محاضرات في بحتة (4) "جبر مجرد اوهندسة فراغية"

لطلاب الفرقة الأولي – تعليم عام– شعبة الرياضيات

بكلية التربية

العام الجامعي ٢٠٢٢ – ٢٠٢٣م

أسس الجبر المجرد

المحتوى: الصفحة

الباب الأول: المجموعات

الباب الثاني: العلاقات

الباب الثالث: الرواسم

المحتوى: الصفحة

الباب الأول

المجموعات Sets

مقدمة Introduction:

تُعتبر نظرية المجموعات من أهم ما كشف العقل البشري في الرياضيات. ولا ترجع أهمية نظرية المجموعات إلى مجرد أنها إضافة جديدة إلى مجال الرياضيات ، فحسب بل لأنها علاوة على ذلك أمدت الرياضيين بأسس وأساليب جديدة لمعالجة فروع الرياضيات المختلفة التي كانت قائمة ، كما أتاحت الفرصة لكشف الكثير من الفروع الحديثة ولقد ساعدت لغة ورموز وجبر نظرية المجموعات في دراسة هندسة إقليدس وجبر الأعداد ونظرية الدوال الحقيقية كما أنها أصبحت أداة رئيسية في دراسة المنطق وجبر بوليان والجبر المجرد Boolean & Abstract Algebra والهندسات المختلفة والتوبولوجي Topology. وسوف تقتصر دراستنا في هذا الباب على لغة ورموز وجبر المجموعات.

مفهوم المجموعة The Mathematical Concept of a Set :

هناك أمثلة كثيرة لمفهوم المجموعة في حياتنا اليومية. فكثيراً ما نتحدث عن "مجموعة" الطلاب التي يتكون منها فريق كرة القدم لكلية العلوم بقنا ،و"مجموعة" الدول الأعضاء في هيئة الأمم المتحدة ، و"مجموعة" الحروف الهجائية التي تتكون منها كلمة "المجتهدون" .

إن كلاً من التجمعات السابقة يُطلق عليها لفظ "مجموعة".

وعلى ذلك فإن "المجموعة" هي تجمع من الأشياء. ولعل هذه العبارة تبرز لنا سؤالاً هو ، هل كل تجمع من الأشياء – أو العناصر – يحدد مجموعة بالمعنى الرياضي؟ فمثلاً هل يمكن أن نطلق لفظ مجموعة على تجمعات مثل: الأعداد المهمة ، الأشكال الهندسية الجميلة، الأعداد الصحيحة الأكبر بكثير من 10 .إن تحديد هذه التجمعات يتوقف أساساً على وجود إجابة محددة للأسئلة: ما هو العدد المهم؟ وما هو الشكل الهندسي الجميل؟ وماذا نعني بأكبر بكثير من؟.

في الواقع أنه ليست هناك إجابة محددة على كل هذه التساؤلات فإن الجمال والأهمية أمور تختلف من ثقافة لأخرى ومن شخص لآخر ، ومن ثم فإنه لا يمكن أن تحدد عبارات مثل الأعداد المهمة مجموعة بالمعنى الرياضي ، لأننا لا نستطيع الحكم بصفة قاطعة عما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذا التجمع أم لا. وبتعبير آخر إن العبارات السابقة تمثل تجمعات من العناصر غير المعرفة تعريفاً جيداً. وعلى العكس من ذلك فإن عناصر تجمعات مثل فريق كرة القدم بكلية العلوم بقنا ، وزوايا المثلث ABC والأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 7 معرفة تعريفاً جيداً ، حيث إنه في كل حالة يمكن الحكم بصفة قاطعة أن عنصراً ما ينتمي إلى ذلك التجمع أم لا ، ولذلك فإن كلاً منها تمثل مجموعة بالمعنى الرياضي ، وعلى ذلك يمكننا القول بأن:

"**المجموعة: هي تجمع من العناصر المعرفة تعريفاً جيداً**".

وسوف نصطلح في هذا المقرر على استخدام الحروف الهجائية الكبيرة للتعبير عن المجموعة فمثلاً قد نعتبر:

X هي مجموعة الأعداد الأولية ..... ,2, 3, 5, 7, 11

Y هي مجموعة الألوان الأخضر والأصفر والأزرق

N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, ...\}$

وكذلك سوف نستخدم الحروف الهجائية الصغيرة للتعبير عن العناصر التي تتكون منها المجموعات. فمثلاً نعتبر المجموعة T هي $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ فإن a عنصر ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً كالآتى :

$a \in T$ وتُقرأ a ينتمي إلى T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\in$ للتعبير عن انتماء عنصر إلى مجموعة ونلاحظ مثلاً أن العنصر g لا ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً:

$g \notin T$ وتُقرأ g لا تنتمي إلى المجموعة T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\notin$ للتعبير عن عدم انتماء عنصر إلى مجموعة.

- **التعبير عن المجموعات Set Formulation** :

توجد طريقتان للتعبير عن المجموعات:

١- طريقة السرد Tabulation Method وتُسمى أيضا طريقة الحصر:

ويتم ذلك بكتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة (إذا كان ذلك ممكناً) أو كتابة بعضها بطريقة توضح كيفية اســتنتاج بقية العناصر، وتُوضع عناصر المجموعة بين قوسين متوسطين وبين كل عنصرين تُوضع فاصلة "," مثال على ذلك:

$X = \{2, 3, 5, 7, 11\}$,
$Y = \{a, b, c, d, e\}$,
$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

ونلاحظ أننا كتبنا بين القوسين الرموز الدالة على جميع العناصر في كل من المجموعات X,Y أما N فقد كتبنا الرموز الدالة على أربع عناصر فقط إذ يمكن استنتاج باقي العناصر. ونود أن ننبه إلى أن اختلاف ترتيب العناصر بين القوسين في مجموعة لا يغير من المجموعة.

٢- طريقة الخاصية المميِزة The Rule Method: ويتم ذلك بإعطاء خاصـــية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر بحيث يمكن باستخدام هذه الخاصية أن نحدد بطريقة قاطعة ما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذه المجموعة أم لا.

فإذا كانت p خاصية معينة فإن { x : x لها الخاصية p } هي المجموعة التي تتكون من جميع العناصر مثل x حيث x تتمتع بالخاصية p . ونلاحظ هنا أن الرمز ":" يقوم مقام كلمة "حيث" مثال على ذلك:

X= { x : x عدد أولي بين 0 ، 12 } وهذه تعني أن

$X = \{2,3,5,7,11\}$.

- **المجموعة الخالية The Empty Set** :

إذا تأملنا المجمـــوعة { x : x عدد زوجى يقع بين 0 ،1 } فإننا نجـــد أن هذه المجمـــوعة لا تحتوي على أي عناصر ، ويُقال للمجموعة التي لا تحتوى على أي عناصر بأنها "مجموعة خالية" وســـنبرهن فيما بعد أن المجموعة الخالية مجموعة وحيدة. وعادة نســـتخدم الرمز ϕ ويقرأ "فاي" ليدل على المجموعة الخالية وقد يُستخدم الرمز{ } أحياناً.

- **المجموعات المنتهية والمجموعات اللانهائية** :

يُقال لمجموعة ما إنها منتهية Finite إذا كانت خالية أو كانت تحتوى على عدد محدود n من العناصر حيث إن n عدد صحيح موجب ، وفي غير هذه الحالات يُقال للمجموعة أنها لا نهائية Infinite.

- **تساوي مجموعتين** :

يُقال لمجموعتين Y ، X أنهما متساويتين إذا كانتا تتكونان من نفس العناصر بالضبط بغض النظر عن الترتيب ، أي أن المجموعتين X ، Y تكونان متساويتين إذا كانتا مجـــرد اسمـــين لمجموعة واحدة $X = Y$.

ومن تعريف تساوي مجموعتين يتضح أن :

١. إذا كانت $X = Y$ فإن كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y وكل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X.
٢. إذا كانت X, Y مجموعتين وكل عنصـــر من عناصـــر Y ينتمي إلى X وكل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y فإن $X = Y$.

وإذا كانت المجموعة X لا تساوي المجموعة Y فإننا نعبر عن ذلك بأن نكتب $X \neq Y$.

- **الاحتواء Inclusion** :

يُقال أن المجموعة X مجموعة جزئية Subset من المجموعة Y إذا كان كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y ، ويُكتب "$X \subset Y$" ويُقرأ X مجموعة جزئية من Y. وفي بعض الأحيان يُكتب "$Y \supset X$" وتقرأ "Y تحتوى على X" لتدل على أن المجموعة X مجموعة جزئية من Y وإذا كانت X ليســـت مجموعة جزئية من Y فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $X \not\subset Y$ (وهذا يعني أن هناك عنصـــراً واحداً على الأقل ينتمي إلى X ولا ينتمي إلى Y).

تعريف:

يُقال للمجموعة غير الخالية X أنها مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة Y إذا كان $X \subset Y$ ، $X \neq Y$ والنظرية التالية تتضمن الخواص الأساسية لمفهوم الاحتواء.

نظرية(١):

١ – لأي مجموعة X يكون $X \subseteq X$.

٢ – لأي مجموعتين X,Y إذا كان $X \subset Y, Y \subset X$ فإن $X=Y$.

٣ – لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z إذا كان $X \subset Y, Y \subset Z$ فإن $X \subset Z$.

البرهان: سنبرهن الخاصية الثانية فقط ونترك برهان الخاصيتين الأولى والثالثة للطالب.

بما أن $X \subset Y$ إذاً كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y .

(من تعريف المجموعة الجزئية).

وبما أن $Y \subset X$ إذاً كل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X .

(من تعريف المجموعة الجزئية).

إذاً $X=Y$ (من تعريف تساوي مجموعتين).

نتيجة: المجموعتان X,Y تكونان متساويتين إذا وإذا فقط كان $X \subset Y, Y \subset X$.

"إذا وإذا فقط" تعني أن النتيجة وعكسها صحيحة.

نظرية(٢): المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من أي مجموعة.

البرهان: لتكن X أي مجموعة وبفرض أن $\phi \not\subset X$ فهذا يعني أن ϕ تحتوي على عنصر لا ينتمي إلى المجموعة X ولكن هذا مستحيل لأن المجموعة ϕ لا تحتوي على أية عناصر ، وإذاً $\phi \not\subset X$ فرض خاطئ ، وعلى ذلك فلا بد أن تكون $\phi \subset X$.

نظرية(٣): المجموعة الخالية وحيدة.

البرهان: بفرض أن هناك مجموعتين خاليتين هما ϕ_1 , ϕ_2 .

فمن النظرية السابقة تكون ϕ_1 مجموعة جزئية من أي مجموعة ممكن أن تكون ϕ_2 أي أن $\phi_1 \subset \phi_2$.

وبالمثل ϕ_2 مجموعة جزئية من أي مجموعة ولتكن ϕ_1 أي أن $\phi_2 \subset \phi_1$.

ومن نظرية (١) نستنتج أن $\phi_2 = \phi_1$ أي أن المجموعة الخالية وحيدة.

مثال:

إذا كانت المجموعة $X = \{1,2,3\}$ فاكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X.

الحل:

المجموعات الجزئية للمجموعة X هي

$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

ونلاحظ أنه إذا كانتW هي المجموعة التي عناصرها هي كل المجموعات الجزئية للمجموعة X فإن:

$W = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

ونلاحظ أن $X \not\subset W$ وإنما $X \in W$

كما نلاحظ أن $1 \in X$ ولكن $1 \notin W$

وأيضا $\{2\} \notin X$ بينما $\{2\} \in W$

تُسمى المجموعة W .بمجموعة المجموعات الجزئية Power set للمجموعة X ويُرمز لها بالرمز $P(X)$ وتُسمى أيضا مجموعة القوى للمجموعة X .

- **<u>المجموعة الشاملة Universal Set</u>** :

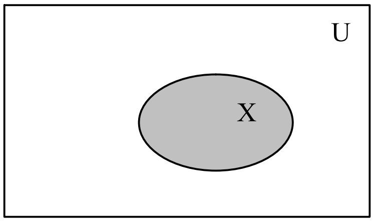
إذا كان لدينا عدد من المجموعات فإن المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي على كل عناصر هذه المجموعات ، أو بمعنى آخر أن عناصر هذه المجموعات تنتمي جميعها إلى هـــذه المجموعة الأم (الشاملة). ويُرمز لها بالرمز U ويمكن تعيين أكثر من مجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات ، ويُفضل تحديد واحدة منها في المسألة.

(اذكر مثال لمجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات؟).

- **<u>أشكال فن Venn Diagram</u>** :

من المفيد دائماً أن يكون لدينا صورة مرئية تمثل محتوى أي مسألة رياضية ، فـــإن ذلـــك يساعد على الفهم واقتراح الحلول. لذلك سنمثل دائماً المجموعة الشاملة U بمستطيل في مستوى الورقة على أن نعتبر أن عناصر U هي جميع النقط الواقعة داخل هذا المـــستطيل وفي هذه الحالة يمكن أن نمثل المجموعات المختلفة بمساحات داخل هذا المستطيل

انظر الشكل:



شكل (١)

تُسمى مثل هذه الأشكال بأشكال فن ويمكن استخدام هذه الأشكال في توضيح العلاقـــة بين المجموعات المختلفة.

ولكن ينبغي الإشارة إلى أن توضيح مسألة باستخدام أشكال فن لا يمكن أن يُقبل كبرهان لمسائل المجموعات. ويجب التعود على استخدام البرهان المنطقى سواء في برهنة النظريات أو في حل التمارين.

▪ **<u>التضمين Implication</u>** :

إذا كانت A,B جملتين خبرتين فإن أي واحدة منهما يُحتمل أن تكون صحيحة أو خاطئة. إذا حدث أن صحة الجملة A تستلزم بالضرورة أن تكون الجملة B صحيحة فمعنى هـــذا أن صحة الجملة A شرط لازم لصحة الجملة B ، أو بعبارة أخرى صحة الجملة B متضمنة في صحة الجملة A

ونكتب ذلك بالصورة الرمزية $A \Rightarrow B$ وتُقرأ A تؤدى إلى B .

مثال: إذا كانت الجملة A هي $x = 3$ وكانت B هي الجملة $x^2 = 9$ في هذه الحالة يكون $A \Rightarrow B$.

وإذا حدث أن $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ فإننا نكتب $A \Leftrightarrow B$ وتُقرأ " A إذا وإذا فقط B "

ويُقال في هذه الحالة أن الجملتين A, B متكافئتان.

مثال: $y = 2 \Leftrightarrow 3y + 1 = 7$

وباستخدام مفهوم التضمين يمكننا تعريف احتواء مجموعة لأخرى كما يلي:

$X \subset Y$ إذا كان $a \in X \Rightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

كذلك تعريف تساوي مجموعتين يمكن كتابته كما يلي:

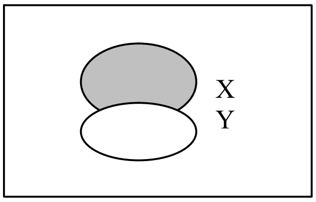
$X = Y$ إذا كان $a \in X \Leftrightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

▪ الفروق والمكملات Differences and Complements :

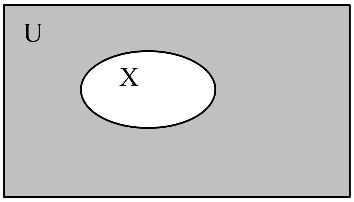
تعريف(١): الفرق بين مجموعتين X,Y هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصـــر الـــتي تنتمي إلى المجموعة X ولا تنتمي إلى المجموعة Y ويُرمز للفرق بين X,Y بالرمز $X - Y$

أي أن $X - Y = \{a : a \in X, a \notin Y\}$

(انظر الشكل) المساحة المظللة تمثل $X - Y$



تعريف(٢): إذا كانت $X \subset U$ فإن المجموعة $U - X$ تُسمى مكملة أو متممة المجموعة X بالنسبة للمجموعة الشاملة ، ومجازاً تُسمى "مكملة X" ويُرمز لها بالرمز X^c وأحياناً بالرمز $X^\backslash$ أي أن $X^c = \{a : a \in U, a \notin X\}$ (انظر الشكل):



المساحة المظللة في الشكل السابق تمثل المجموعة X^c (مكملة المجموعة X).

نلاحظ أن لأي عنصر $a \in U$ يكون إما $a \in X$ أو $a \in X^c$

مثال: باعتبار أن Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي المجموعة الشاملة.

(١) أوجد مكملة كل من المجموعات الآتية:

(i) The set of all Even Numbers.

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

(ii) $X = \{x : x \in Z, x < 1\}$.

(iii) $Y = \{y : y \in Z, 4 < y \leq -4\}$.

(٢) أوجد: $Z - X^c$ ، $X^c - Y$

الحل: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$

(١) مجموعة الأعداد الزوجية $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots\}$ (i)

$\therefore E^c = Z - E = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}.$

أي أن مكملة مجموعة الأعداد الزوجية هي مجموعة الأعداد الفردية Odd Numbers.

(ii) $X = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}.$

$\therefore X^c = Z - X = \{1, 2, 3, \ldots\}.$

(iii) $Y = \{\ldots, -6, -5, -4, 5, 6, 7, \ldots\}.$

$\therefore Y^c = Z - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$

(٢) $X^c - Y = \{1, 2, 3, 4\},\ Z - X^c = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}.$

نظرية(٤): لأي مجموعة X يكون $(X^c)^c = X$.

البرهان: إذا كان a أي عنصر في المجموعة الشاملة فإن:

$a \in (X^c)^c \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in X.$

لأن أي عنصر إما أن ينتمي إلى المجموعة أو إلى مكملتها،ومن تعريف المجموعة الجزئية:

$\therefore (X^c)^c \subset X. \qquad (1)$

ويكون: $a \in X \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in (X^c)^c$

$\therefore X \subset (X^c)^c. \qquad (2)$

من (2),(1) نستنتج أن:

$(X^c)^c = X .$

ويمكن إثبات نظرية (٤) بطريقة جداول الانتماء:

حيث نكون جدول مكون من ثلاث أعمدة هي عمود لكل من $X, X^c, (X^c)^c$

وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوى على المجموعة X

فيكون لدينا احتمالين إما $a \in X$ أو $a \notin X$ فنبدأ بملء الجدول:

بوضع 1 في عمود X إذا كان $a \in X$ ووضع 0 في عمود X إذا كان $a \notin X$

وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول:

X	X^c	$(X^c)^c$
1	0	1
0	1	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأول والثالث متطابقة ،

ومن ثم يكون $(X^c)^c = X$.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

إذا كان X,Y مجموعتين فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمى إلى إحدى المجموعتين على الأقل تُسمى اتحاد المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز $X\cup Y$ ويُقرأ "X اتحاد Y" ويمكن التعبير رمزياً عن اتحاد المجموعتين X,Y كما يلي:

$X\cup Y = \{a: a\in X\vee a\in Y\}$.

حيث "$\vee$" تعني أن $a\in X$ أو $a\in Y$ أو a تنتمي لكل من X,Y .

أما المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة فقط بين المجموعتين X,Y فتمثل تقاطع المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز "$X\cap Y$" وتُقرأ "X تقاطع Y" أي أن :

$X\cap Y = \{a: a\in X\wedge a\in Y\}$.

حيث "$\wedge$" تعني أن $a\in X$ و $a\in Y$ (أي تنتمي لكل من X,Y في نفس الوقت).

مثال: إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$

فإن $X\cap Y = \{1, 3\}$, $X\cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

وإذا كانت $X = \{d, e, f\}$, $Y = \{a, b, c\}$ فإن $X\cap Y = \phi$.

ملاحظات: (١) يُقال لمجموعتين X,Y أنهما متباعدتان Disjoint إذا كان:

$X\cap Y = \phi$.

(٢) إذا كانت U هي المجموعة الشاملة للمجموعة X فإن:

$X\cup X^c=U$, $X\cap X^c=\phi$

(٣) لأي مجموعتين X,Y يكون:

(i) $a\notin X\cup Y\Leftrightarrow a\notin X\wedge a\notin Y$. (ii) $a\notin X\cap Y\Leftrightarrow a\notin X\vee a\notin Y$.
(iii) $X\subset X\cup Y$, $Y\subset X\cup Y$. (iv) $X\cap Y\subset X$, $X\cap Y\subset Y$.

نظرية(٥): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

$X\subset Y \Leftrightarrow X\cup Y=Y$.

البرهان: النظرية تنص على أن الجملتين $X\subset Y$ ، $X\cup Y=Y$ متكافئتان.

أي أنه أولاً: إذا كان $X\subset Y$ فإن $Y=X\cup Y$.

ثانياً: وإذا كان $X\cup Y=Y$ فإن $X\subset Y$.

أولاً: نفرض أن $X \subset Y$ وسنبرهن أن $X \cup Y = Y$ كما يلي:

من الواضح أن:

$$Y \subset X \cup Y. \qquad (1)$$
$$a \in X \cup Y \Rightarrow a \in X \vee a \in Y \Rightarrow a \in Y \ ; X \subset Y$$
$$\therefore X \cup Y \subset Y. \qquad (2)$$

من (2),(1) يكون $X \cup Y = Y$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X \cup Y = Y$ وسنبرهن أن $X \subset Y$:

من الواضح أن:

$$X \subset X \cup Y \Rightarrow X \subset Y \ ; X \cup Y = Y.$$

وهو المطلوب ثانيا.

من أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(٦): لأي مجموعتين X, Y يتحقق:

$$X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X.$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $X \subset Y$ وسنبرهن أن $X \cap Y = X$:

من الواضح أن:

$$X \cap Y \subset X. \qquad (1)$$
$$a \in X \, , X \subset Y \Rightarrow a \in X \wedge a \in Y \Rightarrow a \in X \cap Y$$
$$\therefore X \subset X \cap Y. \qquad (2)$$

من (2),(1) يكون $X \cap Y = X$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X \cap Y = X$ وسنبرهن أن $X \subset Y$:

$$a \in X = X \cap Y \Rightarrow a \in X \wedge a \in Y \Rightarrow a \in Y.$$
$$\therefore X \subset Y.$$

وهو المطلوب ثانيا.

ومن أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(٧): إذا كانت $X_1 \subset X_2 , Y_1 \subset Y_2$ فإن:

(1) $X_1 \cup Y_1 \subset X_2 \cup Y_2$.
(2) $X_1 \cap Y_1 \subset X_2 \cap Y_2$.

البرهان:

(1) $a \in X_1 \cup Y_1 \Rightarrow a \in X_1 \vee a \in Y_1 \Rightarrow a \in X_2 \vee a \in Y_2 \;\; ; X_1 \subset X_2 , Y_1 \subset Y_2$

$\therefore \;\; X_1 \cup Y_1 \subset X_2 \cup Y_2$.

(2) $a \in X_1 \cap Y_1 \Rightarrow a \in X_1 \wedge a \in Y_1 \Rightarrow a \in X_2 \wedge a \in Y_2 \;\; ; X_1 \subset X_2 , Y_1 \subset Y_2$

$\therefore \;\; X_1 \cap Y_1 \subset X_2 \cap Y_2$.

نظرية(٨): لأي مجموعة X يتحقق:

(1) $X \cup X = X$.
(2) $X \cap X = X$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانوني اللا نمو Idempotency .

نظرية(٩): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

(1) $X \cup Y = Y \cup X$.
(2) $X \cap Y = Y \cap X$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانوني الإبدال Commutative Laws .

نظرية(١٠): لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

(1) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.
(2) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانوني الدمج أو قانوني الترتيب Associative Laws .

نظرية(١١): إذا كانت X, Y أي مجموعتين فإن:

$X - Y^c = X \cap Y$.

البرهان: باستخدام نتيجة نظرية (١) وهي الطريقة العامة لأي عنصر a من عناصر المجموعة الشاملة ومن تعريف الفرق بين المجموعتين نجد أن:

$a \in (X - Y^c) \Rightarrow a \in X \wedge a \notin Y^c$

$\Rightarrow a \in X \wedge a \in Y$ من تعريف المجموعة المكملة

$\Rightarrow a \in (X \cap Y)$ من تعريف تقاطع مجموعتين

$\therefore \;\; X - Y^c \subset X \cap Y$. (1)

وبالعكس يكون:

$$\begin{aligned} a\in(X\cap Y) &\Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \\ &\Rightarrow a\in X \wedge a\notin Y^c \\ &\Rightarrow a\in(X - Y^c) \end{aligned}$$

$$\therefore\ (X\cap Y) \subset X - Y^c. \qquad (2)$$

ومن (2),(1) نستنتج أن:

$$(X - Y^c) = (X\cap Y)\ .$$

ويمكن إثبات ذلك بطريقة جداول الانتماء حيث نكون جدول مكون من خمس أعمدة هي عمود لكل من:

$X, Y, Y^c, (X - Y^c), (X\cap Y).$

وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوي على المجموعتين X, Y فيكون لدينا الاحتمالات الآتية:

$a\in X\ ,\ a\in Y.$
$a\in X\ ,\ a\notin Y.$
$a\notin X\ ,\ a\in Y.$
$a\notin X\ ,\ a\notin Y.$

وليس هناك أية احتمالات أخرى.

نبدأ بملء الجدول بأن نضع 1 في عمود X إذا كان $a\in X$ ونضع 0 إذا كان $a\notin X$

وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول الآتي:

X	Y	Y^c	$(X - Y^c)$	$(X \cap Y)$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:

$(X - Y^c) = X\cap Y\ .$

نظرية(١٢): قانون دي مورجان De Morgan's Laws :

لأي مجموعتين X, Y يتحقق:

(1) $(X\cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

(2) $(X\cup Y)^c = X^c \cap Y^c$.

البرهان:

سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:

نكون جدول الإنتماء كما يلي:

X	Y	X^c	Y^c	$X\cap Y$	$(X\cap Y)^c$	$(X^c\cup Y^c)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:

$(X\cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

وسنبرهن (2) باستخدام الطريقة العامةكما يلي:

(2) إذا كان a عنصر من عناصر المجموعة الشاملة فإن :

$$\begin{aligned} a\in(X\cup Y)^c &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\in X^c\cap Y^c . \end{aligned}$$

$\therefore\ (X\cup Y)^c \subset X^c\cap Y^c .\qquad (1)$

وأيضاً

$$\begin{aligned} a\in(X^c\cap Y^c) &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\in(X\cup Y)^c . \end{aligned}$$

$\therefore\ (X^c\cap Y^c) \subset (X\cup Y)^c .\qquad (2)$

من (1),(2) نستنتج أن

$(X\cup Y)^c = (X^c\cap Y^c)$.

نظرية(١٣): قانوني التوزيع Distributive laws :

لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

(1) $X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z)$
(2) $X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$

البرهان:

سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:

X	Y	Z	$X\cap Y$	$X\cap Z$	$Y\cup Z$	$X\cap(Y\cup Z)$	$(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن :

$X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z).$

وسنبرهن (2) بالطريقة العامة كما يلي:

(2) إذا كان a أحد عناصر المجموعة الشاملة فإن:

$a\in(X\cup(Y\cap Z)) \Rightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z).$

فإذا كان:

$$\begin{aligned} a\in X &\Rightarrow a\in(X\cap Y),\ a\in(X\cap Z) \\ &\Rightarrow a\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z). \end{aligned}$$

وإذا كان:

$$\begin{aligned} a\in(Y\cap Z) &\Rightarrow a\in Y,\ a\in Z \\ &\Rightarrow a\in X\cup Y,\ a\in X\cup Z \\ &\Rightarrow a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z). \end{aligned}$$

$\therefore\ X\cup(Y\cap Z)\subset(X\cup Y)\cap(X\cup Z). \qquad (I)$

والعكس نفرض أن:

$a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z) \Rightarrow a\in(X\cup Y)$ (1),
$a\in(X\cup Z)$ (2)

إذا كان $a \notin X$ فإنه من (2) , (1) يكون:

$a\in Y,\ a\in Z \Rightarrow a\in(Y\cap Z).$
$\therefore\ a\in X \vee a\in(Y\cap Z)$
$\therefore\ a\in X\cup(Y\cap Z).$
$\therefore\ (X\cup Y)\cap(X\cup Z)\subset X\cup(Y\cap Z).$ (II)

من (I),(II) يكون :

$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$

ملاحظة: يمكن اختصار الطريقة العامة لإثبات ما سبق كما يلي:

$$\begin{aligned} a\in X\cup(Y\cap Z) &\Leftrightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z)\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cap X) \vee a\in(Y\cap Z)\\ &\Leftrightarrow [a\in X \wedge a\in X] \vee [a\in Y \wedge a\in Z]\\ &\Leftrightarrow [a\in X \vee a\in Y] \wedge [a\in X \vee a\in Z]\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \wedge a\in(X\cup Z)\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \cap (X\cup Z)\end{aligned}$$
$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$

نتيجة: عملية التقاطع "$\cap$" تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

بينما عملية الإتحاد "$\cup$" لا تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

أي أن لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z يتحقق:

$X\cap(Y-Z) = (X\cap Y)-(X\cap Z).$, $(X-Y)\cap Z = (X\cap Z)-(Y\cap Z).$
$X\cup(Y-Z) \neq (X\cup Y)-(X\cup Z).$, $(X-Y)\cup Z \neq (X\cup Z)-(Y\cup Z).$

تحقق من ذلك؟.

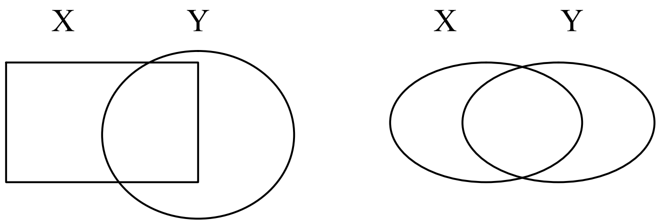
تمرين: باستخدام قوانين التوزيع برهن أن لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

(1) $X\cap(X^c\cup Y) = X\cap Y.$
(2) $X\cup(Y-X) = X\cup Y.$

- **تعريف**: تُعرف مجموعة الفرق المتماثل (أو الاختلاف المتماثل) للمجموعتين X,Y والتي يُرمز لها بالرمز $X\Delta Y$ كما يلي:

$$X\Delta Y = (X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X).$$

وتُمثل كما بالشكل:



تمرين: تحقق من أن $(X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X)$

مثال: إذا كانت $X = \{x : x \in N , 3 \le x \le 10\}$, $Y = \{y : y \in N , 5 < y < 12\}$

فإن $X\Delta Y = \{3,4,5,11\}$ (تحقق من ذلك؟) .

▪ **تعميم فكرتى الاتحاد والتقاطع Generalization of Union & Intersection**:

يمكن تعميم فكرتى الاتحاد والتقاطع لتشمل أي عدد من المجموعات (سواء كان منتهياً أو غير منته). فإذا كانت $G = \{X, Y, Z, \ldots\}$ عائلة من المجموعات ، أي أن G هي مجموعة عناصرها مجموعات $X, Y, Z, \ldots$ يُعرف اتحاد هذه المجموعات بأنه المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى واحدة على الأقل من هذه المجموعات $X, Y, Z, \ldots$.

ويُرمز لاتحاد هذه المجموعات بالرمز $X \cup Y \cup Z \cup \ldots$

كذلك نعرف تقاطع المجموعات التي تنتمي إلى G بأنه المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين جميع المجموعات $X, Y, Z, \ldots$

ويُرمز لتقاطع هذه المجموعات بالرمز $X \cap Y \cap Z \cap \ldots$

وإذا كان لدينا عدد محدود من المجموعات $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ فإننا نكتب $\cup_{i=1}^{n} X_i$ لاتحاد هذه المجموعات ونكتب $\cap_{i=1}^{n} X_i$ لتقاطع هذه المجموعات.

$$\cup_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, some\ i\}\ ,\ \ \cap_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, all\ i\}.$$

▪ **التجزيء Partition** :

تعريف: يُقال لمجموعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة X أنها تجزيء للمجموعة X إذا كانت هذه المجموعات متباعدة ثنائياً وكان اتحادها هو المجموعة X.

مثال: المجموعة $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}, \ldots\}$ تكون تجزيء لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

كذلك المجموعة $\{\{1,4,7,\ldots\},\{2,5,8,\ldots\},\{3,6,9,\ldots\}\}$ تجزيء آخر لــ N .

بينما المجموعة $\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}, \ldots\}$ ليست تجزيء لــ N .

▪ **الأزواج (الثنائيات) المرتبة Ordered Pairs** :

ليكن x,y عنصرين في مجموعة . من هذين العنصرين يمكن تكوين ما يُسمى بالزوج المرتب أو الثنائي المرتب ، حيث تُسمى x المركبة الأولى (المسقط الأول) ،وتُسمى y المركبة الثانية (المسقط الثاني) للزوج المرتب . أي أن الزوج المرتب هو مجموعة من عنصرين الترتيب بينهما أساسي ، لذلك يُرمز للزوج المرتب الذي مركبته الأولى x ومركبته الثانية y بالرمز (x,y) .

لاحظ أن $\{x,y\} = \{y,x\}$ في حين أن $(x,y) \neq (y,x)$ ، ويتم التســـاوي فقط في حالة $x = y$ ، وبوجه عام يمكن القول أن $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

مثال: أوجد x,y إذا علمت أن $(x+2y\ ,\ 3) = (4\ ,\ x+y)$.

الحل: من تعريف تساوي الأزواج المرتبة نجد أن $x+2y = 4\ ,\ x+y = 3$

فبالطرح نجد أن $y = 1$ ، وبالتعويض نجد أن $x = 2$.

- **الحاصل الديكارتي (الضرب الكرتيزي) لمجموعتين**

Cartesian Product of two Sets :

ليكن X,Y مجموعتين غير خاليتين. الحاصل الديكارتي $X\times Y$ هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى تنتمي للمجموعة X ،ومركبتها الثانية تنتمي للمجموعة Y أي أن:

$$X\times Y = \{(x,y) : x\in X \wedge y\in Y\}.$$

مثال(١): ليكن $A = \{a, b, c\}\ ,\ B = \{x, y\}$ فإن

$$A\times B = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)\},$$
$$B\times A = \{(x,a), (x,b), (x,c), (y,a), (y,b), (y,c)\},$$
$$A\times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\},$$
$$B\times B = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}.$$

مثال(٢): إذا كان $X=\{1,2,3\}$ اكتب $X\times X$.

الحل:

$$X\times X=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

نظرية(١٤): لأي مجموعات اختيارية A, B, C, D يتحقق:

(i) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.
(ii) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.
(iii) $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$.

الإثبات: سنبرهن (i),(iii) ونترك برهان (ii) للطالب.

(i)
$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(B\cap C) &\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap C\\ &\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge y\in C\\ &\Leftrightarrow (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in A\times C\\ &\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\cap(A\times C).\end{aligned}$$

$$\therefore\ A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C).$$

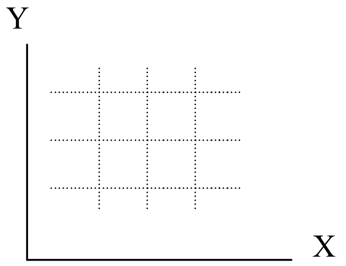
(iii) $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in C\times D$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge x\in C \wedge y\in D$
$\Leftrightarrow x\in A\cap C \wedge y\in B\cap D$
$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).$

$\therefore\ (A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D).$

في بعض الأحيان يُسمى حاصل الضرب الكرتيزي $X\times X$ المربع الكرتيزي ويُرمز له بالرمز X^2 .

- **تمثيل حاصل الضرب الكرتيزي Representation of Cartesian Products :**

يُمثل حاصل الضرب الكرتيزي $X\times Y$ بيانياً برسم محورين المحور الأفقي يمثل عناصر المجموعة X ، والمحور الرأسي يمثل عناصر المجموعة Y ، وتُمثل الأزواج المرتبة (x,y) (أي عناصر حاصل الضرب الكرتيزي) بنقط في المستوى كما بالشكل:



ملاحظة:

إذا كانت X مجموعة عدد عناصرها m ، وكانت Y مجموعة عدد عناصرها n فإن حاصل الضرب الكرتيزي$X\times Y$ يكون مجموعة عدد عناصرها $m\times n$ (عدد الأزواج المرتبة).

تمارين

١- استخدم طرق التعبير عن المجموعات لتحديد عناصر المجموعات الآتية:

(أ) الأعداد الطبيعية الأقل من 8

(ب) الأعداد الكسرية التي لها البسط يساوي1 ولها المقام الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من7

(ج) الحروف المختلفة المكونة للجملة " مَن جد وجد ومَن زرع حصد " .

٢- عبر عن المجموعات الآتية بذكر صفة مشتركة بين عناصر المجموعة:

(أ) { a , e , i , o , u }

(ب) { 10 , 100 , 1000 , 10000 , ...}

(ج) { 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , ...} .

٣- عبر عن المجموعات الآتية بطريقة الحصر (السرد):

(أ) X={ x: x is a factor of 6 }

(ب) Y={ y: y is a solution of $y^2=0$ }

(ج) A={ a: a$\in$N, a is odd number,1<a<10}

(د) B={ b: b$\in$N, b is prime number,1<b<12}

حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

٤- اعط مثال لمجموعات تحتوي على:

(أ) عنصرين فقط.

(ب) لا تحتوي على عناصر.

(ج) عنصر واحد فقط.

(د) عدد غير محدود من العناصر.

٥- بفرض المجموعة{ 9 , 8 , 5 , 3 } = A عبر برموز جبرية عن الآتي:

(أ) 8 عنصر في A

(ب) 4 ليس عنصرا في A

(ج) يوجد فقط ثماني مجموعات جزئية من عناصرA تحتوي العنصر 8

٦- حدد أي من المجموعات الآتية تكون منتهية ، وأيها تكون لانهائية:

(أ) $A = \{ x , y , p , q , 6 , 8 \}$

(ب) $B = \{ x : x \text{ is a multiple of } 3 \}$

(ج) مجموعة حروف اللغة العربية

(د) $D = \{ x : x \in R, 0 \le x \le 1\}$ حيث R مجموعة الأعدادالحقيقية.

٧- اكتب بعض المجموعات التي تصلح كل منها كمجموعة شاملة للمجموعات:

$A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3,4,5\}$.

٨- مالعلاقة بين $\{1\}$,1 ، وبين $\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$,$\{1, 2, 3\}$

٩- بفرض المجموعات:

$A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,5\}$, $E = \{2\}$, $D = \{5, 7, 9\}$.

حدد أي من العبارات الآتية يكون صحيحا ، وأيها خطأ:

(1) $B \subset A$	(2) $E \subset B$	(3) $D \subset A$
(4) $B \in A$	(5) $\phi \subset B$	(6) $\phi \in B$
(7) $E \not\subset A$	(8) $7 \subset D$	(9) $2 = E$
(10) $5 \in A$	(11) $\{5\} \in A$	(12) A finite.

١٠- اكتب عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لكل من المجموعات الآتية:

(أ) $\{a, b\}$

(ب) $\{a, b, c, d\}$

١١- إذا كانت $X = \{a,b,c\}$ بيّن الصواب من الخطأ فيما يلي (وصحح الخطأ):

(1) $\{a\} \in X$	(2) $\{a,b\} \subset P(X)$	(3) $\{\phi\} \in P(X)$
(4) $\{\phi\} = \phi$	(5) $\{a,b\} \subset X$	(6) $\{\{a\}\} \subset X$
(7) $\{d\} \subset P(X)$.		

١٢- بفرض أن $a \in X$, $b \in Y$, $X \subset Y$,$Y \subset Z$

(أ) هل $a \in Z$

(ب) هل $b \in Z$

(ج) هل $a \in Y$

(د) هل كل عنصر من عناصر Z يتطلب أن يكون عنصرا من عناصر كلا من X,Y

(ه) هل كل عنصر من عناصر X يتطلب أن يكون عنصرا من عناصرZ وليسY

١٣- بفرض أن $A = \{a,b,c,d\}, B = \{c,d,e\}, C = \{c,e,f,g\}, D = \{a,b,e,f\}$

عبر عن المجموعات الآتية:

(i) $A\cup(B\cup C)$.
(ii) $(A\cup B)\cap C$.
(iii) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$.
(iv) $A-B$.
(v) $(A\cup B)-(A\cap B)$.

١٤- بفرض أن $B=\{2,3,4\}$, $A=\{1,2\}$. اكتب عناصر المجموعات الآتية:

(i) $A\times A$. (ii) $A\times B$.
(iii) $B\times A$. (iv) $B\times B$.
(v) $(A\times B)\cup(B\times A)$. (vi) $(A\times A)\cup(B\times A)$.
(vii) $(A\times A)\cup(A\times B)$. (viii) $(A\cup B)\times A$..

١٥- بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فحدد أي من المجموعات الآتية تكون تجزيئ للمجموعة A وأيها لا تكون (مع ذِكر السبب):

(i) $\{ \{1, 2, 6\}, \{6, 3\} \}$.
(ii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 2\} \}$.
(iii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\} \}$.
(iv) $\{ \{1, 2\},\{3, 4\},\{5, 6\} \}$.

١٦- لأي ثلاث مجموعات اختيارية A, B, C برهن أن:

(i) $A\cap(B\cap C)^c = (A-B)\cup(A-C)$.
(ii) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$.
(iii) $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$.
(iv) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$.
(v) $(A\times A)\cap(B\times C) = (A\cap B)\times(A\cap C)$.

الباب الثاني

العلاقات Relations

تعريف: إذا كانت X,Y مجموعتان فإن أي مجموعة جزئية من حاصـــل الضرب الكارتيزي $X\times Y$ تُسمى علاقة $\Re$ بين المجموعتين X,Y.

أي أن $\Re \subseteq X\times Y$ وإذا كان $(a,b)\in\Re$ أو $a\Re b$ يُقال أن a يرتبط بالعنصر b بالعلاقة $\Re$.

ونلاحظ أن:

(١) إذا كان عدد عناصـــر المجموعة X هو n وكان عدد عناصر المجموعة Y هو m فإن عدد العلاقات المختلفة التي يمكن أن نكونها بين المجموعتين X,Y هو 2^{nm} لأن عدد عناصر المجموعة $X \times Y$ هو nm.

وإذاً عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $X\times Y$ هو 2^{nm}.

(٢) تُسمى أي مجموعة جزئية من $X\times X$ بعلاقة على X أو علاقة في X أو علاقة من X إلى X.

(٣) إذا كانت $\Re = X\times X$ فإننا نقول أن $\Re$ علاقة ممتلئة Full.

(٤) إذا كانت $\Re = \phi$ فإننا نقول أن العلاقة $\Re$ علاقة خالية Empty.

العلاقات الممتلئة والخالية قليلة الأهمية ، ولكن العلاقات الجديرة بالدراسة هي التي تكون فيها $\Re$ مجموعة جزئية فعلية من $X\times Y$ أو من $X\times X$.

مثال(١): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{2, 3, 4, 6\}$ كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a\backslash b \quad \forall a,b\in X.$$

($a\backslash b$ تعني أن a تقسم b أو أن b تقبل القسمة على a) فإن مجموعة الثنائيات المرتبة:

$$\{ (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6) \}.$$

تعبر عن هذه العلاقة $\Re$ وواضح أن إحداثيي كل عنصر من هذه المجموعة يجعلان التعبير $a\backslash b$ صحيح. فمثلاً العدد 2 يقسم العدد 2 ، والعدد 3 يقسم العدد 6 ، والعدد 2 يقسم العدد 4 وهكذا ...

نطاق ومدى العلاقة $\Re$ Domain & Range:

إذا كانت $\Re$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y فإننا يمكن أن نميز مجموعتين جزئيتين واحدة من X والأخرى من Y كما يلي:

المجموعة التي تتكون من جميع عناصـــر X التي تظهر كإحداثي أول في أحد عناصر X×Y التي تنتمي إلى $\Re$ تُسمى نطاق العلاقة $\Re$.

والمجموعة التي تتكون من جميع عناصـــر Y التي تظهر كأحداثي ثاني في أحد عناصر X×Y التي تنتمي إلى $\Re$ تُسمى مدى العلاقة $\Re$.

ويُرمز بالرمز $D_\Re$ لنطاق العلاقة R وبالرمز $G_\Re$ لمدى العلاقة $\Re$ أي أن:

$D_\Re = \{x\in X : (x,y)\in\Re\}$, $G_\Re = \{y\in Y : (x,y)\in\Re\}$.

ونلاحظ أن:

$\Re \subseteq D_\Re\times G_\Re \subseteq X\times Y$.

مثال(٢): نطاق ومدى العلاقة $\Re$ المعرفة في المثال السابق يكون:

$D_\Re = G_\Re = \{2, 3, 4, 6\}$.

مثال(٣): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ كما يلي:

$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a>b \quad \forall a,b\in X$.

فعبر عن $\Re$ كمجموعة ثنائيات مرتبة ، ثم أوجد $D_\Re$, $G_\Re$.

الحل:

$\Re = \{ (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
$D_\Re = \{2, 3, 4\}$, $G_\Re = \{1, 3, 2\}$.

العلاقات العكسية Inverse Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y فإنه يمكن تعريف علاقة $\Re^{-1}$ من Y إلى X بحيث أن لكل عنصرين $y\in Y, x\in X$ يكون $y\Re^{-1}x$ إذا فقط كان $x\Re y$.

مثال(٤): إذا كانت المجموعة X والعلاقة $\Re$ هما الموضحتان في مثال (١)

وكانت $\Re^{-1}$ هي العلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ على المجموعة X فإن:

$\Re^{-1} = \{ (2,2), (4,2), (6,2), (3,3), (6,3), 4,4), (6,6)\}$.

لاحظ أن $a\Re^{-1}b$ تعني أن b تقسم a أو أن a يقبل القسمة على b.

تحصيل أو تركيب العلاقات Composition of Relations:

إذا كانت $\Re_1$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y ، وكانت $\Re_2$ علاقة من المجموعة Y إلى المجموعة Z فإنه يمكن تحصيل أو تركيب العلاقة $\Re_2$ مع العلاقة $\Re_1$ لتنتج علاقة من X إلى Z تُعرف كما يلي:

$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{(x,z): \exists\, y\in Y ;(x,y)\in\Re_1 ,(y,z)\in\Re_2\}.$$

تُسمى $\Re_2 \circ \Re_1$ العلاقة المحصلة أو العلاقة المركبة.

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت:

$$\Re_1 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(2,1)\},\ \ \Re_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2), (3,1)\}.$$

علاقتين معرفتين على المجموعة A فإن:

$$\Re_1 \circ \Re_2 = \{ (1,1), (1,3), (1,2), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3) \} ,$$
$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,2), (2,1) \}.$$

وواضح أن:

$$\Re_1 \circ \Re_2 \neq \Re_2 \circ \Re_1 .$$

- **خواص العلاقات** :

أولاً: العلاقة العاكسة Reflective Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة عاكسة (أو علاقة انعكاسية) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\, a\in A \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

مثال(١): إذا كانت $\Re_1,\Re_2$ علاقتين معرفتين على المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ حيث:

$$\Re_1 = \{ (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (2,1)\} ,$$
$$\Re_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1)\}.$$

فإن العلاقة $\Re_1$ تكون علاقة عاكسة وذلك لأن $\forall\, a\in A \Rightarrow a\Re a$

بينما العلاقة $\Re_2$ ليست علاقة عاكسة وذلك لأن $(3,3)\notin\Re_2$, $3\in A$.

نتيجة: يمكن تعريف عدد 2^{n^2-n} من العلاقات العاكسة على المجموعة A والتي تحتوي على عدد n من العناصر.

وذلك لأن عدد عناصر مجموعة حاصل الضرب الكرتيزي AxA هو n^2.

وعدد العناصر التي على الصورة (a,a) هو n وهذه العناصر يجب أن تدخل في تكوين أي علاقة عاكسة.

وعدد بقية العناصر يكون n^2-n. وهذه العناصر يمكننا إضافة أي مجموعة جزئية منها إلى العناصر n الأولى فنحصل على علاقة عاكسة.

وكما نعلم أن عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من $n^2 - n$ من العناصر هو 2^{n^2-n} وإذاً عدد العلاقات العاكسة التي يمكن تكوينها على المجموعة A التي عدد عناصرها nيكون 2^{n^2-n}.

ثانياً: العلاقة المتماثلة Symmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة تماثل (أو علاقة تناظرية أو علاقة متماثلة) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\in\Re.$$

مثال(٢): إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$ وكانت العلاقة $\Re$ هي:

$$\Re = \{ (1,1), (1,3), (1,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\}.$$

هل $\Re$ علاقة متماثلة أم لا ؟.

الحل: نجد أن

$$(1,1),(1,1)\in\Re\ ,\ (1,3),(3,1)\in\Re\ ,\ (1,4),(4,1)\in\Re\ ,\ (3,3),(3,3)\in\Re\ ,$$
$$(3,4),(4,3)\in\Re,\ (4,4),(4,4)\in\Re.$$

أي أن $\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\in\Re$ ومن ثم تكون $\Re$ علاقة متماثلة.

مثال(٣): إذا كانت X هي مجموعة المستقيمات المرسومة في المستوى ، وكانت $\perp$ هي علاقة "عمودي على" معرفة على المجموعة X.

فإننا نلاحظ أن لكل $L\in X$ لا يمكن أن يكون $L\perp L$.

وإذاً العلاقة $\perp$ ليست علاقة عاكسة.

وإذا كان L_1,L_2 خطين مستقيمين في الجموعة X فإن:

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow L_2 \perp L_1.$$

وإذاً العلاقة $\perp$ تكون علاقة متماثلة.

ثالثاً: العلاقة المتخالفة Asymmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة متخالفة (أو علاقة تخالفية) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$$

نلاحظ أن العلاقة المتخالفة لا يمكن أن تحتوي على أي عنصر على الصورة (a,a) حيث $a\in A$ وعلى ذلك فالعلاقة المتخالفة لا يمكن أن تكون علاقة عاكسة.

مثال(٤): إذا كانت $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ علاقات معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3\}$ حيث:

$\Re_1 = \{ (1,2), (1,3), (2,3)\}.$

$\Re_2 = \{ (1,2), (2,1), (1,3), (2,3)\}.$

$\Re_3 = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,3)\}.$

فإن العلاقة $\Re_1$ متخالفة وذلك لأن $\forall\ (a,b)\in \Re_1 \Rightarrow (b,a)\notin \Re_1$ ، بينما العلاقة $\Re_2$ ليست متخالفة وذلك لأن $(1,2),(2,1)\in\Re_2$ ، وكذلك العلاقة $\Re_3$ ليست متخالفة ، وذلك لأن $(1,1)\in\Re_3$.

رابعاً: العلاقة عكسية التماثل Anti-Symmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة عكسية التماثل (أو علاقة متخالفة التماثل) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re\ ,\ a \neq b \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$$

أو إذا تحقق الشرط:

$$\text{If } (a,b)\in\Re \text{ and } (b,a)\in\Re \Rightarrow a = b.$$

مثال(٥): إذا كانت $\Re_1$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي: $(a,b)\in\Re_1 \Leftrightarrow b = a^2\ \ \forall\ a,b\in N$

$$\therefore \Re_1 = \{ (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), \ldots\}.$$

وتكون العلاقة $\Re_1$ عكسية التماثل وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re_1\ ,\ a \neq b \Rightarrow (b,a)\notin\Re_1.$$

ولكنها ليست متخالفة وذلك لأن $(1,1)\in\Re_1$.

وإذا كانت $\Re_2 = \Re_1 - \{(1,1)\}$ فإن العلاقة $\Re_2$ تكون علاقة عكسية التماثل ، وتكون $\Re_2$ أيضاً علاقة متخالفة (تحقق من ذلك؟).

خامساً: العلاقة الناقلة Transitive relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة ناقلة (أو علاقة متعـــدية) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \text{ and } (b,c)\in\Re \Rightarrow (a,c)\in\Re.$$

مثال(٦): إذا كانت $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ علاقات معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3\}$ حيث:

$\Re_1 = \{ (1,1), (2,2), (3,3)\}$,
$\Re_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1)\}$,
$\Re_3 = \{ (1,2), (1,3)\}$.

فإن العلاقة $\Re_1$ تكون علاقة ناقلة وذلك لأن $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re_1 \Rightarrow (a,c)\in\Re_1$

بينما العلاقة $\Re_2$ ليست علاقة ناقلة وذلك لأن $(3,1),(1,2)\in\Re_2$, $(3,2)\notin\Re_2$

والعلاقة $\Re_3$ تكون علاقة ناقلة وذلك لعدم وجود ما يمنع ذلك.

مثال(٧): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كمايلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow b = a^n \quad \forall a,b,n\in N.$$

فإن العلاقة $\Re$ تكون كما يلي:

$$\Re = \{ (1,1), (2,2), (2,4), (2,8), \dots \\ , (3,3), (3,9), (3,27), \dots\dots \\ , (4,4), (4,16), (4,64), \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}.$$

والعلاقة $\Re$ تكون علاقة ناقلة وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re, (b,c)\in\Re \Rightarrow b = a^n , c = b^m \quad ; n,m\in N.$$
$$\Rightarrow c = b^m = (a^n)^m = a^{nm} = a^r \ ; r = nm\in N$$
$$\Rightarrow (a,c)\in\Re$$

ومن الواضح أن العلاقة $\Re$ تكون عكسية التماثل، وليست متخالفة (تحقق من ذلك؟).

أمثلة عامة:

مثال(١): ادرس خصائص العلاقة $\Re$ المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a/b\in N \quad \forall a,b\in N.$$

الحل:

(١) العلاقة $\Re$ عاكسة وذلك لأن:

$$\forall\ a\in N,\ a/a = 1\in N \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

(٢) العلاقة $\Re$ ليست متماثلة وذلك لأن:

$$(6,2)\in\Re\ ;\ 6/2 = 3\in N\ ,\ (2,6)\notin\Re\ ;\ 2/6 = 1/3\notin N.$$

(٣) العلاقة $\Re$ ليست متخالفة وذلك لأن:

$$(1,1)\in\Re$$

(٤) العلاقة $\Re$ عكسية التماثل وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,\ a \neq b &\Rightarrow a/b\in N\ ;\ a/b \neq 1.\\ &\Rightarrow b/a\notin N\\ &\Rightarrow (b,a)\notin\Re.\end{aligned}$$

(٥) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,\ (b,c)\in\Re &\Rightarrow a/b\in N,\ b/c\in N\\ &\Rightarrow (a/b)(b/c)\in N\\ &\Rightarrow a/c\in N\\ &\Rightarrow (a,c)\in\Re.\end{aligned}$$

مثال(٢): إذا كانت $\Re$ هي العلاقة المعرفة على N كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a/b\in Q \quad \forall\ a,b\in N.$$

(حيث Q هي مجموعة الأعداد النسبية) فادرس خصائص هذه العلاقة؟.

الحل:

(١) العلاقة $\Re$ عاكسة وذلك لأن:

$$\forall\ a\in N\ ;\ a/a\in Q \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

(٢) العلاقة $\Re$ متماثلة وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow a/b\in Q \Rightarrow b/a\in Q \Rightarrow (b,a)\in\Re$$

(٣) العلاقة $\Re$ ليست متخالفة وذلك لأن $(1,1)\in\Re$

(٤) العلاقة $\Re$ ليست عكسية التماثل وذلك لأن:

$1,2\in N,\ 1\neq 2\ ,(1,2),(2,1)\in\Re.$

(٥) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a/b,b/c\in Q \Rightarrow (a/b)(\ b/c) = a/c\ \in Q \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

مثال(٣): ادرس العلاقة $\Re$ المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow (a\text{-}b)/3\in N \quad \forall a,b\in N.$

(من حيث كونها: عاكسة – متماثلة – ناقلة).

<u>الحل</u>:.

(١) العلاقة $\Re$ ليست عاكسة وذلك لأن:

$1\in N,\ (1,1)\notin\Re\ ;(1\text{-}1)/3 = 0/3 = 0\notin N.$

(٢) العلاقة $\Re$ ليست متماثلة وذلك لأن:

$(6,3)\in\Re\ ;(6\text{-}3)/3 = 1\in N\ ,\ (3,6)\notin\Re\ ;(3\text{-}6)/3 = \text{-}3/3 = \text{-}1\notin N.$

(٣) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,(b,c)\in\Re &\Rightarrow (a\text{-}b)/3\in N,\ (b\text{-}c)/3\in N.\\ &\Rightarrow (a\text{-}b)/3+(b\text{-}c)/3\in N.\\ &\Rightarrow (a\text{-}c)/3\in N.\\ &\Rightarrow (a,c)\in\Re.\end{aligned}$$

ملاحظة: يمكن إعادة صياغة العلاقة $\Re$ السابقة كما يلي:

$$\begin{aligned}(a,b)\in\Re &\Leftrightarrow a - b = 3n\ \ ; n\in N.\\ &\Leftrightarrow a = b + 3n\ \ ; n\in N.\end{aligned}$$

علاقة التكافؤ وفصول التكافؤ :

Equivalence Relation and Equivalence Classes:

تعريف(١): إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A ، وكانت $\Re$ عاكسة ومتماثلة وناقلة فإنها تُسمى **علاقة تكافؤ**.

وعلاقة التساوي على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N تُعتبر علاقة تكافؤ حيث:

(1) $\forall\ a\in N\ ;\ a = a \Rightarrow (a,a)\in\Re.$
(2) $\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow a = b \Rightarrow b = a \Rightarrow (b,a)\in\Re.$
(3) $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a = b,\ b = c \Rightarrow a = c \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عاكسة ومتماثلة وناقلة ، ومن ثم تكون علاقة تكافؤ.

وبالمثل علاقة التساوي على أي مجموعة من الأعداد تكون علاقة تكافؤ.

مثال(١): إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow (a-b)/n\in Z\ \ ;\ n\in N\ ,\ n\geq 2.$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ.

الحل:

(1) $\forall\ a\in Z\ ;(a-a)/n = 0\in Z \Rightarrow (a,a)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة عاكسة.

(2) $\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (a-b)/n\in Z \Rightarrow (b-a)/n\in Z \Rightarrow (b,a)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة متماثلة.

(3) $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow (a-b)/n\in Z,(b-c)/n\in Z.$
$\Rightarrow (a-b)/n+(b-c)/n\in Z.$
$\Rightarrow (a-c)/n\in Z.$
$\Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة ناقلة.

ومن ثم تكون العلاقة $\Re$ علاقة تكافؤ.

تُسمى هذه العلاقة علاقة التطابق بمقياس العدد الصحيح n ، وتُكتب $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$

تعريف(٢): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A . يُعرف **فصل التكافؤ** للعنصر $x\in A$ بأنه المجموعة:

$$[x] = \{y\in A :(x,y)\in\Re\}.$$

مثال(٢): أوجد فصول التكافؤ للعلاقة $\Re$ المعرفة على Z كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 5.$$

الحل: فصول التكافؤ لهذه العلاقة تكون هي:

$$[0] = \{\ldots,-10, -5, 0, 5,10, \ldots\}.$$
$$[1] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}.$$
$$[2] = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}.$$
$$[3] = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}.$$
$$[4] = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.$$

وبذلك يكون $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$.

أي أنه تُوجد خمسة فصول تكافؤ فقط لعلاقة التكافؤ $\Re$ وهي [4] ,[3] ,[2] ,[1] ,[0] ونلاحظ أن كل فصل تكافؤ يتكون من عناصر تتميز بخاصية مشتركة وهي أن باقي قسمة أي عدد منها على العدد الصحيح 5 له نفس الباقي الموجب، ونلاحظ أيضاً كل فصلين منها منفصلان (أي أن تقاطعهما هو المجموعة الخالية) واتحادهم جميعاً يُعطي المجموعة Z ومن ثم تكون مجموعة فصول التكافؤ هذه تجزيء للمجموعة Z .

مثال(٣): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow (a-b)/3\in Z \quad \forall a,b\in X.$$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ ، ثم تحقق من أن مجموعة فصول التكافؤ لهذه العلاقة تكون تجزيء للمجموعة X.

الحل: العلاقة $\Re$ تكون هي:

$$\Re = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(0,3),(3,0),(0,6),(6,0),$$
$$(1,4),(4,1),(1,7),(7,1),(3,6),(6,3),(4,7),(7,4),(2,5),(5,2)\}.$$

واضح أن $\Re$ علاقة تكافؤ حيث إنها علاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة (تحقق من ذلك؟).

وفصول التكافؤ تكون هي:

$[0] = \{0, 3, 6\} = [3] = [6].$
$[1] = \{1, 4, 7\} = [4] = [7].$
$[2] = \{2, 5\} = [5].$

أي أنه يوجد ثلاثة فصول تكافؤ فقط هي $\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5\}$.

ومجموعة فصول التكافؤ $\{\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5\}\}$ تكون تجزيء للمجموعة X حيث إنها متباعدة ثنائياً واتحادها جميعا يساوي المجموعة X .

نظرية(١): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن:

$$b\in[a] \Leftrightarrow a\in[b] \quad \forall a,b\in A.$$

البرهان:

$$\begin{aligned} b\in[a] &\Leftrightarrow b\in\{y\in A :(a,y)\in\Re\} \\ &\Leftrightarrow (a,b)\in\Re \Leftrightarrow (b,a)\in\Re \Leftrightarrow a\in\{y\in A :(b,y)\in\Re\} \Leftrightarrow a\in[b]. \end{aligned}$$

نظرية(٢): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن $a\in[a]\ \forall a\in A$.

البرهان: حيث إن $\Re$ علاقة تكافؤ فهي عاكسة ومن ثم يكون:

$$\forall a\in A \Rightarrow (a,a)\in\Re \Leftrightarrow a\in[a].$$

نظرية(٣): إذا كان فصلي التكافؤ $[a],[b]$ متقاطعين فإن $[a] = [b]$.

البرهان:

$$\begin{aligned} \text{let } c\in[a]\cap[b] &\Leftrightarrow c\in[a],\ c\in[b]. \\ &\Leftrightarrow (a,c)\in\Re,\ (b,c)\in\Re. \\ &\Leftrightarrow (a,c)\in\Re,\ (c,b)\in\Re. \\ &\Leftrightarrow (a,b)\in\Re. \\ \text{let } d\in[a] &\Leftrightarrow (a,d)\in\Re,\ (a,b)\in\Re. \\ &\Leftrightarrow (b,a)\in\Re,\ (a,d)\in\Re \\ &\Leftrightarrow (b,d)\in\Re \\ &\Leftrightarrow d\in[b]. \\ &\therefore [a] = [b]. \end{aligned}$$

وبذلك فإن أي فصلين تكافؤ إما متساويين أو غير متقاطعين.

ولذلك إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإنه يمكن كتابة A على صـــورة اتحاد مجموعة غير متقاطعة من فصول التكافؤ للعلاقة $\Re$ أي أن:

$$A = \bigcup_{a\in A}[a].$$

ولذلك يُقال أن فصول التكافؤ تجزىء المجموعة إلى أجزاء غير متقاطعة.

علاقة الترتيب الجزئي Partial Ordering:

تعريف(١): إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على المجموعة A بحيث يكون:

١ – $\Re$ عاكسة.

٢ – $\Re$ عكسية التماثل.

٣ – $\Re$ ناقلة.

فإن $\Re$ تُسمى **علاقة ترتيب جزئي**. يُرمز أحياناً لعلاقة الترتيب الجزئي بالرمز " $\leq$ " .

مثال(١): إذا كانت $\Re$ هي العلاقة $\leq$ (أقل من أو تساوي) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة N . فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الحل: يمكن التعبير عن العلاقة $\Re$ كما يلي: $(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a\leq b \quad \forall a,b\in N$

$(1)\ \forall\ a\in N\ ;\ a\leq a \ \Rightarrow (a,a)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عاكسة.

$(2)\ \forall\ (a,b)\in\Re,\ a\neq b \Rightarrow a<b \Rightarrow\ b>a \ \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عكسية التماثل.

$(3)\ \forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a\leq b,\ b\leq c \Rightarrow a\leq c \ \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ ناقلة.

وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب جزئي على N .

مثال(٢): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة P(A) للمجموعة المنتهية A كمايلي:

$(X,Y)\in\Re \Leftrightarrow X\subseteq Y \quad \forall\ X,Y\in P(A).$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الحل:

(1) $\forall\ X\in P(A)\ ;\ X\subseteq X \Rightarrow (X,X)\in\Re.$

وإذاً R علاقة عاكسة.

(2) $\forall\ (X,Y)\in\Re,\ X\neq Y \Rightarrow X\subset Y \Rightarrow Y\not\subset X \Rightarrow (Y,X)\notin\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة عكسية التماثل.

(3) $\forall\ (X,Y)\in\Re,\ (Y,Z)\in\Re \Rightarrow X\subseteq Y,\ Y\subseteq Z \Rightarrow X\subseteq Z \Rightarrow (X,Z)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة ناقلة. وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب جزئي .

تعريف(٢): **علاقة الترتيب الفعلي (أو الترتيب الدقيق)** Strict Order Relation :

إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على المجموعة A بحيث يكون:

١ – $\Re$ عكسية التماثل.

٢ – $\Re$ ناقلة.

فإن $\Re$ تُسمى **علاقة ترتيب فعلي**. يُرمز أحياناً لعلاقة الترتيب الفعلي بالرمز " > " .

مثال: إذا كانت $\Re$ هي العلاقة > (أقل من) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة N فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب فعلي.

الحل: يمكن التعبير عن العلاقة $\Re$ كما يلي: $(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a<b\ \forall a,b\in N$

(1) $\forall\ (a,b)\in\Re,\ a\neq b \Rightarrow a<b \Rightarrow b>a \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عكسية التماثل.

(2) $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a<b,\ b<c \Rightarrow a<c \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ ناقلة. وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب فعلي على N .

تعريف(٣): لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة $\Re$ ، ونفرض أن $B\subset A$.

إذا وُجد عنصر $l\in A$ بحيث يكون $l\,\Re\, b$ لجميع العناصر $b\in B$.

فإن l يُسمى **حداً سفلياً** lower bound للمجموعة B ، وإذا وُجد عنصر $u\in A$ بحيث يكون $b\,\Re\, u$ لجميع عناصر $b\in B$. فإن u يُسمى **حداً علوياً** upper bound للمجموعة B. لاحظ أن إننا لم نشترط أن l أو u تنتمي إلى B ولكنها بالطبع عناصر من A.

تعريف(٤): إذا كانت $\Re$ علاقة ترتيب جزئي معرفة على المجموعة A وكانت B مجموعة جزئية من A وكان العنصر l^* يحقق أنه حداً سفلياً للمجموعة B ويحقق الشرط لأي حد سفلي آخر l للمجموعة B أن $l\Re l^*$ فإن l^* يُسمى **أكبر حد سفلي** ويُرمز له بالرمز $l^*=\inf B$ ، وإذا كان العنصر u^* يحقق أنه حداً علوياً للمجموعة B ويحقق الشرط لأي حد علوي آخر u للمجموعة B أن $u^*\Re u$ فإن u^* يُسمى **أصغر حد علوي** ، ويُرمز له بالرمز $u^* = \sup B$.

تعريف(٥): إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A وكانت $B \subset A$ وكان l^* هو أكبر حد سفلي لهذه المجموعة بحيث $l^* \in B$ فإن l^* يُسمى **الحد الأدنى** للمجموعة B ، ويُرمز له بالرمز $l^* = \min B$.

وإذا كان u^* هو أصغر حد علوي لهذه المجموعة بحيث $u^* \in B$. فإن u^* يُسمى **الحد الأعظم** ، ويرمز له بالرمز $u^* = \max B$.

ملاحظة: إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A وكانت $B \subset A$ ، وكانت المجموعة B مجموعة محدودة فإن $\sup B = \max B$, $\inf B = \min B$.

تعريف(٦): إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة L وكانت M مجموعة جزئية من L تحتوي على الأقل على عنصرين. فإن المجموعة L تُسمى **شبكة** Lattice إذا كان للمجموعة الجزئية M أكبر حد سفلي ، وأصغر حد علوي (أي يوجد $\inf M , \sup M$) ، فإذا كانت $M=\{a,b\}$ فإن:

$$\inf M = a\wedge b \ , \ \sup M = a\vee b \ .$$

وتُسمى $\wedge$ عملية التقاطع أو التلاقي (meet)،وتُسمى $\vee$ عملية الإتحاد أو الوصل(join)

تعريف(٧): يُقال عن الشبكة L أنها **شبكة مكتملة** (Complete Lattice) إذا كان لكل مجموعة جزئية منها أصغر حد علوي.

تعريف(٨): يُقال عن الشبكة L أنها **شبكة توزيعية** (Distributive Lattice) إذا كان لكل $a,b,c \in L$ يتحقق: $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$, $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

أمثلة: مجموعة الأعداد الصحيحة تمثل شـــبكة ليست مكتملة (حيث أنها مرتبة جزئياً بالنسبة للعلاقة " $\leq$" ولا يوجد لكل مجموعة جزئية منها أصغر حد علوي).

أما مجموعة القوى $P(X)$ للمجموعة الإختيارية X تمثل شبكة مكتملة وشبكة توزيعية (حيث أنها مرتبة جزئياً بالنســـبة للعلاقة " $\subseteq$" ، وأي مجموعة جزئية منها يكون لها أصغر حد علوي ، وعمليتي الإتحاد والتقاطع يتوزعان على بعضهما البعض).

ولمفهوم الشبكات تطبيقات هامة كما في مجال الهواتف،والحاسبات،والأقمار الصناعية.

تماريـــــن

١- إذا كان a عمره ٧٠ سنة، وله ابن c عمره ٤٠ سنة ، وابنه d عمرها ٣٦ سنة لها ابن e عمره ١٠ سنوات ، وكان b عمره ٦٥ سنة وهو أخ لـــ a .

عبر عن العلاقات الآتية كثنائيات مرتبة:

(أ) العلاقة $\Re_1$ علاقة " أكبر من".

(ب) العلاقة $\Re_2$ علاقة " أخوة ".

(ج) العلاقة $\Re_3$ علاقة " أبوة وبنوة ".

(د) العلاقة $\Re_4$ علاقة " جد وحفيد ".

٢- أسرة مكونة من ثلاثة أخوة b_1, b_2, b_3 ، وأختين s_1, s_2 .

عبر عن العلاقـــات الآتية كثنائيات مرتبة:

(أ) العلاقة $\Re_1$ علاقة " أخت لـــ ".

(ب) العلاقة $\Re_2$ علاقة " أخ لـــ ".

٣- اختبر أي من العلاقات الآتية تكون (عاكسة – متماثلة – عكسية التماثل- ناقلة – علاقة تكافؤ – علاقة ترتيب جزئي):

(أ) علاقة "يوازي" على مجموعة الخطوط المستقيمة في المستوى.

(ب) علاقة "يتعامد مع" على مجموعة الخطوط المستقيمة في المستوى.

(ج) علاقة "أكبر من أو يساوي" على مجموعة الأعداد الطبيعية.

(د) علاقة "أب لـــ" على مجموعة أعضاء أسرة ما.

(هـــ) علاقة "أخ لـــ" على مجموعة أعضاء أسرة ما.

٤- لتكن العلاقات $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4$ معرفة على المجموعة $A=\{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$\Re_1=\{ (1, 3), (2, 4), (1, 1), (4, 3), (4, 4), (3, 1) \}$,
$\Re_2=\{ (2, 4), (1, 1), (3, 1), (4, 3) \}$,
$\Re_3=\{ (2, 3), (1, 2), (3, 4), (4, 1) \}$,
$\Re_4=\{ (1, 4), (2, 2), (3, 2) \}$

فاوجد العلاقات المحصلة $\Re_3 o \Re_4$, $\Re_4 o \Re_3$, $\Re_3 o \Re_2$, $\Re_2 o \Re_1$.

٥- عبر عن العلاقات الآتية كثنائيات مرتبة من $N\times N$ حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، ثم ادرس خصائص كلا منها:

(i) $\Re=\{ (x,y) : x<y \}$.
(ii) $\Re=\{ (x,y) : x\neq y \}$.
(iii) $\Re=\{ (x,y) : x\neq y, y=2 \}$.
(iv) $\Re=\{ (x,y) : x+2y=12 \}$.

٦- بفرض أن $X=\{1,2,3\}$ ، والعلاقة $\Re$ معرفة على $P(X)$ كما يلي:

$$A\Re B \Leftrightarrow \#(A) = \#(B) \quad \forall\ A,B\in P(X)$$

حيث $\#(A)$ يرمز لعدد عناصر A . فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ.

ثم حدد فصول التكافؤ بالنسبة لهذه العلاقة.

٧- بفرض C هي مجموعة الأعداد المركبة ، والتي الجزء الحقيقي لكل منها لا يساوي الصفر. تحقق من أن العلاقة $\Re$ المعرفة على المجموعة C كما يلي:

$$(a+ib)\Re(c+id) \Leftrightarrow ac>0$$

تكون علاقة تكافؤ.

٨- إذا كانت $\Re$ هي العلاقة المعرفة على المجموعة N كما يلي:

$$(x,y)\in\Re \Leftrightarrow y/x\in N.$$

فتحقق من أن العلاقة $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الباب الثالث

الرواسم Mappings (Functions)

تعريف: إذا كانت A,B مجموعتين فإن العلاقة f من المجموعة A إلى المجموعة B تُسمى راسم أو رابط أو تطبيق من A إلي B إذا كان:

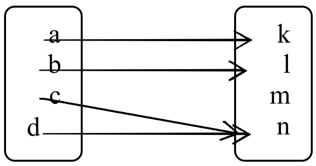
$\forall\, a\in A \;\; \exists|\;\; b\in B \;;\; afb.$

أي أن لكل عنصر من عناصر المجموعة A يوجد عنصر وحيد من عناصر المجموعة B يرتبط معه بالعلاقة f ويُكتب $f : A \to B$ ويكون $f(a) = b$ حيث $a\in A$, $b\in B$.

وعلى ذلك يمكن القول بأن الراسم من مجموعة إلى أخرى هو علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

مثال(١): في الشكل التوضيحي التالي العلاقة f من المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$ إلى المجموعة $B = \{k, l, m, n\}$ تمثل راسم حيث:

$$f = \{(a,k),(b,l),(c,n),(d,n)\}$$



واضح أن كل عنصر من عناصر المجموعة A يرتبط بعنصر وحيد من عناصر المجموعة B.

مثال(٢): إذا كانت f علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R كما يلي:

$f : R \to R$, $f(x) = x^2 \;\; \forall\, x\in R.$

فإن f تُعتبر راسم من R إلى R حيث لكل $x\in R$ يوجد x^2 وحيدة تنتمي إلى R.

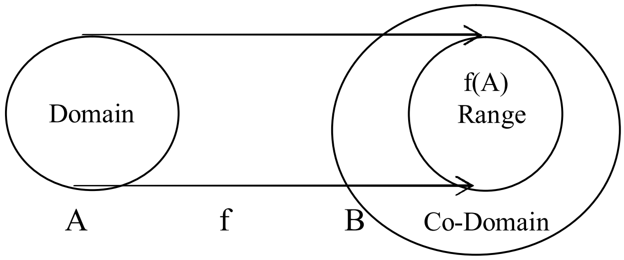
مثال(٣): إذا كانت X مجموعة منتهية ، وكانت P(X) مجموعة كل المجموعات الجزئية من X ، وكانت f علاقة معرفة كما يلي:

$f : P(X) \to Z^+$, $f(S) = |\, S \,| \;\; \forall\, S\in P(X).$

حيث | S | هو عدد عناصر المجموعة S وحيث Z^+ هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. فإن العلاقة f تُعتبر راسم من P(X) إلى Z^+ حيث إن كل عنصر (مجموعة) من عناصر P(X) يوجد بداخله عدد وحيد من العناصر وهو | S | ينتمي إلى Z^+ .

نطاق ومدى الراسم:

إذا كان f راسم من A إلى B وكان $b = f(a)$ فإن b تُسمى صورة a بالراسم f (Image of a by f)، وتُسمى المجموعة A بنطاق الراسم أو مجال الراسم Domain ويُسمى B بالنطاق المصاحب أو المجال المقابل Co-domain وتُسمى المجموعة التي تمثل صورة المجال بمدى الراسم (Range of f) .



ملاحظة: مدى الراسم يكون مجموعة جزئية من المجال المقابل.

مثال: أوجد المجال والمجال المقابل والمدى للراسم $f : R \to R$ حيث $f(x) = x^2$.

الحل: المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية R ، والمدى f(R) هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة R^* .

- **تساوى راسمين:**

إذا كان $f : A \to B$, $g : X \to Y$ راسمين فإن الراسمين f, g يكونا متساويين ويُكتب $f = g$ إذا وإذا فقط كان لهما نفس المعالم (المجال والمجال المقابل والمدي).
أي يكون:

$$A = X,\ B = Y\ ,\ f(a) = g(a)\ \ \forall\ a \in A.$$

- **أنواع الرواسم Types of Mappings** :

(١) الراسم الأحادي (One to One or Injective) :

يُقال للراسم $f : A \to B$ أنه راسم أحادي أو متباين من A إلى B إذا كانت العناصر المختلفة من مجموعة المجال لها صور مختلفة في مجموعة المجال المقابل أي أن:

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \ \ \forall\ a,b \in A.$

بمعنى أن (إذا تساوت الصور تساوت الأصول):.

If $a \neq b$ in $A \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ in B.

(٢) الراسم الفوقي (Onto or Surjective) :

يُقال أن f راسم فوقي أو غامر أو شامل من A إلى B إذا كان مدى الراسم f يساوي المجال المقابل B. أي أن كل عنصر من عناصر B يكون له أصل في A.

أي أن:

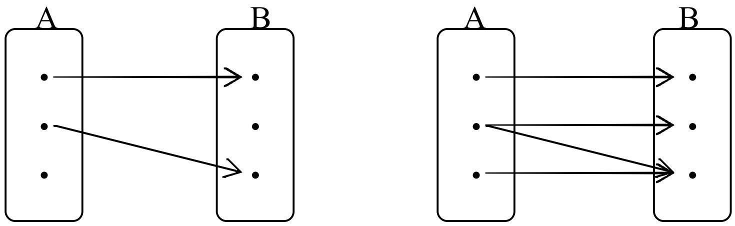
$\forall\ b \in B \ \ \exists\ a \in A\ ;\ f(a) = b.$

(٣) الراسم أحادي التناظر (Bijective or One to One Correspondence) :

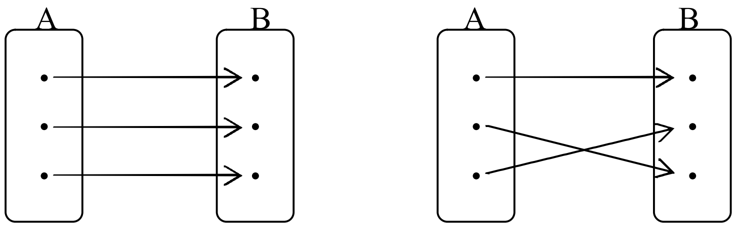
يُقال للراسم $f : A \to B$ أنه أحادي التناظر أو تناظر أحادي أو تقابل من A إلى B إذا كان f راسم أحادي وفوقي في نفس الوقت. أي يكون لكل عنصر في A صورة وحيدة في B ، ولكل عنصر في B أصل وحيد في A.

- **أمثلة توضيحية (انظر المخططات السهمية الآتية):**

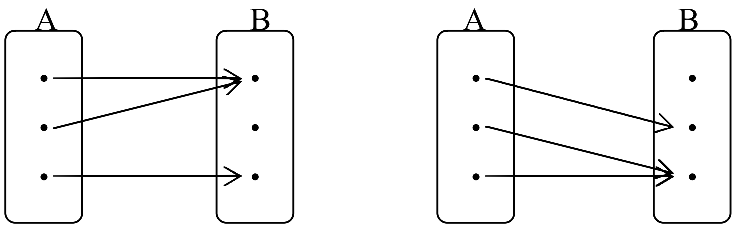
(١) علاقات وليست رواسم:



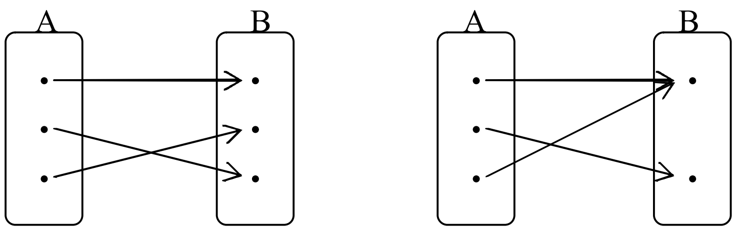
(٢) رواسم أحادية:



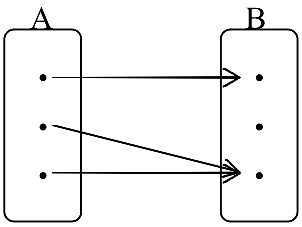
(٣) رواسم ليست أحادية:

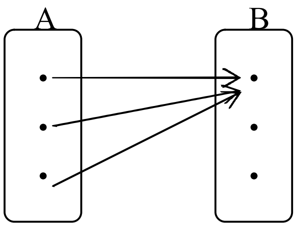


(٤) رواسم فوقية:

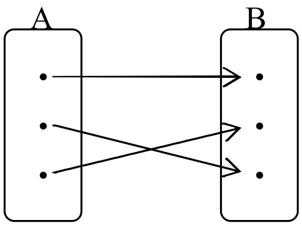


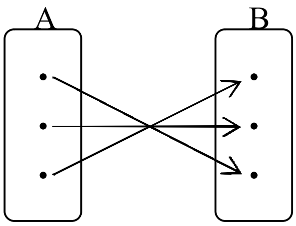
(٥) رواسم ليست فوقية:



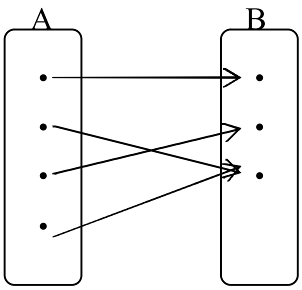


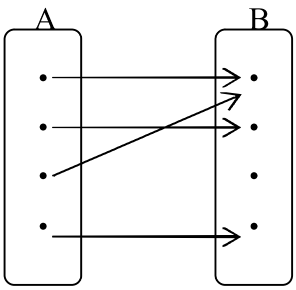
(٦) رواسم أحادية التناظر:





(٧) رواسم ليست أحادية التناظر:





- **أمثلة تحليلية:**

مثال(١): إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة فحدد نوع الراسم $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = 2x+1$ لكل $x \in Z$.

الحل:

(1) let $x_1, x_2 \in Z$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1+1 = 2x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

وإذاً f راسم أحادي.

(2) let $y \in Z$, $y=f(x) \Rightarrow y = 2x+1 \Rightarrow x = (y-1)/2 \notin Z$.

وإذاً f راسم ليس فوقي.

مثال(٢): إذا كانت R هي مجموعة الأعداد الحقيقية فحدد نوع الراسم $f : R \to R$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} & if \ \ x \neq 0, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \qquad \forall\ x \in R.$$

الحل:

(1) $-1, 1 \in R$, $f(-1) = f(1) = 0$.

وإذاً ليس لكل عنصرين مختلفين في المجال صورتين مختلفتين في المجال المقابل ، ومن ثم فإن f راسم ليس أحادي.

(2) let $y \in R$, $y = f(x)$

فإذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$ حيث $f(0) = 0$ ، وإذا كان $y \neq 0$ فنبحث عن x حيث

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{x} \Rightarrow x^2 - yx - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2+4}\right) \in R.$$

وبذلك كل عنصر غير صفري في المجال المقابل R يكون له أصل في المجال R .

وعلى ذلك فإن الراسم f فوقي.

مثال(٣): حدد نوع الراسم $\forall x \in R$ $f : R \to R^+ , f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

حيث R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

<u>الحل:</u>

(1) let $x_1, x_2 \in R$, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} = x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}$$
$$\Rightarrow (x_1 - x_2) = \sqrt{x_2^2 + 1} - \sqrt{x_1^2 + 1} .$$
$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 - 2\sqrt{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} .$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = 1 + x_1x_2.$$
$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2x_2^2 = 1 + x_1^2x_2^2 + 2 x_1x_2.$$
$$\Rightarrow x_1^2 - 2 x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$
$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0.$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

أي أنه إذا كانت الصور $f(x_1)$, $f(x_2)$ متساوية فإن الأصول x_1, x_2 تكون متساوية وعلى ذلك فإن f راسم أحادي.

(2) let $y \in R^+ , y = f(x) = x + \sqrt{(x^2 + 1)}$

$$\Rightarrow (y - x) = \sqrt{(x^2 + 1)} \Rightarrow y^2 - 2yx + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \in R .$$

أي أن لكل عنصر y في المجال المقابل R^+ يوجد أصل x في المجال R

وإذاً f راسم فوقي.

من (2),(1) يكون f راسم أحادي التناظر.

مثال(٤): إذا كانت Z^* هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة ، وكانت N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فحدد نوع الراسم $f : N \to Z^*$ حيث:

$f(x) = 2x \quad \forall x \in N.$

<u>الحل:</u>

(1) let $x_1, x_2 \in N$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$

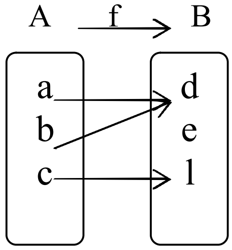
وإذاً f راسم أحادي.

(2) let $y \in Z^*$, $y = f(x) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = (y/2) \in N.$

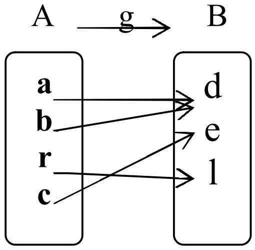
وإذاً f راسم فوقي. ومن (2),(1) يكون f راسم أحادي التناظر.

- **معكوس الراسم Inverse of the Mapping :**

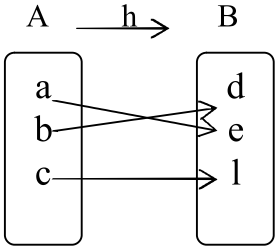
إذا كان الراسم f معرف من المجموعة A إلى المجموعة B. وكما نعلم أن كل راسم علاقة ، أي أنه يمكن إيجاد العلاقة العكسية للراسم من B إلى A والسؤال الآن هو هل هذه العلاقة تكون راسم ؟ وللإجابة على هذا السؤال نستعرض الأمثلة الآتية:



شكل (أ)



شكل (ب)



شكل (ج)

في شكل (أ) نجد أن f راسم من A إلى B وأن f^{-1} علاقة وليست راسم من B إلى A لأن العنصر d مرتبط بعنصرين هما a,b ، وأيضاً لأن العنصر e ليس له صور بالعلاقة العكسية f^{-1} ، ونلاحظ أن f راسم ليس فوقي لأن e ليس لها أصل في A بالراسم f ، وأن f راسم ليس أحادي لأن d لها أصلان في A. ولكي يكون f^{-1} راسم كان يجب أن يكون لكل عنصر في B صورة وحيدة في A بالراسم f^{-1} .

أي أن كل عناصر B تكون صور وحيدة لعناصر A بالراسم f.

ويمكن صياغة ذلك في الشرطين الآتيين:

(١) كل عناصر B يجب أن تكون صور لعناصر A بالراسم f.

(٢) كل هذه الصور تكون وحيدة.

ونجد أن الشرط (١) يعني أن الراسم f يجب أن يكون فوقي ، والشرط (٢) يعني أن الراسم f يجب أن يكون أحادي.

وبهذا نستنتج أنه لكي تكون العلاقة العكسية للراسم f أيضاً راسم يجب أن يكون الراسم f أحادي التناظر.

وفي الشكل (ب) الراسم g راسم فوقي ولكنه ليس أحادي لأن كل عناصر B لها صور في A ولكن العنصر d مرتبط بعنصرين في A.

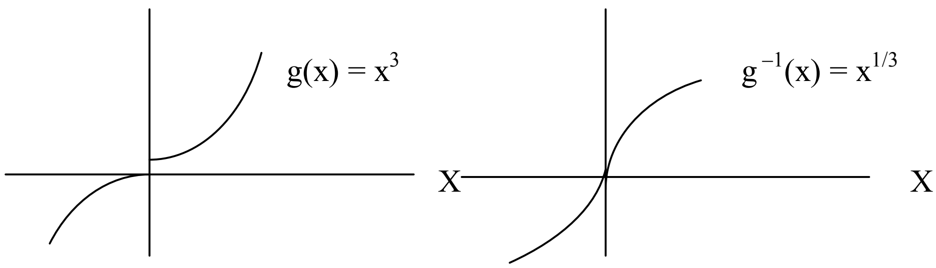
وبهذا نجد أن العلاقة العكسية g^{-1} ليست راسم لأن العنصر d ليس مرتبط بعنصر وحيد في A بالعلاقة العكسية g^{-1}.

وفي الشكل (ج) الراسم h راسم أحادي وفوقي. وبهذا نجد أن العلاقة العكسية h^{-1} تُعتبر راسم لأن كل عنصر في B مرتبط بعنصر واحد فقط في A بالعلاقة العكسية h^{-1}

ملاحظة: إذا كان الراسم f أحادي التناظر فإن الراسم العكسي f^{-1} (إن وُجد) يكون أيضاً أحادى التناظر.

- **أمثلة توضيحية**:

١ – الراسم $g : R \rightarrow R$ حيث $g(x) = x^3$ راسم أحادي التناظر. ومن ثم يكون الراسم العكسي g^{-1} معرف كما يلي: $g^{-1} : R \rightarrow R \; ; \; g^{-1}(x) = x^{1/3} \quad \forall\, x \in R$

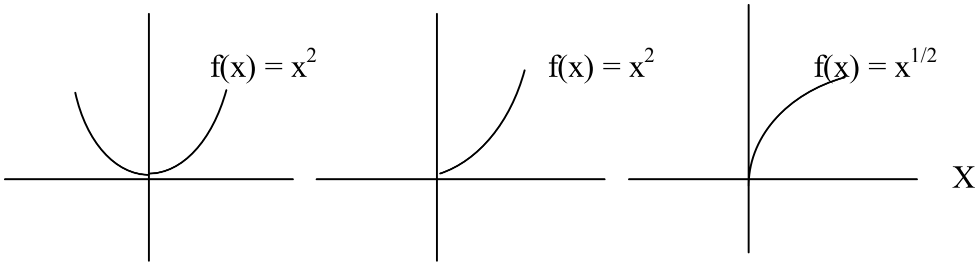


٢ – الراسم $f : R \rightarrow R$ حيث $f(x) = x^2$ ليس أحادي . ومن ثم يكون الراسم العكسي f^1 غير معرف ، ولكن إذا تم تصغير R لتُصبح R^+ فإن:

$f : R^+ \rightarrow R^+ \; ; \; f(x) = x^2.$

وبذلك يُصبح الراسم f أحادي التناظر . وفي هذه الحالة يكون f^{-1} معرف كما يلي:

$f^{-1} : R^+ \rightarrow R^+ ; \; f^{-1}(x) = x^{1/2} \quad \forall\, x \in R^+.$



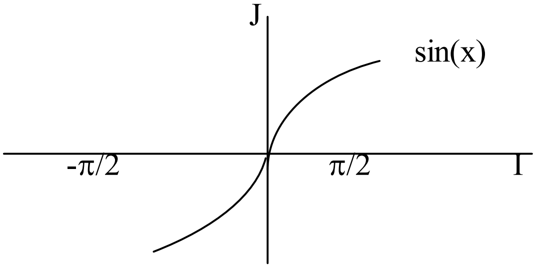
٣- نفرض المجموعتين:

$$I=\left\{x\in R:\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\},\quad J=\{x\in R: -1\le x\le 1\}.$$

والراسم $Sin: I\to J$ المعرف كما يلي:

$\sin x = y\ ,\ \forall\ x\in I\ ,\ y\in J.$

هذا الراسم يكون أحادي التناظر. والراسم العكسي $\sin^{-1}: J\to I$ يكون معرف.



ومن الرسم نلاحظ أن كل نقطة في J يقابلها نقطة وحيدة في I بالراسم العكسي $\sin^{-1}$

٤- نفرض المجموعتين:

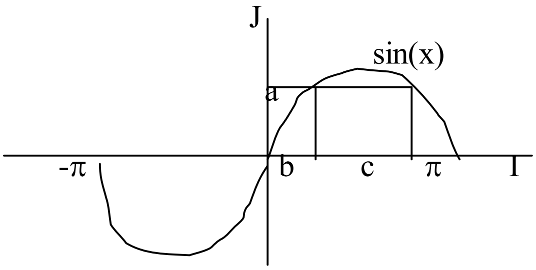
$I=\{x: x\in R\ ,\ -\pi\le x\le\pi\},\ J=\{y: y\in R\ ,\ -1\le y\le 1\}.$

والراسم $\sin: I\to J$ المعرف كما يلي:

$\sin x = y\ \ \forall\ x\in I\ ,\ y\in J.$

هذا الراسم sin ليس أحادي لأن العدد $a\in J$ له أصلان في I هما $b,c\in I$ حيث إن $\sin b = a\ ,\ \sin c = a$ وهذا الراسم sin أيضاً راسم فوقي لأن كل النقط في J لها أصل في I وبذلك فإن الراسم العكسي $\sin^{-1}$ غير معرف لأن sin لا يكون أحادي التناظر على هذه الفترات.

ولذلك حتى نتعامل مع العلاقة $y=\sin^{-1}x$ يجب أن نحدد المجال والمجال المقابل لهذه العلاقة بالفترات: $-1\le x\le 1$ ، $\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.



- **تحصيل الرواسم Composition of Mappings :**

إذا كان الرواسم f , g معرفة كما يلي:

$$f : A \to B \ , \ g : D \to C.$$

وكانت $f(A) \subset D$. فإنه يمكن تحصيل (تركيب) الراسم g مع الراسم f لينتج الراسم المحصلة (المركبة) $g_\circ f : A \to C$ حيث يكون:

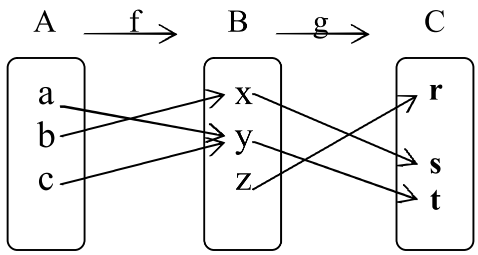
$$(g_\circ f)(a) = g(f(a)) \ \forall \ a \in A.$$

وفي حالة $B = D$ فإن الشرط $f(A) \subset D$ يتحقق دائماً ، وبذلك فإنه لأي ثلاث مجموعات A, B, C ولأي راسمين:

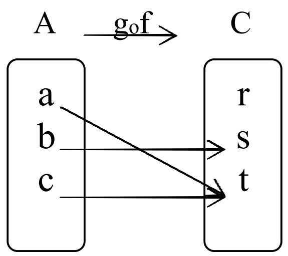
$$f : A \to B \ , \quad g : B \to C,$$

يمكن دائماً تعريف الراسم $g_\circ f$ ونلاحظ أيضاً أن الراسم $f_\circ g$ لا يكون معرفاً إلا إذا كان $g(B) \subset A$ ، وعندئذ فليس من الضروري أن يكون $f_\circ g = g_\circ f$.

مثال توضيحي: إذا كانت $f : A \to B \ , \ g : B \to C$ راسمين مُعرفين كما بالشكل:



فإن الراسم المحصلة $g_\circ f : A \to C$ يُعرف بالشكل التالي:



- **أمثلة تحليلية:**

مثال(١): إذا كان $f, g : R \to R$ راسمين حيث:

$g(x) = x^2,\ f(x) = 1- x.\ \forall\ x\in R.$

فإن:

$(f_\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 - x^2.$
$(g_\circ f)(x) = g(f(x) = g(1 - x) = (1 - x)^2.$
$(f_\circ f)(x) = f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x.$

مثال(٢): إذا كان $f, g : R \to R$ راسمين حيث:

$g(x) = 2x-3,\ f(x) = x^2+3x+1.\ \forall\ x\in R.$

فأوجد: (1) $(f_\circ g)(x)$. (2) $(g_\circ f)(x)$. (3) $(g_\circ g)(x)$. (4) $(f_\circ f)(x)$

الحل:

(1) $(f_\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2+3(2x-3)+1 = 4x^2-6x+1.$
(2) $(g_\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+3x+1) = 2(x^2+3x+1)-3 = 2x^2+6x-1.$
(3) $(g_\circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x-3) = 2(2x-3)-3 = 4x-9.$
(4) $(f_\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+3x+1) = (x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1$
$= x^4+6x^3+14x^2+15x+5.$

نظرية(١): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ راسمين فوقيين فإن المحصلة $g_\circ f : A \to C$ تكون راسماً فوقياً أيضاً.

البرهان: حيث إن كل من الراسمين f,g فوقي فمن تعريف الراسم الفوقي يكون:

$f(A) = B,\ g(B) = C$
$\therefore (g_\circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C.$

أي أن صورة المجال A تكون هي المجال المقابل C للراسم $g_\circ f$ وإذاً الراسم $g_\circ f$ يكون فوقي.

نظرية(٢): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ راسمين أحاديين فإن المحصلة $g_\circ f : A \to C$ تكون راسماً أحادياً أيضاً.

البرهان: حيث إن كلاً من الراسمين أحادي فمن تعريف الراسم الأحادي يكون:

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\ \forall a,b\in A\ ,\quad g(c) = g(d) \Rightarrow c = d\ \forall c,d\in B.$
$\therefore (g_\circ f)(a_1) = (g_\circ f)(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$
$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2\ \forall a_1,a_2\in A.$

وإذاً $(g_\circ f)$ راسم أحادي.

نظرية(٣): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ راسمين أحاديين التناظر فإن المحصلة $g_o f$ تكون راسماً أحادي التناظر أيضاً.

نتيجة: إذا كانت $f : A \to B\ ,\ g : B \to C\ ,\ h : C \to D$ ثلاث رواسم.

فأثبت أن $h_o(g_o f) = (h_o g)_o f$ (خاصية الدمج) .

البرهان: واضح أن:

$$(h_o g)_o f : A \to D\ ,\quad h_o(g_o f) : A \to D.$$

ومن تعريف تساوي راسمين يتبقى لإثبات التساوى أن نثبت أن:

$$(h_o(g_o f))(a) = ((h_o g)_o f)(a).\quad \forall\ a \in A.$$

$$\therefore (h_o(g_o f))(a) = h((g_o f)(a)) = h(g(f(a))) = (h_o g)(f(a)) = ((h_o g)_o f)(a).$$

تعريف: راسم الوحدة للمجموعة A (Identity map of A) يُعرف كما يلي:

$$i_A : A \to A\ \ ;\ i_A(a) = a.\quad \forall\ a \in A$$

ومن السهل إثبات أنه لأي راسم $f : A \to B$ يكون:

$$i_B{}_o f = f\ ,\ f_o i_A = f.$$

تعريف: يُقال أن الراسم $f : A \to B$ قابل للانعكاس Invertiable إذا وُجد راسم $g : B \to A$ بحيث يكون:

$$g_o f = i_A\ ,\quad f_o g = i_B\ .$$

وفي هذه الحالة يُسمى الراسم g الراسم العكسي للراسم f ويُكتب $g = f^{-1}$.

مثال: الراسم $f : N \to Z^*\ ,\ f(n) = n-1\ \ \forall\ n \in N$ (N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، والمجموعة Z^* هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة) يكون قابل للانعكاس لأنه يمكن إيجاد راسم $g : Z^* \to N\ ,\ g(n) = n+1\ \ \forall\ n \in Z^*$ ويتحقق:

$$(g_o f)(n) = g(f(n)) = g(n-1) = (n-1)+1 = n.\quad \forall\ n \in N \qquad \therefore g_o f = i_N\ .$$
$$(f_o g)(m) = f(g(m)) = f(m+1) = m+1-1 = m\ .\quad \forall\ m \in Z^*\ \ \therefore f_o g = i_{Z^*}\ .$$

تمهيدية: الراسم إن وُجد له معكوس فإن هذا المعكوس يكون وحيد.

البرهان: نفرض أن $f : A \to B$ راسم له معكوسان هما $g_1, g_2 : B \to A$.

فمن تعريف المعكوس للراسم يكون:

$$g_1{}_o f = i_A\ ,\ f_o g_2 = i_B\ .$$
$$\therefore\ g_1 = g_1{}_o i_B = g_1{}_o(f_o g_2) = (g_1{}_o f)_o g_2 = i_A{}_o g_2 = g_2\ .$$

أي أن المعكوس وحيد .

نظرية(٤): الراسم $f : A \rightarrow B$ يكون قابل للانعكاس إذا وإذا فقط كان راسم أحادي التناظر (أي أحادي وفوقي).

البرهان:

أولاً: نفرض أن الراسم قابل للانعكاس وسنثبت أنه أحادي التناظر:

$$\begin{aligned}(1)\ \text{let } x_1,x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \\ &\Rightarrow i_A(x_1) = i_A(x_2). \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 .\end{aligned}$$

وإذاً f راسم أحادي.

$$(2)\ \text{let } y \in B,\ y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y).$$

أي أن لكل عنصر $y \in B$ يوجد (أصل) $x \in A$ بحيث $f(x) = y$.

وإذاً f راسم فوقي.

ثانياً: نفرض أن f راسم أحادي التناظر وسنثبت أنه قابل للانعكاس:

حيث إن f أحادي التناظر فيكون:

$$\forall\ a \in A\ \exists|\ b \in B\ ;\ f(a) = b,$$
$$\forall\ b \in B\ \exists|\ a \in A\ ;\ g(b) = a.$$

وبالتالي يكون الراسم $g : B \rightarrow A$ مُعرف حيث $g(b) = a$ ويكون:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a\ .\ \therefore\ g \circ f = i_A\ ,$$
$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b\ .\ \therefore\ f \circ g = i_B\ .$$

وإذاً f قابل للانعكاس.

نظرية(٥): إذا كانت $f : A \rightarrow B\ ,\ g : B \rightarrow C$ رواسم قابلة للانعكاس فإن الراسم المحصلة $(g \circ f)$ يكون قابل للانعكاس أيضاً ويكون $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

البرهان:

نفرض أن $h = g \circ f,\ k = f^{-1} \circ g^{-1}$ فإذا أثبتنا أن $h \circ k = i_C\ ,\ k \circ h = i_A$ يكون الراسم k معكوس للراسم h :

$$\therefore\ h \circ k = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g) = g \circ (i_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = i_C\ ,$$
$$k \circ h = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (i_B \circ f) = f^{-1} \circ f = i_A\ .$$
$$\therefore\ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

تمارين

١- لتكن العلاقات $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4$ معرفة على المجموعة $A=\{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$\Re_1=\{ (1, 3), (2, 4), (1, 1), (4, 3), (4, 4), (3, 1) \}$,
$\Re_2=\{ (2, 4), (1, 1), (3, 1), (4, 3) \}$,
$\Re_3=\{ (2, 3), (1, 2), (3, 4), (4, 1) \}$,
$\Re_4=\{ (1, 4), (2, 2), (3, 2) \}$

فحدد أي من هذه العلاقات تكون راسم (وما نوعه؟) ، وأيها لا تكون راسم (مع ذِكر السبب)؟.

٢- بفرض $f : Z \to Z^*$ راسم حيث $f(x) = x^2 \;\; \forall\, x\in Z$ وأن Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، Z^* مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة $\{0, 1, 2, 3,...\}$.

(أ) حدد نوع الراسم f .

(ب) اكتب عناصر المدى $f(Z)$.

٣- بفرض أن $g: N \to Y$ راسم حيث $g(x) = x+2 \;\forall\, x\in N$ ، N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، والمجموعة $Y=\{3,4,5,...\}$.

(أ) حدد نوع الراسم g .

(ب) أوجد العلاقة العكسية g^{-1} .

٤- بفرض أن $f, g : R \to R$ (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) راسمان معرفان كما يلي: $f(x) = 3x^3 \;\; , g(x) = 5x - 5 \;\;\; \forall\, x\in R$.

(أ) حدد نوع كلا من هذين الراسمين ؟

(ب) أوجد f^1 .

(ج) أوجد $f_\circ g \,,\, g_\circ f$.

٥- بفرض أن $f: R \to R$ راسم حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ،

$f(x)=-2x+3 \;\; \forall\, x\in R$.

فتحقق من أن f يكون أحادي التناظر ، وبفرض أن $A=\{-4, -2, 0, 2, 4\}\subset R$ اكتب عناصر المجموعة $f^1(A)$.

٦- بفرض أن $f: R \to R$ راسم حيث $f(x) = 2x-3 \;\; \forall x\in R$. تحقق من أن f يكون أحادي التناظر ، ومن ثم أوجد f^{-1} .

٧- بفرض أن $f, g: R \to R$ راسمان معرفان كما يلي:

$f(x)=2x+1 , \;\; g(x)= x^2-2. \;\; \forall x\in R.$

أوجد صيغة تعريف لكل من $f\circ g$, $g\circ f$ ، ومن ثم احسب قيمة $(f\circ g)(4),(g\circ f)(4)$.

٨- بفرض أن $f, g: R \to R$ راسمان معرفان كما يلي:

$f(x) = x^2+3x+1 , \;\; g(x) = 2x-3. \;\; \forall x\in R.$

أوجد صيغة تعريف لكل من: $f\circ g, \;\; g\circ f, \;\; g\circ g, \;\; f\circ f$.

٩- بفرض أن $f: R \to R$ راسم قابل للإنعكاس وأن:

$f(x) = (x-1)/(x+1) , \;\; f^{-1}(y) = (1+y)/(1-y) \;\; \forall x,y\in R.$

فتحقق من أن $(f^{-1}\circ f)(x) = x \;\; , (f\circ f^{-1})(y) = y$.

١٠- إذا كان $f: R\to R$ راسم ، وكانت A_1, A_2 مجموعات جزئية اختيارية من مجموعة الأعداد الحقيقية R فتحقق من صحة ما يلي:

(i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1)\cup f(A_2).$

(ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)\cap f(A_2)$, $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1)\cap f(A_2)$ *in general.*

(<u>Hint</u>: For (ii) second part: let $A_1 = \{-1,0\}$, $A_2 = \{0,1\}$, $f(x) = x^2$)

١١- إذا كان $f: R\to R$ راسم قابل للإنعكاس ، وكانت B_1, B_2 مجموعات جزئية اختيارية من مجموعة الأعداد الحقيقية R فتحقق من صحة ما يلي:

(i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2).$

(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2).$

الباب الرابع

العمليات الثنائية Binary Operations

نعلم أن عمليتي الجمع والضرب على الأعداد تختص بتركيب Composing عددين معاً لينتج عدد ثالث ، وكذلك عمليتي الاتحاد والتقاطع على المجموعات تختص بتركيب مجموعتين معاً لتنتج مجموعة ثالثة ، وكذلك عملية تحصيل العلاقات (أو الرواسم) تقوم بتحصيل علاقتين (أو راسمين) لتكوين علاقة ثالثة (أو راسم ثالث) ،

وهكذا يتبين لنا مفهوم العمليات الثنائية ويمكن تعميمه.

تعريف(١): الراسم $b: X \times X \to X \; ; b(x,y) = z \in X \;\; \forall (x,y) \in X \times X$

يُسمى **عملية ثنائية** binary operation على المجموعة غير الخالية X .

أي أن العملية التي تحصل عناصر مجموعة ما (كل اثنان معاً) على أن يكون ناتج التحصيل ينتمي للمجموعة تُسمى عملية ثنائية على هذه المجموعة ، وفي هذه الحالة نقول أن المجموعة مغلقة بالنسبة للعملية.

وعادة يُرمز للعملية الثنائية بالرموز * ، # ، ° ، ⊕ ، ⊗ ، ... .

تعريف(٢): يُقال للعملية الثنائية * على المجموعة X أنها دامجة associative

إذا تحقق الشرط: $(x * y) * z = x * (y * z) \;\; \forall x, y, z \in X$

ويُقال أنها ابدالية commutative إذا تحقق الشرط: $x * y = y * x \;\; \forall x, y \in X$

مثال(١): عملية الجمع العادية "+" عملية ثنائية دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، **و**عملية الضرب العادية "×" عملية ثنائية دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، وعملية الجمع العادية "+" ليست عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية حيث إن مجموع أي عددين فرديين لا يكون بالضرورة عدد فردي ، ولكن عملية الضرب"×" عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية حيث إن حاصل ضرب أي عددين فرديين دائماً يكون عدد فردي.

العنصر المحايد والمعكوس Identity and Inverse Elements:

تعريف(٣): إذا كانت $*$ عملية ثنائية على المجموعة غير الخالية X فإن العنصر $e \in X$ يُسمى **عنصراً محايداً** بالنسبة للعملية $*$ إذا تحقق الشرط: $x * e = e * x = x \quad \forall x \in X$

وإذا كانت $*$ عملية ثنائية ذات عنصر محايد $e \in X$ وليكن $x \in X$ فإن العنصر $y \in X$ يُسمى **معكوس** (**نظير**) للعنصر x إذا تحقق الشرط: $x * y = y * x = e$

مثال(٢): لتكن العملية $*$ معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$$x * y = x + y - 3 \quad \forall x, y \in Z$$

ادرس العملية $*$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ووجود المعكوس).

الحل:

$$(1) \quad x * y = x + y - 3 \in Z \quad \forall x, y \in Z.$$

وإذاً $*$ عملية ثنائية في Z.

$$(2) \quad x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x \quad \forall x, y \in Z.$$

وإذاً $*$ إبدالية.

$$(3) \quad (x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + y + z - 6,$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + (y + z - 3) - 3 = x + y + z - 6.$$

$$\therefore (x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in Z.$$

وإذاً $*$ دامجة.

$$(4) \quad x * e = x \Rightarrow x + e - 3 = x \Rightarrow e = 3,$$

$$e * x = x \Rightarrow e + x - 3 = x \Rightarrow e = 3.$$

وإذاً العنصر المحايد بالنسبة للعملية $*$ يكون $e = 3 \in Z$

$$(5) \quad x * y = e \Rightarrow x + y - 3 = 3 \Rightarrow y = 6 - x,$$

$$y * x = e \Rightarrow y + x - 3 = 3 \Rightarrow y = 6 - x.$$

وإذاً معكوس العنصر $x \in Z$ يكون $6 - x \in Z$

تمثيل العمليات الثنائية بالجداول Representation by Tables :

إذا كانت X مجموعة منتهية (عدد عناصرها محدود n مثلاً) وكانت $*$ عملية ثنائية في X فإنه يلزم كتابة عدد n^2 من الأزواج المرتبة وصورها.

وللسهولة نلجأ إلى ما يُسمى بجدول العملية وهو شبيه بجدول الضرب.

كما سيتضح من المثال التالي:

مثال: لتكن $X = \{-1,0,1\}$ معرف عليها عمليتي الجمع والضرب العاديتين $+,\times$

الحل: المجموعة X منتهية (عدد عناصرها 3) فيمكن تمثيل العمليتين $+,\times$ بالجداول كما يلي:

الجدول الذي يمثل العملية $+$ في المجموعة X يكون:

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

ونلاحظ من الجدول أن بعض العناصر الموجودة داخله (أي بعض الصور) لا تنتمي إلى المجموعة X (مثلاً $-2,2 \notin X$) وبذلك فإننا بنظرة واحدة إلى الجدول نستنتج أن $+$ ليست عملية ثنائية في المجموعة X.

والجدول الذي يمثل العملية $\times$ على المجموعة X يكون:

×	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

ونلاحظ من الجدول أن جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X ومن ثم فإن $\times$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X.

الجمع والضرب بمقياس العدد الصحيح n :

Addition & Multiplication Mod n :

تعريف: يُقال أن العددين الصحيحين a,b **متطابقين بمقياس العدد الصحيح** n إذا كان $a-b$ يقبل القسمة على n حيث $n \geq 2$ ويُكتب جبرياً $a \equiv b (\text{mod } n)$

ومن خلال دراستنا للعلاقات في الباب الثاني رأينا أن علاقة التطابق هذه تكون علاقة تكافؤ ، ومجموعة فصول التكافؤ لها تكون تجزيء لمجموعة الأعداد الصحيحة Z

ويُرمز لمجموعة فصول التكافؤ لهذه العلاقة بالرمز Z/n

حيث $Z/n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$

ومن باب الإيجاز نكتب $Z_n = \{0,1,2,...,n-1\}$

وعمليتي الجمع والضرب في Z_n نعرفهما كما يلي:

حاصل جمع $a,b \in Z_n$ بمقياس العدد الصحيح n يكون عبارة عن **باقي ناتج قسمة المجموع** $a+b$ **على العدد الصحيح** n

وحاصل ضرب $a,b \in Z_n$ بمقياس العدد الصحيح n يكون عبارة عن **باقي ناتج قسمة حاصل الضرب** $a \times b$ **على العدد الصحيح** n

ويُرمز لعملية الجمع بمقياس العدد الصحيح n بالرمز $\oplus_n$

ولعملية الضرب بمقياس العدد الصحيح n بالرمز $\otimes_n$

ملاحظة: كلا من العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ في Z_n تكون دامجة.

مثال(١): لتكن $\oplus_4$ عملية الجمع بمقياس 4 معرفة على المجموعة $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ ادرس العملية $\oplus_4$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ، ووجود المعكوس).

الحل: نمثل العملية $\oplus_4$ بجدول كما يلي:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ونلاحظ من الجدول أن:

(١) جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة Z_4. ومن ثم فإن $\oplus_4$ تكون عملية ثنائية في المجموعة Z_4.

(٢) عناصر الجدول متماثلة حول القطر الرئيسي للجدول. ومن ثم فإن $\oplus_4$ تكون ابدالية.

(٣) العنصر $0 \in Z_4$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\oplus_4$

(حيث ينطبق الصف (العمود) المناظر له على الصف (العمود) الرئيسي للجدول).

(٤) معكوسات عناصر المجموعة Z_4 تكون كما يلي:

العنصر	0	1	2	3
المعكوس	0	3	2	1

وحيث إن كلا من العمليتين $\otimes_n, \oplus_n$ في Z_n تكون دامجة. وعلى ذلك $\oplus_4$ تكون دامجة.

مثال(٢): لتكن $\otimes_{10}$ عملية الضرب بمقياس 10 معرفة على

المجموعة $X = \{2,4,6,8\} \subset Z_{10}$ ادرس العملية $\otimes_{10}$

(من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد والمعكوس).

الحل: نمثل العملية $\otimes_{10}$ بجدول كما يلي:

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

ونلاحظ من الجدول أن:

(١) جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X.

ومن ثم فإن $\otimes_{10}$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X.

(٢) عناصر الحدول متماثلة حول القطر الرئيسي للجدول.

ومن ثم فإن $\otimes_{10}$ تكون ابدالية.

(٣) العنصر $6 \in X$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\otimes_{10}$ (حيث ينطبق الصف (العمود) المناظر له على الصف (العمود) الرئيسي للجدول).

(٤) معكوسات عناصر المجموعة X تكون كما يلي:

العنصر	2	4	6	8
المعكوس	8	4	6	2

وحيث إن كلا من العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ في Z_n تكون دامجة.

وعلى ذلك $\otimes_{10}$ تكون دامجة.

تمارين

(**١**) حدد أي من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ (مع ذكر السبب) :

(أ) عملية الجمع إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

(ب) عملية الضرب دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

(ج) عملية الرفع إلى قوى (أس لـــ) إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N

(د) عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z .

(هـــ) عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N .

(**٢**) لتكن العملية * معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$x * y = 2x + 3y \ \forall x, y \in N$.

تحقق من أن * تكون عملية ثنائية غير دامجة وغير إبدالية في N

وهل * تكون عملية ثنائية في المجموعة الجزئية $\{1,2,3,4\}$ من N؟ ولماذا؟.

(**٣**) لتكن $\otimes_5$ عملية الضرب بمقياس 5 معرفة على المجموعة $X = Z_5 - \{0\}$

ادرس العملية $\otimes_5$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ووجود المعكوس).

الباب الخامس

الأنظمة الرياضية ذات العملية الثنائية الواحدة:

Mathematical System with One Operation:

تعريف: لتكن $*$ عملية ثنائية معرفة على مجموعة غير خالية X فإن الثنائي $< X,* >$ يُسمى **نظاماً رياضياً (أو نظاماً جبرياً أو بناءً جبرياً) ذو عملية ثنائية واحدة** .

فمثلاً كل من $< N,+ >, < N,\times >$ حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة يكون نظام رياضي ذو عملية ثنائية واحدة، بينما $< N,- >$ ليس نظاماً ذا عملية حيث إن $1-2 \notin N$ ، كذلك $< N,\div >$ ليس نظاماً ذا عملية (لماذا؟).

مثال(١): إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة. بيّن أي من الثنائيات الآتية يعبر عن نظام رياضي ذي عملية:

$$< Z,+ >, < Z,\times >, < Z,- >, < Z,\div > .$$

<u>الحل</u>:

حيث إن مجموع أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن عملية الجمع $+$ عملية ثنائية في Z ومن ثم فإن $< Z,+ >$ يكون نظاماً ذا عملية.

كذلك حيث إن حاصل ضرب أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن $< Z,\times >$ يكون نظاماً ذا عملية .

وحيث إن ناتج طرح أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن $< Z,- >$ يكون نظاماً ذا عملية .

أما $< Z,\div >$ فليس نظاماً ذا عملية حيث خارج قسمة عددين صحيحين ليس دائماً عدد صحيح.

مثال(٢): إذا كانت $O=\{\pm1,\pm3,\pm5,...\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية.
وضح أي من الثنائيات الآتية يكون نظاماً ذا عملية:

$<O,+>,<O,\times>,<O,->$.

الحل:

حيث إن مجموع أي عددين صحيحين فرديين يكون دائماً عدداً صحيحاً زوجياً فمثلاً $5+7=12\notin O, 3+(-5)=-2\notin O$ ومن ثم $<O,+>$ ليس نظاماً ذا عملية.
كذلك $<O,->$ ليس نظاماً ذا عملية لنفس السبب.
أما $<O,\times>$ فيكون نظاماً ذا عملية حيث حاصل ضرب أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح فردي ويمكن إثبات ذلك في الحالة العامة كما يلي:

$$x,y\in O\ ;x=2m+1, y=2n+1\ ,m,n\in Z$$
$$\begin{aligned}\therefore x\times y&=(2m+1)(2n+1)\\&=4mn+2m+2n+1\\&=2(2mn+m+n)+1\in O.\end{aligned}$$

التمثيل بالجداول Representation by Tables :

إذا كانت X مجموعة منتهية (عدد عناصرها محدود n مثلاً) وكانت $*$ عملية ثنائية في X فإنه يلزم كتابة عدد n^2 من الأزواج المرتبة وصورها، وللسهولة وكما ذكرنا في الباب الرابع نمثل الثنائي $< X,* >$ بجدول كما سيتضح في الأمثلة التالية:

مثال(١): لتكن $X = \{-1,0,1\}$ بيّن أي من الثنائيات الآتية يكون نظاماً ذا عملية: $< X,+ >, < X,\times >$.

الحل: المجموعة X منتهية عدد عناصرها 3 ومن ثم فإن عدد عناصر $X \times X$ يساوي $3^2 = 9$ حيث:

$$X \times X = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1).(1,0),(1,1)\}.$$

ولكي نعرف ماإذا كانت العملية $+$ أو العملية $\times$ عملية ثنائية في X أم لا .

يجب أن نوجد صورة كل عنصر من عناصر $X \times X$ (أي ناتج تحصيل العنصر الأول مع العنصر الثاني لكل زوج مرتب في $X \times X$ بواسطة العملية $+$ أو العملية $\times$) ونتأكد أن جميع الصور تنتمي إلى X

وللسهولة نستخدم الجداول الممثلة للعمليات المعطاة في المجموعة X كما يلي:

✓ الجدول الذي يمثل $< X,+ >$ يكون:

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

نلاحظ من الجدول أن بعض العناصر الموجودة داخله (أي بعض الصور) لا تنتمي إلى المجموعة X (مثلاً $-2,2 \notin X$) وبذلك فإننا بنظرة واحدة إلى الجدول نستنتج أن $+$ لا تكون عملية ثنائية في المجموعة X وأن $< X,+ >$ لايكون نظاماً ذا عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $<X,\times>$ يكون:

$\times$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

نلاحظ من الجدول أن جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X ومن ثم فإن $\times$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X، وأن $<X,\times>$ نظاماً ذا عملية.

مثال(٢): لتكن $X=\{1,2\}$، ولتكن $Y=P(X)$ ادرس كلاً من الثنائيات:

$<Y,\cup>,<Y,->,<Y,\Delta>$

(من حيث كون كل منها نظام ذا عملية أم لا).

<u>الحل</u>: المجموعة Y هي مجموعة القوى للمجموعة X أي $Y=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ والعمليات $\cup,-,\Delta$ هي الإتحاد، والفرق،والفرق المتماثل على الترتيب في المجموعات.

✓ الجدول الذي يمثل $<Y,\cup>$ يكون:

$\cup$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,\cup>$ نظام ذو عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $<Y,->$ يكون:

$-$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{1\}$	$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$	ϕ
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	ϕ	ϕ
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	ϕ

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,->$ نظام ذو عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $<Y,\Delta>$ يكون:

Δ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	ϕ	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	ϕ	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	ϕ

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,\Delta>$ نظام ذو عملية.

مثال(٣): تحقق من أن كلا من $<Z_4,\oplus_4>,<Z_4,\otimes_4>$ يكون نظاماً ذا عملية.

الحل:

$Z_4=\{0,1,2,3\}$ والجدولين الممثليين للعمليتين $\oplus_4,\otimes_4$ في Z_4 يكونا كما يلي:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

من الجدولين واضح أنه لا توجد عناصر غريبة (أي أن عناصر كل جدول جميعها تنتمي للمجموعة Z_4) وإذاً كلا من $<Z_4,\oplus_4>,<Z_4,\otimes_4>$ يكون نظاماً ذا عملية.

مثال(٤): إذا كانت $X=Z_6-\{0\}$ فبيّن ما إذا كان $<X,\otimes_6>$ نظاماً ذا عملية أم لا ؟.

الحل: $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ ومن ثم تكون $X=\{1,2,3,4,5\}$ والجدول الممثل لعملية الضرب بمقياس العدد 6 في المجموعة X يكون:

$\otimes_6$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

من الجدول يتبين أن $<X,\otimes_6>$ لا يكون نظامً ذا عملية ،

حيث يوجد العنصر 0 لا ينتمي إلى X.

مثال(٥): لتكن $X = R - \{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ، ولتكن * عملية في X بحيث: $x * y = x + y - xy \quad \forall x, y \in X$

فتحقق من أن $< X,* >$ يكون نظام ذا عملية.

الحل: واضح أن عدد عناصر المجموعة X لانهائي ومن ثم فلا يمكن تمثيل $< X,* >$ بجدول ولذلك نتبع ما يلي:

ليكن $x, y \in X$ حيث $x * y = x + y - xy$ فإذا كان $x * y = x + y - xy = 1$

فإن $x(1-y) = 1-y$ وحيث $y \neq 1$ فإنه يمكن القسمة على $1-y$ فينتج $x = 1$

وهذا يناقض الفرض. ومن ثم فإن $x * y = x + y - xy \neq 1$

وإذا X مغلقة بالنسبة للعملية * أي أن $< X,* >$ يكون نظاماً ذا عملية.

الأنظمة الإبدالية:

تعريف: إذا كانت العملية الثنائية * إبدالية في المجموعة X أي أن:

$$x * y = y * x \ \forall x, y \in X$$

فإن النظام $< X, * >$ يُسمى **نظام إبدالي**.

مثال(١): النظامان $< Z,+ >, < Z,\times >$ إبداليان أما النظام $< Z,- >$ فليس إبدالياً.

مثال(٢): لتكن العملية الثنائية * معرفة على N كما يلي:

$$a * b = a^b \ \forall a, b \in N$$

فإن العملية * غير إبدالية حيث إن:

$$2,3 \in N \ \ , 2 * 3 = 2^3 = 8 , 3 * 2 = 3^2 = 9$$
$$\therefore 2 * 3 \neq 3 * 2.$$

وعلى ذلك فإن النظام $< N, * >$ ليس إبدالياً.

مثال(٣): لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{1\}$

(حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) كما يلي:

$$x * y = x + y - xy \ \ \forall x, y \in X$$

تحقق من أن النظام $< X, * >$ إبدالي.

<u>الحل</u>: لكل $x, y \in X$ يكون:

$$\begin{aligned} x * y &= x + y - xy \\ &= y + x - yx \\ &= y * x. \end{aligned}$$

وإذاً العملية * إبدالية في X ومن ثم فالنظام $< X, * >$ إبدالي.

مثال(٤): لتكن $M_{2\times2}(R)$ هي مجموعة المصفوفات ذات العناصر الحقيقية من النوع 2×2 (أي أن $M_{2\times2}(R) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \ real\}$).

فإن عملية الجمع في $M_{2\times2}(R)$ تكون إبدالية حيث:

$$A + B = B + A \ \ \forall A, B \in M_{2\times2}(R) .$$

بينما عملية الضرب في $M_{2\times2}(R)$ ليست إبدالية حيث إنه ليس من الضروري أن يكون $AB = BA \ \ \forall A, B \in M_{2\times2}(R)$

فمثلاً إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإننا نجد أن:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore AB \neq BA.$$

مثال(٥): إذا تأملنا الجدول الذي يمثل النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ حيث $Z_3 = \{0,1,2\}$ ، $\oplus_3$ عملية الجمع بمقياس 3 وهو كما يلي:

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

نجد أن الجدول متماثل حول القطر الرئيسي (أي العناصر متساوية البعد عن القطر الرئيسي) مما يدل على أن: $x \oplus_3 y = y \oplus_3 x \quad \forall x, y \in Z_3$

أي أن النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ إبدالي.

وستكون وسـيلتنا في بيان أن نظاماً عدد عناصره محدود هو نظام إبدالي هي النظر في الجدول الذي يمثله فإذا كان الجدول متماثلاً حول القطر الرئيسي قلنا أن النظام إبدالي.

الأنظمة الدامجة (التجميعية):

تعريف: يُقال أن النظام $<X,*>$ **دامج** (أو **تجميعي**) إذا كانت العملية $*$ دامجة في X أي أن:

$$(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in X.$$

مثال(١): لتكن العملية الثنائية $*$ معرفة على N كما يلي:

$$a*b = a^b\ \forall a,b \in N$$

فإن العملية $*$ غير دامجة حيث إن:

$$a,b,c \in N\ \ ,(a*b)*c = (a^b)^c = a^{bc}, a*(b*c) = a^{(b^c)} \neq a^{bc},$$
$$\therefore (a*b)*c \neq a*(b*c).$$

فمثلاً:

$$(2*3)*4 = 2^3*4 = (2^3)^4 = 2^{12},$$
$$2*(3*4) = 2*(3^4) = 2^{(3^4)} = 2^{81}.$$

وعلى ذلك فإن النظام $<N,*>$ ليس دامجاً.

مثال(٢): لتكن العملية $*$ معرفة في المجموعة $X = R-\{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$x*y = x+y-xy\ \ \forall x,y \in X$$

تحقق من أن النظام $<X,*>$ يكون دامج.

الحل: ليكن $x,y,z \in X$ فإن:

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x+y-xy)*z\\ &= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}x*(y*z) &= x*(y+z-yz)\\ &= x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz.\end{aligned}$$

وإذاً $(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in X$ أي أن العملية $*$ دامجة ومن ثم يكون النظام $<X,*>$ دامج.

مثال(٣): كل من الأنظمة $<Z_n,\otimes_n>, <Z_n,\oplus_n>$ تكون دامجة (حيث إن تحصيل العمليتين $\oplus_n,\otimes_n$ الجمع والضرب بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من عناصر المجموعة Z_n هو ناتج باقي قسمة الجمع والضرب العادي للعنصرين على العدد الصحيح n وأن كلاً من عملية الجمع والضرب العادي عملية دامجة على أي مجموعة من العناصر).

مثال(٤): كل من الأنظمة $<P(X),\Delta>, <P(X),\cap>, <P(X),\cup>$ دامجة.
بينما النظام $<P(X),->$ ليس دامجاً.

مثال(٥): جمع وضرب المصفوفات $M_{2\times 2}$ عمليات دامجة حيث إن:

$$\begin{aligned}&(A+B)+C=A+(B+C),\\ &(AB)C=A(BC).\end{aligned}\qquad \forall A,B,C\in M_{2\times 2}$$

النظام ذو العنصر المحايد:

تعريف: يُقال أن النظام $<X,*>$ **ذو عنصر محايد** إذا وُجد عنصر $e \in X$ بحيث:

$$x * e = e * x = x \ \ \forall x \in X.$$

وإذا كان النظام $<X,*>$ إبدالي فيكفي أن نحقق أحد الشرطين:

$$x * e = x \ \ \forall x \in X \quad \text{أو} \quad e * x = x \ \ \forall x \in X$$

أما إذا لم يكن النظام $<X,*>$ إبدالياً وتحقق الشرط: $x * e = x \ \ \forall x \in X$ فقط فإن e في هذه الحالة تُسمى **عنصر محايد يميني** .

وكذلك إذا تحقق الشرط: $e * x = x \ \ \forall x \in X$ فقط فإن e في هذه الحالة تُسمى **عنصر محايد يساري** .

أما إذا تحقق الشرطان معاً فإن e تُسمى **عنصر محايد** .

مثال(١): العنصر المحايد في النظام $<Z,+>$ هو الصفر، أما العنصر المحايد في النظام $<Z,\times>$ فهو الواحد الصحيح.

مثال(٢): العنصر المحايد في كل من النظامين $<P(X),\cup>, <P(X),\Delta>$ هو المجموعة الخالية ϕ والعنصر المحايد في النظام $<P(X),\cap>$ هو المجموعة الأصلية X أما النظام $<P(X),->$ له عنصر محايد يميني فقط هو المجموعة الخالية ϕ وليس له محايد يساري وذلك لأن:

$$\begin{aligned} A - \phi &= A, \\ \phi - A &= \phi. \end{aligned} \quad \forall A \in P(X).$$

مثال(٣): ابحث وجود العنصر المحايد في النظام $<X,*>$ حيث $X = R-\{1\}$

(R مجموعة الأعداد الحقيقية) والعملية * معرفة في X كما يلي:

$$x*y = x+y-xy \quad \forall x,y \in X .$$

الحل:

$$x*e = x \Rightarrow x+e-xe = x$$
$$\Rightarrow e-xe = 0$$
$$\Rightarrow e(1-x) = 0$$
$$\Rightarrow e = 0 \vee 1-x = 0$$
$$\Rightarrow e = 0 \vee x = 1$$
$$\Rightarrow e = 0 \;, x \neq 1 \;\; ; x \in R-\{1\}.$$

وإذاً العنصر $0 \in X$ هو العنصر المحايد اليميني للنظام $<X,*>$

وحيث إن النظام $<X,*>$ إبدالي لذلك فالعنصر $0 \in X$ هو أيضاً محايد يساري ، وعلى ذلك فإن $0 \in X$ هو العنصر المحايد لهذا النظام.

مثال(٤): لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن العملية * معرفة في X كما يلي:

$$x*y = x \quad \forall x,y \in X.$$

ادرس النظام $<X,*>$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد).

الحل: حيث إن عدد عناصر X محدود فنكون جدول يمثل النظام كما يلي:

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

من الجدول نلاحظ أن:

(أ) النظام $<X,*>$ غير إبدالي (لعدم تماثل الجدول حول قطره الرئيسي).

(ب) النظام $<X,*>$ دامج لأن: $(x*y)*z = x*(y*z) = x \quad \forall x,y,z \in X$.

(ج) كل من العناصر 1,2,3,4 محايد يميني حيث إن:

$$x*1 = x \;,\; x*2 = x \;,\; x*3 = x \;,\; x*4 = x \quad \forall x \in X.$$

(د) النظام $<X,*>$ لايحتوي على محايد يساري.

مثال(٥): لتكن $X = \{2,4,6,8\} \subset Z_{10}$ ولتكن $\otimes_{10}$ هي عملية الضرب بمقياس 10
ادرس النظام $< X,\otimes_{10} >$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد).
الحل: الجدول الذي يمثل النظام $< X,\otimes_{10} >$ يكون كالتالي:

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

من الجدول نلاحظ أن:
(أ) النظام $< X,\otimes_{10} >$ إبدالي (لتماثل الجدول حول قطره الرئيسي).
(ب) النظام $< X,\otimes_{10} >$ دامج لأن:

$$(x \otimes_{10} y) \otimes_{10} z = x \otimes_{10} (y \otimes_{10} z) \quad \forall x, y, z \in X$$

فمثلاً:

$$(2 \otimes_{10} 4) \otimes_{10} 6 = 8 \otimes_{10} 6 = 8 \ , \ 2 \otimes_{10} (4 \otimes_{10} 6) = 2 \otimes_{10} 4 = 8,$$
$$(2 \otimes_{10} 6) \otimes_{10} 8 = 2 \otimes_{10} 8 = 6 \ , \ 2 \otimes_{10} (6 \otimes_{10} 8) = 2 \otimes_{10} 8 = 6,$$

ولإثبات ذلك على كل اختبار ممكن لثلاثة عناصر من X فهي عملية شاقة ، ولذلك نستنتج إدماج العملية $\otimes_{10}$ من كون أن عملية الضرب بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من المجموعة Z_n هي ناتج باقي قسمة الضرب العادي للعنصرين على n وحيث إن عملية الضرب العادية دامجة على أي مجموعة من العناصر فبالتالي تكون العملية $\otimes_{10}$ دامجة على X.

(ج) العمود الثالث في الجدول يتطابق مع العمود الذي على يسار الجدول (العمود الرئيســي للجدول) ، وأن الصف الثالث يتطابق مع الصف أعلى الجدول (الصف الرئيســي للجدول) ، وأن العمود الثالث والصف الثالث يتقاطعان عند العنصر 6 وهذا يدل على أن العنصر 6 هو العنصر المحايد للنظام $< X,\otimes_{10} >$
(حيث يتحقق: $x \otimes_{10} 6 = 6 \otimes_{10} x = x \quad \forall x \in X$).

العنصر المعكوس (النظير):

تعريف: ليكن $< X,* >$ نظاماً ذا عنصر محايد e وليكن $x \in X$ إذا وُجد عنصر $y \in X$ بحيث $x * y = e$ فإن العنصر y يُسمى **معكوس (نظير) يميني** للعنصر x كذلك إذا وُجد عنصر $z \in X$ بحيث $z * x = e$ فإن العنصر z يُسمى **معكوس (نظير) يساري** للعنصر x

وإذا كان النظام $< X,* >$ إبدالياً فإن المعكوس اليميني لأي عنصر $x \in X$ (إن وُجد) يكون هو نفسه المعكوس اليساري للعنصر x وفي هذه الحالة نتحدث عن معكوس العنصر.

وبالطبع لا معنى للحديث عن المعكوسات إذا لم يكن للنظام عنصر محايد.

ونستطيع أن نتبين بسهولة أن معكوس العنصر المحايد e هو نفسه.

مثال(١): في المثال السابق نستطيع أن نتبين من جدول النظام $< X,\otimes_{10} >$ أن معكوسات عناصر المجموعة X تكون كما يلي:

العنصر	2	4	6	8
المعكوس	8	4	6	2

مثال(٢): لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$x * y = x + y - xy \quad \forall x, y \in X$$

عيّن المعكوس لأي عنصر في النظام $< X,* >$

الحل: أثبتنا فيما سبق أن العنصر المحايد للنظام $< X,* >$ هو 0 وليكن معكوس العنصر $x \in X$ هو العنصر y وعلى ذلك فإن:

$$\begin{aligned} x * y = 0 &\Rightarrow x + y - xy = 0 \\ &\Rightarrow y(1-x) = -x \\ &\Rightarrow y = \frac{-x}{1-x} \quad \forall x \in X = R - \{1\}. \end{aligned}$$

وإذاً العنصر $\frac{x}{x-1}$ هو المعكوس اليميني للعنصر x في النظام $<X,*>$ وكذلك يكون هو نفسه المعكوس اليساري للعنصر x حيث إن النظام $<X,*>$ إبدالي.

ومن ثم يكون العنصر $\frac{x}{x-1}$ هو معكوس العنصر x في النظام $<X,*>$

مثال(٣): لتكن العملية $*$ معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$$x * y = x + y - 3 \quad \forall x, y \in Z$$

ادرس النظام $<Z,*>$ (من حيث الإبدال، والدمج، ووجود العنصر المحايد، ووجود المعكوس).

الحل:

$$(1)\ \ x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x \quad \forall x, y \in Z.$$

إذاً النظام $<Z,*>$ إبدالي.

$$(2)\ \ (x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + y + z - 6,$$
$$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + (y + z - 3) - 3 = x + y + z - 6.$$
$$\therefore (x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in Z.$$

إذاً النظام $<Z,*>$ دامج.

$$(3)\ \ x * e = x \Rightarrow x + e - 3 = x$$
$$\Rightarrow e = 3,$$
$$e * x = x \Rightarrow e + x - 3 = x$$
$$\Rightarrow e = 3.$$

إذاً العنصر المحايد للنظام $<Z,*>$ هو $e = 3$

$$(4)\ \ x * y = e \Rightarrow x + y - 3 = 3$$
$$\Rightarrow y = 6 - x,$$
$$y * x = e \Rightarrow y + x - 3 = 3$$
$$\Rightarrow y = 6 - x.$$

إذاً معكوس العنصر x هو العنصر $6 - x$

تمارين

١- لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{-1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي: $x * y = x + y + xy \quad \forall x, y \in X$

فتحقق من أن $< X, * >$ يكون نظام دامج وإبدالي ،

وابحث وجود العنصر المحايد، والمعكوس.

٢- إذا كانت $X = \{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \ reals\}$ وكانت $\times$ عملية ضرب المصفوفات.

فتحقق من أن $< X, \times >$ يكون نظام دامج وإبدالي وذو عنصر محايد ،

وأن جميع عناصر هذا النظام عدا العنصر $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربي.

٣- لتكن $\otimes_8$ عملية الضرب بمقياس 8 معرفة على المجموعة $X = \{1,3,5,7\} \subset Z_8$

ادرس النظام $< X, \otimes_8 >$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد والمعكوس).

- **المراجع:**

١- موسوعة علماء العرب على الإنترنت.

٢- موقع الرياضيات على الإنترنت.

http://www.math.com

٣- موسوعة ويكيبيديا الحرة على الإنترنت.

http://en.wikipedia.org/wiki/mathematics

1. W.Edwin.Clark : "Elementary Abstract Algebra" University of South Florida press (2001).
2. R.B.J.T. Allendy : "Rings ,Fields and Groups" Edward Arnold London (1995).
3. J.P.Fraleigh : "A first course in abstract algebra" 5th Edition Addison-Wesley(1994).
4. S.Lang : "Algebra" Addison Wesley 3th edition (1992).
5. D.Sara Cino : "Abstract Algebra" a first course. Addison Wesley (1980).
6. P.B.Bhatta Charya and S.K.Jain : "First Course in Rings ,Fields and Vector Spaces" Wiley Eastern Limited New Delhi (1977).
7. I.Kaplansky : "Fields and Rings" 2nd edition University of Chicago press (1972).
8. D.M.Burton : "A First course in Rings and Ideals" Addison Wesley London (1970).

محاضرات

في

الـهـنـدسـة الـتـحـلـيـلـيـة

(المستوى الثاني)

إعداد

قسم الرياضيات – كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

المحتويات:

▪ المراجع:

1- د.برهامي حشيش – " الوسيط في الجبر والهندسة التحليلية "– سلسلة الرياضيات الهندسية – دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

2- د.مصطفى الجندي – " تقليدات الجبر والهندسة التحليلية "– دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

3- د.رمضان جهينة – " مبادئ الرياضيات "– منشورات ELGA – الطبعة الثانية (2000م).

4- Crowell, R. and Slesnick, W.E. (1989). *Calculus and Analytic Geometry.* Norton.

5- Thomas, J.G.R. and Finney, R. (1992). *Calculus and Analytic Geometry.* Addison .

6- Selby,P.H. (1986). *Analytic Geometry.* San Diego,Calefornia. College outline series.

7- Yefimov, N.V. (1964). *A Brief course in Analytic Geometry.* Mir publishers.

الباب الأول

الهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد

1 – طرق تعيين النقطة في الفضاء الثلاثي:

رأينا في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد تماماً بواسطة كميتين عدديتين وهذا هو السبب في أن الهندسة التحليلية المستوية تُسمى بالهندسة التحليلية في بعدين.

ولتحديد موضع النقطة في الفضاء الثلاثي يلزمنا ثلاث كميات عددية، ولذلك فإن الهندسة التحليلية الفراغية تسمى أيضاً بالهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد.

رأينا أيضاً في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد بطريقتين

إحداهما طريقة الإحداثيات الكرتيزية (x, y) حيث $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$

والثانية طريقة الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث $o \le r < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi$

والعلاقة بين (x, y) ، (r, θ) تكون كما يلي:

$$x = r\cos\theta.$$
$$y = r\sin\theta.$$

أو تكون:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

أما في الفضاء الثلاثي فتوجد ثلاث طرق مختلفة – ولكنها أيضا مرتبطة– سنوضحها فيما يلي:

- **الطريقة الأولى: الإحداثيات الكرتيزية (x, y, z)**

من نقطة الأصل O في الفضاء الثلاثي نرسم ثلاث مستقيمات OX, OY, OZ بحيث يكون كل اثنان منهما متعامدان.

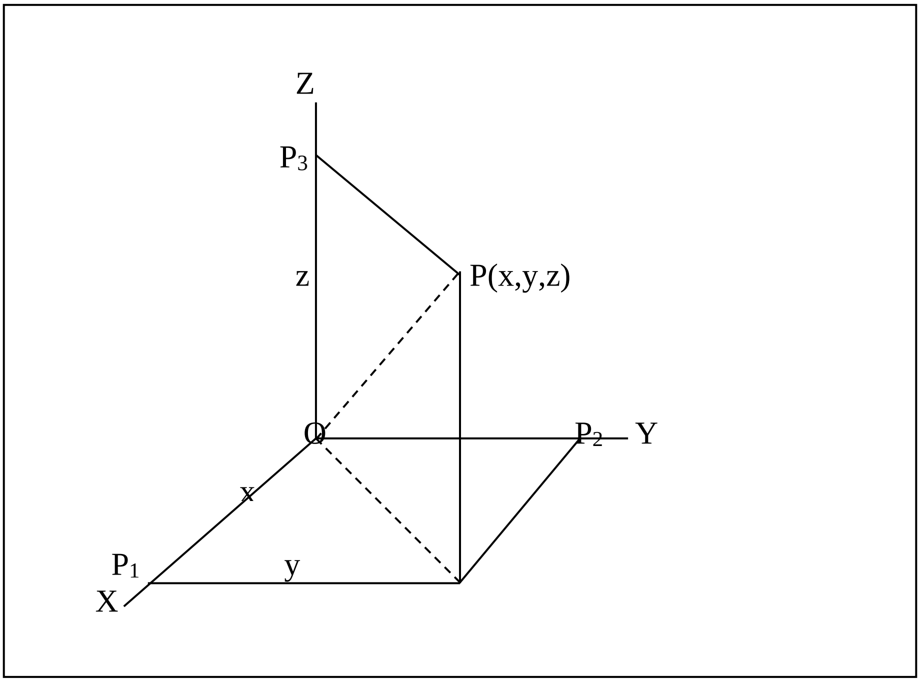
تُسمى المستقيمات OX, OY, OZ محاور الإحداثيات فإذا تخيلنا الرسم فإن محاور الإحداثيات الثلاث تقسّم الفضاء الثلاثي إلى ثمانية مناطق كما يلي:

المنطقة الأولى	$X > 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة الثانية	$X > 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة الثالثة	$X > 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الرابعة	$X > 0, Y < 0, Z < 0$
المنطقة الخامسة	$X < 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة السادسة	$X < 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة السابعة	$X < 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الثامنة	$X < 0, Y < 0, Z < 0$

وعلى ذلك فإن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط.

وبفرض P نقطة في الفضاء الثلاثي ، نوجد مساقطها على المحاور OX, OY, OZ ولتكن على الترتيب P_1, P_2, P_3 واضح أن النقط P_1, P_2, P_3 تتحدد تماما بالنقطة P وبالتالى فإن $x = OP_1, y = OP_2, z = OP_3$ وتُسمى الكميات x, y, z بإحداثيات النقطة P في الفضاء الثلاثي ويُرمز لها بالرمز P(x,y, z) ، وكذلك العكس صحيح أي أنه إذا عرفنا الإحداثيات (x, y, z) فإنه يمكن تحديد النقطة P التي لها هذه الإحداثيات تحديداً تاماً بمعنى أنه توجد نقطة واحدة فقط P إحداثياتها x, y, z .

انظر الشكل التالي:



ملاحظة: واضح أن محاور الإحداثيات OX, OY, OZ تكوّن في الفضاء ثلاث مستويات XOY, YOZ, ZOX تُسمى هذه المستويات بمستويات الإحداثيات ويُطلق على المستوى XOY بالمستوى $z = 0$ والمستوى YOZ بالمستوى $x = 0$ والمستوى ZOX بالمستوى $y = 0$.

بينما على المحور OX تكون $y = 0, z = 0$ وعلى المحور OY تكون $x = 0, z = 0$ وعلى المحور OZ تكون $x = 0, y = 0$.

وكما ذكرنا سابقا أن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط:

- ثلاث نقاط بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ
- وثلاث نقاط بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY, YOZ, ZOX
- ونقطة واحدة بالنسبة لنقطة الأصل (القطب) O .

مثال(1): أوجد النقط المتماثلة الوضع مع النقطة (a, b, c) بالنسبة:

1 – لمحاور الإحداثيات.

2– لمستويات الإحداثيات.

3 – لنقطة الأصل (القطب) O .

الحل:

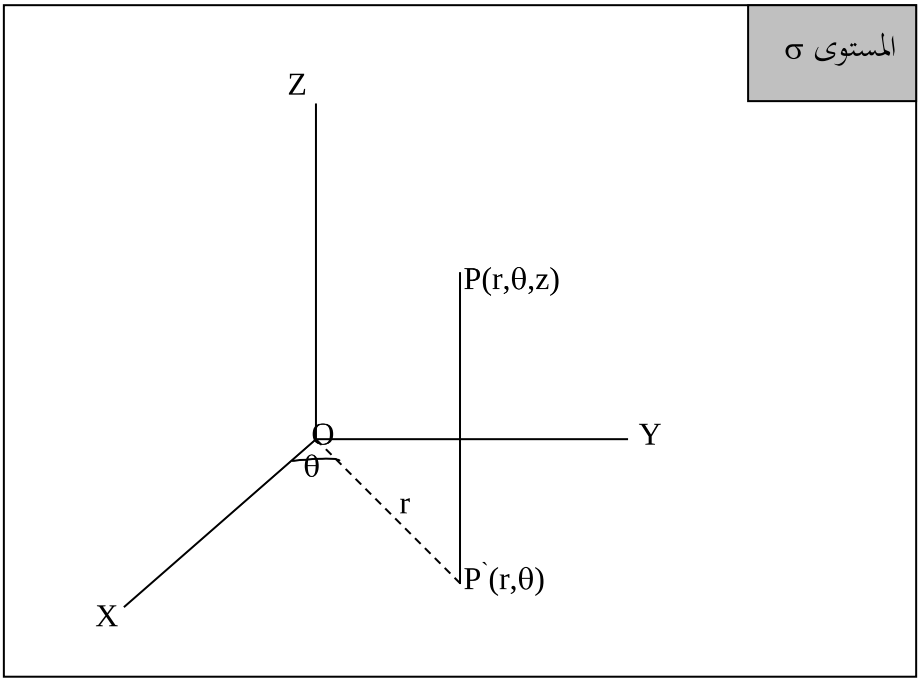
1– النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ تكون (a, -b, -c) , (-a, b, -c) , (-a, -b, c) على الترتيب.

2– النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY,YOZ,ZOX
تكون (a, b, -c) , (-a, b, c) , (a, -b, c) على الترتيب.

3– النقطة المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة للقطب O تكون (-a, -b, -c) .

- **الطريقة الثانية: الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z)**

نفرض أن لدينا مستوى ما وليكن σ محدد به مجموعة إحداثيات قطبية (قطب O وخط ابتدائي OX) وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي نحسب الكميات r, θ, z حيث r, θ الإحداثيات القطبية لمسقط P على المستوى σ والمقدار z هو بعد النقطة P عن المستوى σ

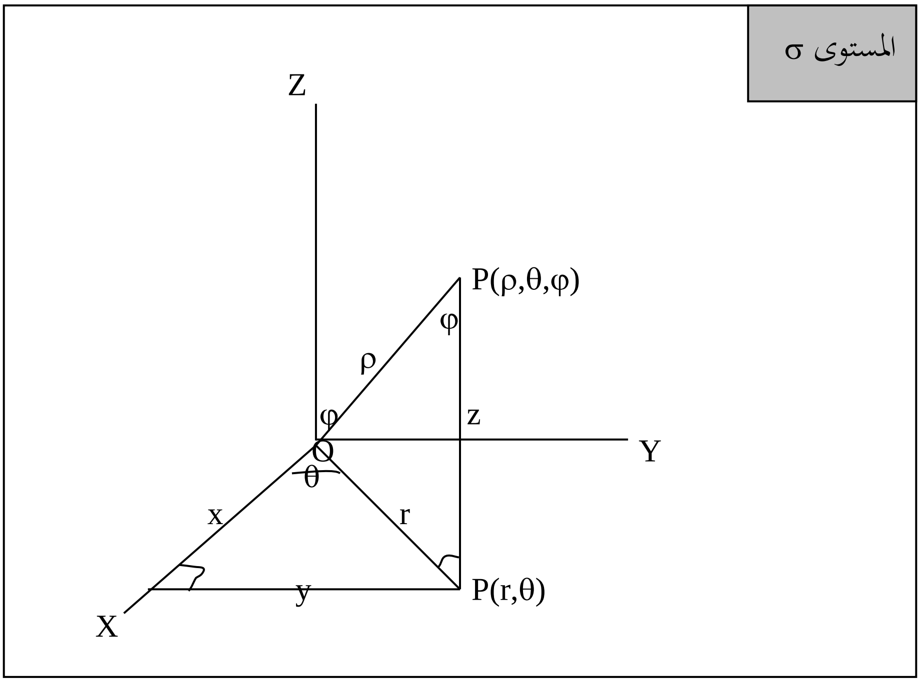
حيث $0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ -\infty < z < \infty$

وتُسمى الكميات الثلاثة r, θ, z بالإحداثيات الأسطوانية للنقطة P ويُرمز لها بالرمز $P(r, \theta, z)$.

تُفضل الإحداثيات الأسطوانية لدراسة السطوح في الفضاء الثلاثي وذلك عندما تكون مقاطع هذه السطوح بمستويات توازي المستوى σ عبارة عن منحنيات معادلاتها معطاة بالإحداثيات القطبية أنسب للدراسة عما لو كانت هذه المعادلات معطاة بالإحداثيات الكارتيزية.

▪ **الطريقة الثالثة: الإحداثيات الكريه** (ρ, θ, φ)

تتحدد هذه الإحداثيات أيضاً كما في حالة الإحداثيات الأسطوانية فإذا كان لدينا مستوى ما σ محدد عليه مجموعة إحداثيات قطبية (قطب O وخط ابتدائى OX) وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي يمكن أن تحدد تحديداً تاماً الكميات ρ, θ, φ

حيث $0 \le \rho < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

وتُسمى الكميات ρ,θ,φ بالإحداثيات الكريه للنقطة P ويرمز لها بالرمز $P(\rho, \theta, \varphi)$

والعكس صحيح أي أن الكميات ρ,θ,φ تحدد نقطة وحيدة في الفضاء الثلاثي.

▪ العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية والأسطوانية والكريه:

لتكن P نقطة ما في الفضاء الثلاثي فإن إحداثياتها الكارتيزية (x,y,z) وإحداثياتها الأسطوانية هي (r, θ, z) وإحداثياتها الكريه هي (ρ,θ,φ) ومن الرسم السابق يتضح أن:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (1).$$

$$r = \rho\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi \qquad (2).$$

العلاقة (1) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كرتيزية.

والعلاقة (2) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (1) نستنتج أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (3).$$

العلاقة (3) تحول الإحداثيات الكرتيزية إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (2) نستنتج أن:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}\,, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{r}{z} \qquad (4).$$

العلاقة (4) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كريه.

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi. \qquad (5).$$

العلاقة (5) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات كرتيزيه.

وبالتعويض من (3) في (4) نحصل على:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad (6).$$

العلاقة (6) تحول الإحداثيات الكرتيزيه إلى إحداثيات كريه.

مثال(2): إذا كانت $(1,-\sqrt{3},2)$ هي الإحداثيات الكرتيزية لنقطة في الفضاء الثلاثي. فأوجد إحداثياتها الأسطوانية والكريه.

الحل:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\theta=\tan^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1})=-\frac{\pi}{3}.$$

(حيث θ تقع في الربع الرابع من المستوىXOY).

$\therefore$ الإحداثيات الأسطوانية للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2,-\frac{\pi}{3},2)$.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+3+4}=2\sqrt{2},$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan^{-1}\frac{2}{2}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

$\therefore$ الإحداثيات الكريه للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

مثال(3): أوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

الحل:

نوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة $(\rho,\theta,\varphi) \equiv (2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta = (2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2}) = 1$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta = (2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$$

$$z = \rho \cos\varphi = (2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2$$

$\therefore$ الإحداثيات الكرتيزيه للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$ تكون $(1,-\sqrt{3},2)$.

مثال(4): حول المعادلة $\rho^2 (1+3 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) = 4$ إلى الصورة الكارتيزية.

الحل:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[1+3\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]=4$$

$$\therefore \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1.$$

تمارين

1 – أوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة المتماثلة بالنسبة للقطب مع كل من النقط الآتية:

$$P_1(2,\frac{-\pi}{2},0),\, P_2(1,\frac{-\pi}{3},1),\, P_3(3,\frac{\pi}{4},1)$$

2 – أوجد الإحداثيات الكريه للنقطة المتماثلة بالنسبة للمحور OX مع كل من النقط الآتية:

$$P_1(-1,\sqrt{3},-2)\ ,\, P_2(\sqrt{3},\, 1,\, 2).$$

3 – حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الأسطوانية ثم إلى الصورة الكريه

(i) $x^2 + y^2 = 6$.   (ii) $xy = z$.
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.   (iv) $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4$.
(v) $x^2 + y^2 = 8\,xy$.   (vi) $x^2 + y^2 - \frac{1}{2} z^2 = 0$.
(vii) $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$.

4 – حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية.

(i) $z \sin\theta = r$.   (ii) $z^2 \cos\theta = r^2$.
(iii) $r = a(1 - \cos\theta)$.   (iv) $y = z(1 + \cos\theta)$.
(v) $\rho = a \cot\varphi / \cos\varphi$.   (vi) $\rho = z\, a \sin\theta \sin\varphi$.

---

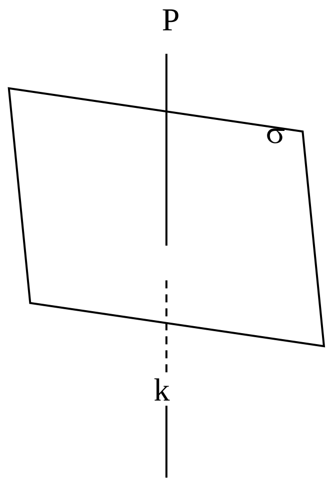
2 – المساقط:

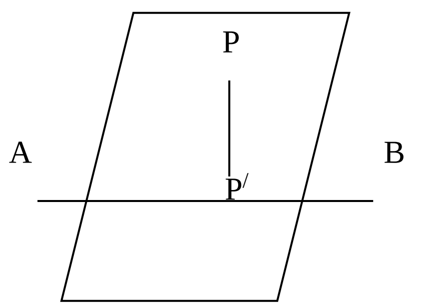
أ – مسقط نقطة في الفضاء الثلاثي:

1 – لإيجاد مسقط نقطة ما P في الفضاء الثلاثي على المستقيم AB نرسم المستوى σ المار بالنقطة P وعموديا على AB انظر (شكل1).

فتكون $P^{/}$ نقطة تقاطع المستوى σ مع AB هى مسقط P على AB.

2 – ولإيجاد مسقط نقطة P على المستوى σ نرسم من P مستقيم PK عمودياً على المستوى σ فتكون نقطة تقاطع العمود PK مع المستوى σ هى مسقط P على المستوى σ انظر (شكل2).



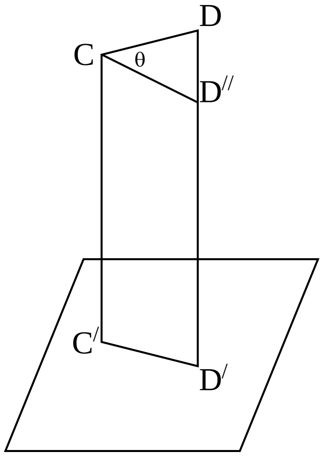


(شكل2) **(شكل1)**

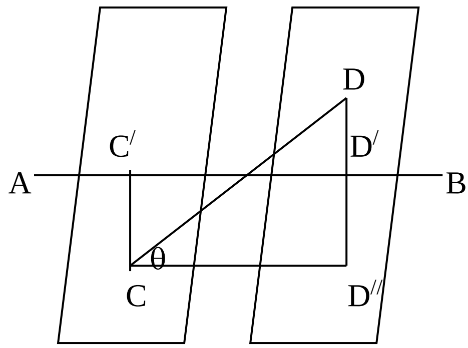
ب – مسقط مستقيم في الفضاء الثلاثي:

1- مسقط المستقيم CD على المستقيم AB هو الجزء $C^/D^/$ من المستقيم AB حيث $C^/, D^/$ هما مسقط C, D على المستقيم AB على الترتيب انظر (شكل3).

2- وبالمثل مسقط المستقيم CD على المستوى σ هو المستقيم $C^/D^/$ حيث $C^/,D^/$ هما مسقط كل من C, D على المستوى σ على الترتيب انظر (شكل4).



(شكل4)



(شكل3)

في (شكل3) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيمين الغير مستوين AB, CD فإن θ تقاس بالزاوية بين مستقيمين مرسومين من أي نقطة موازيين لـ AB, CD ولذلك نرسم من C مستقيم $CD^{//}$ // AB كما بالرسم.

$\therefore\ CD^{//} = C^/D^/ = CD\ \cos\theta.$ (1)

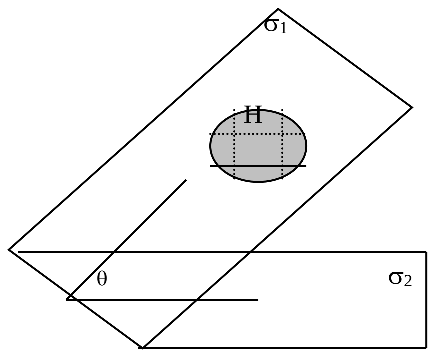
وفي (شكل4) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيم CD والمستوى σ أي بين المستقيم CD ومسقطه $C^/D^/$ ثم رسمنا $CD^{//}$ // $C^/D^/$ ويقطع $DD^/$ في $C^{//}$

$\therefore\ C^/D^/ = CD^{//} = CD\cos\theta.$ (2)

من (1),(2) يتضح أن طول مسقط المستقيم CD على المستقيم AB (على المستوى σ) يكون مساوياً لحاصل ضرب CD في جيب تمام الزاوية بين CD والمستقيم AB (أو المستوى σ).

ج – مسقط مساحة مستوية على مستوى في الفضاء الثلاثي:

نفرض في المستوى σ_1 مساحة مستوية H يراد إيجاد مسقطها على المستوى σ_2 ونفرض أن الزاوية بين المستويين σ_1, σ_2 هي θ تقسم المساحة H إلى عدد كبير من المستطيلات انظر (شكل5)



(شكل5)

وحيث إن مساحة المستطيل = حاصل ضرب طولى ضلعيه.

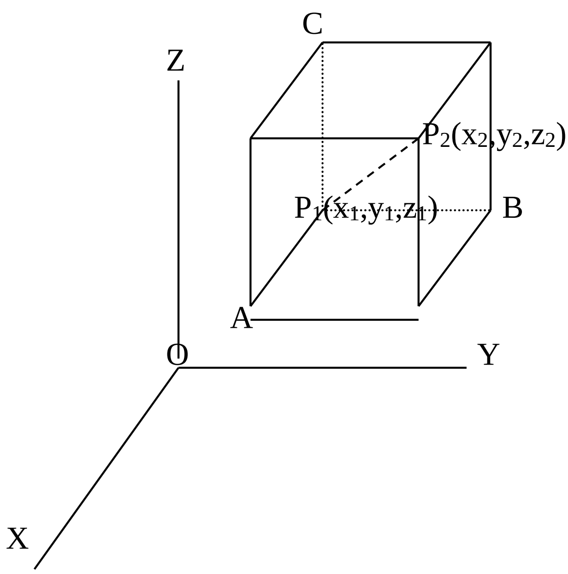
فإن مسقط مساحة كل مستطيل يكون مساوياً مساحة هذا المستطيل مضروبة في جيب تمام الزاوية θ ومن ثم يكون مسقط المساحة الكلية H مساوياً حاصل ضرب H في جيب تمام الزاوية θ أي أن:

$$H_{\sigma 2} = H \cos \theta.$$

حيث $H_{\sigma 2}$ هى مساحة مسقط H على المستوى σ_2.

3 – البعد بين نقطتين في الفضاء الثلاثي:

لتكن $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين في الفضاء الثلاثي والمطلوب إيجاد الطول P_1P_2 لذلك نرسم من P_1 ثلاث مستويات توازي مستويات الإحداثيات ،ثم نرسم أيضاً من P_2 ثلاثة مستويات توازي مستويات الإحداثيات فتكوّن هذه المستويات الست متوازي مستطيلات فيه P_1P_2 قطراً كما يتضح من الرسم التالي:



$$\therefore P_1A = x_2 - x_1 \ , \ P_1B = y_2 - y_1 \ , \ P_1C = z_2 - z_1 \ ,$$

$$\therefore \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{P_1B}^2 + \overline{P_1C}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\therefore P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

1- بُعد النقطة $P(x, y, z)$ عن نقطة الأصل O يكون $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2- وإذا كان P_1P_2 يوازي أحد المستويات فلن نتمكن من رسم متوازي المستطيلات المشار إليه ورغم ذلك يظل القانون صحيحاً كما يلي: نفرض مثلا أن P_1P_2 يوازي المستوى XOY عندئذ يكون $z_1=z_2$ وبالتالي يكون طول P_1P_2 هو:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

3- إذا كان P_1P_2 يوازي أحد المحاور مثلا $P_1P_2 \,//\, OX$ فإن $y_1=y_2, z_1=z_2$ وبالتالي يكون طول P_1P_2 يساوي $x_2- x_1$

4 – نقطة التقسيم:

لتكن $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتان معلومتان في الفضاء الثلاثي.

فإن إحداثيات النقطة P التى تقسم المسافة بين النقطتين P_1,P_2 من الداخل بحيث:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$ (نسبة التقسيم)

تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

- **ملاحظات ونتائج:**

1 – نقطة منتصف المسافة بين P_1,P_2 تكون $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

2 – إذا كانت نقطة التقسيم P بين P_1,P_2 تقسم من الخارج كامتداد للمسافة بين P_1,P_2 سواء من ناحيةP_2 أو من ناحيةP_1 بحيث (نسبة التقسيم) $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

فإن إحداثيات النقطة P تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right).$$

- **أمثلة:**

مثال(1): تحقق من أن المثلث الذى رؤوسه $P_1(1, -2, 1), P_2(3, -3, -1), P_3(4, 0, 3)$ يكون قائم الزاوية وأوجد مساحته.

الحل:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 4 + 1 + 4 = 9.$$
$$\overline{P_2P_3}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 1 + 9 + 16 = 26.$$
$$\overline{P_1P_3}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 9 + 4 + 4 = 17.$$
$$\therefore \overline{P_2P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_3}^2$$

أي أن المثلث $P_1P_2P_3$ يكون قائم الزاوية في P_1 .

$$\Delta\, P_1P_2P_3 = \tfrac{1}{2}\,(P_1P_2)\,(P_3P_1) = \frac{1}{2}(3)\left(\sqrt{17}\right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

مثال(2): أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تظل دائماً على بعدين متساويين من النقطتين $P_1(2, -1, 3), P_2(1, 0, 2)$.

الحل:

نفرض أن النقطة هي $P(x, y, z)$

$$\therefore \overline{PP_1} = \overline{PP_2} \Rightarrow \overline{PP_1}^2 = \overline{PP_2}^2.$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2.$$
$$2x - 2y + 2z - 9 = 0.$$

وهذه تمثل معادلة مستوى في الفضاء الثلاثي.

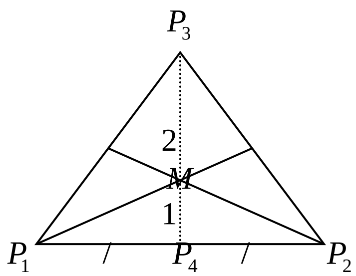
مثال(3): تحقق من أن احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:
$P_1(-1,0,1), P_2(-3,-2,-1), P_3(7,8,9)$.

تكون $(1,2,3)$

الحل:

نقطة تلاقي منصفات أضلاع المثلث (منصفات زوايا رؤوس المثلث) تكون هي المركز المتوسط للمثلث ، (وتُسمى أيضاً مركز ثقل المثلث) وهذه النقطة تقسم المستقيم الذي يصل بين أي رأس من رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل بنسبة تقسيم 2:1

انظر الشكل:



واضح أن النقطة M تكون هي المركز المتوسط للمثلث وهذه النقطة تقسم P_3P_4 من الداخل بنسبة تقسيم $\dfrac{2}{1}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}=\dfrac{\overline{P_3M}}{\overline{P_4M}}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1 y_2+\lambda_2 y_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1 z_2+\lambda_2 z_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right).$$

واحداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_1, P_2 تكون:

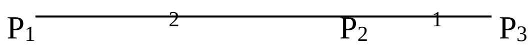
$$\left(\frac{(-1)+(-3)}{2},\frac{(0)+(-2)}{2},\frac{(1)+(-1)}{2}\right)=(-2,-1,0)\ ,$$

$$\therefore M\left(\frac{(2)(-2)+(1)(7)}{1+2},\frac{(2)(-1)+(1)(8)}{1+2},\frac{(2)(0)+(1)(9)}{1+2}\right)\equiv(1,2,3)$$

وهو المطلوب.

مثال(4): إذا قُسم المستقيم P_1P_2 من ناحية P_2 بالنقطة P_3 بحيث $\overline{P_1P_2} = 2\overline{P_2P_3}$ علماً بأن $P_1(-1,0,1), P_2(1,2,3)$ فأوجد إحداثيات P_3

الحل:



واضح من المعطيات أن النقطة $P_3(x,y,z)$ تقسم P_1P_2 من الخارج بنسبة $\dfrac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}} = \dfrac{3}{1}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الخارج تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)$$

$$\therefore x = \frac{3(1)-1(-1)}{3-1} = 2,\ \ y = \frac{3(2)-1(0)}{3-1} = 3,\ \ z = \frac{3(3)-1(1)}{3-1} = 4$$

وإذاً إحداثيات نقطة التقسيم تكون $P_3(2,3,4)$

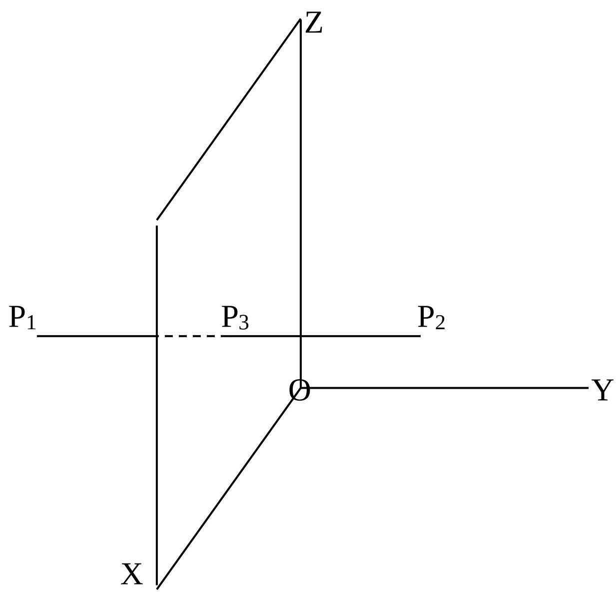
مثال(5): أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم P_1P_2 مع المستوى XOZ حيث:
$P_1(3,-1,5)\,,\,P_2(-1,3,-3)$.

الحل:

لتكن نقطة التقاطع P_3 وهي نقطة تقسيم من الداخل تقع على المستوى XOZ
ومن ثم تكون $P_3(x,0,z)$.

ونفرض أن P_3 تقسم المسافة بين P_1,P_2 من الداخل بنسبة $\lambda_1:\lambda_2$ أي أن $\dfrac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

كما يضح من الرسم التالي:



$$\therefore x=\frac{\lambda_1x_2+\lambda_2x_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,,\ 0=\frac{\lambda_1y_2+\lambda_2y_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,,\ z=\frac{\lambda_1z_2+\lambda_2z_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\therefore 0=\frac{\lambda_1(3)+\lambda_2(-1)}{\lambda_1+\lambda_2}\Rightarrow 3\lambda_1-\lambda_2=0\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x=\frac{1(-1)+3(3)}{4}=2\,,\ \ z=\frac{1(-3)+3(5)}{4}=3.$$

وإذاً احداثيات نقطة التقاطع تكون $P_3(2,0,3)$.

مثال(6): أوجد احداثيات النقطتين P_3, P_4 اللتين تقسمان المسافة بين النقطتين:
$P_1(1,5,3), P_2(7,2,9)$.
إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

الحل:

P_1 ——— P_3 ——— P_4 ——— P_2

واضح أن النقطة P_3 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\frac{1}{2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}}$.

وأن النقطة P_4 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\frac{2}{1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_2P_4}}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

$$\therefore P_3\left(\frac{(1)(7)+(2)(1)}{1+2}, \frac{(1)(2)+(2)(5)}{1+2}, \frac{(1)(9)+(2)(3)}{1+2}\right) = (3,4,5) \quad ,$$

$$\therefore P_4\left(\frac{(2)(7)+(1)(1)}{2+1}, \frac{(2)(2)+(1)(5)}{2+1}, \frac{(2)(9)+(1)(3)}{2+1}\right) = (5,3,7)$$

(**ملاحظة**: بعد حساب احداثيات P_3 يمكن حساب احداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_2, P_3).

تمارين

1 – تحقق من أن أبعاد النقطة P(x, y, z) عن محاور الاحداثيات OX, OY, OZ تكون هي $\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, \sqrt{x^2+y^2}$ على الترتيب.

2 – تحقق من أن (0 ,2 ,2), (0 ,6 ,6), (1 ,2 ,6) تكون رؤوس مثلث متساوي الساقين وأوجد مساحته.

3 – إذا كان $P_1P_2P_3$ مثلث متساوي الأضلاع وكانت $P_1(1, 2, 6)$, $P_2(1, 6, 2)$ فأوجد نقطة P_3 علما بأن الإحداثي y لها يساوي 2 ثم احسب مساحة المثلث.

4 – أوجد نقطة على محور السينات تكون متساوية البعد عن النقطتين (4, 3, 1), (-2, -6, 2).

5 – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تكون متساوية البعد عن النقطتين (6 ,1 ,8), (1 ,5 ,2).

6 – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة(3 ,2- ,1) مساوياً بعدها عن المحور OY.

7 – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة(2 ,1- ,1) دائماً مساوياً 3 وماذا يكون هذا المحل الهندسي؟ .

8– استنتج احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذى رؤوسه:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$.

9– احسب احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:

(0,7,-5), (-1,5,-6), (4,0,3).

10 – أوجد احداثيات النقطتين اللتين تقسمان المسافة بين النقطتين:

$P_1(3, -5, -2)$, $P_2(7, 1, -6)$

إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

---

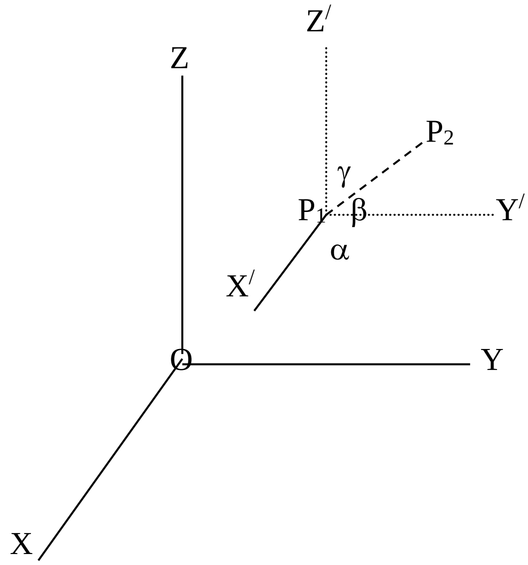
5 – زوايا الاتجاه:

اتفقنا على أن الزاوية بين مستقيمين فى الفضاء الثلاثي تُقاس بالزاوية بين أى مستقيمين فى نفس المستوى ومرسومان من أى نقطة ويوازيان المستقيمان المعطيان فى الفضاء الثلاثي.

ولذلك لإيجاد الزوايا التى يصنعها المستقيم P_1P_2 مع الاتجاهات الموجبة للمحاور OX, OY, OZ نرسم من P_1 المستقيمات P_1X', P_1Y', P_1Z' توازي محاور الإحداثيات فتكون الزوايا α,β,γ الموضحة بالرسم هى الزوايا التى يصنعها المستقيم P_1P_2 مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

تُسمى الزوايا α,β,γ بزوايا الاتجاه للمستقيم P_1P_2 وتُسمى جيوب تمام هذه الزوايا $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ بجيوب تمام الاتجاه للمستقيم P_1P_2.

انظر الشكل:



ومن المهم جداً عند حساب زوايا اتجاه المستقيم P_1P_2 أن نعتبر P_1P_2 متجهاً بدايته P_1 ونهايته P_2 ثم نحسب الزوايا α,β,γ بين الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات والاتجاه الموجب للمستقيم P_1P_2 باعتبار هذا الاتجاه من P_1 إلى P_2

ولذلك إذا كانت α,β,γ زوايا اتجاه المستقيم P_1P_2 فإن زوايا الاتجاه للمستقيم P_2P_1 تكون هي $\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$ على الترتيب ، وتكون جيوب تمام اتجاه P_2P_1 هي

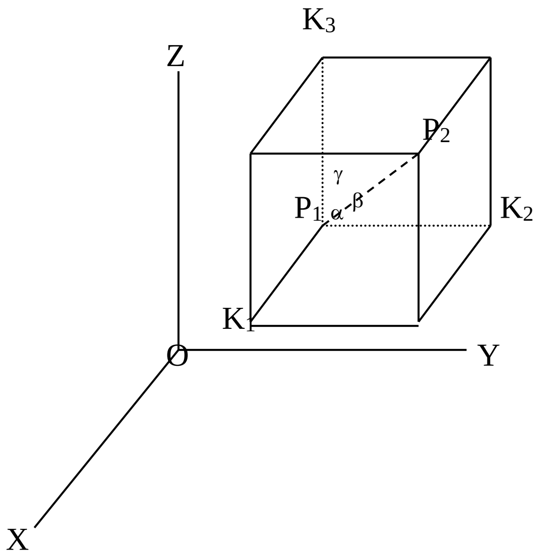
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha\ ,\ \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta\ ,\ \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma.$$

وواضح أن زوايا اتجاه المحور OX تكون هي $0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ وجيب تمام اتجاه المحور OX تكون $(1, 0, 0)$ وبالمثل تكون جيوب تمام اتجاه المحور OY هي $(0, 1, 0)$ وجيوب تمام اتجاه المحور OZ هي $(0, 0, 1)$

ومجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي من محاور الإحداثيات يكون مساوياً الواحد الصحيح.

نتيجة(1): مجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي مستقيم فى الفضاء الثلاثي يكون مساوياً الواحد الصحيح.

البرهان: ليكن P_1P_2 مستقيما زوايا اتجاهه هي α,β,γ نرسم متوازي مستطيلات بحيث يكون P_1P_2 قطراً فيه:



من الرسم يتضح ما يلي:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{P_1K_1}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\beta = \frac{\overline{P_1K_2}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\gamma = \frac{\overline{P_1K_3}}{\overline{P_1P_2}}.$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{\overline{P_1K_1}^2 + \overline{P_1K_2}^2 + \overline{P_1K_3}^2}{\overline{P_1P_2}^2} = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\overline{P_1P_2}^2} = 1.$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

وسوف نرمز اختصاراً لجيوب تمام اتجاه المستقيم فى الفضاء الثلاثي بالرموز L, M, N أي أن :

$L = \cos\alpha,\quad M = \cos\beta,\quad N = \cos\gamma.$

وسوف نقول أن الكميات الثلاثة a, b, c هي نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه L, M, N عندما وعندما فقط يتحقق الشرط:

$L : M : N = a : b : c$

نتيجة(2): إذا كانت a, b, c هى نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه هي L, M, N فإن:

$$L = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

البرهان: حيث إن $L : M : N = a : b : c$ فيكون:

$$L = \lambda a,\quad M = \lambda b,\quad N = \lambda c \qquad (*)$$

وبالتالي يكون:

$L^2 + M^2 + N^2 = \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2 = \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2).$

$$\therefore 1 = \lambda^2(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

وبالتعويض عن λ فى العلاقات (*) نحصل على

$$L = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

▪ **ملاحظات:**

1 – واضح أن قيم λ تُعطينا مجموعتين من جيوب تمام الاتجاه أحداهما L_1, M_1, N_1 والأخرى $-L_1, -M_1, -N_1$ وهذا أمر طبيعي حيث إنه إذا كانت a, b, c نسب اتجاه المستقيم P_1P_2 الذي جيوب تمام اتجاهه L_1, M_1, N_1

فإن نفس الكميات a, b, c تكون أيضاً نسب اتجاه المستقيم P_2P_1 الذي جيوب تمام اتجاهه $-L_1, -M_1, -N_1$.

2 – إذا كانت $P_2(x_2, y_2, z_2), P_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطتان فى الفضاء الثلاثي فإن نسب اتجاه OP_1 تكون هي x_1, y_1, z_1 ونسب اتجاه P_1P_2 هي $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$.

3 – إذا كانت المستقيمات متوازية فإنها تشترك فى زوايا الاتجاه وبالتالي يكون لها نفس نسب الاتجاه (جيوب تمام الاتجاه).

4 – لا يمكن أن تنعدم في آن واحد جميع جيوب تمام الاتجاه للمستقيم في الفضاء الثلاثي حيث $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

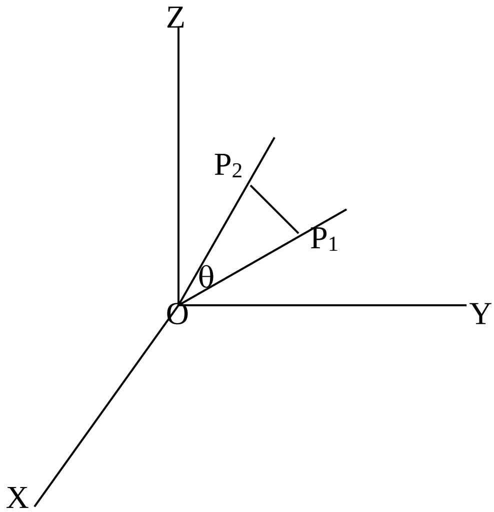
5 – إذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ فإن جيوب تمام اتجاه P_1P_2 تكون هي:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\overline{P_1P_2}}.$$

وكذلك جيوب تمام اتجاه P_2P_1 تكون هي $\frac{x_1 - x_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{y_1 - y_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{z_1 - z_2}{\overline{P_1P_2}}$.

6 – الزاوية بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي:

نفرض مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L_1, M_2, N_2 وجيوب تمام اتجاه الآخر L_2, M_2, N_2 نرسم من القطب O مستقيمين OP_1, OP_2 يوازيان المستقيمان المعلومان كما بالرسم:



فإن الزاوية θ بين المستقيمين تُعطى من النتيجة الآتية:

نتيجة(3): $\cos\theta = L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2$

البرهان: باعتبار أن $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتان من المثلث OP_1P_2 فيكون:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta .$$

وحيث إن:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 .$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta.$$

$$\therefore -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 = -2(OP_1)(OP_2)\cos\theta \quad ,$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{(OP_1)(OP_2)} = \left(\frac{x_1}{OP_1}\right)\left(\frac{x_2}{OP_2}\right) + \left(\frac{y_1}{OP_1}\right)\left(\frac{y_2}{OP_2}\right) + \left(\frac{z_1}{OP_1}\right)\left(\frac{z_2}{OP_2}\right)$$

$$= L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2 .$$

- **ملاحظات**:

1 – شرط تعامد مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L_1, M_1, N_1 وجيوب تمام اتجاه الآخر L_2, M_2, N_2 هو:

$$L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2 = 0.$$

2 – إذا كانت a_1, b_1, c_1 نسب اتجاه مستقيم ما وكانت a_2, b_2, c_2 نسب اتجاه مستقيم آخر فإن الزاوية بينهما θ تُعطى بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\ .$$

7 – نسب اتجاه العمودي على مستقيمين معلومين:

نفرض مستقيمين معلومين نسب اتجاه أحدهما a_1, b_1, c_1 ونسب اتجاه الأخر a_2, b_2, c_2

ويُراد إيجاد نسب اتجاه العمودي عليهما ولتكن a, b, c

واضح أنه يجب أن نشترط عدم توازي المستقيمين المعلومين أى أن:

$$a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$$

ومن شرط التعامد يكون:

$$a_1a + b_1b + c_1c = 0,$$
$$a_2a + b_2 b + c_2c = 0.$$

وهاتان العلاقتان كافيتان لإيجاد النسبة بين الكميات a, b, c .

ومن شرط عدم التوازي نستنتج أنه على الأقل أحد المحددات:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

يكون مختلفاً عن الصفر وليكن المحدد الأول هو المختلف عن الصفر فبالتالي يكون:

$$a_1a + b_1b = - c_1c.$$
$$a_2a + b_2b = - c_2c.$$

$$\therefore a = \frac{\begin{vmatrix} -c_1c & b_1 \\ -c_2c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -c\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

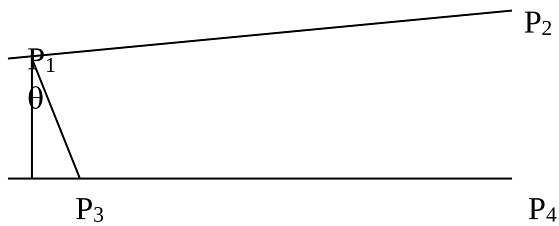
وبالمثل يمكن إثبات أن $b = c\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ وباعتبار $c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ينتج:

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

وهذه هي نسب الاتجاه العمودي على المستقيمين المعلومين.

8 – طول أقصر بُعد بين مستقيمين معلومين غير متقاطعين في الفضاء الثلاثي:

طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين P_1P_2, P_3P_4 يساوي طول مسقط المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين على العمودي عليهما ، ومن ثم يساوي حاصل ضرب طول المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين في جيب تمام الزاوية بين هذا المستقيم الواصل وبين المستقيم العمودي على المستقيمين(انظر الشكل):



وإذا كان K هو طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين P_1P_2, P_3P_4 فإن:

$$K = \left|\overline{P_1P}_3 \cos\theta\right| = \left|\overline{P_1P_3}(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2)\right|$$

حيث L_1, M_1, N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_3 (أو جيوب تمام اتجاه P_2P_4) ،

وحيث L_2, M_2, N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

- **أمثلة:**

مثال(1): في أى الحالات الآتية يوجد مستقيم في الفضاء الثلاثي زوايا اتجاهه α,β,γ ؟

(i) $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

(ii) $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

الحل:

الشرط اللازم لكي تكون α,β,γ عبارة عن زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي هو:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

(i) $\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2=1$

وإذاً α,β,γ تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{4}\neq 1$

وإذاً α,β,γ لا تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

مثال(2): أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم المار بالنقطتين $P_1(1,-2,3), P_2(2,-3,5)$

الحل:

لتكن نسب اتجاه المستقيم P_1P_2 هي a,b,c

$\therefore a=2-1=1\,,\ b=-3-(-2)=-1\,,\ c=5-3=2$

وبالتالي تكون جيوب تمام اتجاه المستقيم P_1P_2 هي:

$$L=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

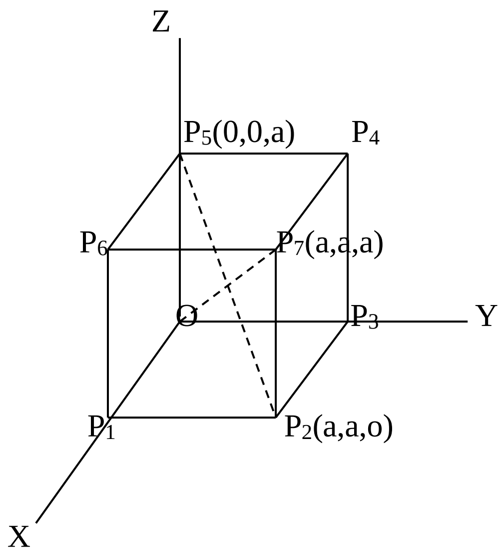
$$M=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$N=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

مثال(3): أوجد الزاوية بين قطرين من أقطار المكعب.

الحل:

نفرض أن طول ضلع المكعب a وبأخذ ثلاثة أوجه متعامدة من المكعب منطبقة على مستويات الإحداثيات كما بالرسم:



وبالتالي تكون أقطار المكعب هي كالتالي $P_1P_4, P_3P_6, P_2P_5, OP_7$

ونوجد الزاوية بين القطرين OP_7, P_2P_5 كما يلي:

نسب اتجاه OP_7 هي a, a, a ،ونسب اتجاه P_2P_5 هي $-a, -a, a$

وبالتالي الزاوية بين قطري المكعب تُعطى من:

$$\theta = \cos^{-1}[\pm \frac{a(-a)+a(-a)+a(a)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\ \sqrt{a^2+a^2+a^2}}] = \cos^{-1}[\pm \frac{-a^2}{3a^2}] = \cos^{-1}[\mp \frac{1}{3}].$$

وواضح أنه نحصل على قيمتين(موجبة وسالبة)إحداهما للزاوية الحادة والثانية للمنفرجة.

مثال(4): أوجد جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقط:

$P_1(2, 3, -2), P_2(1, -1, -1), P_3(0, 1, 2)$

الحل:

المستقيم العمودي على المستوى المار بالنقط المعطاه يكون هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_1P_3 حيث أنهما يقعا في نفس المستوى المار بالنقط P_1,P_2,P_3

ولتكن نسب اتجاه هذا العمودي هي a,b,c ونسب اتجاه P_1P_2 هي a_1,b_1,c_1

ونسب اتجاه P_1P_3 هي a_2,b_2,c_2

$$\therefore a_1 = 1-2 = -1 \,,\, b_1 = -1-3 = -4 \,,\, c_1 = -1-(-2) = 1 \quad ,$$

$$a_2 = 0-2 = -2 \,,\, b_2 = 1-3 = -2 \,,\, c_2 = 2-(-2) = 4 \quad ,$$

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

$$b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى تكون:

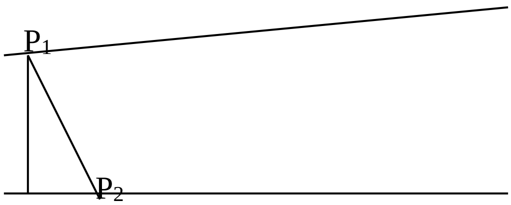
$$L = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-14}{\sqrt{196+4+36}} = \frac{-14}{\sqrt{236}} \,,$$

$$M = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{236}} \,,$$

$$N = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-6}{\sqrt{236}}.$$

مثال(5): أوجد طول أقصر بُعد بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي نسب اتجاه أحدهما $3,2,1$ ويمر بالنقطة $(3,4,5)$ ونسب اتجاه الأخر $3,6,-2$ ويمر بالنقطة $(4,6,3)$

الحل: لتكن $P_1(3,4,5)\ ,\ P_2(4,6,3)$



طول أقصر بُعد K بين المستقيمين المعلومين يُعطى من العلاقة:

$$K=\left|\overline{P_1P_2}(L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2)\right|.$$

حيث L_1,M_1,N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_2 ، وحيث L_2,M_2,N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(4-3)^2+(6-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3\ ,$$

$$\therefore L_1=\frac{4-3}{3}=\frac{1}{3}\ ,\ M_1=\frac{6-4}{3}=\frac{2}{3}\ ,\ N_1=\frac{3-5}{3}=\frac{-2}{3}\ ,$$

ولتكن نسب اتجاه العمودي على المستقيمين هي a,b,c

ولتكن $a_1,b_1,c_1\equiv 3,2,1\ ,\ a_2,b_2,c_2\equiv 3,6,-2$ وإذاً:

$$a=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-10\ ,\ b=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=9\ ,$$

$$c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=12\,,$$

$$L_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{-10}{\sqrt{100+81+144}}=\frac{-10}{\sqrt{325}}=\frac{-10}{\sqrt{(13)(25)}}=\frac{-10}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$M_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9}{\sqrt{325}}=\frac{9}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$N_2=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{12}{\sqrt{325}}=\frac{12}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$\therefore K=\left|\overline{P_1P_2}\left(L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2\right)\right|$$

$$=\left|3\left[(\frac{1}{3})(\frac{-10}{5\sqrt{13}})+(\frac{2}{3})(\frac{9}{5\sqrt{13}})+(\frac{-2}{3})(\frac{12}{5\sqrt{13}})\right]\right|.$$

$$=\left|\frac{-16}{5\sqrt{13}}\right|=\frac{16}{5\sqrt{13}}.$$

مثال(6): أوجد طول أقصر بعد بين المستقيمين $P_1P_2\,,P_3P_4$ حيث:

$P_1(-4,-1,2)\ ,\ P_2(2,-3,5)\ ,\ P_3(0,3,-5)\ ,\ P_4(2,4,-4)$.

الحل:

لتكن نسب اتجاه P_1P_2 هي a_1,b_1,c_1 ونسب اتجاه P_3P_4 هي a_2,b_2,c_2

ونسب اتجاه العمودي على $P_1P_2\,,P_3P_4$ هي a,b,c

$$\therefore a_1=2-(-4)=6\ ,\ b_1=-3-(-1)=-2\ ,\ c_1=5-2=3\ ,$$

$$a_2=2-0=2\ ,\ b_2=4-3=1\ ,\ c_2=-4-(-5)=1\ ,$$

$$a=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

$$b=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=10$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين تكون:

$$L_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{-5}{\sqrt{25+0+100}}=\frac{-5}{5\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}\ ,$$

$$M_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{0}{5\sqrt{5}}=0\ ,$$

$$N_2=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,$$

$$\overline{P_1P_3}=\sqrt{16+16+49}=\sqrt{81}=9\ ,$$

وجيوب تمام اتجاه P_1P_3 تكون:

$$L_1 = \frac{0-(-4)}{9} = \frac{4}{9}\ ,\ M_1 = \frac{3-(-1)}{9} = \frac{4}{9}\ ,\ N_1 = \frac{-5-2}{9} = \frac{-7}{9}\ ,$$

وإذاً طول أقصر بُعد بين المستقيمين يُعطى من العلاقة:

$$\left|\overline{P_1P_3}\left(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2\right)\right| = \left|9\left[(\frac{4}{9})(\frac{-1}{\sqrt{5}}) + (\frac{4}{9})(0) + (\frac{-7}{9})(\frac{2}{\sqrt{5}})\right]\right|$$

$$= \left|\frac{-18}{\sqrt{5}}\right| = \frac{18}{\sqrt{5}}.$$

تمارين

1- إذا كانت $P_1(3, 4, 5)$, $P_2(4, 6, 3)$, $P_3(-1, 2, 4)$, $P_4(1, 0, 5)$
فأوجد طول مسقط المستقيم P_1P_2 على المستقيم P_3P_4.

2- أوجد زوايا المثلث الذي رؤوسه $(-1, 5, -1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 3, -2)$.

3- بدون حساب أطوال أضلاع المثلث الذي رؤوسه النقط:
$(1, 2, 6), (1, 6, 2), (4, 4, 0)$.
تحقق من أنه قائم الزاوية.

4- إذا كانت نسب اتجاه أضلاع مثلث هي $\{0,4,-4\}$, $\{-4,4,0\}$, $\{-4,0,4\}$.
فتحقق من أن المثلث يكون متساوي الأضلاع.

5- عيّن قيمة λ التي تجعل المستقيم P_1P_2 عمودياً على المستقيم P_3P_4 علما بأن:
$P_1(-\lambda,-1,2)$, $P_2(0,2,4)$, $P_3(1,\lambda,1)$, $P_4(\lambda + 1,0,2)$.

6- مستقيم نسب اتجاهه 1 ,2- ,2 ويمر بالنقطة $(1, 6, -4)$
أوجد نقطة تقاطعه مع مستويات الإحداثيات.

7- أوجد طول أقصر بعد بين مستقيمين أحدهما نسب اتجاهه 1 ,2- ,2 ويمر بالنقطة $(1, 5, 2)$ والآخر نسب اتجاهه 2- ,3 ,6 ويمر بالنقطة $(6, 2, -2)$.

8- أوجد طول أقصر بعد بين المستقيمين P_1P_2, P_3P_4 حيث:
$P_1(0, 2, 4)$, $P_2(3, 4, 5)$, $P_3(1, 0, 5)$, $P_4(4, 6, 3)$.

الباب الثانى

المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي

أولاً – المستوى في الفضاء الثلاثي:

1- تعريف المستوى:

المستوى هو السطح الذى إذا أُخذت عليه نقطتان P_1, P_2 فإن جميع نقط المستقيم P_1P_2 تكون واقعة على السطح أيضاً.

نظرية: أي معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z تدل على مستوى ، والعكس صحيح بمعنى أن معادلة أي مستوى تكون من الدرجة الأولى في x, y, z.

البرهان: نفرض أن معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z بالصورة العامة:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

ولتكن $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين على المحل الهندسي للمعادلة (1) إذاً:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

ولتكن P نقطة ما على المستقيم P_1P_2 بحيث $\frac{P_1P}{P_2P} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P(x, y, z) \equiv \left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right).$$

وباستخدام العلاقة (2) نجد أن النقطة P تحقق المعادلة (1) وعلى ذلك وطبقا للتعريف فإن المعادلة (1) تمثل مستوى.

ولإثبات العكس نفرض مستوى يمر بنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ونفرض أن P_0K عمودي على المستوى وأن نسب اتجاه العمودي هي a,b,c

ولإيجاد معادلة المستوى نفرض $P(x, y, z)$ أي نقطة عليه.واضح أن المستوى يكون هو المحل الهندسي للنقطة P التى تحقق الشرط $P_0P \perp P_0K$.

وحيث إن نسب اتجاه P_0P تكون $(x – x_0), (y – y_0), (z – z_0)$.

$$\therefore a(x – x_0) + b(y – y_0) + c(z – z_0) = 0 . \qquad (3)$$

$$\therefore ax + by + cz – (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

وواضح أن (3) معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتتحقق فقط بجميع نقط المستوى وبالتالي فهي معادلة المستوى.

- **ملاحظات ونتائج**:

1- المعادلة (1) تشتمل على أربعة ثوابت يمكن اختزالها إلى ثلاثة ثوابت مستقلة ، وهذا يعني أن المستوى في الفضاء الثلاثي يتحدد بثلاث شروط مستقلة.

2- معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

3- شرط توازي المستقيم الذي نسب اتجاهه a_1, b_1, c_1 (جيوب تمام اتجاهه L,M,N) للمستوى $ax+by+cz+d=0$ هو: $aa_1+bb_1+cc_1=0$ ($aL+bM+cN=0$).

4- الزاوية θ بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تكون:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right).$$

5- شرط توازي المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$

والمسافة بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تساوي:

$$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

6- شرط تعامد المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

7- إذا كانت $\{a_1,b_1,c_1\},\{a_2,b_2,c_2\}$ نسب اتجاه مستقيمين معلومين ، وكانت $\{a,b,c\}$ نسب اتجاه العمودي عليهما ومن شرط التعامد يكون:

$a_1a+b_1b+c_1c=0$,
$a_2a+b_2b+c_2c=0$.

ويكون: $a=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad b=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\quad c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

- **أمثلة:**

مثال(1): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (0, 1, -1) ويكون عمودياً على المستقيم P_1P_2 حيث $P_1(1, -1, 2), P_2(3, -4, 1)$.

الحل:

معادلة المستوى يمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

ونسب اتجاه العمودي P_1P_2 تكون:

$$a = 3 - 1 = 2,\ \ b = -4 + 1 = -3,\ \ c = 1 - 2 = -1.$$

فتكون معادلة المستوى المطلوبة:

$$2(x-0)+(-3)(y-1)+(-1)(z-(-1)) = 0.$$
$$\therefore 2x-3y-z+2=0.$$

مثال(2): أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 حيث:

$P_1(0, 1, 0), P_2(2, 0, 1), P_3(3, 0, 0), P_4(0, 2, 2).$

الحل:

حيث إن المستوى يمر بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 فيكون العمودي على المستوى هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_3P_4

ونسب اتجاه P_1P_2 تكون 2,-1,1

ونسب اتجاه P_3P_4 تكون –3, 2, 2

وبالتالي تكون نسب اتجاه العمودي عليهما (العمودي على المستوى) هي:

$$a = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ \ b = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7,\ \ c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب بمعلومية نسب اتجاه العمودي عليه 1 ,7- , 4 – ويمر بالنقطة $P_1(0, 1, 0)$ هي:

$$-4(x-0) - 7(y-1) + 1(z-0) = 0.$$
$$\therefore 4x + 7y - z - 7 = 0.$$

مثال(3): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ويكون عمودياً على المستويين $x + 2y + z = 0$,$2x - y + 3z - 1 = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ونسب اتجاه العمودي عليه a,b,c تكون:

$$a(x - 1) + b(y + 1) + c(z - 5) = 0.$$

وحيث إن المستوى عمودي على كل من المستويين المعطيين فيكون العمودي على المستوى المطلوب موازياً لكل من المستويين المعطيين وشرط ذلك هو:

$$2a - b + 3c = 0.$$
$$a + 2b + c = 0.$$
$$\therefore a = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7,\ \ b = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\ \ c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

وعلى ذلك تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$-7(x - 1) + (y + 1) + 5(z - 5) = 0.$$
$$\therefore -7x + y + 5z - 17 = 0.$$

2 – صور خاصة لمعادلة المستوى:

أ – معادلة المستوى المار بثلاث نقط معلومة:

نفرض النقط الثلاث $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$

معادلة أي مستوى يمر بالنقطة P_1 تكون بالصورة :

$$a(x- x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطتين P_2, P_3 فنحصل على:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$
$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0.$$

وبحذف المعاملات الثلاثة a, b, c بين المعادلات نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

وهذه هي معادلة المستوى المار بالنقط P_1, P_2, P_3 (حيث إنها معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتحققها النقط P_1, P_2, P_3).

نتيجة: شرط وقوع النقط:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$

في مستوى واحد هو:

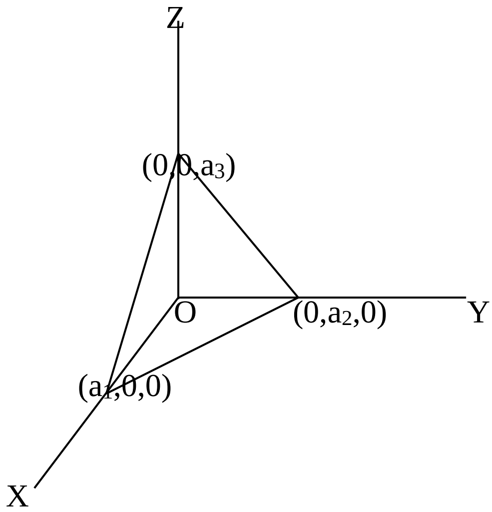
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

ب – معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من محاور الإحداثيات:

نفرض أن الأجزاء المقطوعة من المحاور هي a_1, a_2, a_3 أي أن المستوى يمر بالنقط:

$(a_1,0,0), (0,a_2,0), (0,0,a_3)$

كما بالرسم:



وبذلك تكون معادلة المستوى هي:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-0 & z-0 \\ 0-a_1 & a_2-0 & 0-0 \\ 0-a_1 & 0-0 & a_3-0 \end{vmatrix} = 0.$$

أي أن:

$$a_2a_3x + a_1a_3y + a_1a_2z = a_1a_2a_3 .$$

فإذا كانت $a_1a_2a_3 \neq 0$ فإن المعادلة السابقة تصبح على الصورة:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

1- إذا كان أحد الأجزاء a_1, a_2, a_3 لا يساوى الصفر ، وكان الجزءان الآخران مساويان للصفر ، وبالتالي يمر المستوى بنقطة الأصل ومعادلة المستويات التي تمر بنقطة الأصل تكون على الصورة:

$$ax + by + cz = 0.$$

2- إذا وازى المستوى أحد المحاور وليكن المحور OX فإن $a_1 \to \infty$ وعندئذ $\frac{x}{a_1} \to 0$ لجميع قيم x المحدودة ، ومن ثم تصبح المعادلة السابقة على الصورة:

$$\frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1.$$

وهذه المعادلة تمثل مستوى يوازي المحورOX ويقطع المحاور OY,OZ بأجزاء a_2, a_3 على الترتيب ، وبالمثل تكون المعادلتين:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{z}{a_3} = 1, \qquad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} = 1.$$

تمثلان معادلة مستوى يوازي المحور OY ويقطع المحاور OX,OZ بأجزاء a_1, a_3 على الترتيب ، ومعادلة مستوى يوازي المحور OZ ويقطع المحاور OX,OY بأجزاء a_1, a_2 على الترتيب.

3- المعادلة $x = a_1$ تمثل في الفضاء الثلاثي مستوى يوازي المستوى YOZ ويقطع المحور OX في جزء طوله a_1.

ج – معادلة المستوى في الصورة العمودية:

نفرض أن R طول العمود النازل من نقطة الأصل على المستوى وأن L, M, N جيوب تمام اتجاه هذا العمود ، وبفرض أن a_1, a_2, a_3 هي الأجزاء التى يقطعها المستوى من المحاور OX,OY,OZ (انظر الرسم السابق) نجد أن:

$$L = \frac{R}{a_1},\ M = \frac{R}{a_2},\ N = \frac{R}{a_3}.$$

وبالتعويض في المعادلة $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1$ عن قيم a_1, a_2, a_3 نحصل على:

$$\frac{\mathrm{Lx}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{My}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{Nz}}{\mathrm{R}} = 1.$$

أي أن:

$$\mathrm{Lx} + \mathrm{My} + \mathrm{Nz} = \mathrm{R}.$$

وهذه هي معادلة المستوى في الصورة العمودية حيث $0 < R$.

- **ملاحظات ونتائج:**

1- إذا وقعت نقطة الأصل في منتصف البعد بين مستويين متوازيين وكانت معادلة أحدهما في الصورة العمودية Lx + My + Nz = R فإن المستوى الأخر يُعطى بالمعادلة Lx - My - Nz = R

2- الصورة العمودية لمعادلة المستوى $ax + by + cz + d = 0$ تكون :

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

ويكون طول العمود النازل من نقطة الأصل على هذا المستوى مساوياً:

$$\left|\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

مثال(4): أوجد أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور بمستوى يمر بالنقطة (1, -1, 1) ، ويوازي المستوى $3x - 4y + 5z + 2 = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يوازي المستوى المعطى تكون بالصورة:

$$3x - 4y - 5z + d = 0.$$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطة (1, -1, 1) فإن $d = -12$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$3x - 4y + 5z - 12 = 0.$$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{\frac{12}{5}} = 1.$$

وبالتالي تكون أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور هي $4, -3, \frac{12}{5}$.

مثال(5): أوجد الصورة العمودية للمستوى الذى يقطع محاور الاحداثيات بأجزاء أطوالها على الترتيب هي 1- ,1 ,2-

الحل:

معادلة المستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة تكون:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-1} = 1.$$

$$\therefore x - 2y + 2z = -2.$$

وبذلك تكون الصورة العمودية للمستوى هي:

$$\frac{x - 2y + 2z}{\pm\sqrt{1+4+4}} = \frac{-2}{\pm\sqrt{1+4+4}}.$$

وباختيار الإشارة السالبة ليكون الطرف الأيمن موجب:

$$\therefore -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}.$$

أي أن جيوب تمام اتجاه وطول العمود النازل على المستوى من نقطة الأصل تكون هي على الترتيب: $L = -\frac{1}{3}, M = \frac{2}{3}, N = \frac{2}{3}, R = \frac{2}{3}$.

3 ـ طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة:

نفرض أن المستوى $Lx + My + Nz = R$ حيث $R > 0$ مُعطى بالصورة العمودية ، ونفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ النقطة المعلومة.

فإذا كانت $P_0(x_0, y_0, z_0)$ إحدى نقط المستوى فإن طول العمود النازل من النقطة P على المستوى وليكن R_1 يكون مساوياً للقيمة العددية لمسقط P_0P_1 على العمود على المستوى أي أن:

$$R_1 = \pm[L(x_1 - x_0) + M(y_1 - y_0) + N(z_1 - z_0)] = \pm(Lx_1 + My_1 + Nz_1 - R).$$

نظرية: الدالة $ax + by + cz + d$ تكون موجبة لجميع النقط الواقعة على أحد جانبي المستوى $ax + by + cz + d = 0$ وتكون سالبة لجميع النقط في الجانب الآخر.

البرهان: نفرض النقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ تقعان على جانبي المستوى: $ax + by + cz + d = 0$.

ونفرض أن P_1P_2 يقطع المستوى في نقطة P بحيث $\frac{P_1P}{P_2P} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)..$$

وحيث إن P تقع على المستوى فإنها تحقق معادلته أي أن:

$$a(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) + b(\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1) + c(\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1) + d(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$
$$\therefore \lambda_1(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) + \lambda_2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = 0.$$
$$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}\right).$$

ولكي تكون النسبة $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ موجبة ، لابد أن تكون الكميتان:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d \;,\; ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

مختلفان في الإشارة.

مثال(6): أوجد طولي العمودين النازلين من النقطتين (1,0,2) ,(0,0,0) على المستوى $x-2y+2z-4=0$ ووضح أن هاتين النقطتين تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى.

الحل:

نفرض أن R_0, R_1 هما أطوال العمودين من النقطتين (1, 0, 2) ,(0, 0, 0) على المستوى

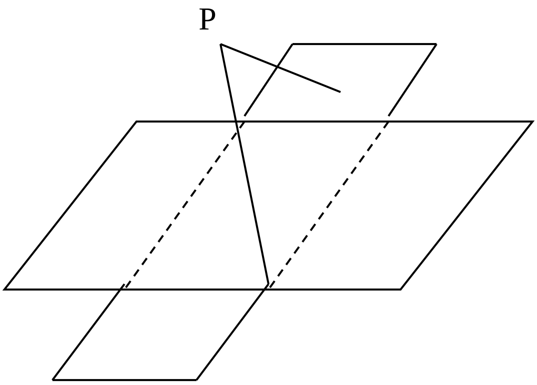
$$\therefore R_o = \mp\frac{1(0)-2(0)+2(0)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp\frac{-4}{3} = \frac{4}{3},$$

$$R_1 = \mp\frac{1(1)-2(0)+2(2)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

وواضح أن R_o, R_1 مختلفتين في الإشارة أي أن النقطتين (1, 0, 2) ,(0, 0, 0) تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى المُعطى.

4 – المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \ , \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين.
المستوى المنصف للزاوية الزوجية بين هذين المستويين يكون هو المحل الهندسي لنقطة في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى الأول يساوي بعدها عن المستوى الثاني. (انظر الشكل):



أي أنه إذا كانت $P(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة على المستوى المنصف فإن:

$$\frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

أي أن النقطة $P(\alpha,\beta,\gamma)$ دائماً تحقق إحدى المعادلتين:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2x+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

وهما معادلتى المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعلومين.
وواضح أن هذين المستويين يكونا متعامدان لأن نسب اتجاه أحدهما هي:

$$a_1k_2-a_2k_1 \ , \ b_1k_2-b_2k_1 \ , \ c_1k_2-c_2k_1.$$

ونسب اتجاه الآخر هي:

$$a_1k_2+a_2k_1 \ , \ b_1k_2+b_2k_1 \ , \ c_1k_2+c_2k_1.$$

حيث $k_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}, \ \ k_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

مثال(7): أوجد معادلتي المستويين المنصفين للزاوية الزوجية بين المستويين:

$x + 2y - 2z + 3 = 0\ ,\quad 2x - y + 2z = 4.$

الحل:

معادلتي المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعطيين تُعطيان من:

$$\frac{x+2y-2z+3}{\sqrt{1+4+4}} = \pm \frac{2x-y+2z-4}{\sqrt{4+1+4}}\ .$$

وإذاً المعادلتين تكونا $x - 3y + 4z - 7 = 0\ ,\ 3x + y - 1 = 0$

5 – معادلة أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\ ,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين وغير متوازيين.

معادلة المستوى المار بخط تقاطعهما تكون على الصورة:

$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$

حيث λ_1,λ_2 ثابتان لا يساويان الصفر في آن واحد.

مثال(8): أوجد المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$x + y + z - 3 = 0\ ,\quad x - 2y + 3z + 4 = 0.$

ويكون عمودياً على المستوى الثاني.

الحل:

معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين تكون على الصورة:

$\lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0. \qquad (*)$

$\therefore (\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (\lambda_1 - 2\, \lambda_2)\, y + (\lambda_1 + 3\, \lambda_2)\, z + (-3\lambda_1 + 4\lambda_2) = 0.$

ولكي يكون هذا المستوى عمودياً على المستوى $x - 2y + 3z + 4 = 0$

يجب أن يتحقق الشرط:

$(\lambda_1 + \lambda_2) -2\, (\lambda_1 - 2\lambda_2) + 3\, (\lambda_1 + 3\lambda_2) = 0.$

وبالتالي نحصل على $\lambda_1 = - 7\lambda_2$ ، وبالتعويض في المعادلة (*) نحصل على:

$-7\lambda_2(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0.$

وبوضع $\lambda_2 = 1$ تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$6x + 9y + 4z - 25 = 0.$

مثال(9): أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$3x + 2y - 5z + 1 = 0\ ,\quad x - 5y - z - 3 = 0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الأول.

الحل:

معادلة المستوى المطلوب تكون على الصورة:

$$\lambda_1(3x + 2y - 5z + 1) + \lambda_2(x - 5y - z - 3) = 0.$$
$$\therefore (3\lambda_1 + \lambda_2)\ x + (2\lambda_1 - 5\lambda_2)\ y + (-5\lambda_1 - \lambda_2)\ z + (\lambda_1 - 3\lambda_2) = 0.$$

ومن شرط التعامد نحصل على:

$$3(3\lambda_1 + \lambda_2) + 2(2\lambda_1 - 5\lambda_2) - 5\ (-5\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$
$$\therefore\ 38\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 19\lambda_1.$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\lambda_1[(3 + 18)\ x + (2 - 72)\ y + (-5 - 18)\ z + (1 - 54)] = 0.$$

وباختيار $\lambda_1 = 1$ تكون المعادلة المطلوبة هي:

$$21\ x - 70\ y - 23\ z - 53 = 0.$$

6 – وضع ثلاثة مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي:

نفرض أن لدينا ثلاثة مستويات:

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$
$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$
$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$

تُوجد خمس حالات مختلفة ممكنة لوضع هذه المستويات لبعضهما في الفضاء الثلاثي:

أ – انطباق المستويات الثلاثة على بعضها إذا تحقق الشرط:

$a_1:b_1:c_1:d_1= a_2:b_2:c_2:d_2 = a_3:b_3:c_3:d_3.$

ب – تتوازى المستويات الثلاثة إذا تحقق الشرط:

$a_1:b_1:c_1= a_2:b_2:c_2 = a_3:b_3:c_3 .$

ج – تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم في الجزء المحدد من الفضاء الثلاثي ويكون شرط التقاطع هو وجود قيمة عددية λ تجعل المستوى:

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda\ (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$

ينطبق مع المستوى الثالث أي أن:

$$\frac{a_1+\lambda a_2}{a_3}=\frac{b_1+\lambda b_2}{b_3}=\frac{c_1+\lambda c_2}{c_3}=\frac{d_1+\lambda d_2}{d_3}.$$

د – تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة إذا تحقق الشرط:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

هـ – ليس للمستويات الثلاثة أي نقطة مشتركة ويحدث ذلك إذا كان خط تقاطع مستويان من المستويات الثلاثة يوازي المستوى الثالث.

مثال(10): تحقق من أن المستويات الثلاثة:

$2x - y + 5z - 1 = 0,$
$x + 3y + z - 4 = 0,$
$6x + 11y + 9z - 17 = 0.$

تتقاطع في خط مستقيم.

الحل:

معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين الأول والثاني تكون:

$$2x - y + 5z - 1 + \lambda(x + 3y + z - 4) = 0$$
$$\therefore (2 - \lambda) x + (-1 + 3\lambda) y + (5 + \lambda) z + (-1 - 4\lambda) = 0. \qquad (*)$$

ولكى تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم يجب أن تنطبق المعادلة (*) مع معادلة المستوى الثالث أي يتحقق:

$$\frac{2+\lambda}{6} = \frac{-3+3\lambda}{11} = \frac{5+\lambda}{9} = \frac{1+4\lambda}{17}. \qquad (**)$$

وواضح أن القيمة العددية $\lambda = 4$ تحقق العلاقة (**)

وبالتالي تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم.

تمارين

1- أوجد معادلة المستوى العمودي على P_1P_2 من منتصفه علماً بأن

$P_1(-3, -1, 4), P_2(1, 5, 6)$.

2- إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ زاويتين من زوايا اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقطة $(3, 1, 2)$ فاوجد معادلة المستوى.

3- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $2x - y + z = 0$ ويقطع من المحور OY جزء طوله 3 وحدات.

4- تحقق من أن النقط $(0, 2, -4), (-1, 1, -2), (-2, 3, 3), (-3, -2, 1)$ تقع في مستوى واحد ، وأوجد معادلته.

5- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $4x + y + 8z + 39 = 0$ ويبعد عنه 7 وحدات.

6- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى $x + 2y + 2z - 6 = 0$ ضعف بعدها عن المستوى $4x - 8y + z - 9 = 0$.

7- أوجد الزاوية الحادة بين كل من المستويين فيما يلي:

(i) $2x - y + 2z - 10 = 0, \quad 4x + y + z - 7 = 0$.

(ii) $5x + 3y - 4z + 14 = 0, \quad x - 4y - z + 12 = 0$.

(iii) $3x + 4y - 16 = 0, \quad 4y - 2z - 5 = 0$.

8- أوجد معادلات المستويات التى تمر بالنقطتين $(8, 0, 1), (0, 4, 2)$ وتصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المستوى $2x - y + 2z - 7 = 0$.

9- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (1 ,2- ,3) والمار بخط تقاطع المستويين:

$3y - 2z - 4 = 0, \quad x + y + 4z + 6 = 0.$

10- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (2 ,2- ,1) وعمودي على كل من المستويين:

$3x - 3y + z = 0, \quad 2x + 4y - 5z + 1 = 0.$

11- أوجد معادلة المستوى العمودي على المستوى $x - y + z = 0$ ويمر بالنقطة (1 ,1- ,2) ويوازي المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (1- ,3 ,2).

ثانياً – الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي

أ– الصورة العامة لمعادلات الخط المستقيم:

الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي ينتج من تقاطع مستويين غير متوازيين في الفضاء الثلاثي ، وبالتالى فإن الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي يُمثل بمعادلتين من الدرجة الأولى في x, y, z أي أن:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0. \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

حيث $a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$ والعكس صحيح كل نقط (*) تكون واقعة في آن واحد على خط تقاطعهما ، وحيث إنه يوجد عدد لا نهائي من المستويات التى تمر بالمستقيم (*) فإنه يمكن اختيار أي مستويين منهما ليدلان على المستقيم مثلاً المعادلة:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0. \qquad (1)$$

تمثل مستوى يمر بخط تقاطع المستويين (*)

ويكفي أن نُعطى الكمية العددية λ قيمتين مختلفتين لنحصل على مستويين يمران بالمستقيم (*).

مثال(1): أوجد معادلة الخط المستقيم الناتج من تقاطع المستويين:

$$4x - 2y + z + 1 = 0, \quad 2x + 3y - z - 5 = 0.$$

الحل:

المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين يُعطى من:

$$4x - 2y + z + 1 + \lambda(2x + 3y - z - 5) = 0. \qquad (**)$$

وبوضع معامل x بالصفر في (**) فنحصل على:

$$4 + 2\lambda = 0, \qquad \therefore \lambda = -2.$$

وبالتعويض عن λ في المعادلة (**) نحصل على $8y - 3z - 11 = 0$

وبوضع معامل y بالصفر في (**) نحصل على:

$$-2 + 3\lambda = 0 \qquad \therefore \lambda = 2/3.$$

وبالتعويض عن λ في المعادلة (**) نحصل على $15x + z - 7 = 0$

وبذلك يمكن التعبير عن المستقيم الناتج من تقاطع المستويين المعطيين بالمعادلتين:

$8y - 3z - 11 = 0 \quad , \quad 15x + z - 7 = 0.$

ب- معادلات الخط المستقيم بدلالة نسب اتجاهه ونقطة عليه:

نفرض أن a, b, c هى نسب اتجاه المستقيم ويمر بالنقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$

ولإيجاد معادلة هذا الخط نفرض أن $P(z, y, z)$ أي نقطة عليه فيكون:

$$a : b : c = x - x_1 : y - y_1 : z - z_1.$$

أي أن:

$$\lambda a = x - x_1, \quad \lambda b = y - y_1, \quad \lambda c = z - z_1.$$

$$x = \lambda a + x_1, \quad y = \lambda b + y_1, \quad z = \lambda c + z_1. \qquad (2)$$

حيث λ كمية عددية.

من العلاقة (2) نحصل على إحداثيات أي نقطة تقع على المستقيم بدلالة البارامتر λ والقيم المعطاة a, b, c, x_1, y_1, z_1 وتُسمى (2) بالمعادلات البارامترية للخط المستقيم.

وحيث إنه لا يمكن أن تنعدم a, b, c في آن واحد

فبحذف البارامتر λ من (2) نحصل على:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \qquad (3)$$

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلات الخط المستقيم.

وإذا أُعطيت نسب اتجاه المستقيم ونقطة عليه فإن معادلاته تُكتب مباشرة بالصورة (3)

وإذا كان $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ فإن المعادلة (3) تؤول إلى المستويين:

$$x = x_1 \; , \; \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

وإذا كان $a = 0, b = 0, c \neq 0$ فإن المعادلة (3) تؤول إلى المستويين:

$$x = x_1 \; , \; y - y_1.$$

ج- معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين:

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ وكانت نسب اتجاهه هي a, b, c فيكون:

$$a : b : c = x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1$$

وبذلك تصبح الصورة القياسية (3) في الصورة:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

وهذه تمثل معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$.

مثال(2): أوجد الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم:

$$2x - 3y + z + 5 = 0, \quad x + 2y - 3z - 8 = 0.$$

الحل:

نعين نقطتين P_1, P_2 على المستقيم وذلك بوضع معامل x بالصفر في المعادلتين المعطيتين فنحصل على:

$$-3y + z + 5 = 0, \quad 2y - 3z - 8 = 0.$$

وبحل هاتين المعادلتين في y, z نحصل على $y = 1, \ z = -2$.

وبالتالي تكون $P_1(0, 1, -2)$.

ثم بوضع معامل y بالصفر نحصل على:

$$2x + z + 5 = 0, \quad x - 3z - 8 = 0.$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $x = -1, z = -3$.

وبالتالي تكون $P_2(-1, 0, -3)$.

وبالتالي تكون معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(0,1,-2), P_2(-1,0,-3)$ هي:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z+2}{-3+2} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow x = y - 1 = z + 2.$$

مثال(3): أوجد نقط تقاطع المستقيم $\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+4}{2}$ مع المستوى 3x + 4y + 12z + 19 = 0 وأوجد أيضا الزاوية بين المستقيم والمستوى.

الحل:

Put $\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+4}{2}=\lambda.$

$\therefore x = \lambda - 2,\ y = -2\lambda + 4,\ z = 2\lambda - 4 \quad (*).$

وبالتعويض في معادلة المستوى نحصل على:

$3(\lambda - 2) + 4(-2\lambda + 4) + 12(2\lambda - 4) + 19 = 0.$

$\therefore \lambda = 1.$

وبالتعويض في العلاقة (*) تكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى هي (-1, 2, -2) .

وحيث إن نسب اتجاه المستقيم هي 1, -2, 2 ونسب اتجاه العمودي على المستوى هي 3, 4, 12 فإذاً الزاوية θ بين المستقيم والعمودي على المستوى تُعطى من العلاقة:

$$\cos\theta=\frac{(1)(3)+(-2)(4)+(2)(12)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+16+144}}=\frac{19}{(3)(13)}.$$

وبذلك تكون الزاوية التى يصنعها المستقيم مع المستوى هي $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

د– طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم:

طول العمود R النازل من النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على المستقيم:

$$\frac{x-x_1}{L} = \frac{y-y_1}{M} = \frac{z-z_1}{N}.$$

حيث L, M, N هي جيوب تمام الاتجاه الفعلية للمستقيم ، ويمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1)

يُعطى من العلاقة:

$$\overline{R}^2 = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-[L(x_1-x_0)+M(y_1-y_0)+N(z_1-z_0)].$$

مثال(4): أوجد طول العمود النازل من النقطة $P(1, -1, 2)$ على المستقيم المار بالنقطة $P_1(-1, 2, -1)$ وعمودي على المستوى $2x + y - 2z + 3 = 0$.

الحل:

نسب اتجاه العمودي على المستوى هي 2- ,1 ,2 وتكون هي نفس نسب اتجاه المستقيم (حيث إنه عمودي على المستوى)

وعلى ذلك تكون معادلة المستقيم القياسية هي:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

ومن ثم فإن طول العمود R النازل من النقطة $P(1, -1, 2)$ على المستقيم يُعطى من:

$$\overline{R}^2 = (1+1)^2 + (-1-2)^2 + (2+1)^2 - \left[\frac{2}{3}(1+1) + \frac{1}{3}(-1-2) - \frac{2}{3}(2+1)\right]^2$$

$$= 4+9+9-\left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \frac{173}{9}.$$

$$\therefore \overline{R} = \left|\frac{173}{9}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

هـ- تقاطع مستقيمين في الفضاء الثلاثي:

شرط تقاطع المستقيمين (وهو شرط وقوعهما في مستوى واحد):

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}\ ,\ \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}\,.$$

يكون:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0\,.$$

ومعادلة المستوى الذي يقعان فيه تكون:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \ \vee\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0\,.$$

مثال(5): تحقق من أن المستقيمين:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-1},\quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{3}\,.$$

يقعان في مستوى واحد .ثم أوجد معادلة هذا المستوى.

الحل:

شرط تقاطع مستقيمين (وقوعهما في مستوى واحد) هو:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1 & \mathrm{z}_2-\mathrm{z}_1 \\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{c}_2 \end{vmatrix}=0\,.$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 4-1 & 3-2 & -2-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0\,.$$

أي أن المستقيمين متقاطعان.

وتكون معادلة المستوى الواقعان فيه هي:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

أي تكون:

$10x + 3y + 11z - 27 = 0.$

مثال(6): تحقق من أن المستقيمين:

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

يكونا غير متقاطعتين .ثم أوجد معادلتى العمود المشترك بينهما.

الحل:

شرط تقاطع المستقيمين يكون:

$$\begin{vmatrix} 2+3 & 4+1 & -1-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46 \neq 0.$$

وإذاً المستقيمان غير متقاطعين.

وبفرض أن PQ هو العمود المشترك بينهما وأن a, b, c هي نسب اتجاهه فإن:

$-a + 2b + c = 0, \quad 3a + b + c = 0.$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على (تحقق من ذلك؟):

$a= 1, b = 4, c = -7.$

والمستقيم PQ يُعطى بالمستويين P_1PQ, P_2PQ

وحيث إن المستوى P_1PQ معادلته يمكن كتابتها بالصورة:

$L(x+3) +M(y+1) + N(z-2) = 0.$

لأنه يمر بالنقطة $P_1(-3, -1, 2)$

والمستقيمان P_1P, PQ واقعان في هذا المستوى فيكون:

$-L + 2M + N = 0, \quad L + 4M - 7N = 0.$

وبحذف L, M, N من المعادلتين السابقتين نحصل على معادلة المستوى P_1PQ بالصورة:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 3x = y + z + 8 = 0 .$$

وبنفس الطريقة نجد أن معادلة المستوى P_2PQ تكون على الصورة:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = x - 2y - z + 5 = 0 .$$

تمارين

1 – أوجد قيمة d التي تجعل المستقيم $3x - y + 2z - 6 = 0,\ x + 4y - z + d = 0$ يقطع المحور OX.

2 – أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z-1}{3}$.

3 – أوجد الزاوية بين المستقيمين (i), (ii) حيث:

(i) $2x - 2y - z + 8 = 0,\quad x + 2y - 2z + 1 = 0.$
(ii) $4x + y + 3z - 21 = 0,\quad 2x + 2y - 3z + 15 = 0.$

4 – هل يقع المستقيمان (i), (ii) في مستوى واحد؟

(i) $4x + y + 3z = 0,\quad 2x + 3y + 2z - 9 = 0.$
(ii) $3x - 2y + z + 5 = 0,\quad x - 3y - 2z - 3 = 0.$

5 – أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ مع المستوى:

$2x + 3y + 3z - 8 = 0.$

6 – أوجد الزاوية بين المستقيم $3x - 2y = 24,\ 3x - y = -4$ والمستوى:

$6x + 15y - 10z + 31 = 0.$

7 – أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (3, -2, 1) وعمودي على المستقيم:

$\frac{2x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

8– تحقق من أن المستقيم $x + y - z = 1,\ 2x + z = 3$ والمستقيم $x = y = z - 1$ يكونا غير واقعان في مستوى واحد ، وأوجد معادلات العمود المشترك عليهما ، وأوجد أيضاً طول أقصر بُعد بينهما.

9 – أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (3, -2, -1) ويوازي المستقيمان:

$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6},\quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}.$

10– أوجد معادلة المستوى المار بالمستقيم $x + y = 0,\ x - y + z - 2 = 0$ ويكون موازياً للمستقيم $x = y = z$.