رياضيات تطبيقية ٢

أ.د مهدى

الفرقة الأولي

كلـــــية التربية
شعبة الرياضيات

الحركـــة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، ثم حركة جسيم في مســـتوى ثم تناولنا في الباب الذي يليه حركة المقذوفات وهي نوع مـــن أنـــواع الحركـــة في المســـتوى وسنتعرف بمشيئة الله في هذا الباب على نوع له أهميه من أنواع الحركة تُســـمى " الحركـــة التوافقية البسيطة " أو الحركة الموجية. إذا تحرك جسيم متذبذباً حول موضع اتزانـــه (وهـــو الوضع الذي إذا زُحزح الجسيم عنه وهو متزن عاد إليه مرةً أخرى) سُميت حركة الجســـيم بالحركة الاهتزازية أو الحركة الدورية وهناك أنواع مختلفة من الإهتزازات منها

♦الإهتزاز الحر أو الحركة التوافقية البسيطة وهى ما سندرسه بالتفصيل.

♦الإهتزاز القسري إذا أثرت قوة قاسرة دورية على جسيم يُقال أن الحركة إهتزاز قسري.

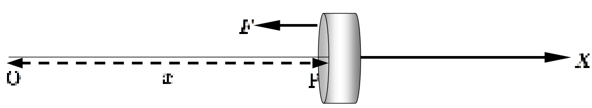
♦الإهتزاز المخمد الحر وفيها يكون الجسيم لقوة مقاومة مثل الاحتكاك والتي تجعـــل ســـعة الذبذبة تتناقص تدريجياً حتى تنعدم ومن ثم يتوقف الجسيم عن الحركة.

♦الإهتزاز القسري المخمد وهذه الحالة تمثل الحالتين السابقتين معاً وفيها يتلاشى تأثير المقاومة تدريجياً مع الزمن ويتبقى تأثير الذبذبة القسرية.

الإهتزاز الحر يُقال أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة وفيها يتحرك الجسيم متذبـــذباً حول موضع اتزانه دون أن تتغير سعة الذبذبة أو الزمن الدوري لها كما أن القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً تتجه نحو نقطة ثابتة أثناء الحركة ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناســـب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تُسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفـــرض أن O هـــي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذي سيمثله المحور OX وأن موضع الجسيم عند اللحظة t هو P حيث $\text{OP} = x$ كما بالشكل. من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = k/m \qquad \text{....(1)}$$



والاشارة السالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الذبذبة ولإيجاد سرعة الجسيم عند أي موضـــع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad ....(2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج أن $v\dfrac{dv}{dx} = -\omega^2 x$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$v^2 = c_1 - \omega^2 x^2 \qquad ....(3)$$

حيث c_1 هو ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج إلى شروط أبتدائيـــة ولذلك سنعتبر أن أقصى مسافة للجسيم هي a والتي عندها يسكن الجسيم (أي أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c_1 = \omega^2 a^2$ وتُكتب المعادلة (3) في الصورة

$$v^2 = \omega^2 a^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 \;\; a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad .....(4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الأشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجســـيم متحركـــاً في الاتجـــاه الموجب (أي في اتجاه OX – تزايد x) وسنعتبر الأشارة السالبة إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه المضاد.

والآن لمعرفة موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية نضع $v = dx/dt$ في المعادلـــة (4) (علـــى اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \omega dt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad ....(5a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل ويُسمى " زاوية الطور " ويُعيّن من الشروط الأبتدائيـــة للحركـــة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$x = a\sin \;\; \omega t + \epsilon \qquad ......(5b)$$

وهذه المعادلة تُمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالـــة الأشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $|\sin \ \omega t+\epsilon\ | \le 1$ ومن المعادلة (5 b) يكون

$$|x|=|a\sin\ \omega t+\epsilon\ |=|a||\sin\ \omega t+\epsilon\ |\le a \qquad \Rightarrow -a\le x\le a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x=a$ ، $x=-a$ لذلك فإن a تُسمى سعة الحركة التوافقية.

كما يمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x=\pm a$ ، كما تكـــون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x=0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x و $-x$ متساوٍ.

■ الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية ، ومن ثم فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويُعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من أحد أطراف الذبذبة $x=+a$ إلى الطـــرف الآخر $x=-a$ ثم العودة مرة أخرى $x=+a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبةً كاملـــةً وحيث أن

$$\begin{aligned} x = a\sin(\omega t+\epsilon) &= a\sin(\omega t+\epsilon+2\pi) \\ &= a\sin\left(\omega\underbrace{\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'}+\epsilon\right) \\ &= a\sin(\omega t'+\epsilon), \qquad\qquad \left(t'=t+\frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned}$$

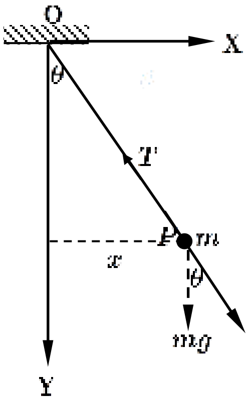
أي أن x عند الزمن t هي نفسها عند الزمن $t'=t+\frac{2\pi}{\omega}$ و ذلك يعني أن الجسيم يعود إلى وضعه الأول بعد زمن $\tau=\frac{2\pi}{\omega}$ و هو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري).

و لأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن و هو ما يُعرف بالتردد.

■ التردد Frequency

يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) وسنرمز له بالرمز ν وهو مقلوب الزمن الدوري أي أن $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طرف خيط غير مرن (ساق خفيفة) طولها L مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طول الخيط L . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في الاتجاه الأفقي OX هى (بتحليل قوة الشد) بفرض أن $\angle \mathrm{YOP} = \theta$

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ddot{x} = -T\frac{x}{L}$$

وحيث أن θ صغيرة جداً فيمكن اعتبار أن الحركة هي حركة أفقية فقط أي أن $T\cos\theta = mg$ ومن ثم تصبح المعادلة السابقة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L\cos\theta}$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\cos\theta \cong 1$ ومن ثم تؤول المعادلة السابقة إلى الصورة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -\frac{g}{L}\,x$$

هذه المعادلة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من – حيث $- \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

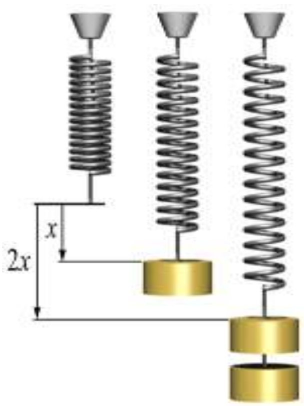
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـ " بندول الثواني ".

■ قانون هوك Hooke's Law

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب تناسباً طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. الصيغة الرياضية لهذا القانون هي $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه و عدد لفاته إلى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell}x$$



حيث λ ثابت يُسمى معامل المرونة للخيط و الزنبرك ، x مُمثل الأستطالة الحادثة ، ℓ لطول الطبيعي للخيط ، T وة الشد الناشئة في الخيط. (الأستطالة الحادثة هي الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي).

كما ذكرنا ما يسري على الخيط المرن يسري على الزنبركات في حالة الأستطالة فقط أما في حالة الأنضغاط فتختفي القوة الناشئة في الخيط خلافاً لحالة الزنبرك و هذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم اغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ فاثبت أن حركة هذا الجسيم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن الدوري لها.

الحـــــــل

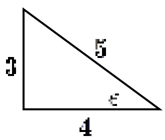
حيث أن موضع الجسيم يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على

$\dot{x} = -6\sin 2t + 8\cos 2t,$ again differentiating $\therefore \ddot{x} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$

Or $\therefore \ddot{x} = -4(\underbrace{3\cos 2t + 4\sin 2t}_{x}) = -2^2 x$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $\omega = 2$ حيث أن العجلة تتناسب مع المسافة و زمنها الدوري τ يتعين من $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ وسعة الحركة يمكن الحصول عليه كالآتي

$$3\cos 2t + 4\sin 2t = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\sin 2t\right)$$
$$= 5\ \sin\epsilon\, cos 2t + \cos\epsilon \sin 2t \ = 5\sin(2t+\epsilon)$$



ومن ثم فإن سعة الذبذبة هي 5

مثـــ ٢ ـــال

إذا تعينت سرعة نقطة مادية تتحرك في خط مستقيم من العلاقة $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ فاثبت أن حركة هذه النقطة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$.

الحـــــــل

حيث أن $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ و باجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير x ينتج أن

$$v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \Rightarrow 2v\frac{dv}{dx} = n^2(4b - 2x) \quad \text{Or}$$
$$\underbrace{v\frac{dv}{dx}}_{\text{accel}} = -n^2(x - 2b) \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -n^2(x - 2b)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها مركز الذبذبة $4b$ و $n=\omega$

(توضيح: بوضع $y=x-2b$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y}=-n^2y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y=0$ أي عند $x=2b$).

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v=0$ ومنها

$$0=n^2(8bx-x^2-12b^2) \quad \Rightarrow (x-2b)(x-6b)=0 \quad \text{i.e.} \;\; x=2b, \; x=6b$$

وهذه القيم تمثل أطراف الذبذبة ومن ثم فتكون سعة الذبذبة هي $2b$ والزمن T اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$ يمثل ربع الزمن الدوري أي أن

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}, \quad \because T=\frac{1}{4}\tau \qquad \Rightarrow T=\frac{1}{4}\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}$$

مثـــ ٣ ــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u, u' سرعتي الجسيم على بعدين b, b' من مركز الذبذبة على الترتيب. أوجد الزمن الدورى لها.

الحـــــــــل

حيث أن السرعة لجسيم يتحرك حركة توافقية هي $v^2=w^2(a^2-x^2)$ حيث أن سعة الحركة هي a وعند الموضعين المذكورين يكون

$$u^2=w^2(a^2-b^2), \qquad u'^2=w^2(a^2-b'^2)$$

من العلاقتين نحصل على – بالطرح –

$$u'^2-u^2=w^2(b^2-b'^2), \qquad Or \qquad \omega^2=\frac{u'^2-u^2}{b^2-b'^2} \quad \therefore \omega=\sqrt{\frac{u'^2-u^2}{b^2-b'^2}}$$

ومن ثم يكون الزمن الدوري $\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{b^2-b'^2}{u'^2-u^2}}$ وهو المطلوب

مثـــ ٤ ــال

يتحرك جسيم بحيث أن موضعه يتعين من $x=\mu-\mu\cos 2t$ حيث μ ثابت فاثبـــت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة واوجد زمنها الدوري ومركزها.

الحـــــــل

حيث أن موضع الجسيم المتحرك $x = \mu - \mu\cos 2t$ وبالتفاضل مرتين للحصـــول علـــى العجلة نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\sin 2t \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\underbrace{\mu\cos 2t}_{\mu - x} = 4(\mu - x) = -4(x-\mu)$$

وهي معادلـــة حركـــة توافقيـــة بســـيطة مركزهـــا النقطـــة $x = \mu$ وزمنـــها الـــدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ حيث $\omega = 2$.

(توضيح: بوضع $y = x - \mu$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -2^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = \mu$).

(على الدارس ايجاد سعة الذبذبة).

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة اثناء جزء من الحركة – مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الذبذبة – هي X_1, X_2, X_3 عند نهايات ثلاث ثوانٍ متتالية عيّن الزمن الدوري للحركة.

الحـــــــل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركة التوافقيـــة البســـيطة هـــي $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$ و سنفرض أن زمن وصول الجسيم إلى الموضع X_1 هو t وبالتالي زمن وصوله إلى الموضع X_2 هو $t+1$ وزمن وصوله إلى الموضع X_3 هو $t+2$ ويكون

$$\begin{aligned} X_1 &= a\sin(\omega t + \epsilon) \\ X_2 &= a\sin(\omega(t+1) + \epsilon) \\ X_3 &= a\sin(\omega(t+2) + \epsilon) \end{aligned}$$

من المعادلات السابقة – بجمع الأولى والثالثة – ينتج أن

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= a \quad \sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon) \\ &= 2\underbrace{a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{X_2}\cos\omega \\ &= 2X_2\cos\omega \end{aligned}$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$\because\ X_1 + X_3 = 2X_2\cos\omega$$

$$\Rightarrow \cos\omega = \frac{X_1 + X_3}{2X_2}$$

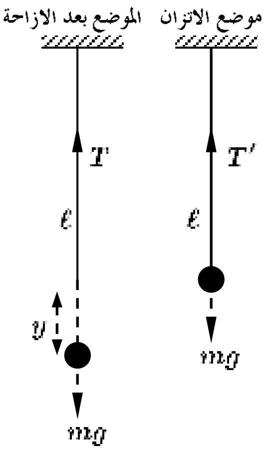
$$\text{Or}\qquad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)$$

وحيث أن الزمن الدوري يُعطى بالعلاقة $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وبالتعويض عن قيمة ω يكون $\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)}$ و يجب أن يتحقق الشرط $-2X_2 \le X_1 + X_3 \le 2X_2$

مثـــال ٦

عُلق جسيم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زحزح الجسيم من موضع اتزانه مسافةً رأسيةً صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبةً في الثانية. فإذا كان طول الخيط عند موضع الاتزان هو ℓ. اوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الاستطالة مساويةً للطول الطبيعي هو $m(4\pi^2 n^2 \ell - g)$.

الحـــل



حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الاتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط (قبل تعليق الكتلة m) و أن T' هو قيمة الشد في الخيط عند الاتزان ، في حالة الاتزان تؤثر على الكتلة قوتا الوزن والشد في الخيط فقط ومن قانون هوك يكون

$$mg = T' = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \qquad (1)$$

إذا أعطينا الكتلة ازاحة y بعيدا عن موضع اتزانها في هذه الحالة فإن معادلة حركة الكتلة هي

$$m\ddot{y} = mg - T \qquad (2)$$

حيث T هو الشد في الخيط و يساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$ وبالتعويض عن قيمة الشد في المعادلة (2) و باستخدام المعادلة (1)

$$\therefore m\ddot{y} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$$
$$= \cancel{mg} - \underbrace{\frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0)}_{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0}y = -\frac{\lambda}{\ell_0}y$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{\lambda}{\ell_0 m}x = -w^2x, \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$$

المعادلة الاخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 m}{\lambda}}$ و التردد يتعين من $\therefore n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$ $\nu = \frac{1}{\tau}$ و نجد من هذه العلاقة $2\pi n^{\ 2} m = \frac{\lambda}{\ell_0}$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$\cancel{m}g = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4\pi^2 n^2 \cancel{m}(\ell - \ell_0)$$

$$\therefore \ell - \ell_0 = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \ \text{ Or } \ \ell_0 = \ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$

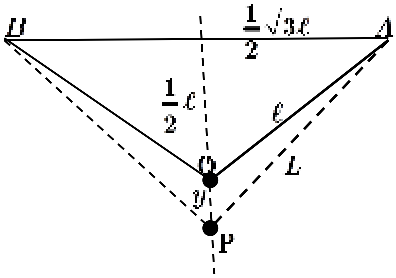
وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعيين قيمة الشد حينما تكون الاستطالة مساوية للطول الطبيعي من قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4\pi^2 n^2 m\ell_0 = 4\pi^2 n^2 m\left(\ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}\right) = m\ \ 4\pi^2 n^2 \ell - g$$

مثال ٦

عُلق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن c مثبت طرفاه في نقطتين A, B يقعان في مستوى أفقي واحد. و في وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية 60^0 مع الرأسي و يكون طول كل منهما ℓ ، معامل مرونة الخيط يساوي mg . فإذا زحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي و ترك ليتذبذب. اوجد زمن الذبذبة.

الحـــــل



باعتبار أن λ هو معامل المرونة للخيط حيث $\lambda = mg$ و بفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط ومن ثم فعند حالة الاتزان يكون الشد من قانون هوك

$$mg = 2\lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \cos 60^0 = \lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

ولكن $\lambda = mg$ ومن ثم $\ell_0 = \frac{1}{2}\ell$

باعتبار أن y يمثل المسافة الرأسية و L هو هو طول الخيط بعد الازاحة كما بالشكل

ومن ثم بكتابة معادلة الحركة الرأسية للكتلة يكون

$$m\ddot{y} = mg - 2\lambda \frac{L - \ell_0}{\ell_0} \cos\angle\mathrm{OPA}$$

حيث P موضع الجسيم عند اللحظة t ، O هو موضع الاتزان وعند موضع عام حيث

$\mathrm{PA{=}PB} = L$ هو طول الخيط والآن

$$L^2 = \left(y + \frac{1}{2}\ell\right)^2 + \frac{3}{4}\ell^2 = \ell^2 + \ell y + y^2$$

ومن ثم

$$L = \ell\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)^{1/2} = \ell + \frac{1}{2}y$$

حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية فأعلى وايضاً

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{OPA} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{L} &= \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{\ell + \frac{1}{2}y} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{2\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)\end{aligned}$$

لأول قوة حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية

$$m\ddot{y} = mg - \frac{2\lambda\left(\ell + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\ell\right)}{\frac{1}{2}\ell} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

وهذا
$$\ddot{y} = g - g\left(1+\frac{y}{\ell}\right)\left(1+\frac{3y}{2\ell}\right)$$

أو
$$\ddot{y} = -\frac{5g}{2\ell}y$$

والاخيرة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $2\pi\sqrt{2\ell\ /\ 5g}$

■ مســـــــائل Problems ■

الحركة الدفعية وتصادم الاجسام

Impulse and Collision Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وسنتعرف بمشيئة الله تعالى في هذا الباب على نوع من أنواع الحركة تُسمى " الحركة الدفعية ".

■ الدفع وقانون الحركة

إذا بدأنا بقانون نيوتن الثاني للحركة معوضين عــن العجلـــة بصـــورتها $a = \dfrac{dv}{dt}$ يكـــون $F = m\dfrac{dv}{dt}$ وبضرب طرفي هذه العلاقة في dt وتكاملها بين اللحظتين t_1, t_2 حيث سرعة الجسيم عندهما v_1, v_2 فإن

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv = mv\Big|_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1$$

يُعرف التكامل الزمني للقوة F بين اللحظتين t_1, t_2 والوارد بالطرف الأيسر للمعادلة السابقة ب دفع القوة خلال الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ ويرمز له بالرمز $\underline{I}$ اختصاراً لكلمة **Impulse**

أي أن $\int_{t_1}^{t_2} F dt = \underline{I}$. ودفع أي قوة هو متجه ينطبق عليها نظراً لأن الزمن كمية قياسية.

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة

ينص هذا المبدأ على أن كمية الحركة mv في اتجاه خط التصادم (في حالة الكرات يكون خط المركزين) ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ قانون نيوتن التجريبي Experimental Newton's Law

في اتجاه خط المركزين تخضع لقاعدة نيوتن التجريبية والتي تنص على أن الســـرعة النســـبية للجسمين بعد التصادم تساوي معكوس السرعة النسبية لهما قبل التصادم مضروباً في معامـــل الأرتداد (يُرمز له بالرمز e)أي أن

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

ويُطبق هذا القانون في اتجاه خط التصادم (خط المركزين) ، وتنحصر قيمة معامل الأرتداد e بين الصفر والواحد $0 \leq e \leq 1$ ويكون $e = 0$ إذا كان الجسمان عديمي المرونة ويساوي الواحد $e = 1$ إذا كان الجسمان تامي المرونة.

ايضاً حيث أن الكرتين ملساوتان فإنه لا توجد قوة عمودية على خط المركزين (خط التصادم) ومن ثم فإنه في حالة التصادم غير المباشر تظل مركبة السرعة لكل من الكرتين في اتجاه العمودي على خط المركزين ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ تصادم الاجسام

عند تصادم جسمان مرنان فإنه يحدث نتيجةً لهذا التصادم ردود فعل كبيرة جداً تؤثر على كلا الجسمين لفترة صغيرة ثم يميل الجسمان بعدها للعودة إلى حركتهما ، تُسمى ردود الأفعال هذه بردود الأفعال الدفعية.

سنعتبر في دراستنا تصادم الاجسام الملساء بحيث أننا سنهمل جميع قوى الاحتكاك ويبقى فقط ردود الأفعال العمودية على الأسطح المشتركة و لسهولة الدراسة سنعتبر تصادم اجسام على هيئة كرات مرنة ملساء كما سنهمل كلا من قوى الأوزان لصغر دفوعها و التغير في مواضع الكرات أثناء فترة التصادم باعتبار أن هذه الفترة الزمنية للتصادم صغيرة جداً ، أي أن التصادم سيغير من سرعات الكرات ولن يغير من مواضعها أثناء فترة حدوثة. وفي دراستنا سوف نعتبر نوعين من التصادم (تصادم مرن وتصادم غير مرن) – التصادم غير المرن تم دراسته سابقاً – والتصادم المرن ينقسم إلى تصادم مباشر وتصادم غير مباشر.

■ التصادم المباشر وغير المباشر (مائل)

نعتبر تصادم كرتين ملساوتين ، الخط الواصل بين المركزين الهندسيين للكرتين يُسمى بخط المركزين أو خط التصادم ، و إذا كان التصادم بحيث كانت السرعتان قبل التصادم كلاهما في اتجاه خط التصادم للكرتين سُميّ هذا التصادم بـ "التصادم المباشر" أما في حالة التصادم غير المباشر يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كليهما مائلاً على خط التصادم بزاوية معينة – نلاحظ أن التصادم المباشر هو حالة خاصة من التصادم غير المباشر فيها زاوية الميل صفراً.

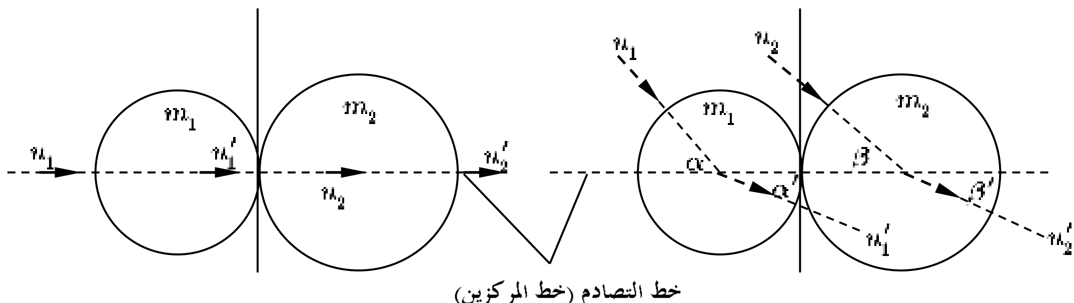
و في التصادم المرن سواءً كان التصادم مباشراً أو غير مباشر يُطبق قانون مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية و قانون نيوتن التجريبي في اتجاه خط التصادم. ويأخذ مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في حالة التصادم المباشر الصورة الرياضية

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2'$$

أما في حالة التصادم غير المباشر يكون

$$m_1u_1\cos\alpha + m_2u_2\cos\beta = m_1u_1'\cos\alpha' + m_2u_2'\cos\beta'$$

كما أن سرعة أي من الكرتين في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة قبل وبعد التصادم و من ثم فإن الكرة الساكنة أو الكرة المتحركة في اتجاه خط التصادم فإن حركتها بعد التصادم إذا تحركت تكون في اتجاه خط التصادم.



تصادم مباشر

تصادم غير مباشر (مائل)

■ تصادم كرة بمستوى ثابت

نعتبر كرة ملساء كتلتها m اصطدمت بمستوى ثابت أملس وأن سرعة الكرة قبل التصـــادم مباشرة هي u وأن سرعتها بعد التصادم هي u' كما بالشكل و نظراً لأن كل من الكـــرة والمستوى أملسين فإن سرعة الكرة في اتجاه المستوى (العمودي على خط التصادم) لا تـــتغير بالتصادم أي أن

$$u\sin\alpha = u'\sin\theta \qquad (1)$$

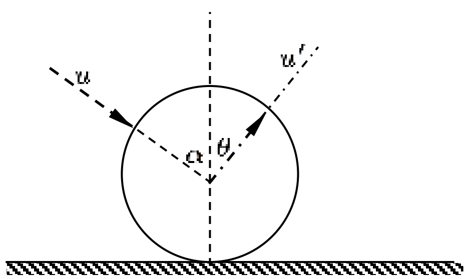
ومن قانون نيوتن التجريبي $u'\cos\theta = eu\cos\alpha$

وهاتان العلاقتان كافيتان لتعيين سرعة الكرة بعد التصادم إذا عُلمت سرعة الكرة قبل التصادم.

ومن العلاقة $u'\cos\theta = eu\cos\alpha$ نجد أنه إذا كان $e = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه في حالة تصادم كرة غير مرنة فإنها لا ترتد وإنما تتحرك على المستوى وبسرعة مقدارها $u\sin\alpha$.
أما إذا كان $e = 1$ فإنه يكون $u'\cos\theta = u\cos\alpha$ ومن هذه المعادلة والمعادلة (1) نحصل على

$$\tan\theta = \tan\alpha, \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

أي أن زاوية السقوط تساوي زاوية الأرتداد ونستنتج ايضاً أن $u = u'$ أي ان سرعة الكرة بعد التصادم تساوي في المقدار سرعتها قبل التصادم



■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

كرة تتحرك بسرعة u اصطدمت تصادماً مباشراً بكرة أخرى مساوية لها في الكتلة تتحـــرك بسرعة u' في الاتجاه المعاكس إذا توقفت الكرة ذات السرعة u بعد التصـــادم فاثبـــت أن $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{1+e}{1-e}$ حيث e هو معامل الارتداد.

الحـــــــل

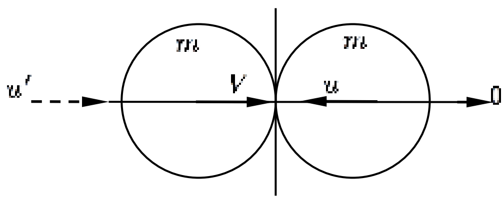
نفترض أن سرعة الكرة التي تتحرك بسرعة u' بعد التصادم هي V وأن m هي كتلة كل من الكرتين و حيث أن الكرة ذات السرعة u توقفت بعد التصادم فإنه من مبدأ ثبوت كمية الحركة

$$m \times 0 + m \times V = mu + m(-u') \quad \text{Or} \quad V = u - u'$$

ومن قانون نيوتن التجريبي

$$0 - V = -e(u - (-u')) \qquad \text{Or} \quad V = e(u + u')$$
$$\therefore\ u - u' = V = e(u + v) \quad \text{Or} \quad (1-e)u = (1+e)u'$$

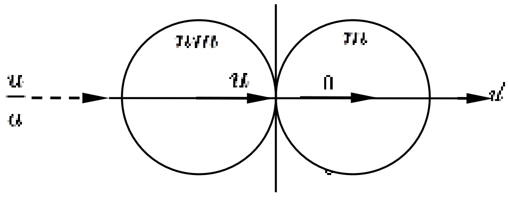
ولهذا فإن $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{1+e}{1-e}$



مثـــ ٢ ـــال

اصطدمت كرة كتلتها nm وسرعتها $\dfrac{u}{a}$ تصادماً مباشراً بكرة أخرى كتلتها m وسرعتها u وكانت السرعتان في نفس الاتجاه. إذا وقفت الكرة ذات الكتلة m بعد التصادم فاوجد معامل الارتداد.

الحـــــــل



نفرض أن الكرة ذات الكتلة nm تحركت بعد التصادم بسرعة V (في اتجاه خط التصادم حيث أن التصادم مباشر) و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$m(0)+nmV = mu + nm\left(\frac{u}{a}\right) \quad \Rightarrow nV = \left(1+\frac{n}{a}\right)u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V-0 = -e\left(\frac{u}{a}-u\right) \quad \Rightarrow V = eu\left(1-\frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

ومن المعادلتين (1) ، (2)

$$ne\cancel{u}\left(1-\frac{1}{a}\right) = \left(1+\frac{n}{a}\right)\cancel{u} \quad \Rightarrow e = \frac{a+n}{n(a-1)}$$

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك كرة ملساء بسرعة $20\ \text{ft}\sec^{-1}$ اصطدمت بمستوى افقي أملس ثابت و في اتجاه يصنع زاوية 60^0 مع المستوى فإذا كان معامل الارتداد يساوي $e = 0.5$ فأوجد سرعة الكـــرة و اتجاهها بعد التصادم ثم أوجد مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة في اتجاه المستوى لا تتغير (في الاتجاه العمودي على خط التصـــادم) أي أن

$$u\sin\theta = 20\sin 30 \quad \Rightarrow u\sin\theta = 10$$

من قانون نيوتن التجريبي

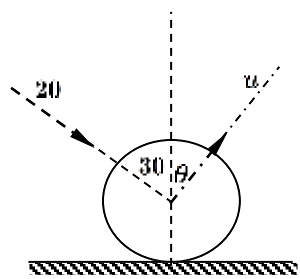
$$u\cos\theta = -e(-20\cos 30) \quad \text{Or} \quad u\cos\theta = 10\sqrt{3}(0.5) = 5\sqrt{3}$$

من المعادلتين بالتربيع والجمع نحصل على

$$u^2 = 100+75 = 175 \quad \Rightarrow u = \sqrt{175}$$

وبقسمة المعادلتين

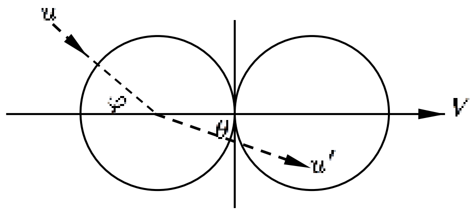
$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



مثـــال ٤

اصطدمت كرة بأخرى ساكنة مساويةً لها في الكتلة تصادماً مائلاً. إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع مع خط التصادم زاوية φ. و كان e هومعامل الارتداد فاثبت ان اتجاه هذه الكرة بعد التصادم يصنع مع خط التصادم زاوية تتعين من $\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$.

الحـــــــل



من الشكل و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos\theta + mV = mu\cos\varphi + 0 \quad \Rightarrow u'\cos\theta + V = u\cos\varphi \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$u'\cos\theta - V = -e(u\cos\varphi - 0) \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore\ 2u'\cos\theta = (1-e)u\cos\varphi \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u\sin\varphi \qquad (4)$$

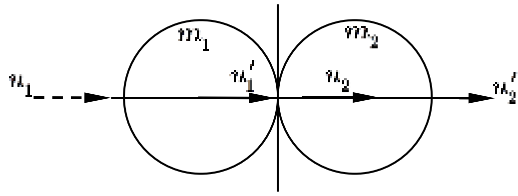
و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4)

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\tan\varphi}{1-e} \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\tan\varphi}{1-e} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$$

مثـــال ٥

اثبـــت أنـــه في حالـــة التصـــادم المباشـــر يكـــون الفقـــد في طاقـــة الحركـــة مســـاوياً $\dfrac{(1-e^2)m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2$ حيث m_1, m_2 تمثل كتلتا الكرتين ، u_1, u_2 سرعتيهما قبل التصادم ، e معامل الارتداد.

الحـــــــل



من الشكل ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط التصادم

$$m_1u_1' + m_2u_2' = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (1)$$

و ذلك بفرض أن سرعتي الكرتان بعد التصادم هما u_1', u_2' و من قانون نيوتن التجريبي

$$u_1' - u_2' = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

الآن بتربيع المعادلة (1) ، (2) وضرب المعادلة (2) في m_1m_2 ثم الجمع نحصل على

$$(m_1u_1' + m_2u_2')^2 + m_1m_2(u_1' - u_2')^2 = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

باضافة وطرح المقدار $m_1m_2(u_1 - u_2)^2$ إلى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة نجد أن

$$(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 \pm m_1m_2(u_1 - u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

أي أن

$$(m_1 + m_2)(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2) = (m_1 + m_2)(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ نحصل على

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

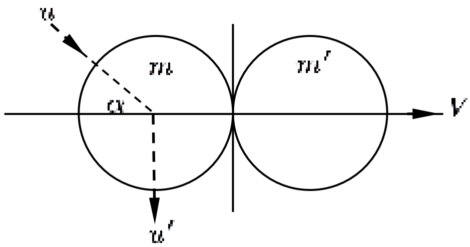
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2\right) = \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

من هذه العلاقة يتضح أن مجموع طاقتي الحركة بعد التصادم أقل من مجموع طاقتي حركة الكرتين قبل التصادم بمقدار $\frac{m_1 m_2 \;\; 1-e^2 \;\; (u_1-u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$ وهو ما يمثل مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

مثـــ ٦ ـــال

اصطدمت كرة ملساء بأخرى ساكنة. إذا كان اتجاها الحركة بعد التصادم متعامدين وكانـــت الكرتان تامتي المرونة فاثبت أن كتلتيهما متساويتان.

الحـــــــل



بفرض أن الكرة الساكنة كتلتها m' وحيث أن هذه الكرة كانت ساكنة فإن حركتها بعد التصادم بكون في اتجاه خط التصادم بسرعة ولتكن V وحيث أن اتجاها الحركة بعد التصادم متعامد فتكون السرعة u' عمودية على خط التصادم من الشكل وباعتبار أن كتلة الكرة الثانية m وسرعتها u في اتجاه يصنع زاوية α مع خط التصادم وأن سرعتها بعد التصادم u' و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos 90 + m'V = mu\cos\alpha + 0 \quad \Rightarrow m'V = mu\cos\alpha \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

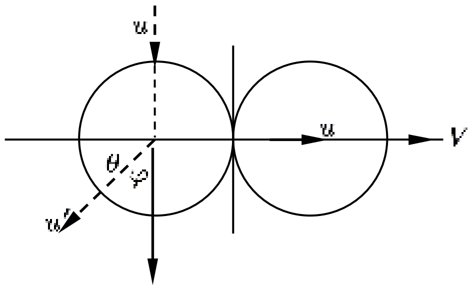
$$u'\cos 90 - V = -e(u\cos\alpha - 0) \quad \Rightarrow V = u\cos\alpha \quad (e=1) \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (2) يكون $\therefore m = m'$

مثـــ ٧ ـــال

تصطدم كرتان متساويتان وتتحركان بنفس السرعة و في اتجاهين متعامدين. إذا كـــان خـــط المركزين لحظة التصادم عمودياً على اتجاه الكرة الثانية وكان معامل الارتـــداد e فاثبـــت أن الكرة الثانية تنحرف بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ عن اتجاهها الأصلي.

الحــــــــل



من الشكل – مع مراعاة اتجاه السرعات – و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mV - mu'\cos\theta = mu\cos 90 + mu \quad \Rightarrow V - u'\cos\theta = u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - (-u'\cos\theta) = -e(u - u\cos 90) \quad \Rightarrow V + u'\cos\theta = -eu \qquad (2)$$

بطرح المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore\ 2u'\cos\theta = (1+e)u \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u \qquad (4)$$

و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4) $\tan\theta = \frac{2}{1+e}$ ولحساب انحراف السرعة عن اتجاهها الأصلي حيث الانحراف عن الاتجاه الأصلي هو $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ و من ثم

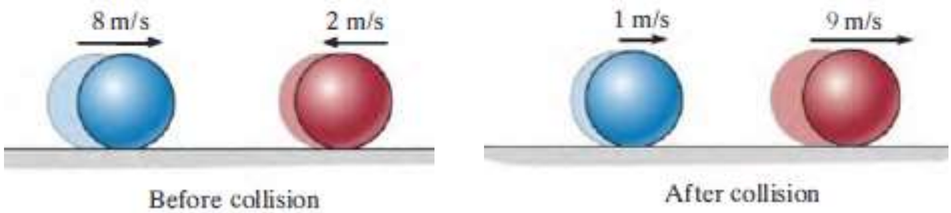
$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1+e}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{1+e}{2} \ \text{Or} \ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

■ مسـائل Problems ■

١- تتحرك كرة كتلتها الوحدة بسرعة $8\ \text{ft}\,\text{sec}^{-1}$ عندما صدمت مستوى أفقي أملس ثابت في اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الرأسي. اثبت أنه إذا كان معامل الارتداد يساوي 0.5 فإن مقدار الفقد في طاقة الحركة يساوي 12 وحدة طاقة.

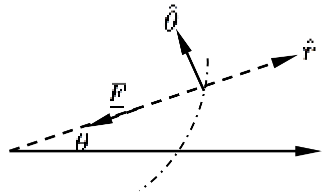
٢- عيّن معامل الارتداد بين الكرتين المتساويتين الكتلة ١ ، ٢ حيث وضّحت السرعات قبل وبعد التصادم على الرسم.



الحركة المداريــة

Orbital Motion

سنعالج في هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى. كثيراً ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين O يسمى بمركز القوة. كما تُسمى القوة في هذه الحالة بالقوة المركزية – حيث تنعدم المركبة العمودية لقوة المجال (طاردة أو جاذبة) ومن ثم تنعـــدم العجلة العمودية لحركة الجسيم دائماً و بتطبيق هذا الشرط نجد أنه من الاحداثيات القطبية



$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\;\; r^2\dot{\theta} \;\; = 0$$
$$\therefore\ r^2\dot{\theta} = h \ \ (\text{const.})$$

ويسمى المسار الذي ترسمه القوة بالمسار المركزي.

■ المعادلة التفاضلية للمسار المركزي Differential Equation of Orbital Path

معادلة الحركة في الاتجاهين r,θ هما

$$m \;\; \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \;\; = -F \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\;\; r^2\dot{\theta} \;\; = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تُعطي $r^2\dot{\theta} = h$ (const.)

حيث h مقدار ثابت. المعادلتان (1) و (2) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب ومـــن هاتين المعادلتين بحذف $\dot{\theta}$ نحصل على

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{F}{m} \qquad (3)$$

ويمكن اجراء تكامل للمعادلة (3) باستخدام التعويض $\left(r = \dfrac{1}{u}\right)$ وبحذف t منها

$$\because\ r = \frac{1}{u} \qquad \therefore\ \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{dr/du}\ \frac{du}{d\theta}\ \underbrace{\frac{h}{r^2}}_{d\theta/dt} = -h\frac{du}{d\theta},$$

$$\therefore\ \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$
$$= -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2},$$

وبتعويض عن هذه النتائج في المعادلة نحصل على

$$-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{F}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \qquad (4)$$

هذه المعادلة تُسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي وهي تُستخدم لمعرفة قانون القوة المركزي إذا عُلمت معادلة المسار و أيضاً إذا عُلمت القوة المركزية F فإنه يمكن حل المعادلة التفاضلية وايجاد معادلة المسار.

و كحالة خاصة حينما تكون الحركة في مجال قوة تتبع قانون التربيع العكسي $F = \dfrac{\mu}{r^2}$ فمن المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu \cancel{u^2}}{mh^2\cancel{u^2}} = \frac{1}{\mu^\star}, \qquad \mu^\star = \frac{mh^2}{\mu}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها العام على الصورة

$$u = \frac{1}{\mu^\star}\ \ 1 + \epsilon\cos(\theta - \alpha)$$

حيث ϵ, α ثابتي التكامل والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها

$$r = \frac{\mu^\star}{1 + \epsilon\cos(\theta - \alpha)}$$

وهذه المعادلة تُمثل قطع مخروط ويكون قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً حسبما تكون $\epsilon < 1$ أو $\epsilon = 1$ أو $\epsilon > 1$ على الترتيب.

■ قانون السرعة Velocity Law

كما نعلم أن مركبتي السرعة في الاتجاهين r,θ هما $\dot{r},\ r\dot{\theta}$ ومن ثم فإن مقدار سرعة الجسيم v تتعين من $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ولكن $\dot{r} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ ومنها

$$v^2 = \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2h^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \qquad (5)$$

وهذه المعادلة تُعطي مقدار سرعة الجسيم عند أي موضع θ على المسار المركزي.

■ قوانين كبلر Kepler's Laws

من أهم تطبيقات الحركة بالاحداثيات القطبية هو دراسة حركة الكواكب. و لقد قام العالم يوهان كبلر (١٥٧١–١٦٣٠) و هو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية والمعرفة باسمه:

القانون الأول: تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

القانون الثاني: يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما أقترب من الشمس.

القانون الثالث: يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدوري ومعامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية.

هذه هي نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالي ٦٠ عاماً ليثبت على أساسها قانون الجذب العام والذي يُعتبر من أكبر كشوف الانسان

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية

كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب (الطرد) O هي عزم كمية الحركة الخطية حول O وتساوي -تذكر أن $v \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$ -

$$m\dot{r}(0) + mr\dot{\theta}(r) = mr^2\dot{\theta} = mh = \text{constant}$$

أي أن كمية الحركة الزاوية للجسيم حول المركز تظل ثابتة أثناء الحركة وهو ما يُسمى بمبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية.

■ السرعة المساحية **Area Velocity**

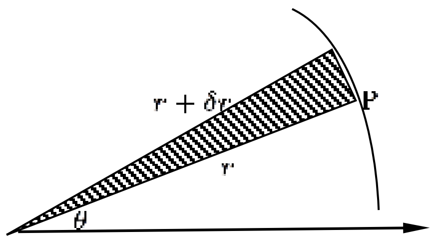
بفرض أن $P(r,\theta)$ هو موضع الكوكب عند اللحظة الزمنية t وأنه بعد زمن صغير δt يكون عند الموضع $Q(r+\delta r,\theta+\delta\theta)$. المساحة δA المقطوعة بمتجه الموضع خلال الفترة الزمنية δt تساوي تقريباً مساحة المثلث OPQ – كما بالشكل – أي أن

$$\delta A = \frac{1}{2} r(r+\delta r)\sin\delta\theta \cong \frac{1}{2} r^2 \delta\theta$$

السرعة المساحية $\dot{A}$ هي المساحة التي يرسمها OP في وحدة الزمن و تتعين من

$$\begin{aligned}
\dot{A} = \frac{dA}{dt} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta A}{\delta t} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2} r^2 \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{1}{2} r^2 \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t} \\
&= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{h} = \frac{1}{2}h, \qquad \dot{A} = \frac{1}{2}h
\end{aligned}$$

أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة في حالة المسار المركزي.



■ القُبا **Apse**

وتُعرف بأنها نقاط المسار المركزي والتي عندها يكون البعد عن مركز القوة نهاية عظمى أو صغرى. هذه الأبعاد تُسمى أبعاد القُبا أي عند نقط القُبا يكون $\dot{r}$ أو $\frac{du}{d\theta}$ أو $\frac{dr}{d\theta}$ وهذا يعني أنه عند القُبا تكون حركة الكوكب عمودية على متجه الموضع.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^2 = a^2\cos 2\theta$. اثبــت أن الســرعة تتناسب عكسياً مع r^3 وأن القوة تتناسب عكسياً مع r^7 .

الحـــــل

باختيار $r = \frac{1}{u}$ فيكون $\frac{1}{u^2} = a^2\cos 2\theta$

بالتفاضل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$-\cancel{2}\frac{1}{u^3}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{2}a^2\sin 2\theta \ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^2u^3\sin 2\theta$$

ولحساب قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = h^2\left(\left(a^2u^3\sin 2\theta\right)^2 + u^2\right)$$
$$= h^2\left(a^4u^6\sin^2 2\theta + u^2\right)$$
$$= h^2\left(a^4(1-\cos^2 2\theta)u^6 + u^2\right) = h^2\left(a^4u^6 - u^2 + u^2\right) = h^2a^4u^6$$

$$\therefore v^2 = h^2a^4u^6 \ \Rightarrow v = ha^2u^3 = \frac{ha^2}{r^3} \qquad \text{that is } \ v \propto \frac{1}{r^3}$$

بالتفاضل مرةً ثانية لـــ $\frac{du}{d\theta}$ يكون

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2a^2u^3\cos 2\theta + 3a^2u^2\frac{du}{d\theta}\sin 2\theta = 2u^3\underbrace{a^2\cos 2\theta}_{1/u^2} + 3a^2u^2\underbrace{\left(\frac{du}{d\theta}\right)}_{a^2u^3\sin 2\theta}\sin 2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2u + 3a^4u^5\sin^2 2\theta = 2u + 3a^4u^5\left(1-\cos^2 2\theta\right)$$
$$= 2u + 3a^4u^5 - 3a^4u^5\cos^2 2\theta$$
$$= 2u + 3a^4u^5 - 3u = 3a^4u^5 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^5$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2\left(3a^4u^5\right) = 3ma^4h^2u^7 = \frac{3ma^4h^2}{r^7} \qquad \text{that is } \ F \propto \frac{1}{r^7}$$

مثـــ ٢ ـــال

إذا كان المسار المركزي لجسيم هو قطع مخروطي فاثبت أن القوة تخضـــع لقـــانون التربيـــع العكسي.

الحـــــــل

معادلة المسار هي $r = \dfrac{\ell}{1 + e\cos\theta}$ حيث e هو الاختلاف المركزي ، ℓ هو نصـــف وتره البؤري العمودي

$$\because u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow u = \frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta$$
$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\ell}\sin\theta, \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{\ell}\cos\theta = \frac{1}{\ell} - u$$

ومن ثم فإن قانون القوة يتعين من

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$
$$= mh^2u^2\left(\frac{1}{\ell} - u + u\right) = \frac{mh^2}{\ell r^2} \qquad \text{i.e.} \quad F \propto \frac{1}{r^2}$$

مثـــ ٣ ـــال

اوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو القطب حتى يتحرك جسيم كتلته الوحدة على المسار $r = a(1-\cos\theta)$. وإذا كان مقدار كل من سرعة الجسيم والقوة عند القُبا همـــا P, V فاثبت أن $3V^2 = 4aP$.

الحـــــــل

حيث أن $r = a(1-\cos\theta)$ وباستخدام الفرضية $r = \dfrac{1}{u}$ نحصل على

$$\frac{1}{u} = a(1-\cos\theta)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = a\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -au^2\sin\theta$$

بالتفاضل مرةً أخرى بالنسبة إلى θ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -2au\frac{du}{d\theta}\sin\theta - au^2\cos\theta = 2a^2u^3\sin^2\theta - au^2\cos\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\sin^2\theta\ \ = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\ \ 1-\cos^2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta + 2au\ \ 1-\cos^2\theta$$

$$= -au^2\left(\cos\theta - 2u\underbrace{a\ \ 1-\cos\theta}_{1/u}\ (1+\cos\theta)\right)$$

$$= -au^2\ \ \cos\theta - 2(1+\cos\theta)$$

$$= -au^2(-2-\cos\theta) = -au^2(-3+\underbrace{1-\cos\theta}_{1/au})$$

$$= 3au^2 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3au^2$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2\ \ 3au^2\ \ = 3mah^2u^4\ = \frac{3mah^2}{r^4}$$

عند نقاط القُبا يكون

$$\dot r = 0 \ \text{ Or }\ \frac{du}{d\theta} = 0 \qquad \Rightarrow -au^2\sin\theta = 0 \qquad \therefore \sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\because h = r^2\dot\theta = \underbrace{(r\dot\theta)}_{V}r = 2aV \quad \text{Note } \ r\Big|_{\theta=\pi} = a(1-\cos\pi) = 2a$$

ومن قانون القوة التى حصلنا عليها

$$\because F = \frac{3ah^2}{r^4} \quad \Rightarrow F\Big|_{\theta=\pi} = P = \frac{3a(2aV)^2}{(2a)^4} \quad \Rightarrow \quad 3V^2\ = 4aP$$

مثـــ ٤ ـــال

جسيم كتلته واحد جرام يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية تتناسب عكسياً مع مكعب r بحيث أن القوة تساوي واحد داين عند $r = 1$ cm. أوجد معادلة المسار علماً بأنـــه عنـــد $\theta = 0$ فإن $r = 2$ cm والسرعة تساوي $\frac{1}{2}$ cm $\sec^{-1}$ واتجاهها يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الثابت.

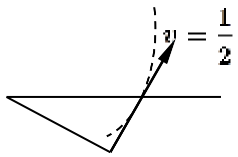
الحـــــــل

حيث أن قوة الجذب تتناسب مع مكعب r فإن $F = \dfrac{\mu}{r^3}$ حيث μ ثابت التناسب ويمكن حساب قيمته من الشـــرط $F = 1$ عنـــدما $r = 1$ ويكـــون ثابـــت التناســـب $\mu = 1$ أي أن $F = \dfrac{1}{r^3}$ ومن المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u^3 \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u \quad \text{Or} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{1}{h^2}\right)u = 0 \quad (1)$$

نوجد الثابت h باستخدام مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب ويكون

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}(2\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - u = 0$

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\theta}\right) - u = 0 \quad \text{Or} \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)d\left(\frac{du}{d\theta}\right) - udu = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل ولحساب c_1 يلزمنا حساب $\dfrac{du}{d\theta}$ عندما $r = 2$ والتي يمكن حسابها من قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$$

وحيث أن $v = \dfrac{1}{2}$ عندما $u = \dfrac{1}{2}$ فإن

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\Bigg|_{r=2} = \frac{1}{4}$$

أي أن عند $u = \dfrac{1}{2}$ فإن $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ وبالتالي قيمة ثابت التكامل $c_1 = 0$ من المعادلة (2)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -u \qquad \text{Or} \qquad \frac{du}{u} = -d\theta$$

وبعد اجراء فصل المتغيرات ، الآن بالتكامل

$$\ln u = -\theta + c_2$$

ومن الشرط $u = \dfrac{1}{2}$ عندما $\theta = 0$ نجد أن $c_2 = -\ln 2$ Or $c_2 = \ln\dfrac{1}{2}$

$$\ln u = -\theta - \ln 2 \quad \Rightarrow \ln r = \theta + \ln 2 \quad \text{Or} \quad r = 2e^{\theta}$$

وهي معادلة المسار.

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مركزية جاذبة F وكانت سرعة النقطة المادية $v = \dfrac{\ell}{r}$ حيث ℓ ثابت. فاثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r وأن معادلة المســـار الذي تتحرك عليه النقطة المادية هي $r = e^{a\theta}$ حيـــث $a = \dfrac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2 - h^2}$ إذا علمـــت أن $r = 1$ عندما $\theta = 0$.

الحـــــــل

من قانون السرعة حيث $v^2 = \dfrac{\ell^2}{r^2} = \ell^2 u^2$

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2 u^2 \tag{1}$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$2h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\cancel{\frac{du}{d\theta}} = 2\ell^2 u\cancel{\frac{du}{d\theta}} \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \ell^2 u$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \qquad \Rightarrow F = mh^2\ell^2u^3 = \frac{mh^2\ell^2}{r^3}$$

ولايجاد معادلة المسار من المعادلة (1)

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2u^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{h^2}u^2$$

$$\text{Or} \quad \frac{du}{d\theta} = -\underbrace{\frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{h}}_{a}u = -au$$

واعتبرنا الاشارة سالبة لأن القوة جاذبة أى نحو المركز. بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{du}{u} = -a d\theta \quad \Rightarrow \ln u = -a\theta + c$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $r=1$ عندما $\theta=0$ ومنها $c=0$

$$\ln u=-a\theta \qquad \Rightarrow \ln\frac{1}{r}=-a\theta \quad \text{Or} \quad \ln r=a\theta \quad \text{Or} \quad r=e^{a\theta}$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت النسبة بين اكبر سرعة زاوية يدور بها كوكب حول الشمس واقل ســـرعة زاويـــة تساوي γ^2 فاثبت أن الاختلاف المركزي لمسار هذا الكوكب هو $\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

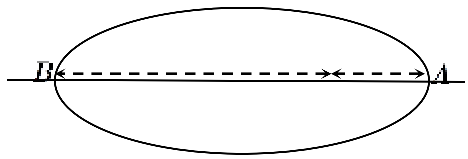
الحـــــــل

حسب قوانين كبلر فإن الكوكب يتحرك حول الشمس في مسار على شكل قطع نـــاقص و حيث أن $r^2\dot{\theta}=h \quad \therefore \dot{\theta}=\dfrac{h}{r^2}$

واضح أن السرعة الزاوية تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن الشمس r ومن ثم فإن اكـــبر سرعة زاوية تحدث عندما تكـــون r اصـــغر مـــا يمكـــن ، اي عنـــدما $r=r_1$ حيـــث $r_1=OA=a-ae$ واصــــغر ســــرعة زاويــــة تحـــدث عنــــدما $r=r_2$ حيـــث $r_2=OB=a+ae$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B}=\gamma^2=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1+e}{1-e} \qquad \text{Or} \qquad e=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$



مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^n=a^n\cos n\theta$. اثبـــت أن القـــوة تتناسب عكسياً مع r^{2n+3}.

الحـــــل

حيث أن $r^n = a^n \cos n\theta$ وباستخدام $r = \dfrac{1}{u}$ نجد أن

$$\frac{1}{u^n} = a^n \cos n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى المتغير θ

$$-\cancel{n}\,\frac{1}{u^{n+1}}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{n}a^n \sin n\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^n u^{n+1} \sin n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ مرة أخرى

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= na^n u^{n+1} \cos n\theta + (n+1)a^n u^n \frac{du}{d\theta} \sin n\theta \\ &= nu^{n+1} \underbrace{a^n \cos n\theta}_{1/u^n} + (n+1)a^n u^n \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^n u^{n+1} \sin n\theta} \sin n\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \sin^2 n\theta = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}(1-\cos^2 n\theta) \\ &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u^{2n+1} \underbrace{a^{2n} \cos^2 n\theta}_{1/u^{2n}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1}$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \;\; (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \;= (n+1)ma^{2n}h^2u^{2n+3} \;= \frac{3ma^{2n}h^2}{r^{2n+3}}$$

وهذا يعني أن $F \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$ (على الدراس استنتاج قانون السرعة)

■ مســــائل Problems ■