South valley University

Faculty of science-Qena
Mathematics Department

الكلية: كلية التربية بالعردقة

المقرر: ديناميكا تحليلية

الفرقة: الرابعة أساسي

البرنامج: اللغة العربية

الفصل الدراسي: الثـــــاني

المحاضر: أ. د. جمال عبدالله أحمد حشودي

المبادئ الأساسية للديناميكا التحليلية

1- مـــــــــقدمة

2- مـــعادلات لاجرانج

3- مـــعادلات هاملتون

4- مـــعادلات رواث

5- حساب التغاير

6- التــحويلا القانونية ومـــعادلات هاملتون- جاكوبي

7- أقـواس بواسون

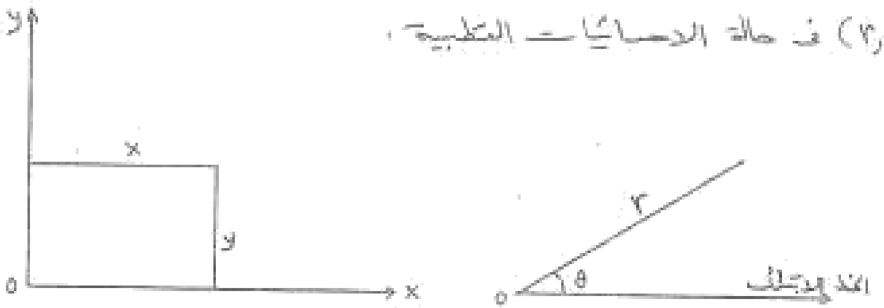
الباب الأول

مقدمة Introduction

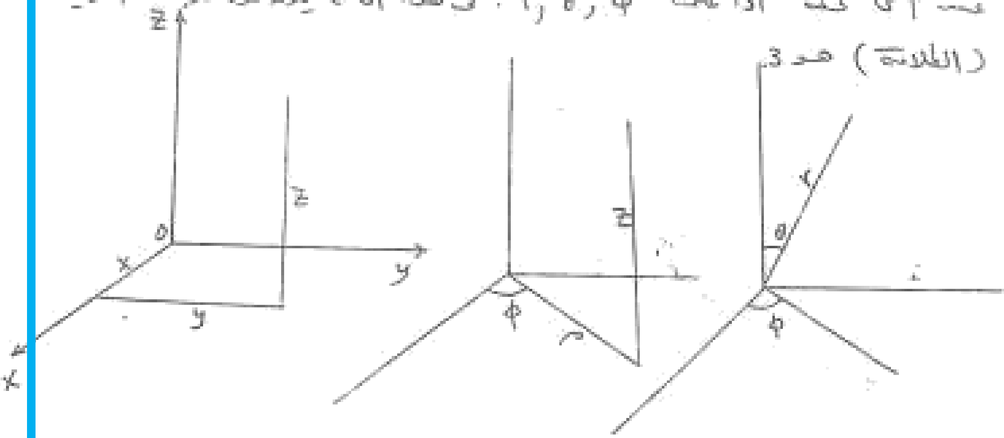
درسنا فيما سبق الميكانيكا وكنا نعتمد على قوانين الحركة لنيوتن في حل مسائل الميكانيكا وعلى الأخص قانون نيوتن الثاني أو معادلة الحركة $\underline{F} = m\underline{a}$ وقد صيغ في حالة الإحداثيات الكرتيزية. وإذا استخدمنا إحداثيات أخرى لتعيين موضع الجسم المتحرك كالإحداثيات القطبية مثلا فإنه لا يمكن تطبيق قانون نيوتن الثاني باستبدال الإحداث x بالإحداث r ولكن يجب أن نكتب العجلة في حالة الإحداثيات القطبية، وهذا يعني أن قانون نيوتن الثاني تتغير صورته بتغير الإحداثيات المعطاة التي تعين موضع الجسم. وقد توصل كل من لاجرانج وهاملتون إلى صورة جديدة لمعادلة الحركة يمكن استخدامها لأي نوع من الإحداثيات، فالإحداثيات في هذه المعادلات هي إحداثيات معممة والإحداثيات المعروفة هي أنواع خاصة منها مثل الإحداثيات الكرتيزية والإحداثيات القطبية وغيرها. ولذلك تعتبر هذه المعالجة طريقة عامة لحل مسائل الميكانيكا وهي طريقة سهلة يمكن استخدامها في حل الكثير من المسائل الميكانيكية إلى جانب علاقتها بنظريات وتطبيقات بمجالات حديثة مثل ميكانيكا الكم والميكانيكا الإحصائية والالكتروديناميكا.

Degrees of freedom and generalized coordinates — درجات الحرية (الطلاقة) والاحداثيات المعممة

نعلم أنه عندما يتحرك جسم في مستوى ثابت معروف عند أي لحظة
يتحدد بمعلومية احداثيين مثل (x,y) في حالة الاحداثيات الكرتيزية أو
(r,θ) في حالة الاحداثيات القطبية.



في هذه الحالة نقول أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) هو 2.
عندما يتحرك الجسم في الفراغ ثابت معروف يتعين بمعرفة ثلاثة احداثيات.
فمثلا في حالة الاحداثيات الكرتيزية يتعين موضع الجسم اذا علمنا (x,y,z)
وفي حالة الاحداثيات الاسطوانية يتحدد موضع الجسم بمعرفة ρ, ϕ, z
وكذلك في حالة الاحداثيات القطبية الكرية يمكن تحديد موضع الجسم
عند أي لحظة اذا علمنا r, θ, ϕ . في هذه الحالة يكون عدد درجات الحرية
(الطلاقة) هو 3



أي أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) هو عدد الاحداثيات اللازمة لتحديد موضع الجسم. واذا قيدنا حركة الجسيم كأن يظل دائما على سطح كرة فانه يكفي لتحديد موضعه احداثيين نختارهما θ, ϕ وذلك لأن ٣ تساوي متطابقات وهو نصف تلك الكرة وتصبح عدد درجات الحرية في هذه الحالة مساوية 2 .

وفي حالة مجموعة من الجسيمات فان عدد الاحداثيات اللازمة لتحديد موضع المجموعة يسمى عدد درجات الحرية (الطلاقة) لهذه المجموعة. نعتبر حركة جسيمين في الفراغ فانه يلزمنا لتحديد موضعهما ستة احداثيات اذا كانت حركتهما حرة. بينما يقل عدد الاحداثيات اذا كانت حركتهما مقيدة ، فمثلا اذا كانت حركة الجسيمين بحيث تظل المسافة بينهما ثابتة لأن يكونا جسيمين من جسم متماسك فانه في هذه الحالة يلزمنا خمسة احداثيات فقط لتحديد موضعهما ويكون عدد درجات الحرية (الطلاقة) مساويا 5 .

نفرض الآن مجموعة من الجسيمات عددها N تتحرك وعليها عدد من القيود وأن عدد الاحداثيات المستقلة اللازمة لتحديد حركة هذه المجموعة هو n ، أي أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) لهذه المجموعة هو n . نرمز لهذه الاحداثيات بالرموز

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ وتسمى بالاحداثيات المعممة . ويمكننا ملاحظة أن هذه الاحداثيات يمكن أن تكون مسافات أو زوايا أو كميات أخرى تتصل بالمسافات والزوايا .

<u>السرعات المعممة</u> Generalized velocities

اذا تغيرت الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots, q_n$ في الفترة الزمنية

الصغيرة Δt لتصبح $q_1 + \Delta q_1 , q_2 + \Delta q_2 , \ldots , q_n + \Delta q_n$

فان

$$\dot{q}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta t} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

تسمى $\dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \ldots , \dot{q}_n$ بالسرعات المعممة.

مثلا في حالة حركة جسم في الفراغ اذا اخذنا الاحداثيات الاسطوانية z , ϕ , ρ احداثيات معممة أي أن $q_1 = \rho$ ، $q_2 = \phi$ ، $q_3 = z$ فان السرعات المعممة تكون $\dot{z}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\rho}$.

ويجب ملاحظة أنها تختلف عن مركبات سرعة الجسم وهي $(\dot{z} , \rho\dot{\phi} , \dot{\rho})$.

القوى المعممة Generalized forces

اذا كان dW هو الشغل المبذول على مجموعة من الجسيمات بواسطة القوى F_j المؤثرة على الجسيم رقم j فان $dW = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dq_i$

حيث
$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

وذلك لأن $dr_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} dq_i$ ويكون الشغل المبذول هو

$$dW = \sum_{j=1}^{N} F_j \cdot dr_j = \sum_{j=1}^{N} F_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} dq_i \right)$$

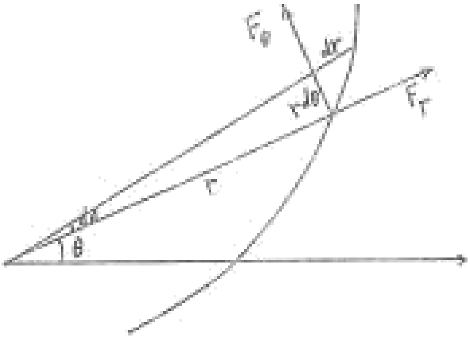
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right) dq_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dq_i$$

حيث
$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

تسمى ϕ_i القوة المعممة المصاحبة للاحداثي المعمم q_i.

فمثلا عندما يتحرك جسيم في مستوى واخذ r, θ التي تحدد موضع الجسيم عند أي لحظة احداثيات معممة وكانت F_θ , F_r هما مركبتي القوى الخارجية في اتجاه تزايد r, θ على الترتيب فان الشغل المبذول لازاحة صغيرة dr, dθ يعطى من



$$dW = F_r\, dr + F_\theta\, r\,d\theta$$

وتكون القوة المعممة في هذه الحالة هي

$$\phi_1 = F_r \quad , \quad \phi_2 = r\,F_\theta$$

ونلاحظ أن تختلف من القوى الخارجية، فالقوة المعممة ϕ_1 لها وحدات قوة بينما القوة المعممة ϕ_2 لها وحدات عزم (أي قوة x مسافة).

المجموعة الهولونومية والمجموعة الغير هولونومية Holonomic and non-holonomic systems

اذا تغيرت الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots, q_n$ الى $q_1+dq_1, q_2+dq_2, \ldots, q_n+dq_n$ بحيث لا تحكم على بعضها البعض بمعنى أنه اذا تغيرت بعض هذه الاحداثيات دون أن تتغير الاحداثيات الأخرى فاننا نسمى المجموعة بمجموعة هولونومية، أي أن التغيرات $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ في هذه الحالة تكون مستقلة. أما اذا كانت المتغيرات تعتمد على بعضها البعض، أي أنه بتغير أي من الاحداثيات فان باقي الاحداثيات أو بعضها سوف يتغير بالتالي فاننا نسمى المجموعة بمجموعة غير هولونومية.

المجموعات الزمنية و الغير زمنية

Scleronomic and rheonomic systems

اذا كان متجه موضع الجسيم رقم ν هو $\underline{r}_\nu = x_\nu \underline{i} + y_\nu \underline{j} + z_\nu \underline{k}$

بالنسبة لمجموعة احداثيات xyz كان $\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$

او هي

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t) ,$$
$$y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t) ,$$
$$z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

وتسمى معادلات التحويل .

اذا كان الزمن t يدخل صراحة في معادلات التحويل تسمى المجموعة الميكانيكية مجموعة زمنية rheonomic ، اما اذا كان الزمن t لا يدخل صراحة في معادلات التحويل تسمى المجموعة الميكانيكية مجموعة غير زمنية scleronomic .

المجموعات الحافظة والمجموعات الغير حافظة

Conservative and non-conservative systems

تسمى المجموعة حافظة عندما تكون جميع القوى المؤثرة عليها يمكن اشتقاقها من دالة الجهد (او طاقة الجهد) واذا لم يحدث هذا تسمى مجموعة غير حافظة .

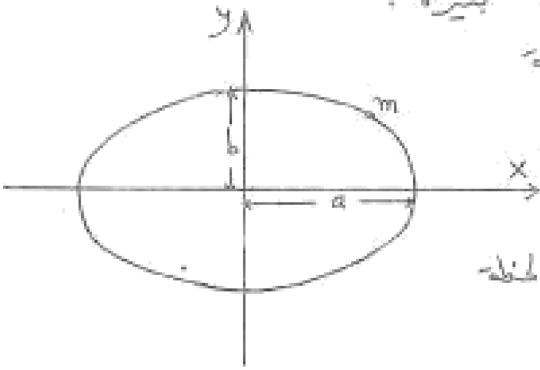
المجموعات تامة التقييد وغير تامة التقييد

Holonomic and non-holonomic constraints

عندما يتحرك جسيم او مجموعة من الجسيمات تكون هذه الحركة مقيدة في صورة معينة ، فمثلا عندما يتحرك جسم متماسك فان المسافة بين اي جسيمين منه تظل دائما ثابتة ، وقد تكون حركة جسيم مقيدة على منحنى او سطح .

اذا كانت $q_1, q_2, \dots, q_n$ هي الاحداثيات المعممة التي تصف مجموعة ميكانيكية ، t هو الزمن . يقال ان المجموعة تامة التقييد عندما يمكن التعبير عن جميع قيود المجموعة بمعادلات في الصورة $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t)=0$ أو صور مكافئة ، والا فان المجموعة يقال انها غير تامة التقييد .

ملاحظة : مهارة اختيار الاحداثيات المعممة لدراسة مسألة معينة يمكن أن تجعل دراستها تبسط لدرجة كبيرة .



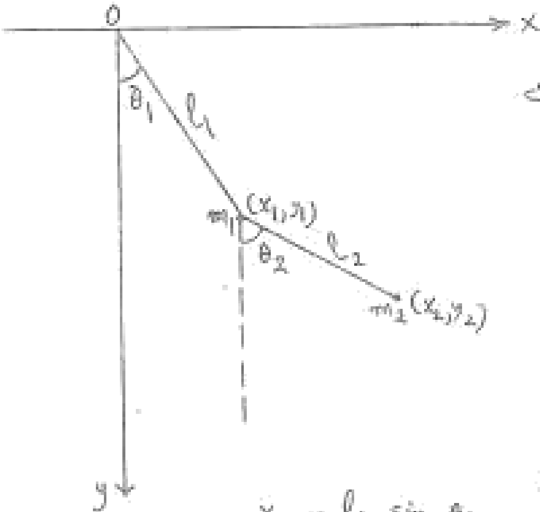
فمثلا في حالة جسيم مقيد الحركة على القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

احداثيا الجسيم (x, y) عند اي لحظة يتعينان بدلالة θ من العلاقتين

$$x = a\cos\theta , \quad y = b\sin\theta$$

لذلك يمكن تحديد حركة الجسيم تماما باستخدام الاحداثي المعمم θ.



ايضا كمثال آخر في البندول المزدوج مقيد الحركة في مستوى كما بالشكل .

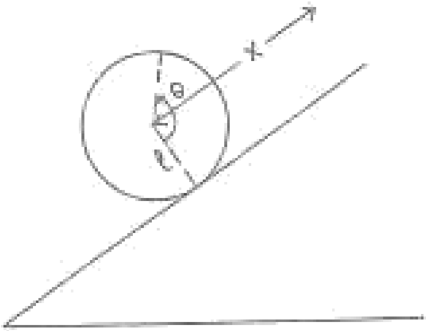
الاحداثيان θ_1 , θ_2 يحددان موضعي الكتلتين m_1 , m_2 ويمكن اعتبارهما الاحداثيات المعممة ، ونلاحظ انه اذا كان $(x_1, y_1) , (x_2, y_2)$ هما موضعي الكتلتين عند اي لحظة فان

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 , \quad y_1 = l_1 \cos\theta_1 ,$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 , \quad y_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$

أمثلة

مثال (١) عين الإحداثيات المعممة اللازمة للتحديد الكامل لحركة اسطوانة تتدحرج بدون انزلاق إلى أسفل مستوى مائل خشن وبين ما إذا كانت هذه الحالة زمنية أو غير زمنية ، تامة التقييد أو غير تامة التقييد، حافظة أو غير حافظة



الحل

موضع الاسطوانة على المستوى المائل يتحدد تماما بالمسافة x التي يقطعها مركز الكتلة والزاوية θ التي تدورها الاسطوانة حول محورها

وحيث أن الحركة تدحرجية بدون انزلاق فإن x ، θ ترتبطان بالعلاقة $x = \ell\theta$ ، أي أنه يلزم إحداثي واحد معمم لهذه الحركة إما x أو θ . وهذه الحالة غير زمنية وتامة التقييد وحافظة.

مثال (٥)

يتحرك جسيم في مستوى . باستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) كإحداثيات معممة أوجد القوى المعممة إذا أثرت على الجسيم القوة $\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$

الحل

توجد قوتان معممتان ϕ_r ، ϕ_θ حيث

$$\phi_r = \underline{F}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \quad , \quad \phi_\theta = \underline{F}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta}$$

حيث $\underline{r}$ متجه موضع الجسيم ويعطى بـ

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$$
$$= r\cos\theta\,\underline{i} + r\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\therefore \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j} \quad , \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\underline{i} + r\cos\theta\,\underline{j}$$

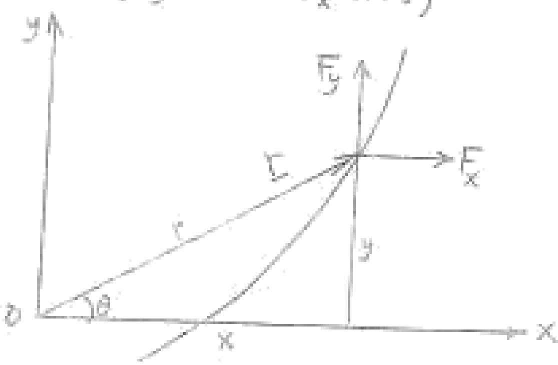
$$\therefore \quad \Phi_r = (F_x \underline{i} + F_y \underline{j}) \cdot (\cos\theta\, \underline{i} + \sin\theta\, \underline{j})$$

$$= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta \quad ,$$

$$\Phi_\theta = (F_x \underline{i} + F_y \underline{j}) \cdot (-r \sin\theta\, \underline{i} + r \cos\theta\, \underline{j})$$

$$= -r F_x \sin\theta + r F_y \cos\theta$$

$$= r (F_y \cos\theta - F_x \sin\theta)$$



تمارين

(١) عين الاحداثيات المعممة اللازمة للتعبير الكامل لحركة اسطوانة تتدحرج الى أسفل مستوى مائل اذا كان يوجد انزلاق

(٢) أوجد عدد درجات الحرية (الطلاقة) لكل مجموعة من المجموعات الميكانيكية الآتية :

(أ) مجموعة تتكون من N جسيماً تتحرك بحرية في الفراغ.

(ب) جسم جاسئ يمكنه الحركة بحرية في الفراغ.

(جـ) جسيم يتحرك على منحنى فراغي معين.

(د) جسيمان موصولان بواسطة قضيب جاسئ يتحرك بحرية في مستوى.

(هـ) جسم جاسئ يتحرك موازياً لمستوى مثبت.

(٣) اوجد القوى المعممة لكل مجموعة من المجموعات الميكانيكية الآتية :

(أ) ملتقة كتلتها m تتحرك على سلك على شكل قطع مكافئ معادلته
$y = ax^2 , z = 0$.

(ب) جسم كتلته m يتحرك الى أسفل مستوى مائل خشن يميل على الأفق بزاوية $\frac{\pi}{3}$ وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوي $\frac{2}{3}$.

(ج) جسم كتلته m مربوط في طرف خيط مرن طوله الطبيعي ℓ ومعامل مرونته $K\ell$ والطرف الآخر للخيط مثبت والخيط رأسي .

(٤) قسم كلا من المجموعات الآتية على حسب ما اذا كانت : (i) زمنية أو غير زمنية ، (ii) كاملة التقييد أو غير كاملة التقييد ، (iii) محافظة أو غير محافظة .

(أ) جسم ينزلق الى أسفل من قمة كرة مثبتة .

(ب) اسطوانة تتدحرج بدون انزلاق الى أسفل مستوى مائل .

(ج) جسم ينزلق على السطح الداخلي لجسم مكافئ دوراني قمته الى أسفل وليكن μ هو معامل الاحتكاك .

(٥) اوجد الاحداثيات المعممة اللازمة لكل من المجموعات الثلاثة المذكورة في التمرين السابق (٤) .

الباب الثاني

Lagrange's equations معادلات لاجرانج

Kinetic energy طاقة الحركة

نفترض مجموعة ميكانيكية يتعين موضعها بالاحداثيات العامة $q_1, q_2, \dots\dots, q_n$ ، متجه موضع $\underline{r}_i=(x_i, y_i, z_i)$ ، الجسيم رقم i ، $i=1,2,\dots\dots,N$ الذي كتلته m_i نأخذ

الاحداثيات تكون دوال في الاحداثيات العامة $q_1, q_2, \dots, q_n, t$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t),\quad y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t),\quad z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

طاقة حركة الجسيم رقم i تتعين من

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \qquad (2.1)$$

حيث

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \qquad (2.2a)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \qquad (2.2b)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial z_i}{\partial t} \qquad (2.2c)$$

بالتعويض من (2.2a, b, c) في (2.1) يمكن كتابة طاقة الحركة الكلية T في الصورة

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]$$

$$= A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2 + \dots\dots + A_{nn}\dot{q}_n^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots\dots$$

$$+ 2B_1\dot{q}_1 + 2B_2\dot{q}_2 + \dots\dots + 2B_n\dot{q}_n + C \qquad (2.3)$$

حيث

$$A_{rr} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)^2\right] , \qquad (2.4)$$

$$A_{rs} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial y_i}{\partial q_r}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right] , \qquad (2.5)$$

$$B_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_r}\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right] , \qquad (2.6)$$

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right] \qquad (2.7)$$

من العلاقة (2.3) يتضح لنا أن طاقة الحركة دالة من الدرجة الثانية في السرعات المعممة وتربط المعاملات دوال في الاحداثيات المعممة والزمن. اذا اختفى الزمن صراحة من العلاقات السابقة فان $B_r = C = 0$ وتصبح طاقة الحركة في الصورة

$$T = A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots + A_{nn}\dot{q}_n^2 \qquad (2.8)$$

أي أن طاقة الحركة $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ تكون دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$

ملحوظة: يقال أن الدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ متجانسة من الرتبة m اذا كان

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.9)$$

والدوال المتجانسة تحقق نظرية أويلر والتي تنص على ما يلي:
اذا كانت $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دالة متجانسة من الرتبة m فان

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = m f , \qquad (2.10)$$

أي أن

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = m f$$

وحيث أن طاقة الحركة $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ في المعادلة (2.8) دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$

فإنه حسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة يكون

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \qquad (2.11)$$

<u>معادلات لاجرانج</u> Lagrange's equations

للحصول على معادلات لاجرانج نثبت اولاً أن :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right] - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.12)$$

لإثبات (2.12) نكتب معادلة نيوتن أو معادلة الحركة للجسيم رقم ν الذي كتلته m_ν ويؤثر عليه محصلة القوى $\mathbf{F}_\nu$ وهي

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu$$

بضرب الطرفين قياسياً في $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ نجد أن

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.13)$$

وحيث أن

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

أي أن

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.14)$$

بالتعويض من (2.14) في (2.13) ينتج أن

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.15)$$

بأخذ المجموع لطرفي (2.15) بالنسبة الى ν على جميع الجسيمات ينتج أن

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right] - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

وهي المعادلة (2.12)

إذا كانت T هي طاقة الحركة الكلية ، $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2$ ،

نريد اثبات ان

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.16)$$

حيث Φ_α هي القوة العامة المناظرة للاحداثيات المعمم q_α .

حيث ان طاقة الحركة الكلية T تعطى من

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu \qquad (2.17)$$

بتفاضل (2.17) بالنسبة الى q_α ثم $\dot{q}_\alpha$ نجد ان

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \quad , \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (2.19)$$

ويمكن اثبات ان $\frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ ، وتسمى حذف النقط ، وذلك لأن

$\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$ فان

$$\dot{\underline{r}}_\nu = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial t}$$

وبالتالي بتفاضل الطرفين جزئيا بالنسبة الى $\dot{q}_\alpha$ فان

$$\frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.20)$$

بالتعويض من (2.20) في (2.19) نجد ان

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.21)$$

بالتعويض من المعادلتين (2.18) ، (2.21) في المعادلة (2.12) نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha$$

وهي الصيغة المطلوبة (2.16)

نفرض ان المجموعة محافظة ، اي ان القوى يمكن اشتقاقها من الجهد V .

من السؤال (١) نرى أن $\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ، وذلك لأن $dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha \, dq_\alpha$

ومن جهة أخرى $dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$ وبالتالي فإن $\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\Phi_\alpha - \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) dq_\alpha$

وحيث أن dq_α ، $\alpha = 1, 2, \dots, n$ مستقلة فإن جميع معاملات dq_α يجب أن تساوي صفر ، أي أن $\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ، أي أن

$$\Phi_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{2.22}$$

دالة لاجرانج L تعرف من العلاقة

$$L = T - V \tag{2.23}$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

وذلك لأن طاقة الجهد V دالة في الإحداثيات العامة ومن المحتمل في الزمن t ولكنها ليست دالة في السرعات العامة $\dot{q}_\alpha$ ، $\alpha = 1, 2, \dots, n$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \tag{2.24}$$

بالتعويض من (2.22) ، (2.24) في (2.16) نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - V) = 0$$

وباستخدام (2.23) التي تعرف دالة لاجرانج L نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \; , \; \alpha = 1, 2, \dots, n \tag{2.25}$$

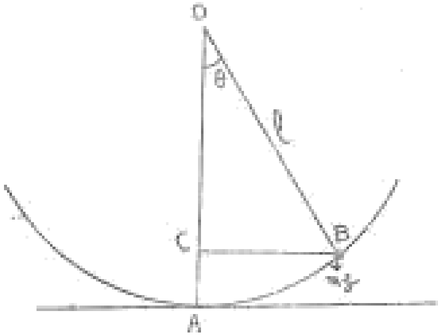
المعادلات (2.25) تسمى معادلات لاجرانج

ملحوظة: نلاحظ أن معادلات لاجرانج (2.25) هي مجموعة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية وعددها n ، ويمكن استخدامها لحل المسائل الميكانيكية كما سنرى في الأمثلة التالية

أمثلة

مثال (1) أوجد دالة لاجرانج لبندول بسيط ثم أوجد معادلة الحركة باستخدام معادلات لاجرانج.

الحل



يتحدد موضع الجسم بواسطة الزاوية θ التي يصنعها الخيط OB مع الرأسي المار بالطرف الثابت O نفرض أن طول الخيط يساوي ℓ وأن كتلة الجسم هي m .

طاقة الحركة تعطى من

$$T = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

بأخذ المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة A مستوى قياسي:

طاقة الجهد تعطى من

$$V = mg\, CA = mg(OA - OC)$$

$$= mg(\ell - \ell \cos\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

دالة لاجرانج تكون في الصورة

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos\theta)$$

حيث أنه توجد درجة حرية واحدة في هذه الحالة ، أي أن $n = 1$ ، وإحداثي عام واحد وهو θ ، فإنه توجد معادلة واحدة للاجرانج بالنسبة إلى θ وهي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

حيث أن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin\theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

بالتعويض في معادلة لاجرانج نحصل على

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

أو هي

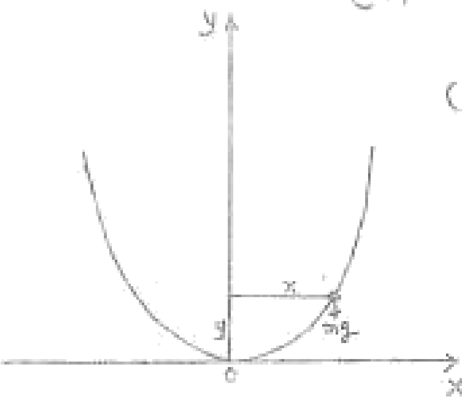
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

ملحوظة: إذا كانت θ صغيرة فإن $\sin\theta \cong \theta$ ونحصل على

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة زمن الدورة $\frac{2\pi}{\omega}$ أي
يساوي $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

مثال (٤) أوجد دالة لاجرانج لحلقة كتلتها m تتحرك على سلك أملس على شكل قطع مكافئ معادلته $y = ax^2$ ثم أوجد معادلة حركة الحلقة باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

يتحدد موضع الحلقة بواسطة (x, y) ولكن x ، y ترتبطان بالعلاقة

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

طاقة حركة الحلقة تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \qquad (2)$$

بتفاضل (1) بالنسبة للزمن t نجد أن

$$\dot{y} = 2ax\dot{x} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نجد أن

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4a^2x^2\right)$$

طاقة الجهد أو الوضع للحلقة هي

$$V = mgy = mgax^2$$

معتبرين المستوى الأفقي المار بنقطة الأصل O مستوى قياسي.

دالة لاجرانج تأخذ الصورة

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + 4a^2x^2) - mgax^2$$

هذه المجموعة الميكانيكية لها درجة حرية واحدة ، واحداث مهم واحد هو x ، وتكون معادلة لاجرانج بالنسبة الى x هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

حيث

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m (1+4a^2x^2)(2\dot{x}) = m\dot{x}(1+4a^2x^2) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 (8a^2x) - 2mgax = 4ma^2x\dot{x}^2 - 2mgax \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 8ma^2x\dot{x}^2 \qquad (3)$$

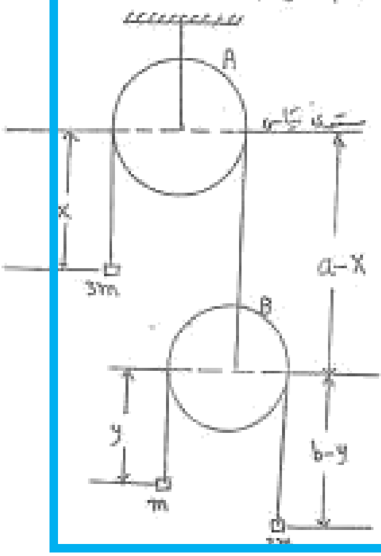
بالتعويض من (2) ، (3) في (1) نجد ان معادلة حركة الحلقة تكون في الصورة

$$m\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 8ma^2x\dot{x}^2 - 4ma^2x\dot{x}^2 + 2mgax = 0$$

أو هي

$$\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 4a^2x\dot{x}^2 + 2gax = 0$$

<u>مثال (٧)</u> الشكل يبين بكرة ثابتة A والأخرى متحركة B وهما خفيفتان ويمر عليهما الخيطان وطولهما a ، b . ادرس حركة الكتل المعلقة ثم اوجد عجلة كل كتلة مستخدما معادلات لاجرانج.



الحل

عدد الاحداثيات المهمة في هذه المجموعة الميكانيكية هو 2 وهما الاحداثيان المهمان x ، y .

نأخذ المستوى الأفقي المار بمركز البكرة الثابتة A مستوى قياسي ، وتكون طاقة الجهد او الوضع سالبة لأن الكتل أسفل المستوى القياسي .

الكتلة $3m$ لها طاقة حركة T_1 ، وطاقة الوضع V_1 تعطيان بـ

$$T_1 = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 \quad , \quad V_1 = -3mgx$$

الكتلتان m ، $2m$ لها طاقة الحركة والجهد لكل منهما تعطى بـ

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{y} - \dot{x})^2 \quad , \quad V_2 = -mg(a - x + y),$$

$$T_3 = m(-\dot{x} - \dot{y})^2 \quad , \quad V_3 = -2mg(a + b - x - y)$$

مع ملاحظة أن موضع الكتلتين m ، $2m$ بالنسبة للبكرة الثابتة هما $a - x + y$ ، $a + b - x - y$ وبالتالي سرعتاهما يكونان على الترتيب $-\dot{x} + \dot{y}$ ، $-\dot{x} - \dot{y}$

طاقة الحركة وطاقة الجهد للمجموعة الميكانيكية هما

$$T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y} - \dot{x})^2 + m(\dot{x} + \dot{y})^2 ,$$

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i = -3mgx - mg(a - x + y) - 2mg(a + b - x - y)$$

أي أن

$$T = \frac{1}{2} m (6\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}) \quad ,$$

$$V = -mg(3a + 2b - y)$$

ودالة لاجرانج تعطى بـ

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (6\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}) + mg(3a + 2b - y)$$

معادلتا لاجرانج بالنسبة للإحداثيين x ، y هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

نحسب التفاضلات الجزئية لدالة لاجرانج

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(6\dot{x} + \dot{y}) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(3\dot{y} + \dot{x}) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

بالتعويض نجد أن معادلات الحركة هي

$$m(6\ddot{x} + \ddot{y}) = 0 \quad , \quad m(3\ddot{y} + \ddot{x}) + mg = 0$$

أي أن

$$6\ddot{x} + \ddot{y} = 0 \quad , \qquad (1)$$

$$3\ddot{y} + \ddot{x} = -g \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نجد أن

$$\ddot{x} = \frac{g}{17} \quad , \quad \ddot{y} = -\frac{6g}{17}$$

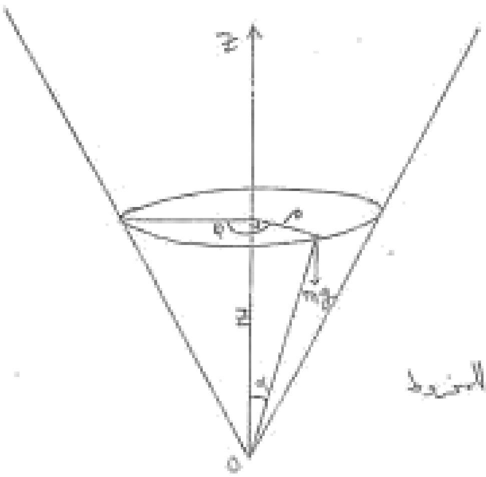
عجلة الكتلة $3m$ هي $\ddot{x} = \frac{g}{17}$

عجلة الكتلة m هي $\ddot{y} - \ddot{x}$ أي أنها $-\frac{7g}{17}$

عجلة الكتلة $2m$ هي $-\ddot{x} - \ddot{y}$ أي أنها $\frac{5g}{17}$

مثال (٤)

أوجد دالة لاجرانج ومعادلات الحركة عندما يتحرك جسم على السطح الداخلي لمخروط باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

موضع الجسم يتعين بواسطة الاحداثيات الاسطوانية ρ, ϕ, z وحيث أن الجسم يتحرك على السطح المخروطي نأخذ

$$z = \rho \cot \alpha \qquad (1)$$

حيث α هي الزاوية النصف رأسية للمخروط

سرعة الجسم تتعين بـ

$$\underline{v} = (\dot{\rho}, \rho\dot{\phi}, \dot{z})$$

$$\therefore v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \qquad (2)$$

بتفاضل (1) بالنسبة الى الزمن نجد أن

$$\dot{z} = \dot{\rho} \cot \alpha \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على

$$v^2 = \dot{\rho}^2(1+\cot^2\alpha) + \rho^2\dot{\phi}^2$$
$$= \dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2\dot{\phi}^2$$

لطاقة حركة الجسم تكون

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2\dot{\phi}^2)$$

بأخذ المستوى الأفقي المار برأس المخروط كمستوى قياسي لذا فإن
لطاقة الجهد تكون

$$V = mgz = mg\rho\cot\alpha$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2\dot{\phi}^2) - mg\rho\cot\alpha$$

هذه الحركة لها درجتان حرية أي أن $n = 2$ والاحداثيات المعممة
هما ρ, ϕ

معادلتا لاجرانج بالنسبة الى ϕ, ρ هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

وبإيجاد المشتقات التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}\csc^2\alpha \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض نجد أن معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ρ تعطى

$$m\ddot{\rho}\csc^2\alpha - m\rho\dot{\phi}^2 + mg\cot\alpha = 0$$

أو هي

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

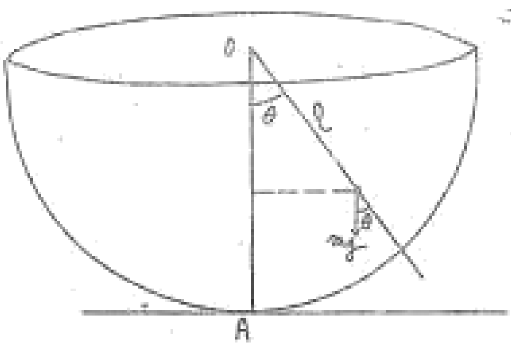
معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ϕ تعطى

$$m\rho^2\dot{\phi} = \text{constant} \qquad (5)$$

المعادلتان (4)، (5) يكونان معادلتا حركة الجسم على السطح الداخلي للمخروط.

مثال (٥) . يتحرك جسيم كتلته m في مستوى أفقي على السطح الداخلي لنصف قشرة كروية ملساء مثبتة رأسها ومحورها إلى أسفل وكانت نقطة القذف تصنع زاوية β مع الرأسي أسفل نقطة . أوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج وأثبت أن السرعة الابتدائية للقذف بحيث يصعد الجسيم بالكاد إلى حافة نصف الكرة هي $\sqrt{2gl\sec\beta}$ حيث l نصف قطر الشبكة .

الحل



موضع الجسيم يتعين بالإحداثيات القطبية الكروية r, θ, ϕ ولكن r تظل ثابتة وتساوي نصف قطر الكرة l ، أي أن $r = l$ وبالتالي يتعين موضع الجسيم بدلالة θ, ϕ .

إذا أخذنا المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة A كمستوى قياس لطاقة الوضع فإن طاقة حركة الجسيم وطاقة جهده يتعينان من العلاقتين

$$T = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right),$$

$$V = mg(l - l\cos\theta) = mgl(1-\cos\theta)$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - mgl(1-\cos\theta)$$

معادلتا لاجرانج بالنسبة للإحداثيين θ, ϕ هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 ,$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - mgl\sin\theta ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض نجد أن معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي θ تكون

$$m\ell^2\ddot{\theta} - m\ell^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 + mg\ell\sin\theta = 0$$

أو هي

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ϕ تكون

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 0$$

أي أن

$$m\ell^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = \text{constant} \qquad (2)$$

أو

$$\ell\sin^2\theta\,\dot{\phi} = \text{const.} = c_1 \qquad (3)$$

المعادلتان (1) ، (2) أو (1) ، (3) هي معادلات الحركة لحركة الجسم على السطح الداخلي للمخروط.

مركبات سرعة الجسم في اتجاهات r, θ, ϕ هي

$(v_r, v_\theta, v_\phi) = (0, \ell\dot{\theta}, \ell\sin\theta\,\dot{\phi})$

عند بداية الحركة تتحرك الجسم أفقيا بسرعة ولتكن v_0 على المخروط عند $\theta = \beta$ أي أنه عند $t = 0$ ، $\theta = \beta$ ، $v_\theta = 0$ ، $v_\phi = v_0$ أي أن $\dot{\theta} = 0$ ،

$$c_1 = \ell\sin\theta\,\dot{\phi}\,(\sin\theta) = v_0\sin\beta$$

$$\therefore\quad \ell\sin^2\theta\,\dot{\phi} = v_0\sin\beta$$

أو

$$\dot{\phi} = \frac{v_0\sin\beta}{\ell\sin^2\theta} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (1) نحصل على

$$\ddot{\theta} - \frac{v_0^2\sin^2\beta\cos\theta}{\ell^2\sin^3\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (5)$$

بالضرب في $2\dot{\theta}$ والتكامل نجد أن

$$\dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2\sin^2\beta}{\ell^2\sin^2\theta} - 2\frac{g}{\ell}\cos\theta = c_2 \qquad (6)$$

حيث C_2 ثابت يمكن تعيينه من شروط الحركة الابتدائية وهي $\dot\theta = 0$ ، $\theta = \beta$ ونجد أن

$$C_2 = \frac{v_0^2}{\ell^2} - \frac{2g}{\ell}\cos\beta$$

وتأخذ المعادلة (٤) الصورة

$$\dot\theta^2 + \frac{v_0^2}{\ell^2}\left(\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} - 1\right) - \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\beta) = 0$$

لكي يصعد الجسم الى حافة القمع فاننا نضع $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\dot\theta = 0$ ونجد أن

$$\frac{v_0^2}{\ell^2}(\sin^2\beta - 1) + \frac{2g}{\ell}\cos\beta = 0$$

$$\therefore \frac{v_0^2}{\ell}\cos^2\beta - 2g\cos\beta = 0$$

ومنها

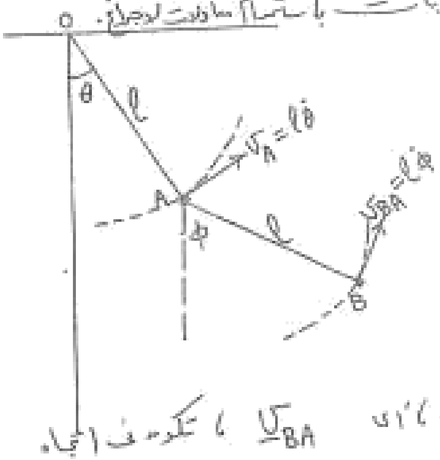
$$v_0^2 = 2g\ell\sec\beta$$

أو

$$v_0 = \sqrt{2g\ell\sec\beta}$$

$\therefore$ يجب أن يقذف الجسم بسرعة تساوى $\sqrt{2g\ell\sec\beta}$ حتى يصل بالكاد الى حافة القمع.

<u>مثال (٦)</u> يتكون بندول مزدوج من جسيمين كتلة كل منهما m معلق بواسطة خيط طوله ℓ من نقطة ثابتة والثانى معلق من طرف خيط آخر طوله ℓ ومربوط طرفه الآخر فى الجسم الأول ويتذبذبان فى مستوى رأسى واحد خلال ذبذبات صغيرة أوجد طرق وتردد هذه الذبذبات باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

يتحدد موضع الجسمين بواسطة الاحداثيين θ ، ϕ.

سرعة الجسم الأول A فى اتجاه العمودى على الخيط OA ومقدارها

$$v_A = \ell\dot\theta$$

سرعة الجسم الثانى بالنسبة الى الأول v_{BA} ، تكون فى اتجاه

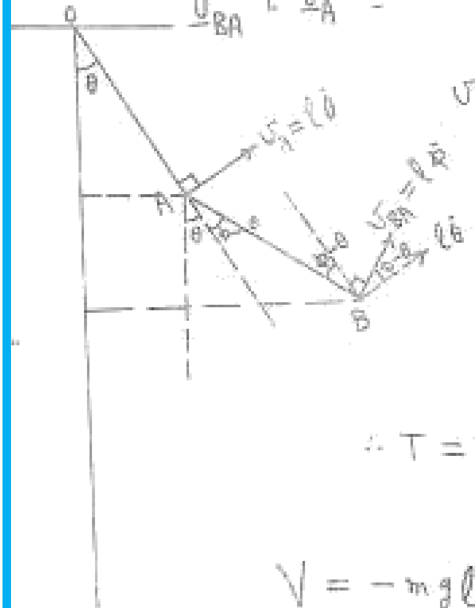
العمودي على الخيط AB ومقدارها $v_{BA} = l\dot{\phi}$

سرعة الجسيم B تعطى من

$$\underline{v}_B = \underline{v}_{BA} + \underline{v}_A$$

إذاً سرعة الجسيم B هي محصلة السرعتين $\underline{v}_A$ ، $\underline{v}_{BA}$

ومقدارها يعطى من



$$v_B^2 = l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)$$

طاقة الحركة الكلية تكون

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right)$$

$$\therefore T = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)$$

طاقة الجهد للجسيمين تعطى من

$$V = -mgl\cos\theta - mgl(\cos\theta + \cos\phi)$$

$$= -mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

وذلك بأخذ المستوى الأفقي المار بالنقطة الثابتة O كمستوى قياسي والإشارة السالبة في طاقة الجهد لأن الجسيمين أسفل المستوى القياسي.

دالة لاجرانج تعطى من

$$L = T - V$$

$$= ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right) + mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

نوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\left(2\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\phi-\theta) - 2mgl\sin\theta ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m\ell^2\left(\dot\phi + \dot\theta\cos(\phi-\theta)\right) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m\ell^2\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) - mg\ell\sin\phi$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للإحداثي θ هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\left(2\dot\theta + \dot\phi\cos(\phi-\theta)\right)\right] - m\ell^2\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + 2mg\ell\sin\theta = 0$$

$$2\ell\ddot\theta + \ell\ddot\phi\cos(\phi-\theta) - \ell\dot\phi(\dot\phi-\dot\theta)\sin(\phi-\theta) - \ell\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + 2g\sin\theta = 0 \quad (1)$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للإحداثي ϕ هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\left(\dot\phi + \dot\theta\cos(\phi-\theta)\right)\right] + m\ell^2\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + mg\ell\sin\phi = 0$$

$$\therefore \ell\left(\ddot\phi + \ddot\theta\cos(\phi-\theta) - \dot\theta(\dot\phi-\dot\theta)\sin(\phi-\theta)\right) + \ell\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + g\sin\phi = 0 \quad (2)$$

معادلات حركة الجسيمة الميكانيكية المعطاة تعطى (1) ، (2)
الذبذبات الصغيرة تكون عندما θ ، ϕ صغيرة ، وحيث .
لذلك نأخذ $\sin\theta \simeq \theta$ ، $\sin(\phi-\theta) \simeq \phi-\theta$ ، $\cos(\phi-\theta) \simeq 1$ ، وإهمال
الحدود المشتملة على كميات صغيرة من الرتبة الثانية أو أعلى .
المعادلتان (1) ، (2) تصبحان في الصورة

$$2\ell\ddot\theta + \ell\ddot\phi + 2g\theta = 0 , \qquad (3)$$

$$\ell\ddot\phi + \ell\ddot\theta + g\phi = 0 \qquad (4)$$

بقسمة (3) ، (4) على ℓ ونضع $K = \frac{g}{\ell}$ نحصل

$$2\ddot\theta + \ddot\phi + 2K\theta = 0 , \qquad (5)$$

$$\ddot\theta + \ddot\phi + K\phi = 0 \qquad (6)$$

نفرض أن $\theta = A\cos\omega t$ ، $\phi = B\cos\omega t$

$$\therefore\ \dot{\theta} = -A\omega\sin\omega t\ ,\quad \ddot{\theta} = -A\omega^2\cos\omega t\ ,$$

$$\dot{\phi} = -B\omega\sin\omega t\ ,\quad \ddot{\phi} = -B\omega^2\cos\omega t$$

بالتعويض في المعادلتين (5) ، (6) نحصل على

$$-2A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\cos\omega t + 2KA\cos\omega t = 0\ ,$$

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\cos\omega t + KB\cos\omega t = 0$$

أو أن

$$2(K-\omega^2)A - \omega^2 B = 0\ , \tag{7}$$

$$-\omega^2 A + (K-\omega^2)B = 0 \tag{8}$$

حيث أن θ ، ϕ لا يمكن أن تساويا الصفر لذلك A ، B لا يمكن أن ينعدما ، ولكي يكون للمعادلتين (7) ، (8) حلول غير صفرية للمجهولين A ، B يجب أن يتلاشى محدد المعاملات في المعادلتين (7) ، (8) ، أي أن

$$\begin{vmatrix} 2(K-\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & K-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ 2(K-\omega^2)^2 - \omega^4 = 0$$

$$\therefore\ \sqrt{2}(K-\omega^2) = \pm\omega^2$$

$$\sqrt{2}K = (\sqrt{2}\pm 1)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{2}\pm 1}\cdot\frac{\sqrt{2}\mp 1}{\sqrt{2}\mp 1}$$

$$\therefore\ \omega^2 = (2\mp\sqrt{2})K = \frac{(2\mp\sqrt{2})g}{\ell}$$

$$\therefore\ \omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{\ell}}\ ,\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{\ell}}$$

بالتعويض عن $\omega = \omega_1$ في المعادلة (7) نجد أن

$$2(K - 2K + \sqrt{2}K)A - (2-\sqrt{2})KB = 0$$

$$\therefore\ 2(\sqrt{2}-1)A - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)B = 0$$

$$\therefore \quad B = \sqrt{2}\, A$$

بالتعويض عن $\omega = \omega_2$ في المعادلة (٢) نجد أن

$$2\left(K - 2K - \sqrt{2}K\right)A - \left(2 + \sqrt{2}\right)K B = 0$$

$$\therefore \quad -2\left(1 + \sqrt{2}\right)A - \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)B = 0$$

$$\therefore \quad B = -\sqrt{2}\, A$$

أي أن البندول يتذبذب بطريقتين :

الطريقة الأولى : منظر $B = \sqrt{2}A$ ، $\omega = \omega_1$ ، ويكون التردد مساويا

$\nu_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$ كما بالشكل

أي أن

$$\theta = A \cos \omega_1 t \; , \qquad \phi = \sqrt{2}\, A \cos \omega_1 t$$

الطريقة الأولى للذبذبة

الطريقة الثانية :

منظر $B = -\sqrt{2}A$ ، $\omega = \omega_2$

ويكون التردد مساويا $\nu_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi}$

أي أن

$$\theta = A \cos \omega_2 t \; , \qquad \phi = -\sqrt{2}\, A \cos \omega_2 t$$

الطريقة الثانية للذبذبة

مثال (٧) استنتج ثابت بقاء الطاقة باستخدام معادلات لاجرانج.

الحل

عندما تكون المجموعة الميكانيكية لا تحتوي على قيود متحركة على النظام نلاحظ أن طاقة الحركة تكون دالة متجانسة في السرعات المعممة من الدرجة الثانية وحسب نظرية أويلر للدوال المتجانسة نجد أن

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T \qquad (1)$$

معادلات لاجرانج هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (2)$$

حيث أن طاقة الحركة $T = T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ ، الطاقة الجهد $V = V(q_\alpha)$ نجد أن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad , \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (4)$$

بالتعويض من (3) ، (4) في (2) نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

بالضرب في $\dot{q}_\alpha$ نجد أن

$$\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

يمكن كتابة المعادلة الأخيرة في الصورة

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

بأخذ الجمع على α نجد أن:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (5)$$

حيث أن

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right) , \qquad (6)$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \qquad (7)$$

بالتعويض من (1) ، (6) ، (7) في (5) نحصل على

$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$$

أي أن

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

$$\therefore T + V = \text{constant}$$

تمارين

(1) اذا كانت طاقة الحركة وطاقة الجهد لمجموعة ديناميكية هما

$$V = c + dy^2 \quad , \quad 2T = \frac{\dot{x}^2}{a+by^2} + \dot{y}^2$$

فأثبت أن المجموعة تتحرك حركة توافقية بسيطة ، حيث a ، b ، c ، d ثوابت وأوجد الحل العام.

(2) تنزلق حلقة كتلتها m على سلك أملس على شكل منحنى السيكلويد الذي معادلتاه البارامتريتان هما $x = a(\theta - \sin\theta)$ ، $y = a(1 + \cos\theta)$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$. أوجد دالة لاجرانج وأوجد معادلة الحركة ثم أثبت أن الحلقة تعمل ذبذبات زمنها الدوري يساوي $4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

(3) استخدم معادلات لاجرانج لإيجاد معادلة الحركة لبندول بسيط يتذبذب في مستوى رأسي حول محور أفقي ثابت.

(٤) يتحرك جسم في مستوى تحت تأثير قوة جاذبة F نحو مركز الجذب o حيث $F = \frac{\lambda}{r^2}$ ، r بعد الجسم عن o
اوجد معادلات حركة الجسم باستخدام معادلات لاجرانج.

(٥) حل مثال (٤) اذا استبدلنا الكتلة $3m$ بالكتلة $5m$ وكذلك استبدلنا الكتلتين m ، $2m$ بالكتلتين $2m$ ، $3m$.

(٦) استخدم معادلات لاجرانج في ايجاد معادلات حركة جسم كتلته m يتحرك على السطح الداخلي للجسم الدوراني $x^2+y^2 = 9z$ تحت تأثير وزنه مع اعتبار السطح أملس.

(٧) اسطوانة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها ℓ تتدحرج بدون انزلاق على مستوى مائل بزاوية α على الأفقي ، اوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج ثم اثبت ان عجلة مركز الثقل تكون ثابتة واوجد قيمتها.

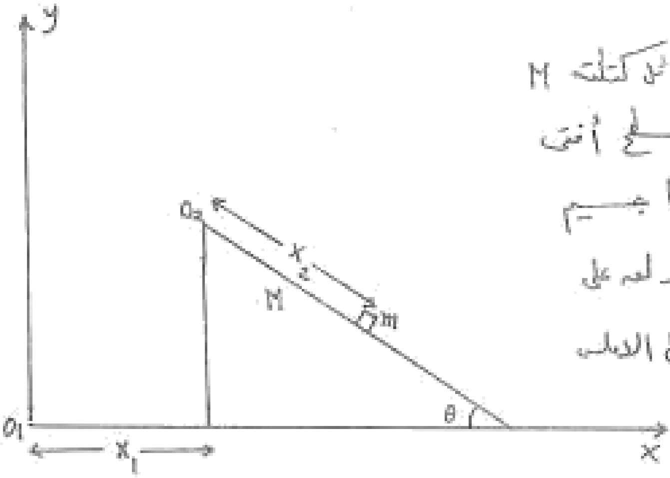
(٨) AB سلك مستقيم أملس مثبت عند النقطة A على محور رأسي oA حيث يدور AB حول oA بسرعة زاوية ثابتة ω . وضعت حلقة كتلتها m بحيث تكون مقيدة الحركة على السلك
اوجد دالة لاجرانج ثم اوجد معادلة حركة الكتلة باستخدام معادلات لاجرانج ثم اوجد الحل العام.

(٩) يتحرك جسم كتلته m في مستوى تحت تأثير الجهد $V = -\frac{A}{r}$ حيث A ثابت . اوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج ، اوجد كذلك الثوابت الحركة.

(١٠) كتلة M_2 معلقة من أحد طرفي خيط خفيف يمر على بكرة مثبتة ملساء وفي الطرف الآخر للخيط توجد بكرة ملساء كتلتها M_1 وغير قابلة للدوران ويمر خلال هذه البكرة خيط خفيف يحمل الكتلتين m_1 ، m_2 اوجد دالة لاجرانج المجموعة ثم اوجد عجلة الكتلة M_2 مستخدما معادلات لاجرانج.

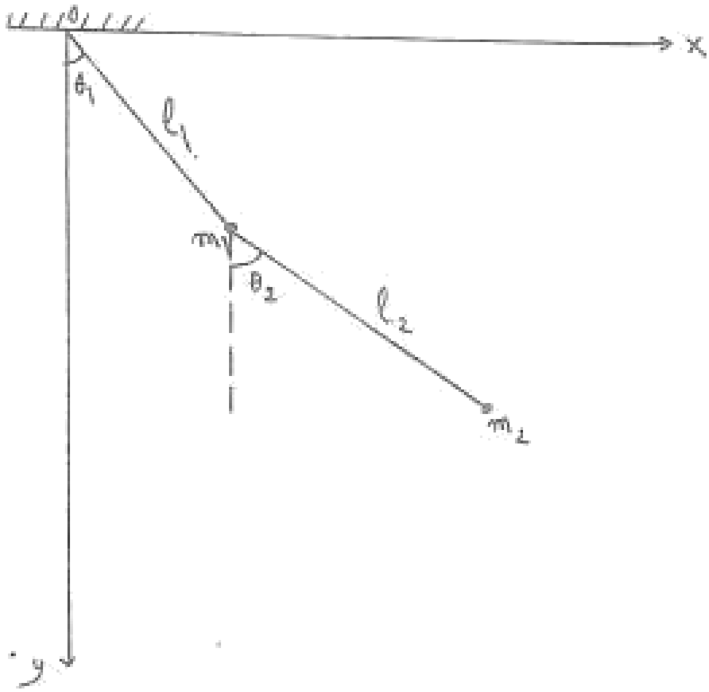
(١١) جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة حافظ اوجد دالة لاجرانج ومعادلات الحركة لهذا الجسم في الاحداثيات الاسطوانية.

(١٢) مستوى مائل كتلته M ينزلق على سطح أفقي أملس بينما جسيم كتلته m ينزلق على سطح المائل الاملس كما بالشكل.

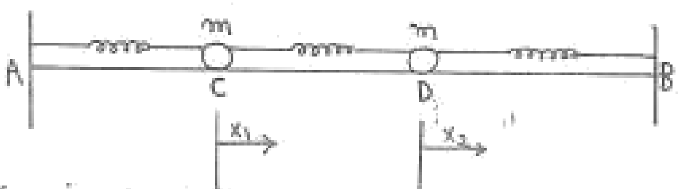


أوجد معادلات حركة الجسيم والمستوى المائل باستخدام معادلات لاجرانج.

(١٣) اوجد معادلات الحركة لبندول ثنائي كما بالشكل حيث الجسيمين m_1 ، m_2 متصلين في موضعين متعلقين بخيط خفيف والمجموعة تتحرك حركة تذبذبية في مستوى رأسي حول نقطة ثابتة من الخيط.



(١٤) وصلت كتلتان متساويتان كل منهما m بثلاثة اسلاك زنبركية لها نفس ثابت الزنبرك K بحيث تنزلق كل كتلة بحرية على منضدة ملساء كما بالشكل . اوجد معادلتى حركة الكتلتين باستخدام معادلات لاجرانج على شكل x_1, x_2 هما ازاحتى الكتلتين من موضعى اتزانهما C, D .



(١٥) اوجد معادلة حركة قضيب كتلته m وطوله $2l$ يتذبذب فى مستوى رأسى حول طرف منه مستخدما معادلات لاجرانج ثم اوجد الزمن الدورى فى حالة الذبذبات الصغيرة .

الباب الثالث

معادلات هاملتون Hamilton's equations

كميات الحركة المعممة Generalized momenta

دالة لاجرانج L تكون دالة في الاحداثيات المعممة
$q_1, q_2, \ldots, q_n$ والسرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$
والزمن t أي أن $L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$

تعرف كمية الحركة المعممة p_i من العلاقة

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

معادلات لاجرانج هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

من المعادلتين (3.1)، (3.2) نجد أن

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{3.3}$$

دالة هاملتون Hamiltonian function or Hamiltonian

تعرف دالة هاملتون H
أو هاملتونيان من العلاقة

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \tag{3.4}$$

يمكن حذف السرعات المعممة $\dot{q}_i$ من دالة هاملتون H
وذلك باستخدام العلاقة (3.1) التي تربط بين كميات الحركة p_i

والسرعات المعممة $\dot{q}_i$ وبالتالى نام دالة هاملتون تكون دالة
فى الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ وكميات الحركة
المعممة $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ والزمن t أى أن

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) \quad (3.5)$$

<u>معادلات هاملتون</u> Hamilton's equations

من (3.4) نجد أن

$$dH = \sum_{i=1}^{n} p_i \, d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i - dL \quad (3.6)$$

حيث تعطى dL من

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.7)$$

بالتعويض من (3.7) فى (3.6) واستخدام المعادلتين (3.1)، (3.3)
نحصل على

$$dH = -\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.8)$$

من ناحية أخرى من (3.5) نجد أن

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (3.9)$$

بمقارنة المعادلتين (3.8)، (3.9) نستنتج أن

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \,, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \,, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.10)$$

المعادلات (3.10) تسمى بمعادلات هاملتون

<u>ملحوظة</u>. وتستخدم معادلات هاملتون فى حل مسائل فى الميكانيكا

كما تستخدم أيضا في ميكانيكا الكم والميكانيكا الاحصائية.

حالة خاصة.

اذا لا تحتوي دالة هاملتون H على الزمن t صراحة فإن H تكون ثابتة وتساوي الطاقة الكلية للمجموعة أي أن

$$H = T + V = \text{constant}$$

البرهان. في هذه الحالة $H = H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$

ونجد أن

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

باستخدام معادلات هاملتون (3.10) نحصل على

$$\frac{dH}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \dot{p}_i = 0$$

$$\therefore \quad H = \text{constant}$$

دالة هاملتون هي

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$$

حيث أن كمية الحركة العامة p_i تعطى من

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

حيث $L = T - V$ وطاقة الجهد لا تعتمد على السرعات العامة

$$\therefore \quad H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L$$

حيث أن طاقة الحركة دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات العامة وحسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة فإن

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

ونجد أن

$$H = 2T - (T - V) = T + V$$

أمثلة

مثال (١) نظام ميكانيكي له درجة حرية واحدة ودالة هاملتون له في الصورة $H = q^2\left(1 + \frac{1}{2}p^2\right)$

اكتب معادلات هاملتون لهذا النظام. وإذا كان $p = 0$ ، $q = 1$ ، $\dot{q} = 0$ عند $t = 0$ فأثبت أن

$$q = \operatorname{sech} \sqrt{2}\, t$$

الحل

معادلات هاملتون هي

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

حيث $i = 1$ فقط (توجد درجة حرية واحدة للنظام الميكانيكي في هذا المثال)

حيث أن دالة هاملتون H معطاه في الصورة

$$H = q^2\left(1 + \frac{1}{2}p^2\right)$$

$\therefore$ معادلات هاملتون تأخذ الصورة

$$\dot{q} = p q^2 , \qquad (1)$$

$$\dot{p} = -2q\left(1 + \frac{1}{2}p^2\right)$$

$$\therefore \dot{p} = -q\left(2 + p^2\right) \qquad (2)$$

بقسمة (1) على (2) نحصل على

$$\frac{\dot{q}}{\dot{p}} = \frac{dq}{dp} = -\frac{pq}{p^2+2}$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dq}{q} = -\frac{p\,dp}{p^2+2}$$

بالتكامل ينتج

$$\ln q = -\frac{1}{2}\ln(p^2+2) + c_1$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي

$p = 0$ ، $q = 1$ عند $t = 0$ ونجد أن

$$c_1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

$$\therefore \ln q = \ln(p^2+2)^{-\frac{1}{2}} + \ln\sqrt{2}$$

$$= \ln\sqrt{\frac{2}{p^2+2}}$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2}{p^2+2}}$$

بتربيع الطرفين نجد أن

$$q^2 = \frac{2}{p^2+2}$$

$$\therefore q^2p^2 + 2q^2 = 2$$

$$\therefore p^2 = \frac{2(1-q^2)}{q^2}$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{2}}{q}\sqrt{1-q^2} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نجد أن

$$\dot{q} = \sqrt{2}\,q\sqrt{1-q^2}$$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \sqrt{2}\,q\sqrt{1-q^2}$$

بفصل المتغيرات نأخذ

$$\frac{dq}{q\sqrt{1-q^2}} = \sqrt{2}\, dt$$

بالتكامل نحصل على

$$-\operatorname{sech}^{-1} q = \sqrt{2}\, t + c_2$$

حيث c_2 ثابت يتعين من الشروط الابتدائية المعطاة، وهي $q = 1$ عند $t = 0$ ونجد أن $c_2 = 0$

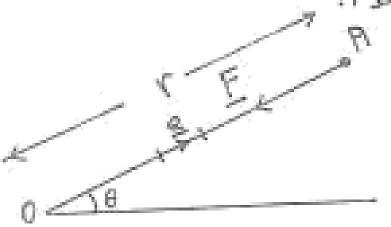
$$\therefore \operatorname{sech}^{-1} q = -\sqrt{2}\, t$$

$$\therefore q = \operatorname{sech}(-\sqrt{2}\, t)$$

$$= \operatorname{sech}(\sqrt{2}\, t)$$

مثال (٢) أوجد دالة هاملتون بدلالة الاحداثيات القطبية وكميتي الحركة المعممة لجسم كتلته m يتحرك في مستوى تحت تأثير قوة جاذبة تتناسب عكسيا مع مربع البعد من المركز الجاذب. ثم أوجد معادلات هاملتون.

الحل



الاحداثيات المعممة هما r, θ اللذان يعينان موضع الجسم A عند أي لحظة. القوة $\underline{F}$ المؤثرة على الجسم في الصورة

$$\underline{F} = -\frac{\lambda}{r^2}\, \underline{e}$$

حيث $\underline{e}$ متجه وحدة في اتجاه $\underline{OA}$، O المركز الجاذب

طاقة حركة الجسم هي

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد تعطى بـ

$$V = -\int \underline{F}\cdot d\underline{r} \quad , \quad d\underline{r} = dr\,\underline{e}$$

$$\therefore V = -\int -\frac{\lambda}{r^2}\underline{e}\cdot dr\,\underline{e} = \lambda\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{\lambda}{r}$$

دالة لاجرانج L تكون في الصورة

$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\lambda}{r}$$

حيث أن

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \qquad (1)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad (2)$$

دالة هاملتون H تعطى بـ

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L$$

$$\therefore H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\lambda}{r} \qquad (3)$$

من (1)، (2) نجد أن $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$ ، $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$

بالتعويض في (3) نجد أن

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2}\right) - \frac{\lambda}{r}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r}$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\lambda}{r^2} \quad , \qquad (4)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad , \qquad (5)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad , \qquad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \qquad (7)$$

نلاحظ أن المعادلتين الأخيرتين (6) ، (7) هما نفس المعادلتين (1) ، (2) .

كذلك نلاحظ أن المعادلة (5) تعطي

$$p_\theta = \text{constant}$$

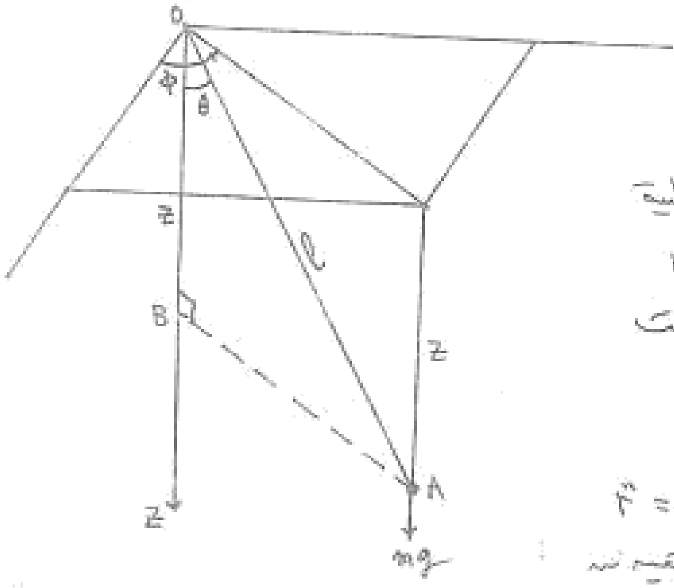
أي أن

$$p_\theta = m r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

<u>مثال (٢)</u> أوجد معادلات هاملتون للبندول الكروي.

الحل

يتعين موضع الجسم A عند أي لحظة بدلالة الاحداثيات القطبية الكروية r, θ, ϕ حيث r يظل ثابت ويساوي ℓ مثلا إذا $r = \ell$ وبالتالي $\dot{r} = 0 , \ddot{r} = 0$ سرعة الجسم تتعين من



$$\underline{v} = (\dot{r} , r\dot{\theta} , r\dot{\phi} \sin\theta)$$
$$= (0 , \ell\dot{\theta} , \ell\dot{\phi} \sin\theta)$$

طاقة الحركة تتعين من

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$$

طاقة الجهد أو طاقة الوضع تتعين من

$$V = -mgz$$

حيث

$$z = OB = \ell \cos\theta$$

مع اعتبار المستوى الأفقي المار بالنقطة الثابتة O مستوى قياسي،

دالة لاجرانج تكون

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + mg\ell\cos\theta$$

يوجد احداثيان معممان هما θ ، ϕ وكمية الحركة المعممة المناظرة هما P_θ ، P_ϕ ، حيث

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta} \quad , \qquad (1)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2 \dot{\phi} \sin^2\theta \qquad (2)$$

دالة هاملتون تتعين من

$$H = P_\theta \dot{\theta} + P_\phi \dot{\phi} - L$$

$$= P_\theta \dot{\theta} + P_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m\ell^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mg\ell\cos\theta$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m\ell^2} \quad , \qquad (3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{m\ell^2 \sin^2\theta} \qquad (4)$$

بالتعويض من (3) ، (4) في دالة هاملتون نحصل على

$$H = \frac{P_\theta^2}{2m\ell^2} + \frac{P_\phi^2}{2m\ell^2 \sin^2\theta} - mg\ell\cos\theta$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{m\ell^2 \sin^3\theta} - mg\ell\sin\theta \, , \quad (5)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \, , \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2} \, , \quad (7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\ell^2 \sin^2\theta} \quad (8)$$

نلاحظ أن المعادلتين (7) ، (8) هما نفس المعادلتين (3) ، (4)

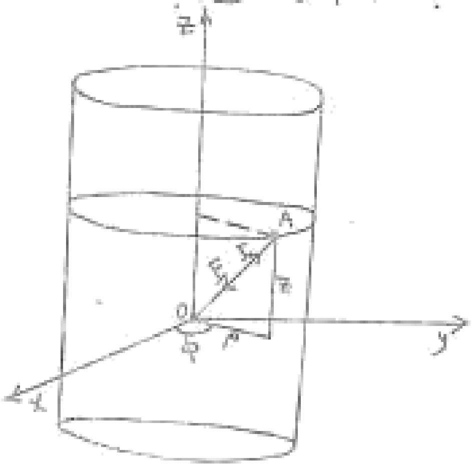
وبتكامل المعادلة (6) نجد أن

$$p_\phi = \text{constant}$$

وباستخدام المعادلة (2) ينتج

$$p_\phi = m\ell^2 \dot{\phi} \sin^2\theta = \text{constant}$$

مثال (٤) يتحرك جسيم كتلته m على سطح اسطوانة دائرية نصف قطرها R تحت تأثير قوة جاذبة نحو نقطة الأصل O الواقعة على محور الاسطوانة ويتناسب مقدار القوة مع بعد الجسم عن O . أوجد دالة هاملتون وأثبت أن الحركة في اتجاه محور الاسطوانة تكون توافقية بسيطة.



الحل

القوة الجاذبة المؤثرة على الجسم $\underline{F}$ تعطى بـ

$$\underline{F} = -K\underline{r}$$

حيث $\underline{r}$ متجه موضع الجسم عند موضعه A ،

$$\underline{r} = (x, y, z)$$

حيث $x^2+y^2=R^2$

لدالة الجهد V تعطى بـ

$$V = -\int \underline{F}\cdot d\underline{r} = k\int \underline{r}\cdot d\underline{r}$$

$$= k\int r\,dr = \frac{1}{2}kr^2$$

$$= \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

سرعة الجسم $\underline{v}$ عند الموضع A بالاحداثيات الاسطوانية تكون في الصورة

$$\underline{v} = (\dot{\rho}, \rho\dot{\phi}, \dot{z})$$

$$\therefore v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

في هذه الحالة نلاحظ ان

$$\rho = R = \text{constant}$$

$$\therefore \dot{\rho} = 0$$

$$\therefore v^2 = R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

لدالة الحركة تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

دالة لاجرانج تكون

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

في هذه الحالة يوجد احداثيان مهملان هما z, ϕ وكميتا الحركة المعممة المناظرة هما P_z, P_ϕ حيث

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \qquad (1)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} \qquad (2)$$

دالة هاملتون تعطى بـ

$$H = P_\phi \dot{\phi} + P_z \dot{z} - L$$

$$= P_\phi \dot{\phi} + P_z \dot{z} - \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

بالتعويض من (1)، (2) عن $\dot{z}$، $\dot{\phi}$ نحصل على

$$H = \frac{P_\phi^2}{2mR^2} + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{P}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad , \qquad (3)$$

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -Kz \quad , \qquad (4)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{mR^2} \quad , \qquad (5)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m} \qquad (6)$$

المعادلتان الأخيرتان (5)، (6) هما نفس المعادلتين (1)، (2)

بتفاضل المعادلة (1) أو (6) نجد أن

$$\dot{P}_z = m \ddot{z} \qquad (7)$$

من المعادلتين (4)، (7) نحصل على

$$m \ddot{z} = -Kz$$

$$\therefore \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{K}{m}$$

وهي تمثل حركة توافقية بسيطة

إذن حركة الجسم في اتجاه محور الاسطوانة هي حركة توافقية بسيطة

تمارين

(١) جسيم كتلته m يتحرك في مجال لطاقة جهده $V(r,\theta)$ حركة مستوية حيث (r,θ) تعين موضع الجسيم بالاحداثيات القطبية. اوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون.

(٢) يتحرك جسيم كتلته m في مجال محافظ لطاقة جهده $V(x,y,z)$ اوجد دالة هاملتون واثبت أن معادلات هاملتون تختزل الى معادلات نيوتن للحركة.

(٣) اوجد دالة هاملتون لجسيم كتلته m يتحرك في مجال لطاقة جهده $V(r,\theta,\phi)$ حيث يتعين موضع الجسيم بالاحداثيات القطبية الكرية (r,θ,ϕ) ثم اوجد معادلات هاملتون.

(٤) اذا علم أن طاقة الحركة والجهد لنظام ميكانيكي هما

$$T = mk\left(\dot{q}_1^{2} + \dot{q}_2^{2}\sin^2 q_1\right) ,$$

$$V = -2mg\cos q_1$$

اوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون ثم اثبت أن

$$p_2 = \text{constant} ،$$

$$\dot{q}_1^{2} + \frac{c^2}{\sin^2 q_1} - \frac{2g}{K}\cos q_1 = \text{constant}$$

حيث K ، c ثوابت.

(٥) جسيم كتلته m يتحرك في مجال لطاقة جهده $V(\rho,\phi,z)$ حيث ρ, ϕ, z هي الاحداثيات الاسطوانية لموضع الجسيم

اوجد دالة هاملتن ومعادلات هاملتن للجسم.

(٦) نظام ميكانيكي ذو درجتين حرية ودالات طاقة الحركة وطاقة الجهد هما

$$2T = \dot{x}^2 + x^2\dot{y}^2 \quad , \quad 2V = k^2 x^2$$

اثبت أن

$$x^2 = a \sin(2kt + b) + c$$

حيث a، b، c، k ثوابت.

(٧) باستخدام معادلات هاملتن استنتج معادلات حركة جسم يتذبذب حركة توافقية بسيطة.

(٨) يتحرك جسم كتلته m تحت تأثير الجاذبية على الحلزون ($z = k\phi$، $\rho = a$ حيث k، a ثوابت)، احداثيات الجسم (ρ, ϕ, z) متزن لحظة. اوجد معادلات هاملتن للحركة.

(٩) اذا كانت طاقتي الحركة والجهد لمجموعة ديناميكية هما

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad , \quad V = f(q_1 - q_2)$$

اذا كان $q = q_1 - q_2$، $b = q_1 + q_2$ فاوجد دالة هاملتن H وبين أن كمية الحركة P_b تظل ثابتة. اثبت كذلك أن

$$t - t_0 = \frac{1}{2}\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{H - P_b^2 - f(q)}}$$

حيث $q = q_0$ عندما $t = t_0$.

(١٠) جسم كتلته m يتحرك على السطح الداخلي لمخروط رأسه أملس نازلًا زاوية نصف رأسية هي α اوجد دالة هاملتن ومعادلات هاملتن.

الباب الرابع

دالة راوث Routh's function

في بعض المسائل الديناميكية نجد أن دالة لاجرانج L لا تظهر فيها صراحة بعض الاحداثيات العممة وإنما توجد السرعات العممة المناظرة لهذه الاحداثيات العممة المختفية.

نستخدم الاحداثيات العممة اللازمة لتعيين موضع مجموعة ديناميكية هي $q_1, q_2, \ldots, q_n$ وأن الاحداثيات $q_1, q_2, \ldots, q_k$ تظهر صراحة في دالة لاجرانج L بينما لا تظهر الاحداثيات $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$ صراحة في L وعددها $n-k$ ولنسميها

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-k}$$

أي أن

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ldots, \dot{\theta}_{n-k}) \quad (4\cdot1)$$

هنا يعني أن

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_\beta} = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n-k$$

ومن ثم نستنتج من معادلات لاجرانج المرافقة للاحداثيات المختلفة أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta}\right) = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n-k$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta} = C_\beta, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n-k \quad (4\cdot2)$$

حيث C_β ثابت لا يعتمد على الزمن

نعرف دالة راوث بالصورة

$$R = \sum_{\beta=1}^{n-k} c_\beta \, \dot{\theta}_\beta - L \qquad (4.3)$$

نلاحظ من (4.1) و (4.2) أن

$$\dot{\theta}_\beta = \dot{\theta}_\beta (q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}) \qquad (4.4)$$

وهذا يعني أن

$$R = R(q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}) \qquad (4.5)$$

$$\therefore dR = \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial q_\beta} dq_\beta + \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-k} \frac{\partial R}{\partial c_\beta} dc_\beta \qquad (4.6)$$

ومن (4.3) نجد أن

$$dR = \sum_{\beta=1}^{n-k} c_\beta \, d\dot{\theta}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-k} \dot{\theta}_\beta \, dc_\beta - dL \qquad (4.7)$$

ومن (4.1) نجد أن

$$dL = \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_\beta} dq_\beta + \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta} d\dot{\theta}_\beta \qquad (4.8)$$

بالتعويض من (4.8) في (4.7) نحصل على بعد استخدام (4.2)

$$dR = -\sum_{\beta=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_\beta} dq_\beta - \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-k} \dot{\theta}_\beta \, dc_\beta \qquad (4.9)$$

بمقارنة المعادلتين (4.6) و (4.9) نحصل على

$$\frac{\partial R}{\partial q_\beta} = -\frac{\partial L}{\partial q_\beta} , \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} , \quad \beta = 1, 2, \dots, k \qquad (4.10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_\beta} = \dot{\theta}_\beta , \quad \beta = 1, 2, \dots, n-k \qquad (4.11)$$

بالتعويض عن (4.10) في معادلات لاجرانج نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_\beta} = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, K \qquad (4.12)$$

المعادلات (4.12) عددها K (حيث $K < n$) وبحلها نجد الاحداثيات المهمة $q_1, q_2, \dots, q_K$ بدلالة الزمن t

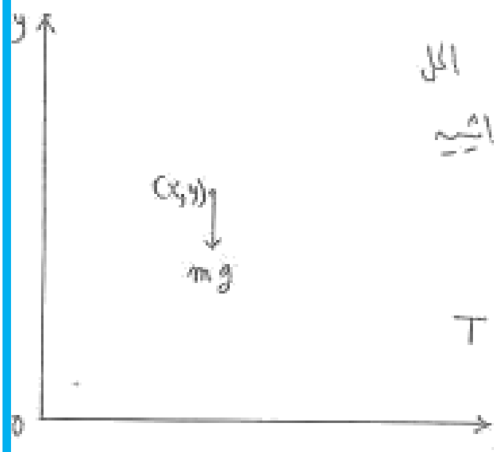
أما الاحداثيات الباقية $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-K}$ نوجدها بحل المعادلة (4.11) ونجد أن

$$\theta_\beta = \int \frac{\partial R}{\partial c_\beta}\, dt, \quad \beta = 1, 2, \dots, n-K$$

<u>ملاحظة</u>. نلاحظ أن دالة راوث تحقق معادلات لاجرانج للاحداثيات المهمة $q_1, q_2, \dots, q_K$ وتسمى معادلات راوث.

<u>أمثلة</u>

<u>مثال (1)</u> اوجد دالة راوث في حالة حركة جسيم تحت تأثير الجاذبية الأرضية مع اهمال مقاومة الهواء وكذلك اهمال دوران الأرض.



الحل

نعين موضع الجسيم بالاحداثيين (x, y)

طاقة حركة الجسيم هي

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

طاقة وضع الجسيم هي

$$V = mgy$$

دالة لاجرانج [illegible]

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y$$

نلاحظ أن دالة لاجرانج لا تحتوي على الاحداثي x صراحة
فمن ثم يكون الاحداثي x دوريا ($k=1$) وتكون دالة راوث
في الصورة [illegible]

$$R = c_1 \dot{\theta}_1 - L$$

حيث $\theta_1 = x$ أي $\dot{\theta}_1 = \dot{x}$ ونضع $c_1 = c$
وبذلك تأخذ دالة راوث الصورة

$$R = c \dot{x} - L$$

$$= c \dot{x} - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m g y$$

حيث

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

ومنها $\dot{x} = \frac{c}{m}$ وبذلك فإن دالة راوث تأخذ الصورة

$$R = \frac{c^2}{2m} + m g y - \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

<u>مثال (٢)</u> يتحرك جسيم كتلته m في مستوى في مجال طاقة جهده
$V = \frac{-m}{r^2}$ حيث r بعد الجسيم من نقطة الاحداثيات.
إذا كانت الشروط الابتدائية للحركة هي
$r = 1$ ، $\theta = 0$ ، $\dot{r} = \sqrt{2}$ ، $\dot{\theta} = 2$ عند $t = 0$
فأوجد دالة راوث ثم أوجد الاحداثيات المحددة بدلالة
الزمن t .

الحل

طاقة حركة الجسم في الاحداثيات القطبية تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{m}{r^2}$$

نلاحظ أن الاحداث المهمل θ لا يظهر صراحة في L وتكون دالة راوث هي

$$R = c_1 \dot{\theta}_1 - L$$

حيث $\theta_1 = \theta$ أي $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}$ ، نضع $c_1 = c$ وتأخذ دالة راوث الصورة

$$R = c\dot{\theta} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{m}{r^2}$$

حيث

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \qquad (1)$$

ومنها نجد أن

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m r^2}$$

بالتعويض في دالة راوث نجد أن

$$R = \frac{c^2}{2 m r^2} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{m}{r^2} \qquad (2)$$

لتعيين قيمة الثابت c نستخدم الشروط الابتدائية للحركة وهي $r = 1$ ، $\dot{\theta} = 2$ عند $t = 0$ في المعادلة (1) نجد أن

$$c = m (1)^2 (2) = 2m$$

بالتعويض عن قيمة الثابت c في المعادلة (2) نجد أن دالة راوث تأخذ الصورة

$$R = \frac{m}{r^2} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \qquad (3)$$

لإيجاد الاحداثي المهم r نستخدم معادلة راوث لهذا الاحداثي

أي أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \qquad (4)$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial R}{\partial \dot r} = -m\dot r \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-2m}{r^3}$$

بالتعويض في (4) نحصل على

$$-m\ddot r + \frac{2m}{r^3} = 0$$

أو هي

$$\ddot r - \frac{2}{r^3} = 0$$

بالضرب في $2\dot r$ والتكامل نجد أن

$$\dot r^2 + \frac{2}{r^2} = \text{constant} = A$$

حيث الثابت A يعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي

$r=1$ ، $\dot r = \sqrt{2}$ عند $t=0$ ونجد أن $A=4$

$$\therefore \dot r^2 + \frac{2}{r^2} = 4$$

ومنها نجد أن

$$\dot r^2 = 4 - \frac{2}{r^2} = \frac{4}{r^2}\left(r^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{2}{r}\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}} = 2\,dt$$

بالتكامل من بداية الحركة $t=0$ الى لحظة ما t نجد أن

$$\int_1^r \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}} = 2\int_0^t dt$$

$$\therefore \left[\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}\right]_1^r = 2[t]_0^t$$

$$\therefore \sqrt{r^2-\frac{1}{2}} = 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بالتربيع نجد

$$r = \sqrt{4t^2 + 2\sqrt{2}\,t + 1}$$

ومنه تعطى الاحداثي المسمى r بدلالة الزمن t
الاحداثي الثانوي θ

$$\theta = \int \frac{\partial R}{\partial c}\, dt$$

حيث $\frac{\partial R}{\partial c}$ نحصل عليه من (2) ونجد

$$\theta = \int \frac{c}{mr^2}\, dt = 2\int \frac{dt}{r^2}$$

وذلك بعد التعويض عن $c = 2m$ ونكون

$$\theta = 2\int \frac{dt}{4t^2+2\sqrt{2}\,t+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{1}{8}}$$

$$\theta = \sqrt{2}\tan^{-1}(2\sqrt{2}\,t+1) + B$$

حيث الثابت B يتعين من الشرط الابتدائي وهو
$\theta = 0$ عند $t = 0$ ونجد $B = -\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

$$\therefore \theta = \sqrt{2}\tan^{-1}(2\sqrt{2}\,t+1) - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

ومنه تعطينا الاحداثي المسمى θ بدلالة الزمن t

تمارين

(1) يتحرك جسيم في مجال طاقة حركته $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2\dot{y}^2)$
وطاقة جهده $V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ اوجد دالة راوث

ثم أثبت أن $x^2 = A \sin(2wt + B)$

حيث A، B، w ثوابت

(٢) يتحرك جسم كتلته m تحت تأثير قوة جاذبة تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن المركز الجاذب. أوجد دالة راوث.

الباب الخامس

حساب التغاير Calculus of variations

معادلة اويلر Euler's equation

المسألة التي غالبا ما تظهر في الرياضيات هي مسألة إيجاد المنحنى $y = Y(x)$ الذي يصل بين النقطتين $x = x_1$ ، $x = x_2$ بحيث يكون التكامل

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \tag{5.1}$$

أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن ، ويسمى كذلك القيمة القصوى حيث $y' = \frac{dy}{dx}$. المنحنى نفسه يسمى منحنى النزاية العظمى او النزاية الصغرى .

سنثبت الآن أن الشرط الضرورى لكى يكون للتكامل (5.1) نزاية كبرى أو نزاية صغرى هو

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5.2}$$

المعادلة (5.2) تسمى معادلة اويلر أو لاجرانج .

الاثبات .

نفرض أن المنحنى الذي يجعل I نزاية كبرى أو نزاية صغرى يعطى بـ $y = Y(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$. عندئذ يكون

$y = Y(x) + \epsilon \eta(x) = Y + \epsilon \eta$ حيث η اختيارية ،

ϵ لا يعتمد على x هو المنحنى المجاور الذي يمر خلال $x = x_1$ ، $x = x_2$ اذا اخترنا η بحيث يكون

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{5.3}$$

قيمة I لهذا المنحنى المجاور هي

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y+\epsilon\eta, Y'+\epsilon\eta')\, dx$$

وهذه تكون قيمة قصوى عندما $\epsilon=0$ ، الشرط الضروري لكي تكون هذه القيمة كذلك هو

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$$

لكن

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0 \qquad (5.4)$$

باستخدام التكامل بالتجزئة والشرط (5.3) نجد أن

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\, dx = \left.\eta \frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \qquad (5.5)$$

بالتعويض من (5.5) في (5.4) نحصل على

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx = 0$$

وحيث أن η اختيارية تماما

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ملاحظة: يمكن تعميم النتيجة السابقة إلى الحالة

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

تكون منحنيات النزاع العظمى أو النزاع الصغرى ، أى التى تجعل
I نزاع عظمى أو صغرى تحقق معادلات أويلر أو لاجرانج

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.6)$$

مبدأ هاملتون Hamilton's principle

التشابه الواضح بين (5.2) أو (5.6) ومعادلات لاجرانج التى
سبق دراستها لمجموعة ميكانيكية يساعد على دراسة مسألة
تحديد منحنيات النزاع العظمى أو النزاع الصغرى للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt$$

أو باختصار للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

حيث $L = T - V$ هى دالة لاجرانج للمجموعة الميكانيكية.
وبمقارنة هذا التكامل بالتكامل السابق

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n', x)\, dx$$

فإننا نجد أن الشرط الضرورى لوجود منحنى نزاع عظمى أو نزاع صغرى
هو

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

وهذه بالضبط هى معادلات لاجرانج . هذه النتيجة مكنت
هاملتون من صياغة المبدأ التكاملى العام المعروف بمبدأ
هاملتون على النحو التالى :
يمكن لمجموعة ميكانيكية ما فقط أن تتحرك من الزمن t_1 إلى الزمن t_2
بطريقة تجعل الكمية $\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$ لها قيمة قصوى . هذه الكمية تسمى

أحيانا تكامل الفعل . وغالبا ما يكتب في الصورة

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0$$

حيث δ هو رمز التغاير .

أمثلة

مثال (١) . اوجد المنحنى الذى يجعل التكامل

$$I = \int_0^{\pi} \left(y^2 + y'^2 - 2y \sin x \right) dx$$

نهاية تصغرى بحيث $y(0) = 1$ ، $y(\pi) = 0$.

الحل

في هذه الحالة الدالة F في الصورة

$$F = y^2 + y'^2 - 2y \sin x$$

والمنحنى المطلوب يحقق معادلة اويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\sin x$$

بالتعويض في معادلة اويلر نحصل على

$$2y'' - 2y + 2\sin x = 0$$

أو

$$y'' - y = -\sin x$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$$

الشرطان $y(0) = 1$ ، $y(\pi) = 0$ نحصل منهما على الثابتين c_1 ، c_2

ونجد أن

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 e^{\pi} + c_2 e^{-\pi} = 0$$

بحل المعادلتين الخطيتين في c_1, c_2 نجد أن $c_1 = \frac{e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$ ، $c_2 = \frac{-e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$

ونجد أن المنحنى المطلوب هو

$$y = \frac{e^{x-\pi} - e^{\pi - x}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} + \frac{1}{2}\sin x$$

$$y = \frac{\sinh(\pi - x)}{\sinh \pi} + \frac{1}{2}\sin x$$

<u>مثال (٥)</u> اوجد المنحنى الذى يصل بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) بحيث يكون له أقل طول.

الحل

طول المنحنى الذى يصل بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) يعطى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

المنحنى المطلوب يجعل I نهاية صغرى أى يحقق معادلة اويلر حيث الدالة F في الصورة

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

بالتعويض في معادلة اويلر نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right] = 0$$

$$\therefore \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{constant}$$

$$\therefore y' = \text{constant}$$

$$\therefore y = Ax + B$$

أى أن المنحنى هو خط مستقيم ويمكن تعيين الثابتين A ، B من الشرطين

$y(x_1) = y_1 \quad , \quad y(x_2) = y_2$

$$\therefore \quad y_1 = A x_1 + B \quad ,$$
$$y_2 = A x_2 + B$$

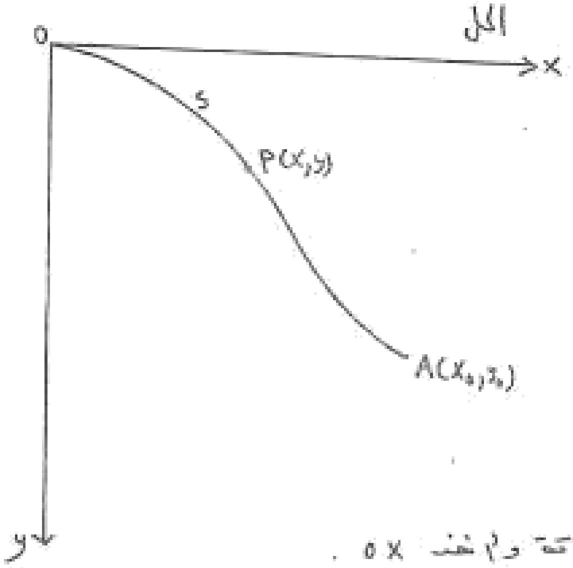
بحلهما نجد أن $A = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، $B = y_1 - \dfrac{(y_2 - y_1) x_1}{x_2 - x_1}$

∴ المنحنى المطلوب هو الخط المستقيم

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

<u>مثال (٢)</u>. جسم ينزلق من السكون عند نقطة ما على سلك أملس في مستوى رأسي إلى نقطة أخرى تحت تأثير الجاذبية، أوجد الزمن الذي يستغرقه الجسم في ذلك ثم أوجد المنحنى الذي يأخذه السلك حتى يكون الزمن أقل ما يمكن.

الحل



نفرض أن نقطتي الابتداء والانتهاء هما نقطة الأصل O والنقطة $A(x_0, y_0)$ على الترتيب وأن $P(x,y)$ هو موضع الجسم عند اللحظة t.

من مبدأ ثبوت الطاقة وأخذ OX لقياس طاقة الجهد نجد:

$$T_P + V_P = T_0 + V_0$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m g y = 0 + 0$$

الإشارة السالبة لطاقة الجهد لأن P أسفل OX

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

الزمن τ الذي يستغرقه الجسم من O الى A يعطى بـ

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y=y_0} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_0^{y_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

المنحنى الذي يجعل التكامل أصغر ما يمكن حتى يكون الزمن أقل ما يمكن يحقق معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

حيث الدالة F هي

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy^3}}$$

بالتعويض في معادلة أويلر نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y^3}} = 0$$

$$\therefore \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2\,y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{1}{2}\frac{y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y^3}} = 0$$

$$\therefore \frac{y''(1+y'^2)}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{y'^2\,y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{1}{2}\frac{y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} + \frac{1}{2}\frac{1+y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} = 0$$

الحدان الأول والثاني يختصران الى $\frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}}$ ، والحدان الثالث والرابع يختصران الى $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}}$ ونحصل على

$$\frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} = 0$$

$$\therefore \frac{y\,y''}{\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} + \frac{1}{2}\frac{1+y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} = 0$$

$$\therefore 2yy'' + 1 + y'^2 = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وخالية من x وحلها نضع $u = y'$ فإنه $y'' = u\dfrac{du}{dy}$ وتصبح المعادلة التفاضلية في الصورة

$$2yu\frac{du}{dy} + 1 + u^2 = 0$$

أو هي

$$\frac{2u\,du}{1+u^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

بالتكامل نجد أن

$$\ln(1+u^2) + \ln y = \ln a$$

$$\therefore (1+u^2)y = a$$

$$\therefore u = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

بفصل المتغيرات فإن

$$dx = \sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy$$

بالتكامل نجد أن

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy + b$$

لحساب التكامل نضع $y = a\sin^2\phi$ فإن

$$x = 2a\int \sin^2\phi\,d\phi + b$$

$$\therefore x = a\int (1-\cos 2\phi)\,d\phi + b$$

$$x = \frac{a}{2}(2\phi - \sin 2\phi) + b$$

حيث أن المنحنى يمر بنقطة الأصل O ، وبوضع $y=0$ نجد أن $\phi = 0$

وبوضع $\phi = 0$ ، $x = 0$ نجد أن $b = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{2}\left(2\phi - \sin 2\phi\right)$$

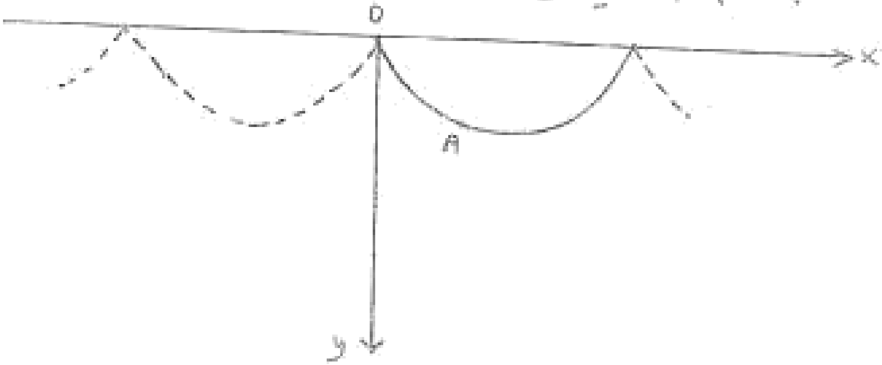
نضع $\theta = 2\phi$ ، $c = \frac{a}{2}$ فنجد أن

$$x = c\left(\theta - \sin\theta\right) \qquad (1)$$

$$\therefore \quad y = \frac{a}{2}\left(1 - \cos 2\phi\right)$$

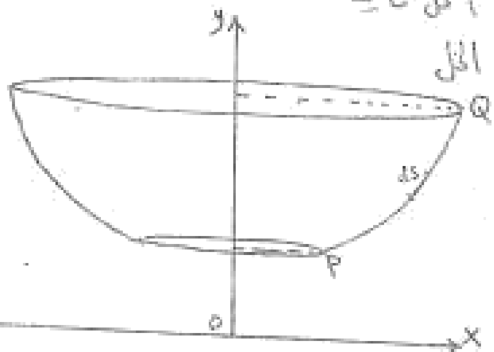
$$y = c\left(1 - \cos\theta\right) \qquad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) هما المعادلتان البارامتريتان للمنحنى الذى يأخذه السلك حتى يكون الشد أقل ما يمكن . هذا المنحنى هو المعروف باسم السيكلويد



مثال (٤). يراد لمنحنى مثبت طرفاه عند P ، Q أن يدور حول المحور y دورة كاملة ليولد سطح دوران . اوجد المنحنى الذى يجعل مساحة السطح أقل ما يمكن .

الحل



العنصر ds من المنحنى يولد سطح مساحته

$2\pi x \, ds$

أى مساحته

$2\pi x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

مساحة السطح الدوران الناشئ من دوران المنحنى يعطى من

$$I = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} x\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

المنحنى الذى يجعل I أقل ما يمكن يعين من معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

حيث الدالة F تكون

$$F = x\sqrt{1+y'^2}$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{x y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

بالتعويض نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

بالتكامل نجد

$$\frac{x y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{Constant} = c$$

$$\therefore x^2 . y'^2 = c^2(1+y'^2)$$

$$\therefore y'^2(x^2-c^2) = c^2$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$y = c\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}} = c \cosh^{-1}\frac{x}{c} + b$$

$$\therefore \quad x = c \cosh\left(\frac{y-b}{c}\right)$$

معادلة أويلر - بواسون Euler - Poisson equation

عندما تكون الدالة F، تعتمد على مشتقات من رتب أعلى، أى فى حالة إيجاد المنحنى الذى يصل بين النقطتين $x = x_1$ ، $x = x_2$ حيث يكون التكامل

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\, dx \qquad (5.7)$$

أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن فإنه يمكن اثبات أن الشرط الضروري لكي يكون للتكامل (1) قيمة قصوى هو

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} - F_y = 0 \qquad (5.8)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة $2n$ وتسمى معادلة أويلر - بواسون.

الشروط الحدية تكتب في الصورة

$$\left.\begin{aligned} &y(x_1) = y_1, \; y'(x_1) = y_1', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}, \\ &y(x_2) = y_2, \; y'(x_2) = y_2', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_2) = y_2^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

<u>مثال.</u> اوجد منحنى الدالة الذي يجعل التكامل الآتي قيمة قصوى

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y''^2 + x^2)\, dx$$

الشروط الحدية هي

$$y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \; y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -1.$$

الحل

في هذه الحالة $n = 2$ ومعادلة أويلر - بواسون تكون

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - F_y = 0$$

حيث

$$F = y^2 - y''^2 + x^2$$

نوجد المشتقات الآتية

$$F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = -2y'', \quad F_y = 2y$$

بالتعويض نجد أن

$$0 - \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') - 2y = 0$$

$$\therefore y^{(4)} - y = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

حيث الثوابت الأربعة c_1 , c_2 , c_3 , c_4 تتعين من الشروط الحدية

الأربعة $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{2})=0$ ، $y'(\frac{\pi}{2})=-1$

ونحصل على أربعة معادلات في الصورة

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 , \qquad (1)$$

$$c_1 - c_2 + c_4 = 0 , \qquad (2)$$

$$c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 0 , \qquad (3)$$

$$c_1 e^{\frac{\pi}{2}} - c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3 = -1 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (1) ، (4) وكذلك بطرح (3) من (2) نجد أن

$$(1 + e^{\frac{\pi}{2}}) c_1 + (1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) c_2 = 0 , \qquad (5)$$

$$(1 - e^{\frac{\pi}{2}}) c_1 - (1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) c_2 = 0 \qquad (6)$$

بحل المعادلتين (5) ، (6) نجد أن $c_1 = c_2 = 0$

المعادلتان (1) ، (2) تعطيان $c_3 = 1$ ، $c_4 = 0$

∴ المنحنى المطلوب هو $y = \cos x$

تمارين

(1) أثبت أنه إذا كانت الدالة F في التكامل $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$ لا تعتمد على x ، أي أن $F = F(y, y')$ فإن التكامل تكون له قيمة قصوى إذا كان $F - y' F_{y'} = c$ حيث c ثابت.

(2) استخدم تمرين (1) لحل مثال (2)

(3) أعد حل مثال (4) مستخدما تمرين (1) .

(4) أوجد المنحنى الذي يجعل التكامل $I = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2y e^{2x})$ نهاية قصوى حيث $y(0) = \frac{1}{3}$ ، $y(1) = \frac{1}{3} e^2$.

(٥) اوجد منحنى النزاية العظمى او الصغرى للتكامل

$$I = \int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx$$

حيث $y(a) = A$ ، $y(b) = B$.

(٦) استخدم الاحداثيات الدائرية جرهم لايجاد البعد بين نقطتين على سطح اسطوانة دائرية ثم اوجد معادلة الخط الواصل بين هاتين النقطتين متحكمنا الخط هو أقصر بعد بينهما.

(٧) يراد لمنحنى مثبت طرفاه عند P ، Q أن يدور حول المحور x دورة كاملة اثبت أن ساحة السطح الدوران الناشئ I تساوي

$$2\pi \int_{x_p}^{x_Q} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

اثبت أن المنحنى الذي يجعل ساحة السطح الدوران I أقل ما يمكن هو منحنى الكتينة.

(٨) اوجد المنحنى الذي يجعل التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\,dx$ نهاية قصوى حيث $y(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{2})=1$.

(٩) اوجد منحنى الدالة الذي يجعل التكامل الآتي نهاية قصوى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (16y^2 - y''^2 + x^2)\,dx$$

(١٠) اثبت أن القيمة القصوى للتكامل $I=\int_{x_1}^{x_2} (p^2 y'^2 + q^2 y^2)\,dx$ هي $p^2 y y' \Big]_{x_1}^{x_2}$

الباب السادس

التحويلات القانونية ومعادلة هاملتون - جاكوبى

Canonical transformations and Hamilton-Jacobi equation

التحويلات القانونية Canonical transformations

سهولة حل العديد من المسائل فى الميكانيكا تتوقف على اختيار الاحداثيات المعممة التى تستخدم . وتبعا لذلك فإنه يفضل اختيار التحويلات من مجموعة ما لاحداثيات الموضع وكمية الحركة الى مجموعة أخرى.

اذا كانت q_α ، p_α ترمزان لاحداثيات الموضع وكمية الحركة وكانت Q_α ، P_α هما الاحداثيات الجديدة للموضع وكمية الحركة فإن التحويل يكون

$$P_\alpha = P_\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t),$$
$$Q_\alpha = Q_\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

او للاختصار يكون

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t),$$
$$Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

سنقتصر على التحويلات التى تسمى قانونية وهى التى توجد لها دالة $\mathcal{H}$ تسمى دالة هاملتون فى الاحداثيات الجديدة وتحقق العلاقتين

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \qquad (6.1)$$

فى مثل هذه الحالة نسمى Q_α ، P_α الاحداثيات القانونية. دالتا لاجرانج فى الاحداثيات القديمة والجديدة هما $L(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $\mathcal{L}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ على الترتيب

وترتبطان بالة هاملتون $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $\mathcal{H}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$
بواسطة المعادلتين

$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad , \quad \mathcal{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{L} \qquad (6.2)$$

شرط التحويلات القانونية.

نظرية.

التحويل $Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ يكون
قانونيا اذا كان $\sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha$ هو تفاضلا تاما.
ويمكن اثبات أن التحويل يكون قانونيا اذا وجدت دالة G
تحقق العلاقة $\dfrac{dG}{dt} = L - \mathcal{L}$.

تسمى G الدالة المولدة generating function

مثال (١). اثبت أن التحويل $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ ، $Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$
يكون قانونيا.

الحل

نستخدم النظرية السابقة ، ومنه الحالة نثبت أن
$p\,dq - P\,dQ$ هو تفاضل تام.

$$p\,dq - P\,dQ = p\,dq - \frac{1}{2}(p^2+q^2)\frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\;\frac{p\,dq - q\,dp}{p^2}$$

حيث أن

$$= p\,dq - \frac{1}{2}(p\,dq - q\,dp)$$

$$= \frac{1}{2}(p\,dq + q\,dp) = d\left(\frac{1}{2}pq\right)$$

اذا $p\,dq - P\,dQ$ تفاضل تام ، وبالتالي فإن هذا التحويل
يكون قانونيا.

مثال (٥). إذا كانت الدالة المولدة $F=F(q_\alpha,Q_\alpha,t)$ ، [illegible]
فإحداثيات الموضع القديمة والجديدة q_α ، Q_α على الترتيب
وأيضاً دالة في الزمن t فأثبت أن

$$\mathcal{H}=\frac{\partial F}{\partial t}+H \quad ، \quad P_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \quad ، \quad p_\alpha=\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$$

حيث

$$\dot{Q}_\alpha=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \quad ، \quad \dot{P}_\alpha=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}$$

الحل

حيث أن

$$\frac{dF}{dt}=L-\mathcal{L} \quad , \qquad (1)$$

$$H=\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad , \qquad (2)$$

$$\mathcal{H}=\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha-\mathcal{L} \qquad (3)$$

بطرح (٣) من (٢) نجد أن

$$H-\mathcal{H}=\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha-\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha-(L-\mathcal{L}) \qquad (4)$$

بالتعويض من (١) في (٤) نجد أن

$$\frac{dF}{dt}=\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha-\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha+\mathcal{H}-H$$

أي أن

$$dF=\sum p_\alpha\, dq_\alpha-\sum P_\alpha\, dQ_\alpha+(\mathcal{H}-H)\,dt \qquad (5)$$

إذا كانت $F=F(q_\alpha,Q_\alpha,t)$ فإن

$$dF=\sum \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\sum\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}dQ_\alpha+\frac{\partial F}{\partial t}dt \qquad (6)$$

بمقارنة المعادلتين (٥) ، (٦) نستنتج أن

$$p_\alpha=\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \quad , \quad P_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \quad , \quad \mathcal{H}-H=\frac{\partial F}{\partial t}$$

المعادلات $\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}$ ، $\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$ تبقى صحيحة ،

$\mathcal{H}$ هي دالة هاملتون في الاحداثيات P_α ، Q_α .

The Hamilton-Jacobi equation معادلة هاملتون - جاكوبي

اذا امكننا ايجاد التحويل التلاؤمي الذي يؤدي الى ان تكون $\mathcal{H} \equiv 0$ فاننا نرى ان $\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} = 0$ ، $\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} = 0$

اي ان P_α ، Q_α يكونان ثابتين . تسمى في هذه الحالة P_α ، Q_α احداثيات مستقرة . وعلى ذلك فانه باستخدام التحويل نستطيع ايجاد p_α ، q_α وبالتالي نحدد حركة المجموعة .

الخطوات تتوقف على ايجاد الدالة المولدة الصحيحة ، حيث ان $\mathcal{H} = \frac{\partial F}{\partial t} + H$ حيث F الدالة المولدة . وبوضع $\mathcal{H} \equiv 0$ فان هذه الدالة المولدة يجب ان تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H(p_\alpha, q_\alpha, t) = 0$$

او

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, t\right) = 0 \qquad (6.3)$$

وذلك لان

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \qquad (6.4)$$

المعادلة (6.3) تسمى معادلة هاملتون - جاكوبي .

Solution of the Hamilton-Jacobi equation حل معادلة هاملتون - جاكوبي

نحن الآن بحاجة الى ايجاد حل مناسب لمعادلة هاملتون - جاكوبي . وحيث ان هذه المعادلة تحتوي على $n+1$ متغيرات مستقلة ،

أي $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$ فإن الحل الكامل سوف يشتمل على $n+1$ ثابتا. بحذف الثابت المضاف الاختياري والرمز إلى الثوابت المتبقية n بالرموز β_1، β_2، ....، β_n، فإن هذا الحل يمكن كتابته في الصورة

$$F = F(q_1, q_2, \ldots, q_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, t) \quad (6.5)$$

عندما نحصل على هذا الحل (6.5) نستطيع منه أن نحدد الإحداثيات المعممة وكمية الحركة بواسطة العلاقة (6.4)، أي بواسطة $p_\alpha = \dfrac{\partial F}{\partial q_\alpha}$.

وأيضا إذا تممنا من الإحداثيات الجديدة كمية الحركة P_α مع الثابت β_α فإن

$$Q_\alpha = \frac{\partial F}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta_\alpha} = \gamma_\alpha \quad (6.6)$$

حيث γ_α، $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ ثوابت أخرى.

باستخدام هذه العلاقات نستطيع منها إيجاد q_α كدوال في β_α، γ_α، t وهذا يعطي حركة المجموعة.

حالة عدم اعتماد دالة هاميلتون على الزمن Case where Hamiltonian is independent of time.

للحصول على الحل الكامل لمعادلة هاميلتون - جاكوبي يكون من المفيد غالبا أن نبحث عن حلا على الصورة:

$$F = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \cdots + S_n(q_n) + K(t) \quad (6.7)$$

حيث كل دالة في الطرف الأيمن تعتمد فقط على متغير واحد. هذه الطريقة، المسماة بطريقة فصل المتغيرات، تكون مفيدة

بصفة خاصة عندما لا تعتمد دالة هاملتن صراحة على الزمن .

بذلك تصبح (6.3)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = 0 \qquad (6.8)$$

بالتعويض من (6.7) في (6.8) نجد أن

$$\frac{dK}{dt} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = 0 \qquad (6.9)$$

حيث S في (6.9) هو الجزء الذي لا يعتمد على الزمن أي أن

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n) \qquad (6.10)$$

$$\therefore \quad H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = -\frac{dK}{dt} \qquad (6.11)$$

الطرف الأيسر في (6.11) دالة في الزمن t فقط والطرف الأيمن دالة في $q_1, q_2, \dots, q_n$ وبالتالي يجب أن كل طرف يساوي ثابت E أي أن $-\frac{dK}{dt} = E$ وبالتالي

$$K(t) = -Et \qquad (6.12)$$

أيضاً يكون

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E \qquad (6.13)$$

E مقدار ثابت يمثل الطاقة الكلية للمجموعة .

مثال

(أ) اكتب دالة هاملتون لمذبذب توافقي بسيط كتلته m .

(ب) اكتب معادلة هاملتن - جاكوبي المناظرة .

(جـ) استخدم طريقة هاملتون - جاكوبي لتحديد حركة المذبذب .

الحل

(أ) نعتبر q هي إحداثي الموضع للمذبذب التوافقي البسيط

تتحرك q في مستقيم.

طاقة الحركة T وطاقة الجهد V تعطيان بالعلاقتين

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad , \quad V = \frac{1}{2} K q^2$$

حيث K ثابت الزنبرك

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} K q^2$$

كمية الحركة p تكون

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

$$\therefore \dot{q} = \frac{p}{m} \qquad (1)$$

دالة هاملتون هي

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$= p \dot{q} - \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} K q^2 \right) \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) نجد

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2 = H(p, q) \qquad (3)$$

(ب) معادلة هاملتون – جاكوبي هي

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q} , q \right)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} K q^2 = 0 \qquad (4)$$

(ج) نفرض حلا على الصورة

$$F = S(q) + K(t) \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) في (4) نجد

$$\frac{dK}{dt} + \frac{1}{2m} \left(\frac{dS}{dq} \right)^2 + \frac{1}{2} K q^2 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2m} \left(\frac{dS}{dq} \right)^2 + \frac{1}{2} K q^2 = - \frac{dK}{dt}$$

الطرف الأيمن دالة في t فقط والطرف الأيسر دالة في q فقط، فيصبح كل طرف يساوي ثابت β مثلاً

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 = \beta \quad ,$$

$$-\frac{dK}{dt} = \beta$$

ومنها نجد أن

$$K = -\beta t \quad , \qquad (٦)$$

$$\frac{dS}{dq} = \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}$$

$$\therefore S = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}\, dq \qquad (٧)$$

بالتعويض من (٦) ، (٧) في (٥) نجد أن الدالة المولدة تأخذ الصورة

$$F = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}\, dq - \beta t$$

لنعتبر β هي احداثية كمية الحركة الجديدة P . عندئذ يكون لدينا بالنسبة لاحداثية الموضع الجديد :

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2\right)}\, dq - \beta t\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2}} - t$$

ولكن حيث أن الاحداثية الجديدة Q هي الثابت γ مثلاً

$$\frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2}} - t = \gamma$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{\varkappa}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\beta}{\varkappa} - q^2}} = t + \gamma$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{\varkappa}} \sin^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{2\beta}{\varkappa}}}\right) = t + \gamma$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2\beta}{\varkappa}} \sin\left[\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}(t+\gamma)\right]$$

الثابتان β ، γ يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية

ملحوظة: الثابت β يناظر الثابت E ، الذى يساوى الطاقة الكلية المجموعة.

تمارين

(١) حل مثال (١) باستخدام التحويل

$P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ ، $Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$ يكون قانونيا

اذا كان

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$$

(٢) اذا كانت $S = S(q_\alpha, P_\alpha, t)$ هى الدالة المولدة فاثبت أن

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad , \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \quad , \quad \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H$$

حيث

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} \quad , \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

(٣) اثبت أن التحويل الاتى يكون قانونيا $Q = p$ ، $P = -q$

(٤) اثبت أن التحويل

$$p = \sqrt{2P\omega}\cos Q \ ,$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\sin Q$$

يكون تماثلي . وإذا كانت دالة هاملتون للمتذبذب
التوافقي تعطى في الصورة

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

حيث $\omega = \sqrt{mk}$. اكتب هذه المعادلة بدلالة الاحداثيات
القانونية P, Q وبين ان Q احداث دوري . اوجد
معادلات هاملتون واثبت انها تمثل حركة المتذبذب
التوافقي .

(٥) اذا كانت الدالة المولدة $F = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \cot Q$
حيث q ، Q الاحداث المعمم القديم والاحداث المعمم الجديد
على الترتيب ، m ، ω ثابتين . اوجد التحويل المناظر واثبت
انه تحويل تماثلي واوجد دالة هاملتون في الاحداثيات
الجديدة للمتذبذب التوافقي .

(٦) باستخدام طريقة هاملتون - جاكوبي حل مسألة كبلر لجسم
يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة تتناسب عكسياً
مع البعد عن المركز .

(٧) جسم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده في الاحداثيات
القطبية الكرية هي $V = -\frac{k\cos\theta}{r^2}$. اكتب معادلة
هاملتون - جاكوبي التي تصف حركته ثم وضح كيف يمكن تحديد
حركة الجسم .

(٨) استخدم طريقة هاملتون - جاكوبي في حل مسألة جسم مقذوف
بسرعة u في اتجاه يصنع زاوية مع الافقي واوجد ارتفاع الجسم عن المستوى
الافقي المار بنقطة القذف وكذلك معادلة المسار .

7- أقـواس بواسون

أقواس بواسون

أذا كانت لدينا منظومة ميكانيكية ما وتم تعريف كمية فيزيائية كدالة في الاحداثيات المعممة وكمية الحركة المعممة والزمن بالصورة $f = f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ ومنها

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} \right\} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} q^{\bullet}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} p^{\bullet}_\alpha \right\} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

ولكن من معادلات هاملتون نعلم بأن $q^{\bullet}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad p^{\bullet}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ بذلك تصبح المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

التعبير $\left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right\}$ نطلق علية اسم قوس بواسون وسوف نعبير عنة الصورة $\{f, H\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right\}$.

وعلي وجه العموم لاي كميتين f, g سوف نعرف قوس بواسون بالصورة $\{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\}$

حيث $\alpha = 1,2,3,4,.................., n$ هي عدد الأحداثيات المعممة.

بعض خواص أقواس بواسون

لأي ثلاث كميات فيزيائية f, g, h والتي هي دوال الاحداثيات المعممة وكمية الحركة المعممة وبفرض أن c مقدار ثابت.فإن أقواس بواسون تملك الخصائص التالية:

(1) $\{f, f\} = 0,$

(2) $\{f, c\} = 0,$

(3) $\{f, g\} = -\{g, f\},$

(4) $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\},$

(5) $\{f g, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\},$

(6) $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\},$

(7) $\{q_\alpha, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}, \left[\{f, q_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right],$

(8) $\{p_\alpha, f\} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\left[\{f, p_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right],$

(9) $\{q_l, q_k\} = 0,$

(10) $\{p_l, p_k\} = 0,$

(11) $\{q_l, p_k\} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$

في الخواص السابقة q_α تمثل الأحداثيات المعممة و p_α كمية الحركة المعممة.

اثبـــات بعـــض الخـــــواص

سوف نستخدم قوس بواسون والذي يكتب بالصورة $\left\{ f, g \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\}$

$$(1)\ \left\{ f, f \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right\} = 0$$

$$(2)\ \left\{ f, c \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial c}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial c}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}(0) - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}(0) \right\} = 0$$

$$(3)\ \left\{ f, g \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\} = -\left\{ \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right\} = -\left\{ \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right\} = -\left\{ g, f \right\}$$

$$(4)\ \left\{ f+g, h \right\} = \left\{ \frac{\partial(f+g)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(f+g)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \left[\frac{\partial(f)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial(g)}{\partial q_\alpha}\right]\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \left[\frac{\partial(f)}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial(g)}{\partial p_\alpha}\right]\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} =$$

$$\left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\right] \right\} = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\right] + \left[\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\right] \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ f, h \right\} + \left\{ g, h \right\}$$

$$(5)\ \left\{ f\,g, h \right\} = \left\{ \frac{\partial(f\,g)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(f\,g)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}g + f\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right]\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \left[\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}g + f\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right]\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} =$$

$$\left\{ f\left[\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\right] + g\left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha}\right] \right\} =$$

$$f\left\{ \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} + g\left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = f\left\{ g, h \right\} + g\left\{ f, h \right\}$$

$$(6)\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{ f, g \right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right)\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right)\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right) \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial q_\alpha} \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

$$(7)\ \left\{q_\alpha,\ f\right\}=\left\{\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(1)\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-(0)\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

$$(8)\ \left\{p_\alpha,\ f\right\}=\left\{\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(0)\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-(1)\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

$$(9)\ \left\{q_l,\ q_k\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_k}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial q_l}{\partial p_\alpha}\frac{\partial q_k}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha})(0)-(0)(\frac{\partial q_k}{\partial q_\alpha})\right\}=0$$

$$(10)\ \left\{p_l,\ p_k\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial p_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_l}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(0)(\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha})-(\frac{\partial p_l}{\partial p_\alpha})(0)\right\}=0,$$

$$(11)\ \left\{q_l,\ p_k\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial q_l}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial q_\alpha}\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}-0\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}=\begin{cases}1, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}$$

$$\left\{q_l,\ p_k\right\}=\begin{cases}1, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}=\frac{\partial q_l}{\partial q_1}\frac{\partial p_k}{\partial p_1}+\frac{\partial q_l}{\partial q_2}\frac{\partial p_k}{\partial p_2}+\frac{\partial q_l}{\partial q_3}\frac{\partial p_k}{\partial p_3}+\frac{\partial q_l}{\partial q_4}\frac{\partial p_k}{\partial p_4}+\frac{\partial q_l}{\partial q_4}\frac{\partial p_k}{\partial p_4}+\ldots\ldots\ldots..$$

لوكان $l=k$ عند ذلك يكون $l=k=1$ or $l=k=2$ or $l=k=3$ or $l=k=4$ or.......... في هذة الحالة

سوف نجد انة يوجد احد هذة الحدود

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_1}=1 \text{ or } \frac{\partial q_2}{\partial q_2}\frac{\partial p_2}{\partial p_2}=1 \text{ or } \frac{\partial q_3}{\partial q_3}\frac{\partial p_3}{\partial p_3}=1 \text{ or } \frac{\partial q_4}{\partial q_4}\frac{\partial p_4}{\partial p_4}=1 \text{ or } \frac{\partial q_5}{\partial q_5}\frac{\partial p_5}{\partial p_5}=1.....$$

بينما الحدود الاخري مثل $\frac{\partial q_1}{\partial q_1}\frac{\partial p_2}{\partial p_1}=0$ و هذا يكون لدينا $\left\{q_l,\ p_k\right\}=\begin{cases}1, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}$.

في الخواص السابقة q_α تمثل الأحداثيات المعممة و p_α كمية الحركة المعممة.

مثال 1: اكتب صيغة أقواس بواسون لــ $\left\{f,g\right\}$ وأذا أعطي متجهه الموضع لنقطة مادية بالصورة

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

ومتجهه كمية الحركة المعممه بالصورة $\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$ فأوجد أقواس بواسون لـــكل من :

$\left\{\vec{r},\vec{r}\right\},\ \left\{\vec{p},\vec{p}\right\},\ \left\{\vec{r},\vec{p}\right\}.$

وإذا عرف متجهه كمية الحركة المعممة الزاوية بالصورة $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}$ فأوجد أقواس بواسون لكل من

$\left\{\vec{r}, \vec{M}\right\}, \left\{\vec{p}, \vec{M}\right\}, \left\{\vec{M}, \vec{M}\right\}.$

الأجـــــــابـة

من تعريف أقواس بواسون $\left\{f_\alpha, g_\alpha\right\} = \dfrac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dfrac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \dfrac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dfrac{\partial g}{\partial q_\alpha}$

لأيجاد $\left\{\vec{r}, \vec{r}\right\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع اقواس بواسون لكل من الاحداثيات المعممة معا والتي تصاغ بالصورة $\left\{q_l, q_k\right\} = 0$ ومنها $\left\{\vec{r}, \vec{r}\right\} = 0$.

ولإيجاد $\left\{\vec{p}, \vec{p}\right\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع اقواس بواسون لكل من كميات الحركة المعممة معا والتي تصاغ بالصورة $\left\{\vec{p}_l, \vec{p}_k\right\} = 0$ ومنها $\left\{\vec{p}, \vec{p}\right\} = 0$

ولإيجاد $\left\{\vec{r}, \vec{p}\right\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع أقواس بواسون لكل من الاحداثيات المعممة وكميات الحركه المعممة والتي تصاغ بالصورة $\left\{q_l, p_k\right\} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$ ومنها

$$\left\{x, p_x\right\} = 1, \quad \left\{x, p_y\right\} = 0, \quad \left\{x, p_z\right\} = 0,$$

$$\left\{y, p_x\right\} = 0, \quad \left\{y, p_y\right\} = 1, \quad \left\{y, p_z\right\} = 0,$$

$$\left\{z, p_x\right\} = 0, \quad \left\{z, p_y\right\} = 0, \quad \left\{z, p_z\right\} = 1.$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	p_x	p_y	p_z
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

لمتجهه كمية الحركة المعممة الزاوية $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ يعطى من

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix}=\left\{y\,p_z-z\,p_y\right\}\vec{i}-\left\{x\,p_z-z\;p_x\right\}\vec{j}+\left\{x\,p_y-y\,p_x\right\}\vec{k}=$$

$$=\left\{y\,p_z-z\,p_y\right\}\vec{i}+\left\{z\;p_x-x\,p_z\right\}\vec{j}+\left\{x\,p_y-y\,p_x\right\}\vec{k}=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}$$

والأن نحاول إيجاد أقواس بواسون $\left\{\vec{r},\vec{M}\right\}$ وسوف نستحدم الخاصية التي تجمع أقواس بواسون لكل من الاحداثيات المعممة وأى كمية فيزيائية اخري $\left\{q_\alpha,f\right\}=\dfrac{\partial f}{\partial p_\alpha}$. ومنها يكون

$$\left\{x,M_x\right\}=\frac{\partial M_x}{\partial p_x}=0,\qquad \left\{y,M_x\right\}=\frac{\partial M_x}{\partial p_y}=-z,\qquad \left\{z,M_x\right\}=\frac{\partial M_x}{\partial p_z}=y,$$

$$\left\{x,M_y\right\}=\frac{\partial M_y}{\partial p_x}=z,\qquad \left\{y,M_y\right\}=\frac{\partial M_y}{\partial p_y}=0,\qquad \left\{z,M_y\right\}=\frac{\partial M_y}{\partial p_z}=-x,$$

$$\left\{x,M_z\right\}=\frac{\partial M_z}{\partial p_x}=-y,\qquad \left\{y,M_z\right\}=\frac{\partial M_z}{\partial p_y}=x,\qquad \left\{z,M_z\right\}=\frac{\partial M_z}{\partial p_z}=-y.$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	M_x	M_y	M_z
x	0	z	$-y$
y	$-z$	0	x
z	y	$-x$	0

والأن نحاول إيجاد أقواس بواسون $\left\{\vec{p},\vec{M}\right\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع أقواس بواسون كمية الحركه المعممة وأى كمية فيزيائية اخري $\left\{p_\alpha,f\right\}=-\dfrac{\partial f}{\partial q_\alpha}$. ومنها يكون

$$\left\{p_x M_x\right\}=-\frac{\partial M_x}{\partial q_x}=-\frac{\partial M_x}{\partial x}=-(0)=0,$$

$$\left\{p_x,M_y\right\}=-\frac{\partial M_y}{\partial q_x}=-\frac{\partial M_y}{\partial x}=-(-p_z)=p_z$$

$$\left\{p_x,M_z\right\}=-\frac{\partial M_z}{\partial q_x}=\frac{\partial M_z}{\partial x}=-(p_y)=-p_y$$

$$\left\{p_y,M_x\right\}=-\frac{\partial M_x}{\partial q_y}=-\frac{\partial M_x}{\partial y}=-(p_z)=-p_z,$$

$$\left\{p_y,M_y\right\}=-\frac{\partial M_y}{\partial q_y}=-\frac{\partial M_y}{\partial y}=-(0)=0,$$

$$\left\{p_y,M_z\right\}=-\frac{\partial M_z}{\partial q_y}=-\frac{\partial M_z}{\partial y}=-(-p_z)=p_x.$$

$$\left\{p_z, M_x\right\} = -\frac{\partial M_x}{\partial q_z} = -\frac{\partial M_x}{\partial z} = -(-p_y) = p_y,$$

$$\left\{p_z, M_y\right\} = -\frac{\partial M_y}{\partial q_z} = -\frac{\partial M_y}{\partial z} = -(p_x) = -p_x,$$

$$\left\{p_z, M_z\right\} = -\frac{\partial M_z}{\partial q_z} = -\frac{\partial M_z}{\partial z} = -(0) = 0.$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	M_x	M_y	M_z
p_x	0	p_z	$-p_y$
p_y	$-p_z$	0	p_x
p_z	p_y	$-p_x$	0

والأن نحاول إيجاد أقواس بواسون $\left\{\vec{M}, \vec{M}\right\}$ سوف نستحدم تعريف أقواس بواسون لأى كميتين فيزيائيتين

$$\left\{f, g\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right\}.$$

$$\left\{M_x, M_x\right\}, \left\{M_x, M_y\right\}, \left\{M_x, M_z\right\},$$

حيث سوف يكون لدينا العلاقات $\left\{M_y, M_y\right\}, \left\{M_y, M_y\right\}, \left\{M_y, M_z\right\},$ مع ملاحظة أن $\alpha = 1,2,3$ وهي عدد الاحداثيات

$$\left\{M_z, M_x\right\}, \left\{M_z, M_y\right\}, \left\{M_z, M_z\right\}.$$

وعند ذلك يكون

$$\left\{f, g\right\} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q_1}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q_2}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial g}{\partial p_3} - \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial g}{\partial q_3}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial q_x}\frac{\partial g}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial g}{\partial q_x}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_y}\frac{\partial g}{\partial p_y} - \frac{\partial f}{\partial p_y}\frac{\partial g}{\partial q_y}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_z}\frac{\partial g}{\partial p_z} - \frac{\partial f}{\partial p_z}\frac{\partial g}{\partial q_z}\right\}$$

وبذلك يكون لدينا

$$\left\{f, g\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial g}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial p_y} - \frac{\partial f}{\partial p_y}\frac{\partial g}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial p_z} - \frac{\partial f}{\partial p_z}\frac{\partial g}{\partial z}\right\}$$

من الخاصية $0 = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\} = \left\{f, f\right\}$ مباشراً يكون لدينا

$$\left\{M_x, M_x\right\} = \left\{M_y, M_y\right\} = \left\{M_z, M_z\right\} = 0$$

بينما يكون لدينا

$$\{M_x, M_y\} = \left\{\frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial M_y}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x}\frac{\partial M_y}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial M_y}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y}\frac{\partial M_y}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial M_y}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial M_y}{\partial z}\right\}$$

$$= \quad (0)(z) - (0)(-p_z) \quad + \quad (p_z)(0) - (-z)(0) \quad + \quad (-p_y)(-x) - (y)(p_x)$$

$$\therefore \{M_x, M_y\} = xp_y - y\,p_x = M_z$$

ويكون لدينا

$$\{M_x, M_z\} = \left\{\frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x}\frac{\partial M_z}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y}\frac{\partial M_z}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial M_z}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial M_z}{\partial z}\right\}$$

$$= \quad (0)(-y) - (0)(p_y) \quad + \quad (p_z)(x) - (-z)(-p_x) \quad + \quad (-p_y)(0) - (y)(0)$$

$$\therefore \{M_x, M_z\} = xp_z - z\,p_x = -M_y$$

وكذلك

$$\{M_y, M_z\} = \left\{\frac{\partial M_y}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x} - \frac{\partial M_y}{\partial p_x}\frac{\partial M_z}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial M_y}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y} - \frac{\partial M_y}{\partial p_y}\frac{\partial M_z}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial M_y}{\partial z}\frac{\partial M_z}{\partial p_z} - \frac{\partial M_y}{\partial p_z}\frac{\partial M_z}{\partial z}\right\}$$

$$= \quad (-p_z)(-y) - (z)(p_y) \quad + \quad (0)(x) - (0)(-p_x) \quad + \quad (p_x)(0) - (x)(0)$$

$$\therefore \{M_y, M_z\} = yp_z - z\,p_y = M_x$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	M_x	M_y	M_z
M_x	0	M_z	$-M_y$
M_y	$-M_z$	0	M_x
M_z	M_y	$-M_x$	0