمن وصوله إلى الموضع X_3 هو $t+2$ ويكون

$$\begin{aligned} X_1 &= a\sin(\omega t + \epsilon) \\ X_2 &= a\sin(\omega(t+1) + \epsilon) \\ X_3 &= a\sin(\omega(t+2) + \epsilon) \end{aligned}$$

من المعادلات السابقة – بجمع الأولى والثالثة – ينتج أن

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= a\ \ \sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon) \\ &= 2\underbrace{a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{X_2}\cos\omega \\ &= 2X_2\cos\omega \end{aligned}$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$\because\ X_1 + X_3 = 2X_2\cos\omega$$
$$\Rightarrow \cos\omega = \frac{X_1 + X_3}{2X_2}$$
$$\text{Or} \qquad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)$$

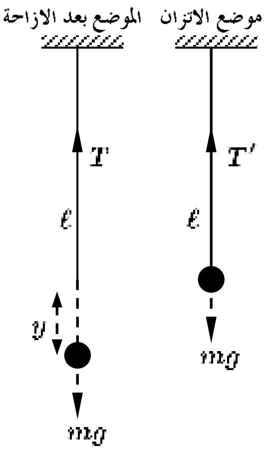
وحيث أن الزمن الدوري يُعطى بالعلاقة $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وبالتعويض عن قيمة ω يكون

$\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)}$ و يجب أن يتحقق الشرط $-2X_2 \le X_1 + X_3 \le 2X_2$

مثال ٦

عُلق جسيم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زحزح الجسيم من موضع اتزانه مسافةً رأسيةً صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبةً في الثانية. فإذا كان طول الخيط عند موضع الاتزان هو ℓ. اوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الاستطالة مساويةً للطول الطبيعي هو $m(4\pi^2 n^2 \ell - g)$.

الحل



حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الاتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط (قبل تعليق الكتلة m) و أن T' هو قيمة الشد في الخيط عند الاتزان ، في حالة الاتزان تؤثر على الكتلة قوتا الوزن والشد في الخيط فقط ومن قانون هوك يكون

$$mg = T' = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \qquad (1)$$

إذا أعطينا الكتلة ازاحة y بعيدا عن موضع اتزانها في هذه الحالة فإن معادلة حركة الكتلة هي

$$m\ddot{y} = mg - T \qquad (2)$$

حيث T هو الشد في الخيط و يساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$ وبالتعويض عن قيمة الشد في المعادلة (2) و باستخدام المعادلة (1)

$$\therefore m\ddot{y} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$$
$$= \cancel{mg} - \underbrace{\frac{\lambda}{\ell_0}\cancel{(\ell - \ell_0)}}_{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0}y = -\frac{\lambda}{\ell_0}y$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{\lambda}{\ell_0 m}x = -w^2 x, \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$$

المعادلة الاخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 m}{\lambda}}$ و التردد يتعين من $\therefore n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$ $\nu = \frac{1}{\tau}$ و نجد من هذه العلاقة $2\pi n\ ^2 m = \frac{\lambda}{\ell_0}$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$\cancel{m}g = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4\pi^2 n^2 \cancel{m}(\ell - \ell_0)$$

$$\therefore \ell - \ell_0 = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \text{ Or } \ell_0 = \ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$

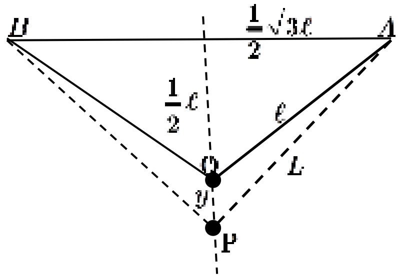
وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعيين قيمة الشد حينما تكون الاستطالة مساوية للطول الطبيعي من قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4\pi^2 n^2 m\ell_0 = 4\pi^2 n^2 m\left(\ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}\right) = m\ \ 4\pi^2 n^2 \ell - g$$

مثـــ ٦ ـــال

عُلق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن c مثبت طرفاه في نقطتين A, B يقعان في مستوى أفقي واحد. و في وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية 60^0 مع الرأسي و يكون طول كل منهما ℓ ، معامل مرونة الخيط يساوي mg . فإذا زحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي و ترك ليتذبذب. اوجد زمن الذبذبة.

الحـــــل



باعتبار أن λ هو معامل المرونة للخيط حيث $\lambda = mg$ و بفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط ومن ثم فعند حالة الاتزان يكون الشد من قانون هوك

$$mg = 2\lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \cos 60^0 = \lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

ولكن $\lambda = mg$ ومن ثم $\ell_0 = \frac{1}{2}\ell$

باعتبار أن y يمثل المسافة الرأسية و L هو هو طول الخيط بعد الازاحة كما بالشكل

ومن ثم بكتابة معادلة الحركة الرأسية للكتلة يكون

$$m\ddot{y} = mg - 2\lambda \frac{L - \ell_0}{\ell_0} \cos \angle \mathrm{OPA}$$

حيث P موضع الجسيم عند اللحظة t ، O هو موضع الاتزان وعند موضع عام حيث

$\mathrm{PA{=}PB} = L$ هو طول الخيط والآن

$$L^2 = \left(y + \frac{1}{2}\ell\right)^2 + \frac{3}{4}\ell^2 = \ell^2 + \ell y + y^2$$

ومن ثم

$$L = \ell\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)^{1/2} = \ell + \frac{1}{2}y$$

حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية فأعلى وايضاً

$$\begin{aligned}\cos \angle \mathrm{OPA} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{L} &= \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{\ell + \frac{1}{2}y} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{2\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)\end{aligned}$$

لأول قوة حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية

$$m\ddot{y} = mg - \frac{2\lambda\left(\ell + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\ell\right)}{\frac{1}{2}\ell} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

وهذا
$$\ddot{y} = g - g\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

أو
$$\ddot{y} = -\frac{5g}{2\ell}y$$

والاخيرة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $2\pi\sqrt{2\ell \,/\, 5g}$

■ مســــــائل Problems ■

الحركة الدفعية وتصادم الاجسام

Impulse and Collision Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وسنتعرف بمشيئة الله تعالى في هذا الباب على نوع من أنواع الحركة تُسمى " الحركة الدفعية ".

■ الدفع وقانون الحركة

إذا بدأنا بقانون نيوتن الثاني للحركة معوضين عـــن العجلـــة بصـــورها $a = \frac{dv}{dt}$ يكـــون $F = m\frac{dv}{dt}$ وبضرب طرفي هذه العلاقة في dt وتكاملها بين اللحظتين t_1, t_2 حيث سرعة الجسيم عندهما v_1, v_2 فإن

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv = mv\Big|_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1$$

يُعرف التكامل الزمني للقوة F بين اللحظتين t_1, t_2 والوارد بالطرف الأيسر للمعادلة السابقة ب دفع القوة خلال الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ ويرمز له بالرمز $\underline{I}$ اختصاراً لكلمة **Impulse** أي أن $\int_{t_1}^{t_2} F dt = \underline{I}$. ودفع أي قوة هو متجه ينطبق عليها نظراً لأن الزمن كمية قياسية.

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة

ينص هذا المبدأ على أن كمية الحركة mv في اتجاه خط التصادم (في حالة الكرات يكون خط المركزين) ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ قانون نيوتن التجريبي **Experimental Newton's Law**

في اتجاه خط المركزين تخضع لقاعدة نيوتن التجريبية والتي تنص على أن الســـرعة النســـبية للجسمين بعد التصادم تساوي معكوس السرعة النسبية لهما قبل التصادم مضروباً في معامـــل الأرتداد (يُرمز له بالرمز e)أي أن

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

ويُطبق هذا القانون في اتجاه خط التصادم (خط المركزين) ، وتنحصر قيمة معامل الأرتداد e بين الصفر والواحد $0 \leq e \leq 1$ ويكون $e = 0$ إذا كان الجسمان عديمي المرونة ويساوي الواحد $e = 1$ إذا كان الجسمان تامي المرونة.

ايضاً حيث أن الكرتين ملساوتان فإنه لا توجد قوة عمودية على خط المركزين (خط التصادم) ومن ثم فإنه في حالة التصادم غير المباشر تظل مركبة السرعة لكل من الكرتين في اتجاه العمودي على خط المركزين ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ تصادم الاجسام

عند تصادم جسمان مرنان فإنه يحدث نتيجةً لهذا التصادم ردود فعل كبيرة جداً تؤثر على كلا الجسمين لفترة صغيرة ثم يميل الجسمان بعدها للعودة إلى حركتهما ، تُسمى ردود الأفعال هذه بردود الأفعال الدفعية.

سنعتبر في دراستنا تصادم الاجسام الملساء بحيث أننا سنهمل جميع قوى الاحتكاك ويبقى فقط ردود الأفعال العمودية على الأسطح المشتركة و لسهولة الدراسة سنعتبر تصادم اجسام على هيئة كرات مرنة ملساء كما سنهمل كلا من قوى الأوزان لصغر دفوعها و التغير في مواضع الكرات أثناء فترة التصادم باعتبار أن هذه الفترة الزمنية للتصادم صغيرة جداً ، أي أن التصادم سيغير من سرعات الكرات ولن يغير من مواضعها أثناء فترة حدوثة. وفي دراستنا سوف نعتبر نوعين من التصادم (تصادم مرن وتصادم غير مرن) – التصادم غير المرن تم دراسته سابقاً – والتصادم المرن ينقسم إلى تصادم مباشر وتصادم غير مباشر.

■ التصادم المباشر وغير المباشر (مائل)

نعتبر تصادم كرتين ملساوتين ، الخط الواصل بين المركزين الهندسيين للكرتين يُسمى بخط المركزين أو خط التصادم ، و إذا كان التصادم بحيث كانت السرعتان قبل التصادم كلاهما في اتجاه خط التصادم للكرتين سُميّ هذا التصادم بـ "التصادم المباشر" أما في حالة التصادم غير المباشر يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كليهما مائلاً على خط التصادم بزاوية معينة – نلاحظ أن التصادم المباشر هو حالة خاصة من التصادم غير المباشر فيها زاوية الميل صفراً.

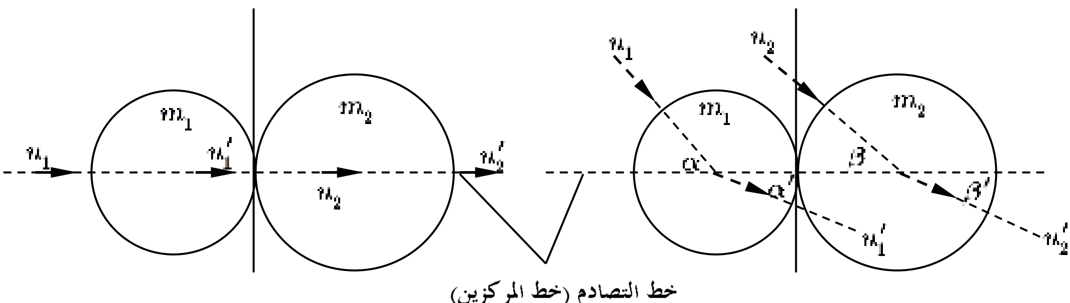
و في التصادم المرن سواءً كان التصادم مباشراً أو غير مباشر يُطبق قانون مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية و قانون نيوتن التجريبي في اتجاه خط التصادم. ويأخذ مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في حالة التصادم المباشر الصورة الرياضية

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2'$$

أما في حالة التصادم غير المباشر يكون

$$m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta = m_1 u_1' \cos\alpha' + m_2 u_2' \cos\beta'$$

كما أن سرعة أي من الكرتين في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة قبل وبعد التصادم و من ثم فإن الكرة الساكنة أو الكرة المتحركة في اتجاه خط التصادم فإن حركتها بعد التصادم إذا تحركت تكون في اتجاه خط التصادم.



تصادم مباشر

تصادم غير مباشر (مائل)

■ تصادم كرة بمستوى ثابت

نعتبر كرة ملساء كتلتها m اصطدمت بمستوى ثابت أملس وأن سرعة الكرة قبل التصـــادم مباشرة هي u وأن سرعتها بعد التصادم هي u' كما بالشكل و نظراً لأن كل من الكـــرة والمستوى أملسين فإن سرعة الكرة في اتجاه المستوى (العمودي على خط التصادم) لا تـــتغير بالتصادم أي أن

$$u \sin\alpha = u' \sin\theta \qquad (1)$$

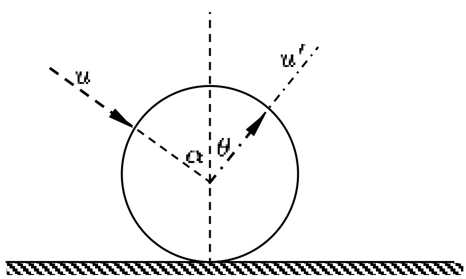
ومن قانون نيوتن التجريبي $u' \cos\theta = eu\cos\alpha$

وهاتان العلاقتان كافيتان لتعيين سرعة الكرة بعد التصادم إذا عُلمت سرعة الكرة قبل التصادم.

ومن العلاقة $u' \cos\theta = eu\cos\alpha$ نجد أنه إذا كان $e = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه في حالة تصادم كرة غير مرنة فإنها لا ترتد وإنما تتحرك على المستوى وبسرعة مقدارها $u\sin\alpha$.
أما إذا كان $e = 1$ فإنه يكون $u' \cos\theta = u\cos\alpha$ ومن هذه المعادلة والمعادلة (1) نحصل على

$$\tan\theta = \tan\alpha, \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

أي أن زاوية السقوط تساوي زاوية الأرتداد ونستنتج ايضاً أن $u = u'$ أي ان سرعة الكرة بعد التصادم تساوي في المقدار سرعتها قبل التصادم



■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

كرة تتحرك بسرعة u اصطدمت تصادماً مباشراً بكرة أخرى مساوية لها في الكتلة تتحـــرك بسرعة u' في الاتجاه المعاكس إذا توقفت الكرة ذات السرعة u بعد التصـــادم فاثبـــت أن $\frac{u}{u'} = \frac{1+e}{1-e}$ حيث e هو معامل الارتداد.

الحــــــل

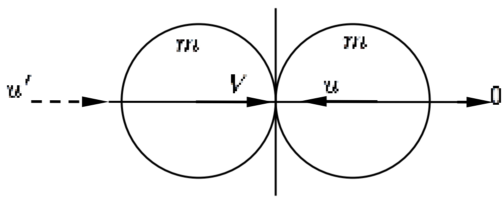
نفترض أن سرعة الكرة التي تتحرك بسرعة u' بعد التصادم هي V وأن m هي كتلة كل من الكرتين و حيث أن الكرة ذات السرعة u توقفت بعد التصادم فإنه من مبدأ ثبوت كمية الحركة

$$m \times 0 + m \times V = mu + m(-u') \quad \text{Or} \quad V = u - u'$$

ومن قانون نيوتن التجريبي

$$0 - V = -e(u - (-u')) \qquad \text{Or} \quad V = e(u + u')$$
$$\therefore\ u - u' = V = e(u + v) \quad \text{Or} \quad (1-e)u = (1+e)u'$$

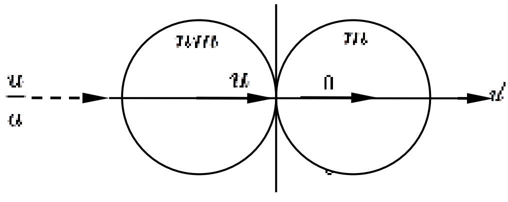
ولهذا فإن $\frac{u}{u'} = \frac{1+e}{1-e}$



مثـــ ٢ ـــال

اصطدمت كرة كتلتها nm وسرعتها $\frac{u}{a}$ تصادماً مباشراً بكرة أخرى كتلتها m وسرعتها u وكانت السرعتان في نفس الاتجاه. إذا وقفت الكرة ذات الكتلة m بعد التصادم فاوجد معامل الارتداد.

الحــــــل



نفرض أن الكرة ذات الكتلة nm تحركت بعد التصادم بسرعة V (في اتجاه خط التصادم حيث أن التصادم مباشر) و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$m(0)+nmV = mu + nm\left(\frac{u}{a}\right) \quad \Rightarrow nV = \left(1+\frac{n}{a}\right)u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V-0 = -e\left(\frac{u}{a}-u\right) \quad \Rightarrow V = eu\left(1-\frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

ومن المعادلتين (1) ، (2)

$$ne\cancel{u}\left(1-\frac{1}{a}\right) = \left(1+\frac{n}{a}\right)\cancel{u} \quad \Rightarrow e = \frac{a+n}{n(a-1)}$$

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك كرة ملساء بسرعة $20\ \text{ft}\sec^{-1}$ اصطدمت بمستوى افقي أملس ثابت و في اتجاه يصنع زاوية 60^0 مع المستوى فإذا كان معامل الارتداد يساوي $e = 0.5$ فإوجد سرعة الكـــرة و اتجاهها بعد التصادم ثم أوجد مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة في اتجاه المستوى لا تتغير (في الاتجاه العمودي على خط التصـــادم) أي أن

$$u\sin\theta = 20\sin 30 \quad \Rightarrow u\sin\theta = 10$$

من قانون نيوتن التجريبي

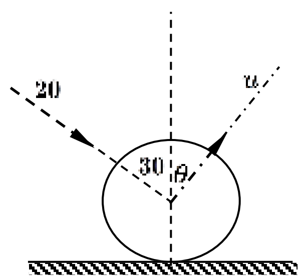
$$u\cos\theta = -e(-20\cos 30) \quad \text{Or} \quad u\cos\theta = 10\sqrt{3}(0.5) = 5\sqrt{3}$$

من المعادلتين بالتربيع والجمع نحصل على

$$u^2 = 100+75 = 175 \quad \Rightarrow u = \sqrt{175}$$

وبقسمة المعادلتين

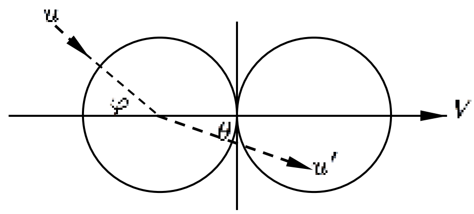
$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



مثـــال ٤

اصطدمت كرة بأخرى ساكنة مساوية لها في الكتلة تصادماً مائلاً. إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع مع خط التصادم زاوية φ. و كان e هومعامل الارتداد فاثبت ان اتجاه هذه الكرة بعد التصادم يصنع مع خط التصادم زاوية تتعين من $\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$.

الحـــــــل



من الشكل و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos\theta + mV = mu\cos\varphi + 0 \quad \Rightarrow u'\cos\theta + V = u\cos\varphi \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$u'\cos\theta - V = -e(u\cos\varphi - 0) \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore 2u'\cos\theta = (1-e)u\cos\varphi \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u\sin\varphi \qquad (4)$$

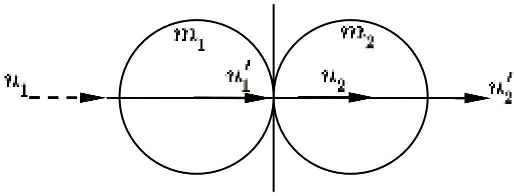
و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4)

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\tan\varphi}{1-e} \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\tan\varphi}{1-e} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$$

مثـــال ٥

اثبـــت أنـــه في حالـــة التصـــادم المباشـــر يكـــون الفقـــد في طاقـــة الحركـــة مســـاوياً $\dfrac{(1-e^2)m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2$ حيث m_1, m_2 تمثل كتلتا الكرتين ، u_1, u_2 سرعتيهما قبل التصادم ، e معامل الارتداد.

الحـــــــل



من الشكل ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط التصادم

$$m_1u_1' + m_2u_2' = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (1)$$

و ذلك بفرض أن سرعتي الكرتان بعد التصادم هما u_1', u_2' و من قانون نيوتن التجريبي

$$u_1' - u_2' = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

الآن بتربيع المعادلة (1) ، (2) وضرب المعادلة (2) في m_1m_2 ثم الجمع نحصل على

$$(m_1u_1' + m_2u_2')^2 + m_1m_2(u_1' - u_2')^2 = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

باضافة وطرح المقدار $m_1m_2(u_1 - u_2)^2$ إلى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة نجد أن

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) &= (m_1u_1 + m_2u_2)^2 \\ &\quad \pm m_1m_2(u_1 - u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2\end{aligned}$$

أي أن

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) &= \\ &(m_1 + m_2)(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2\end{aligned}$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ نحصل على

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

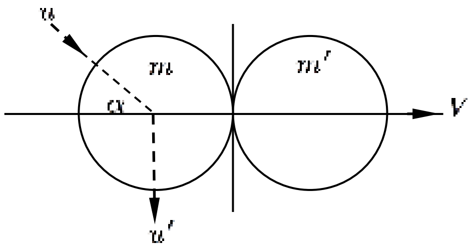
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2\right) = \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

من هذه العلاقة يتضح أن مجموع طاقتي الحركة بعد التصادم أقل من مجموع طاقتي حركة الكرتين قبل التصادم بمقدار $\frac{m_1 m_2 \ \ 1-e^2 \ \ (u_1-u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$ وهو ما يمثل مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

مثـــ ٦ ـــال

اصطدمت كرة ملساء بأخرى ساكنة. إذا كان اتجاها الحركة بعد التصادم متعامدين وكانـــت الكرتان تامتي المرونة فاثبت أن كتلتيهما متساويتان.

الحـــــــل



بفرض أن الكرة الساكنة كتلتها m' وحيث أن هذه الكرة كانت ساكنة فإن حركتها بعد التصادم يكون في اتجاه خط التصادم بسرعة ولتكن V وحيث أن اتجاها الحركة بعد التصادم متعامد فتكون السرعة u' عمودية على خط التصادم من الشكل وباعتبار أن كتلة الكرة الثانية m وسرعتها u في اتجاه يصنع زاوية α مع خط التصادم وأن سرعتها بعد التصادم u' و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos 90 + m'V = mu\cos\alpha + 0 \quad \Rightarrow m'V = mu\cos\alpha \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

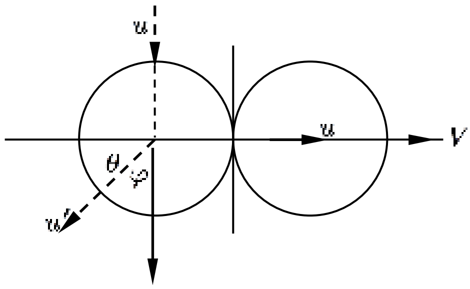
$$u'\cos 90 - V = -e(u\cos\alpha - 0) \quad \Rightarrow V = u\cos\alpha \quad (e=1) \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (2) يكون $\therefore m = m'$

مثـــ ٧ ـــال

تصطدم كرتان متساويتان وتتحركان بنفس السرعة و في اتجاهين متعامدين. إذا كــــان خـــط المركزين لحظة التصادم عمودياً على اتجاه الكرة الثانية وكان معامل الارتـــداد e فاثبـــت أن الكرة الثانية تنحرف بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ عن اتجاهها الأصلي.

الحـــــــل



من الشكل – مع مراعاة اتجاه السرعات – و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mV - mu'\cos\theta = mu\cos 90 + mu \qquad \Rightarrow V - u'\cos\theta = u \tag{1}$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - (-u'\cos\theta) = -e(u - u\cos 90) \qquad \Rightarrow V + u'\cos\theta = -eu \tag{2}$$

بطرح المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore\ 2u'\cos\theta = (1+e)u \tag{3}$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u \tag{4}$$

و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4) $\tan\theta = \frac{2}{1+e}$ ولحساب انحراف السرعة عن اتجاهها الأصلي حيث الانحراف عن الاتجاه الأصلي هو $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ و من ثم

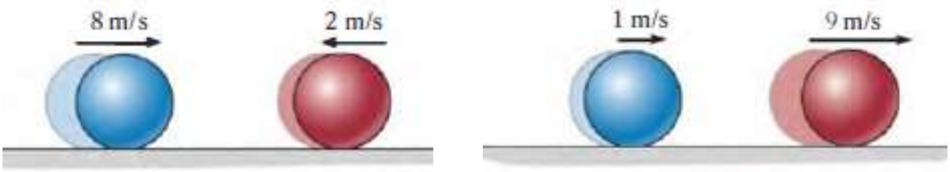
$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1+e}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{1+e}{2} \text{ Or } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

■ مســــائل Problems ■

١– تتحرك كرة كتلتها الوحدة بسرعة $8\ \mathrm{ft\,sec^{-1}}$ عندما صدمت مستوى أفقي أملس ثابت في اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الرأسي. اثبت أنه إذا كان معامل الارتداد يســاوي 0.5 فــإن مقدار الفقد في طاقة الحركة يساوي 12 وحدة طاقة.

٢- عيّن معامل الارتداد بين الكرتين المتساويتين الكتلة ١ ، ٢ حيث وضّحت السرعات قبل وبعد التصادم على الرسم.

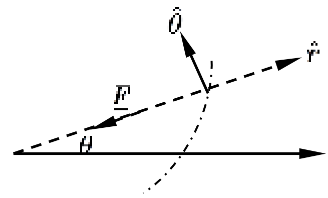


Before collision   After collision

الحركة المداريـة

Orbital Motion

سنعالج في هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى. كثيراً ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين O يسمى بمركز القوة. كما تُسمى القوة في هذه الحالة بالقوة المركزية – حيث تنعدم المركبة العمودية لقوة المجال (طاردة أو جاذبة) ومن ثم تنعـــدم العجلة العمودية لحركة الجسيم دائماً و بتطبيق هذا الشرط نجد أنه من الاحداثيات القطبية



$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ \ r^2\dot{\theta}\ \ = 0$$
$$\therefore\ r^2\dot{\theta} = h\ \ \text{(const.)}$$

ويسمى المسار الذي ترسمه القوة بالمسار المركزي.

■ المعادلة التفاضلية للمسار المركزي Differential Equation of Orbital Path

معادلة الحركة في الاتجاهين r,θ هما

$$m\ \ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ \ = -F \tag{1}$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\ \ r^2\dot{\theta}\ \ = 0 \tag{2}$$

المعادلة (2) تُعطي $r^2\dot{\theta} = h\ \ \text{(const.)}$

حيث h مقدار ثابت. المعادلتان (1) و (2) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب ومـــن هاتين المعادلتين بحذف $\dot{\theta}$ نحصل على

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{F}{m} \tag{3}$$

ويمكن اجراء تكامل للمعادلة (3) باستخدام التعويض $\left(r=\dfrac{1}{u}\right)$ وبحذف t منها

$$\because\ r=\frac{1}{u} \qquad \therefore\ \frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{dr/du}\frac{du}{d\theta}\underbrace{\frac{h}{r^2}}_{d\theta/dt}=-h\frac{du}{d\theta},$$

$$\therefore\ \ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$
$$=-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2},$$

وبتعويض عن هذه النتائج في المعادلة نحصل على

$$-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{F}{mh^2u^2} \tag{4}$$

هذه المعادلة تُسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي وهي تُستخدم لمعرفة قانون القوة المركزي إذا عُلمت معادلة المسار و أيضاً إذا عُلمت القوة المركزية F فإنه يمكن حل المعادلة التفاضلية وايجاد معادلة المسار.

و كحالة خاصة حينما تكون الحركة في مجال قوة تتبع قانون التربيع العكسي $F=\dfrac{\mu}{r^2}$ فمن المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu\cancel{u^2}}{mh^2\cancel{u^2}}=\frac{1}{\mu^\star}, \qquad \mu^\star=\frac{mh^2}{\mu}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها العام على الصورة

$$u=\frac{1}{\mu^\star}\quad 1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)$$

حيث ϵ,α ثابتي التكامل والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها

$$r=\frac{\mu^\star}{1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)}$$

وهذه المعادلة تُمثل قطع مخروط ويكون قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً حسبما تكون $1>\epsilon$ أو $1=\epsilon$ أو $1<\epsilon$ على الترتيب.

■ قانون السرعة Velocity Law

كما نعلم أن مركبتي السرعة في الاتجاهين r,θ هما $\dot{r},\ r\dot{\theta}$ ومن ثم فإن مقدار سرعة الجسيم v تتعين من $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ولكن $\dot{r} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ ومنها

$$v^2 = \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2h^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \qquad (5)$$

وهذه المعادلة تُعطي مقدار سرعة الجسيم عند أي موضع θ على المسار المركزي.

■ قوانين كبلر Kepler's Laws

من أهم تطبيقات الحركة بالاحداثيات القطبية هو دراسة حركة الكواكب. و لقد قام العالم يوهان كبلر (١٥٧١-١٦٣٠) و هو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية والمعرفة باسمه:

القانون الأول: تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

القانون الثاني: يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما أقترب من الشمس.

القانون الثالث: يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدوري ومعامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية.

هذه هي نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالي ٦٠ عاماً ليثبت على أساسها قانون الجذب العام والذي يُعتبر من أكبر كشوف الانسان

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية

كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب (الطرد) O هي عزم كمية الحركة الخطية حول O وتساوي -تذكر أن $v \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$ -

$$m\dot{r}(0) + mr\dot{\theta}(r) = mr^2\dot{\theta} = mh = \text{constant}$$

أي أن كمية الحركة الزاوية للجسيم حول المركز تظل ثابتة أثناء الحركة وهو ما يُسمى بمبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية.

■ السرعة المساحية **Area Velocity**

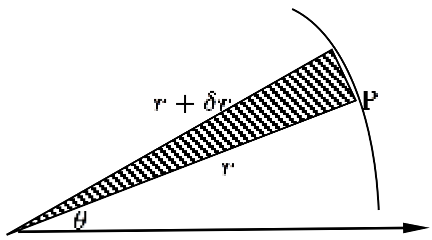
بفرض أن $\mathrm{P}(r,\theta)$ هو موضع الكوكب عند اللحظة الزمنية t وأنه بعد زمن صغير δt يكون عند الموضع $\mathrm{Q}(r+\delta r,\theta+\delta\theta)$. المساحة δA المقطوعة بمتجه الموضع خلال الفترة الزمنية δt تساوي تقريباً مساحة المثلث OPQ – كما بالشكل – أي أن

$$\delta A=\frac{1}{2}r(r+\delta r)\sin\delta\theta\cong\frac{1}{2}r^2\delta\theta$$

السرعة المساحية $\dot{A}$ هي المساحة التي يرسمها OP في وحدة الزمن و تتعين من

$$\begin{aligned}\dot{A}=\frac{dA}{dt}&=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta A}{\delta t}\\&=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}r^2\frac{\delta\theta}{\delta t}=\frac{1}{2}r^2\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t}\\&=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{h}=\frac{1}{2}h,\qquad \dot{A}=\frac{1}{2}h\end{aligned}$$

أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة في حالة المسار المركزي.



■ القُبا **Apse**

وتُعرف بأنها نقاط المسار المركزي والتي عندها يكون البعد عن مركز القوة نهاية عظمى أو صغرى. هذه الأبعاد تُسمى أبعاد القُبا أي عند نقط القُبا يكون $\dot{r}$ أو $\frac{du}{d\theta}$ أو $\frac{dr}{d\theta}$

وهذا يعني أنه عند القُبا تكون حركة الكوكب عمودية على متجه الموضع.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــال ١

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^2 = a^2\cos 2\theta$. اثبـــت أن الســـرعة تتناسب عكسياً مع r^3 وأن القوة تتناسب عكسياً مع r^7 .

الحـــــــل

باختيار $r = \dfrac{1}{u}$ فيكون

$$\frac{1}{u^2} = a^2\cos 2\theta$$

بالتفاضل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$-\cancel{2}\frac{1}{u^3}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{2}a^2\sin 2\theta \;\Rightarrow\; \frac{du}{d\theta} = a^2u^3\sin 2\theta$$

ولحساب قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = h^2\left(\left(a^2u^3\sin 2\theta\right)^2 + u^2\right)$$
$$= h^2\left(a^4u^6\sin^2 2\theta + u^2\right)$$
$$= h^2\left(a^4(1-\cos^2 2\theta)u^6 + u^2\right) = h^2\left(a^4u^6 - u^2 + u^2\right) = h^2a^4u^6$$

$$\therefore v^2 = h^2a^4u^6 \;\Rightarrow\; v = ha^2u^3 = \frac{ha^2}{r^3} \qquad \text{that is } v \propto \frac{1}{r^3}$$

بالتفاضل مرةً ثانية لــ $\dfrac{du}{d\theta}$ يكون

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2a^2u^3\cos 2\theta + 3a^2u^2\frac{du}{d\theta}\sin 2\theta = 2u^3\underbrace{a^2\cos 2\theta}_{1/u^2} + 3a^2u^2\underbrace{\left(\frac{du}{d\theta}\right)}_{a^2u^3\sin 2\theta}\sin 2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2u + 3a^4u^5\sin^2 2\theta = 2u + 3a^4u^5\left(1-\cos^2 2\theta\right)$$
$$= 2u + 3a^4u^5 - 3a^4u^5\cos^2 2\theta$$
$$= 2u + 3a^4u^5 - 3u = 3a^4u^5 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^5$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2\left(3a^4u^5\right) = 3ma^4h^2u^7 = \frac{3ma^4h^2}{r^7} \qquad \text{that is } F \propto \frac{1}{r^7}$$

مثـــ ٢ ـــال

إذا كان المسار المركزي لجسيم هو قطع مخروطي فاثبت أن القوة تخضـــع لقـــانون التربيـــع العكسي.

الحــــــــل

معادلة المسار هي $r = \dfrac{\ell}{1 + e\cos\theta}$ حيث e هو الاختلاف المركزي ، ℓ هو نصـــف وتره البؤري العمودي

$$\because\ u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow u = \frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta$$
$$\therefore\ \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\ell}\sin\theta, \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{\ell}\cos\theta = \frac{1}{\ell} - u$$

ومن ثم فإن قانون القوة يتعين من

$$\because\ F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$
$$= mh^2u^2\left(\frac{1}{\ell} - u + u\right) = \frac{mh^2}{\ell r^2} \qquad \text{i.e.} \quad F \propto \frac{1}{r^2}$$

مثـــ ٣ ـــال

اوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو القطب حتى يتحرك جسيم كتلته الوحدة على المسار $r = a(1 - \cos\theta)$. وإذا كان مقدار كل من سرعة الجسيم والقوة عند القُبا همـــا P, V فاثبت أن $3V^2 = 4aP$.

الحــــــــل

حيث أن $r = a(1 - \cos\theta)$ وباستخدام الفرضية $r = \dfrac{1}{u}$ نحصل على

$$\frac{1}{u} = a(1 - \cos\theta)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = a\sin\theta \ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -au^2\sin\theta$$

بالتفاضل مرةً أخرى بالنسبة إلى θ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -2au\frac{du}{d\theta}\sin\theta - au^2\cos\theta = 2a^2u^3\sin^2\theta - au^2\cos\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\sin^2\theta\ \ = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\ \ 1-\cos^2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta + 2au\ \ 1-\cos^2\theta$$

$$= -au^2\left(\cos\theta - 2u\underbrace{a\ \ 1-\cos\theta}_{1/u}\ (1+\cos\theta)\right)$$

$$= -au^2\ \ \cos\theta - 2(1+\cos\theta)$$

$$= -au^2(-2-\cos\theta) = -au^2(-3+\underbrace{1-\cos\theta}_{1/au})$$

$$= 3au^2 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3au^2$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2\ \ 3au^2\ \ = 3mah^2u^4\ = \frac{3mah^2}{r^4}$$

عند نقاط القُبا يكون

$$\dot r = 0\ \text{ Or }\ \frac{du}{d\theta} = 0 \qquad \Rightarrow -au^2\sin\theta = 0 \qquad \therefore \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\because h = r^2\dot\theta = \underbrace{(r\dot\theta)}_{V}r = 2aV \quad \text{Note } r\Big|_{\theta=\pi} = a(1-\cos\pi) = 2a$$

ومن قانون القوة التى حصلنا عليها

$$\because F = \frac{3ah^2}{r^4} \quad \Rightarrow F\Big|_{\theta=\pi} = P = \frac{3a(2aV)^2}{(2a)^4} \quad \Rightarrow \quad 3V^2\ = 4aP$$

مثـــ ٤ ـــال

جسيم كتلته واحد جرام يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية تتناسب عكسياً مع مكعب r بحيث أن القوة تساوي واحد داين عند $r = 1$ cm . أوجد معادلة المسار علماً بأنـــه عنـــد $\theta = 0$ فإن $r = 2$ cm والسرعة تساوي $\frac{1}{2}\,\text{cm}\sec^{-1}$ واتجاهها يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الثابت.

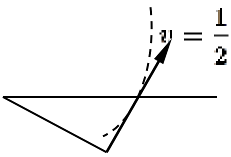
الحـــــل

حيث أن قوة الجذب تتناسب مع مكعب r فإن $F = \dfrac{\mu}{r^3}$ حيث μ ثابت التناسب ويمكن حساب قيمته من الشـــرط $F = 1$ عنـــدما $r = 1$ ويكـــون ثابـــت التناســـب $\mu = 1$ أي أن $F = \dfrac{1}{r^3}$ ومن المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u^3 \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u \quad \text{Or} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{1}{h^2}\right)u = 0 \quad (1)$$

نوجد الثابت h باستخدام مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب ويكون

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}(2\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - u = 0$

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\theta}\right) - u = 0 \quad \text{Or} \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)d\left(\frac{du}{d\theta}\right) - udu = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل ولحساب c_1 يلزمنا حساب $\dfrac{du}{d\theta}$ عندما $r = 2$ والتي يمكن حسابها من قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$$

وحيث أن $v = \dfrac{1}{2}$ عندما $u = \dfrac{1}{2}$ فإن

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\Bigg|_{r=2} = \frac{1}{4}$$

أي أن عند $u = \dfrac{1}{2}$ فإن $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ وبالتالي قيمة ثابت التكامل $c_1 = 0$ من المعادلة (2)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -u \qquad \text{Or} \qquad \frac{du}{u} = -d\theta$$

وبعد اجراء فصل المتغيرات ، الآن بالتكامل

$$\ln u=-\theta+c_2$$

ومن الشرط $u=\frac{1}{2}$ عندما $\theta=0$ نجد أن $c_2=-\ln 2$ Or $c_2=\ln\frac{1}{2}$

$$\ln u=-\theta-\ln 2 \quad \Rightarrow \ln r=\theta+\ln 2 \quad \text{Or} \quad r=2e^{\theta}$$

وهي معادلة المسار.

مثـــال ٥

تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مركزية جاذبة F وكانت سرعة النقطة المادية $v=\frac{\ell}{r}$ حيث ℓ ثابت. فاثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r وأن معادلة المســـار الذي تتحرك عليه النقطة المادية هي $r=e^{a\theta}$ حيـــث $a=\frac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2-h^2}$ إذا علمـــت أن $r=1$ عندما $\theta=0$.

الحـــــــل

من قانون السرعة حيث $v^2=\frac{\ell^2}{r^2}=\ell^2u^2$

$$v^2=h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\ell^2u^2 \tag{1}$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$2h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\cancel{\frac{du}{d\theta}}=2\ell^2u\cancel{\frac{du}{d\theta}} \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=\ell^2u$$

$$\because F=mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \qquad \Rightarrow F=mh^2\ell^2u^3=\frac{mh^2\ell^2}{r^3}$$

ولايجاد معادلة المسار من المعادلة (1)

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\ell^2u^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{\ell^2-h^2}{h^2}u^2$$

$$\text{Or} \quad \frac{du}{d\theta}=-\underbrace{\frac{\sqrt{\ell^2-h^2}}{h}}_{a}u=-au$$

واعتبرنا الاشارة سالبة لأن القوة جاذبة أى نحو المركز. بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{du}{u}=-ad\theta \quad \Rightarrow \ln u=-a\theta+c$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $r=1$ عندما $\theta=0$ ومنها $c=0$

$$\ln u=-a\theta \qquad \Rightarrow \ln\frac{1}{r}=-a\theta \quad \text{Or} \quad \ln r=a\theta \quad \text{Or} \quad r=e^{a\theta}$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت النسبة بين اكبر سرعة زاوية يدور بها كوكب حول الشمس واقل سـرعة زاوية تساوي γ^2 فاثبت أن الاختلاف المركزي لمسار هذا الكوكب هو $\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

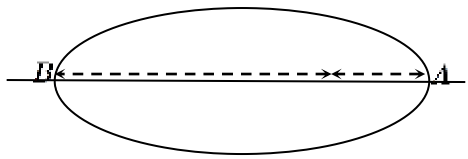
الحـــل

حسب قوانين كبلر فإن الكوكب يتحرك حول الشمس في مسار على شكل قطع ناقص و حيث أن $r^2\dot{\theta}=h \quad \therefore \dot{\theta}=\dfrac{h}{r^2}$

واضح أن السرعة الزاوية تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن الشمس r ومن ثم فإن اكبر سرعة زاوية تحدث عندما تكون r اصغر ما يمكن ، اي عندما $r=r_1$ حيث $r_1=OA=a-ae$ واصغر سرعة زاوية تحدث عندما $r=r_2$ حيث $r_2=OB=a+ae$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B}=\gamma^2=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1+e}{1-e} \qquad \text{Or} \qquad e=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$



مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^n=a^n\cos n\theta$. اثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع r^{2n+3}.

الحــــــــل

حيث أن $r^n = a^n \cos n\theta$ وباستخدام $r = \dfrac{1}{u}$ نجد أن

$$\frac{1}{u^n} = a^n \cos n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى المتغير θ

$$-\cancel{n}\,\frac{1}{u^{n+1}}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{n}a^n \sin n\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^n u^{n+1} \sin n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ مرة أخرى

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= na^n u^{n+1} \cos n\theta + (n+1)a^n u^n \frac{du}{d\theta} \sin n\theta \\ &= nu^{n+1} \underbrace{a^n \cos n\theta}_{1/u^n} + (n+1)a^n u^n \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^n u^{n+1} \sin n\theta} \sin n\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \sin^2 n\theta = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}(1 - \cos^2 n\theta) \\ &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u^{2n+1} \underbrace{a^{2n} \cos^2 n\theta}_{1/u^{2n}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1}$$

$$\because F = mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \ \ (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \ = (n+1)ma^{2n}h^2u^{2n+3} \ = \frac{3ma^{2n}h^2}{r^{2n+3}}$$

وهذا يعني أن $F \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$ (على الدراس استنتاج قانون السرعة)

■ مســـــــائل Problems ■

محاضرات في

الميكانيكا الكلاسيكية

الاستاتيكا

الدكتور / نصر الدين فريد الأنصارى

كلية العلوم بقنا

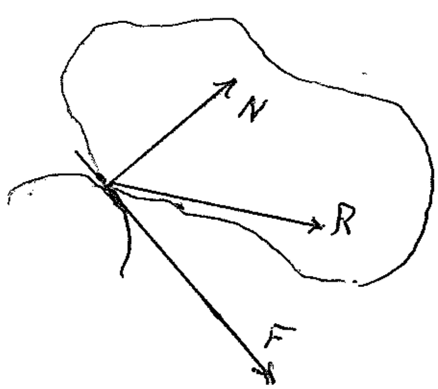
الباب الثالث

(الاحتكاك)

الباب الثالث

الاحتكاك

احتكاك الانزلاق : احتكاك الانزلاق هو تلك المقاومة يبديها الجسم عندما تؤثر عليه قوى تحاول تحريكه حركة انتقالية على سطح جسم آخر. لذا يطلق عليها قوى سلبية، بمعنى أنها لا تظهر إلا بظهور قوى تحاول تحريك الحالة الميكانيكية للجسم. من المعروف أنه عندما يتصل جسم بآخر يظهر رد فعل متبادل بينهما عندما يكون رد الفعل عموديا على المماس المشترك للجسمين (عمودى على مستوى الحركة المتوقعة) فإن الاتصال يسمى إتصالا مثاليا، ونعتبر الجسمين أملسين. أما فى الاتصال الغير مثالى (مصحوب باحتكاك) فيكون بجانب رد الفعل العمودى N قوة أخرى F فى اتجاه المماس المشترك للجسمين (قوة احتكاك) فى مستوى الحركة المتوقعة. وبذلك فإن رد الفعل الكلى أو المحصل R لا يكون عموديا حيث إنه يمثل محصلة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك كما هو موضح بالشكل المقابل.



قوانين احتكاك الانزلاق: عند دراسة ظاهرة الاحتكاك يجب التمييز بين الاحتكاك الإستاتيكي الذي يظهر عند السكون النسبي بين الأجسام المتصلة والاحتكاك الحركي (الديناميكي) الذي يظهر عند الحركة النسبية للأجسام المتصلة. قوانين احتكاك الانزلاق مستنتجة عمليا، ويمكن التعبير عنها كما يلي:

١- قوة احتكاك الانزلاق تؤثر في المستوى المماسي المشترك لسطوح الاتصال (مستوى الحركة)، وتأخذ أي قيمة ضرورية لمنع الانزلاق النسبي، ولكن لا تتعدى قيمة معينة (نهائية) محدودة F_m. تسمى F_m قوة الاحتكاك النهائية، وعندئذ يقال إن الجسم على وشك الانزلاق. أي أن:

$$F \leq F_m . \qquad (1)$$

٢- القيمة النهائية لقوة الاحتكاك (قوة الاحتكاك النهائية F_m) تعتمد على طبيعة الأجسام المتصلة وعلى حدود الأفعال المتبادلة بين هذه الأجسام، وتتناسب F_m مع رد الفعل العمودي N. أي أنه:

$$F_m = \mu_s N . \qquad (2)$$

حيث μ_s عدد حسابى يسمى معامل احتكاك الانزلاق الإستاتيكى أو المعامل الإستاتيكى لاحتكاك الانزلاق. ويعتمد μ_s على طبيعة الأجسام

٣- قوى الاحتكاك لا تعتمد على مساحة الأجزاء المتلامسة فى حالة احتكاك السطوح. من العلاقتين (1) ، (2) يتضح أن قوة الاحتكاك F تكون دائماً أقل من أو تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك فى رد الفعل العمودى. أى أن :

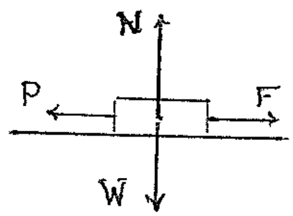
$$F \leq \mu_s N. \qquad (3)$$

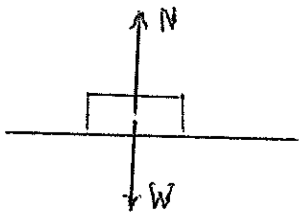
٤- عند الحركة فإن قوة الاحتكاك تتجه دائماً فى اتجاه مضاد لحركة الجسم (المقاوم الحركة) وقيمتها تتحدد بالعلاقة :

$$F = \mu_k N ,$$

حيث μ_k هو معامل احتكاك الانزلاق الحركى أو المعامل الديناميكى لاحتكاك الانزلاق، ويعتمد أيضاً على طبيعة الأجسام المتصلة ، وكذلك على سرعة الجسم. وعامة فإنه يتناقص أولاً بتزايد سرعة الجسم ثم يكاد يثبت بعد ذلك كما فى الشكل المقابل ($\mu_k < \mu_s$).

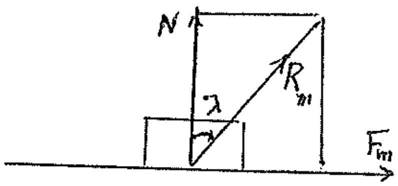
ولتوضيح ما سبق نفرض أن لدينا جسما وزنه W. وضع هذا الجسم على مستوى أفقى. ونفرض أن معامل الاحتكاك الإستاتيكى للجسم مع المستوى هو μ_s، فى هذه الحالة نجد أن: $W = N$،





ولا تظهر قوى الاحتكاك. عندما يؤثر على الجسم قوة أفقية P أقل من قوة الاحتكاك النهائى F_m، فإن الجسم يظل ساكنا. حيث إنه فى هذه الحالة تظهر قوة احتكاك F تتعادل مع P. فإذا زادت القوة P المؤثرة على الجسم حتى تساوى قوة الاحتكاك النهائى $P = \mu_s N$ قيل إن الجسم على وشك الانزلاق. وعندما يتحرك الجسم بسرعة ما $(v > 0)$ وذلك عندما تزيد القوة P المؤثرة على الجسم عن قوة الاحتكاك النهائى وتكون قوة الاحتكاك F فى هذه الحالة $F = \mu_k N$. وعلى ذلك فإذا واصلت القوة P تأثيرها على الجسم فإنه يتحرك بعجلة كما هو واضح من الشكل السابق.

زاوية ومخروط الاحتكاك : رد الفعل المحصل R كما علمنا هو محصلة رد الفعل العمودى N وقوة الاحتكاك F العمودية على N.



وحيث إن $F \leq F_m$ فإنه لقيم F المختلفة يأخذ رد الفعل المحصل R قيما مختلفة، وصانعا بذلك زوايا مختلفة مع رد الفعل العمودى N. أكبر قيمة لرد الفعل المحصل R_m تحدث عندما $F = F_m$، وفى هذه الحالة فإن الزاوية λ التى يصنعها R_m مع N (وهى أكبر زاوية ممكنة) تسمى زاوية الاحتكاك، وكما هو واضح من الشكل فإن :

$$F_m = N \tan \lambda . \qquad (4)$$

من المعادلتين (2) و (4) نحصل على :

$$\mu_s = \tan \lambda . \qquad (5)$$

أى أن معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الاحتكاك. وحيث إن الجسم يمكن أن يبدأ الحركة فى أى اتجاه على سطح الاتصال. لذلك فإن رد الفعل المحصل R يمكن أن يأخذ أى اتجاه داخل مخروط الرأس مسن

الضرورى أن يكون أفقيا إلا إذا كان السطح متجانسا) محوره ينطبق على العمودى على سطح التماس . أكبر مخروط يمكن لرد الفعل المحصل رسمه يسمى مخروط الاحتكاك ، ونصف زاوية رأس المخروط تساوى زاوية الاحتكاك.

مما سبق يتضح أن مسائل الاحتكاك يمكن تقسيمها إلى نوعين :

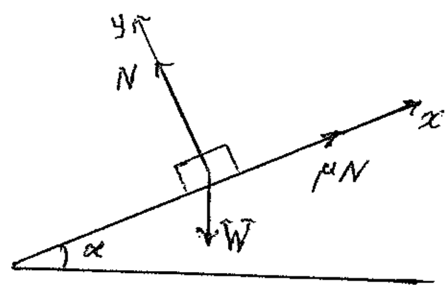
١- مسائل يبحث فيها عن كل الأوضاع الممكنة لاتزان الأجسام وفيها تأخذ قوة الاحتكاك أى قيمة لا تتعدى القيمة النهائية :

$F < F_m = \mu N$ وبذلك فإن حل مسائل هذا النوع يكون على صورة متباينات تحدد كل القيم الممكنة للمتغيرات .

٢- مسائل تكون فيها الأجسام على وشك الحركة (اتزان نهائى) وفيها تأخذ قوة الاحتكاك القيمة النهائية لها : $F = F_m = \mu N$

مثال : جسم وزنه W موضوع على مستوى مائل . أوجد أكبر زاوية يمكن أن يميل بها هذا المستوى بحيث يظل الجسم متزنا .

الحل : يكون ميل المستوى أكبر ما يمكن عندما يكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى ، وفى هذه الحالة تتجه



إلى قيمتها القصوى (الحرجة):　　$F = F_m = \mu N$

وعندئذ فإن شرط الاتزان (مجموع مركبات القوى فى اتجاه كل من محورى الإحداثيات x, y) يؤدى إلى:

$$\mu N - W \sin\alpha = 0,$$

$$N - W \cos\alpha = 0,$$

ومنها نجد أن:　　$$\tan\alpha = \mu = \tan\lambda.$$

أى أن $\alpha = \lambda$ حيث λ زاوية الاحتكاك، أى أن أكبر زاوية يمكن أن يميل بها مستوى ويظل الجسم الموضوع عليه فى حالة اتزان هى زاوية الاحتكاك. وإذا أردنا البحث عن كل زوايا ميل المستوى α الممكنة لأوضاع الاتزان المختلفة يجب استبدال قوة الاحتكاك القصوى $(F_m = \mu N)$ بقوة الاحتكاك F، وبذلك نحصل على:

$$F = W \sin\alpha \leq \mu N = \mu W \cos\alpha.$$

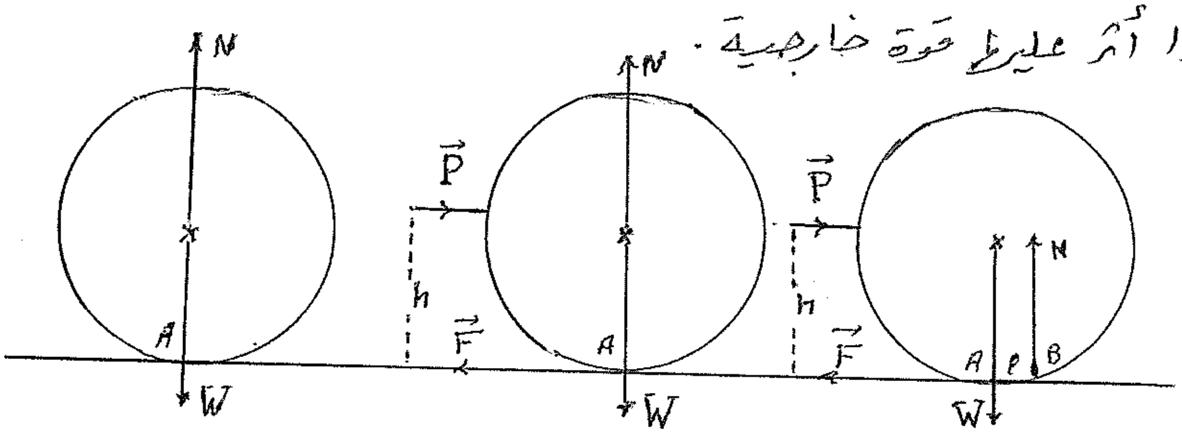
فيكون　　$$\sin\alpha \leq \mu \cos\alpha,$$

$$\tan\alpha \leq \mu.$$

أى أن الاتزان يكون ممكنا لكل زوايا ميل المستوى التى لا تتعدى زاوية الاحتكاك.

احتكاك الانقلاب أو التدحرج : احتكاك الانقلاب أو التدحرج هو تلك المقاومة التي يبديها الجسم عندما تحاول قوة خارجية قلب الجسم (أي دحرجته) على سطح جسم آخر.

نفترض بحث اتزان اسطوانة دائرية أو كرة مثلا نصف قطرها a ووزنها W موضوعة على مستوى أفقى فإن قوى الاحتكاك لا تظهر إلا إذا أثر عليها قوة خارجية.



نفرض أن القوة P تؤثر عليها في نقطة على ارتفاع h من المستوى فحينئذ يظهر عند نقطة اتصال الأسطوانة بالمستوى قوة احتكاك $\vec{F}$ التي تساوي في المقدار وتضاد في الاتجاه القوة P. فإذا اعتبرنا رد الفعل العمودي N يمر بالنقطة A فإنه يتعادل مع وزن الأسطوانة والقوتان $\vec{P}$ ، $\vec{F}$ تكونان ازدواجا يعمل على دوران الأسطوانة، وفي

هذه الحالة فإنه من الواضح أن الأسطوانة تبدأ الحركة تحت تأثير أى قيمة للقوة $\vec{P}$ مهما كانت صغيرة ، وفى الواقع فقد أظهرت التجربة أن الصورة الحقيقية ليست كذلك .

فنتيجة لتغير شكل الأجسام عند نقطة التلامس فإنه عند تأثير القوة $\vec{P}$ فإن ضغط الأسطوانة على المستوى يقل عند النقطة A ويزداد عند النقط الأخرى فى الجانب الآخر بالنسبة للقوة $\vec{P}$ ، ونتيجة لذلك فإن رد الفعل العمودى N لا يؤثر فى النقطة A بل فى نقطة أخرى B مثلاً على بعد l من النقطة A . وبزيادة القوة $\vec{P}$ تزداد المسافة l إلى أن تصل إلى حد أقصى لا تتعداه ، وبذلك يؤثر على الأسطوانة : الازدواج $(\vec{F}, \vec{P})$ وعزمه Ph وهذا الازدواج يتعادل مع الازدواج $(\vec{W}, \vec{N})$ وعزمه يساوى Nl.

أى أن :

$$Ph = Nl . \qquad (6)$$

الازدواج الأول يسمى ازدواج الدوران ، والثانى يسمى ازدواج الاحتكاك (أو الانقلاب) . يلاحظ أن عزم ازدواج الاحتكاك يزداد بزيادة

عزم ازدواج الدوران أو بزيادة القوة الخارجية، وكلها لا يتعدى قيمة معينة. أي أنه:

$$N\ell \leq N\ell_0 ,$$

وبذلك يكون شرط اتزان الأسطوانة على المستوى هو:

$$Ph \leq N\ell_0 ,$$

$$P = F \leq \frac{\ell_0}{h} N = \mu_r N.$$

حيث $\mu_r = \frac{\ell_0}{h}$ يسمى معامل احتكاك الانقلاب (أو التدحرج)، ومن ذلك يتضح أنه إذا كانت:

$$\mu_r N < P < \mu_s N ,$$

حيث μ_s معامل احتكاك الانزلاق، فإن الجسم ينقلب (يتدحرج) ولا ينزلق. أما إذا كانت:

$$\mu_s N < P < \mu_r N ,$$

فإن الجسم ينزلق ولا ينقلب. وفى الحالة العامة عندما يكون:

$$P > \mu_s N , \qquad P > \mu_r N .$$

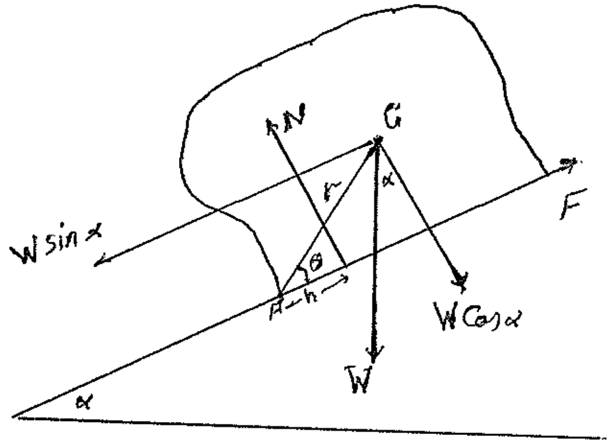
فإن الجسم ينزلق وينقلب فى وقت واحد.

ومن جهة أخرى حيث إن القوى الخارجية المؤثرة على جسم ملامس لجسم آخر تكافئ قوة $\vec{F}$ عند نقطة التماس، وازدواج $\vec{L}$ عزمه يساوى مجموع عزوم القوى الخارجية حول نقطة التماس. فإنه يمكن توضيح ما سبق بطريقة أخرى كما يلى:

فى حالة الاتزان فإن محصلة ردود الأفعال على الجسم تكافئ قوة $\vec{R}$ $(\vec{R}=-\vec{F})$ عند نقطة التماس، وازدواج $\vec{G}$ $(\vec{G}=-\vec{L})$. يسمى الازدواج $\vec{G}$ بازدواج الاحتكاك ويقاوم تدحرج الجسم على الآخر الملامس له. وكما فى احتكاك الانزلاق فإنه لا يمكن لعزم ازدواج الاحتكاك أن يتعدى قيمة معينة، ويقال للجسم عندها إنه على وشك الانقلاب (أو التدحرج) وفى هذه الحالة تتناسب قوى هذا الازدواج مع رد الفعل العمودى، ويسمى ثابت التناسب معامل احتكاك الانقلاب.

مثال: ادرس اتزان جسم قاعدته سطحه على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية α.

الحل: يتزن الجسم تحت تأثير وزنه $\vec{W}$ الذى يؤثر فى مركز



ثقله G إلى أسفل ومركبتي رد الفعل (قوة الاحتكاك F في اتجاه المستوى إلى أعلى ورد الفعل العمودي N الذي يؤثر على بعد h من أسفل نقطة من الجسم A . الشرط الضروري والكافي للاتزان هو :

١- مجموع مركبات القوى في اتجاه المستوى والعمودي عليه يساوي الصفر أي

$$F = W \sin\alpha , \qquad N = W \cos\alpha .$$

٢- مجموع عزوم القوى حول A يساوي الصفر ، أي أنه :

$$Nh + W\sin\alpha\,(r\sin\theta) - W\cos\alpha\,(r\cos\theta) = 0 .$$

حيث (r, θ) هما الإحداثيات القطبية لمركز الثقل C بالنسبة للنقطة A .

يلاحظ أنه بازدياد زاوية ميل المستوى α تزداد مركبة الوزن في اتجاه المستوى $(W \sin\alpha)$ ويتبع ذلك زيادة قيمة الاحتكاك F، وتقل المسافة h . فإذا وصلت قوة الاحتكاك إلى قيمتها النهائية

F_m قبل أن تتلاشى المسافة h فإن الجسم يصبح على وشك الانزلاق ويبدأ بذلك الانزلاق قبل الانقلاب . أما إذا تلاشت المسافة h قبل أن تصل قوة الاحتكاك إلى قيمتها النهائية فإن الجسم يصبح على وشك الانقلاب . ويبدأ بذلك الانقلاب قبل الانزلاق . أى أنه عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق فإن :

$$F = F_m = \mu N ,$$

وبالتعويض بهذه القيمة في شرط الاتزان نحصل على :

$$\sin\alpha = \mu \cos\alpha .$$

ومنها نجد أن $\alpha = \lambda$. وبذلك نحصل على الصور الآتية لقيم α :

$\alpha < \lambda$ لا يحدث انزلاق .

$\alpha = \lambda$ الجسم على وشك الانزلاق .

$\alpha > \lambda$ ينزلق الجسم .

ومن جهة أخرى عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق نضع $h = 0$ في شرط الاتزان نحصل على :

$$\sin\alpha \sin\theta = \cos\alpha \cos\theta .$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

أى أن : $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta ,$

وبذلك نحصل على الصور الآتية لقيم α :

$\alpha < \frac{\pi}{2} - \theta$ لا يحدث انقلاب .

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ الجسم على وشك الانقلاب .

$\alpha > \frac{\pi}{2} - \theta$ ينقلب الجسم .

مما سبق يتضح أنه لكى ينزلق الجسم قبل أن ينقلب يجب أن يكون

$$\lambda < \alpha < \frac{\pi}{2} - \theta .$$

أى أن : $\alpha > \lambda , \quad \alpha + \theta < \frac{\pi}{2} .$

أما إذا كانت : $\lambda > \alpha > \frac{\pi}{2} - \theta ,$

أى $\alpha > \lambda , \quad \alpha + \theta > \frac{\pi}{2} .$

فإن الجسم ينقلب قبل أن ينزلق ، وفى الحالة العامة عندما يكون

$$\lambda < \alpha > \frac{\pi}{2} - \theta ,$$

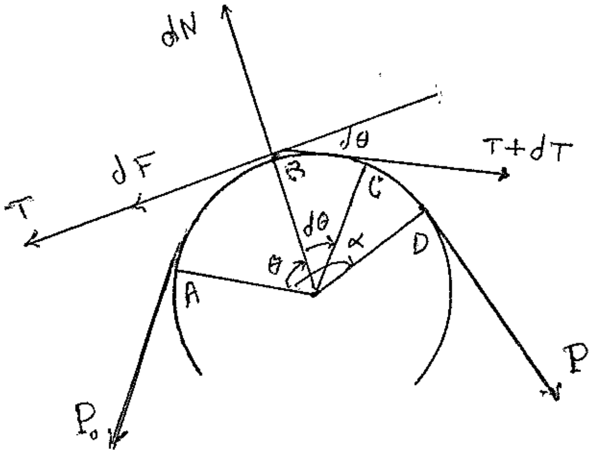
أى عندما يكون $\alpha > \lambda , \ \alpha + \theta > \frac{\pi}{2}$ يحدث الانقلاب والانزلاق فى نفس الوقت .

احتكاك الدوران: احتكاك الدوران هو تلك المقاومة التى يبديها الجسم عندما يؤثر عليه ازدواج يعمل على دورانه. ففى هذه عندما نؤثر على جسم ملامس لجسم آخر بازدواج $\vec{L}$ مثلا فإنه يظهر عند سطح الاتصال ازدواج آخر $\vec{G}$. يسمى الازدواج $\vec{G}$ ازدواج الاحتكاك. وحيث إن الجسم لا يبدأ فى الدوران قبل أن يصل عزم الازدواج المؤثر عليه إلى قيمة معينة فإنه فى هذه الحالة يكون عزم ازدواج الاحتكاك قد وصل إلى قيمته العظمى. ويقال عندئذ إن الجسم على وشك الدوران. وفى هذه الحالة أيضا فإن قوة الاحتكاك (إحدى قوى ازدواج الاحتكاك $\vec{F}$ مثلا) تتناسب مع رد الفعل العمودى على مستوى أى من الازدواجين $(\vec{L}, \vec{G})$ أى أن:

$$F = \mu N .$$

حيث N رد الفعل العمودى على مستوى الازدواج ، μ مقدار قياسى ثابت يسمى معامل احتكاك الدوران.

احتكاك السيور والخيوط مع السطوح الأسطوانية : نفرض أن الخيط (السير) يمس سطح الأسطوانة الدائرية فى القوس $ABCD$: الذى يقابل الزاوية المركزية α ، μ معامل الاحتكاك وتؤثر فى نهاية الخيط قوتان مقدارهما : P ، P_0 . كما بالشكل.



الجزء BC من الخيط يتزن تحت تأثير الشد $T+dT$ ، T فى اتجاهى المماس عند C ، B على الترتيب ، ورد الفعل المحصل وهما : dN فى اتجاه العمودى على المماس عند B وقوة الاحتكاك $\mu dN = dF$ فى اتجاه المماس (الخيط على وشك الانزلاق) . وبذلك نحقق شرط الاتزان نحصل على :

$$(T+dT)\cos d\theta = T + \mu\, dN,$$

$$dN = (T+dT)\sin d\theta .$$

وحيث أن الزاوية $d\theta$ صغيرة فيمكن اعتبار أن $\sin d\theta = d\theta$ ، $\cos d\theta = 1$. وعندئذ يمكن إهمال الجزء الثانى فى الطرف الأيمن

من المعادلة الثانية ، وبذلك نحصل على :

$$dT = \mu\, dN , \quad dN = T\, d\theta .$$

بحذف dN من المعادلتين السابقتين ثم بالتجميع على كل عناصر الخيط الملامس لسطح الأسطوانة نحصل على :

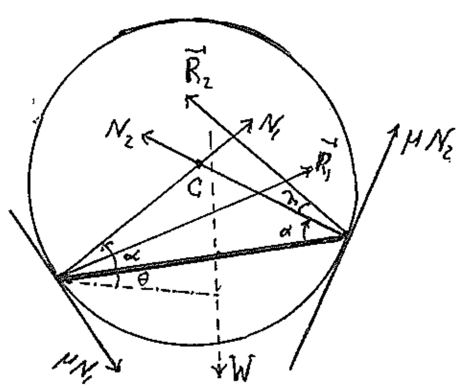
$$\int_{P_0}^{P} \frac{dT}{T} = \mu \int_{0}^{\alpha} d\theta$$

أى أن $\qquad \ln \frac{P}{P_0} = \mu \alpha \qquad \therefore \; P = P_0\, e^{\mu\alpha} . \qquad (8)$

واضح أنه عندما يكون السطح أملس $(\mu = 0)$ فإن الشد فى جميع أجزاء الخيط يكون ثابتا .

أمثلة

١- وضع قضيب منتظم طوله $2l$ داخل كرة نصف قطرها a . فى المستوى الرأسى المار بمركز الكرة . إذا كانت زاوية الاحتكاك بين القضيب والكرة هى λ . فأوجد أكبر ميل للقضيب على الأفقى إذا كانت $l < a \cos\lambda$.



الحل : القضيب واقع تحت تأثير وزنه W إلى أسفل ، وردى الفعل المحصلين $\vec{R}_2$, $\vec{R}_1$ عند

زاويتيه ويصنع كل منهما مع العمودى على المماس زاوية الاحتكاك λ. يمكن تحليل كل من $\vec{R}_2$ ، $\vec{R}_1$ إلى مركبتيهما فى اتجاه المركز (العمودى على المماس) وفى اتجاه المماس كما هو موضح بالشكل المقابل، وباعتبار الحالة الثانية (مركبات ردود الأفعال) وتطبيق شرط الاتزان (بتحليل القوى المؤثرة فى اتجاه القضيب والعمودى عليه) نحصل على :

$$(N_1 - N_2)\cos\alpha + \mu(N_1 + N_2)\sin\alpha - W\sin\alpha = 0 ,$$

$$(N_1 + N_2)\sin\alpha + \mu(N_2 - N_1)\cos\alpha - W\cos\alpha = 0 .$$

وبأخذ العزوم حول المركز C نجد أن :

$$\mu(N_1 + N_2)\,a = W\sqrt{a^2 - \ell^2}\,\sin\theta .$$

بحذف N_1 و N_2 من العلاقات السابقة علما بأن :

$$\cos\alpha = \ell / a , \qquad \mu = \tan\lambda ,$$

نحصل على :

$$\tan\theta = \frac{a^2\sin\lambda\cos\lambda}{a^2\cos^2\lambda - \ell^2} .$$

يلاحظ أنه يمكن اعتبار الحالة الأولى (ردود الأفعال المحصلة R_1 و R_2)

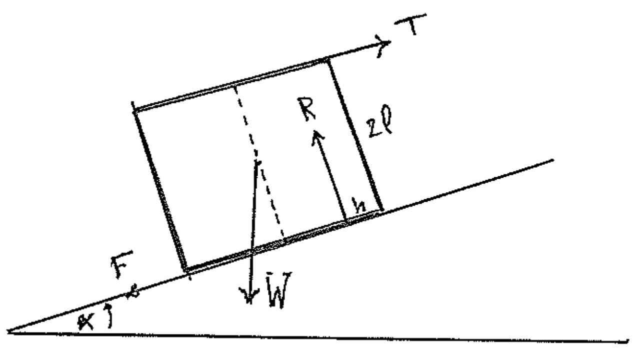
وباستخدام العلاقة (13) نحصل على :

$$2\tan\theta = \cot(\alpha-\lambda) - \cot(\alpha+\lambda),$$

وبالتعويض عن α نحصل على نفس النتيجة السابقة.

٣- وضع مربع على مستوى مائل خشن بحيث كان مستواه رأسيا، والظهور أحد أضلاعه على خط أكبر ميل. ربط خيط فى رأس المربع العليا، وشد فى اتجاه يوازى خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى. أثبت أنه إذا زاد الشد بالتدريج فإن المربع ينزلق أو ينقلب حسبما يكون ميل المستوى أصغر أو أكبر من : $\tan^{-1}(1-2\mu)$ حيث μ معامل الاحتكاك.

الحل : القوى المؤثرة على الجسم هى : وزنه W، والشد فى الخيط، وقوة الاحتكاك F الى أسفل المستوى، ورد الفعل



R ويؤثر على بعد h من منطقة المربع كما بالشكل. بتطبيق شرط الاتزان نجد أن:

$$T = F + W\sin\alpha, \qquad R = W\cos\alpha,$$

$$Rh = 2Tl = Wl(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

حيث $2l$ طول ضلع المربع.

هذه العلاقات يمكن وضعها بالصورة :

$$h = \frac{W\ell(\sin\alpha + \cos\alpha) - 2T\ell}{R},$$

$$F = T - W\sin\alpha .$$

والآن نعلم أن شرط حدوث الانزلاق قبل الانقلاب هو :

$$h > 0 , \qquad F = \mu R = \mu W \cos\alpha .$$

بينما شرط حدوث الانقلاب قبل الانزلاق هو :

$$h = 0 , \qquad F < \mu R = \mu W \cos\alpha .$$

وبذلك فإن الجسم ينزلق أو ينقلب حسبما يكون :

$$W(\sin\alpha + \cos\alpha) - 2T \gtrless 0 , \qquad T - W\sin\alpha \lessgtr \mu W\cos\alpha .$$

من العلاقة الأولى نجد أن :

$$T \lessgtr \frac{W}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha),$$

ومن الثانية فإن :

$$T \lessgtr W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) .$$

من هاتين العلاقتين نجد أن الجسم ينزلق أو ينقلب حسبما يكون :

$$\frac{W}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) \gtrless W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) .$$

أى أن :

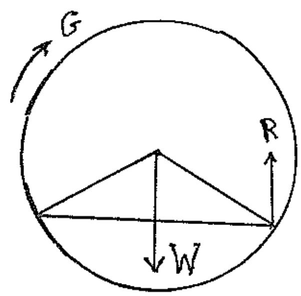
$$\sin\alpha \lesssim (1-2\mu)\cos\alpha ,$$

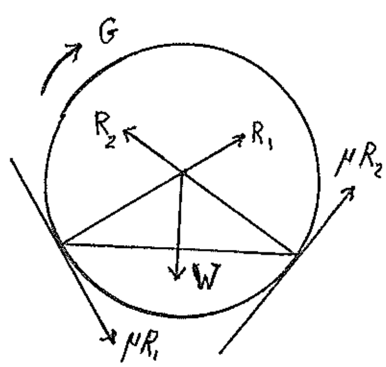
أى أنه :

$$\tan\alpha \lesssim 1-2\mu ,$$

$$\therefore \quad \alpha \lesssim \tan^{-1}(1-2\mu) .$$

٣- أسطوانة دائرية قائمة منتظمة نصف قطر قاعدتها a ، ووزنها W . استقرت الأسطوانة ومحورها أفقيا على قضيبين أفقيين متوازيين فى نفس المستوى الأفقى، والمسافة بينهما تساوى $2a\sin\alpha$. أثبت أنه إذا أثر عليها ازدواج يزداد بالتدرج فى المستوى العمودى على القضبان والمحور فإنها تدور حول أحد القضبان عندما يكون مقدار الازدواج يساوى $Wa\sin\alpha$ وزاوية الاحتكاك $\lambda > \alpha$ وإلا فإن الأسطوانة تدور حول محورها عندما يكون عزم الازدواج يساوى $\frac{W}{2}a\sin 2\lambda\sec\alpha$.





الحل :

أولا : عندما تدور الأسطوانة حول أحد القضبان فإن رد الفعل عند القضيب الآخر يساوى الصفر ، وبذلك فإن رد الفعل المحصل R عند محور الدوران يكون رأسيا ليتزن مع

الوزن W . وبذلك فإنه يكون معه ازدواجا ليتعادل مع الازدواج المؤثر G

أى أن :
$$G = W a \sin \alpha .$$

ثانيا : فى الحالة الثانية عندما تدور الأسطوانة حول محورها فإنه يحدث انزلاق على القضيبين ويمكن تحليل كل من ردى الفعل إلى مركبتين فى اتجاه المماس للأسطوانة والعمودى عليه (يمر بمركز ثقل الأسطوانة) كما بالشكل السابق .

وبتطبيق شرط الاتزان نحصل على :

$$(R_1 - R_2) \sin \alpha + \mu (R_1 + R_2) \cos \alpha = 0 ,$$

$$(R_1 + R_2) \cos \alpha + \mu (R_2 - R_1) \sin \alpha = W ,$$

$$G = \mu (R_1 + R_2) a .$$

من المعادلة الأولى والثانية نجد أن :

$$R_1 + R_2 = W \cos^2 \lambda \sec \alpha .$$

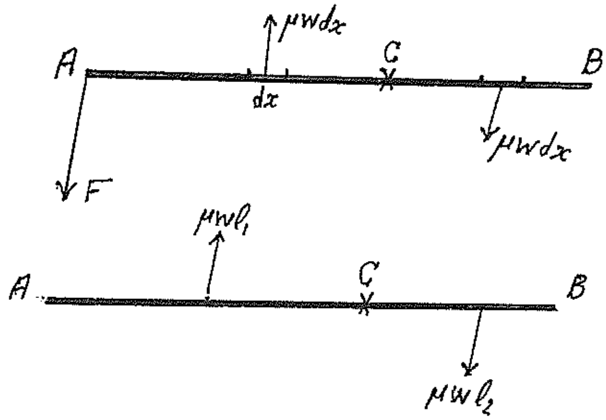
ثم بالتعويض عن $R_1 + R_2$ فى المعادلة الثالثة نحصل على :

$$G = \frac{W a}{2} \sin 2\lambda \sec \alpha$$

٤ - قضيب منتظم AB يستقر على منضدة خشنة ، وأثرت عليه عند النهاية A قوة تتزايد بالتدريج حتى أصبح على وشك الدوران حول النقطة C من القضيب.

أثبت أن القوة المؤثرة عند A يجب أن تكون عمودية على القضيب وأن النقطة

C يجب أن تقسم AB بحيث يكون : $AC : CB = 1+\sqrt{2} : 1$



الحل : عندما يبدأ القضيب فى الدوران حول نقطة منه C مثلاً فإن القوى المؤثرة على عنصر dx من القضيب هى : وزنه $w dx$ إلى أسفل حيث w وزن وحدة الطول من القضيب . يتعادل مع هذا الوزن فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى رد الفعل العمودى . وعندئذ تكون قوة الاحتكاك فى مستوى القضيب فى اتجاه المماس للدائرة التى يرسمها هذا العنصر عند دورانه كما فى الشكل . وبذلك تكون محصلة قوى الاحتكاك المؤثرة على الجزء AC فى منتصفه وتساوى $\mu w l_1$ حيث l_1 هو طول الجزء AC ، وبالمثل بالنسبة للجزء CB فإن محصلة قوى الاحتكاك تؤثر فى منتصفه وتساوى $\mu w l_2$ حيث l_2 طول الجزء CB . يلاحظ أنهما عموديان على القضيب وفى اتجاهين متضادين . لذلك فإن القوة الخارجية F

المؤثرة عند A التى تتعادل معها يجب أن تكون عمودية على محور هذا القضيب ، وعندئذ نجد أن :

$$F = \mu W (l_1 - l_2) .$$

وبأخذ العزوم حول C نحصل على :

$$F l_1 = \frac{\mu W}{2} (l_1^2 + l_2^2) .$$

وبحذف F من العلاقتين السابقتين نجد أن :

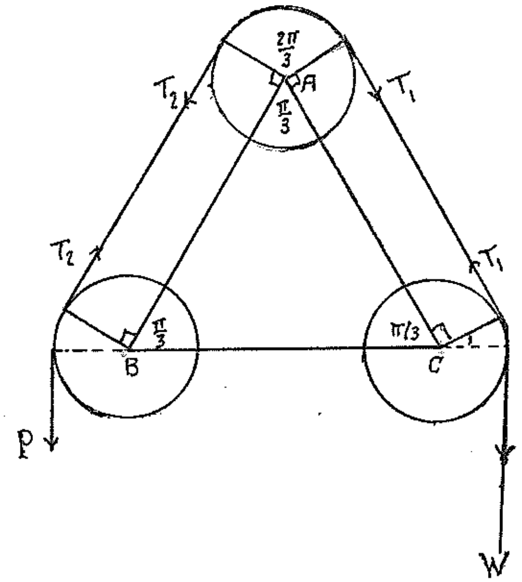
$$2l_1 (l_1 - l_2) = l_1^2 + l_2^2 ,$$

$$\therefore \quad l_1 = l_2 (1 \pm \sqrt{2})$$

واضح أنه يجب استبعاد الإشارة السالبة (لأن $l_1 > 0$) وبذلك نحصل على :

$$l_1 : l_2 = (1+\sqrt{2}) : 1$$

٥ - ثلاثة أوتاد متساوية نصف قطر كل منها a وضعت عند رؤوس المثلث ABC المتساوى الأضلاع بحيث كان BC أفقيا . التف خيط حول الأوتاد الثلاثة ، وأثر فى أحد طرفيه الوزن W . أوجد القوة P التى يجب أن تؤثر فى الطرف الآخر من الخيط حتى لا ينزلق هذا الخيط .



الحل : بتطبيق العلاقة (8) نجد أن:

$$W = T_1 e^{\mu\pi/6},$$

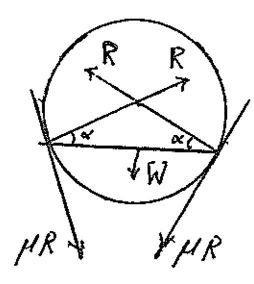
$$T_1 = T_2 e^{2\mu\pi/3},$$

$$T_2 = P e^{\mu\pi/6},$$

وبحذف T_1 و T_2 من العلاقات السابقة نحصل على :

$$P = W e^{-\mu\pi}.$$

6- قضيب منتظم طوله $2l$. وضع أفقياً أعلى ما يمكن داخل كرة جوفاء خشنة نصف قطرها a . أثبت أن المستقيم الواصل من منتصف القضيب إلى مركز الكرة يصنع زاوية مع الرأسى هى : $\tan^{-1}\frac{\mu a}{\sqrt{a^2-l^2}}$ ، حيث μ معامل الاحتكاك.



الحل : رد الفعل عند طرفي القضيب عبارة عن مركبة عمودية على المماس المشترك للقضيب والكرة R ، وهذه المركبة تمر بمركز الكرة ، وقوة احتكاك μR فى اتجاه المماس

للكرة العمودى على المستوى الذى يحتوى القضيب ومركز الكرة (مستوى الحركة) وهذه المجموعة من القوى تتعادل مع وزن القضيب. حيث أن مركبتى ردى الفعل فى المستوى الذى يحتوى القضيب ومركز الكرة، وبتحليل الوزن إلى مركبتين فى هذا المستوى والعمودى عليه نحصل على:

$$W\cos\theta = 2R\sin\alpha\ ,$$

$$W\sin\theta = 2\mu R\ .$$

ومنها نجد أن:

$$\tan\theta = \mu/\sin\alpha\ .$$

وحيث أن $\sin\alpha = \sqrt{a^2-\ell^2}/a$، وبالتعويض نحصل على:

$$\tan\theta = \mu a/\sqrt{a^2-\ell^2}$$

أو

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\mu a}{\sqrt{a^2-\ell^2}}\ .$$

تمارين

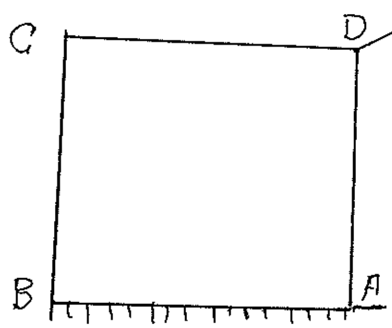
١- إذا كانت F أقل قوة تكفى لمنع جسم من الانزلاق أسفل مستوى مائل خشن تؤثر فى اتجاه المستوى، وكانت زاوية الاحتكاك λ أقل من زاوية ميل المستوى α . أثبت أن أقل قوة فى اتجاه المستوى تكفى لتحريك الجسم إلى أعلى تساوى : $F\,\dfrac{\sin(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha-\lambda)}$.

٢- وضع متوازى مستطيلات منتظم طول ضلع قاعدته المربعة $2a$ ، وارتفاعه $2b$ على منضدة أفقية خشنة معامل احتكاكها μ . أثرت قوة أفقية فى منتصف أحد الأحرف العليا لأحد الأوجه الرأسية بحيث تكون عمودية على هذا الحرف . وازداد مقدار القوة حتى اختل الاتزان . أثبت أن الجسم ينقلب أو ينزلق إذا كان $\mu \gtrless \dfrac{a}{2b}$.

٣- وضعت أسطوانة منتظمة نصف قطرها r وارتفاعها h بقاعدتها على مستوى خشن مائل . بزيادة ميل المستوى بالتدريج أثبت أن

الأسطوانة تنقلب قبل أن تنزلق إذا كان: $\frac{2r}{h} < \mu$.

٤- يمثل المربع $ABCD$ مكعبا ينطبق وجهه AB على مستوى أفقى خشن وزاوية احتكاكه λ . ربط خيط خ D ويمر على بكرة مثبتة عند E ويتدلى من نهايته الأخرى وزن P . إذا كانت زاوية ميل DE مع الرأسى هى α فأثبت أن المكعب يدور منقلبا حول A دون أن ينزلق إذا كان: $\cot\lambda + \cot\alpha < 2$.



٥- قضيب منتظم الكثافة طوله 4 قدم ووزنه W يستطيع الحركة فى جميع الاتجاهات حول مفصلة كروية ملساء. ثبت القضيب من أحد طرفيه وارتكز الطرف الآخر على حائط رأسى خشن يبعد مسافة 2 قدم من المفصلة. فإذا علم أن المستوى الرأسى المار بالقضيب يصنع مع الحائط زاويه 60° فى وضع الاتزان الحرج. أوجد معامل الاحتكاك وردى الفعل عند طرفى القضيب .

الباب الرابع

(مركز الجذب (الثقل)

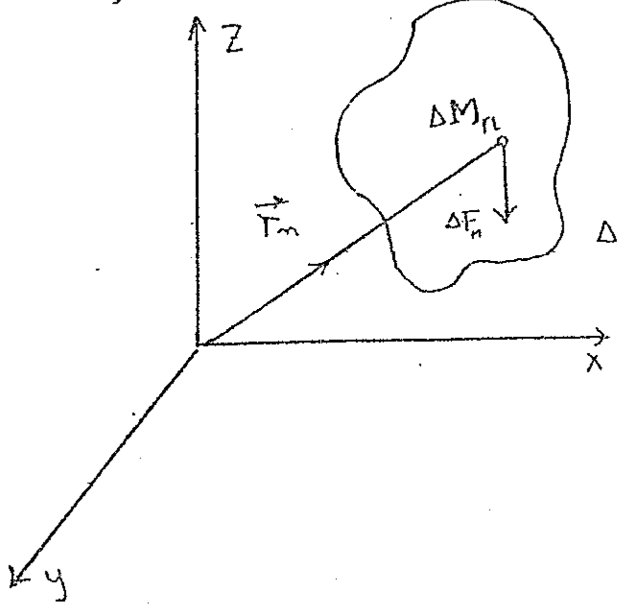
ومركز الكتلة)

الباب الرابع

مركز الجــــذب (الثقل) ومركز الكتـــــلة

مقدمة :

إذا قسم الجسم إلى عناصر كل صغيرة فإن قوة جذب الأرض لكل عنصر من هذه العناصر تؤثر فى نقطة يمكن اعتبار أنها تنطبق تماما مع نفس العنصر، وعند اعتبار جسم صغير بالنسبة للأرض فإن محصلة هذه القوى تكون متوازية فيما بينها ومحصلتها تساوى وزن الجسم وخط عملها يمر بنقطة محددة هى مركز قوى الجذب المتوازية وعند تغيير وضع الجسم فى الفراغ (تغيير اتجاه قوى الجذب بالنسبة للجسم) فإن هذه النقطة لا تغير وضعها بالنسبة للجسم ولهذا تسمى مركز جذبه أو مركز ثقله . وعلى ذلك فإيجاد مركز الجذب يعنى تحديد مركز قوى الجذب المتوازية .



نفرض أن ΔM_n عنصر كتلة عند النقطة n (متجه موضعها r_n) من جسم كتلته M وأن قوة الجذب المؤثرة على هذا العنصر ΔF_n تساوى وزن هذا العنصر أى أن

$$\Delta F_n = g \, \Delta M_n$$

يلاحظ أننا اعتبرنا عجلة الجاذبية الأرضيه g ثابتة حيث أن الجسم صغير بالنسبة للأرض وعندئذ فإن قوة جذب الأرض لأى عنصر تتناسب مع كتلته ومركز جذب هذه العناصر ينطبق مع مركز كتلتها .

وباعتبار أن قوى جذب كل العناصر متوازية فإن مقدار محصلتها يساوى مجموع وزن هذه العناصر أى وزن الجسم الكلى وبذلك فإن متجه الموضع (نصف القطر الاتجاهى) والإحداثيات الكرتيزية لنقطـــــة تأثير هذه المحصلة (مركز الجذب) محدد كما سبق على أنها متجه موضع وإحداثيـات مركز القــــوى المتوازية بالعلاقات الآتيـــــة :

$$\vec{r} = \frac{\sum_n \vec{r}_n \, \Delta F_n}{\sum_n \Delta F_n} = \frac{\sum_n \vec{r}_n \, \Delta M_n}{M},$$

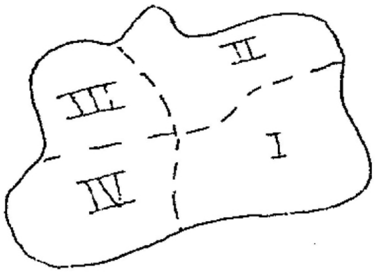
$$\bar{x} = \frac{\sum_n x_n \, \Delta M_n}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_n y_n \, \Delta M_n}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_n z_n \, \Delta M_n}{M},$$

حيث $\vec{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ متجه موضع مركز ثقل الجسم وإحداثياته الكرتيزية هى $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

يلاحظ أن مركز الثقل عبارة عن نقطة هندسية ولذلك لا تنطبق على أى نقطة من نقط الجسم (طوق أو حلقة) كما يلاحظ أيضا أن العلاقات السابقة تعتبر تعريفا لمركز مجموعة الكتل M_n

طرق إيجاد إحداثيات مركز الكتلة :

١ــ طريقة التقسيم :



غالبا ما يحدث فى مسائل إيجاد مركز الكتلة لجسم ما أن يحدد أولا مراكز كتل أجزائه التى يمكن أن يقسم إليها. نفرض مثلا أن لدينا جسما يمكن تقسيمه إلى عدد من الأجزاء I , II , III , ... كما فى الشكل وأنه يمكن تحديد مركز كتلة كل جزء منها على حدة وذلك بالعلاقات الآتيــة :

$$\vec{r}_I = \frac{\left(\sum_n \vec{r}_n \, \Delta M_n\right)_I}{M_I} ; \quad \vec{r}_{II} = \frac{\left(\sum_n \vec{r}_n \, \Delta M_n\right)_{II}}{M_{II}}$$

فإن مركز كتلة الجسم فى النهاية يحدد بالعلاقة الآتيه :

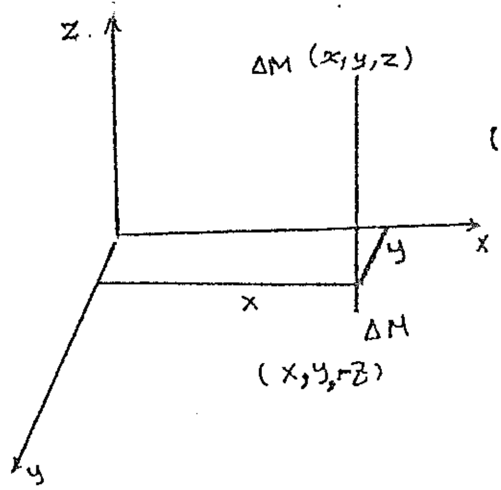
$$\vec{r} = \frac{M_I \vec{r}_I + M_{II} \vec{r}_{II} + \cdots}{M}$$

واضح أنه فى حالة الأجسام المتجانسة والمنتظمة فإنه يمكن استبدال الكتلة بالحجم أو المساحة أو الطول

١ــ التمـــــاثل :

سنثبت الآن أنـه إذا كـان الجسم متماثلا بالنسبة لمستوى (محور أو نقطة) فـإن مركز كتلة هذا الجسم يقع فى مستوى (على محور او فى نقطة) التماثل .

أ) نفرض أن الجسم متماثل بالنسبة للمستوى xy كما فى الشكل فإن عنصر الكتلة ΔM



عند النقطة (x , y , z)

يقابله عنصر مساوٍ له ΔM أيضا عند النقطة $(x, y, -z)$

وعلى ذلك فإن العزم الإستاتيكى بالنسبة للمستوى xy يساوى الصفر أى أن :

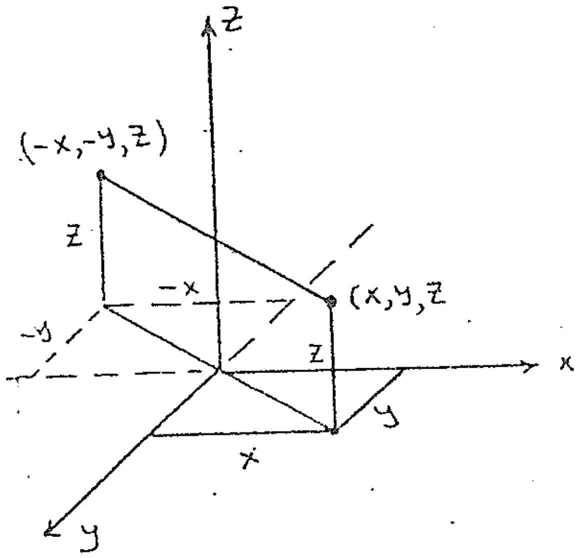
$$\sum z \Delta M = 0 .$$

ولذلك فإن الإحداثى $\bar{z}$ لمركز كتلة هذا الجسم يساوى الصفر حيث إن

$$\bar{z} = \frac{\sum z \Delta M}{M} = 0$$

حيث إن إحداثيات مركز الكتلة $\bar{y}$, $\bar{x}$ لهذا الجسم لا تساوى الصفر فإن مركز كتلة هذا الجسم يقع فى مستوى التماثل xy .

ب) نفرض أن الجسم متماثل بالنسبة لمحور وليكن محور z مثلا وبذلك فإن



عنصر الكتلة ΔM عند النقطة (x, y, z)

يقابله عنصر كتلة مساوٍ له ΔM أيضا

عند النقطة $(-x, -y, z)$

وبذلك يكون العزم الإستاتيكى لكل من المستويين (yz , xz) وبالتالى إحداثيات مركز الكتلة المقابلة لهذا العزم تساوى الصفر .

أى أن

$$\bar{x} = \frac{\sum x_n \Delta M_n}{M} = 0 ,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_n \Delta M_n}{M} = 0 .$$

ولكن الإحداثى $\bar{z}$ لمركز كتلة الجسم لا يساوى الصفر وبذلك فإن مركز كتلة هذا الجسم يقع على محور التماثل .

ج) نفرض أن الجسم له مركز تماثل أى أنه متماثل بالنسبة لنقطة ولتكن مركز الإحداثيات O فـــإن عنصر الكتلة ΔM المحدد بمتجه الموضع $\vec{r}$ (عند النقطـــة (x , y, z)) يقابله عنصـــر

مساوٍ له ΔM أيضا محدد بمتجه الموضع $(-r)$ أى عند النقطة $(-x, -y, -z)$
متماثل معه بالنسبة لمركز الإحداثيات وبذلك فإن العزم الإستاتيكى $\Sigma r_n \Delta M_n$ بالنسبة
لبداية الإحداثيات يساوى الصفر وبالتالى فإن متجه موضع مركز كتلة هذا الجسم يساوى الصفر أيضا ،
أى أن :

$$\bar{r} = \frac{\sum_n \vec{r}_n \Delta M_n}{M} = \vec{0}$$

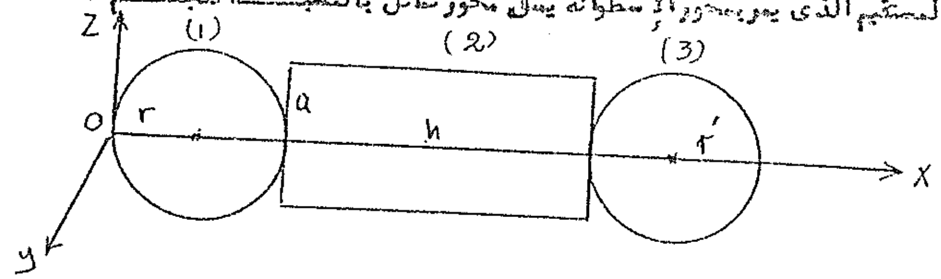
أى أن مركز كتلة هذا الجسم يقع فى مركز التماثل .

٣- طريقة الكتل السالبة :
هذه الطريقة تعتبر حالة خاصة من طريقة التقسيم وتستخدم فى إيجاد مركز كتلة الأجسام المنزوع منها
أجزاء حيث تعتبر كتلة الأجزاء المنزوعة سالبة .

أمثلة

١- أوجد مركز كتلة الجسم المكون من كرتين نصفا قطريهما r , r' تفصلهما أسطوانة دائرية
نصف قطر قاعدتها a وارتفاعها h إذا كان امتداد محور الإسطوانة يمر بمركز الكرتين .

الحل :
واضح ان المستقيم الذى يمر بمحور الإسطوانة يمثل محور تماثل بالنسبة الجسم .



فإذا أخذنا محور x مثلا ينطبق على هذا المستقيم ونقطة بداية الإحداثيات O على سطح إحدى
الكرتين كما فى الشكل ، فإن مركز كتلة الجسم يقع على محور x $(\bar{y} = \bar{z} = 0)$ وحيث إن مركز
الجزء الأول يساوى r والثانى $2r + h/2$ والثالث $2r + h + r'$ فإن مركز كتلة
الجسم $\bar{x}$ يتحدد بالعلاقة الآتية :

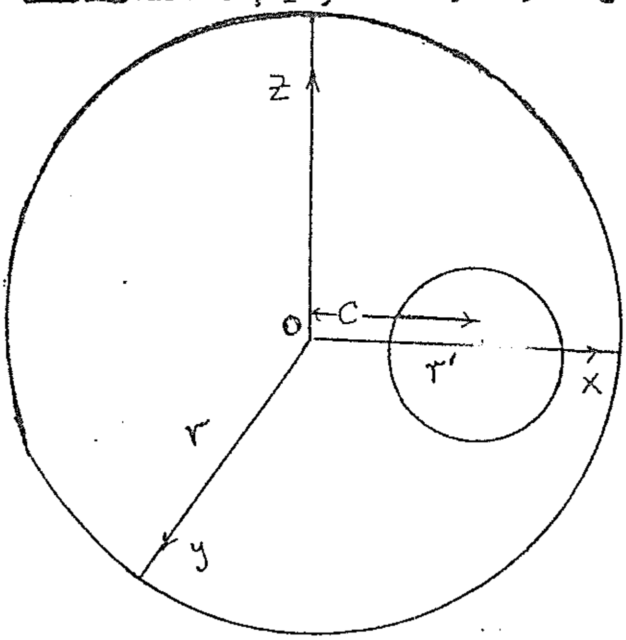
$$\bar{x} = \frac{4/3\,\pi\,r^3 \cdot r + \pi\,a^2\,h\,(2r + \tfrac{1}{2}h) + 4/3\,\pi\,r'^3\,(2r + h + r')}{4/3\,\pi\,r^3 + \pi\,a^2\,h + 4/3\,\pi\,r'^3},$$

ويلاحظ هنا أن الكتل تتناسب مع الحجوم حيث أن الجسم متجانس (الكثافة ثابتة) .

عندما تكون الكرتان متساويتين ($r = r'$) فــإن :

$$\bar{x} = \frac{4/3\,r^3(4r+h) + a^2h\,(2r+\tfrac{1}{2}h)}{8/3\,r^3 + a^2\,h} = \frac{(2r+\tfrac{1}{2}h)(8/3\,r^3 + a^2\,h)}{8/3\,r^3 + a^2\,h} = 2r + \frac{h}{2}$$

٢ــ أوجد مركز كتلة قرص دائرى نصف قطره r نزع منه جزء دائرى نصف قطره r' إذا كانت المسافة بين مركزى الجزء المنزوع والقرص تساوى c .



الحــل :

المستقيم الواصل بين المركزين يمثل محور التماثل فإذا أخذنا نقطة بداية الإحداثيات O فى مركز القرص ومحور x يمر بمركز الجزء المنزوع فإن مركز كتلة الجزء الباقى يقع على محور x

ويحدد بالعلاقة ($\bar{y} = \bar{z} = 0$) :

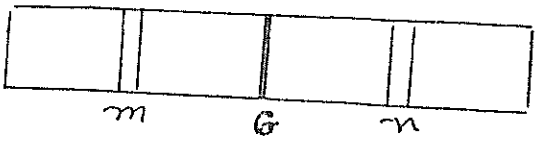
$$\bar{x} = \frac{r^2 \times 0 - r'^2\,c}{(r^2 - r'^2)} = \frac{-r'^2\,c}{r^2 - r'^2}$$

يلاحظ هنا أيضا أن الكتل تتناسب مع المساحة حيث إن الجسم متجانس (الكثافة ثابتــة) منتظــم (السمــك ثابت) .

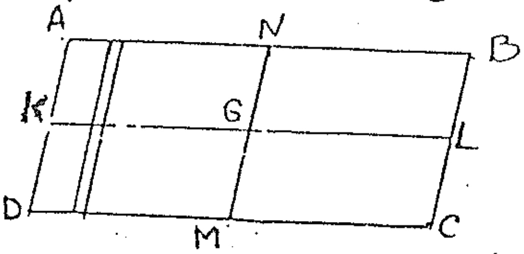
٤ــ مركز ثقل بعض الأشكـــال (الأجسام) :

فى حالات كثـــيرة فــإن مركز الكتلة يمكن تحديده بطـــرق هندسيـــة بسيطـــــة :

١- قضيب رفيع منتظم :

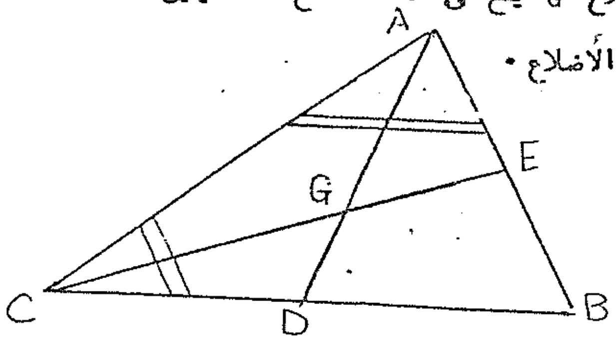


نفرض أن G منتصف القضيب AB
كما فى الشكل . يمكن اعتبار أن
القضيب مكون من أزواج من العناصر المتناظرة على
أبعاد متساوية من منتصف القضيب G مركز كتلة كل زوج من هذه العناصر كالموجود عند النقطتين
n , m فى الشكل يقع فى منتصف المسافة mn أى فى منتصف القضيب G وبذلك فإن مركز
كتلة القضيب كله يقع عند منتصفه .



٢- مساحة متوازى الأضلاع :

نفرض أن ABCD متوازى الأضلاع
المراد تحديد مركز كتلته ، فبرسم سلسلة من
المستقيمات الموازية لأحد أضلاعه وليكن AD
مثلا ينقسم متوازى الأضلاع بذلك إلى سلسلة
من الشرائح الرقيقة مركز كتلة كل منها يقع فى منتصفها (قضيب رفيع) وبذلك فإن مركز كتلة متوازى
الأضلاع يقع على المستقيم KL الواصل بين منتصفى الضلعين المتقابلين BC , AD وبنفس
الطريقة (تقسيم متوازى الأضلاع إلى سلسلة من الشرائح موازية لأى من الأضلاع AB أو DC)
نجد أن مركز كتلة متوازى الأضلاع يقع على المستقيم MN الواصل بين منتصفى الضلعين المتقابلين
BC , AB وبذلك فإن مركز كتلة متوازى الأضلاع G يقع فى نقطة تقاطع المستقيمين KL, MN
واضح أن G هى أيضا نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع .

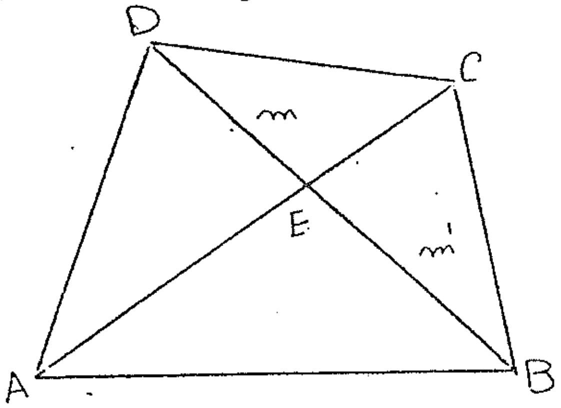


٣- مساحة مثلثية :

بتقسيم مساحة المثلث ABC
بسلسلة من المستقيمات الموازية للضلع BC
إلى شرائح رقيقة مركز كتلة كل منها يقع فى
منتصفها، وبذلك فإن مركز كتلة المساحة المثلثية
يقع على المستقيم الواصل من الرأس A إلى منتصف القاعدة BC (المستقيم المتوسط) وبالمثل

بتقسيم المثلث إلى شرائح موازية للضلع A B فإن مركز كتلة يقع على المستقيم الواصل من الرأس C إلى منتصف القاعدة AB وبذلك فإن مركز كتلة المساحة المثلثية G يقع فى نقطة تقاطع مستقيمات المتوسطة • ومن المعروف أن هذه النقطة تقسم هذه المستقيمات بنسبة 2 : 1 من جهة القاعدة المناظرة • يلاحظ أن مركز كتلة المساحة المثلثية ينطبق مع مركز كتلة ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث •

٤ـ مساحة رباعية (شكل رباعى)



فى الواقع أنه لا توجد طريقة بسيطة لتحديد مركز كتلة الشكل الرباعى كما فى الحالات السابقة ، ولكن من المناسب فى كثير من الأحيان استخدام النظرية الآتية :

مركز كتلة الشكل الرباعى ينطبق مع مركز كتلة أربع كتل متساوية موضوعة عند رؤوسه وكتلة مساوية لها مأخوذة بإشارة سالبة موضوعة عند نقطة تقاطع أقطار الشكل الرباعى • ولإثبات ذلك :

نفرض أن A B C D هو الشكل الرباعى وأن E هى نقطة تقاطع أقطاره فإذا كانت m ,m' هما كتلتى المثلثين ACB , ACD على الترتيب •

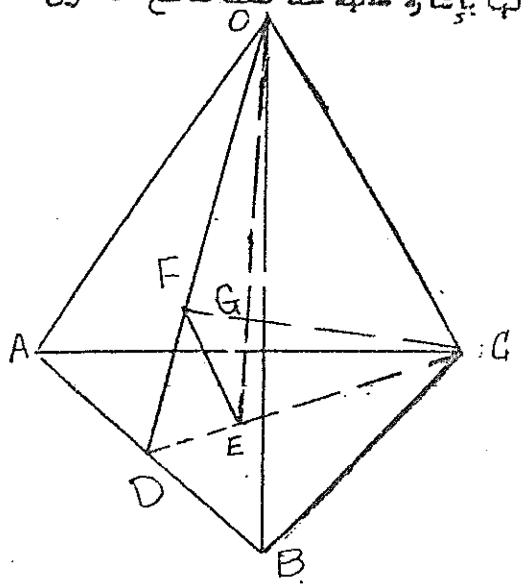
واضح أن النسبة بين هاتين الكتلتين هى :

$$m : m = DE : EB$$

حيث إن المثلثين مشتركان فى القاعدة AC .

كما سبق فى حالة المثلث فإنه يمكن استبدال المثلث ACD بثلاث كتل متساوية كل منها m/3 عند رؤوسه وكذلك المثلث ACB بثلاث كتل متساوية كل منها m'/3 عند رؤوسه أيضا وبذلك فإن مركز كتلة الشكل الرباعى ينطبق مع مركز كتلة الأربع كتل $(m+m')/3$; $m'/3$; $(m+m')/3$; $m/3$ عند الرؤوس A; B; C ; D على الترتيب •

والآن فإنه للحصول على كتل متساوية عند رؤوس الشكل الرباعى كل منها يساوى $(m + m')/3$ فإنه يجب إضافة الكتلتين $m/3$: $m'/3$ عند الرأسين D , B على الترتيب ولتوازن إضافة هاتين الكتلتين فإنه يجب إضافة أيضا كتلة سالبة مقدارها $(m+m')/3$ عند مركز ثقل هاتين الكتلتين . واضح أن E نقطة تقاطع القطرين هى مركز ثقل هاتين الكتلتين وذلك من العلاقة السابقة بين الكتل وأبعاد الشكل . أى أن مركز ثقل أى شكل رباعى ينطبق مع مركز ثقل أربعة كتل متساوية عند رؤوسه وكتلة أخرى خامسة مساوية لها بإشارة سالبة عند نقطة تقاطع القطرين .



ﻫ - هرم ثلاثى :

لإيجاد مركز كتلة الهرم الثلاثى $OABC$ نقسمه إلى عناصر صغيرة مثلثية موازية للقاعدة ABC مراكز ثقل هذه العناصر (مركز ثقل الهرم) تقع على المستقيم الواصل من رأس الهرم O إلى مركز القاعدة E الذى يمثل نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة للقاعدة المثلثية أى أنه فى الشكل المقابل يكون

$DE = 1/3\ DC,$

وبنفس الطريقة أى بتقسيم الهرم إلى عناصر صغيرة موازية لأحد أوجهه وليكن الوجه $O\ A\ B$ نجد أن مراكز ثقل هذه العناصر (مركز ثقل الهرم) تقع على المستقيم الواصل من الرأس C إلى F مركز الوجه $O\ A\ B$ أى أنه فى الشكل المقابل يكون :

$DF = 1/3\ DO$

وحينئذ تكون النقطة G نقطة تقاطع المستقيمين OE, CF هى مركز كتلة الهرم ولتحديد هذه النقطة نصل EF

واضح أن EF يوازى CO ومن تشابه المثلثين GOC , GEF نجد أن :

$$\frac{GE}{GO} = \frac{EF}{OC} ,$$

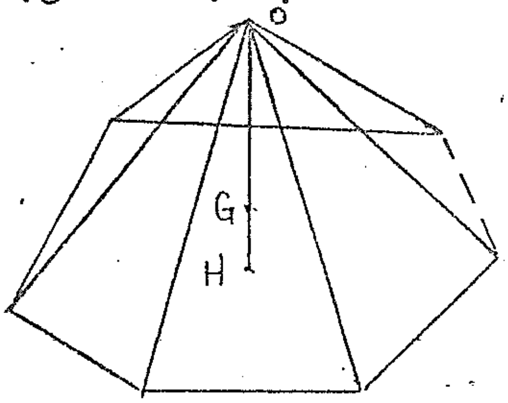
ولكـــن

$$\frac{EF}{OC} = \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{DO} = \frac{1}{3} .$$

وبـــذلك فـــإن

$$GE = \frac{1}{3} GO = \frac{1}{4} HC .$$

أى أن مركز كتلة الهرم الثلاثى تقع على المستقيم الواصل بين رأس هذا الهرم ومركز كتلة قاعدته على بعد ربع هذا المستقيم من جهة القاعدة .



هرم قاعدته كثيرة الأضـــلاع :

بتقسيم قاعدة الهرم إلى مثلثات فإننا نحصل على مجموعة من الأهرامات الثلاثية مركز كتلة كل منها يقع على بعده من المستقيم الواصل من الرأس إلى مركز كتلة القاعدة أى أن مركز كتلة الهرم يقع فى مستـــوى يوازى القاعدة على ارتفاع يساوى ربع ارتفاع الهرم

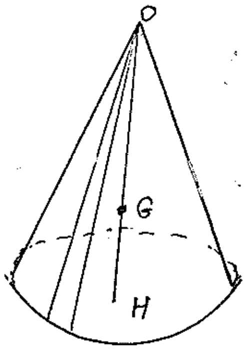
كما أنه بتقسيم الهرم إلى شرائح موازية للقاعدة فإن مركز كتلة جميع هذه العناصر (مركز كتلة الهرم) يقع على المستقيم الواصل من رأس الهرم O إلى مركز كتلة قاعدته H وبذلك فإن مركز كتلة الهرم G هى نقطة تقاطع المستقيم OH مع المستوى الموازى للقاعدة وعلى ارتفاع منها يســاوى $\frac{1}{4}$ ارتفاع الهرم أى أن .

$$HG = \frac{1}{4} HO .$$

يلاحظ أنه إذا زاد عدد أضلاع القاعدة إلى عدد لانهائى فإننا نحصل بذلك على مخروط رأسه O وقاعدته مساحة مستوية محدودة بمنحنى وبذلك فإن مركز كتلة المخروط المصمت تقع أيضا على المستقيم الواصـــل من رأسه إلى مركـــز قاعدته على بعده ربع هذا المستقيم من جهـــة القاعـــدة .

٧ـ سطح مخـــروط (مخروط أجـــوف)

بتقسيـــم سطح المخـــروط إلى عناصر صغيرة كـل منها عبـــارة عن مثلث رأســـه هـــى رأس المخـــروط O فإن مركز كتـــلة هـــذه العناصر المكونة لسطـــح المخـــروط يقـــع فـــى مستوى يوازى القاعدة وعـــلى ارتفـــاع يســـاوى ثلث ارتفـــاع المخـــروط من جهـــة القاعـــدة .



وبذلك يكون مركز كتلة سطح المخروط هى نقطة تقاطع هذا المستوى مع المستقيم الواصل من رأس المخروط إلى مركز كتلة المنحنى المحدد للقاعدة فإذا كانت H هى مركز كتلة المنحنى المحدد للقاعدة، G مركز كتلة سطح المخروط، فإن :

$$HG = 1/3 \quad HO .$$

ـ إيجاد مركز الكتلة بالتكامل :

يتضح مما سبق أنه لتحديد إحداثيات مركز كتلة أى جسم فإنه من المناسب استخدام العلاقات :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_n \Delta M_n}{M} , \quad \bar{y} = \frac{\sum y_n \Delta M_n}{M} , \ldots$$

إذا أمكن تقسيم الجسم إلى عدد محدود من عناصر الكتلة ΔM ، وعلى ذلك فإنه بالنسبة لأى جسم باعتباره توزيعا مستمرا لمادته فإن عدد العناصر التى يمكن أن يقسم إليها الجسم يكون غير محدود فى هذه الحالة إذا لم يمكن حساب المقادير .

$$\sum x_n \Delta M_n \; ; \sum y_n \Delta M_n$$

فان العلاقات السابقة تصبح غير ذات فائدة . وحيث إنه عندما يزداد عدد العناصر بدون حد فإن مقدار العنصر يقل أيضا بدون حد فإن الكميات $\sum x_n \Delta M_n , \ldots , \ldots$ تؤول إلى تكاملات محدودة ويمكن حسابها وبذلك فإنه فى هذه الحالة يمكن كتابة العلاقات السابقة لتحديد إحداثيات مركز كتلة أى جسم فى الصورة :

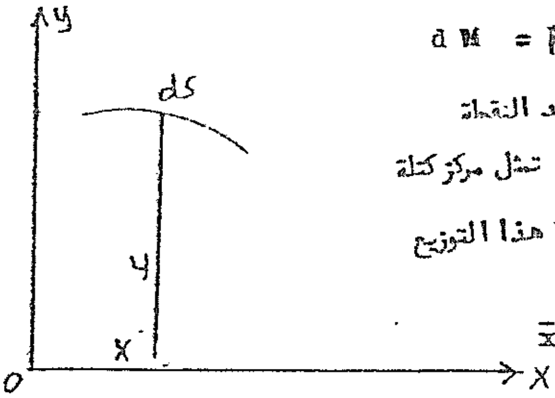
$$\bar{x} = \frac{\int x \, dM}{\int dM} = \frac{\int x \, dM}{M} , \quad \bar{y} = \frac{\int y \, dM}{M} , \quad \bar{z} = \frac{\int z \, dM}{M}$$

حيث (x, y, z) إحداثيات مركز كتلة العنصر dM والتكاملات مأخوذه على كل الجسم المراد تحديد مركز كتلته منحنى كان أو سطحا أو حجما حسب توزيع مادة الجسم .

١ـ المنحنيات :

إذا كانت مادة الجسم موزعة على منحنى مستوى (واقع فى مستوى) وكانت ρ الكثافة الطولية (كتلة

وحدة الاطوال) لهذا المنحنى عند النقطة (x, y) فإن عنصر الكتلة dM فى هذه الحالة يمكن التعبير عنه بالصورة



$$dM = \rho \, ds .$$

حيث ds هو عنصر الطول من هذا المنحنى عند النقطة (x,y) يلاحظ أن النقطة (x,y) تمثل مركز كتلة العنصر ds وبذلك فإن إحداثيات مركز كتلة هذا التوزيع (المنحنى) يعبر عنها بالعلاقات الآتية :

$$\bar{x} = \frac{\int x \, \rho \, ds}{\int \rho \, ds} , \quad \bar{y} = \frac{\int y \, \rho \, ds}{\int \rho \, ds}$$

وفى حالة التوزيع المنتظم (ρ ثابتة) فإن :

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\int ds} , \quad \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\int ds}$$

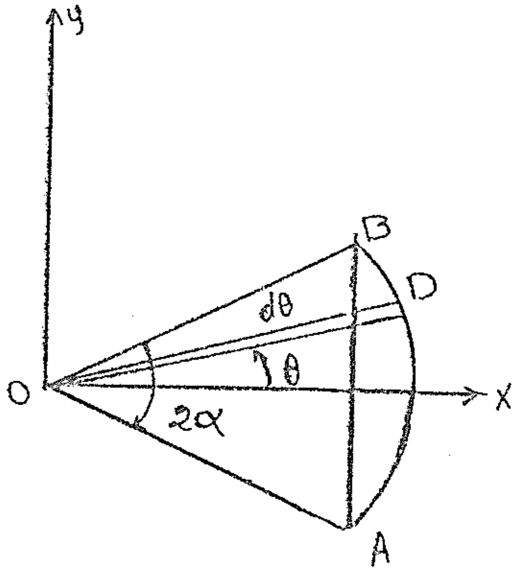
ولإجراء هذه التكاملات تستخدم معادلة المنحنى مع العلاقة بين مربع عنصر الطول وكل من الإحداثيات الكرتيزية أو القطبية التى تأخذ الصورة :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2 \, (d\theta)^2 .$$

أمثلة

١ـ أوجد مركز كتلة قوس منتظم من دائرة نصف قطرها a يحصر زاوية 2α عند مركز الدائرة .

الحل :



العمودى على وتر القوس AB من منتصفه يمر بمركز الدائرة ويعتبر محور تماثل .

فإذا أخذنا مركز الدائرة O بداية الإحداثيات ومحور x ينطبق على محور التماثل فإن مركز كتلة القوس يقع على محور x $(\bar{y} = 0)$

نصل نهايتى القوس بمركز الدائرة فتكون الزاوية المركزية تساوى 2α ونقسم

القوس إلى عناصر طول ds كما بالشكل فإن مركز كتلة القوس يتحدد من العلاقة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\int ds} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\int ds} = 0 .$$

من هندسة الشكل يتضح أن:

$$x = a \cos \theta \, , \; y = a \sin \theta \, , \; ds = a \, d\theta$$

وبذلك فإن

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} a^2 \cos \theta \, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} a \, d\theta} = \frac{a[\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{a \sin\alpha}{\alpha}$$

يلاحظ أنه يمكن التعبير عن الإحداثى $\bar{x}$ لمركز كتلة القوس بدلالة طوله وطول وتره حيث إن:

$$\overset{\frown}{AB} = a \cdot 2\alpha \quad ; \quad \overline{AB} = 2 a \sin\alpha \, ,$$

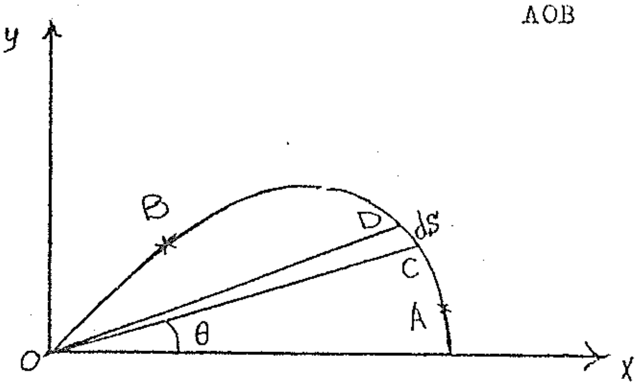
وبذلك فإن:

$$\bar{x} = a \frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}} .$$

عندما $\alpha = \frac{\pi}{2}$ نحصل على مركز كتلة نصف محيط دائرة نصف قطرها a فى الصورة:

$$\bar{x} = \frac{2a}{\pi}$$

٢- إذا كانت O قطب المنحنى $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ، G مركز كتلة القوس AB من هذا المنحنى أثبت أن OG ينصف الزاوية AOB



الحل:

نفرض أن $\overline{CD}$ عنصر الطول ds وأن إحداثيات النقطة C هى $(r \, , \, \theta)$

وبذلك فإن:

$$x = r \cos \theta \, , \; y = r \sin \theta,$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \, (d\theta)^2 .$$

من معادلة المنحنى نجد أن:

$$r \, dr = - a^2 \sin 2\theta \, d\theta ,$$

$$\therefore \quad (ds)^2 = (d\theta)^2 \left(\frac{a^4 \sin^2 2\theta}{r^2} + r^2 \right) = \frac{a^4}{r^2} (d\theta)^2 .$$

أى أن:

$$ds = \frac{a^2}{r} \, d\theta .$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int x\, ds}{\int ds} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} r \cos\theta \frac{a^2}{r} d\theta}{\int ds} = a^2 \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\int ds}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\, ds}{\int ds} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} r \sin\theta\, a^2/r\, d\theta}{\int ds} = a^2 \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\int ds}$$

حيث $\alpha = A\hat{O}X \;,\quad \beta = B\hat{O}X .$

فيكون :

$$\tan G\hat{O}X = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} = \tan\frac{\alpha + \beta}{2}$$

أى أن :

$$G\hat{O}X = \frac{1}{2}\,(A\hat{O}X + B\hat{O}X) .$$

بطرح الزاوية $A\hat{O}X$ من الطرفين نحصل على :

$$G\hat{O}A = \frac{1}{2}\,(B\hat{O}X - A\hat{O}X) = \frac{1}{2}\, B\hat{O}A .$$

أى أن OG ينصف الزاوية $B\hat{O}A$.

٢ـ المساحات والسطوح :

فى حالة توزيع مادة الجسم على سطح ما وكانت ρ الكثافة السطحية (كتلة وحدة المساحات) لهذا الجسم عند النقطة (x , y , z) فإن عنصر الكتلة dM عند هذه النقطة يرتبط بعنصر المساحة dA عند نفس النقطة بالعلاقة $dM = \rho\, dA$ وبذلك فإن إحداثيات مركز كتلة هذا السطح تحدد بالعلاقة الآتية :

$$\bar{x} = \frac{\int x\, \rho\, dA}{\int \rho\, dA} \;,\quad \bar{y} = \frac{\int y\, \rho\, dA}{\int \rho\, dA} \;,\quad \bar{z} = \frac{\int z\, \rho\, dA}{\int \rho\, dA}$$

أو إذا كان التوزيع منتظما (الكثافة السطحية ثابتة) فإن :

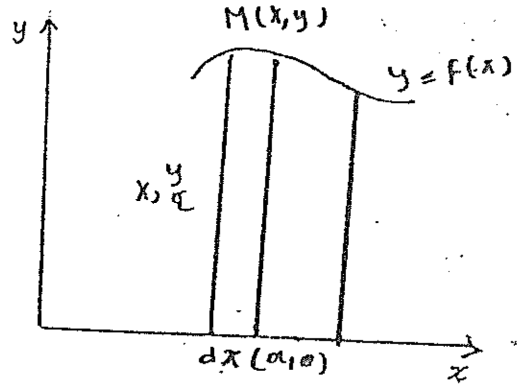
$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} \;,\quad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{\int dA} \;,\quad \bar{z} = \frac{\int z\, dA}{\int dA} .$$

يلاحظ أن اختيار عنصر المساحة dA يعتمد على شكل الجسم .

أمثلة

امثلة :

١ـ أوجد مركز كتلة مساحة مستوية محدودة بالمنحنى ; $y = f(x)$ ومحورى الإحداثيات والمستقيم $x = a$.



الحـــل :

نفرض أن (x , y) نقطة على المنحنى فى هذه الحالة يكون عنصر المساحة المناسب عبارة عن شريحة رقيقة موازية لمحور y سمكها dx وبذلك يكون عنصر المساحة

$$dA = y\,dx .$$

واضح أن مركز كتلة هذا العنصر يقع فى منتصفه أى فى النقطة $(x, y/2)$

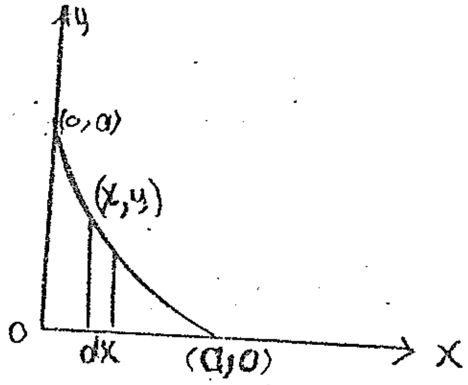
وبذلك فإن مركز كتلة هذه المساحة يحدد بالعلاقة الآتية

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx},$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2}\,dA}{\int dA} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^a y^2\,dx}{\int_0^a y\,dx}.$$

ولإجراء عملية التكامل تستخدم معادلة المنحنى $y = f(x)$

٢ـ أوجد مركز كتلة المساحة المحددة بالمنحنى : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ والاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات .



الحـل :

مما سبق نجد أن :

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx}, \quad \bar{y} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^a y^2\,dx}{\int_0^a y\,dx}.$$

بالتعويض عن y من معادلة المنحنى نجد أن :

$$\int_0^a y\,dx = \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\,dx$$

وضع

$$x = a\sin^3\theta, \quad dx = 3a\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta ,$$

وبذلك نجد أن :

$$\int_0^a y\,dx = 3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^4\theta\,d\theta =$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/2}(\cos^4\theta - \cos^6\theta)\,d\theta =$$

$$3a^2\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{3\pi a^2}{32},$$

$$\int_0^a xy\,dx = 3a^3\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cdot\cos^4\theta\,d\theta,$$

$$= 3a^3 \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)^2 \cos^4\theta \, d\cos\theta =$$

$$= 3a^3 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8a^3}{105}$$

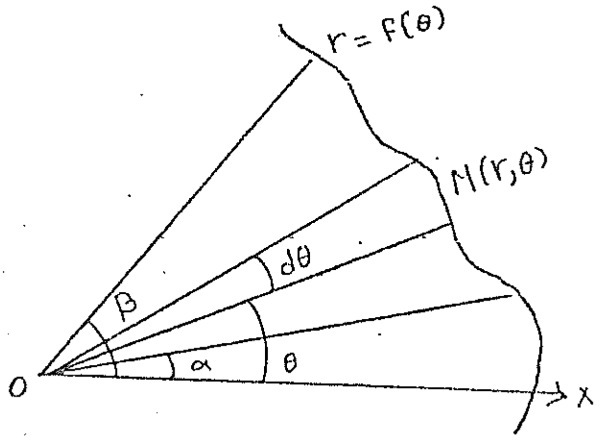
وبذلك فــإن :

$$\bar{X} = \frac{8a^3}{105} \cdot \frac{32}{3\pi a^2} = \frac{256}{315}\frac{a}{\pi}$$

وبالمثل يمكن حساب $\bar{y}$ ولكن حيث إن معادلة المنحنى متماثلة بالنسبة لكل من x, y فإن $\bar{x} = \bar{y}$

٣ـ أوجد مركز كتلة المساحة المحددة بالمنحنى $r = f(\theta)$ وأنصاف الأقطار الاتجاهية $\theta = \beta \;, \;\; \theta = \alpha$

الحـــل :



نفرض أن $M(r, \theta)$ نقطة على المنحنى.
فى هذه الحالة يكون من الأنسب اختيار عنصر المساحة على شكل شريحة مثلثية رأسهــا فى بداية الإحداثيات O وعندئذ فإن عنصر المساحة dA يساوى :

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \,.$$

ومركز كتلة هذا العنصر هو النقطة $(\frac{2}{3} r, \theta)$ أى أن :

$$x = \frac{2}{3} r \cos\theta, \quad y = \frac{2}{3} r \sin\theta$$

حــيث (x, y) الإحداثيات الكرتيزية لمركز كتلة العنصر dA

وعندئذ فإن مركز كتلة هذه المساحة يتحدد بالعــلاقة

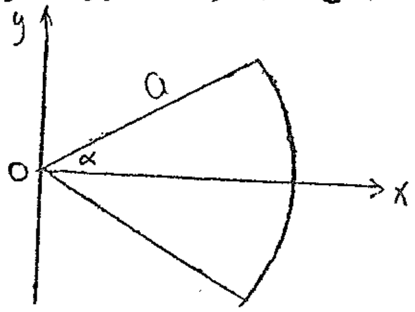
$$\bar{x} = \frac{\int x \, dA}{\int dA} = \frac{\int_\alpha^\beta \frac{2}{3} r\cos\theta \, \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 \, d\theta} = \frac{2}{3} \frac{\int_\alpha^\beta r^3 \cos\theta \, d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2 \, d\theta} \,,$$

وبالمثـــل :

$$\bar{y} = \frac{2}{3} \frac{\int_\alpha^\beta r^3 \sin\theta \, d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2 \, d\theta} \,.$$

ولإجراء التكامل تستخدم معادلة المنحنى $r = f(\theta)$

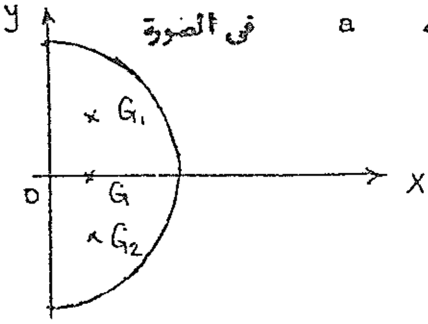
فمثلاً إذا كانت ($r = a$) مقداراً ثابتاً نحصل على قطاع دائرى فإذا كانت زاويته المركزية 2α وأخذنا المحور x ينصف هذه الزاوية فإن :



$$\bar{x} = \frac{2}{3}\, a \,\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2}{3}\, \frac{a \sin\alpha}{\alpha}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{3}\, a \,.\, \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = 0 \,.$$

وعندما $\alpha = \frac{\pi}{2}$ نحصل على مركز كتلة نصف قرص نصف قطره a فى الصورة

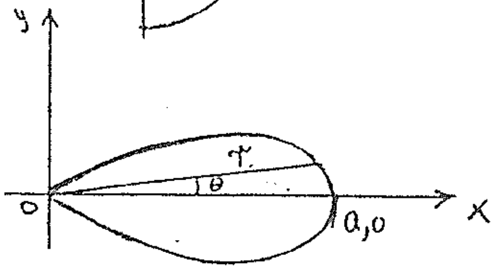


$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}\ , \ \bar{y} = 0 \,.$$

أما بالنسبة لإحداثى مركز كتلة ربع قرص نصف قطره a (G_1 فى الشكل) فيكونان متساويين أى أن :

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}\ , \ \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}\ ,$$

وذلك من تماثل ربع القرص بالنسبة لمحورى الإحداثيات .



٤ـ أوجد مركز كتلة مساحة فرع من المنحنى :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \,.$$

(قيم θ التى يتلاشى عندها r هى ($\pm\frac{\pi}{4}$)

الحـــل :

واضح من معادلة المنحنى أن هذه المساحة متماثلة بالنسبة للمستقيم $\theta = 0$ أى محور x وبذلك فإن $\bar{y} = 0$ ولكن $\bar{x}$ يتحدد من العلاقة :

$$x = \frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{2}{3}\, r\cos\theta\, \frac{1}{2} r^2\, d\theta}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2\, d\theta} = \frac{2}{3}\, \frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^3 \cos\theta\, d\theta}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2\, d\theta}$$

والآن من حساب التكاملات نجد أن :

$$\text{المقام} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2\, d\theta = a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = a^2$$

$$\text{البسط} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^3 \cos\theta \, d\theta = a^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^{3/2} 2\theta \ . \ \cos\theta \, d\theta$$

وبوضع $\sqrt{2}\sin\theta = \sin\varphi$ نحصل على :

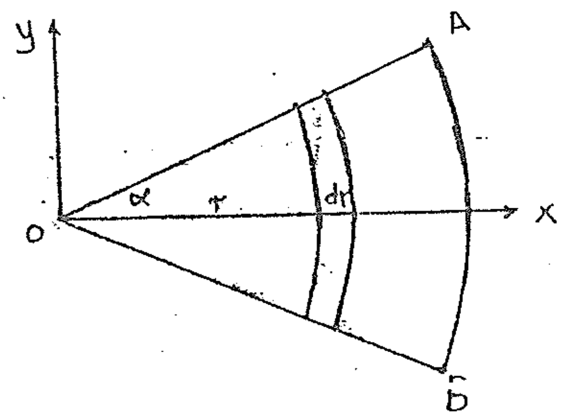
$$\text{البسط} = \frac{a^3}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi \, d\varphi = \frac{a^3}{\sqrt{2}} . 2 . \frac{\pi}{2} . \frac{3}{4} . \frac{1}{2} = \frac{3a^3\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$\therefore \ \bar{x} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} a \ .$$

يلاحظ أنه بنفس الطريقة يمكن التأكد من أن : $\bar{y} = 0$

٥- أوجد مركز كتلة قطاع من دائرة عند ما تتناسب كثافتها السطحية مع المسافة من مركزه .

الحــــل :



نفرض أن a نصف قطر القطاع ، 2α زاويته المركزية ، $\rho = \lambda r$ الكثافة السطحية (كتلة وحدة المساحات) للقطاع على بعد r من مركز القطاع O بأخذ منصف الزاوية AOB محوراً للسينات فإن مركز كتلة القطاع يقع على هذا المحور (محور تماثل) أى أن $\bar{y} = 0$ أما الإحداثى $\bar{x}$ فيتحدد من العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\int x \rho \, dA}{\int \rho \, dA} .$$

فى هذه الحالة عنصر المساحه dA يجب أن يُختار بحيث تكون قيمة الكثافة ρ ثابتة عند أجزائه المختلفة ، وحيث أن ρ تكون ثابتة على قوس دائرى مركزه O فإن عنصر المساحه dA يجب أن يكون على هيئة شريحة محددة بنصفى القطرين r ، $r + dr$ أى أن : $dA = 2\alpha \ r \ dr$

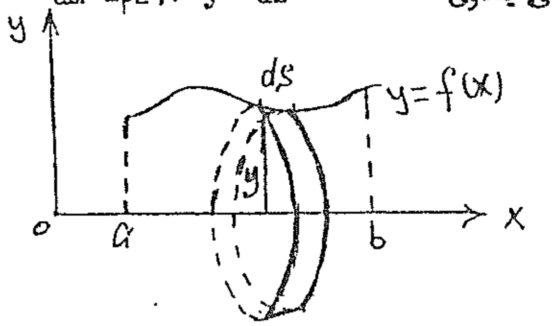
مثل هذه الشريحة يمكن اعتبارها قوساً دائرياً نصف قطره r ، وبذلك فإن الإحداثى x لمركز كتلته يساوى $\dfrac{r \sin\alpha}{\alpha}$ وعندئذ نجد أن :

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \frac{r \sin\alpha}{\alpha} \lambda r \, 2\alpha r \, dr}{\int_0^a \lambda r \, 2\alpha \, r \, dr} = \frac{3}{4} \, \frac{a \sin\alpha}{\alpha} .$$

٣- السطح والحجم الدورانية (الناشئة عن دوران منحنى) :

١٠ السطح الدورانيـــة :

للحصـول على مركز كتلة سطح دورانى أى السطح الناشئ عن دوران منحنى $y = f(x)$ حول محور x مثلا بين المستويين $x = b, x = a$ نأخذ عنصر طول ds المنحنى عند النقطة (x,y) فعند الدوران يرسم هذا العنصر حلقة دائرية نصف قطرها y وسمكها ds وبذلك يكون عنصر الكتلة عند النقطة (x,y) على المنحنى يساوى $dM = \rho 2\pi y \, ds$ حيث ρ الكثافة السطحيـــة



وبذلك فإن الإحداثى $\bar{x}$ لمركز كتلة هذا السطح يساوى

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \, dM}{\int_a^b dM} = \frac{\int_a^b xy \, ds}{\int_a^b y \, ds}$$

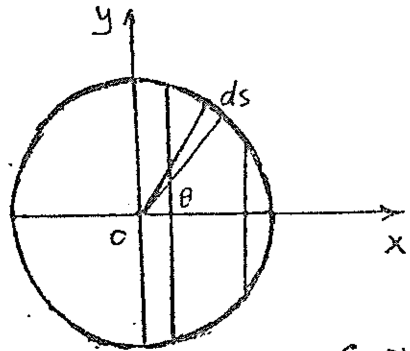
أما الإحداثى $\bar{y}$ فيساوى صفرا دائما .

وذلك من التماثل حول محور الدوران x.

أمثلة

١- أوجد مركز كتلة جزء من سطح كـــرة محصور بين مستويين متوازيين على بعدى r_1, r_2 من مركز الكـــرة .

الحـــل :



بأخذ عنصر المساحة عبارة عن حلقة دائرية سمكها ds كما فى الشكل فـإن

$$\bar{x} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a\cos\theta \;\; 2\pi a \sin\theta \;\, a\,d\theta}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 2\pi a \sin\theta \; a\,d\theta}$$

حيث a نصف قطـــر الكرة وأن : $\cos\alpha_1 = \frac{r_1}{a}$, $\cos\alpha_2 = \frac{r_2}{a}$

وبذلك نجد أن

$$\bar{X} = a\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\theta\,d\theta} = \frac{a}{2}\,\frac{\cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2}{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}$$

$$= \frac{a}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

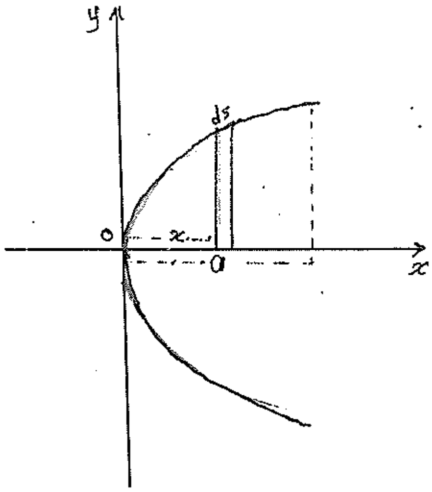
بوضع $r_2 = a$, $r_1 = a - h$ نحصل على مركز كتلة طاقية سكهـا h فى الصورة الآتيـة :

$$\bar{X} = \frac{2a-h}{2} = a - \frac{h}{2}$$

وعندما $h = a$ نحصل على مركز كتلة نصف كرة جوفاء

$$\bar{X} = a/2$$

٢ـ أوجد مركز كتلة السطح الناتج من دوران المنحنى $y^2 = 4ax$ حول محور x بين المستويين $x = a$, $x = 0$.



الحـــل :

بأخذ عنصر الطول ds عند النقطة (x,y) على المنحنى فينتج عن دوران هذا العنصر حول محور x عنصر المساحة $2\pi y\,ds$ وبذلك فــإن احداثيــات مركز كتلة السطح الناشئ عن الدوران هو :

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds} \quad , \quad \bar{y} = 0$$

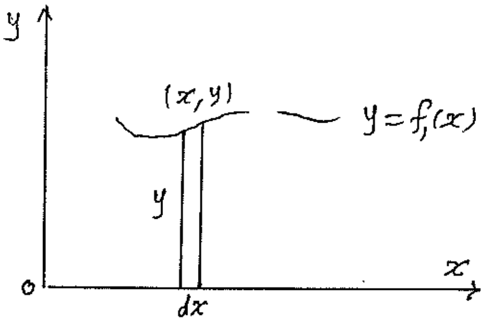
وحيث إن $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$

فإنه بالتعويض من معادلة المنحنى نحصل على

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\sqrt{x\left(1+\frac{a}{x}\right)}\,dx}{\int_0^a \sqrt{x\left(1+\frac{a}{x}\right)}\,dx} = \frac{\int_0^a x\sqrt{a+x}\,dx}{\int_0^a \sqrt{a+x}\,dx} = \frac{2a}{5}\,\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}$$

وذلك بعد إجــراء التكـــامل .

٢- **الجسوم الدورانية :** للحصول على مركز كتلة الجسم الدورانى أى الجسم الناشئ عن دوران منحنى معين ($y = f_1(x)$) حول محور x مثلا بين المستويين : $x = b$ و $x = a$ ، نأخذ عنصر المساحة وهو عبارة عن قرص دائرى نصف قطره y وسمكه dx عند النقطة (x, y) على المنحنى ، وبذلك فإن عنصر الكتلة



$$dM = \rho \pi y^2 dx .$$

حيث ρ هى الكثافة السطحية ،

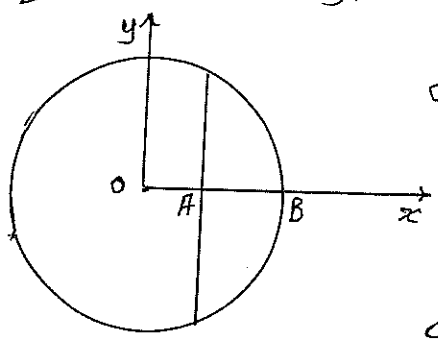
وعندئذ فإن الإحداثى $\bar{x}$ لمركز الكتلة (مركز كتلة هذا الجسم) يتحدد من العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dM}{\int dM} = \frac{\int_a^b x y^2 dx}{\int_a^b y^2 dx} .$$

أما الإحداثى $\bar{y}$ فيساوى الصفر من التماثل حول المحور x .

أمثلة

١- أوجد مركز كتلة قطعة دائرية نصف قطرها a وارتفاعها h



الحل : نفرض o مركز الكرة، والمستقيم OAB الذى يقطع قاعدة القطعة فى A وسطح الكرة فى B عمودى على قاعدتها وفى

اتجاه المحور x . وبذلك فإن :

$$AB = h\ , \qquad OA = a - h$$

وباختيار عنصر الكتلة على شكل قرص يوازى القاعدة فإن :

$$\bar{x} = \frac{\int_{a-h}^{a} x y^2 dx}{\int_{a-h}^{a} y^2 dx} .$$

ولكن النقطة تقع على دائرة نصف قطرها a وبذلك فإنها تحقق العلاقة :

$y^2 = a^2 - x^2$ وعندئذ فإن :

$$\bar{x} = \frac{\int_{a-h}^{a} (a^2 x - x^3)\, dx}{\int_{a-h}^{a} (a^2 - x^2)\, dx} = \frac{3}{4}\, \frac{(2a-h)^2}{3a-h} .$$

بوضع $h = a$ نحصل على مركز كتلة نصف كرة مصمتة نصف قطرها a بالصورة:

$$\bar{x} = \frac{3}{8} a .$$

وبالنسبة لمركز كتلة ربع كرة كما حدث فى الدائرة من تماثله بالنسبة

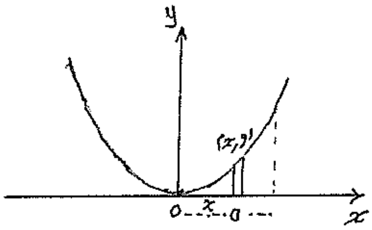
لقاعدتيه فإنه يساوى :

$$\bar{x} = \frac{3}{8} a\ , \qquad \bar{y} = \frac{3}{8} a .$$

٢- أوجد الحجم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \frac{b}{a^2} x^2$ حول المحور x بين

المستويين $x = a\ ,\ x = 0$.

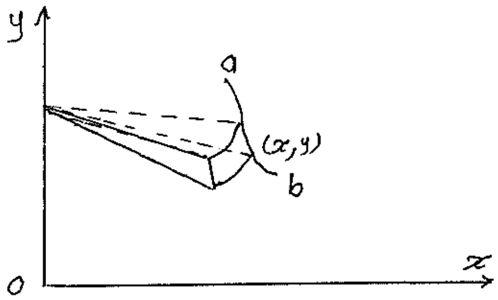
الحل : كما سبق نعلم أن $\bar{y}=0$ ، $\bar{x}$ تتحدد بالصورة :



$$\bar{x}=\frac{\int_0^a y^2 x\,dx}{\int_0^a y^2\,dx}=\frac{\int_0^a x^5\,dx}{\int_0^a x^4\,dx}=\frac{5}{6}a.$$

نظرية باباس :

١- مساحة السطح الناتج من دوران جزء من منحنى مستوى حول محور فى مستواه ولا يقطعه تساوى منحنى هذا الجزء مضروبا فى محيط الدائرة التى يرسمها مركز كتلته. نفرض ab جزءا من المنحنى فى مستوى وأن محور الدوران y فى نفس المستوى



كما بالشكل. فإذا قسم هذا المنحنى إلى عناصر طولية. فإن العنصر ds عند النقطة (x,y) يرسم عند دورانه عنصر مساحة dA مقداره $2\pi x\,ds$ حيث x تمثل نصف قطر الدائرة التى يرسمها هذا العنصر أثناء الدوران. المساحة الكلية الناشئة عن دوران الجزء ab تساوى مجموع مساحة هذه العناصر، أى أن :

$$A=\int 2\pi x\,ds=2\pi\int x\,ds=2\pi\bar{x}s.$$

حيث $\bar{x}$ إحداثى مركز كتلة الجزء ab ، S طول هذا الجزء من المنحنى،

وبذلك فإن المساحة الناتجة عن الدوران تساوى حاصل ضرب طول

المنحنى S فى محيط الدائرة التى يرسمها مركز كتلته أثناء الدوران $2\pi\bar{x}$

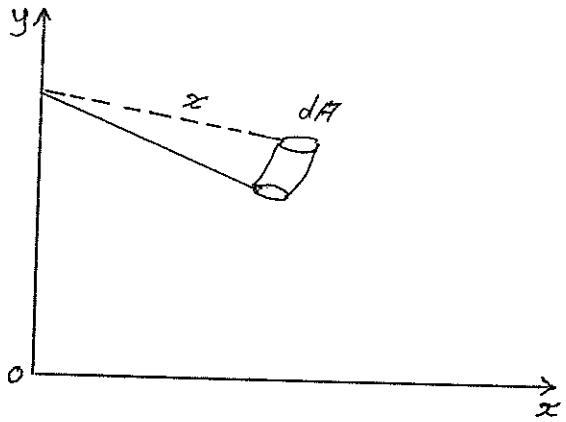
٢- الحجم الناشئ عن دوران سطح حول محور فى مستواه ولا يقطعه

يساوى حاصل ضرب مساحة هذا السطح فى محيط الدائرة التى يرسمها

مركز كتلته.

بتقسيم المساحة إلى عناصر صغيرة dA عند النقطة (x,y) فإنه

ينشأ عن دوران كل عنصر من هذه العناصر عنصر الحجم dV الذى



يتحدد بالعلاقة:

$$dV = 2\pi x\, dA.$$

حيث x تمثل هنا أيضا نصف قطر

الدائرة التى يرسمها عنصر المساحة

عند دورانه. الحجم الكلى V الذى ينشأ عن الدوران يساوى مجموع

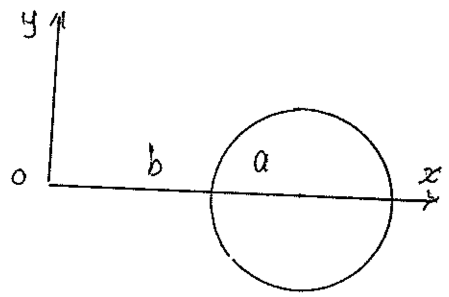
حجوم هذه العناصر. أى أنه :

$$V = \int 2\pi x\, dA = 2\pi \int x dA = 2\pi \bar{x} A.$$

حيث $\bar{x}$ إحداثى مركز كتلة المساحة الكلية A.

أمثلة

أوجد مساحة سطح وحجم حلقة دائرية المقطع نصف قطر كل من الحلقة (الداخلى) ومقطعها a, b. يمكن الحصول على مساحة سطح A (وحجم V) حلقة دائرية المقطع نصف قطرها الداخلى b ونصف قطر مقطعها a من دوران دائرة (قرص) نصف قطرها a حول محور على بعد b منها كما فى الشكل. أى أن:



$$A = 2\pi(a+b)\cdot 2\pi a = 4\pi^2 a(a+b),$$

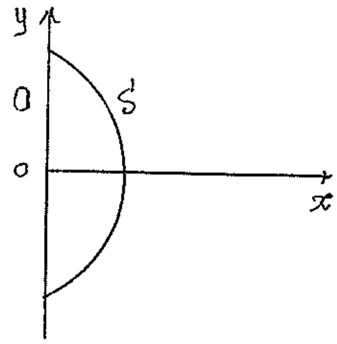
$$V = 2\pi(a+b)\cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2(a+b).$$

ومن دوران نصف هذه الدائرة (والقرص) حول محور يمر بمركزها نحصل على مساحة (سطح) (أو حجم) كرة نصف قطرها a أو مركز كتلة نصف الدائرة (القرص) إذا علم الآخر. ونعلم أنه:

$$A = 2\pi \bar{x} s.$$

حيث A المساحة الناشئة من دوران منحنى طوله s، ومركز كتلته $\bar{x}$.

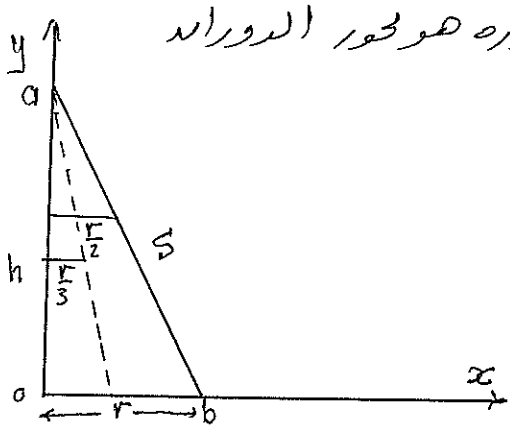
وفي هذه الحالة $S = \pi a$. وبذلك يتضح أنه إذا علم $\bar{x}$ نحصل على A، والعكس . ومن المعروف أن $\bar{x} = \frac{2a}{\pi}$ ، $A = 4\pi a^2$. وكذلك بالنسبة للحجم فإن :



$$V = 2\pi \bar{x} A$$

حيث V الحجم الناشئ من دوران سطح مساحته A ومركز كتلته $\bar{x}$. وفي هذه الحالة $A = \frac{1}{2}\pi a^2$. وبذلك يتضح أنه إذا علم $\bar{x}$ يمكن الحصول على V والعكس . ومعروف أن $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ ، $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

ومن دوران المستقيم ab (المثلث aob) في الشكل حول المحور oa فإننا نحصل على مساحة سطح (حجم) مخروط دائري محوره هو محور الدوران



$$A = 2\pi \frac{r}{2} S = \pi r S ,$$

$$V = 2\pi \frac{r}{3} \cdot \frac{rh}{2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h .$$

حيث S طول المستقيم ab الذي يمثل راسم المخروط ، h طول oa الذي يمثل ارتفاع المخروط ، r طول ob الذي يمثل نصف قطر قاعدة المخروط .

تمارين

١- أوجد مركز مساحة محددة بقطع مكافئ $y^2=4ax$ ومحور y والمستقيم الأفقى $y=c$.

٢- أوجد مركز ثقل سطح مخروطى أو هرمى ارتفاعه h .

٣- أوجد مركز ثقل سطح مخروطى ناقص نصف قطر قاعدته الكبرى R، ونصف قطر قاعدته الصغرى r، وارتفاع المخروط هو h .

٤- عين مركز ثقل الجسم المكافئ الدورانى الناشئ من دوران القطع المكافئ $x^2=4ay$ بين $y=0$ ، $y=h$.

٥- عين مركز الجسم لنصف كرة مصمتة نصف قطرها a .

٦- عين مركز الجسم لمخروط مصمت نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h .

٧- عين مركز ثقل نصف كرة مصمتة (مشقة كروية) زاويتها المركزية 2α ونصف قطرها a .

٨- أوجد مركز ثقل السطح الدورانى الناشئ من دوران المنحنى $y=y(x)$ حول المحور y .

٩- أوجد مركز ثقل سطح مخروط نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h.

١٠- صفيحة منتظمة $ABCDE$ مكونة من المربع $ABDE$ والمثلث المتساوى الأضلاع BCD. أوجد مركز كتلة الصفيحة.

١١- صفيحة منتظمة $ABCD$ على شكل مستطيل طوله $AD=4a$ وعرضه $AB=2a$. النقطتان E و F تقعان على BC ، AD بحيث كان $AF=BE=a$ وكانت H,J منتصفات EF و CD. ثنى المستطيل $HEGJ$ فوق المستطيل $FHJD$. أوجد مركز ثقل الصفيحة الجديدة.

١٢- اسطوانة مصمتة منتظمة نصف قطرها $2a$ وارتفاعها $2h$ نزع منها اسطوانة نصف قطرها a وارتفاعها h ومشتركة مع محور الاسطوانة الاصلية من إحدى قاعدتيها. أوجد مركز ثقل الجزء المتبقى.

١٣- مظلة تقطعها يتألف من ربع دائرة ABC بنصف قطر 3 متر وقاعدة مستقيمة CD. عين عرض القاعدة بحيث لا تنقلب المظلة حول D علما بأن وزن وحدة الطول من مقطع المظلة يساوى W.

١٥٩

١٤- مظلة مقطعها يتألف من جزء دائرى AB بنصف قطر قدره 5 متر وباقى الاجزاء مستقيمة. عين عرض القاعدة DE بحيث لا تنقلب المظلة حول E. علما بأن وزن وحدة الاطوال من مقطع المظلة يساوى W.

١٥- نصف كرة مصمتة نصف قطرها a ومركب عليها أسطوانة من نفس مادتها وطولها $\frac{8a}{3}$. اذا وضع الجسم على أرض أفقية ملساء فكان وضعه القائم وضع اتزان دائم. عين أكبر نصف قطر للأسطوانه فى هذه الحالة.

١٦- جسم مصمت متجانس مكون من نصف كرة نصف قطرها a موضوع على قاعدتها مخروط قاعدته دائرة ونصف قطرها a وارتفاع المخروط h. إذا وضع الجسم على السطح الكروى لنصف الكرة على مستوى أفقى أملس والجسم فى وضع اتزان دائم. أوجد ارتفاع المخروط بدلالة نصف القطر a.

الباب الخامس

(الشغل الافتراضى

واستقرار الاتزان)

الباب الخامس

الشغل الافتراضى واستقرار الاتزان

الشغـــل :

عندما تتحرك القوة نقطة تأثيرها يقال إنها بذلت شغلا مقداره يقاس بحاصل الضرب القياسى لمتجهى القوة والإزاحة أى حاصل ضرب مقدار القوة فى المسافة التى تحركتها نقطة تأثيرها فى اتجاه القوة . فإذا أثرت القوة $\vec{F}$ فى نقطة وأزيحت هذه النقطة إزاحة طفيفة $\vec{dr}$ فإن الشغل المبذول بهذه القوة يعبر عنه بالصورة :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dr} \qquad (1)$$

ومنها فإن الشغل w المبذول فى إزاحة محدودة يساوى :

$$w = \int \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

من تعريف الضرب القياسى فإن $(5,1)$ يمكن أن تأخذ إحدى الصورتين :

$$dw = F \; dr_F = F_r \; dr \qquad (2)$$

حيث dr_F , F_r مسقطى dr , F على اتجاهى F ; dr على الترتيب .

ومن ذلك يتضح أن مركبة القوة فى اتجاه الإزاحة هى التى تبذل الشغل بينما المركبة العمودية لاتبذل أى شغل .

إذا كان اتجاه القوة ثابتا فإنه من الأنسب استخدام الصورة الأولى فى (2) فمثلا لقوة الجاذبية تكون الإزاحة فى اتجاه القوة (dr_F) هى المسافة الرأسية التى تحركتها النقطة .

إذا كان اتجاه الإزاحة عكس اتجاه القوة يمكن القول بأن القوة بذلت شغلا سالبا بمعنى أن الشغل قد بذل ضد القوة .

وإذا كانت F_x , F_y, F_z هى المركبات الكرتيزية للقوة فإن (1) تأخذ الصورة :

$$dw = F_x \; dx + F_y \; dy + F_z \; dz \qquad (3)$$

الطاقة : طاقة الجسم هى مقدرته على بذل الشغل وتقاس بمقدار الشغل الذى يستطيع الجسم أن يبذله وفى الديناميكا يوجد نوعان من الطاقة .

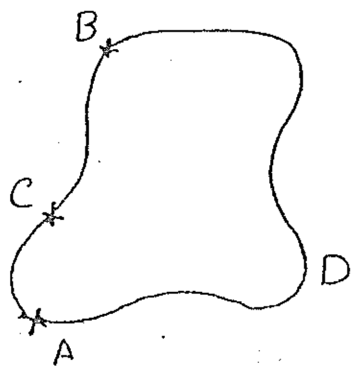
١. طاقة الحركة : نتيجة لحركة الجسم وتقاس بمقدار الشغل الذى يستطيع أن يبذله الجسم .

ضد المقاومة قبل أن يمكن .

٢ـ طاقة الجهد (الموضع) نتيجة لإزاحة الجسم من مكان معين إلى آخر وتقاس بمقدار الشغل الذى يستطيع أن يبذله الجسم ليعود إلى مكانه الأول .

فى الإستاتيكا يقابلنا النوع الاخير لذا سنبحثه بالتفصيل :

نفرض أنه عند تأثير مجموعة معينة من القوى على نقطة مادية نقلتها من الموضع A الى الموضع B عن طريق المسار المحدد ACB وبذلت بذلك مقدارا محددا من الشغل . واضح أن انتقال النقطة من A إلى B يمكن ان يأخذ مسارات مختلفة . فإذا كان الشغل المبذول فى نقل النقطة من A الى B عن طريق المسار ADB أكبر من الشغل المبذول فى نقلها من A إلى B أيضا ولكن عن طريق ACB فإنه يمكن بذلك الحصول على مقدار من الطاقة (الشغل) وذلك بنقل النقطة من A إلى B عن طريق D ثم إرجاعها إلى A عن طريق C وبذلك تعتبر هذه العملية مصدرا للطاقة وهذا لا يحدث حيث إن الشغل لا يعتمد على مسار الانتقال بل على نقطتى البداية والنهاية .



مقدار الشغل الذى تبذله النقطة لكى تعود إلى موضعها الابتدائى يسمى دالة الجهد U أى أن

$$d\,u = -\,dw = -\,F \cdot dr \qquad (5.4)$$

القوى ذات المجالات التى تحقق هذه الخاصية تسمى قوى محافظة وهى تلك المجالات التى تحتفظ فيها الأجسام بالطاقة (الشغل) لتبذله عند عودتها إلى وضعها الابتدائى ولذا تسمى أحيانا بالطاقة الكامنة . فمثلا عند سقوط جسم وزنه w مسافة رأسية h تحت تأثير الجاذبية فإنه يبذل مقدارا من الشغل يساوى wh وهذا المقدار من الشغل هو المطلوب بذله لرفع الجسم إلى أعلى نفس المسافة h وهو نفس المقدار المطلوب بذله لتحريك نفس الجسم على مستوى أملس مائل نفس المسافة الرأسية .

الخيوط المرنة (الزمبركات) أمثلة أخرى تظهر فيها طاقة الجهد حيث الشغل المبذول على إطالة هذه الخيوط (الزمبركات) تبذله الأخيرة عندما تعود إلى طولها الطبيعى .

الشغل المبذول بمجموعة من القوى المؤثرة على نقطة مادية :

إذا أثرت مجموعة القوى $\vec{F}_n$ فى نقطة فإن الشغل المبذول بهذه المجموعة فى إزاحة النقطة إزاحة اختيارية $\vec{dr}$ يساوى

$$dw = \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} + \vec{F}_2 \cdot \vec{dr} + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{dr}$$

$$= \left(\sum \vec{F}_n \right) \cdot \vec{dr} = \vec{F} \cdot \vec{dr} \qquad (5)$$

حيث $\vec{F}$ محصلة هذه المجموعة والتى تساوى المجموع الاتجاهى لها .

من ذلك يتضح أنه إذا اتزنت نقطة مادية تحت تأثير مجموعة من القوى $(\vec{F} = 0)$ فإن الشغل المبذول بهذه المجموعة من القوى لأى إزاحة يساوى الصفر أى أن :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$$

وبالعكس إذا كان الشغل المبذول بمجموعة من القوى المتلاقية لإزاحة اختيارية يساوى الصفر فإن هذه المجموعة تكون متزنة . حيث إنه إذا كان :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0 \ .$$

فإن $\vec{F} = \vec{0}$ حيث $\vec{dr}$ اختيارية .

الشغل المبذول بمجموعة من القوى المؤثرة على جسم متماسك :

إذا أثرت مجموعة القوى $\vec{F}_n$ على جسم وكانت متجهات مواضع نقط تأثيرها $\vec{r}_n$ فإن الإزاحات الطفيفة لنقط التأثير هى $\vec{r}_n$ والشغل dw المبذول بهذه المجموعة تساوى :

$$dw = \vec{F}_1 \cdot \vec{dr}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{dr}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{dr}_n = \sum \vec{F}_n \cdot \vec{dr}_n \ . \qquad (6)$$

ولقد رأينا فيما سبق أن الإزاحة العامة للجسم المتماسك يمكن وضعها فى الصورة :

$$\vec{dr}_n = \vec{ds}_o + \vec{d\theta} \wedge \vec{r}_n \ .$$

حيث $\vec{ds}_o$ إزاحة نقطة ما من الجسم مثل 0 ، $\vec{d\theta}$ الإزاحة الدورانية للجسم حول النقطة 0

وبذلك فإن :

$$dw = \sum \vec{F}_n \cdot (\vec{ds}_o + \vec{d\theta} \wedge \vec{r}_n) = \sum \vec{F}_n \cdot \vec{ds}_o + \vec{d\theta} \cdot \sum \vec{r}_n \wedge \vec{F}_n \ .$$

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{ds}_o + \vec{d\theta} \cdot \vec{L} \qquad (7)$$

حيث $\vec{L}$, $\vec{F}$ المتجهين الرئيسين لمجموعة القوى عند النقطة O .

وهنا أيضا يتضح أنه إذا كانت المجموعة متزنة $(\vec{F} = 0 \ , \ \vec{L} = 0)$ فإن الشغل المبذول بهذه المجموعة لأى إزاحة يساوى الصفر والعكس إذا كان الشغل المبذول بمجموعة من القوى لإزاحة اختيارية يساوى الصفر فإن المجموعة تكون متزنة حيث إنه إذا كان :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{ds}_o + \vec{L} \cdot \vec{d\theta} = 0$$

فإن $\vec{F} \cdot \vec{ds}_o = 0 , \vec{L} \cdot \vec{d\theta} = 0$ حيث إن الإزاحتين $\vec{ds}_o$, $\vec{d\theta}$ مستقلتان ومن ذلك نجد أن $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{L} = \vec{0}$ حيث إن كلا من الإزاحتين إختيارية .

مبدأ الشغل الافتراضى :

استخدام النتائج السابقة فى الإستاتيكا يعرف بمبدأ الشغل الافتراضى حيث يفترض إزاحة الجسم (النقطة) المتزن إزاحة حرة (اختيارية) طفيفة ويحسب الشغل المبذول بمجموعة القوى المؤثرة عليه فى تلك الإزاحة ثم يساوى هذا الشغل بالصفر تطبيقا للنتائج السابقة .

القيود والقوى المهملة :

من المعروف أن موضع النقطة المادية فى الفراغ يتحدد بثلاث كميات مستقلة تعرف بإحداثياتها (x , y , z) مثلا والإزاحة العامة للنقطة المادية الحرة تعتمد على هذه المتغيرات الثلاثة (dx , dy , dz) عدد هذه المتغيرات المستقلة يحدد عدد درجات الحرية للنقطة الحرة إذا قيدت إزاحة النقطة كأن تصبح مرتبطة بسطح معين فإننا نجد أن عدد درجات الحرية يقل إلى اثنين حيث إن معادلة هذا السطح تربط بين المتغيرات الثلاثة السابقة وباستخدامها يمكن التعبير عن الإزاحة الحرة للنقطة المقيدة بمتغيرين مستقلين فقط . وإذا قيدت أكثر بأن أصبحت مرتبطة بمنحنى فإن درجات الحرية تصبح واحدة فقط حيث إنه باستخدام معادلة المنحنى يعبر عن الإزاحة الحرة بمتغير واحد وهكذا بزيادة القيود يقل عدد درجات الحرية فتنعدم مثلا عندما تثبت النقطة .

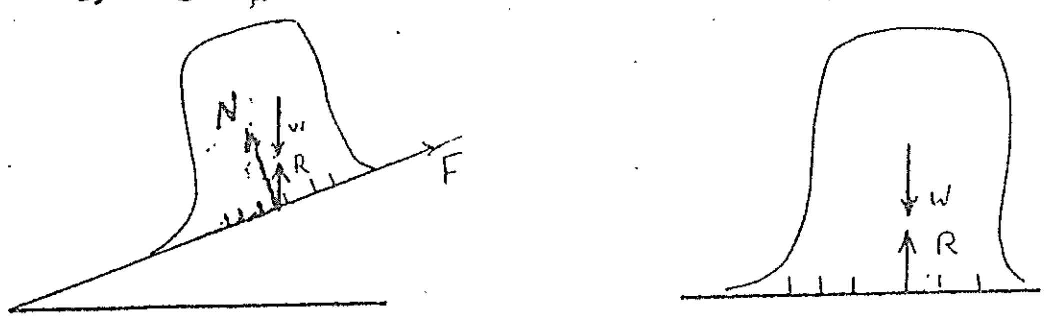
نفس الوضع ينطبق على الجسم حيث من المعروف أن للجسم الحر ستة درجات حرية فإذا قيدت إزاحة الجسم تناقصت درجات حريته تبعا لنوع القيد حتى تنعدم بتثبيت ثلاث نقط من الجسم من ذلك يتضح أن الإزاحة الحرة الواجب استخدامها فى معادلة الشغل الافتراضى يعبر عنها دائما بعدد من المتغيرات يساوى عدد درجات الحرية .

ومن المعروف أنه يصحب القيود ظهور ردود أفعال عند نقط الاتصال . ففى حالة اتصال الأجسام بالسطوح الملساء نجد أن ردود الأفعال تكون ~~للنقط~~ عمودية على الإزاحة وبالتالى لاتبذل شغلا وكذلك بالنسبة لنقط التأثير الثابتة (مثل المفاصل) حيث تنعدم الإزاحة لذلك فإنه عند استخدام مبدأ الشغل الافتراضى فإن معادلته لاتتضمن مثل هذه القوى وهذه تعتبر ميزة هذا المبدأ . كما يجب أيضا إهمال الشد فى الخيوط الغير مرنة عندما لاتتغير أطوالها نتيجة الإزاحة .

استقرار الاتزان :

المستقيم الرأسي المار بمركز كتلة جسم متزن يقابل قاعدته :

عندما يوضع جسم بقاعدته على مستوى (خشن لدرجة منع الانزلاق إن كان مائلا) فإنه يتزن عندما يكون المستقيم الرأسى المار بمركز كتلته يقابل المستوى داخل حدود قاعدته حيث إن القوى المؤثرة على هذا الجسم هى وزنه W ويؤثر فى مركز كتلته رأسيا إلى أسفل ورد فعل المستوى عليه فإذا كان المستوى أفقيا فإن رد فعل المستوى على أجزاء القاعدة المختلفة تكون قوى متوازية فى اتجاه واحد لذلك فإن محصلتها تؤثر فى نقطة داخل حدود القاعدة ، وإذا كان المستوى

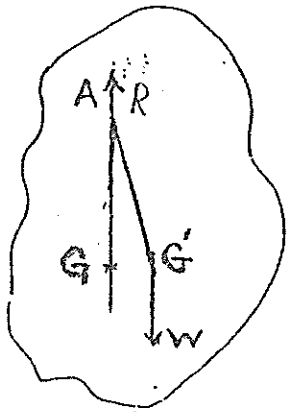


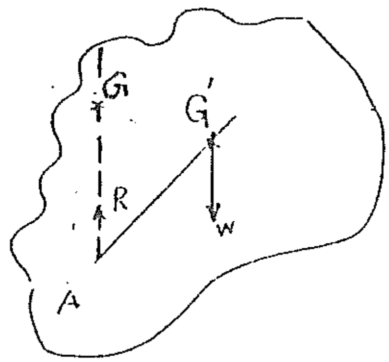
مائلا فإن محصلة قوى الاحتكاك ورد الفعل العمودى تؤثر أيضا فى نقطة داخل هذه الحدود وعلى

ذلك ففى الحالتين حيث إن محصلة ردود الفعل تتزن مع الوزن فإن المستقيم الرأسى المار بمركز الكتلة يقع داخل حدود القاعدة .

مركز كتلة الجسم المتزن يقع على المستقيم الرأسى المار بنقطة التثبيت :

عندما يتزن جسم به نقطة واحدة ثابتة فمن الواضح أن مركز كتلته يقع على المستقيم الرأسى المار بهذه النقطة حيث إنه كما فى الشكل إذا كانت A هى النقطة الثابتة ، G مركز كتلة الجسم





فإن القوى المؤثرة على الجسم هى وزنه W الذى يؤثر رأسيا الى أسفل فى مركز كتلته ، ورد الفعل إلى أعلى عند A ولذلك يجب أن يكونا على استقامة واحدة أى أن تكون G على المستقيم الرأسى المار بالنقطة A (أعلى أو أسفل كما فى الشكل) هذان الوضعان يمثلان وضعى اتزان ولكن هناك فرق واضح بينهما . ففى الحالة الأولى عندما يزاح الجسم قليلا عن وضع اتزانه فإن القوى المؤثرة عليه تعمل على إعادته إلى وضع اتزانه حيث إن عزم وزن الجسم W فى وضعه الجديد (بعد الإزاحة) المؤثر فى G' حول A (نقطة التثبيت) يعمل على إعادة مركز كتلة الجسم إلى وضعه الأصلى G وفى هذه الحالة يقال لاتزان الجسم إنه مستقر أما فى الحالة الثانية إذا أزيح الجسم قليلا عن وضع اتزانه فإن عزم وزنه المؤثر فى G' يعمل على زيادة بعده عن وضع اتزانه الأصلى G وفى هذه الحالة يقال إن الاتزان غير مستقر . وبذلك نصل إلى التعريفات الآتية :

يقال للجسم إنه فى حالة اتزان مستقر إذا أزيح قليلا عن وضع اتزانه وعملت القوى المؤثرة عليه على إعادته لوضع اتزانه الأول . كما يقال إنه فى حالة اتزان غير مستقر عندما تعمل القوى المؤثرة عليه عند إزاحته إزاحة طفيفة على استمرار إبعاده عن وضع اتزانه . وأخيرا يقال إنه فى حالة اتزان متعادل أو محايد

إذا كانت القوى المؤثرة عليه تظل مستزنة لأى إزاحة . يلاحظ أن الأجسام ذات القمم (الرؤوس) الثقيلة أو القواعد الصغيرة تكون فى حالة اتزان غير مستقر كما أنه يمكن القول بأن الجسم فى وضع الاتزان المستقر يكون مركز كتلته فى أسفل نقطة يمكن أن يصل إليها أى أنه إذا كان للجسم أكثر من وضع اتزان فإن الوضع الذى يكون فيه مركز كتلته أسفل عادة يكون وضع اتزان مستقر .

وبذلك يكون الأساس فى دراستنا استقرار الاتزان هو إحداث إزاحة صغيرة ثم بحث تأثير القوى المؤثرة على الجسم ~~~~ فى الوضع المحدد ومعرفة ما إذا كان الجسم سيعود أو يتغير عن وضع اتزانه الأول .

دراسة استقرار الاتزان ومبدأ الشغل الافتراضى :

رأينا أن دالة الجهد ترتبط بالشغل بالعلاقة (4) وبذلك إذا كانت دالة الجهد دالة فى متغير ما مثل θ فبتطبيق مبدأ الشغل الافتراضى $du = -dw = 0$ نحصل على

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \qquad (8)$$

أى أن مبدأ الشغل الافتراضى يعنى أن دالة الجهد نهاية عظمى أو صغرى وحيث أنه عند إزاحة الجسم من وضع اتزانه فإن طاقة جهده تتناقص طبقا لقانون بقاء الطاقة (مجموع طاقتى الحركة والجهد ثابت) من ذلك يتضح أنه إذا كانت طاقة الجهد عند إزاحة الجسم المتزن نهاية عظمى فإنه يتحرك مبتعدا عن وضع الاتزان الذى يكون اتزانا غير مستقر .

أما إذا كانت دالة الجهد عند إزاحته نهاية صغرى فإنه يتحرك مقتربا من وضع الاتزان المستقر أى أن اتزان الجسم يكون مستقرا أو غير مستقر طبقا لوجود نهاية صغرى أو عظمى لدالة الجهد وإذا كان $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$ فإنه لا توجد نهاية عظمى أو صغرى لدالة الجهد والاتزان فى هذه الحالة يظهر كما لو كان متعادلا ولكن يجب بحث مثل هذه الحالات بالتفصيل حيث يكون الاتزان فى الغالب غير مستقر .

إذا أثر على الجسم بجانب وجود أفعال السطوح الملساء وزنه w فقط فإن دالة الجهد كما سبق تساوى wy حيث y ارتفاع مركز كتلة الجسم عن مستوى ثابت وبذلك فإنه فى هذه الحالة يكون الاتزان مستقرا أو غير مستقر طبقا لوجود نهاية صغرى أو عظمى لارتفاع مركز كتلة الجسم عن المستوى الثابت .

مثـــال :

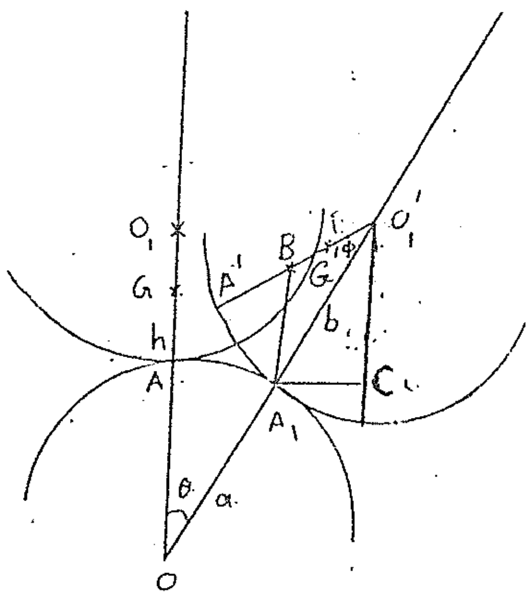
جسم يستقر فى حالة اتزان فوق جسم آخر ثابت، الأجزاء من سطحى الجسمين حول نقطة التماس كرية خشنة لدرجة منع الانزلاق، الخط الواصل بين مركزى الجسمين (الهندسى) رأسيا. ابحث استقرار اتزان هذا الجســم :

الحــــل :

سنحاول حل هذا المثال بالطريقتين السابقتين الأساسيتين وهى إحداث إزاحة للجسم وبحث وضعه الجديد ثم بتطبيق مبدأ الشغل الافتراضى .

النتيجة : التى سنحصل عليها مهمة وتستخدم فى حل المسائل الأخــــرى .

أولا تقوس الجسم السفلى الى أسفــل :



نفرض أن O مركز السطح الثابت O_1 مركز الجسم العلوى . حيث أن السطحين كرويان فإن OO_1 يمر بنقطة التماس A ، وحيث إن الجسم متزن فإن مركز كتلته G يجب أن يكون رأسيا أعلى A أى يقع على المستقيم AO_1 كما بالشكل

نفرض أن OA نصف قطر الجسم السفلى يساوى a ، AO_1 نصف قطر الجسم العلوى يساوى b وأن ارتفاع مركز كتلته عن نقطة التماس A يساوى h

إذا أزيح الجسم العلوى زاوية صغيرة بحيث أصبحت A_1 هى نقطة التماس الجديدة وأن الزاوية AOA_1 تساوى θ فإذا كانت A', O_1', G' هى المواضع الجديدة للنقط A, O_1, G

واضح أن النقط : O, A_1, O_1' على استقامة واحدة وأن القوس AA_1 يساوى القوس $A'A_1$

(لم يحدث انزلاق) فإذا كانت الزاوية A' A_1O_1' تساوى ϕ فإن

$$a\,\theta = b\,\phi$$

وبذلك فإن الزاوية $A'O_1'C$ تساوى

$$\theta + \phi = \frac{a+b}{b}\,\theta$$

واضح أن الاتزان مستقر أو غير مستقر تبعا لوضع G' على يسار أو يمين المستقيم الرأسى المار بالنقطة A_1 فإذا قطع $A'O_1'$ هذا المستقيم فى B فإن الاتزان يكون مستقرا أو غير مستقر طبقا لما يأتى :

$$(b-h)\sin(\theta+\phi) \gtrless b\sin\theta ,$$

أى أن

$$(b-h)\sin\frac{a+b}{b}\theta \gtrless b\sin\theta .$$

بفك دالة الجيب فى صورة متسلسلة فإن العلاقة الأخيرة تأخذ الصورة :

$$(b-h)\left[\frac{a+b}{b}\theta - \frac{1}{6}\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)^3 + \dots\right] \gtrless b\left[\theta - \frac{\theta^3}{6}\dots\right]$$

فإذا كانت الإزاحة (الزاوية θ) صغيرة فيمكن إهمال القوى العليا منها $\theta^3, \theta^5, \dots$

وبذلك نحصل على

$$(b-h)\frac{a+b}{b} \gtrless b$$

أى أن

$$h \lessgtr \frac{ab}{a+b}, \quad \frac{1}{h} \gtrless \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

وفى حالة ما إذا كان

$$h = \frac{ab}{a+b}$$

يجب أن نعود إلى الشرط الأصلى أى قبل حذف القوى العليا من θ ونعتبر حدا آخر وبذلك يكون الاتزان مستقرا أو غير مستقر طبقا لما يأتى :

$$\frac{b^2}{a+b}\left[\frac{a+b}{b}\theta - \frac{1}{6}\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)^3\right] \gtrless b\left[\theta - \frac{\theta^3}{6}\right]$$

أى أن ؛ $(a+b)^2 \lesseqgtr b^2$

ففى هذه الحالة يكون الاتزان غير مستقر دائما حيث شرط الاستقرار لا يمكن تحقيقه وبذلك فإن الاتزان يكون مستقرا إذا كان :

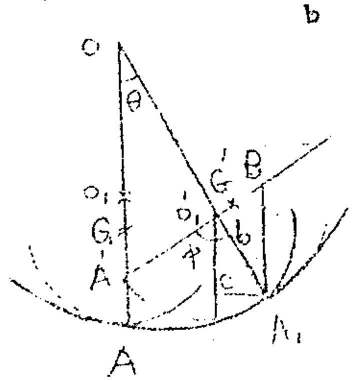
$$\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} ,$$

وغير مستقر فيما عدا ذلك .

ثانيا تقوس الجسم السفلى إلى أعلى :

الرموز السابقة كما فى الشكل نجد فى هذه الحالة أن الزاوية $A'O_1'G$ تساوى

$$\phi - \theta = \frac{a-b}{b}\theta .$$



بالاتزان يكون مستقرا أو غير مستقر طبقا لوضع G' على يسار أو يمين A_1B أى طبقا للعلاقة

$$(h-b)\sin(\phi-\theta) \lesseqgtr b\sin\theta$$

أى أن ..

$$(h-b)\left[\frac{a-b}{b}\theta - \frac{1}{6}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)^3 + \dots\right] \lesseqgtr b\left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right]$$

عندما تكون θ صغيرة نحصل على

$$(h-b)\frac{a-b}{b} \lesseqgtr b$$

أى أن :

$$h \lesseqgtr \frac{ab}{a-b} , \quad \frac{1}{h} \gtreqless \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

وفى الحالة الخاصة عندما $h = \frac{ab}{a-b}$ فيجب البداية من الشرط العام (قبل حذف θ^3)

ومنه نحصل على :

$$\frac{b^2}{a-b}\left[\frac{a-b}{b}\theta - \frac{1}{6}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)^3 + \dots\right] \lesseqgtr b\left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right]$$

أى أن $(a-b)^2 \gtrless b^2 \;,\quad a \gtrless 2b$

فإذا كانت $a = 2b$ حينئذ نجد أن $\phi = 2\theta, \quad h = 2b$

والطرف الأيسر من الشرط العام فى هذه الحالة يساوى

$$(h-b)\sin(\phi-\theta) = b \sin\theta$$

يساوى الطرف الأيمن دائما . أى أنه فى هذه الحالة تنطبق دائما النقطة G' على B. أى أن الجسم العلوى يظل دائما متزنا مهما كانت زاوية الدوران حيث إن مركز كتلته يكون دائما رأسيا أعلى نقطة التماس حيث يؤثر رد الفعل ، وبذلك يكون اتزانه متعادلا .

ثالثا : حل إحدى الحالتين السابقتين بتطبيق مبدأ الشغل الافتراضى :

من مبدأ الشغل الافتراضى نعلم أن الاتزان يكون مستقرا أو غير مستقر تبعا لارتفاع مركز كتلة الجسم من مستوى ثابت نهاية صغرى أو كبرى .

نفرض أن y هو ارتفاع مركز كتلة الجسم العلوى (G) عن المستوى الأفقى المار بالنقطة O

وبذلك نجد أن :

$$y = (a+b)\cos\theta - (b-h)\cos(\theta+\phi)$$

$$= (a+b)\cos\theta - (b-h)\cos\frac{a+b}{b}\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -(a+b)\sin\theta + \frac{(b-h)(a+b)}{b}\sin\frac{a+b}{b}\theta$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -(a+b)\cos\theta + \frac{(b-h)(a+b)^2}{b^2}\cos\frac{a+b}{b}\theta$$

واضح أن $\theta = 0$ تجعل $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ وتعطينا وضع الاتزان

هذا الاتزان يكون مستقرا أو غير مستقر عندما يكون $\dfrac{d^2y}{d\theta^2}$ موجبا أو سالبا أى أن شرط الاستقرار أو عدمه هو :

$$(b-h)(a+b) \gtrless b^2 \;,\quad \frac{1}{h} \gtrless \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

وهو نفس الشرط السابق .

إذا كان $h = \frac{ab}{a+b}$ فإن $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ تساوي الصفر وعندئذ يجب اختبار المعاملات التفاضلية العليا

$$\frac{d^3y}{d\theta^3} = (a+b)\sin\theta - \frac{(b-h)(a+b)^3}{b^3}\sin\frac{a+b}{b}\theta$$

وهذا يتلاشى عند $\theta = 0$

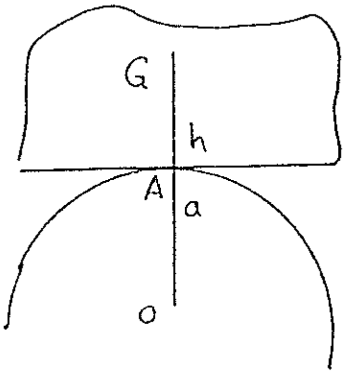
$$\frac{d^4y}{d\theta^4} = (a+b)\cos\theta - \frac{(b-h)(a+b)^4}{b^4}\cos\frac{a+b}{b}\theta$$

عند $\theta = 0$ نحصل على

$$(a+b)\left[1-\frac{(b-h)(a+b)^3}{b^4}\right] = (a+b)\left[1-\frac{(a+b)^2}{b^2}\right]$$

واضح أن $\frac{d^4y}{d\theta^4}$ عند $\theta = 0$ يكون سالبا وبذلك تكون y نهاية عظمى والاتزان غير مستقر وهي نفس النتيجة السابقة .

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على نتائج الحالة الثانية (تقوس الجسم السفلي الى أعلى) الشرط السابق للاستقرار أو عدم الاستقرار يتحقق أيضا إذا لم تكن الأجزاء المتلامسة من الجسمين كروية وكانت عبارة عن سطوح أنصاف أقطار تكورها a , b



نتيجة : (١)

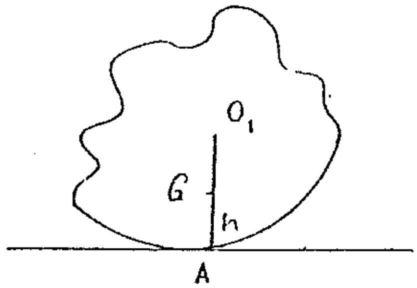
إذا كان الجسم العلوي ذا سطح مستو ملامس للجسم السفلي كما في الشكل ($b \longrightarrow \infty$)

يكون الاتزان مستقرا أو غير مستقر عندما يتحقق الشرط

$$h \lessgtr a$$

أي أن الاتزان يكون مستقرا إذا كان بعد مركز كتلة الجسم العلوي من [illegible] المستوى أقل من نصف قطر الجسم السفلي وفيما عدا ذلك فإن الاتزان يكون غير مستقر .

نتيجة (٢) :



إذا كان الجسم السفلى مستوياً $(a \longrightarrow \infty)$

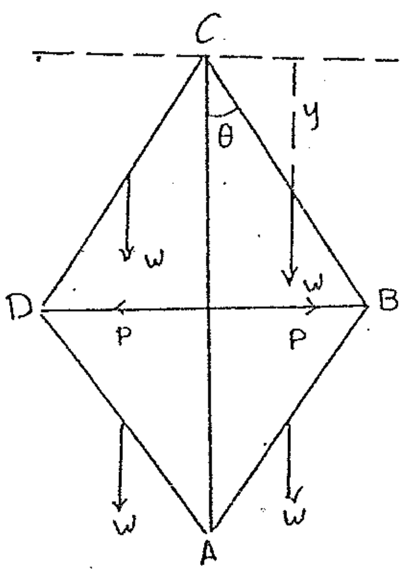
فإن الاتزان يكون مستقراً إذا كان $h < b$

أى أنه إذا وضع جسم ذو قاعدة كرية على مستوى أفقى فإنه يتزن اتزاناً مستقراً إذا كان بعد مركز كتلته من المستوى أقل من نصف قطر تكور سطحه

أمثلـــة :

١ــ أربعة قضبان متساوية منتظمة متصلة ببعضها اتصالا مفصلياً لتكون المعين ABCD فإذا وضع هذا المعين فى مستوى رأسى وكان قطره AC رأسياً وعلق من C واحتفظ بشكله بواسطة قضيب خفيف يصل D , B أوجد الإجهاد فى هذا القضيب .

الحـــل :



بفرض أن عمق مركز كتلة كل من القضيبين العلويين عن المستوى الأفقى المار بنقطة التعليق يساوى y وطول القضيب الخفيف يساوى x فإن معادلة الشغل الافتراضى تأخذ الصورة

$$8 w \ \delta y + p \ \delta x = 0$$

ولكـــن

$$y = \ell \cos \theta \ , \ x = 4 \ \ell \sin \theta$$

حيث أن طول ضلع المعين يساوى $2 \ \ell$

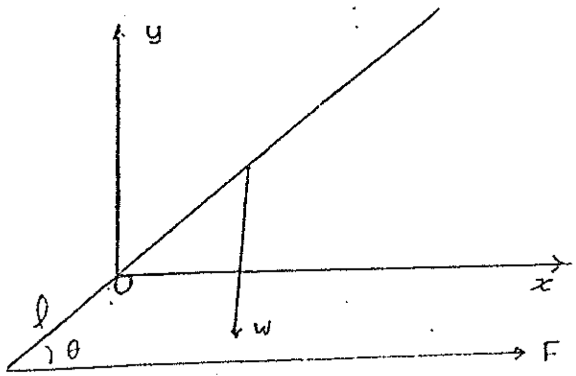
$$\delta y = - \ell \sin \theta \, d\theta \ , \quad \delta x = 4 \ell \cos \theta \, d\theta$$

وبذلك فـــإن

$$\therefore \ P = - 8 w \frac{\delta y}{\delta x} = 8 w \frac{\sin \theta}{4 \cos \theta} = 2 w \tan \theta$$

٢ــ أوجد وضع الاتزان لقضيب منتظم طوله $2 a$ يرتكز على وتد أملس عند نقطة على بعد ℓ من إحدى

نهايتيه التى تؤثر فيها قوة أفقية F ..



الحل :

واضح أن درجات الحرية اثنان وبذلك فإن الإزاحة العامة فى هذه الحالة تتم بإحداث الإزاحة الخطية $\delta \ell$ فى اتجاه القضيب وإزاحة دورانية $\delta \theta$ حول محور يمر بالوتد عموديا على المستوى xy

الشغل المبذول فى إحداث الإزاحة الخطية تبذله مركبات القوى فى اتجاه تزايد ℓ بينما الشغل المبذول فى إحداث الإزاحة الدورانية $\delta\theta$ تبذله عزوم هذه القوى حول محور الدوران وبذلك فإن معادلة الشغل الافتراضى تأخذ الصورة

$$(w \sin\theta - F\cos\theta)\,\delta\ell + [F\sin\theta\,\ell - w\cos\theta\,(a-\ell)]\,\delta\theta = 0$$

وحيث إن $\delta\ell, \delta\theta$ إزاحات حرة فإن وضع الاتزان يتحدد بالعلاقات :

$$w\sin\theta = F\cos\theta, \quad w(a-\ell)\cos\theta = F\,\ell\sin\theta .$$

أى أن :

$$\tan\theta = \frac{F}{w} = \frac{w(a-\ell)}{F\ell}$$

$$\tan\theta = \frac{F}{w}, \quad \ell = \frac{a\,w^2}{w^2+F^2}$$

حل آخر :

نفرض أن إرتفاع مركز كتلة القضيب عن المستوى الأفقى المار بالوتد يساوى y وبعد نقطة تأثير القوة F عن المستوى الرأسى الذى يحوى الوتد يساوى x فإن معادلة الشغل الافتراضى تأخذ الصورة

$$-w\,\delta y - F\,\delta x = 0$$

حيث

$$x = \ell\cos\theta, \quad y = (a-\ell)\sin\theta$$

$$\therefore \delta x = \cos\theta\,\delta\ell - \ell\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\delta y = (a-\ell)\cos\theta\,\delta\theta - \sin\theta\,\delta\ell$$

وبذلك فإن :

$$w\,[(a-\ell)\cos\theta\,\delta\theta-\sin\theta\,\delta\ell]+$$

$$F\,[\cos\theta\,\delta\ell-\ell\sin\theta\,\delta\theta]=0$$

$$\therefore\ [F\cos\theta-w\sin\theta]\,\delta\ell+\delta\theta\,[w(a-\ell)\cos\theta-F\ell\sin\theta]=0\,.$$

وهى نفس النتيجة السابقة :

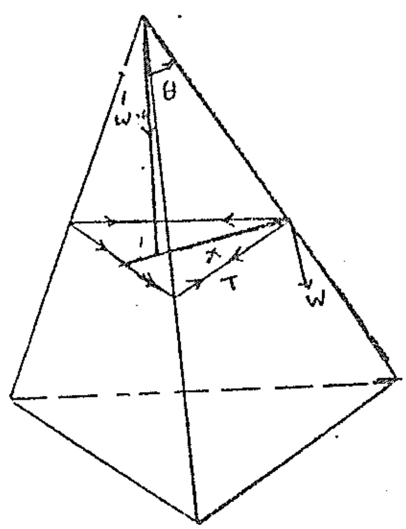
٣ـ ثلاثة سيقان ثقيلة منتظمة طول كل منها ℓ ووزنها w اتصلت من إحدى نهايتها بمفصلة ملساء، ووضعت بنهايتها الحرة على مستوى أفقى أملس بعد توصيل منتصفاتها بثلاثة خيوط طول كل منها a أوجد الشد فى كل من هذه الخيوط عند وضع وزن w' عند المفصلة .

الحل :

بفرض أن ارتفاع منتصفات السيقان عن المستوى الأفقى يساوى y وطول كل من الخيوط يساوى x والزاوية بين كل من السيقان والرأس θ كما فى الشكل فإن معادلة الشغل الافتراضى تأخذ الصورة :

$$(3w+2w')\,\delta y+3T\,\delta x=0$$

حيث T الشد فى كل من الخيوط.



من الشكل يتضح أن

$$y=\frac{\ell}{2}\cos\theta,\quad \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,x=\frac{\ell}{2}\sin\theta$$

أى أن

$$\delta y=-\frac{\ell}{2}\sin\theta\,d\theta,\quad \delta x=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\cos\theta\,d\theta$$

وبذلك نجد أن

$$T=\frac{3w+2w'}{3\sqrt{3}}\tan\theta$$

ومن وضع الاتزان نجد أن:

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{2a}{\sqrt{3}\,\ell}$$

ومنها نجد أن :

$$\tan\theta=\frac{2a}{\sqrt{3\ell^2-4a^2}}$$

وبذلك نحصل على :

$$T=\frac{2a(3w+2w')}{3\sqrt{9\ell^2+12a^2}}\,.$$

تمارين

١- نصف كرة مصمتة نصف قطرها AB ارتكزت بالنقطة B على حائط رأسى أملس وعلقت فى الحائط من النقطة A بخيط طوله يساوى القطر AB . أوجد ميل الخيط فى حالة الاتزان. ثم ابحث استقرار هذا الاتزان.

٢- نصف كرة مصمتة متجانسة نصف قطرها r تكون على قاعدة مخروط دائرى مصمت من نفس مادتها، ثم وضعت على سطح ثابت نصف قطرها r' وكان محور المخروط رأسيا. أثبت أن أكبر ارتفاع للمخروط يتفق مع استقرار اتزانه لإزاحة دورانية صغيرة تساوى :

$$\frac{r'}{r+r'}\left[\sqrt{(3r'+r)(r'-r)}\;-2r\right]$$

وإذا وضعت نصف الكرة السابقة على مستوى أفقى فإن أكبر ارتفاع للمخروط فى هذه الحالة يساوى $\sqrt{3}\,r$.

٣- اتصلت إحدى نهايتى قضيب منتظم طوله l ووزنه W اتصالا مفصليا فى نقطة ثابتة، بينما اتصلت النهاية الأخرى له بخيط يمر على بكرة صغيرة ملساء على بعد a رأسيا أعلى المفصلة ويتدلى من طرفه الآخر وزن يساوى $\frac{W}{4}$. فإذا كانت : $l < a < 2l$. فأثبت أن المجموعة تكون فى اتزان مستقر عندما يكون القضيب رأسيا إلى أعلى وأن هناك مواضع أخرى للاتزان يكون فيها القضيب مائلا على الرأسى.