# اسم المقرر : هندسة تحليلية

# استاذ المقرر : د. ايات احمد رضوان

# الفرقـــــة : الاولي اساسي

# الشعبـــــة : الرياضيات

# محاضرات

# في

# الهندسة التحليلية

## ( المستوى الأول )

**إعداد**

قسم الرياضيات – كلية العلوم بقنا

**جامعة جنوب الوادي**

( **تنبيه هام**: لايجوز نسخ أو تصوير أي جزء من هذه المذكرة بدون إذن من القائم على إعدادها )

## مقدمة:

الحمد لله الذي علم بالقلم،علم الإنسان مالم يعلم،والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا مُحَمَّد ﷺ وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد ...

الهندسة هي علم دراسة خصائص الشكل ( أبعاد – أركان – زوايا –... ).

وتُعتبر الهندسة من أقدم العلوم الرياضية على الاطلاق ثم يليها علم الجبر.

وأول من مارس الهندسة هم قدماء المصريين ثم الرومان ثم العرب ، ويُعتبر العلامة **عمر الخيام (١٠٤٢–١١٢٣م)** أول من أسس علم الهندسة من علماء المسلمين الأوائل.

والممارسة الحقيقية للهندسة تتمثل الآن فيما يُسمى بالهندسة الوصفية ، أما الهندسة التحليلية فتتمثل في تحليل الخصائص الهندسية باستخدام علم الجبر. فمثلاً النقطة وهي اللبنة الصغرى في بناء الشكل الهندسي يُستعاض عنها بكميات عددية تُسمى احداثيات النقطة ، والخط المستقيم يُعبر عنه بمعادلة جبرية في متغيرين إذا كان الخط المستقيم يقع في المستوى ، ويُعبر عنه بمعادلتين في ثلاث متغيرات إذا كان الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي ، والدائرة والقطع المخروطي يُستعاض عنهما بمعادلة جبرية من الدرجة الثانية في متغيرين ، وهكذا ...

وكما نعلم فإن ممارسة الهندسة بالعين المجردة (كما كان في القديم ) عملية مضنية وشاقة ، وكما إن جُل أو معظم الأشكال الهندسية في الكون غير مستوية لذلك لجأ الانسان منذ القدم إلى صُنع أشكال مستوية يقيس بها مثل المستقيم – المثلث – المربع – المستطيل – الدائرة – القطوع المخروطية – الأسطوانة - الكرة – ...

ومن ثم وُضعت القوانين الخاصة بهذه الأشكال الهندسية.

ونقدم هذه المذكرة والتي تشتمل على مجموعة المحاضرات في الهندسة التحليلية في المستوى ، والتي قمت بتدريسها في الجامعات والمعاهد وهي مقسمة إلى أربعة أبواب.

تناولنا في الباب الأول نظام الإحداثيات في المستوى ( الإحداثيات الكارتيزية والإحداثيات القطبية والعلاقة بينهما ) ، والمعادلات القطبية للخط المستقيم وللدائرة في المستوى ، وفي الباب الثاني تناولنا تغيير المحاور في المستوى ( نقل ودوران المحاور ) ،

وفي الباب الثالث تناولنا شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في المتغيرين x,y خطين مستقيمين ، ومعادلة أي خط مستقيم يمر بنقطة تقاطع خطين مستقيمين معلومين ، وأقصر بُعد بين مستقيمين متوازيين في المستوى ، الزاوية المحصورة بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة المتجانسة $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ، ومعادلة

الخطين المستقيمين المنصفين للزاويتين بين الخطين الممثلين بالمعادلة

المتجانسة $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ .

وفي الباب الرابع تناولنا القطوع المخروطية وصفاتها ( القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد

ونسأل الله عز وجل أن ينفعنا بما علمنا وأن يعلمنا ما ينفعنا ، وأن يجعل أعمالنا خالصة لوجهه الكريم ، وأخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

## ✓ مراجعة بعض النتائج في الهندسة التحليلية والتي سبق دراستها:

(١) المسافة بين النقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ تعطى بالعلاقة:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(٢) النقطة $(x, y)$ التي تقسم المستقيم الواصل بين النقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ بنسبة $(\lambda_1 : \lambda_2)$ تُعطى بالعلاقة:

$$x = \frac{\lambda_1 x_2 \pm \lambda_2 x_1}{\lambda_1 \pm \lambda_2} \;,\;\; y = \frac{\lambda_1 y_2 \pm \lambda_2 y_1}{\lambda_1 \pm \lambda_2}$$

العلاقة بالاشارة الموجبة عندما يكون التقسيم من الداخل ، والعلاقة بالاشارة السالبة عندما يكون التقسيم من الخارج.

(٣) مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ تكون:

$$\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

وإذا كانت مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ تساوي الصفر فإن النقط الثلاث تقع على إستقامة واحدة ، ولذلك فإن الشرط الضروري لوقوع ثلاث نقط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ على إستقامة واحدة هو:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(٤) المعادلة العامة للمستقيم تكون: $ax + by + c = 0$ حيث $a, b, c$ كميات ثابتة.

وميل هذا المستقيم يكون $m = -\frac{a}{b}$ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات يساوي $-\frac{c}{b}$

(٥) معادلة المستقيم بمعلومية الميل $m$ تكون $y = mx + c$ حيث $m$ هو الميل ، $c$ الجزء المقطوع من محور $OY$ .

(٦) معادلة المستقيم بمعلومية الأجزاء التي يقطعها من محاور الإحداثيات تكون:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

حيث $a, b$ هى الأجزاء المقطوعة من المحاور $OX, OY$ على الترتيب.

(٧) معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ تكون:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ويمكن كتابتها على الصورة: $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$

(٨) ميل المستقيم المار الواصل بين النقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ يكون:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(٩) معادلة المستقيم الذى ميله $m$ ويمر بالنقطة $(x_1, y_1)$ تكون:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

(١٠) معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات $OX$ تكون: $y = k$

(حيث $k$ مقدار ثابت).

ومعادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات $OY$ تكون: $x = k$

(حيث $k$ مقدار ثابت).

(١١) المستقيمان $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\ ,\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ :

(أ) يتقاطعان إذا كان: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ب) يتوازيان إذا كان: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(ج) يتطابقان إذا كان: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(١٢) المستقيمان $y_1 = m_1x + c_1\ ,\ y_2 = m_2x + c_2$ (حيث $m_1, m_2$ ميلهما):

(أ) يتوازيان إذا كان: $m_1 = m_2$

(ب) يتعامدان إذا كان: $m_1m_2 = -1$

(ج) الزاوية بينهما تُعطى بالعلاقة:

$$\theta = \tan^{-1}(\pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}).$$

(١٣) طول العمود الساقط من النقطة $(x_1, y_1)$ على المستقيم $ax + by + c = 0$ يساوي:

$$\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|.$$

(١٤) معادلات منصفات الزوايا بين المستقيمين:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0\ ,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

تكون:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

(١٥) شرط تلاقي ثلاث مستقيمات:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0\ ,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0\ ,\ a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

في نقطة واحدة هو: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ .

(١٦) باعتبار $a', b', c'$ هي أطوال أضلاع المثلث $abc$ المقابلة للرؤوس $a, b, c$ على الترتيب فيكون:

(أ) **قاعدة الجيب**:

$$\frac{a'}{\sin a} = \frac{b'}{\sin b} = \frac{c'}{\sin c}.$$

(ب) **قاعدة جيب التمام**:

$$\frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'} = \cos c.$$

(١٧) معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $(a, b)$ ونصف قطرها $r$ تكون:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$

وهذه المعادلة يمكن وضعها في الصورة العامة:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$

وفي هذه الحالة يكون نصف قطرها يساوي $\sqrt{a^2+b^2-c}$ ، ومركزها $(a,b)$ .

---

- **نتائج مثلثية**: لجميع قيم $x, y$ يكون:

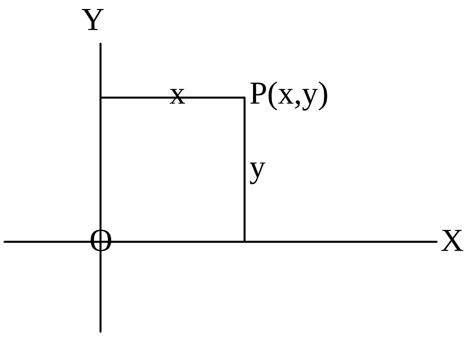
- $\sin^2 x+\cos^2 x=1.$
- $\tan^2 x+1=\sec^2 x.$
- $\cot^2 x+1=\csc^2 x.$
- $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$
- $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$
- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$
- $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$
- $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.$ $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}.$
- $\sin 2x=2\sin x\cos x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}.$
- $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan 2x}.$
- $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$ $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$
- $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}.$
- $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}.$
- $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}.$
- $\cos x-\cos y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{y-x}{2}.$
- $2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y).$
- $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y).$
- $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y).$
- $2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y).$

# نظام الاحداثيات في المستوى Coordinates System in a Plane

(١) **الاحداثيات الخيّامية (أو الكارتيزية)** Cartizian coordinates:

من نقطة ثابتة O في المستوى تُسمى **نقطة الأصل** Origin point نرسم مستقيمين **متعامدين OX,OY يُسميان محاور الاحداثيات .فإذا كانت P نقطة ما في المستوى فإن** P تتحدد تحديداً تاماً بواسطة كميتين عددتين (x,y) تُسميان **احداثيات النقطة** في المستوى، حيث x تمثل البعد العمودي للنقطة P عن محورY،وتمثل y البعد العمودي للنقطة P عن محور X .

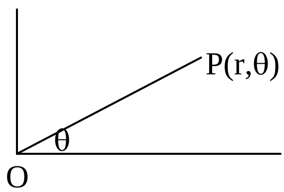
(انظر الشكل)




(٢) **الاحداثيات القطبية** Polar coordinates:

لتكن O نقطة ثابتة في المستوى. من هذه النقطة الثابتة نرسم مستقيم ثابت أفقي ينطبق على المحور OX

كما بالشكل:




فإذا كانت P نقطة ما في المستوى فإن P تتعين تماماً إذا علمنا المسافة OP (أي بُعد P عن O) ، وإذا علمنا أيضاً الزاوية التي يصنعها المستقيم OP مع المحور OX

تُسمى النقطة الثابتة O **القطب** والمستقيم الثابت OX **الخط الإبتدائي**.

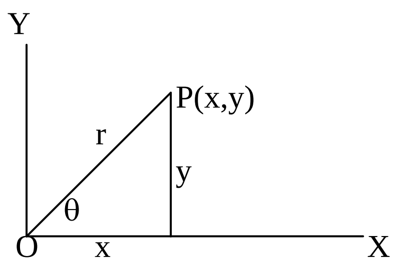
ويُسمى البعد OP **البُعد القطبي** ويُرمز له بالرمز r ، وتُسمى الزاوية التي يدور فيها المستقيم OP من وضعه الأصلي المنطبق على المحور OX إلى الوضع OP **الزاوية القطبية** للنقطة P ويُرمز لها

بالرمز $\theta$ . فتكون الاحداثيات القطبية للنقطة P في هذه الحالة هي عبارة عن الثنائي المرتب $(r,\theta)$ . ويُعتبر البعد القطبي OP موجباً إذا قيس من القطب O في اتجاه المستقيم الذي يحدد الزاوية القطبية $\theta$ ، ويُعتبر سالباً إذا قيس في الاتجاه المضاد. وتُعتبر الزاوية القطبية $\theta$ موجبة إذا قيست في اتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة ، وتُعتبر سالبة إذا قيست في اتجاه دوران عقارب الساعة ، وتكون $-\pi\leq\theta\leq\pi$ .

**(٣) العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الكارتيزية:**

لتكن P نقطة في المستوى احداثياتها القطبية $(r,\theta)$ واحداثياتها الكارتيزية $(x,y)$ .

كما بالشكل:




ومن الشكل يتضح أن:

$$x = r\cos\theta \qquad (1)$$
$$y = r\sin\theta \qquad (2)$$

هاتين العلاقتين تعبران عن $x,y$ بدلالة $r,\theta$ .

وبتربيع العلاقتين (2),(1) وجمعهما نحصل على:

$$r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (3)$$

وبقسمة العلاقة (2) على العلاقة (1) نحصل على:

$$y/x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(y/x) \qquad (4)$$

وهاتين العلاقتين (4),(3) تعبران عن $r,\theta$ بدلالة $x,y$ .

**مثال(١)**: أوجد الاحداثيات القطبية للنقطة $(-\sqrt{3},-1)$ . وعين موضع هذه النقطة.

<u>الحل</u>: واضح أن النقطة مُعطاه بالاحداثيات الكارتيزية $(x,y) = (-\sqrt{3},-1)$ وإذاً:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$
$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$$
$$\therefore -\sqrt{3} = 2\cos\theta\ ,\ -1 = 2\sin\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = -\sqrt{3}/2\ ,\ \sin\theta = -1/2\ ,\ \tan\theta = 1/\sqrt{3}$$

ومن ثم تقع الزاوية $\theta$ في الربع الثالث من المستوى وعلى ذلك تكون القيمة الأساسية لها تساوى - $(\pi-\pi/6) = -5\pi/6$ .

وإذاً تكون الاحداثيات القطبية للنقطة $(-\sqrt{3},-1)$ هي $(r,\theta) = (2,-5\pi/6)$ .

**مثال(٢)**: حول المعادلة $r^2 = a^2\cos 2\theta$ إلى الصورة الكارتيزية (حيث a ثابت).

<u>الحل</u>:

$$r^2 = a^2\cos 2\theta = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$\therefore r^4 = a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)$$
$$\therefore (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

**مثال(٣)**: حول المعادلة $x^3 = y^2(2-x)$ إلى الصورة القطبية.

<u>الحل</u>: بالتعويض عن $x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$ في المعادلة المعطاه ينتج أن:

$$r^3\cos^3\theta = r^2\sin^2\theta(2 - r\cos\theta)$$
$$\therefore r^3\cos^3\theta = 2r^2\sin^2\theta - r^3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$= 2r^2\sin^2\theta - r^3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$= 2r^2\sin^2\theta - r^3\cos\theta + r^3\cos^3\theta$$
$$\therefore r\cos\theta = 2\sin^2\theta.$$

- **<u>تمارين</u>**: (١) أوجد الاحداثيات القطبية لكل من النقط الآتية:

$P_1(-\sqrt{3},1)$ , $P_2(-1,\sqrt{3})$ , $P_3(-1,1)$ , $P_4(-3,3\sqrt{3})$ , $P_5(1,-\sqrt{3})$ .

(٢) أوجد الاحداثيات الكارتيزية لكل من النقط الآتية:

$P_1(2,-\pi/2)$ , $P_2(1,\pi/3)$ , $P_3(3,\pi/4)$ , $P_4(4,\pi/3)$ , $P_5(2,-\pi/6)$.

(٣) حول المعادلات الآتية إلى الصورة القطبية:

(1) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$. (2) $y^2 = x^3/(2a-x)$ . ; a constant.
(3) $x^4+y^4 = a^2xy$. (4) $2x^2 - 2y^2 = 9$.

(٤) حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية:

(1) $r = 1 - \cos\theta$. (2) $r^2 = 9\cos 2\theta$.
(3) $r = 3/(2+3\sin\theta)$. (4) $r(2-\cos\theta) = 2$.

# الباب الثاني

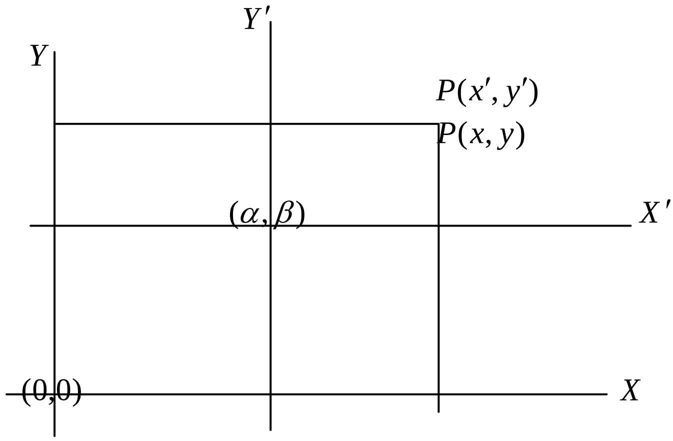
# تغيير المحاور في المستوى

الغرض من تغيير محاور الاحداثيات هو وضع معادلات المنحنيات في أبسط صورة لها حتى يمكن معرفة نوعها ودراسة خصائصها. وفيما يلي سندرس ثلاثة طرق لتغيير المحاور وهي:

## ١- نقل نقطة الأصل (نقل محاور الإحداثيات):

إذا كانت $y = f(x)$ هي معادلة منحنى ما في المستوى ، وكانت $(x, y)$ هي إحداثيات نقطة $P$ في المستوى ، ونُقلت نقطة الأصل $(0,0)$ إلى نقطة أخرى ولتكن $(\alpha, \beta)$

مع الإبقاء على اتجاه المحاور فإذا كان إحداثيات النقطة $P$ بالنسبة للمحورين الجديدين هي $(x', y')$ فإنه من الشكل:




يتضح أن $x = x' + \alpha \ , \ y = y' + \beta$

وإذاً عند نقل نقطة الأصل إلى النقطة $(\alpha, \beta)$ فإن معادلة المنحنى تصبح على الصورة:

$y' + \beta = f(x' + \alpha)$.

---

**مثال(١)**: أوجد الاحداثيات الجديدة للنقطة $P(-3,4)$ عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(2,-5)$ .

الحل: العلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $x', y'$ عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(\alpha, \beta)$ هي:

$$x = x' + \alpha \ ,$$
$$y = y' + \beta.$$

ومن المعطيات: $(\alpha, \beta) = (2,-5)$ , $(x, y) = (-3,4)$

$$\therefore -3 = x' + 2 \ , \quad 4 = y' - 5. \quad \Rightarrow x' = -5, \ y' = 9.$$

وعلى ذلك تكون الإحداثيات الجديدة للنقطة $P(-3,4)$ هي $P(-5,9)$ .

**مثال(٢)**: إذا نُقلت نقطة الأصل إلى النقطة $(2,-3)$ فأوجد الصورة الجديدة التى تؤول إليها معادلة المنحنى $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 36$ .

الحل: العلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $x', y'$ عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(\alpha, \beta)$ هي:

$$x = x' + \alpha \ ,$$
$$y = y' + \beta.$$

ومن المعطيات: $(\alpha, \beta) = (2,-3)$

$$\therefore x = x' + 2 \ ,$$
$$y = y' - 3.$$

وبالتعويض عن $x, y$ في معادلة المنحنى:

$$(x' + 2)^2 + (y' - 3)^2 - 4(x' + 2) + 6(y' - 3) = 36.$$
$$\therefore (x'^2 + 4x' + 4) + (y'^2 - 6y' + 9) - 4x' - 8 + 6y' - 18 = 36.$$
$$\therefore x'^2 + y'^2 = 49.$$

وهذه هي معادلة المنحنى الجديدة المطلوبة.

وهذه المعادلة تمثل دائرة مركزها النقطة $(2,-3)$ ونصف قطرها يساوي 7 .

---

**نتيجة١** : تحقق من أن معادلة المنحنى $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ تصبح خالية من حدود الدرجة الأولى بنقل نقطة الأصل (محاور الإحداثيات) إلى النقطة $(\alpha, \beta) \equiv \left(\dfrac{fh - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2}\right)$.

الإثبات: العلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $x', y'$ عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(\alpha, \beta)$ هي: $x = x' + \alpha \ , \ y = y' + \beta$

وبالتعويض في معادلة المنحنى:

$$a(x'+\alpha)^2+2h(x'+\alpha)(y'+\beta)+b(y'+\beta)^2+2g(x'+\alpha)+2f(y'+\beta)+c=0.$$

$$\Rightarrow a[x'^2+2\alpha x'+\alpha^2]+2h[x'y'+\alpha y'+\beta x'+\alpha\beta]+b[y'^2+2\beta y'+\beta^2] \\ +2g(x'+\alpha)+2f(y'+\beta)+c=0.$$

$$\Rightarrow ax'^2+2hx'y'+by'^2+x'[2a\alpha+2h\beta+2g]+y'[2h\alpha+2b\beta+2f] \\ +[a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c]=0.$$

**وبمساواة معاملات حدود الدرجة الأولى بالصفر:**

$$\begin{array}{lcl} 2a\alpha+2h\beta+2g=0\ , & \Rightarrow & a\alpha+h\beta+g=0\ , \\ 2h\alpha+2b\beta+2f=0 & & h\alpha+b\beta+f=0 \end{array}$$

وبحل هاتين المعادلتين معاً (بالحذف) ينتج $\beta=\dfrac{gh-af}{ab-h^2}$ , $\alpha=\dfrac{fh-bg}{ab-h^2}$ ،

ومن ثم تصبح المعادلة في الصورة $ax'^2+2hx'y'+by'^2+k=0$

حيث $k=a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c$

وواضح أنها خالية من حدود الدرجة الأولى وهو المطلوب.

**٢- دوران المحاور:**

نعتبر محاور الإحداثيات $OX\,,OY$ أُديرت بزاوية $\theta$ في اتجاه موجب مع الإبقاء على موضع نقطة الأصل $O$ ونفرض أن المحاور الجديدة هي $OX',OY'$ على الترتيب.

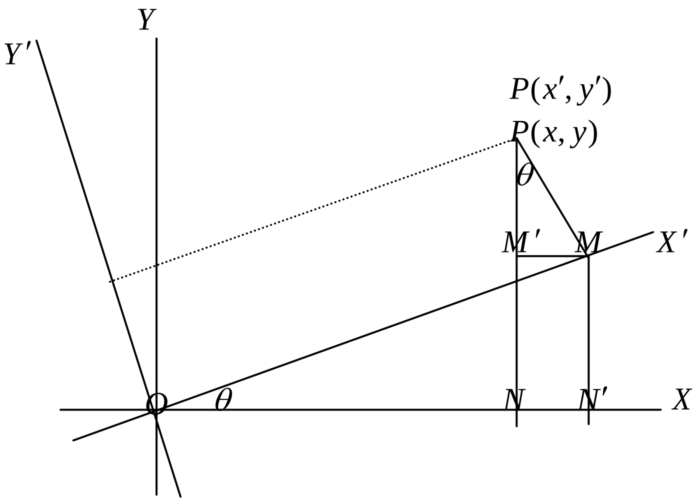
وأن إحداثيات النقطة $P$ هي $(x,y)$ بالنسبة للمحورين الأصليين $OX\,,OY$

وإحداثياتها $(x',y')$ بالنسبة للمحورين الجديدين $OX',OY'$

وأن المستقيمين $PM\,,PN$ عمودان من النقطة $P$ على المستقيمين $OX',OX$ على الترتيب.

وأن المستقيمين $MN',MM'$ عمودان من النقطة $M$ على $OX\,,PN$ على الترتيب.

كما بالشكل التالي:




من الشكل يتضح أن الزاوية $MPM' = \theta$ وأن:

$$\begin{aligned} y &= PN = PM' + M'N \\ &= PM' + MN' \\ &= PM\cos\theta + OM\sin\theta \\ &= y'\cos\theta + x'\sin\theta \\ &= x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= ON = ON' - NN' \\ &= ON' - M'M \\ &= OM\cos\theta - PM\sin\theta \quad , \\ &= x'\cos\theta - y'\sin\theta. \end{aligned}$$

ونستنتج من ذلك أن معادلة المنحنى $y = f(x)$ بالنسبة للمحاور الأصلية $OX,OY$ تصبح بالنسبة للمحاور الجديدة $OX',OY'$ على الصورة:

$x'\sin\theta + y'\cos\theta = f(x'\cos\theta - y'\sin\theta).$

وبذلك تكون العلاقة بين الاحداثيات الأصلية $x, y$ والاحداثيات الجديدة $x', y'$

عندما تدور محاور الاحداثيات زاوية $\theta$ تكون:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

أي أن:

| | $x'$ | $y'$ |
|---|---|---|
| $x$ | $\cos\theta$ | $-\sin\theta$ |
| $y$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ |

---

**مثال(٣)**: إذا دارت المحاور زاوية $\frac{\pi}{4}$ فأوجد الصورة الجديدة التى تؤول إليها معادلة المنحنى $2xy = 49$ .

الحل: العلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $x', y'$ عندما تدور المحاور زاوية $\theta$ هي:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

ومن المعطيات $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\ , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

وبالتعويض عن $x, y$ في معادلة المنحنى المعطاه نحصل على:

$$2[\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')][\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')] = 49.$$
$$\therefore\ x'^2 - y'^2 = 49$$

وهذه هي معادلة المنحنى الجديدة المطلوبة.

---

**نتيجة٢**: تحقق من أن معادلة المنحنى $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ تصبح خالية من الحد $xy$ بدوران محاور الإحداثيات زاوية $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{2h}{a-b})$.

الإثبات: العلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x,y$ والإحداثيات الجديدة $x',y'$ عندما تدور المحاور زاوية $\theta$ هي:

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

**وبالتعويض في معادلة المنحنى:**

$$\begin{aligned}&a(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+2h(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)\\&+b(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2+2g(x'\cos\theta-y'\sin\theta)+2f(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+c=0.\end{aligned}$$

ومع

امل $x'y'$ في هذه المعادلة يكون:

$$-2a(\sin\theta\cos\theta)+2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2b(\sin\theta\cos\theta)=(b-a)\sin 2\theta+2h\cos 2\theta$$

وبمساواة هذا المعامل بالصفر ينتج أن:

$$2h\cos 2\theta=(a-b)\sin 2\theta\Rightarrow\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{2h}{a-b}).$$

وهو المطلوب.

---

**مثال**: حول المعادلة $8x^2+4xy+5y^2=36$ إلى أخرى خالية من الحد $xy$.

الحل: بدوران محاور الاحداثيات زاوية $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}[\frac{2h}{a-b}]$

والعلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x,y$ والإحداثيات الجديدة $x',y'$

عندما تدور المحاور زاوية $\theta$ هي: $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$

ومن المعطيات: $h=2\ ,\ a=8\ ,\ b=5$

$$\therefore\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}[\frac{4}{8-5}]=\frac{1}{2}\tan^{-1}[\frac{4}{3}]\Rightarrow\tan 2\theta=\frac{4}{3}\Rightarrow\sin 2\theta=\frac{4}{5}\ ,\ \cos 2\theta=\frac{3}{5}\ ,$$

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)=\frac{1}{2}(1-\frac{3}{5})=\frac{1}{2}(\frac{2}{5})=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{5})=\frac{1}{2}(\frac{8}{5})=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ .$$

$$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y')\ ,\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y').$$

وبالتعويض في المعادلة $8x^2+4xy+5y^2=36$ :

$$\frac{8}{5}(2x'-y')^2+\frac{4}{5}(2x'-y')(x'+2y')+\frac{5}{5}(x'+2y')^2=36$$
$$\therefore 9x'^2+4y'^2=36.$$

وهي المعادلة المطلوبة.

---

## أمثلة متنوعة:

**١ –** أوجد نقطة الأصل الجديدة التي إذا نقلنا إليها محوري الإحداثيات فإن معادلة المنحنى $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+2=0$ تصبح خالية من الحد المطلق وحدود الدرجة الأولى.

الحل: لتكن $(\alpha,\beta)$ هي نقطة الأصل الجديدة ،

وبالتعويض عن $x=x'+\alpha\ ,\ y=y'+\beta$ في معادلة المنحنى:

$$12(x'+\alpha)^2-10(x'+\alpha)(y'+\beta)+2(y'+\beta)^2+11(x'+\alpha)-5(y'+\beta)+2=0\ (^*)$$

وحتى تكون المعادلة خالية من الحد المطلق وحدود الدرجة الأولى نساوي معاملات حدود الدرجة الأولى والحد المطلق في المعادلة(*) بالصفر كما يلي:

$$24\alpha-10\beta+11=0\ ,$$
$$-10\alpha+4\beta-5=0\ ,$$
$$12\alpha^2-10\alpha\beta+2\beta^2+11\alpha-5\beta+2=0\ .$$

وبحل المعادلتين الأولى والثانية معاً نحصل على $\alpha=-\frac{3}{2}\ ,\ \beta=-\frac{5}{2}$

وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد أنهما يحققاها ،

وإذاً نقطة الأصل الجديدة تكون $(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2})$ .

وبالتعويض عن قيمتي $\alpha,\beta$ في المعادلة(*) نحصل على المعادلة:

$$12x'^2-10x'y'+2y'^2=0\ .$$

وواضح أن هذه المعادلة خالية من الحد المطلق وحدود الدرجة الأولى.

**٢**– إذا دارت محاور الاحداثيات زاوية حادة $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

فأوجد الصورة الجديدة التي تؤول إليها معادلة المنحنى $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$

<u>الحل</u>: العلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $x', y'$

عندما تدور المحاور زاوية $\theta$ هي:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad , \quad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

ومن المعطيات $\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\ , \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y').$$

وبالتعويض عن $x, y$ في معادلة المنحنى:

$$\frac{2}{5}(2x' - y')^2 - \frac{3}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + \frac{1}{5}(x' + 2y')^2 = 0$$
$$\Rightarrow 2(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) - 3(2x'^2 + 3x'y' - 2y'^2) + (x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) = 0$$
$$\Rightarrow 3x'^2 - 13x'y' + 12y'^2 = 0.$$

وهي المعادلة المطلوبة.

**٣**– إذا دارت المحاور زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ ثم نقلت المحاور بعد ذلك إلى النقطة (6-,2-) بالنسبة للمحاور بعد دورانها فتحقق من أن الصورة الجديدة لمعادلة المنحنى:

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 - 4\sqrt{2}\,\mathrm{x} - 8\sqrt{2}\,\mathrm{y} + 4 = 0.$$

تكون $xy = 14$ .

<u>الحل</u>: العلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $x', y'$

عندما تدور المحاور زاوية $\theta$ هي:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad , \quad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

ومن المعطيات $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

بالتعويض فى معادلة المنحنى:

$$\frac{1}{2}(x'-y')^2-\frac{1}{2}(x'+y')^2-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(x'-y')-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(x'+y')+4=0$$

$$\Rightarrow (x'^2-2x'y'+y'^2)-(x'^2+2x'y'+y'^2)-8(x'-y')-16(x'+y')+8=0$$
$$\Rightarrow -4x'y'-24x'-8y'+8=0$$
$$\Rightarrow x'y'+6x'+2y'-2=0.$$

وبالتعويض عن $x'=x-2\ ,\ y'=y-6$ نحصل على:

$$(x-2)(y-6)+6(x-2)+2(y-6)-2=0.$$
$$\Rightarrow xy-14=0$$
$$\Rightarrow xy=14.$$

وهو المطلوب.

## ▪ تمارين:

١ – إذا نُقلت نقطة الأصل إلى النقطة $(1,-2)$ فأوجد الإحداثيات الجديدة لكل من النقاط الآتية:

$P_1(2,1)\ ,\ P_2(5,-2)\ ,\ P_3(0,1)$.

٢– أوجد النقطة التي يجب أن تنقل إليها نقطة الأصل:

(أ) حتى تتحول النقطة $(-5,2)$ إلى النقطة $(5,-2)$ .

(ب) حتى تتحول المعادلة $(y-1)^2=4(x+2)$ إلى أخرى خالية من $y$ والحد المطلق.

٣– إذا دارت المحاور زاوية قدرها $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ فأوجد الصورة التي تؤول إليها المعادلة:

$2x^2-3xy+y^2=0$.

٤– أوجد إحداثيات النقطة التي يجب أن تنقل إليها المحاور لكي:

(أ) تتحول المعادلة $x^2+4xy+y^2+2x+6y-8=0$ إلى أخرى خالية من حدود الدرجة الأولى.

(ب) تتحول المعادلة $x^2+y^2+2x+6y+10=0$ إلى أخرى خالية من $x$ والحد المطلق.

٦ – أوجد الصورة الجديدة لمعادلة المنحنى $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=5$ عندما تدور محاور الاحداثيات زاوية مقدارها $\frac{\pi}{6}$ .

٧ – أوجد الصورة الجديدة لمعادلة المنحنى $(a-b)(x^2+y^2)-2abx=0$

عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(0,\dfrac{ab}{a-b})$ .

٨– أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها محاور الإحداثيات لكي تتحول المعادلة:

$$ax+by+c=0$$

إلى أخرى خالية من $y$ .

٩– بنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(a,b)$ ودوران المحاور زاوية $\theta$ ضع المعادلة التالية:

$$x^2+xy+y^2-2x-y-4=0$$

في أبسط صورة ممكنة ، واوجد الإحداثيات الجديدة لنقطة الأصل.

---

# الباب الثالث

## معادلة الدرجة الثانية في المستوى

**١– شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في المتغيرين x,y خطين مستقيمين:**

الصورة القياسية للمعادلة العامة من الدرجة الثانية في x,y هي:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

**هذه المعادلة يمكن كتابتها في الصورة:**

$$ax^2 + 2x(hy + g) + by^2 + 2fy + c = 0 \qquad (2)$$

بإعتبار المعادلة (2) من الدرجة الثانية فى x ثم حلها تحصل على:

$$x = \frac{-2(hy+g) \pm \sqrt{4(hy+g)^2 - 4a(by^2+2fy+c)}}{2a}.$$

$$\therefore x = \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(h^2-ab)y^2 + 2(hg-af)y + g^2 - ac}}{a} \qquad (3)$$

ولكي تمثل المعادلة (1) خطين مستقيمين فإن الكمية تحت علامة الجذر فى (3) يجب أن تكون مربعاً كاملاً، والشرط الضروري لذلك هو:

$$(hg - af)^2 = (h^2 - ab)(g^2 - ac).$$

**وهذا يؤول إلى:**

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

**هذه النتيجة يمكن وضعها فى صورة المحدد:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

ويُسمى هذا المحدد مميز المعادلة العامة من الدرجة الثانية التي تمثل خطين مستقيمين.

**والزاوية $\theta$ بين الخطين المستقيمين تُعطى من العلاقة:**

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right).$$

ومن العلاقة السابقة يمكننا أن نستنتج أن المستقيمين يكونا:

١ – حقيقين ومختلفين إذا كان: $h^2 > ab$

٢ – تخيليين إذا كان: $h^2 < ab$

٣ – متوازيين (أو منطبقين) إذا كان: $h^2 = ab$

٤ – متعامدين إذا كان: $a + b = 0$

**مثال(١)**: تحقق من أن المعادلة الآتية:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 5x - y - 2 = 0.$$

تمثل خطين مستقيمين ثم أوجدهما واحسب الزاوية بينهما ، واوجد نقطة تقاطعهما.

الحل:

لكي تمثل المعادلة السابقة معادلة خطين مستقيمين يجب أن يكون المميز مساويا للصفر

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-2-\frac{1}{4}) + (-\frac{1}{2})(-1-\frac{5}{4}) + (-\frac{5}{2})(-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}).$$

$$= \frac{36}{8} + \frac{9}{8} - \frac{45}{8} = 0.$$

وإذاً المعادلة تمثل خطين مستقيمين .

ولإيجاد الخطين المستقيمين نحلل الطرف الأيسر في المعادلة المعطاه كما يلي:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 5x - y - 2 = (y + 2x + \alpha)\,(y - x + \beta).$$

وبمقارنة معاملات $x,y$ والحد المطلق نجد أن:

$$-5 = -\alpha + 2\beta \qquad \text{(i)}$$
$$-1 = \alpha + \beta \qquad \text{(ii)}$$
$$-2 = \alpha\beta \qquad \text{(iii)}$$

وبحل المعادلتين (i),(ii) نحصل على $\alpha = 1, \beta = -2$ ، وباستخدام (iii) للتحقق من صحة قيمتي $\alpha,\beta$ فيكون الخطان المستقيمان هما:

$$y + 2x + 1 = 0 \qquad (*)$$
$$y - x - 2 = 0 \qquad (**)$$

**والزاوية بين الخطين المستقيمين تُعطى من العلاقة:**

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}+2}}{-2+1}\right) = \tan^{-1}(-3).$$

وبحل المعادلتين (**),(*) نحصل على نقطة تقاطع المستقيمين وهي النقطة (1 ,1 -) .

**(ملاحظة)**: يمكن إيجاد الخطين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة المعطاه وذلك بحلها كمعادلة من الدرجة الثانية في $x$ (ويكون دائما ما تحت الجذر مربعا كاملا).

**مثال(٢)**: أوجد قيمة C التى تجعل المعادلة $12x^2 + 19xy + 4y^2 - 5x - 11y + C = 0$ تمثل خطين مستقيمين.

الحل: تكون المعادلة السابقة ممثلة خطين مستقيمين عندما تكون قيمة المميز:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

مساوية للصفر ، وبالتعويض نجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & \frac{19}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{19}{2} & 4 & \frac{-11}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-11}{2} & C \end{vmatrix} = 0$$

وبفك هذا المحدد ومساواته بالصفر يكون C = - 3 .

**حل آخر لمثال(٢)**: بتحليل الطرف الأيسر في المعادلة المعطاه كما يلي:

$$12x^2 + 19xy + 4y^2 - 5x - 11y + C = (4x + y + \alpha)(3x + 4y + \beta).$$

وبمقارنة معاملات x,y والحد المطلق نحصل على:

$$-5 = 3\alpha + 4\beta \quad (1)$$
$$-11 = 4\alpha + \beta \quad (2)$$
$$C = \alpha\beta \quad (3)$$

وبحل المعادلتين (2),(1) معاً نحصل على: $\alpha = -3,\ \beta = 1$

وبالتعويض في المعادلة (3) يكون: $C = \alpha\beta = (-3)(1) = -3$

## ٢- معادلة أي خط مستقيم يمر بنقطة تقاطع خطين مستقيمين معلومين:

**نفرض أن**

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

هما معادلتا المستقيمين المعلومين.

وباعتبار المعادلة:

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) + k(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 ) = 0 \qquad (3)$$

حيث k مقدار ثابت.

واضح أن المعادلة (3) معادلة من الدرجة الأولى في x,y ولذلك هي تمثل معادلة خط مستقيم في المستوى.

وإذا كانت $(x_1, y_1)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين (2),(1) فهي تحقق كلا منهما ، ومن ثم فهي تحقق المعادلة (3) ، وعلى ذلك تمثل المعادلة (3) خط مسقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين (1),(2) .

وبإعطاء k قيما مختلفة نحصل على مجموعة (حزمة) من المستقيمات تمر جميعها بنقطة تقاطع المستقيمين (2),(1) ، والتي تُسمى برأس الحزمة.

**مثال(١)**: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين:

$$3x + 4y + 5 = 0,$$
$$2x - 3y + 4 = 0.$$

ويمر بنقطة الأصل.

<u>الحل</u>:معادلة أي خط مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين تكون على الصورة:

$$(3x + 4y + 5) + k(2x - 3y + 4) = 0 \qquad (*)$$

وحيث إن المستقيم (*) يمر بنقطة الأصل (0,0) فهي تحقق معادلته فيكون:

$$5+4k = 0 \Rightarrow k = -5/4$$

وبالتعويض عن k في المعادلة (*) نحصل على:

$$(3x + 4y + 5) + (-5/4)(2x - 3y + 4) = 0$$
$$\therefore 2x + 31y = 0.$$

وهذه هي معادلة المستقيم المطلوبة.

**مثال(٢)**: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين:

$2x - 4y + 1 = 0,$
$3x + 5y - 6 = 0.$

ويوازي المستقيم $x + y + 2 = 0$ .

الحل:معادلة أي خط مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين تكون على الصورة:

$$(2x - 4y + 1) + k(3x + 5y - 6) = 0 \qquad (*)$$

وحيث إن المستقيم (*) يوازي المستقيم $x + y + 2 = 0$ ( الذي ميله 1- ) فيكونا متساويي الميل وإذاً:

$$-(2+3k)/(-4+5k) = -1 \Rightarrow k = 3$$

وبالتعويض عن k في المعادلة (*) نحصل على:

$$(2x - 4y + 1) + 3(3x + 5y - 6) = 0$$
$$\therefore 11x + 11y - 17 = 0.$$

وهذه هي معادلة المستقيم المطلوبة.

مثال(**٣**): **أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين:**

$y + 2x + 1 = 0 ,$

$$\mathbf{y - x - 2 = 0.}$$

**ويكون عمودي على المستقيم $2x - y = 0$** .

الحل: معادلة أي خط مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين تكون:

$$\mathbf{(y + 2x + 1) + k(y - x - 2) = 0}$$

وحيث إن هذا المستقيم عمودي على المستقيم $2x - y = 0$ (الذي ميله يساوى 2) فيكون حاصل ضرب ميلهما يساوي (1-) ومن ثم يكون:

$$[-(2-k)/(1+k)][2] = -1 \Rightarrow k = 1$$

وإذاً معادلة المستقيم المطلوبة تكون $(y+2x+1)+(y-x-2)=0$

أي تكون $x+2y-1=0$ .

طريقة أخرى: بحل المعادلتين معاً فتكون نقطة تقاطعهما هي $(-1,1)$

وميل المستقيم $2x-y=0$ هو 2 ومن ثم ميل العمودي عليه يكون $-\frac{1}{2}$

ومعادلة المستقيم المطلوبه بمعلوميه ميله ونقطة التقاطع عليه تكون:

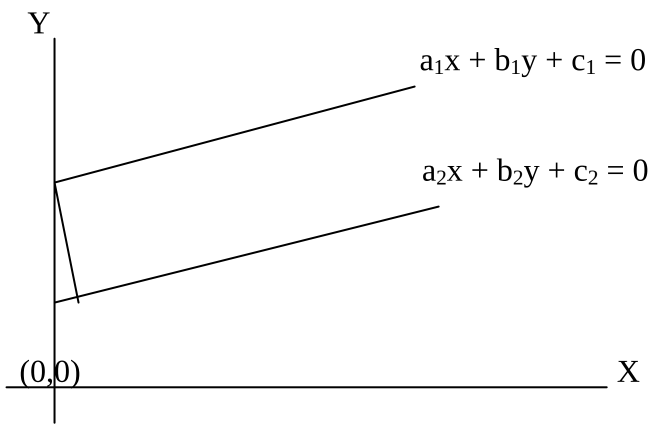
$$\frac{y-1}{x-(-1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-y}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x+2y-1=0.$$

## ٣– أقصر بُعد بين مستقيمين غير متقاطعين في المستوى:

لإيجاد أقصر بُعد بين المستقيمين غير المتقاطعين:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ , $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .

نوجد نقطة تقاطع أحدهما مع أحد محاور الإحداثيات (وليكن محور الصادات OY وذلك بوضع $x = 0$ ) ثم نوجد قيمة y فنحصل على نقطة التقاطع (0,y) ثم نوجد طول العمود الساقط من هذه النقطة على المستقيم الثاني ، وبذلك يكون طول هذا العمود هو أقصر بُعد بين المستقيمين المعطيين في المستوى.




مثال: **أوجد طول أقصر بُعد بين المستقيمين:**

$3x - 4y - 2 = 0$ ,
$8y – 6x – 9 = 0$.

الحل: نوجد نقطة تقاطع المستقيم $3x - 4y - 2 = 0$ مع محور الصادات فنضع $x = 0$ فتكون $y = -1/2$ وعلى ذلك تكون نقطة التقاطع هي (0,-1/2) .

وطول أقصر بُعد $h$ بين المستقيمين المعطيين يساوي طول العمود الساقط من هذه النقطة على المستقيم $8y – 6x – 9 = 0$ وهو:

$$h = \left|\frac{8(-\frac{1}{2}) - 6(0) - 9}{\sqrt{8^2 + 6^2}}\right| = \left|\frac{-13}{10}\right| = 1.3$$

## ٤–الزاوية المحصورة بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة المتجانسة:

$$ax^2+2hxy+by^2=0.$$

نفرض أن المستقيمين اللذين تمثلهما هذه المعادلة هما:

$$y=m_1x\ ,\ y=m_2x.$$

حيث $m_1,m_2$ ميلهما فتكون المعادلة المشتركة لهما على الصورة:

$$(y-m_1x)(y-m_2x)=ax^2+2hxy+by^2.$$

$$\therefore\ y^2-(m_1+m_2)xy+(m_1m_2)x^2=(\frac{a}{b})x^2+(\frac{2h}{b})xy+y^2.$$

وبمساواة معاملات $x^2,xy$ في الطرفين نحصل على:

$$m_1m_2=\frac{a}{b}\ ,\ -(m_1+m_2)=\frac{2h}{b}.$$

وإذا كانت $\theta$ هي الزاوية بين المستقيمين فيكون:

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{(-\frac{2h}{b})^2-4(\frac{a}{b})}}{1+\frac{a}{b}}=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}.$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}).$$

وإذا كانت $\theta=\frac{\pi}{2}$ أي $\tan\theta=\infty$ وهذا يكون عندما $a+b=0$ هذا هو شرط تعامد الخطيين المستقيمين.

وإذا كانت $\theta=0$ أي $\tan\theta=0$ وهذا يكون عندما $h^2-ab=0$ أي $h^2=ab$ وهذا هو شرط توازي (تطابق ) المستقيمين.

أمثلة متنوعة:

١ – تحقق من أن المعادلة:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0.$$

تمثل خطين مستقيمين متوازيين ، وأوجد طول أقصر بُعد بينهما.

الحل:

شرط تمثيل معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ خطين مستقيمين متوازيين هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0 \ , \ h^2 = ab..$$

وبالتعويض من المعادلة المعطاه يكون:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 1(-45-36) - 3(-15-12) + 2(18-18) = -81 + 81 = 0,$$

$$h^2 = (3)^2 = 9 \ , \ ab = (1)(9) = 9.$$

$$\therefore h^2 = ab.$$

وإذاً المعادلة المعطاه تمثل خطين مستقيمين متوازيين.

وبحل المعادلة المعطاه كمعادلة من الدرجة الثانية في $x$ كما يلي:

$$x = \frac{-(6y+4) \pm \sqrt{(6y+4)^2 - 4(1)(9y^2 + 12y - 5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-(6y+4) \pm \sqrt{36y^2 + 48y + 16 - 36y^2 - 48y + 20}}{2}$$

$$= \frac{-(6y+4) \pm \sqrt{36}}{2}.$$

$$\therefore x = -3y - 2 \pm 3.$$

وإذاً الخطان المستقيمان يكونا:

$$x + 3y - 1 = 0 \ , \ x + 3y + 5 = 0.$$

ونقطة تقاطع المستقيم الأول $x+3y-1=0$ مع محور الصادات هي $(0,\frac{1}{3})$.

وطول أقصر بُعد $h$ بين المستقيمين يساوي طول العمود الساقط من هذه النقطة على المستقيم الثاني $x+3y+5=0$ وهو:

$$h=\left|\frac{1(0)+3(\frac{1}{3})+5}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

**٢ –** أثبت أن المعادلة $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 14x + 12y - 5 = 0$ تمثل خطين مستقيمين واوجد المعادلة المشتركة لمنصفي الزاويتين بينهما.

<u>الحل</u>: شرط تمثيل معادلة الدرجة الثانية $ax^2 +2hxy +by^2 +2gx +2fy +c = 0$ خطين مستقيمين هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0.$$

وبالتعويض من المعادلة المعطاه يكون:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 6 \\ 7 & 6 & -5 \end{vmatrix}=3(20-36)-(-2)(10-42)+7(-12+28)=0.$$

وإذاً المعادلة المعطاه تمثل خطين مستقيمين.

ولإيجادهما نحلل الطرف الأيسر من المعادلة المعطاه كما يلي:

$3x^2 - 4xy - 4y^2 + 14x + 12y - 5 = (3x + 2y + \alpha)(x - 2y + \beta).$

وبمقارنة معاملات x,y والحد المطلق في الطرفين نحصل على:

$\alpha + 3\beta = 14.$ (1)

$-2\alpha + 2\beta = 12. \Rightarrow -\alpha + \beta = 6.$ (2)

$\alpha\beta = -5.$ (3)

من (2) ,(1) نحصل على $\alpha = -1, \beta = 5$ . وهذا يحقق المعادلة (3) وإذاً المستقيمين هما:

$3x + 2y - 1 = 0.$ (4)

$x - 2y + 5 = 0.$ (5)

وبحل المعادلتين (5),(4) نحصل على نقطة تقاطعهما (2 ,1-).

وبنقل المحاور إلى هذه النقطة ( أي بوضع $x = x`-1, y = y`+2$ ) فإن الصورة الجديدة للمعادلة المعطاه تكون:

$$3x`^2 - 4x`y` - 4y`^2 = 0. \qquad (6)$$

والمعادلة المشتركة للمستقيمين المنصفين للزاويتين بين المستقيمين (6) تُعطى بالعلاقة:

$$h(x`^2 - y`^2) = (a - b)( x`y`).$$

وبالتعويض عن $a = 3, b = -4 , h = -2$ تكون معادلة المنصفين للمستقيمين (6) هي:

$$2x`^2 + 7x`y` - 2y`^2 = 0.$$

وبالعودة إلى المحاور الأصلية ( أي بوضع $x` = x+1, y` = y-2$ ) فإن المعادلة المشتركة للمستقيمين المنصفين للزاويتين بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة المعطاه تكون:

$$2(x + 1)^2 + 7(x + 1)(y - 2) - 2(y - 2)^2 = 0.$$
$$\therefore 2x^2 + 7xy - 2y^2 - 10x + 15y - 20 = 0.$$

**٣ –** أثبت أن المستقيمين:

$$a^2x^2 + 2h(a+b)xy + b^2y^2 = 0. \ (1)$$

**يكونا متساويي الميل على المستقيمين:**

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0. \qquad (2)$$

الحل: إذا أثبتنا أن المعادلة المشتركة لمنصفي الزاويتين بين المستقيمين (1) تكون هي نفسها المعادلة المشتركة لمنصفي الزاويتين بين المستقيمين (2) يكون المستقيمان (1) متساويي الميل على المستقيمين (2) .

المعادلة المشتركة لمنصفي الزاويتين بين المستقيمين الممثلين بالمعادلة (1) تكون:

$$\frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2} = \frac{xy}{h(a+b)}.$$

$$\text{i.e. } \frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}. \quad (3)$$

والمعادلة المشتركة لمنصفين الزاويتين بين المستقيمين الممثلين بالمعادلة (2) تكون:

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}.$$

أي أن المعادلة المشتركة لمنصفين الزاويتين بين المستقيمين (1) تكون هي نفسها بالنسبة للمستقيمين (2) ومن ذلك ينتج المطلوب.

## تماريـن:

١ – تحقق من أن كلا من المعادلات الآتية تمثل خطين مستقيمين:

(i) $x^2 - 4y^2 - 6x + 16y - 7 = 0.$
(ii) $6x^2 + 5xy - 6y^2 - 3x + 28y - 30 = 0.$
(iii) $15x^2 + 19xy - 10y^2 + 7x + 22y - 4 = 0.$

واوجد نقطة تقاطعهما ، والزاوية بينهما.

٢– أوجد قيمة $k$ التي تجعل كلاً من المعادلات الآتية تمثل خطين مستقيمين:

(i) $12x^2 - 13xy - 14y^2 + 38x - 81y + k = 0.$
(ii) $x^2 - xy + ky^2 - 3x - 3y = 0.$
(iii) $x^2 + kxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$

٣– أوجد قيمة $c$ التى تجعل المعادلة $6x^2 - 42xy + 60y^2 - 11x + 10y + c = 0$

تمثل خطين مستقيمين . وتحقق من أن الزاوية بينهما تساوي $\tan^{-1}\left(\frac{3}{11}\right)$

٤– أوجد قيمة كلا من $a,c$ حتى تمثل المعادلة $ax^2 + 3xy - 2y^2 - x + 3y + c = 0$

خطيين مستقيمين متعامدين.

٥– أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين:

$4x - y + 1 = 0 , \ 2x + 5y - 6 = 0.$

ويكون عمودي على المستقيم $4x + 3y = 7$

٦– أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين الممثلين بالمعادلة

$10x^2 + 19xy + 6y^2 + 16x + 2y - 8 = 0$

ويكون عمودي على المستقيم $x - y = 0$

**٧– أوجد طول أقصر بُعد بين المستقيمين:**

$2x + y - 3 = 0 , \ 4x + 2y + 1 = 0.$

٨ – أثبت أن المعادلة $18x^2 - 48xy + 32y^2 + 9x - 12y - 54 = 0$

تمثل خطين مستقيمين متوازيين ، واوجد طول أقصر بُعد بينهما.

## القطوع المخروطية Conic Sections

✓ القطوع المخروطية تستمد اسمها من حيث إنها تنشأ من تقاطع مستوى ما مع مخروط دائري قائم بحيث لا يمر المستوى برأس المخروط.

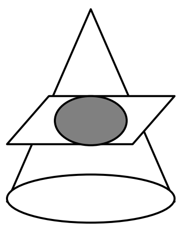
ومنحنى التقاطع هذا يكون له أربعة حالات كما يلي:

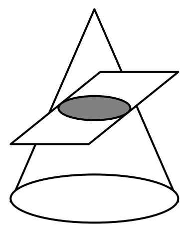
١ – إذا كان المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط فإن المقطع الحادث يكون دائرة.

٢ – إذا كان المستوى القاطع مائلا على محور المخروط ولا يوازي أي راسم من رواسم المخروط فإن المقطع الحادث يكون قطعاً ناقصاً.

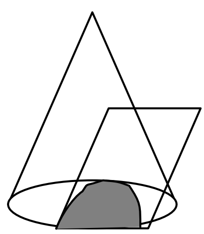
٣ – إذا كان المستوى القاطع مائلا على محور المخروط ويوازي أحد رواسم المخروط فإن المقطع الحادث يكون قطعاً مكافئاً.

٤ – إذا كان المستوى القاطع يوازي راسمين من رواسم المخروط (أي يوازي محور المخروط) فإن المقطع الحادث يكون قطعاً زائداً.

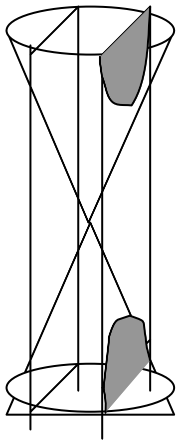




قطع ناقص          دائرة



قطع مكافئ



**قطع زائد**

- **التعريف الرياضي للقطع المخروطي**:

القطع المخروطي هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث أن النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة فى المستوي وبعدها عن مستقيم ثابت فى المستوى تكون دائما مقدار ثابت. وتُسمى النقطة الثابتة **بؤرة القطع** Focus ، ويُسمى المستقيم الثابت **دليل القطع** Directory ، وتُسمى النسبة الثابتة **الاختلاف المركزي** Eccentricity ويُرمز له بالرمز **e** ويُسمى الخط المستقيم المار بالبؤرة والعمودي على الدليل **محور القطع** ، ويُسمى المستقيم المار بالبؤرة والعمودي على محور القطع **الوتر البؤري العمودي** .

- إذا كانت $e \to \infty$ فإن المحل الهندسي يمثل خطين مستقيمين.
- إذا كانت $e = 0$ فإن المحل الهندسي يمثل دائرة.
- إذا كانت $e = 1$ فإن المحل الهندسي يمثل قطع مكافئ.
- إذا كانت $e < 1$ فإن المحل الهندسي يمثل قطع ناقص.
- إذا كانت $e > 1$ فإن المحل الهندسي يمثل قطع زائد.

ونلاحظ أن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص ، وأن الخطين المستقيمين حالة خاصة من القطع الزائد.

## أولاً: القطع المكافئ The Parabola

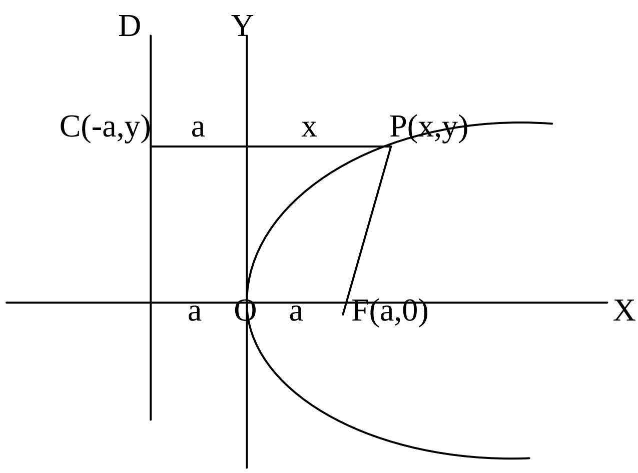
✓ **تعريف**: القطع المكافئ هو فئة جميع النقط في المستوى والتي تكون على بعدين متساويين من نقطة ثابتة $F$ (البؤرة) ومستقيم ثابت $D$ (الدليل).

والمستقيم الذي يمر بالبؤرة ويكون عمودي على الدليل هو محور القطع المكافئ ، ونقطة تقاطع القطع المكافئ مع محوره هي رأس القطع المكافئ والتي تكون في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل ، والقطع المكافئ يكون متماثل حول محوره.

✓ وللقطع المكافئ خصائص هندسية كثيرة وله تطبيقات عملية كثيرة منها التقوسات المكافئة والتي تُستخدم كدعامات رئيسية للكباري المعلقة ، ومسارات القذائف من الناحية الهندسية تمثل قطوع مكافئة حقيقية إذا لم توجد مقاومة هواء.

✓ *ونستنتج المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره هو المحور* السيني $OX$ كما يلي:

نفرض أن المسافة بين رأس القطع والدليل $D$ هي $a$ ونفرض أن إحداثيات البؤرة هي $(a,0)$ كما بالشكل:



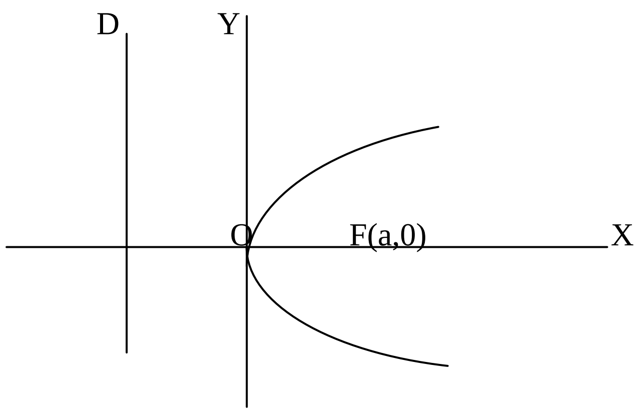
وطبقاً للتعريف يكون:

$$\overline{PF} = \overline{PC} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a.$$
$$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2.$$
$$\therefore x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$
$$\therefore y^2 = 4ax.$$

وإذاً المعادلة $y^2 = 4ax$ هي المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل $(0,0)$ ، وبؤرته النقطة $F(a,0)$ ، ودليله المستقيم $x = -a$ ، وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$ .

✔ وللقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل أربعة مواضع كما يلي:

١- القطع المكافئ في الوضع الأفقي وفتحته ناحية اليمين كما بالشكل:

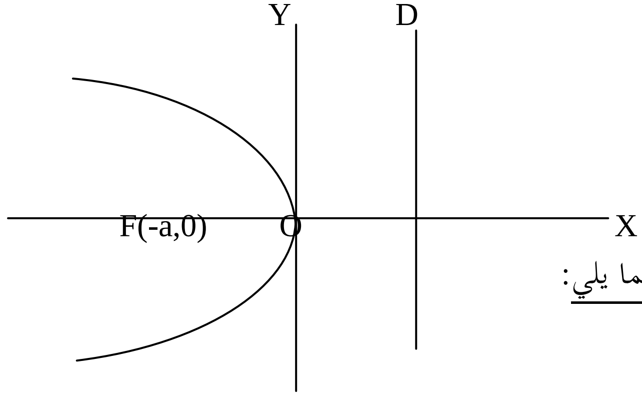



فتكون صفات القطع كما يلي:

محور القطع هو المحور السيني $OX$ ، ومعادلة القطع على الصورة $y^2 = 4ax$

وبؤرته $(a,0)$ ودليله $x = -a$ ، وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$ .

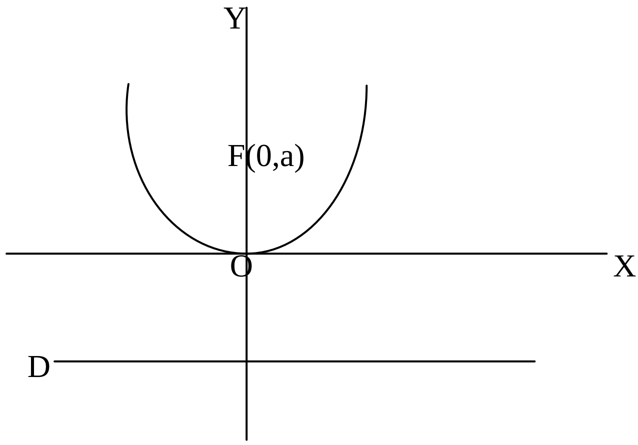
٢- القطع المكافئ في الوضع الأفقي وفتحته ناحية اليسار كما بالشكل:




فتكون صفات القطع كما يلي:

محور القطع هو المحور السيني $OX$ ، ومعادلة القطع على الصورة $y^2 = 4a(-x)$
أي تكون $y^2 = -4ax$ وبؤرته $(-a,0)$ ودليله $x = a$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$ .

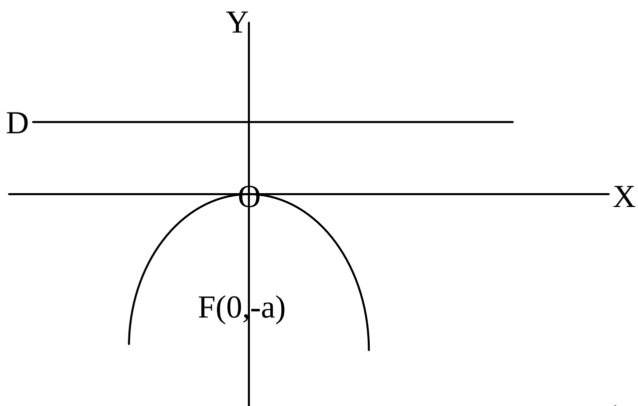
**٣**- القطع المكافئ في الوضع الرأسي وفتحته لأعلى كما بالشكل:




فتكون صفات القطع كما يلي:

محور القطع هو المحور الصادي $OY$ ، ومعادلة القطع على الصورة $x^2 = 4ay$
وبؤرته $(0,a)$ ودليله $y = -a$ ، وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$ .

**٤**- القطع المكافئ في الوضع الرأسي وفتحته لأسفل كما بالشكل:




فتكون صفات القطع كما يلي:

محور القطع هو المحور الصادي $OY$ ، ومعادلة القطع على الصورة $x^2 = 4a(-y)$

أي تكون $x^2=-4ay$ وبؤرته $(0,-a)$ ودليله $y=a$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$.

✓ **أمثلة:** اذكر صفات كلا من القطوع المكافئة الآتية:

(1) $y^2=8x$

(2) $x^2=2y$

(3) $y^2=-4x$

(4) $x^2=-12y$

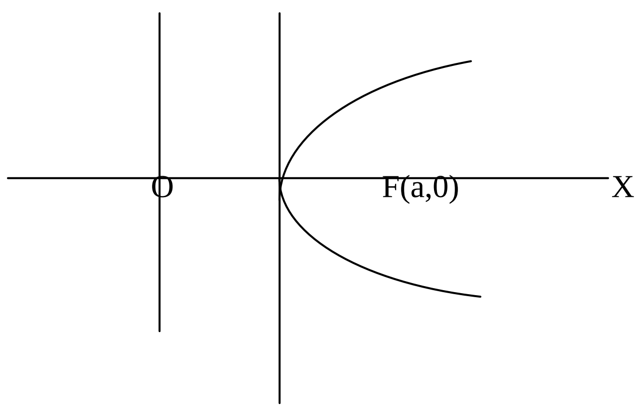
الحل:

(١) معادلة القطع المكافئ المعطاه على الصورة القياسية $y^2=4ax$

وبالمقارنة يكون $4a=8$ وإذاً $a=2$ .

وعلى ذلك تكون صفات القطع كالتالي:

محور القطع هو المحور السيني $OX$ وفتحته ناحية اليمين كما بالشكل:




وإحداثيات البؤرة $(a,0)=(2,0)$ .

ومعادلة الدليل تكون $x=-2$ .

وطول وتره البؤري العمودي يساوي 8

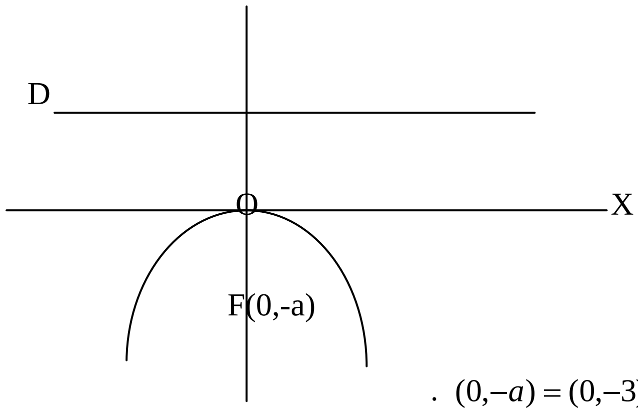
(٤) معادلة القطع المكافئ المعطاه على الصورة القياسية $x^2=-4ay$

وبالمقارنة يكون $4a=12$ وإذاً $a=3$ .

وعلى ذلك تكون صفات القطع كالتالي:

محور القطع هو المحور الصادي $OY$ وفتحته لأسفل كما بالشكل:

Y



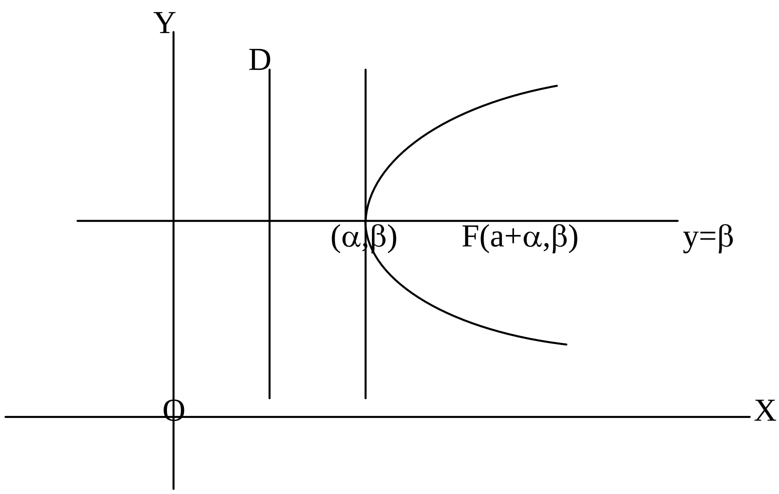

وإحداثيات البؤرة $(0,-a)=(0,-3)$ .

ومعادلة الدليل تكون $y=3$ .

وطول وتره البؤري العمودي يساوي 12

✓ **المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد محوري الإحداثيات:**

**أولاً**: إذا كان محور القطع يوازي محور السينات $OX$ وكانت رأسه النقطة $(\alpha,\beta)$ كما بالشكل:




فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع تكون:

$$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha).$$

وبؤرته النقطة $(a+\alpha,\beta)$

ودليله المستقيم $x=-a+\alpha$

ومعادلة محوره تكون $y=\beta$

✓ وعندما تكون معادلة القطع على الصورة $(y-\beta)^2=-4a(x-\alpha)$

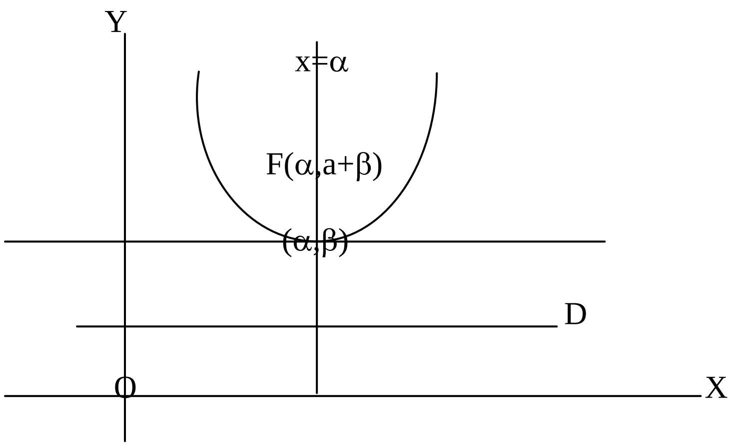
فإن فتحة القطع تكون ناحية اليسار.

وبؤرته النقطة $(-a+\alpha,\beta)$

ودليله المستقيم $x=a+\alpha$

ومعادلة محوره تكون $y=\beta$

**ثانياً**: إذا كان محور القطع يوازي محور الصادات $OY$ وكانت رأسه النقطة $(\alpha,\beta)$ كما بالشكل:




فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع تكون:

$$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta).$$

وبؤرته النقطة $(\alpha,a+\beta)$

ودليله المستقيم $y=-a+\beta$

ومعادلة محوره تكون $x=\alpha$

✓ وعندما تكون معادلة القطع على الصورة $(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$

فإن فتحة القطع تكون لأسفل.

وبؤرته النقطة $(\alpha,-a+\beta)$

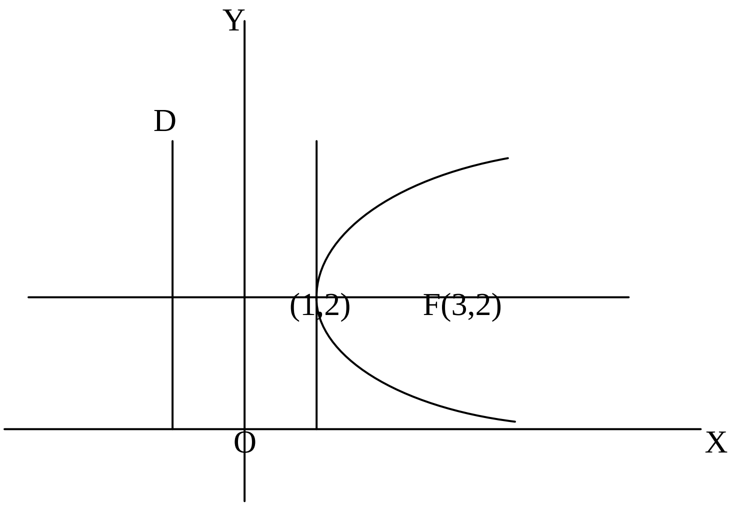
ودليله المستقيم $y=a+\beta$

ومعادلة محوره تكون $x=\alpha$

**أمثلة:**

١- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة $(1,2)$ وبؤرته النقطة $(3,2)$ ثم أوجد معادلة دليله.

الحل: القطع يكون كما بالرسم:




وإذاً معادلة القطع تكون على الصورة القياسية $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

وبالتعويض من المعطيات عن $(a+\alpha,\beta) = (3,2)$ , $(\alpha,\beta) = (1,2)$ ينتج أن $a = 2$

ومن ثم معادلة القطع المطلوبه تكون $(y-2)^2 = 8(x-1)$

ومعادلة دليله تكون $x = -a+\alpha = -1$

٢- اذكر صفات القطع المكافئ الممثَّل بالمعادلة $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$

الحل: نضع معادلة القطع المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$y^2 - 4y = 8x - 12 \Rightarrow (y-2)^2 - 4 = 8x - 12$$
$$\Rightarrow (y-2)^2 = 8(x-1).$$
$$\therefore (y-2)^2 = 4(2)(x-1).$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الأفقي:

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)\,.$$
$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2, a = 2.$$

وإذاً محور القطع يوازي محور $OX$ وفتحته تكون ناحية اليمين

ورأس القطع تكون $(\alpha,\beta)=(1,2)$

وبؤرة القطع تكون $(a+\alpha,\beta)=(3,2)$

ومعادلة دليله تكون $x=-a+\alpha=-1$

ومعادلة محوره تكون $y=\beta=2$

**٣**- اذكر صفات القطع المكافئ الممثَل بالمعادلة $x^2-8x+2y+7=0$ .

<u>الحل</u>: نضع معادلة القطع المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$x^2-8x=-2y-7\Rightarrow (x-4)^2-16=-2y-7$$
$$\Rightarrow (x-4)^2=-2y+9$$
$$\Rightarrow (x-4)^2=-2(y-\frac{9}{2}).$$
$$\therefore (x-4)^2=-4(\frac{1}{2})(y-\frac{9}{2}).$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الرأسي:

$$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)\,.$$
$$\therefore \alpha=4,\beta=\frac{9}{2},a=\frac{1}{2}.$$

وإذاً محور القطع يوازي محور $OY$ وفتحته تكون لأسفل

ورأس القطع تكون $(\alpha,\beta)=(4,\frac{9}{2})$

وبؤرة القطع تكون $(\alpha,-a+\beta)=(4,4)$

ومعادلة دليله تكون $y=a+\beta=5$

ومعادلة محوره تكون $x=\alpha=4$

==========================================

✔ **<u>تمرين</u>**: اذكر صفات القطوع المكافئة الممثَلة بالمعادلات:

(1) $y^2+6y+2x+5=0$ (2) $x^2-4x+8y+12=0$ .

### ✓ المعادلة العامة للقطع المكافئ:

بمعلومية بؤرته $(h,k)$ ودليله المستقيم $ax+by+c=0$ تكون:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}.$$

**أمثلة:**

(١) صِف القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة $(5,2)$ ودليله المستقيم $x-1=0$

(٢) صِف القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة $(4,4$ ودليله المستقيم $y-5=0$

(٣) صِف القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة $(1,2)$ ودليله المستقيم $x+2=0$

الحل:

(١) معادلة القطع المكافئ بمعلومية بؤرته $(h,k)$ ودليله المستقيم $ax+by+c=0$ تكون:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}.$$

$$\therefore (x-5)^2+(y-2)^2=\frac{(x-1)^2}{1^2+0^2}$$

$$\therefore (x^2-10x+25)+(y^2-4y+4)=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow y^2-4y=-8x-28$$

$$\Rightarrow (y-2)^2-4=-8x-28$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=-8x-24$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=-8(x-3).$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الأفقي:

$$(y-\beta)^2=-4a(x-\alpha).$$

وإذاً محور القطع يوازي محور $OX$ وفتحته تكون ناحية اليسار ، $a=2$

رأسه $(\alpha,\beta)\equiv(3,2)$ وبؤرته النقطة $(-a+\alpha,\beta)\equiv(1,2)$

ودليله المستقيم $x=a+\alpha=5$

ومعادلة محوره $y=\beta=2$

---

## ثانياً: القطع الناقص The Ellipse

✓ **تعريف**: القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى (تسميان بؤرتى القطع الناقص) يساوي مقدار ثابت $2a$ (وهو طول محورة الأكبر).

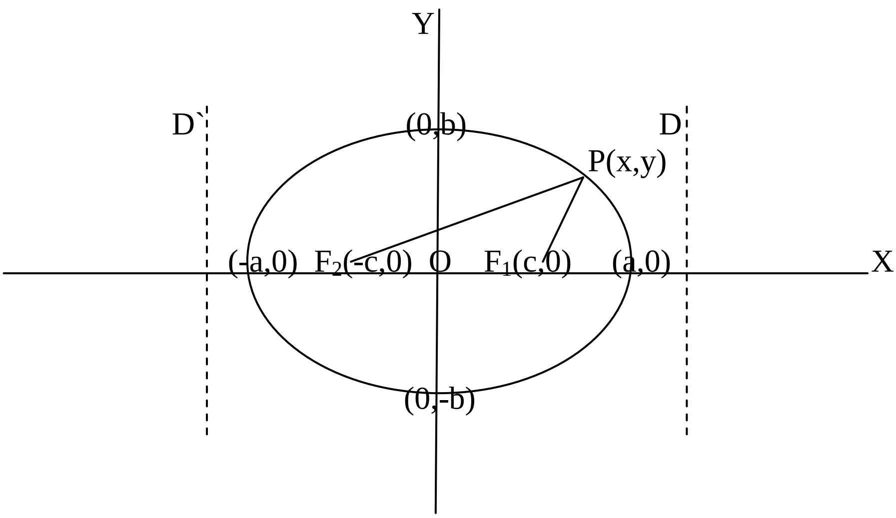
✓ والصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ،

ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات $OX$

ومحوره الأصغر منطبق على محور الصادات $OY$

تكون $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

✓ وهندسياً يكون القطع كما بالشكل التالي:




✓ وتكون صفات القطع كالتالي:

إحداثيات بؤرتيه $(c,0),(-c,0)$ حيث $c=\sqrt{a^2-b^2}$

وطول محوره الأكبر يساوي $2a$

وطول محوره الأصغر يساوي $2b$

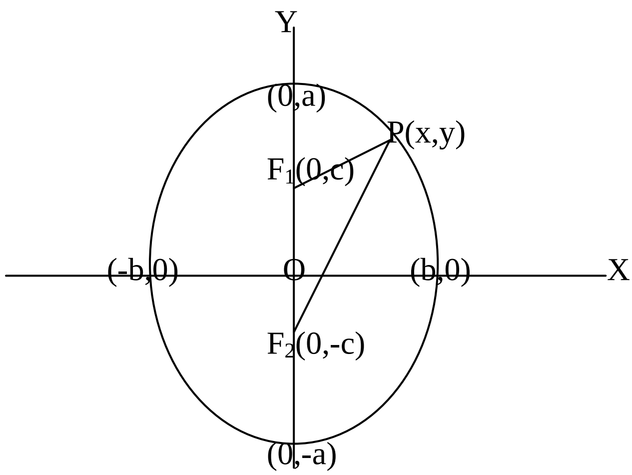
وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\dfrac{2b^2}{a}$

ومعادلتا دليليه $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$

والاختلاف المركزي له $1> e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ .

ومساحة القطع الناقص تساوي $\pi ab$ .

✓ وإذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص منطبق على محور الصادات $OY$ ومحوره الأصغر منطبق على محور السينات $OX$ كما بالشكل:




وإحداثيات بؤرتيه $(0,c),(0,-c)$ حيث $c=\sqrt{a^2-b^2}$

فإن معادلته تكون على الصورة $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

---

**أمثلة:** صِف كلا من القطوع الناقصة الآتية:

(1) $16x^2+25y^2=400$ (2) $9y^2+25x^2=225$

(3) $5x^2+9y^2=45$ (4) $4y^2+25x^2=100$

---

الحل:

(1) $16x^2+25y^2=400.$

نضع المعادلة المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$16x^2+25y^2=400\Rightarrow\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=1\Rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

وإذاً معادلة القطع المعطاه تكون على الصورة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ والتي تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات ، ومحوره الأصغر منطبق على محور الصادات ، وبالمقارنة يكون:

$$a^2=25, b^2=16 \Rightarrow a=5, b=4, c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

✓ وبالتالي تكون صفات القطع كما يلي:

بؤرتيه $(\pm c,0)\equiv(\pm 3,0)$ وطول محوريه $2a=10, 2b=8$

وطول وتره البؤري العمودي $\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{5}$ ومعادلة دليليه $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{3}$

---

(2) $9y^2+25x^2=225.$

نضع المعادلة المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$9y^2+25x^2=225 \Rightarrow \frac{9y^2}{225}+\frac{25x^2}{225}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$$

وإذاً معادلة القطع المعطاه تكون على الصورة القياسية $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

والتي تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر منطبق على محور الصادات ، ومحوره الأصغر منطبق على محور السينات ، وبالمقارنة يكون:

$$a^2=25, b^2=9 \Rightarrow a=5, b=3, c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

✓ وبالتالي تكون صفات القطع كما يلي:

بؤرتا القطع هما $(0,\pm c)\equiv(0,\pm 4)$ وطول محوريه $2a=10, 2b=6$

وطول وتره البؤري العمودي $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{5}$ ومعادلة دليليه $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{4}$

---

## ثالثاً: القطع الزائد The Hyperbola

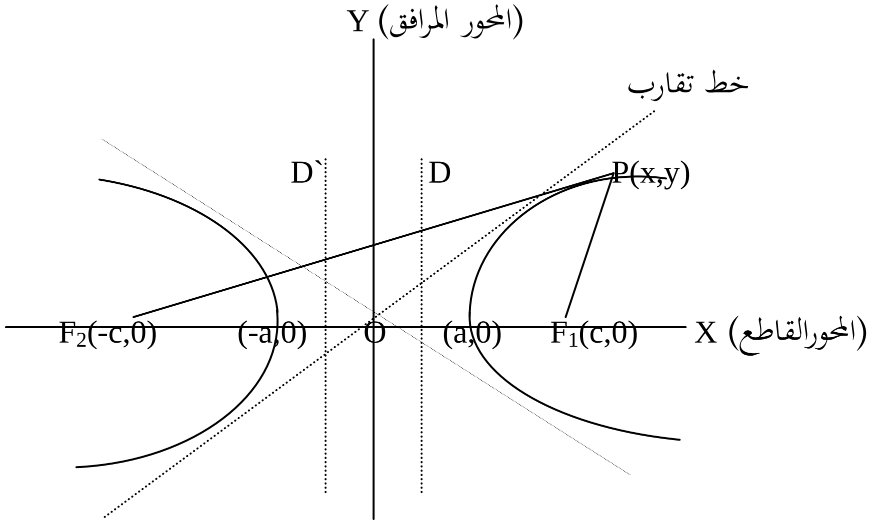
✓ **تعريف**: القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى (تسميان بؤرتي القطع الزائد) مقدار ثابت $2a$ (يساوي طول المحور القاطع للقطع الزائد).

✓ والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ،

والمحور القاطع له هو محور السينات $OX$ والمحور المرافق له هو محور الصادات $OY$

تكون $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

✓ وهندسياً يكون القطع الزائد كما بالشكل التالي:




✓ وتكون صفات القطع كالتالي:

إحداثيات بؤرتيه $(\pm c,0)$ حيث $c=\sqrt{a^2+b^2}$

ورأسيه $(\pm a,0)$ ومعادلتا دليليه $x=\pm\frac{a^2}{c}$

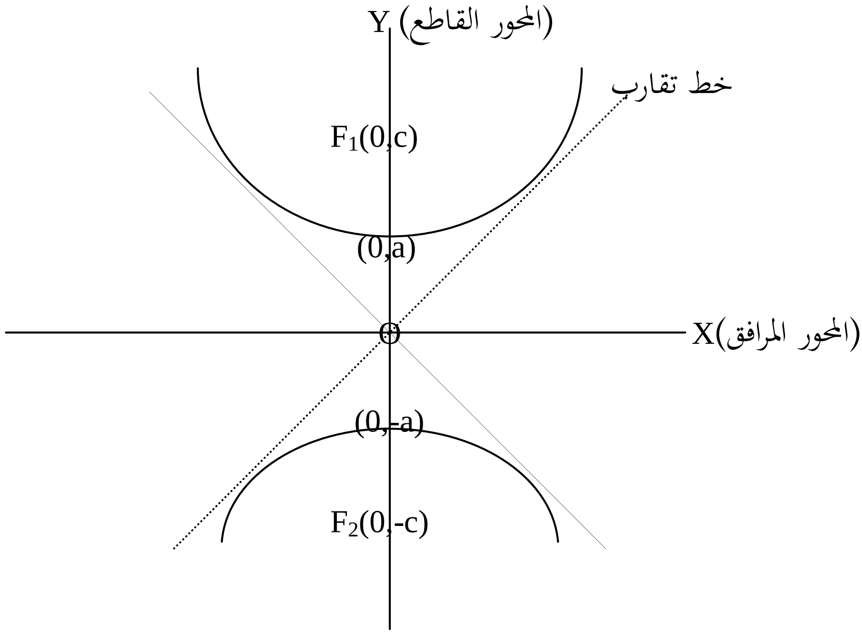
ومعادلتا خطيه التقاربيين (وهما الخطان اللذان يمسان القطع الزائد في اللانهاية)

تكون $y=\pm\frac{b}{a}x$ والاختلاف المركزي له $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$

✓ وإذا كان المحور القاطع للقطع الزائد هو محور الصادات $OY$ والمحور المرافق له

محور السينات $OX$ فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

وبؤرتيه $(0,c),(0,-c)$ ورأسيه $(0,a),(0,-a)$ ومعادلة خطيه التقاربيين $y=\pm\frac{a}{b}x$ كما بالشكل التالي:




ويُسمى هذا القطع بالقطع الزائد المرافق للقطع $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ويمكن كتابة معادلته على الصورة $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$

---

**أمثلة:** صِف كلا من القطوع الزائدة الآتية:

(1) $9x^2-16y^2=144$ (2) $4y^2-25x^2=100$

(3) $4x^2-9y^2=36$ (4) $y^2-4x^2=4$

---

الحل:

(1) $9x^2-16y^2=144$ .

نضع المعادلة المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$9x^2-16y^2=144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

وإذاً معادلة القطع المعطاه تكون على الصورة القياسية $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

والتي تمثل قطع زائد مركزه نقطة الأصل والمحور القاطع له هو محور السينات ، والمحور المرافق له هو محور الصادات ، وبالمقارنة يكون:

$$a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a=4, b=3, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

✓ وبالتالي تكون صفات القطع كما يلي:

بؤرتيه $(\pm c,0)\equiv(\pm 5,0)$ ورأسيه $(\pm a,0)\equiv(\pm 4,0)$

ومعادلتا دليليه $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{16}{5}$ ومعادلة خطيه التقاربيين $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x$

---

(2) $4y^2-25x^2=100.$

نضع المعادلة $4y^2-25x^2=100$ على الصورة القياسية كما يلي:

$$4y^2-25x^2=100 \Rightarrow \frac{4y^2}{100}-\frac{25x^2}{100}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$$

وإذاً معادلة القطع المعطاه تكون على الصورة القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

والتي تمثل قطع زائد مركزه نقطة الأصل والمحور القاطع له محور الصادات ، والمحور المرافق له محور السينات ، وبالمقارنة يكون:

$$a^2=25, b^2=4 \Rightarrow a=5, b=2, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

✓ وبالتالي تكون صفات القطع كما يلي:

بؤرتيه $(0,\pm c)\equiv(0,\pm\sqrt{29})$ ورأسيه $(0,\pm a)\equiv(0,\pm 5)$

ومعادلتا دليليه $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{\sqrt{29}}$ ومعادلة خطيه التقاربيين $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{5}{2}x$

---

✓ **معادلة الدرجة الثانية والقطوع المخروطية في المستوى:**

معادلة الدرجة الثانية في المستوى والتي على الصورة القياسية:

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$

ومميزها $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ .

(١) تمثل قطع مكافئ إذا كان: $\Delta \neq 0 \ , \ h^2 - ab = 0$ .

(٢) تمثل قطع ناقص إذا كان: $\Delta \neq 0 \ , \ h^2 - ab < 0$ .

(٣) تمثل قطع زائد إذا كان: $\Delta \neq 0 \ , \ h^2 - ab > 0$ .

---

**١ –** حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كلاً من المعادلات الآتية (ثم اذكر صفاته):

$(i)\ x^2 + 4y^2 - 2x + 4y = 0.$
$(ii)\ 3x^2 - 2y^2 - 12x + 8y + 9 = 0.$

الحل:

$(i)\ x^2 + 4y^2 - 2x + 4y = 0.$
$\equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$
$(\ a = 1,\ b = 4,\ c = 0,\ h = 0,\ g = -1,\ f = 2\ )$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(-4) - 1(4) = -8 \neq 0.$$

$h^2 - ab = 0 - (1)(4) = -4 < 0.$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع ناقص.

ولوصف القطع نضع معادلته على الصورة القياسية كما يلي:

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 4y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4(y + \frac{1}{2})^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(y + \frac{1}{2})^2 = 2.$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})} = 1.$$

وبوضع $x - 1 = x', y + \frac{1}{2} = y'$ فإن معادلة القطع تصبح في الصورة $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})} = 1$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

مركز القطع $(\alpha,\beta)=(1,-\frac{1}{2})$ والمحور الأكبر للقطع يوازي محور السينات ،

والمحور الأصغر للقطع يوازي محور الصادات.

$$a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}\ ,\ b^2=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ c^2=a^2-b^2=\frac{3}{2}\Rightarrow c=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

وطول محوره الأكبر يساوي $2a=2\sqrt{2}$ .

وطول محوره الأصغر يساوي $2b=2\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ .

---

$$(ii)\ 3x^2-2y^2-12x+8y+9=0.$$
$$\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$
$$(\ a=3,\ b=-2,\ c=9,\ h=0,\ g=-6,\ f=4\ )$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 \qquad h^2-ab=0-(3)(-2)=6>0.$$
$$=-54+0-48+72-0=-30\neq 0\ ,$$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع زائد.

ولوصف القطع نضع معادلته على الصورة القياسية كما يلي:

$$3x^2-2y^2-12x+8y+9=0\Rightarrow 3(x^2-4x)-2(y^2-4y)^2+9=0$$
$$\Rightarrow 3(x-2)^2-12-2(y-2)^2+8+9=0.$$
$$\Rightarrow 3(x-2)^2-2(y-2)^2=-5$$
$$\Rightarrow \frac{(y-2)^2}{(\frac{5}{2})}-\frac{(x-2)^2}{(\frac{5}{3})}=1.$$

وبوضع $x-2=x',y-2=y'$ فإن معادلة القطع تصبح في الصورة $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي: مركز القطع $(\alpha,\beta)=(2,2)$ ،

$$a^2=\frac{5}{2}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,b^2=\frac{5}{3}\Rightarrow b=\sqrt{\frac{5}{3}}\ ,c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{25}{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

محوره القاطع يوازي محور الصادات طوله يساوي $2a=2\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

ومحوره المرافق يوازي محور السينات طوله يساوي $2b = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$ .

**٢-** حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $x^2+6x+4y-3=0$ ثم ارسمه.

الحل:

$$x^2+6x+4y-3=0.$$
$$\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$
$$(\ a=1,\ b=0,\ c=-3,\ h=0,\ g=3,\ f=2\ )$$
$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=-2(2-0)=-4\neq 0.$$
$$h^2-ab=0-(1)(0)=0.$$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع مكافئ.

ولرسم القطع نضع معادلته على الصورة القياسية كما يلي:

$$\begin{aligned} x^2+6x+4y-3=0 &\Rightarrow (x+3)^2-9+4y-3=0\\ &\Rightarrow (x+3)^2+4y-12=0\\ &\Rightarrow (x+3)^2=-4(y-3). \end{aligned}$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الرأسي:

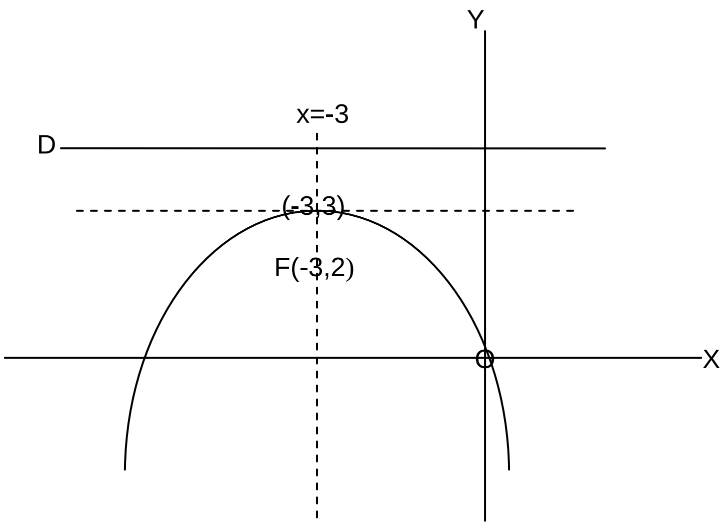
$$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)\ .$$

وبالتالي يكون: $a=1$ محوره يوازي محور الصادات ، وفتحته تكون لأسفل

ورأسه $(\alpha,\beta)\equiv(-3,3)$ وبؤرته $(\alpha,-a+\beta)\equiv(-3,2)$ ومعادلة دليله $y=a+\beta=4$

ومعادلة محوره $x=\alpha=-3$ وطول وتره البؤري العمودي $|4a|=4$

كما بالشكل التالي:



✓ **تغيير محاور الاحداثيات والقطوع المخروطية:**

الغرض من تغيير محاور الاحداثيات (بنقلها أو دورانها) هو وضع معادلات المنحنيات في أبسط صورة لها حتى يمكن معرفة نوعها ودراسة خصائصها،

وبالنسبة للقطوع المخروطية قد يكون من الصعب وصف القطع المخروطي في صورته العامة كمعادلة من الدرجة الثانية في المستوى:

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

لذلك نقوم بنقل أو دوران محاور الاحداثيات لتصبح معادلة القطع في أبسط صورة ممكنة ، ومن ثمَ يمكن وصفه ورسمه.

✓ فإذا كانت المعادلة العامة للقطع المخروطي خالية من الحد $xy$

نقوم بتبسيط المعادلة باكمال المربعات ثم ننقل محاور الاحداثيات إلى نقطة معينة $(\alpha, \beta)$

( وذلك بالتعويض في المعادلة عن $x = x' + \alpha \ , \ y = y' + \beta$ ) ،

فنحصل على أبسط صورة لمعادلة القطع المخروطي ،

أو ننقل محاور الاحداثيات من البداية إلى النقطة $(\alpha, \beta)$ ،

فنحصل على أبسط صورة لمعادلة القطع المخروطي.

✓ وإذا كانت المعادلة العامة للقطع المخروطي تحتوي على الحد $xy$

ندير محاور الاحداثيات زاوية معينة $\theta$ ،

( وذلك بالتعويض في المعادلة عن $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ )

فتصبح المعادلة خالية من الحد $xy$ ثم نضع المعادلة الناتجة في الصورة القياسية البسيطة.

✓ حيث $(\alpha, \beta) \equiv (\frac{fh - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2})$ ، $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{2h}{a - b})$

✓ (**انظر**: نتيجة١ ، نتيجة٢ **الباب الثاني**: تغيير المحاور في المستوى).

**أمثلة:**

**١**- بنقل محاور الاحداثيات إلى النقطة $(-5,-2)$ حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله الصورة الجديدة للمعادلة $4x^2 + 9y^2 + 40x + 36y + 100 = 0$ ثم ارسمه.

الحل:

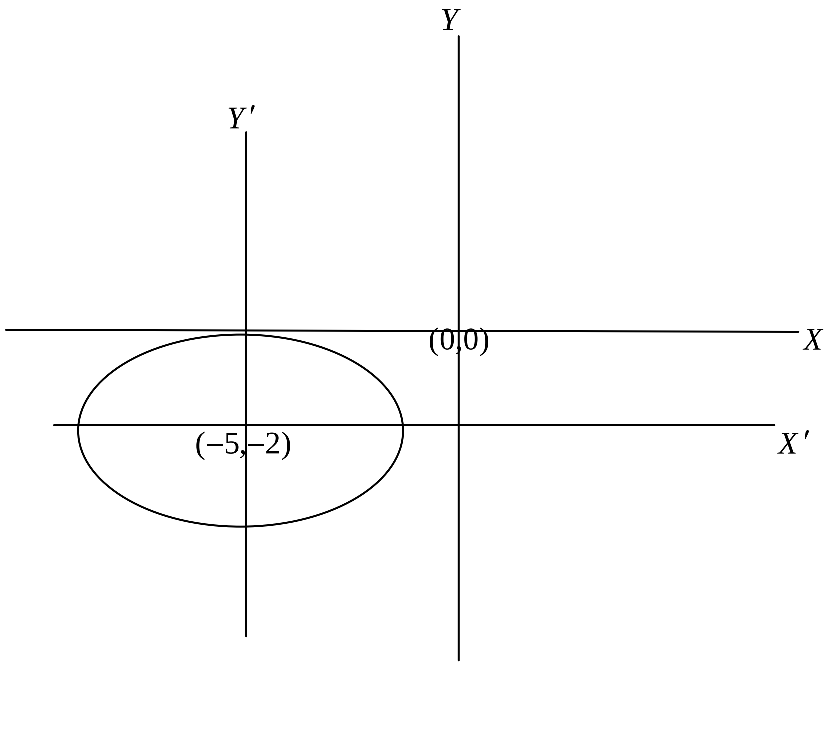
$$4x^2+9y^2+40x+36y+100=0$$
$$\Rightarrow 4(x^2+10x)+9(y^2+4y)+100=0$$
$$\Rightarrow 4[(x+5)^2-25]+9[(y+2)^2-4]+100=0$$
$$\Rightarrow 4(x+5)^2+9(y+2)^2-100-36+100=0$$
$$\Rightarrow 4(x+5)^2+9(y+2)^2=36.$$

وبوضع $x+5=x' , y+2=y'$ فإن المعادلة تصبح في الصورة:

$$4x'^2+9y'^2=36 \Rightarrow \frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$$

وهذه المعادلة الجديدة تمثل قطع ناقص أفقي مركزه نقطة الأصل الجديدة $(-5,-2)$

كما بالشكل:




---

✓ **حل أخر**:

بنقل محاور الاحداثيات مباشرة إلى النقطة $(-5,-2)$ تصبح المعادلة خالية من حدود الدرجة الأولى ، والعلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $x', y'$

عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(\alpha,\beta)$ تكون: $x=x'+\alpha \ , \ y=y'+\beta$

وبالتعويض عن $x=x'-5 \ , \ y=y'-2$ في معادلة المنحنى:

$$4(x'^2-10x'+25)+9(y'^2-4y'+4)+40(x'-5)+36(y'-2)+100=0$$
$$\Rightarrow 4x'^2+9y'^2=36$$
$$\Rightarrow \frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

وهذه المعادلة الجديدة تمثل قطع ناقص أفقي مركزه نقطة الأصل الجديدة $(-5,-2)$ كما بالشكل السابق.

**٢**- بنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(1,-1)$ حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله الصورة الجديدة للمعادلة $9x^2-7y^2-18x-14y-61=0$ ثم اذكر صفاته الهندسية.

<u>الحل:</u>

$$9x^2-7y^2-18x-14y-61=0$$
$$\Rightarrow 9(x^2-2x)-7(y^2+2y)-61=0$$
$$\Rightarrow 9[(x-1)^2-1]-7[(y+1)^2-1]-61=0$$
$$\Rightarrow 9(x-1)^2-7(y+1)^2-9+7-61=0$$
$$\Rightarrow 9(x-1)^2-7(y+1)^2=63.$$

وبوضع $x'=x-1\ ,\ y'=y+1$ فإن المعادلة تصبح في الصورة:

$$9x'^2-7y'^2=63\Rightarrow \frac{x'^2}{7}-\frac{y'^2}{9}=1.$$

وهذه المعادلة الجديدة تمثل قطع زائد على الصورة القياسية $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$

المحور القاطع له محور السينات $OX$ والمحور المرافق له محور الصادات $OY$ ،

$$a^2=7\Rightarrow a=\sqrt{7}\ ,b^2=9\Rightarrow b=3\ ,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=4.$$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

إحداثيات بؤرتيه $(\pm c,0)=(\pm 4,0)$ ورأسيه $(\pm a,0)=(\pm\sqrt{7},0)$

ومعادلتا دليليه $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{7}{4}$

ومعادلتا خطيه التقاربيين $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}x$

**٣**- حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة:

$$x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}\,x+6\sqrt{2}\,y-6=0$$

ثم ضعها في الصورة القياسية ، واذكر صفاته الهندسية.

<u>الحل:</u>

$$x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}\,x+6\sqrt{2}\,y-6=0$$
$$\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$
$$(\ a=1,\ b=1,\ c=-6,\ h=1,\ g=-\sqrt{2},\ f=3\sqrt{2}\ )$$
$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & 3\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 3\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -6\end{vmatrix}$$
$$=-4\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{2})=-32\neq 0.$$
$$h^2-ab=1-(1)(1)=1.$$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع مكافئ.

ولوضع المعادلة في الصورة القياسية:

نجعل المعادلة خالية من الحد $xy$ بدوران محاور الاحداثيات زاوية $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{2h}{a-b})$

$$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{2}{0})=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\infty)=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$$

والعلاقة بين الإحداثيات الأصلية $x,y$ والإحداثيات الجديدة $x',y'$ عندما تدور محاور الاحداثيات زاوية $\theta$ تكون:

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$
$$\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sin\theta=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \therefore x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\ ,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y').$$

وبالتعويض عن $x,y$ في معادلة القطع $x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}\,x+6\sqrt{2}\,y-6=0$ يكون:

$$\frac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)+\frac{2}{2}(x'^2-y'^2)+\frac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)-2(x'-y')$$
$$+6(x'+y')-6=0.$$
$$\Rightarrow 2x'^2+4x'+8y'-6=0.$$
$$\Rightarrow x'^2+2x'+4y'-3=0.$$
$$\Rightarrow (x'+1)^2-1+4y'-3=0.$$
$$\Rightarrow (x'+1)^2=-4(y'-1).$$

وهذه معادلة قطع مكافئ رأسي على الصورة القياسية $(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$

محوره يوازي محور $OY$ وفتحته لأسفل ، $a=1$

ورأسه النقطة $(\alpha,\beta)=(-1,1)$

وبؤرته النقطة $(\alpha,-a+\beta)=(-1,0)$ ودليله المستقيم $y=a+\beta=2$ ،

ومعادلة محوره $x=\alpha=-1$ وطول وتره البؤري العمودي $|4a|=1$.

✓ **تمارين:**

١- حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية ثم اذكر صفاته:

$(i)\ y^2+6y+2x+5=0.$

$(ii)\ 25x^2+9y^2-100x-54y-44=0.$

$(iii)\ x^2-4y^2+2x+8y-7=0.$

$(iv)\ 5x^2-4xy+8y^2=36.$

---

٢- حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله الصورة الجديدة للمعادلة:

$9x^2-25y^2+18x+100y-316=0$ .

عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(-1,2)$ ثم اذكر صفاته الهندسية.

---

٣- حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة:

$5x^2-6xy+5y^2+4x+4y-4=0$

إذا دارت محاور الإحداثيات زاوية $\theta=\tan^{-1}(1)$ ثم اذكر صفاته الهندسية.

---

٤- تحقق من أن المعادلة $9x^2+6xy+y^2+8\sqrt{10}\,x-4\sqrt{10}\,y+30=0$

تمثل قطع مكافئ ، ثم ضعها في الصورة القياسية ، وارسمه.

===

**المراجع:**

١- د.برهامي حشيش – " الوسيط في الجبر والهندسة التحليلية "– سلسلة الرياضيات الهندسية – دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

٢- د.مصطفى الجندي – " تقليدات الجبر والهندسة التحليلية "– دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

٣- د.رمضان جهينة – " مبادئ الرياضيات "– منشورات ELGA – الطبعة الثانية (٢٠٠٠م).

- **References:**

1- PK.Jain.Khalil Ahmed (2005). *Textbook of Analytic Geometry of Two Dimension. 2nd edition.* New Age International (P) Ltd.
2- J.H.Kindle. (1990). *Analytic Geometry*. Schaum's Outline.
3- Selby,P.H. (1986). *Analytic Geometry.* San Diego,Calefornia. College outline series.
4- Yefimov, N.V. (1964). *A Brief course in Analytic Geometry.* Mir publishers.