الفرقة الاولى

شعبة الرياضيات عام

بحتة (3)

محاضرات في التكامل

محتويات

الــتــكامــل

أولاً تعريف التكامل الغير محدد:-

هو العملية العكسية لعملية الاشتقاق. فإذا كانت F(x) دالة ما فإن علم التفاضل يختص بإيجاد مشتقة هذه الدالة $F'(x)$ بينما علم التكامل الغير محدود يختص بإيجاد الدالة F(x)

تـوضـيـح لمفهوم التكامل المحدد :-

إذا كانت $F'(x)=2x$ وطلب منا إيجاد F(x) ، فمن خلال خبرتنا بعلم التفاضل نستطيع أن نخمن أن الدالة المطلوبة قد تكون هي $F(x)=x^2$ مع أخذ العلم أن هذا الجواب ليس وحيداً لأن هناك العديد من الدوالF(x) لها نفس التفاضل $F'(x)$ نحو:

$$F(x)=x^2+4$$
$$F(x)=x^2-3$$
$$F(x)=x^2+\sqrt{2}$$
$$\vdots$$

ولهذا كل الأجوبة السابقة تعتبر صحيحة ولتعميم الجواب نضع ثابت اختياري وليكن C يعبر عن أي عدد حقيقي أي أن الدالة المطلوبة هي :-

$$F(x)=x^2+c$$

ومن ذلك اتضح لنا سبب تسميته بالتكامل غير محدد وذلك لأنه لا يعبر عن دالة محددة بل يعبر عن مجموعة من الدوال .

الرموز العلمية لعملية التكامل :-

إذا كانت $F'(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ فإن عملية التكامل المستخدمة لإيجاد الدالة $F(x)$ يرمز لها كالتالي :- $f(x)=F'(x)$, $\int f(x)\,dx=F(x)+c$
وتقرأ هذه العملية تكامل $f(x)$ بالنسبة لـــ x .

عند حل مسائل التكامل يجب أن نتبع الآتي :-

(1) إذا كانت المسألة على صورة أحد قوانين التكامل فإننا نكامل المسألة مباشرة باستخدام القانون المناسب .
(2) إذا كانت المسألة ليست على صورة أحد قوانين التكامل فإننا نحاول تبسيط المسألة باستخدام العمليات الجبرية أوباستخدام المتطابقات المثلثية حتى نصل بالمسألة إلى صورة من صور قوانين التكامل إن أمكن ذلك .
(3) إذا لم نتمكن من استخدام قوانين التكامل مباشرة ولم نتمكن من تبسيط المسألة أو تم تبسيطها ولكن لم تصل إلى صورة من صور قوانين التكامل فإننا نستخدم أحد طرق التكامل المناسبة .

قـــوانـــيـــن الـــتـــكـــامـــل :-

$$(1)\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\ ,\ n\neq -1$$

$$(2)\int a\,dx=ax+c\ ,\ a\in R$$

$$(3)\int dx=x+c$$

مسائل متنوعة على التكامل

$$(1)\int x^{2}\,dx = \frac{1}{3}x^{3}+c$$

$$(2)\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = 2x^{\frac{1}{2}}+c = 2\sqrt{x}+c$$

$$(3)\int \frac{3}{x^{4}}\,dx = \int 3x^{-4}\,dx = -x^{-3}+c = -\frac{1}{x^{3}}+c$$

$$(4)\int \sqrt{y}\,dy = \int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\sqrt{y^{3}}+c$$

$$(5)\int \frac{5x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int 5x\,x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \int 5x^{\frac{2}{3}}\,dx = 3x^{\frac{2}{3}}+c$$
$$= 3\sqrt[3]{x^{2}}+c$$

$$(6)\int 4t\sqrt{t^{3}}\,dt = \int 4t\,t^{\frac{3}{2}}\,dt = \int 4t^{\frac{5}{2}}\,dt = \frac{8}{7}t^{\frac{7}{2}}+c$$
$$= \frac{8}{7}\sqrt{t^{7}}+c$$

$$(7)\int \sqrt{3t^{3}}\,dt = \int \sqrt{3}\,t^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{5}t^{\frac{5}{2}}+c = \frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{t^{5}}$$

$$(8)\int 8\,dx = 8x+c$$

$$(9)\int \sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}\,x+c$$

$$(10)\int 3^{2}\,dx = 3^{2}x+c = 9x+c$$

$$(11)\int \ln 3\, dx = (\ln 3)x + c$$

$$(12)\int e^3\, dx = e^3 x + c$$

$$(13)\int \frac{1}{e^2}\, dx = \frac{1}{e^2} x + c$$

$$(14)\int 0\, dx = c$$

$$(15)\int \sin 30^\circ\, dx = x \sin 30^\circ + c$$

$$(16)\int 2^e\, dx = 2^e x + c$$

$$(17)\int \log 22\, dx = (\log 22)x + c$$

$$(18)\int \sin^{-1} 3\pi\, dx = (\sin^{-1} 3\pi)\, x + c$$

$$(19)\int (r + 3x)\, dx = rx + \frac{3}{2}x^2 + c$$

$$(20)\int (2x^2 + 5x)\, dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c$$

$$(21)\int (x^3 - 5x + 9)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + c$$

(22) $\int(\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^2}+x)dx=\int(2x^{-3}-5x^{-2}+x)dx$

$$=-x^{-2}+5x^{-1}+\frac{1}{2}x^2+c=-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+\frac{1}{2}x^2+c$$

(23) $\int(\frac{x^4+2x^3-7}{x^3})dx=\int(\frac{x^4}{x^3}+\frac{2x^3}{x^3}-\frac{7}{x^3})dx$

$$\int(x+2-7x^{-3})dx=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{7}{2}x^{-2}+c=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{7}{2x^2}+c$$

(24) $\int(\frac{x^2-25}{x-5})dx=\int\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}dx=\int(x+5)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2+5x+c$$

(25) $\int(\frac{4x^3-12x^2}{x-3})dx=\int\frac{4x^2(x-3)}{x-3}dx=\int 4x^2dx$

$$=\frac{4}{3}x^3+c$$

(26) $\int(\frac{x\ln 3+2\ln 3}{x+2})dx=\int\frac{(x+2)\ln 3}{x+2}dx=\int\ln 3dx=x\ln 3+c$

(27) $\int(x-2)(x+3)\,dx=\int(x^2+x-6)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+c$

قــوانــيــن الــتــكــامــل

$$(4) \int e^{F(x)} F'(x)\, dx = e^{F(x)} + c$$

$$(5) \int a^{F(x)} F'(x)\, dx = \frac{a^{F(x)}}{\ln a} + c$$

قوانـيـن الأســــس واللوغاريتمات:-

$$(1)\ A^{n} A^{m} = A^{n+m}$$

$$(2)\ \frac{A^{n}}{A^{m}} = A^{n-m}$$

$$(3)\ (A^{n})^{m} = A^{nm}$$

$$(4)\ (A \cdot B)^{m} = A^{m} B^{m}$$

$$(5)\ \left(\frac{A}{B}\right)^{n} = \frac{A^{n}}{B^{n}}$$

$$(6)\ \sqrt[n]{A^{m}} = A^{\frac{m}{n}}$$

$$(1) \log_e A = \ln A$$

$$(2) \log_{10} A = \log A$$

$$(3) \log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

$$(4) \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

$$(5)\ e^{\ln F(x)} = F(x)$$

$$(6)\ a^{\log_a F(x)} = F(x)$$

$$(7) \ln e = 1$$

$$(8) \log_a a = 1$$

$$(9) \log_a B^{n} = n \log_a B$$

مسـائـل متنوعـة على التكامـل

(1) $\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}+c$

(2) $\int e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

(3) $\int e^{-7x+2}\,dx=-\frac{1}{7}\int -7e^{-7x+2}dx=-\frac{1}{7}e^{-7x+2}+c$

(4) $\int e^{\frac{3}{2}x}\,dx=\frac{2}{3}\int \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}dx=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}+c$

(5) $\int xe^{4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\int 8xe^{4x^2}dx=\frac{1}{8}e^{4x^2}+c$

(6) $\int x^2e^{-x^3}\,dx=-\frac{1}{3}\int -3x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c$

(7) $\int x^{-2}e^{\frac{1}{x}}\,dx=-\int -x^{-2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}+c$

(8) $\int \frac{e^{x^{-2}}}{x^3}\,dx=\int x^{-3}e^{x^{-2}}dx=-\frac{1}{2}\int -2x^{-3}e^{x^{-2}}dx=-\frac{1}{2}e^{x^{-2}}+c$

(9) $\int(e^{2x}+e^{-8x})dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\frac{1}{8}\int -8e^{-8x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-8x}+c$

(10) $\int e\,dx=ex+c$

(11) $\int\frac{3}{e^{4x}}dx=3\int e^{-4x}dx=-\frac{3}{4}\int -4e^{-4x}dx=-\frac{3}{4}e^{-4x}+c$

(12) $\int\sqrt{e^{3x}}\,dx=\int(e^{3x})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}dx=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}+c$

(13) $\int e^{-1}dx=e^{-1}x+c$

(14) $\int \ln e\,dx=x\ln e+c=x+c$

(15) $\int\frac{e^{5x}}{e^{2x}}dx=\int e^{5x-2x}dx=\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}+c$

(16) $\int\frac{e^{5x}}{e}dx=\int e^{5x-1}dx=\frac{1}{5}\int 5e^{5x-1}dx=\frac{1}{5}e^{5x-1}+c$

(17) $\int e^{-e}dx=e^{-e}x+c$

(18) $\int\frac{e^x+e^{2x}}{e^{3x}}dx=\int\frac{e^x}{e^{3x}}dx+\int\frac{e^{2x}}{e^{3x}}dx=-\frac{1}{2}\int-2e^{-2x}dx-\int-e^{-x}dx$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}+c$

(19) $\int(e^x+e^{2x})(e^x-e^{2x})dx=\int(e^{2x}-e^{4x})dx=\frac{1}{2}\int2e^{2x}dx-\frac{1}{4}\int4e^{4x}dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{4x}+c$

(20) $\int\ln\left(\frac{e^x}{e^{3x}}\right)dx=\int\ln(e^x e^{-3x})dx=\int\ln e^{-2x}dx=\int-2x\ln e\,dx$

$=\int-2x\,dx=-x^2+c$

(21) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int e^{\frac{1}{x}}x^{-2}dx=-\int-e^{\frac{1}{x}}x^{-2}dx=-e^{\frac{1}{x}}+c$

(22) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2e^{\sqrt{x}}+c$

(23) $\int\frac{e^{\ln x}}{x}dx=\int e^{\ln x}\frac{1}{x}dx=e^{\ln x}+c=x+c$

(24) $\int \frac{e^{\log x}}{x}\,dx = \ln 10 \int e^{\log x}\,\frac{1}{x\ln 10}\,dx = (\ln 10)e^{\log x} + c$

(25) $\int 3^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(3^{2x})dx = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + c$

(26) $\int 5^{-7x+2}\,dx = -\frac{1}{7}\int -7(5^{-7x+2})dx = -\frac{5^{-7x+2}}{7\ln 5} + c$

(27) $\int (5^{2x} + 7^{-8x})dx = \frac{1}{2}\int 2(5^{2x})dx - \frac{1}{8}\int -8(7^{-8x})dx$

$= \frac{5^{2x}}{2\ln 5} - \frac{7^{-8x}}{8\ln 7} + c$

(28) $\int \frac{3}{5^{4x}}\,dx = 3\int 5^{-4x}\,dx = -\frac{3}{4}\int -4(5^{-4x})\,dx = -\frac{3(5^{-4x})}{4\ln 5} + c$

(29) $\int \sqrt{7^{3x}}\,dx = \int (7^{3x})^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}(7^{\frac{3}{2}x})\,dx = \frac{2(7^{\frac{3}{2}x})}{3\ln 7} + c$

(30) $\int 4^2\,dx = 4^2 x + c$

(31) $\int \frac{5^{5x}}{5^{2x}}\,dx = \int 5^{5x-2x}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(5^{3x})\,dx = \frac{5^{3x}}{3\ln 5} + c$

$$(32)\ \int x^2 5^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2 5^{-x^3}\,dx = -\frac{5^{-x^3}}{3\ln 5} + c$$

$$(33)\ \int \frac{3^{x^{-2}}}{x^3}\,dx = \int x^{-3} 3^{x^{-2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x^{-3} 3^{x^{-2}}\,dx = -\frac{3^{x^{-2}}}{2\ln 3} + c$$

$$(34)\ \int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int 7^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{2(7^{\sqrt{x}})}{\ln 7} + c$$

$$(35)\ \int \log\left(\frac{10^x}{10^{3x}}\right)dx = \int \log(10^{x-3x})\,dx = \int \log 10^{-2x}\,dx = \int -2x\log 10\,dx$$

$$= \int -2x\,dx = -x^2 + c$$

$$(36)\ \int \frac{4^x + 6^x}{2^x}\,dx = \int \frac{4^x}{2^x}\,dx + \int \frac{6^x}{2^x}\,dx = \int \left(\frac{4}{2}\right)^x dx + \int \left(\frac{6}{2}\right)^x dx$$

$$\int 2^x\,dx + \int 3^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$(37)\ \int 3\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} dx = \frac{3}{2}\int 2\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} dx = \frac{3\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}}{2\ln\frac{5}{3}} + c$$

قــوانــيــن الــتــكــامــل

$$(6)\int \frac{F'(x)}{F(x)}\, dx = \ln|F(x)| + c$$

$$(7)\int [F(x)]^n F'(x)\, dx = \frac{[F(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

قـوانـيـن اللـوغـاريتمات :-

$(1)\ \log_e A = \ln A$

$(2)\ \log_{10} A = \log A$

$(3)\ \log_a A B = \log_a A + \log_a B$

$(4)\ \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

$(5)\ e^{\ln F(x)} = F(x)$

$(6)\ a^{\log_a F(x)} = F(x)$

$(7)\ \ln e = 1$

$(8)\ \log_a a = 1$

$(9)\ \log_a B^n = n \log_a B$

مسائل متنوعة على التكامل

(1) $\int \frac{dx}{2+x} = \ln|2+x| + c$

(2) $\int \frac{3dx}{5x+3} = \frac{3}{5}\int \frac{5dx}{5x+3} = \frac{3}{5}\ln|5x+3| + c$

(3) $\int \frac{2dx}{4-3x} = -\frac{2}{3}\int \frac{-3dx}{4-3x} = -\frac{2}{3}\ln|4-3x| + c$

(4) $\int \frac{x+5}{x^2+10x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+10x+5\right| + c$

(5) $\int \frac{x^2+4x^5}{x^3+2x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+12x^5}{x^3+2x^6}dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+2x^6\right| + c$

(6) $\int \frac{2e^x}{2+e^x}dx = 2\int \frac{e^x}{2+e^x}dx = 2\ln\left|2+e^x\right| + c$

(7) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \ln\left|e^x+x\right| + c$

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln\left|e^x+e^{-x}\right| + c$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx = \int (3x^2+2x)(x^3+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{x^3+x^2} + c$

$$(10)\ \int \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}}dx = \int (4x+1)(2x^2+x+3)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(2x^2+x+3)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=2\sqrt{2x^2+x+3}+c$$

$$(11)\ \int \frac{e^x-x}{\sqrt[3]{2e^x-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int (2e^x-2x)(2e^x-x^2)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}(2e^x-x^2)^{\frac{2}{3}}+c$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2e^x-x^2)^2}+c$$

$$(12)\ \int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-e^{-2x}\right|+c$$

$$(13)\ \int \frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2}{2^x-2^{-x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|2^x-2^{-x}\right|+c$$

$$(14)\ \int \frac{dx}{e+x} = \ln|e+x|+c$$

$$(15)\ \int \frac{dx}{\pi+x} = \ln|\pi+x|+c$$

$$(16)\ \int \frac{(2+\ln x)^{10}dx}{x} = \int (2+\ln x)^{10}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{11}(2+\ln x)^{11}+c$$

ثانياً تعريف التكامل المحدد:-

هو عملية تجميع لعناصر { أطوال ، مساحات ، حجوم } بطريقة معينة وقد قام العالم الألماني ريمان بتوضيح عملية الجمع هذه والتي تعرف باسمه (مجموع ريمان) وأثبت أن هدا المجموع ما هو في الحقيقة إلا التكامل المحدد .

الرموز العلمية لعملية التكامل المحدد:-

إذا كانت $F'(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ومتصلة على الفترة $[a,b]$ فإن عملية التكامل المحدد يرمز لها كالتالي :-

$$\int_a^b F'(x)\,dx$$

حساب التكامل المحدد باستخدام النظرية الأساسية للتكامل :-

إذا كانت $F'(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ومتصلة على الفترة $[a,b]$ فإن :-

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad , f(x) = F'(x)$$

$$EX:\ \int_1^2 2x\,dx = x^2\Big|_1^2 = (2)^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

توضيح لمفهوم التكامل المحدد :-

سبق أن ذكرنا أن التكامل المحدد يستخدم لحساب الأطوال و المساحات والحجوم والآن سوف نوضح كيف أن التكامل المحدد يستخدم لإيجاد المساحات .

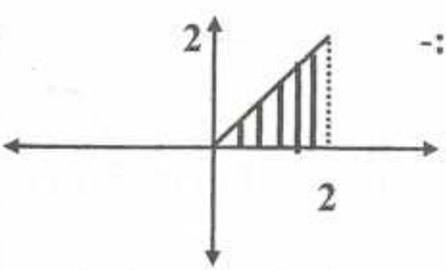
$$\int_0^2 x\,dx$$

$$f(x)=x \quad ، \quad x\in[0,2]$$

أولاً نعين قيمة التكامل المحدد باستخدام النظرية الأساسية للتكامل :-

$$\int_0^2 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2=\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{2}(0)^2=2$$

ثانياً نعين قيمة التكامل المحدد هندسياً :-



لاحظ من بيان الدالة أن المطلوبة هو المساحة المظللة تحت بيان الدالة وهي عبارة عن مثلث قائم الزاوية طول قاعدته 2 وحدة طولية وارتفاعه 2 وحدة طولية

$$\int_0^2 x\,dx=\frac{1}{2}(2)(2)=2 \quad \text{وحدة مربعة}$$

Properties of Definite Integrals خواص التكامل المحدود

إذا كانت f(x) و g(x) دالتين متصلتين خلال فترة التكامل $a \le x \le b$ إذن

خاصية 7-1 :

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad \text{لأى ثابت } c$$

خاصية 7-2 :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

خاصية 7-3 :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ for } a < c < b$$

نبذة مختصرة عن المتسلسلات

المتسلسلة هي منظومة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة

طرق التعبير عن المتسلسلات :-

أولاً طريقة السرد :- وهي عبارة عن سرد حدود المتسلسلة كالتالي :-

1+2+3+4+..........................
2+4+6+8+...........................
1-3+5-7+........................

ثانياً طريقة $\sum$:-

$\sum$ وهو عبارة عن رمزيكون بديل عن كتابة حدود المتسلسلة

{ويعني مجموع} بحيث يوضع داخل هذا الرمز قانون الحد العام ويعطينا هذا القانون حدود المتسلسلة وبالتالي يمكن تحويل أي متسلسلة في هذه الصورة إلى متسلسلة على صورة حدود (أي بطريقة السرد)

$$\sum_{i=1}^{14} (i+1) = 2+3+4+ \dots\dots\dots +15$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 = 1+4+9+16+\dots\dots$$

حـــالات خاصة من المتسلسلات :-

(1)المتسلسلة الحسابية :- هي مجموعة حدود رتبت بحيث يكون الفرق بين أي حد والحد السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتسلسلة ويرمز له بالرمز d .

مـــثـــال :- بين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية حسابية أم لا :

$(A)\ \ 2+5+8+11+........$

$d = 5-2 = 3$
$d = 8-5 = 3$

المتسلسلة حسابية

$(B)\ \ 1+4+6+10+......$

$d = 4-1 = 3$
$d = 6-4 = 2$

المتسلسلة ليست حسابية

قانون الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

$$\sum_{i}^{k} a_i = \sum_{i}^{k} [a_1 + d(i-1)]$$

حيث i رتبة أي حد

d أساس المتسلسلة حيث **d = أي حد – الحد السابق له مباشرة**

a_i قانون الحد العام

a_1 قيمة الحد الأول في المتسلسلة

k رتبة الحد الأخير في المتسلسلة أو عدد الحدود المتسلسلة

ستخدامات قانون الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

- يستخدم لإيجاد قيمة أي حد إذا علم a_1 , i , d
- يستخدم لإيجاد رتبة أي حد i إذا علم $a_1 \; , d , a_i$
- يستخدم لإيجاد الحد العام لأي متسلسلة حسابية وذلك بأن نعوض بـــ $a_1 \; , d , a$ في قانون الحد العام

المتسلسلة الهندسية:- هي مجموعة حدود رتبت بحيث يكون حاصل قسمة أي حد على الحد السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتسلسلة ويرمز له بالرمز d .

مثـــال :- بين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية هندسية أم لا :

$(A) \;\; 2+4+8..........$

$$d=\frac{4}{2}=2$$
$$d=\frac{8}{4}=2$$

المتسلسلة هندسية

$(B) \;\; 3+9+18+10+........$

$$d=\frac{9}{3}=3$$
$$d=\frac{18}{9}=2$$

المتسلسلة ليست هندسية

قانون الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

$$\sum_{i}^{k} a_i = \sum_{i}^{k} a_1 d^{i-1}$$

حيث i رتبة أي حد

d أساس المتسلسلة حيث $d = \dfrac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

a_1 قيمة الحد الأول في المتسلسلة

k رتبة الحد الأخير في المتسلسلة أو عدد الحدود المتسلسلة

a_i قانون الحد العام

استخدمات قانون الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

(1) يستخدم لإيجاد قيمة أي حد إذا علم a_1 , i , d

(2) يستخدم لإيجاد رتبة أي حد i إذا علم $a_1 \ , d , a_i$

(3) يستخدم لإيجاد الحد العام لأي متسلسلة هندسية وذلك بأن نعوض بـــ $a_1 \ , d , a_i$ في قانون الحد العام

قوانيين المجاميع لمتسلسلات خاصة :-

تستخدم هذه القوانين لإيجاد مجموع حدود المتسلسلات ابتداء من الحد الأول $i=1$ وكل قانون للجمع يستخدم على حسب نوع المتسلسلة كالتالي :-

$$(1)\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$(3)\sum_{i=1}^{n} i^{3}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{2}$$

$$(4)\sum_{i=1}^{n} a = an$$

ملاحظات:-

(1) n في قوانين المجاميع هي عدد الحدود المراد جمعها ابتدء من الحد الأول $i=1$ وانتهاء بـ $i=n$

(2) إذا كان عدد الحدود المراد جمعها تبدأ من $i=m$ حيث $m\neq1$ فإننا لا نستخدم قوانين المجاميع مباشرة وإنما نستخدم القانون الآتي :-

$$\sum_{i=m}^{n} A=\sum_{i=1}^{n} A-\sum_{i=1}^{m-1} A$$

مثال:- أوجد مجموع المتسلسلات :

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{6}(2i+1)=3+5+7+9+11+13=48$$

$$or\quad \sum_{i=1}^{6}(2i+1)=\sum_{i=1}^{6}2i+\sum_{i=1}^{6}1=2\sum_{i=1}^{6}i+\sum_{i=1}^{6}1$$

$$=2\sum_{i=1}^{6} i+\sum_{i=1}^{6} 1=2\frac{(6)(6+1)}{2}+6=48 \quad ,n=6$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{5} i^{2}=1+4+9+16+25=55$$

$$or \sum_{i=1}^{5} i^{2}=\frac{5[2(5)+1](5+1)}{6}=55 \quad ,n=5$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{5}(i^{2}+1)=\sum_{i=1}^{5} i^{2}+\sum_{i=1}^{5} 1=\frac{5[2(5)+1](5+1)}{6}+5=60$$

$$(4)\ \sum_{i=1}^{5}(2i^{2}+3i)=2\sum_{i=1}^{5} i^{2}+3\sum_{i=1}^{5} i$$

$$=2\ \frac{5[2(5)+1](5+1)}{6}+3\ \frac{(5)(5+1)}{2}\ =2(55)+3(15)=155$$

$$(5)\ \sum_{i=1}^{5}(2i^{3}+3i)=2\sum_{i=1}^{5} i^{3}+3\sum_{i=1}^{5} i$$

$$=2[\ \frac{(5)(5+1)}{2}]^{2}+3\ \frac{(5)(5+1)}{2}=2(225)+3(15)=495$$

(6) $\sum_{i=3}^{6}(2i+1)=7+9+11+13=40$

or $\sum_{i=3}^{6}(2i+1)=\sum_{i=1}^{6}(2i+1)-\sum_{i=1}^{2}(2i+1)$

$$\sum_{i=1}^{6}(2i+1)=2\sum_{i=1}^{6}i+\sum_{i=1}^{6}1=2\frac{(6)(6+1)}{2}+6=48$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i+1)=2\sum_{i=1}^{2}i+\sum_{i=1}^{2}1=2\frac{(2)(2+1)}{2}+2=8$$

$$\sum_{i=3}^{6}(2i+1)=48-8=40$$

(7) $\sum_{i=5}^{30}(2i^2-2)$

$$\sum_{i=5}^{30}(2i^2-2)=\sum_{i=1}^{30}(2i^2-2)-\sum_{i=1}^{4}(2i^2-2)$$

$$\sum_{i=1}^{30}(2i^2-2)=2\sum_{i=1}^{30}i^2-\sum_{i=1}^{30}2=2\frac{30[2(30)+1](30+1)}{6}-2(30)$$

$$\sum_{i=1}^{30}(2i^2-2)=18850$$

$$\sum_{i=1}^{4}(2i^2-2)=\sum_{i=1}^{4}2i^2-\sum_{i=1}^{4}2=2\sum_{i=1}^{4}i^2-\sum_{i=1}^{4}2$$

$$=2\frac{4[2(4)+1](4+1)}{6}-2(4)=60-8=52$$

$$\sum_{i=5}^{30}(2i^2-2)=18850-52=18798$$

مثـــال:- عبر عن كل مما يأتي في صورة $\sum$:-

(1) $3+5+7+9+11+13$

(A) نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$d=5-3=2$

$d=7-5=2$

المتسلسلة حسابية

(B) نعين الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

$a_1=3 \;,\; d=2$

$a_i=a_1+d(i-1) \rightarrow a_i=3+2(i-1)$

$a_i=3+2i-2 \rightarrow a_i=2i+1$

(C) نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 6

$k=6$

$$\sum_{i=1}^{6} a_i=\sum_{i=1}^{6}[2i+1]$$

(2) $2+4+6+8+\dots\dots\dots\;\dots.+16$

(A) نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$d=4-2=2$

$d=6-4=2$

المتسلسلة حسابية

(B) نعين الحد العام للمتسلسلة الحسابية :-

$$a_1 = 2 \ , \ d = 2$$

$$a_i = a_1 + d(i-1) \rightarrow a_i = 2 + 2(i-1)$$

$$a_i = 2 + 2i - 2 \rightarrow a_i = 2i$$

(C) نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 8 $\qquad k = 8$

$$\sum_{i=1}^{8} a_i = \sum_{i=1}^{8} 2i$$

$$(3)\ 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 64$$

(A) نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$$d = \frac{2}{1} = 2$$

$$d = \frac{4}{2} = 2$$

المتسلسلة هندسية

(B) نعين الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

$$a_1 = 1 \ , \ d = 2$$

$$a_i = 2^{i-1}$$

(C) نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 7 $\qquad k = 7$

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = \sum_{i=1}^{7} (1) 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{7} 2^{i-1}$$

$(4)\ 1+3+9+27+81$

نحدد نوع المتسلسلة هل هي حسابية أم هندسية :-

$$d=\frac{3}{1}=3$$
$$d=\frac{9}{3}=3$$

متسلسلة هندسية

نعين الحد العام للمتسلسلة الهندسية :-

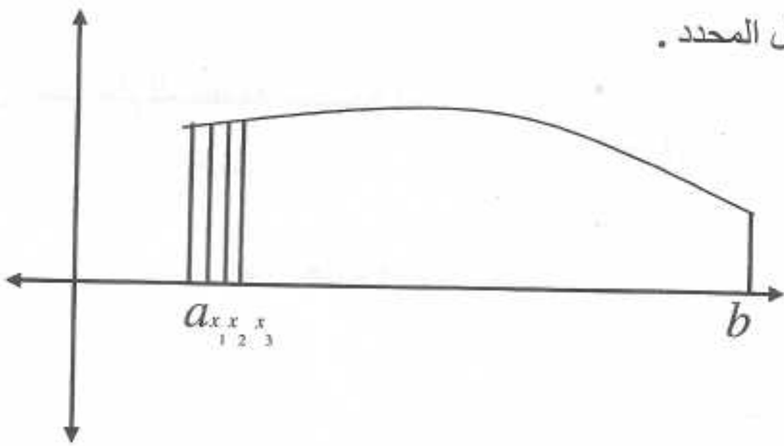
$$a_1=1\ ,\ d=3$$
$$a_i=3^{i-1}$$

نعين رتبة آخر حد أو عدد الحدود :- عدد الحدود = 5 $\qquad k=5$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i=\sum_{i=1}^{5}(1)3^{i-1}=\sum_{i=1}^{5} 3^{i-1}$$

حساب التكامل المحدد باستخدام مجموع ريمان :-

يكمن حساب قيمة التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\, dx$ باستخدام مجموع ريمان وذلك بأن نقسم المساحة التي تحت منحنى الدالة $f(x)$ إلى مستطيلات ونقوم بإيجاد مجموع مساحة هذه المستطيلات فيكون هو قيمة التكامل المحدد .



(1) نعين عرض كل مستطيل وليكن Δx بحيث تكون المستطيلات متساوية في العرض أي أن $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ حيث n عدد المستطيلات

(2) نعين x_i حيث :-

$$x_i = a + i\,\Delta x$$
$$i = 1,2,3,\dots\dots\dots ,n$$

(3) نعين طول كل مستطيل وليكن $f(x_i)$ وذلك بأن نعوض بـ x_i التي تحصلنا عليها في $f(x)$

(4) نعين مجموع مساحات المستطيلات S_n وذلك بأن نعوض بـ $f(x_i)$ و Δx في القانون الآتي :-

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$$

(5) نقوم بإخراج أي عدد وأي n خارج $\sum_{i=1}^{n}$ ونستخدم قوانين المجاميع الآتية للتبسيط :-

$$(1) \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$(4) \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

(6) نعين نهاية المجموع أي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n$$

مـــثـــال:- باستخدام مجموع ريمان أوجد قيمة التكاملات الآتية :-

$$(1)\int_0^3 x\,dx$$

$$a=0,b=3,f(x)=x$$

$$(A)\,\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$$

$$(B)\,x_i=a+i\Delta x=0+i\frac{3}{n}=i\frac{3}{n}$$

$$(C)\,f(x_i)=f(i\frac{3}{n})=i\frac{3}{n}$$

$$(D)\sum_i^n f(x_i)\,\Delta x=\sum_i^n i\frac{3}{n}\,\frac{3}{n}$$

$$(E)S_n=\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^n i=\frac{9}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}=\frac{9}{2}+\frac{9}{2n}$$

$$(F)\int_0^3 x\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{9}{2}+\frac{9}{2n})=\frac{9}{2}+0=\frac{9}{2}$$

(2) $\int_{2}^{3}(x+1)\,dx$

$a=2$, $b=3$, $f(x)=x+1$

(A) $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{n}=\frac{1}{n}$

(B) $x_i=a+i\Delta x=2+i\frac{1}{n}$

(C) $f(x_i)=f(2+i\frac{1}{n})=2+i\frac{1}{n}+1=3+i\frac{1}{n}$

(D) $\sum_{i}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\sum_{i}^{n}(3+i\frac{1}{n})\,\frac{1}{n}$

(E) $S_n=\sum_{i=1}^{n}(\frac{3}{n}+i\frac{1}{n^2})=\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}+\sum_{i=1}^{n}i\frac{1}{n^2}=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$

$=\frac{3}{n}n+\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2n}$

(F) $\int_{2}^{3}(x+1)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{7}{2}+\frac{1}{2n})=\frac{7}{2}+0=\frac{7}{2}$

(3) $\int_{1}^{3}x^2\,dx$

$a=1$, $b=3$, $f(x)=x^2$

(A) $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$

(B) $x_i=a+i\Delta x=1+i\frac{2}{n}$

(C) $f(x_i)=f(1+i\frac{2}{n})=(1+i\frac{2}{n})^2=1+i\frac{4}{n}+i^2\frac{4}{n^2}$

$$(D)\sum_{i}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i}^{n} \left(1 + i\frac{4}{n} + i^2\frac{4}{n^2}\right)\frac{2}{n}$$

$$(E)\sum_{i}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i}^{n} \left(\frac{2}{n} + i\frac{8}{n^2} + i^2\frac{8}{n^3}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i}^{n} i^2$$

$$= \frac{2}{n}n + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 2 + \frac{4n+4}{n} + \frac{8n^2+12n+4}{3n^2}$$

$$= 2+4+\frac{4}{n}+\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}$$

$$= 6+\frac{4}{n}+\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}$$

$$(F)\int_{1}^{3} x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{4}{n}+\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right)$$

$$= 6+0+\frac{8}{3}+0+0 = \frac{26}{3}$$

(4) $\int_1^2 (x^2+x)\,dx$

$a=1,\ b=2,\ f(x)=x^2+x$

(A) $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$

(B) $x_i=a+i\Delta x=1+i\frac{1}{n}$

(C) $f(x_i)=f(1+i\frac{1}{n})=(1+i\frac{1}{n})^2+1+i\frac{1}{n}$

$=1+i\frac{2}{n}+i^2\frac{1}{n^2}+1+i\frac{1}{n}=2+i\frac{3}{n}+i^2\frac{1}{n^2}$

$=\frac{2}{n}\sum_i^n 1+\frac{3}{n^2}\sum_i^n i+\frac{1}{n^3}\sum_i^n i^2$

$=\frac{2}{n}n+\frac{3}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=2+\frac{3n+3}{2n}+\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$

$=2+\frac{3}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$

$=\frac{7}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$

(F) $\int_1^2 (x^2+x)dx=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{7}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})$

$=\frac{7}{2}+0+\frac{1}{3}+0+0=\frac{23}{6}$

$$(5)\int_0^3 x^3\,dx$$

$$a=0\,,\ b=3\,,\ f(x)=x^3$$

$$(A)\ \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$$

$$(B)\ x_i=a+i\Delta x=0+i\frac{3}{n}=i\frac{3}{n}$$

$$(C)\ f(x_i)=f\left(i\frac{3}{n}\right)=\left(i\frac{3}{n}\right)^3=i^3\frac{27}{n^3}$$

$$(D)\sum_i^n f(x_i)\ \Delta x=\sum_i^n\left(i^3\frac{27}{n^3}\right)\frac{3}{n}$$

$$(E)\sum_i^n f(x_i)\ \Delta x=\sum_i^n i^3\frac{81}{n^4}$$

$$=\frac{81}{n^4}\sum_i^n i^3=\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$=\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{81}{n^4}\,\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$$

$$=\frac{(81n^2+162\,n+81)}{4n^2}=\frac{81}{4}+\frac{81}{2n}+\frac{81}{4n^2}$$

$$(F)\int_0^3 x^3\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{2n}+\frac{81}{4n^2}\right)$$

$$=\frac{81}{4}+0+0=\frac{81}{4}$$

(6) $\int_0^3 2 \, dx$

$a = 0$, $b = 3$, $f(x) = 2$

(A) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

(B) $x_i = a + i\Delta x = 0 + i\frac{3}{n} = i\frac{3}{n}$

(C) $f(x_i) = f(i\frac{3}{n}) = 2$

(D) $\sum_{i}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i}^{n} 2\ \frac{3}{n}$

(E) $S_n = \frac{6}{n}\sum_{i}^{n} 1 = \frac{6}{n} n = 6$

(F) $\int_0^3 2 \, dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (6) = 6$

التـــكـــامـل المحدد لدالــة الــقــيـمـة الـمطـلـقة

عند إيجاد التكامل المحدد لدالة القيمة المطلقة يتم إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة بأكثرمن قاعدة لمعرفة متى تكون سالبة ومتى تكون موجبة وبناء على ذلك نكامل القسم السالب من الدالة لوحده و القسم الموجب لوحده وكل هذا مشروط بحدود التكامل هل تقع في القسم الموجب فقط أو القسم السالب فقط أوتقع في كليهما

$$(1)\ \int_{-1}^{1} |x|\, dx$$

$$F(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} ----------\quad +++++++++ \\ \longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow \\ -1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{0}^{1} = [-\frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2] + [\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(2) $\int_{-2}^{0} |x+1|\, dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+1 & , x \geq -1 \\ -(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$

- - - - - - - - - - - + + + + + + + + +

-2 -1 0

$$\int_{-2}^{0} |x+1|\, dx = \int_{-2}^{-1} (-x-1)\, dx + \int_{-1}^{0} (x+1)\, dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= [-\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1)] - [-\frac{1}{2}(-2)^2 + 2] + [\frac{1}{2}(0)^2 + (0)] - [\frac{1}{2}(-1)^2 -$$

$$= [-\frac{1}{2}+1] - [-2+2] - [\frac{1}{2}-1] = 1$$

(3) $\int_{0}^{1} |x+2|\, dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+2 & , x \geq -2 \\ -(x+2) & , x < -2 \end{cases}$$

- - - - - - - - - - - + + + + + + + + +

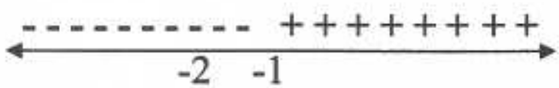
-2 0 1

$$\int_{0}^{1}|x+2|\,dx=\int_{0}^{1}(x+2)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{0}^{1}=\left[\frac{1}{2}(1)^2+2(1)\right]-\left[\frac{1}{2}(0)^2+2(0)\right]=\frac{5}{2}$$

(4) $\int_{-2}^{-1}|x+1|\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+1 & ,\ x\geq -1 \\ -(x+1) & ,\ x<-1 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{-1}|x+1|\,dx=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-2}^{-1}=\left[-\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)\right]-\left[-\frac{1}{2}(-2)^2+2\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{2}+1\right]-\left[-2+2\right]=\frac{1}{2}$$

(5) $\int_{-2}^{1}(|x|+2)\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} ----------\quad +++++++++ \\ \longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow \\ -2 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\int_{-2}^{1}(|x|+2)\,dx=\int_{-2}^{1}|x|dx+\int_{-2}^{1}2\,dx=\int_{-2}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{-2}^{1}2\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}+2x\Big|_{-2}^{1}$$

$$=[-\frac{1}{2}(0)^2+\frac{1}{2}(-2)^2]+[\frac{1}{2}(1)^2-\frac{1}{2}(0)^2]+[2(1)-2(-2)]$$

$$=2+\frac{1}{2}+6=\frac{17}{2}$$

(6) $\int_{-2}^{-1}(|x+1|+2x)\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+1 & , x\geq -1 \\ -(x+1) & , x<-1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} ----------\quad +++++++++ \\ \longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow \\ -2 \quad -1 \end{array}$$

$$\int_{-2}^{-1}(|x+1|+2x)\,dx=\int_{-2}^{-1}|x+1|\,dx+\int_{-2}^{-1}2x\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-2}^{-1}2x\,dx$$

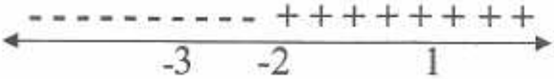
$$=(-\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_{-2}^{-1}+x^2\Big|_{-2}^{-1}$$

$$=[-\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)]-[-\frac{1}{2}(-2)^2+2]+[(-1)^2-(-2)^2]$$

$$=[-\frac{1}{2}+1]-[-2+2]-3=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

(7) $\int_{-3}^{1}x|x+2|\,dx$

$$F(x)=\begin{cases} x+2 & , \ x\geq -2 \\ -(x+2) & , \ x<-2 \end{cases}$$



$$\int_{-3}^{1}x|x+2|\,dx=\int_{-3}^{-2}-x(x+2)\,dx+\int_{-2}^{1}x(x+2)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(-x^2-2x)\,dx+\int_{-2}^{1}(x^2+2x)\,dx=(-\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_{-3}^{-2}+(\frac{1}{3}x^3+x^2)\Big|_{-2}^{1}=-\frac{4}{3}$$

(8) $\int_{-2}^{3} \left| x^2 - 1 \right| dx$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \; x \geq 1 \;\; or \;\; x < -1 \\ -(x^2 - 1) & , \; -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

+ + + + + + + - - - - + + + + + + +

-2   -1   1   3

$$\int_{-2}^{3} \left| x^2 - 1 \right| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx + \int_{-1}^{1} -(x^2 - 1)\, dx + \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Bigg|_{1}^{3} \approx 9.33$$

نظرية القيمة المتوسطة

F(X) دالة مستمرة على الفترة المغلقة [a,b] فإن هناك على

c في الفترة المفتوحة(a,b) بحيث يحقق هذا العدد :

$$F(c)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}F(x)\,dx$$

:- أوجد قيم c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل المحدد:

$$(1)\ F(x)=x^{2}\quad ,x\in[1,2]$$

$$a=1\ ,\ b=2$$

$$F(c)=c^{2}$$

$$c^{2}=\frac{1}{2-1}\int_{1}^{2}x^{2}\ dx$$

$$c^{2}=\frac{1}{3}x^{3}\Big[_{1}^{2}$$

$$c^{2}=\frac{1}{3}(2)^{3}-\frac{1}{3}(1)^{3}$$

$$c^{2}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\ \Rightarrow c^{2}=\frac{7}{3}$$

$$c=\sqrt{\frac{7}{3}}\in(1,2)$$

$$c=-\sqrt{\frac{7}{3}}\notin(1,2)$$

2) $F(x) = 2x - 3 \quad , x \in [1,4]$

$a = 1 \;\; , \; b = 4$

$F(c) = 2c - 3$

$$2c - 3 = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (2x-3)\; dx$$

$$2c - 3 = \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)\Big|_1^4$$

$$2c - 3 = \left[\frac{1}{3}(4)^2 - 4\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^2 - 1\right]$$

$$2c - 3 = 2 \;\; \therefore c = \frac{5}{2}$$

$$c = \frac{5}{2} \in (1,4)$$

3) $F(x) = x(3-x) \quad , x \in [0,3]$

$a = 0 \;\; , \; b = 3$

$F(c) = c(3-c) = 3c - c^2$

$$3c - c^2 = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (3x - x^2)\; dx$$

$$3c - c^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3$$

$$3c - c^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right]$$

$$3c - c^2 = \frac{3}{2} \;\; \rightarrow \;\; 2c^2 - 6c + 3 = 0$$

$a = 2$, $b = -6$, $c = 3$

$$c = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$c = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \in [0,3]$$

$$c = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0,3)$$

(4) $F(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, e]$

$a = 1$, $b = e$

$$F(c) = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} (\ln |x|) \Big]_1^e$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} [\ln e - \ln 1] \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} [1 - 0]$$

$\therefore\ c = e - 1$

$c = e - 1 \in (1, e)$

قوانين تكامل الدوال المثلثية

(1) $\int \sin F(x) \;\; F'(x)\, dx = -\cos F(x) + c$

(2) $\int \cos F(x) \;\; F'(x)\, dx = \sin F(x) + c$

(3) $\int \tan F(x) \;\; F'(x)\, dx = \ln\left|\sec F(x)\right| + c$

(4) $\int \cot F(x) \;\; F'(x)\, dx = \ln\left|\sin F(x)\right| + c$

(5) $\int \sec F(x) \;\; F'(x)\, dx = \ln\left|\sec F(x) + \tan F(x)\right| + c$

(6) $\int \csc F(x) \;\; F'(x)\, dx = \ln\left|\csc F(x) - \cot F(x)\right| + c$

$\quad or \qquad = -\ln\left|\csc F(x) + \cot F(x)\right| + c$

(7) $\int \sec F(x) \tan F(x) \;\; F'(x)\, dx = \sec F(x) + c$

(8) $\int \csc F(x) \;\cot F(x) \;\; F'(x)\, dx = -\csc F(x) + c$

(9) $\int \csc^2 F(x) \;\; F'(x)\, dx = -\cot F(x) + c$

(10) $\int \sec^2 F(x) \;\; F'(x)\, dx = \tan F(x) + c$

قوانين حساب المثلثات(المتطابقات)

(1) $\sin^2 ax+\cos^2 ax=1$

(2) $\sec^2 ax=1+\tan^2 ax$

(3) $\csc^2 ax=1+\cot^2 ax$

(4) $\sin^2 ax=\frac{1}{2}(1-\cos 2ax)$

(5) $\cos^2 ax=\frac{1}{2}(1+\cos 2ax)$

(6) $\sin 2ax=2\sin ax\ \cos ax$

(7) $\cos 2ax=\ \cos^2 ax-\sin^2 ax$

(8) $\sin ax=\frac{1}{\csc ax}$

(9) $\cos ax=\frac{1}{\sec ax}$

(10) $\tan ax=\frac{1}{\cot ax}$

(11) $\cot ax=\frac{\cos ax}{\sin ax}$

(12) $\tan ax=\frac{\sin ax}{\cos ax}$

(13) $\sin ax\ \cos bx=\frac{1}{2}[\sin(ax+bx)+\sin(ax-bx)]$

(14) $\cos ax\ \cos bx=\frac{1}{2}[\cos(ax+bx)+\cos(ax-bx)]$

(15) $\sin ax\ \sin bx=\frac{1}{2}[\cos(ax-bx)-\cos(ax+bx)]$

(16) $\sin(A\pm B)=\sin A\ \cos B\pm\cos A\sin B$

(17) $\cos(A\pm B)=\cos A\ \cos B\mp\sin A\sin B$

مسـائـل متنوعـة على التكـامـل

1) $\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

2) $\int \cos\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}x + c$

3) $\int \tan\frac{1}{3}x\, dx = 3\int \frac{1}{3}\tan\frac{1}{3}x\, dx = 3\ln\left|\sec\frac{1}{3}x\right| + c$

4) $\int x\tan x^2 \sec x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2x\tan x^2 \sec x^2 dx = \frac{1}{2}\sec x^2 + c$

5) $\int 3^{2x}\cot 3^{2x}\csc 3^{2x}\, dx = \frac{1}{2\ln 3}\int 3^{2x}\, 2(\ln 3)\cot 3^{2x}\csc 3^{2x}\, dx$

$= -\frac{1}{2\ln 3}\csc 3^{2x} + c$

6) $\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \sec(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\ln\left|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}\right| + c$

7) $\int e^{3x}\csc^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\csc^2 e^{3x}\, dx = -\frac{1}{3}\cot e^{3x} + c$

8) $\int e^{x}\sec^2 e^{x}\, dx = \tan e^{x} + c$

(9) $\int \frac{\sec 5x \tan 5x}{\sqrt{3+\sec 5x}}\,dx = \frac{1}{5}\int 5(\sec 5x \tan 5x)(3+\sec 5x)$

$= \frac{2}{5}(3+\sec 5x)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{3+\sec 5x} + c$

(10) $\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(11) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(\cos 2x)(1+\sin 2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+\sin 2x} + c$

(12) $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$

(13) $\int \sin 2x \cos^3 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int -2\sin 2x(\cos 2x)^3\,dx$

$= -\frac{1}{8}\cos^4 2x + c$

(14) $\int \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}}\,dt = -\int -\sin t\,(\cos t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = -2(\cos t)^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\sqrt{\cos t} + c$

(15) $\int \sqrt{x}\sin x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin x^{\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{2}{3}\cos x^{\frac{3}{2}} + c$

(16) $\int \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}dt = -\int -t^{-2}\sin t^{-1}\,dt = \cos t^{-1} + c$

(17) $\int e^{\cos t}\sin t\,dt = -\int -e^{\cos t}\sin t\,dt = -e^{\cos t} + c$

(18) $\int \cot 2x\csc^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int -2\cot 2x\csc^2 2x dx$

$= -\frac{1}{4}\cot^2 2x + c$

(19) $\int \cot^4 3x\csc^2 3x\,dx = -\frac{1}{3}\int -3\cot^4 3x\csc^2 3x\,dx$

$= -\frac{1}{15}\cot^5 3x + c$

(20) $\int \tan 5x\sec^2 5x\,dx = \frac{1}{5}\int 5\tan 5x\sec^2 5x\,dx$

$= \frac{1}{10}\tan^2 5x + c$

(21) $\int \tan^4 3x\sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3\tan^4 3x\sec^2 3x\,dx$

$= \frac{1}{15}\tan^5 3x + c$

(22) $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}\,dx = \int e^x \sec^2 e^x \; dx = \tan e^x + c$

(23) $\int \frac{x}{\sin^2 x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x \csc^2 x^2 \; dx = -\frac{1}{2}\cot x^2 + c$

(24) $\int \frac{x\cos x + 2\cos x}{x+2}\,dx = \int \frac{\cos x\,(x+2)}{x+2}\,dx$

$= \int \cos x \, dx = \sin x + c$

(25) $\int \cos x \sec x \, dx = \int \cos x \frac{1}{\cos x}\,dx$

$= \int dx = x + c$

(26) $\int \sin x \sec x \, dx = \int \sin x \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c$

(27) $\int \frac{\cot x \csc x}{1+\csc x}\,dx = -\int \frac{-\cot x \csc x}{1+\csc x}\,dx = -\ln|1+\csc x| + c$

(28) $\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx = -\cos(\ln x) + c$

(29) $\int \frac{\sin 2x}{2+\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{2+\cos 2x}\;dx = -\frac{1}{2}\ln|2+\cos 2x| + c$

(30) $\int \sec^2 2x \tan^6 2x \, dx = \frac{1}{2}\int 2\sec^2 2x \tan^6 2x \, dx$

$= \frac{1}{14}\tan^7 2x + c$

(31) $\int (1+\cos 8x)^3 \sin 8x \, dx = -\frac{1}{8}\int -8(1+\cos 8x)^3 \sin 8x \, dx$

$= -\frac{1}{32}(1+\cos 8x)^4 + c$

(32) $\int \sqrt{1+\sin 2x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}} 2\cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{3}(1+\sin 2x)^{\frac{3}{2}} + c$

(33) $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx = -\int \frac{-\tan x}{\ln(\cos x)} dx = -\ln\left|\ln(\cos x)\right| + c$

(34) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)} dx = \ln\left|\ln(\sin x)\right| + c$

(35) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx =$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + c$

(36) $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx = \int \cot x \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int -\cot x \csc^2 x \, dx$

$= -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$

(37) $\int \frac{\sec x}{\tan x}\,dx = \int \sec x \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\ \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$= \int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

(38) $\int \frac{\csc x}{\cot x}\,dx = \int \csc x \frac{1}{\cot x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\ \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(39) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \sin^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2 + c$

(40) $\int \frac{\cos^{-1} 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \cos^{-1} 3x \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

$= -\frac{1}{6}(\cos^{-1} 3x)^2 + c$

(41) $\int \frac{(\tan^{-1} 2x)^3}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (\tan^{-1} 2x)^3 \frac{2}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}(\tan^{-1} 2x)^4 + c$

(42) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^5 2x}\,dx = \int \sin 2x\ (\cos 2x)^{-5}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int -2\sin 2x\ (\cos 2x)^{-5}\,dx = \frac{1}{8}(\cos 2x)^{-4} + c$

$= \frac{1}{8\cos^4 2x} + c$

قـوانـيـن تـكـامـل الـدوال الـزائـديـة

1) $\int \sinh F(x)\ F'(x)\,dx = \cosh F(x) + c$

2) $\int \cosh F(x)\ F'(x)\,dx = \sinh F(x) + c$

3) $\int \tanh F(x)\ F'(x)\,dx = \ln|\cosh F(x)| + c$

4) $\int \coth F(x)\ F'(x)\,dx = \ln|\sinh F(x)| + c$

5) $\int \operatorname{sech} F(x) \tanh F(x)\ F'(x)\,dx = -\operatorname{sech} F(x) + c$

6) $\int \operatorname{csch} F(x) \coth F(x)\ F'(x)\,dx = -\operatorname{csch} F(x) + c$

7) $\int \operatorname{csch}^2 F(x)\ F'(x)\,dx = -\coth F(x) + c$

8) $\int \operatorname{sech}^2 F(x)\ F'(x)\,dx = \tanh F(x) + c$

متطابقات الدوال الزائدية

(1) $\cosh^2 ax - \sinh^2 ax = 1$

(2) $\operatorname{sech}^2 ax = 1 - \tanh^2 ax$

(3) $\operatorname{csch}^2 ax = \coth^2 ax - 1$

(4) $\sinh^2 ax = \frac{1}{2}(\cosh 2ax - 1)$

(5) $\cosh^2 ax = \frac{1}{2}(\cosh 2ax + 1)$

(6) $\sinh 2ax = 2\sinh ax \cosh ax$

(7) $\cosh 2ax = \cosh^2 ax + \sinh^2 ax$

(8) $\sinh ax = \frac{1}{\operatorname{csch} ax}$

(9) $\cosh ax = \frac{1}{\operatorname{sech} ax}$

(10) $\tanh ax = \frac{1}{\coth ax}$

(11) $\coth ax = \frac{\cosh ax}{\sinh ax}$

(12) $\tanh ax = \frac{\sinh ax}{\cosh ax}$

(13) $\sinh ax \cosh bx = \frac{1}{2}[\sinh(ax+bx) + \sinh(ax-bx)]$

(14) $\cosh ax \cosh bx = \frac{1}{2}[\cosh(ax+bx) + \cosh(ax-bx)]$

(15) $\sinh ax \sinh bx = \frac{1}{2}[\cosh(ax+bx) - \cosh(ax-bx)]$

مسائل متنوعة على تكامل الدوال الزائدية

(1) $\int \sinh 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sinh 2x\, dx = \frac{1}{2}\cosh 2x + c$

(2) $\int \cosh\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}\cosh\frac{2}{3}x\, dx = \frac{3}{2}\sinh\frac{2}{3}x + c$

(3) $\int \tanh\frac{1}{3}x\, dx = 3\int \frac{1}{3}\tanh\frac{1}{3}x\, dx = 3\ln\left|\cosh\frac{1}{3}x\right| + c$

(4) $\int \frac{\cosh 2x}{\sqrt{1+\sinh 2x}}\, dx = \frac{1}{2}\int 2(\cosh 2x)(1+\sinh 2x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= (1+\sinh 2x)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+\sinh 2x} + c$

(5) $\int \frac{\cosh^{-1}3x}{\sqrt{9x^2-1}}\, dx = \frac{1}{3}\int \cosh^{-1}3x\, \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}\, dx$

$= \frac{1}{6}(\cosh^{-1}3x)^2 + c$

(6) $\int \cosh^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cosh 4x)\, dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{8}\int 4\cosh 4x\, dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sinh 4x + c$

(7) $\int \tanh^2 x\, dx = \int (1-\operatorname{sech}^2 x)\, dx = \int dx - \int \operatorname{sech}^2 x\, dx$

$= x - \tanh x + c$

(8) $\int \coth^2 x\, dx = \int (\operatorname{csch}^2 x + 1)\, dx = \int \operatorname{csch}^2 x\, dx + \int dx$

$= -\coth x + x + c$

(9) $\int \dfrac{dx}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{1}{4} \int \left(\dfrac{2}{e^x - e^{-x}} \right)^2 dx = \dfrac{1}{4} \int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\dfrac{1}{4} \coth x + c$

(10) $\int \dfrac{dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{1}{4} \int \left(\dfrac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^2 dx = \dfrac{1}{4} \int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \dfrac{1}{4} \tanh x + c$

(11) $\int \operatorname{sech} x\, dx = \int \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \dfrac{2e^x}{e^x e^x + e^x e^{-x}} dx$

$= \int \dfrac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2 \int \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2\tan^{-1}(e^x) + c$

(12) $\int \operatorname{csch} x\, dx = \int \operatorname{csch} x \dfrac{\operatorname{csch} x - \coth x}{\operatorname{csch} x - \coth x} dx$

$\int \dfrac{\operatorname{csch}^2 x - \operatorname{csch} x \coth x}{\operatorname{csch} x - \coth x} dx = \ln\left|\operatorname{csch} x - \coth x\right| + c$

(13) $\int \tanh x\, dx = \int \dfrac{\sinh x}{\cosh x} dx = \ln\left|\cosh x\right| + c$

(14) $\int \coth x\, dx = \int \dfrac{\cosh x}{\sinh x} dx = \ln\left|\sinh x\right| + c$

(15) $\int \sinh 2x \sinh 3x \, dx$

$$= \int \frac{1}{2}[\cosh(2x+3x) - \cosh(2x-3x)]\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}[\cosh(5x) - \cosh(-x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{10}\int 5\cosh(5x)\, dx - \frac{1}{2}\int \cosh(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{10}\sinh 5x - \frac{1}{2}\sinh x + c$$

(16) $\int \frac{(1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sech} x \operatorname{csch} x}\, dx = \int (1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\operatorname{sech} x \operatorname{csch} x}$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}}\, 2\cosh x \sinh x\, dx = \frac{1}{3}(1+\sinh^2 x)^{\frac{3}{2}} + c$$

(17) $\int \frac{1+\cosh 2x}{\sinh^2 2x}\, dx = \int \frac{1}{\sinh^2 2x} dx + \int \frac{\cosh 2x}{\sinh^2 2x}\, dx$

$$= \int \operatorname{csc}h^2 2x\, dx + \int \frac{\cosh 2x}{\sinh 2x} \cdot \frac{1}{\sinh 2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\operatorname{csc}h^2 2x\, dx + \frac{1}{2}\int 2\coth 2x \operatorname{csc}h 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\coth 2x - \frac{1}{2}\operatorname{csc}h 2x + c$$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}(\cosh^{-1} 3x)} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}}{(\cosh^{-1} 3x)}\, dx$

$$= \frac{1}{3}\ln(\cosh^{-1} 3x) + c$$

طـرق الـتـكـامـل

طـريـقة الـتـكـامـل بالـتـعـويـض:-

عند استخدام طريقة التعويض لإيجاد تكامل دالة نتبع الآتي :-

(1) نفرض أن جزءاً من مسألة التكامل يساوي متغير وليكن u أي أن :-
u=مقدار

(2) نفاضل الفرضية السابقة بالنسبة لـــ x أي أن:-
du=تفاضل المقدار dx

(3) نعوض بالفرضية وتفاضلها **du, u** في مسألة التكامل

(4) نكامل المسألة بالنسبة لـ **u** ويجب أن تكون المسألة قبل تكاملها بدلالة **u**

(5) بعد اجراء عملية التكامل نعوض بقيمة **u**

ويعتمد نجاح الطالب في اجراء عملية التكامل على قدرته في تحديد جزء المسالة الذي يجب أن يفرضه **u** فإذا حدد **u** بمهارة فسيكون من السهل اجراء عملية التكامل

بـــعــض الـــضوابـــط لاخـــتـــيـــار u :-

(1) إذا كانت مسألة التكامل على أحد صور القوانين السابقة ففي هذه الحالة نفرض أن :- u = الدالة

$\int [F(x)]^n F'(x)\, dx$ نفرض أن u=F(x)

$\int e^{F(x)} F'(x)\, dx$ نفرض أن u=F(x)

$\int a^{F(x)} F'(x)\, dx$ نفرض أن u=F(x)

$\int \sin F(x)\, F'(x)\, dx$ نفرض أن u=F(x)

وهكذا بقية تكامل الدوال المثلثية والزائدية

$\int \frac{F'(x)}{[F(x)]^2+1}\, dx$ نفرض أن u=F(x)

وهكذا بقية تكامل مشتقة الدوال المثلثية والزائدية العكسية

(2) إذا كانت مسألة التكامل مرفوعة لأس n ففي هذه الحالة

نفرض أن :-   ما بداخل القوس = u

نفرض أن u=F(x)

$$\int [F(x)]^{n} g(x)\, dx$$

(3) إذا كانت مسألة التكامل دالة قياسية ففي هذه الحالة

نفرض أن :-   مقام الكسر = u

نفرض أن u=F(x)

$$\int \frac{g(x)}{F(x)}\, dx$$

مسائل متنوعة على طريقة التكامل بالتعويض

(1) $\int [x^2+1]^9 x \, dx = \frac{1}{2} \int [x^2+1]^9 \, 2x \, dx$

(A) نفرض أن $u = x^2+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = 2x \, dx$

(C) نعوض بـــ $u = x^2+1$, $du = 2x \, dx$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2} \int u^9 \, du = \frac{1}{20} u^{10} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x^2+1$

$$= \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + c$$

(2) $\int [\frac{1}{x}+1]^5 \frac{1}{x^2} \, dx = -\int [\frac{1}{x}+1]^5 \frac{-1}{x^2} \, dx$

(A) نفرض أن $u = \frac{1}{x}+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = -\frac{1}{x^2} \, dx$

(C) نعوض بـــ $u = \frac{1}{x}+1$, $du = -\frac{1}{x^2} \, dx$ في مسألة التكامل

$$-\int u^5 \, du = -\frac{1}{6} u^6 + c$$

(D) نعوض بـــ $u = \frac{1}{x}+1$

$$= -\frac{1}{6}(\frac{1}{x}+1)^6 + c$$

(3) $\int \frac{x}{(x-1)^2}\, dx$

(A) نفرض أن $u = x-1$ ومنها $x = u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــ x $du = dx$

(C) نعوض بــ $dx = du$, $u = x-1$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{u+1}{u^2}\, du = \int (\frac{1}{u} + u^{-2})\, du$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{u} + c$$

(D) نعوض بــ $u = x-1$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

(4) $\int \frac{e^{4t}}{(1+e^{2t})^{\frac{2}{3}}}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2t} e^{2t}}{(1+e^{2t})^{\frac{2}{3}}}\, dt$

(A) نفرض أن $u = 1+e^{2t}$ ومنها $e^{2t} = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــ t $du = 2e^{2t}\, dt$

(C) نعوض بــ $u = 1+e^{2t}$, $du = 2e^{2t}\, dt$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2} \int \frac{u-1}{u^{\frac{2}{3}}}\, du \frac{1}{2} \int (u-1) u^{-\frac{2}{3}}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int (u^{\frac{1}{3}} - u^{-\frac{2}{3}})\, du = \frac{3}{8} u^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2} u^{\frac{1}{3}} + c$$

(D) نعوض بــ $u = e^{2t}+1$

$$= \frac{3}{8}(e^{2t}+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}(e^{2t}+1)^{\frac{1}{3}} + c$$

$$(5) \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x^2\, x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

(A) نفرض أن $u = 1 + x^2$ ومنها $x^2 = u - 1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = 2x\, dx$

(C) نعوض بــ$u = 1 + x^2$, $du = 2x\, dx$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^2}\, du = \frac{1}{2}\int (u-1)u^{-2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u} - u^{-2}\right) du = \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + c$$

(D) نعوض بــ $u = x^2 + 1$ ، $= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2x^2+2} + c$

$$(6) \int x\,[x+2]^7\, dx$$

(A) نفرض أن $u = x + 2$ ومنها $x = u - 2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = dx$

(C) نعوض بــ $u = x + 2$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int u^7 (u-2)\, du = \int (u^8 - 2u^7)\, du$$

$$= \frac{1}{9}u^9 - \frac{1}{4}u^8 + c$$

(D) نعوض بــ $u = x + 2$ $= \frac{1}{9}(x+2)^9 - \frac{1}{4}(x+2)^8 + c$

(7) $\int x^2 [x+1]^7 \ dx$

(A) نفرض أن $u = x+1$ ومنها $x = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $\quad du = dx$

(C) نعوض بـــ $u = x+1 \quad , \quad dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int u^7 (u-1)^2 \ du = \int u^7 (u^2 - 2u + 1)\, du$$
$$= \int (u^9 - 2u^8 + u^7)\, du = \frac{1}{10} u^{10} - \frac{2}{9} u^9 + \frac{1}{8} u^8 + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x+1$

$$= \frac{1}{10}(x+1)^{10} - \frac{2}{9}(x+1)^9 + \frac{1}{8}(x+1)^8 + c$$

(8) $\int [1 - x^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{2}} \ dx$

(A) نفرض أن $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$ ومنها $x^{\frac{1}{3}} = 1 - u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $\quad du = -\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx$

لاحظ أن:- $\quad dx = -3 x^{\frac{2}{3}} \ du \Leftarrow dx = -3 (x^{\frac{1}{3}})^2 \ du$

$$dx = -3(1-u)^2 \ du$$

(C) نعوض بـــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}} \ , \ dx = -3(1-u)^2 \ du$ في مسألة التكامل

$$= -3 \int u^{\frac{3}{2}} (1-u)^2 \ du$$

$$=-3\int u^{\frac{3}{2}}(1-2u+u^2)\,du=-3\int(u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{5}{2}}+u^{\frac{7}{2}})\,du$$

$$=-\frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{12}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{9}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1-x^{\frac{1}{3}}$

$$=-\frac{6}{5}(1-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{5}{2}}+\frac{12}{7}(1-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{3}(1-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{9}{2}}+c$$

(9) $\int\sqrt{x+2}\,dx$

(A) نفرض أن $u=x+2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u=x+2$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int\sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=x+2$

$$=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+c$$

(10) $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$

(A) نفرض أن $u=x+1$ ومنها $x=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u=x+1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int u^{\frac{1}{2}}(u-1)^2 du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}(u^2-2u+1)du = \int (u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x+1$

$$= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

A(11) $\int x\sqrt{2x-3}\ dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{2x-3}\ dx$

(A) نفرض أن $u = 2x-3$ ومنها $x = \dfrac{u+3}{2}$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = 2dx$

(C) نعوض بـــ $u = 2x-3$, $du = 2dx$ في مسألة التكامل

$$\int \left(\frac{u+3}{2}\right) u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{1}{2}})du = \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـ $u = 2x-3$

$$= \frac{1}{10}(2x-3)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c$$

(12) $\int e^{2x}\sqrt{e^x+1}\ dx = \int e^x\sqrt{e^x+1}\ e^x dx$

(A) نفرض أن $u = e^x+1$ ومنها $e^x = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $\quad du = e^{x}\, dx$

(D) نعوض بـــ $u = e^{x}+1$, $du = e^{x}\, dx$ في مسألة التكامل

$$\int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = e^{x}+1$

$$= \frac{2}{5}(e^{x}+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(e^{x}+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(13) $\int x^{3}\sqrt{x+2}\; dx$

(A) نفرض أن $u = x+2$ ومنها $x = u-2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $\quad du = dx$

(C) نعين dx:- $\quad dx = du$

(D) نعوض بـــ $u = x+2$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int u^{\frac{1}{2}}(u-2)^{3}\, du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}(u^{3} - 6u^{2} + 12u - 8)du = \int (u^{\frac{7}{2}} - 6u^{\frac{5}{2}} + 12u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}})du$$

$$= \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}} - \frac{12}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{24}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(E) نعوض بـــ $u = x+2$

$$= \frac{2}{9}(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{12}{7}(x+2)^{\frac{7}{2}} + \frac{24}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(14)\ \int 3^{2x}\sqrt{3^x+1}\ dx = \frac{1}{\ln 3}\int 3^x\sqrt{3^x+1}\ 3^x(\ln 3)dx$$

(A) نفرض أن $u = 3^x + 1$ ومنها $3^x = u - 1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = 3^x \ln 3\ dx$

(C) نعوض بــ $u = 3^x + 1$, $du = 3^x \ln 3\ dx$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{\ln 3}\int (u-1)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})du = \frac{2}{5\ln 3}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3\ln 3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بــ $u = 3^x + 1$

$$= \frac{2}{5\ln 3}(3^x + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3\ln 3}(3^x + 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(15)\ \int 2x^7\sqrt{x^4-1}\ dx = \frac{1}{2}\int 4x^3\sqrt{x^4-1}\ x^4\,dx$$

(A) نفرض أن $u = x^4 - 1$ ومنها $x^4 = u + 1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = 4x^3\ dx$

(C) نعوض بــ $u = x^4 - 1$ $, du = 4x^3\ dx$ في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u+1)du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})du = \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بــ $u = x^4 - 1$

$$= \frac{1}{5}(x^4 - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}(x^4 - 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(16)\int e^{3x}\sqrt{e^{x}+1}\;dx=\int e^{x}\sqrt{e^{x}+1}\;e^{2x}dx$$

(A) نفرض أن $u=e^{x}+1$ ومنها $e^{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = e^{x}\,dx$

(C) نعوض بــ $u=e^{x}+1$, $du = e^{x}\,dx$ في مسألة التكامل

$$=\int(u-1)^{2}\,u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\int(u^{2}-2u+1)u^{\frac{1}{2}}du=\int(u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du$$

$$=\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(E) نعوض بــ $u=e^{x}+1$

$$=\frac{2}{7}(e^{x}+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(e^{x}+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(e^{x}+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$(17)\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\;dx$$

(A) نفرض أن $u=1+\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

لاحظ أنّ $dx=2\sqrt{x}\,du \Leftarrow dx=2(u-1)\,du$

(C) نعوض بــ $u=1+\sqrt{x}$, $dx=2(u-1)du$ في مسألة التكامل

$$\int 2u^{\frac{1}{2}}(u-1)\,du=2\int(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})du$$

$$=\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1+\sqrt{x}$

$$= \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + c$$

(18) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\, dx$

(A) نفرض أن $u = 1-x$ ومنها $x = 1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = -dx$

(C) نعوض بـــ $u = 1-x$, $dx = -du$ في مسألة التكامل

$$-\int \frac{1+1-u}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = -\int \frac{2-u}{u^{\frac{1}{2}}}\, du$$

$$= -\int (2-u)u^{-\frac{1}{2}}\, du = -\int (2u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\, du$$

$$= -4u^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1-x$

$$= -4(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -4\sqrt{1-x} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} + c$$

(19) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$

(A) نفرض أن $u = x+1$ ومنها $x = u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u = x+1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = \int (u-1)u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})\, du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = x+1$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + c$$

$$(20) \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^3}}\, dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2x^3}{\sqrt{4-x^3}}\, dx$$

(A) نفرض أن $u = 4 - x^3$ ومنها $x^3 = 4 - u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $\boxed{du = -3x^2dx}$

(C) نعوض بـــ $u = 4 - x^3$, $du = -3x^2dx$ في مسألة التكامل

$$-\frac{1}{3}\int \frac{4-u}{u^{\frac{1}{2}}}\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\int (4-u)u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\int (4u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\, du = -\frac{8}{3}u^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 4 - x^3$

$$=-\frac{8}{3}(4-x^3)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{9}(4-x^3)^{\frac{3}{2}}+c$$
$$=-\frac{8}{3}\sqrt{4-x^3}+\frac{2}{9}\sqrt{(4-x^3)^3}+c$$

$$(21)\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,dx=\int\frac{e^x e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,dx$$

(A) نفرض أن $u=1+e^x$ ومنها $e^x=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = e^x dx$

(C) نعوض بـــ $u=1+e^x$, $du = e^x dx$ في مسألة التكامل

$$\int\frac{u-1}{u^{\frac{1}{3}}}\,du$$
$$=\int(u-1)u^{-\frac{1}{3}}\,du$$
$$=\int(u^{\frac{2}{3}}-u^{-\frac{1}{3}})\,du=\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+e^x$

$$=\frac{3}{5}(1+e^x)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(1+e^x)^{\frac{2}{3}}+c$$
$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{(1+e^x)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+e^x)^2}+c$$

$$(22)\int\frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

(A) نفرض أن $u=1+\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

لا أن:- $dx = 2\sqrt{x}\, du \Leftarrow dx = 2(u-1)\, du$

(C) نعوض بـــ $u = 1+\sqrt{x}$, $dx = 2(u-1)du$ في مسألة التكامل

$$\int \frac{2u-2}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = \int (2u-2)u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int (2u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}})\, du = \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1+\sqrt{x}$

$$= \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} - 4(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$$

(23) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}\sqrt{1+x^{\frac{4}{5}}}} = \frac{5}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^{\frac{4}{5}}}} \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} dx$

(A) نفرض أن $u = 1 + x^{\frac{4}{5}}$ ومنها $x^{\frac{4}{5}} = u - 1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = \dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}\, dx$

(C) نعوض بـــ $u = 1 + x^{\frac{4}{5}}$ ، $dx = \dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{5}}\, du$ في مسألة التكامل

$$= \frac{5}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{5}{2}u^{\frac{1}{2}} + c$$

(D) نعوض بـــ $u = 1 + x^{\frac{4}{5}}$

$$=\frac{5}{2}(1+x^{\frac{4}{5}})^{\frac{1}{2}}+c=\frac{5}{2}\sqrt{1+x^{\frac{4}{5}}}+c$$

$$(24)\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(A) نفرض أن $u=1+x^2$ ومنها $x^2=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=2x\,dx$

(C) نعوض بـــ $u=1+x^2$ $du=2x\,dx$, في مسألة التكامل

$$\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)^2}{u^{\frac{1}{2}}}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{u^2-2u+1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int(u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})\,du=\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+x^2$

$$=\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+\sqrt{1+x^2}+c$$

$$(25)\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{x^2-1}\,2xdx$$

(A) نفرض أن $u=x^2-1$ ومنها $x^2=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=2x\,dx$

(C) نعوض بـــ $u=x^2-1$, $du=2x\,dx$ في مسألة التكامل

$$=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u+1)du$$

$$=\frac{1}{2}\int(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du=\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=x^2-1$

$$=\frac{1}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+c$$

(26) $\int x\sqrt{x-1}\ dx$

(A) نفرض أن $u=x-1$ ومنها $x=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u=x-1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$=\int(u+1)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\int(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

(D) نعوض بـــ $u=x-1$

$$=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+c$$

(27) $\int x\ \sqrt[5]{x-1}\ dx$

(A) نفرض أن $u=x-1$ ومنها $x=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du = dx$

(C) نعوض بـــ $u=x-1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$=\int (u+1)u^{\frac{1}{5}}\,du$$

$$=\int (u^{\frac{6}{5}}+u^{\frac{1}{5}})du=\frac{5}{11}u^{\frac{11}{5}}+\frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}}+c$$

(D) نعوض بـ $u=x-1$

$$=\frac{5}{11}(x-1)^{\frac{11}{5}}+\frac{5}{6}(x-1)^{\frac{6}{5}}+c=\frac{5}{11}\sqrt[5]{(x-1)^{11}}+\frac{5}{6}\sqrt[5]{(x-1)^{6}}+c$$

$$(28)\int \frac{x+2}{x+1}dx$$

(A) نفرض أن $u=x+1$ ومنها $x=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = dx$

(C) نعوض بــ$u=x+1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$=\int \frac{u-1+2}{u}\,du=\int \frac{u+1}{u}\,du$$

$$=\int (1+\frac{1}{u})\,du=u+\ln|u|+c$$

(D) نعوض بــ $u=x+1$

$$=x+1+\ln|x+1|+c$$

$$(29)\int \frac{x}{x-1}dx$$

(A) نفرض أن $u=x-1$ ومنها $x=u+1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = dx$

(C) نعوض بــ$u=x-1$, $dx = du$ في مسألة التكامل

$$= \int \frac{u+1}{u}\, du = \int (1+\frac{1}{u})\, du = u + \ln|u| + c$$

(D) نعوض بــ $u = x-1$

$$= x-1+\ln|x-1|+c$$

(30) $\int \frac{1+e^{x}}{1-e^{x}} dx$

(A) نفرض أن $u = 1-e^{x}$ ومنها $e^{x} = 1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = -e^{x}\, dx$

لا حظ أن :- $dx = -\frac{du}{e^{x}} \Leftarrow dx = -\frac{du}{1-u}$

(C) نعوض بــ $u = 1-e^{x}$, $dx = -\frac{du}{1-u}$ في مسألة التكامل

$$= -\int \frac{1+1-u}{u(1-u)}\, du = -\int \frac{-(u-2)}{-(u^{2}-u)}\, du$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2u-4}{u^{2}-u}\, du = -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^{2}-u}\, du + \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^{2}-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^{2}-u}\, du + \frac{3}{2}\int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^{2}-\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^{2}-u}\, du - 3\int \frac{2du}{1-(2u-1)^{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u^{2}-u| - 3\tanh^{-1}(2u-1) + c\,,\ |2u-1|<1$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u^{2}-u| - 3\coth^{-1}(2u-1) + c\,,\ |2u-1|>1$$

(D) نعوض بــ $u = 1-e^{x}$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|(1-e^{x})^{2}-1+e^{x}\right|-3\tanh^{-1}(1-2e^{x})+c, |1-2e^{x}|<1$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|(1-e^{x})^{2}-1+e^{x}\right|-3\coth^{-1}(1-2e^{x})+c, |1-2e^{x}|>1$$

(31) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(A) نفرض أن $u=1+\sqrt{x}$ ومنها $\sqrt{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لاحظ أن :- $dx=2\sqrt{x}\,du \Leftarrow dx=2(u-1)\,du$

(C) نعوض بــ $u=1+\sqrt{x}$, $dx=2(u-1)\,du$ في مسألة التكامل

$$=\int\frac{2u-2}{u}\,du=\int(2-\frac{2}{u})\,du$$
$$=2u-2\ln|u|+c$$

(D) نعوض بــ $u=1+\sqrt{x}$

$$=2(1+\sqrt{x})-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

(32) $\int\frac{e^{2x}}{1-e^{x}}dx=-\int\frac{e^{x}}{1-e^{x}}(-e^{x})dx$

(A) نفرض أن $u=1-e^{x}$ ومنها $e^{x}=1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du=-e^{x}\,dx$

(C) نعوض بــ $u=1-e^{x}$, $du=-e^{x}\,dx$ في مسألة التكامل

$$=-\int\frac{1-u}{u}\,du$$
$$=-\int(\frac{1}{u}-1)\,du=-\ln|u|+u+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1-e^{x}$

$$=-\ln\left|1-e^{x}\right|+1-e^{x}+c$$

(33) $\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(A) نفرض أن $u=1+\sqrt{x}$ ومنها $x=(u-1)^{2},\sqrt{x}=u-1$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لا حظ أن :- $dx=2\sqrt{x}\,du \Leftarrow dx=2(u-1)\,du$

(C) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$, $dx=2(u-1)\,du$ في مسألة التكامل

$$=2\int\frac{(u-1)^{2}(u-1)}{u}\,du$$
$$2\int\frac{(u-1)^{3}}{u}\,du=2\int(\frac{u^{3}-3u^{2}+3u-1}{u})\,du$$
$$2\int(u^{2}-3u+3-\frac{1}{u})\,du=\frac{2}{3}u^{3}-3u^{2}+6u-2\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1+\sqrt{x}$

$$=\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^{3}-3(1+\sqrt{x})^{2}+6(1+\sqrt{x})-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

(34) $\int\frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$

(A) نفرض أن $u=1-x^{\frac{1}{3}}$ ومنها $x^{\frac{1}{3}}=1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

لاحظ أن :- $dx = -3x^{\frac{2}{3}}du \Leftarrow dx = -3(x^{\frac{1}{3}})^2 du$

$\Leftarrow dx = -3(1-u)^2 du$

(C) نعوض بــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$, $dx = -3(1-u)^2 du$ في مسألة التكامل

$$= -3\int \frac{(1-u)^2}{u} du$$

$$= -3\int \frac{1-2u+u^2}{u} du = -3\int (\frac{1}{u} - 2 + u)\, du$$

$$= -3\ln|u| + 6u - \frac{3}{2}u^2 + c$$

(D) نعوض بــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$

$$= -3\ln\left|1 - x^{\frac{1}{3}}\right| + 6(1 - x^{\frac{1}{3}}) - \frac{3}{2}(1 - x^{\frac{1}{3}})^2 + c$$

(35) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx$

(A) نفرض أن $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$ ومنها $x^{\frac{1}{3}} = 1 - u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

لا حظ أن :- $dx = -3x^{\frac{2}{3}}du \Leftarrow dx = -3(x^{\frac{1}{3}})^2 du$

$\Leftarrow dx = -3(1-u)^2 du$

(C) نعوض بــ $u = 1 - x^{\frac{1}{3}}$, $dx = -3(1-u)^2 du$ في مسألة التكامل

$$-\int\frac{-u+1+1}{u}3(1-u)^2du=-3\int\frac{(2-u)(1-u)^2}{u}\,du$$

$$=-3\int(\frac{-u^3+4u^2-5u+2}{u})du$$

$$-3\int(-u^2+4u-5+\frac{2}{u})\,du=u^3-6u^2+15u-6\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1-x^{\frac{1}{3}}$

$$=(1-x^{\frac{1}{3}})^3-6(1-x^{\frac{1}{3}})^2+15(1-x^{\frac{1}{3}})-6\ln\left|1-x^{\frac{1}{3}}\right|+c$$

(36) $\int\frac{x^2}{1-x}dx$

(A) نفرض أن $u=1-x$ ومنها $x=1-u$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $du=-dx$

(C) نعوض بـــ $u=1-x$, $dx=-du$ في مسألة التكامل

$$-\int\frac{(1-u)^2}{u}\,du=-\int\frac{u^2-2u+1}{u}\,du$$

$$=-\int(u-2+\frac{1}{u})\,du=-\frac{1}{2}u^2+2u-\ln|u|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=1-x$

$$=-\frac{1}{2}(1-x)^2+2(1-x)-\ln|1-x|+c$$

(37) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

(A) نفرض أن $u=\sqrt{x}$ ومنها $x=u^2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لاحظ أن :- $dx = 2\sqrt{x}\,du \Rightarrow dx = 2u\ du$

(C) نعوض بــ $u=\sqrt{x}$, $dx = 2u\ du$ في مسألة التكامل

$$= \int \frac{2u}{u(u^2+1)}\,du$$

$$= 2\int \frac{1}{(u^2+1)}\,du = 2\tan^{-1}u + c$$

(D) نعوض بــ $u=\sqrt{x}$

$$= 2\tan^{-1}\sqrt{x} + c$$

$$(38)\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)}$$

(A) نفرض أن $u=\sqrt[3]{x}+1$ ومنها $x^{\frac{1}{3}} = u-1$ ومنها $x=(u-1)^2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لــx $du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

لاحظ أن :- $dx = 3x^{\frac{2}{3}}\,du \Rightarrow dx = 3(x^{\frac{1}{3}})^2\,du$

$$\Rightarrow dx = 3(u-1)^2\,du$$

(C) نعوض بــ $u=\sqrt[3]{x}+1$, $dx = 3(u-1)^2\,du$ في مسألة التكامل

$$= 3\int \frac{(u-1)^2\,du}{u(u-1)^3}\,du = 3\int \frac{1}{u(u-1)}\,du$$

$$= 3\int \frac{du}{u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = 3\int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}$$

$$=12\int\frac{du}{(2u-1)^2-1}=-6\int\frac{2du}{1-(2u-1)^2}$$
$$=-6\tanh^{-1}(2u-1)+c\,,|2u-1|<1$$
$$=-6\coth^{-1}(2u-1)+c\,,|2u-1|>1$$

(D) نعوض بـــ $u=\sqrt[3]{x}+1$

$$=-6\tanh^{-1}(2\sqrt[3]{x}+1)+c\,,\ |2\sqrt[3]{x}+1|<1$$
$$=-6\coth^{-1}(2\sqrt[3]{x}+1)+c\,,|2\sqrt[3]{x}+1|>1$$

(39) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

(A) نفرض أن $u=\sqrt{x}$ ومنها $x=u^2$

(B) نعين تفاضل الفرضية بالنسبة لـــx $\quad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

لاحظ أن :- $dx=2\sqrt{x}\,du \Rightarrow dx=2u\ du$

(C) نعوض بـــ $u=\sqrt{x}\ ,\ dx=2\sqrt{x}\,du$ في مسألة التكامل

$$=\int\frac{2u}{u(u+1)}\,du=\int\frac{2}{u+1}\,du=2\ln|u+1|+c$$

(D) نعوض بـــ $u=\sqrt{x}$

$$=2\ln|\sqrt{x}+1|+c$$