محاضرات في بحتة (١٦) "هندسة تفاضلية"

لطلاب الفرقة الرابعة- تعليم عام- شعبة الرياضيات

بكلية التربية

العام الجامعي ٢٠٢١- ٢٠٢٢م

الجزء الثاني (الهندسة الذاتية والخارجية لمنحنيات الفراغ)

الباب الثالث

المنحنيات في الفراغ الثلاثي
Space Curves

في هذا الباب نقدم تعريف المنحنى ونوضح الفرق بين المنحنى ورسمه في الفراغ وكذلك طرق تمثيل المنحنى ونركز على أهم تمثيل وهو التمثيل البارامتري. وبعد ذلك نتعرض لحساب المسافة القوسية وعلاقتها بالتمثيل البارامتري ونقدم الإطار المتحرك والمستويات المصاحبة له مثل المستوى اللاصق والعمودي والمقوم.

(١.٣) مفهوم المنحنى في الفراغ : Concept of a space curve

الآن نعرف التمثيل البارامتري للمنحنى C، لأجل هذا الغرض نستخدم إحداثيات كارتيزية x_1, x_2, x_3 في الفراغ $\mathbb{R}^3$ والإحداثي t على الفترة $I \subset \mathbb{R}$.
نعتبر الراسم

$$\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\} = (a,b) = I \to C \subset \mathbb{R}^3$$

الممثل بواسطة الدالة الاتجاهية التفاضلية

$$\underline{x} = \underline{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)), \forall t \in I \qquad (3.1)$$

هذه الدالة تحدد لكل $t \in I$ النقطة P في $\mathbb{R}^3$ ولها متجه الموضع $\underline{x}(t)$ حيث

$$t \in I \to P(\underline{x}(t)) \in \mathbb{R}^3 \qquad (3.2)$$

مجموعة النقاط هذه تكون مجموعة جزئية C من الفراغ $\mathbb{R}^3$ تسمى منحنى الفراغ ويرمز لها بالرمز $C \subset \mathbb{R}^3$.
التمثيل البارامتري الذي يعرف المجموعة الجزئية C يعطى من

$$C:\underline{x}=\underline{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t)) \qquad (3.3)$$

ويسمى بالتمثيل البارامتري (الوسيطي) للمنحنى C و t تسمى بارامتر التمثيل representation Parameter حيث $\underline{x}=\underline{x}(t)$ دالة اتجاهية تفاضلية في متغير واحد t . كل قيمة من قيم t تناظر نقطة فراغية على المنحنى تنتج بالتعويض عن قيمة t في الدالة الاتجاهية (3.3).

مثال (٣.١):

الدالة الاتجاهية

$$\underline{x}(t)=(t,t^2,0),\ t\in I=(0,1)\subset\mathbb{R}$$

تمثل جزء القطع المكافئ $x_2=x_1^2$ $(0<x_1<1)$ في المستوى x_1x_2 حيث

$$x_1=t,x_2=t^2$$

ملاحظة (٣.١):

التمثيلات البارامترية تظهر بصورة طبيعية في الميكانيكا حيث البارامتر t يمثل الزمن والدالة الاتجاهية $\underline{x}(t)$ تمثل مسار الجسيم المتحرك كما في حركة نقطة على محيط دائرة نصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل فإن المسار يعطى من $x(t)=(\cos t,\sin t,0)$

توجد طرق كثيرة لتمثيل المنحنى في الفراغ تحليلياً منها ما يلي :

١ـ يعتبر المنحنى ناتج من تقاطع سطحين إذا كانت معادلاته على الصورة

$$F_1(x_1,x_2,x_3)\equiv 0,\ F_2(x_1,x_2,x_3)\equiv 0 \quad \text{(تمثيل ضمني)}$$

حيث الدوال الضمنية F_1,F_2 (دوال تفاضلية) تمثل سطوح في الفراغ الثلاثي ((تفاضل (٤)).

وإذا كان $J=Det\left(\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}\right)\neq 0$ مثلاً فإنه يوجد منحنى له تمثيل بارامتري في منطقة صغيرة حول x_3 على الصورة:

$$x_1 = x_1(x_3)\,,\, x_2 = x_2(x_3)\,,\, x_3 = x_3$$

أي أنه أمكن حل المعادلات $F_1=0$ ، $F_2=0$ كدوال في x_3 حيث x_3 نفسه هو البارامتر. ونفس الشيء بالنسبة إلى x_2 أو x_1 .

٢. يعتبر المنحنى ناتج من تقاطع اسطوانتين Cylinders على الصورة :

$$x_2 = f_2(x_1),\ x_3 = f_3(x_2)$$

وبالتالي فإن التمثيل البارامتري للمنحنى حول x_1 يأخذ الشكل

$$x_1 = x_1, x_2 = f_2(x_1)\,, x_3 = f_3(f_2(x_1)) = \Phi(x_1)$$

لاحظ أن الدوال f_2, f_3 (تفاضلية) تمثل منحنيات في المستوى x_2x_3 ، x_1x_2 على الترتيب ولكن في الفراغ تمثل اسطوانات مقامة على هذه المنحنيات.

٣. إذا كانت إحدى الدالتين F_1, F_2 خطية وليكن

$$F_1 = ax + by + cz + d = 0$$

وهي تمثل معادلة مستوى. في هذه الحالة فإن المنحنى هو تقاطع سطح مع مستوى ويعطى من

$$F(x,y,z) = ax + by + cz + d = 0\ ,\ F_2(x,y,z) = 0\ .$$

والمنحنى الناتج هو منحنى مستوى يسمى منحنى المقطع الناتج من تقاطع السطح بالمستوى. فمثلاً تقاطع الكرة مع مستوى هو دائرة وتكون دائرة عظمى إذا مر المستوى بمركز الكرة.

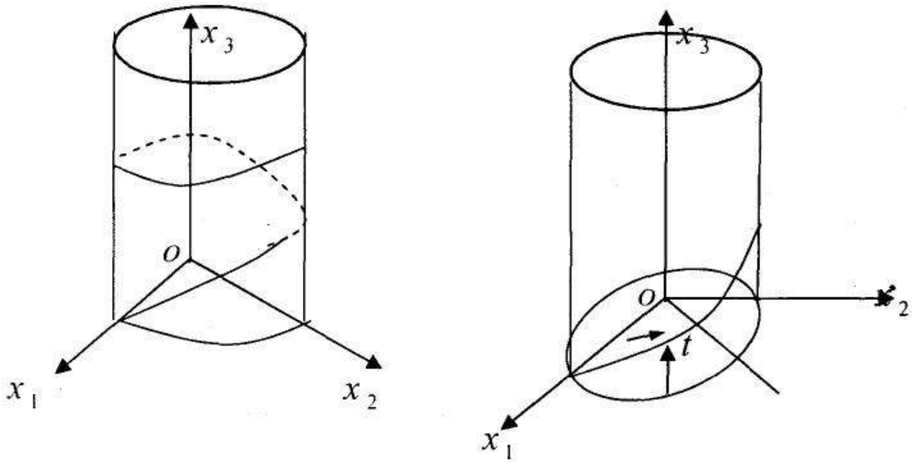
٤. التمثيل الهام للمنحنى في الفراغ هو التمثيل البارامتري الذي على الصورة:

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t)\quad ,\quad \text{بارامتر}\ \ t \in I \subset \mathbb{R}$$

حيث الدوال $x_i(t)$ دوال تفاضلية. أي أن المنحنى صورة لقطعة مستقيمة من الخط المستقيم (خط الأعداد $\mathbb{R}$) كما هو موضح في شكل (١٨.٢).

مثال (٢.٣):

المنحنى الحلزوني الدائري Circular helix هو منحنى يقع على اسطوانة دائرية قائمة بحيث أن هذا المنحنى يصنع زوايا ثابتة مع رواسم الأسطوانة كما هو موضح في شكل (١.٣).



شكل (١.٣)

إذا كان نصف قطر الاسطوانة ρ والزاوية الموضحة بالرسم هي البارامتر t فإن التمثيل البارامتري لمنحنى الحلزون الدائري يعطى على الصورة

$$x_1 = \rho\cos t,\ x_2 = \rho\sin t, x_3 = b\,t, b \neq 0 \qquad (3.4)$$

سوف نقوم بدراسة هذا المنحنى دراسة تفصيلية في الباب الرابع.

نظرية (١.٣):

الدالة الاتجاهية $\underline{x} = \underline{x}(t)$ تمثل قطعة مستقيم Line a segment إذا كان وكان فقط :

$$\text{(i)}\ \ \underline{x}'(t) \wedge \underline{x}''(t) \equiv \underline{0}\ ,\ \text{(ii)}\ \underline{x}'(t) \neq \underline{0},\ \ a \le t \le b, ' = \frac{d}{dt}$$

البرهان:

الشرط (ii) يعني أن المتجه $\underline{x}'(t)$ متجه غير صفري. بينما الشرط (i) يعني إما $\underline{x}''(t)$ متجه صفري أو $\underline{x}''(t)=\lambda(t)\underline{x}'(t)$، أي أن x' ، x'' مرتبطين خطياً وهذه العلاقة معادلة تفاضلية خطية لها العامل المكامل

$$\phi(t)=e^{-\int\lambda(t)dt} \text{ integrating factor } ,\lambda(t) \text{ دالة قياسية}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\{\phi(t)\underline{x}'(t)\}\equiv\underline{0}$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى t نحصل على

$$\underline{x}'(t)=\frac{\underline{a}}{\phi(t)},\quad \underline{a}-\text{ const. vector}$$

وبالتكامل بالنسبة إلى t يكون لدينا

$$\underline{x}(u)=\underline{a}\ u+\underline{b}$$

حيث $\underline{b}$ متجه ثابت، $u=\int\frac{dt}{\phi(t)}$ بارامتر جديد. إذاً المعادلة $\underline{x}=\underline{a}u+\underline{b}$ هي معادلة خط مستقيم يمر بالنقطة التي لها متجه الموضع $\underline{b}$ واتجاهه يوازي المتجه الثابت $\underline{a}$.

نظرية (٢.٣):

الشرط الضروري والكافي كي يقع المنحنى $C:\underline{x}=x(t)$ في مستوى هو أن يتحقق

$$\text{(i)}\qquad [\underline{x}',\underline{x}'',\underline{x}''']\equiv 0\quad ,\ \text{(ii)}\quad \underline{x}'(t)\wedge\underline{x}''(t)\neq 0\,.$$

البرهان:

لإثبات ذلك نضع $\underline{y}=\underline{x}'\times\underline{x}''$ وبالتفاضل واستخدام قواعد الضرب الاتجاهي يكون لدينا

$$\underline{y}'=\underline{x}'\times\underline{x}'''$$

$$\therefore\ y \wedge y' = (x' \wedge x'') \wedge (x' \wedge x''')$$

وباستخدام المتطابقة (2.24) حيث $A_1 = x' \wedge x''$ ، $A_2 = x'$ ، $A_3 = x'''$.
نحصل على :

$$\underline{y} \wedge \underline{y}' = [\underline{x}', \underline{x}'', \underline{x}''']\underline{x}' - [\underline{x}', \underline{x}'', \underline{x}']\underline{x}''' \equiv 0 \qquad (3.5)$$

(من الشرط (i) في النظرية ومن تساوي صفين في المحدد الثاني).
كما في برهان نظرية (١.٤) يكون

$$\underline{y}' = k(t)\underline{y}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\underline{y} = \frac{\underline{a}}{\phi(t)}, \quad \phi(t) = e^{-\int k(t)dt}$$

حيث $\underline{a} = (a_i)$ متجه ثابت.
ويكون

$$<\underline{x}', \underline{y}> \equiv [\underline{x}', \underline{x}', \underline{x}''] \equiv 0 \Rightarrow \frac{<\underline{x}', \underline{a}>}{\phi(t)} \equiv 0$$

أو ما يكافئ $\quad <\underline{x}', \underline{a}> = 0$

وبالتكامل مرة أخرى بالنسبة إلى t نحصل على

$$<\underline{x}(t), \underline{a}> = c$$

حيث c ثابت قياسي. أي أن المنحنى $\underline{x} = \underline{x}(t)$ يقع في المستوى

$$\pi : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c$$

حيث العمودي على المستوى π هو المتجه $\underline{a}$ وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوي $\frac{c}{|\underline{a}|}$.

ملاحظة (٢.٣):

١ـ الرسم أو الأثر trace or image للمنحنى r هو مجموعة جزئية $r(I)\subset\mathbb{R}^3$ من الفراغ $\mathbb{R}^3$.

٢. المنحنى يعرف كدالة وليس كرسم أو أثر للدالة بمعنى يوجد دالتين مختلفتين لهما نفس الرسم أو الأثر أي أنهما منحنيات مختلفة ونوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٣.٣):

الدوال الاتجاهية التفاضلية الآتية:

$$r:I\longrightarrow\mathbb{R}^2, r(u)=(\cos u,\sin u), u\in[0,2\pi]$$

$$\bar{r}:I\longrightarrow\mathbb{R}^2, \bar{r}(u)=(\cos 2u,\sin 2u)u\in[0,\pi]$$

تعرف منحنيات مختلفة ولكن رسمها متطابق identical حيث أن كل منهما يصف دائرة في المستوى مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة.

في الحالة العامة :

إذا كان $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^2, f(u)=(x(u),y(u))$

دالة اتجاهية في المستوى فإنها تعرف منحنى فراغ على الصورة

$r:I\longrightarrow\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ حيث

$$r(u)=(f(u),0)=(x(u),y(u),0)$$

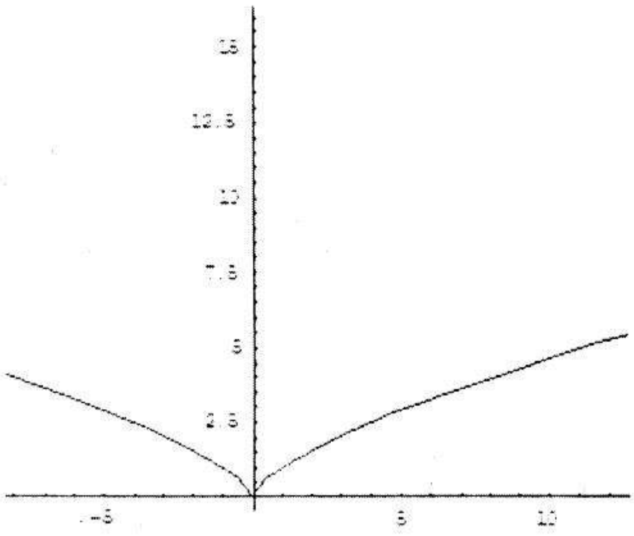
والتي تكتب عادة على الصورة

$$r(u)=(x(u),y(u))$$

ويقال في هذه الحالة أن المنحنى مستوٍ (واقع في المستوى $\mathbb{R}^2$) plane curve.

مثال (٤.٣):

الدالة $r(u)=(u^3,u^2), u\in\mathbb{R}$ يمكن رسمها كما هو موضح في شكل (٢.٣).



شكل (٢.٣)

وهذا يوضح أن رسم أي دالة هو منحنى ولكن ليس كل منحنى مستوي هو رسم لدالة.

مثال (٥.٣):

إذا كانت $f\ :I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة تفاضلية حقيقية فإن الدالة $r:I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرفة بالقاعدة $r(u)=(u,f\ (u))$ تصف منحنى مستوي.

ملاحظة (٣.٣):

المماس للمنحنى القابل للتفاضل differentiable يوجد عند أي نقطة عليه ولكن قد يكون متجه صفري.

مثال (٦.٣):

المنحنى $r(u)=(u^3,u^2)$ ليس له مماس عند $u=0$ لأن النقطة $u=0$ غير منتظمة not regular كما هو مبين في الشكل (٢.٣).

ملاحظة (٤.٣):

مما سبق يتضح أن كل المنحنيات سوف تكون منتظمة ما لم ينص خلاف ذلك.

مثال (٣.٧):

أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى الناتج من تقاطع أسطوانة نصف قطرها a ومركزها $(a,0)$ مع كرة نصف قطرها $2a$ ومركزها نقطة أصل الإحداثيات.

الحل:

نفرض أن معادلة كل من الأسطوانة والكرة هي

$$F_1:(x-a)^2+y^2-a^2=0$$

$$F_2:x^2+y^2+z^2-4a^2=0$$

على الترتيب.

وبما أن $J=Det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right)\neq 0$ فإنه يمكن حل المعادلتين كدالة في z وبحل هاتين المعادلتين مباشرة كدالة في z نحصل على (نظرية الدالة الضمنية):

$$x=2a-\frac{z^2}{2a}\,,\quad y=\pm\frac{z}{2}\sqrt{4-\frac{z^2}{a^2}}\;\;,\;|z|\leq 2a$$

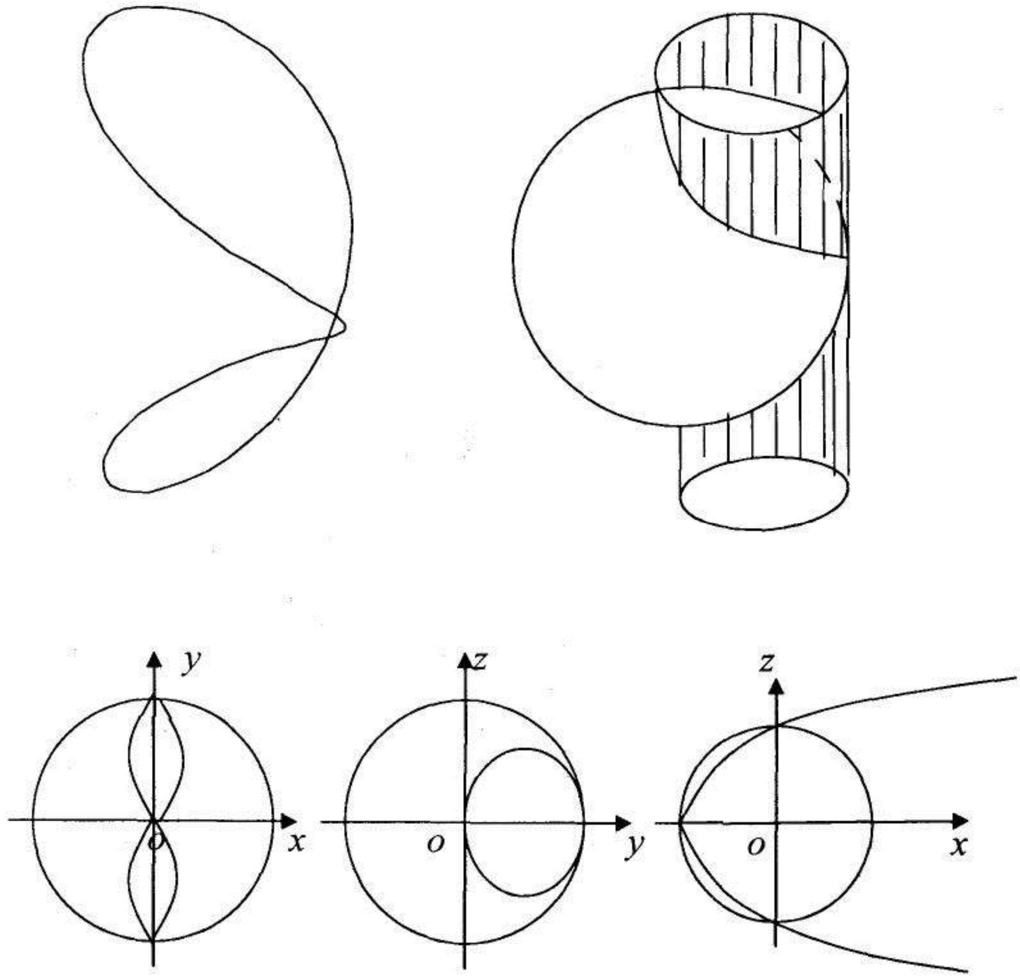
وبوضع $z=2a\sin\frac{u}{2}$ حيث $u\in(-2\pi,2\pi)$ نحصل على التمثيل البارامتري من التمثيل الضمني (implicit) لمنحنى التقاطع على الصورة:

$$\begin{aligned} x&=a(1+\cos u),\\ y&=a\sin u\,, \qquad\qquad (3.6)\\ z&=2a\sin\frac{u}{2},u\in(-2\pi,2\pi). \end{aligned}$$

ملاحظة (٣.٥):

المنحنى (3.6) يسمى منحنى فيفياني أو شباك في وله أشكال أو مساقط على المستويات الإحداثية $(z=0)$، $(x=0)$، $(y=0)$ هي منحنيات مستوية من نوع

ليمنسكات ودائرة وجزء من قطع مكافئ على الترتيب كما هو موضح في شكل (٣.٣).



ليمنسكات　　　دائرة　　　قطع مكافئ

شكل (٣.٣)

(٢.٣) طول قوس المنحنى في الفراغ: Arc Length of a space curve

بفرض أن C منحنى فراغ معطى بالتمثيل البارامتري من خلال الدالة الاتجاهية

$$C : \underline{x} = \underline{x}(t) \qquad (3.7)$$

طول قوس المنحنى بين النقطتين $t = a$, $t = b$ من المنحنى يعرف كالتالي:

نعتبر التقاسيم الجزئية للفترة (a, b) وذلك بإدخال $(n\text{-}1)$ من النقاط داخل الفترة (a, b) حيث

$$a = t_o < t_1 < \ldots t_{n-1} < t_n = b$$

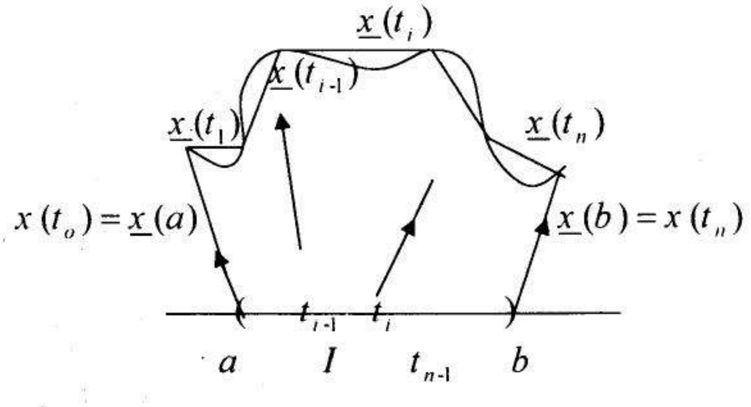
طول القوس L يعرف بأنه طول المضلع المرسوم بالنقاط $x\,(t_i)$ عندما يؤول طول أكبر قطعة مستقيمة من المضلع إلى الصفر أو ما يكافئ

$$L = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})| \qquad (3.8)$$

حيث δ تعطى من

$$\delta = \max(t_1 - t_o, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1})$$

عندما تكون النهاية موجودة فإن المنحنى يسمى بالمنحنى المقوم (المصلح) rectifiable كما هو موضح في شكل (٤.٣).



شكل (٤.٣)

والمجموع (3.8) هو طول الخط المنكسر المرسوم داخل المنحنى والموصل بين نقط التقسيم الجزئي. إذا كانت الدوال $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t) \in C^1$ قابلة للتفاضل وباستخدام نظريات التكامل والعلاقات بين التفاضل والتكامل ومجموع ريمان (تفاضل وتكامل (٢)) نحصل على

$$L = \int_a^b |\underline{x}'(t)|dt \qquad (3.9)$$

حيث

$$|\underline{x}'(t)| = <x'(t), x'(t)>^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2}\ ,' = \frac{d}{dt}$$

وإذا كانت $b = t$ فإن طول قوس المنحنى يكون دالة في t وليكن $s = s(t)$ حيث

$$s(t) = \int_a^t |x'(t)|dt \qquad (3.10)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{ds}{dt} = |x'(t)| > 0 \qquad (3.11)$$

أي أن $s(t)$ دالة تزايدية على الفترة $[a, t]$.

مثال (٣-٨):

أوجد طول قوس منحنى الحلزون الدائري

$$x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = t$$

من $t = 0$ إلى أي نقطة اختيارية t وأكتب المعادلات البارامترية بدلالة بارامتر طول القوس s .

الحل :

واضح أن فترة التكامل هي $[0, t]$ وباستخدام (3.10) نحصل على :

$$s = \int_0^t \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1}\; dt = \sqrt{2}\, t$$

وعلى هذا الأساس يمكن استبدال t بالبارامتر s حيث $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ وتسمى s بالبارامتر الطبيعي للمنحنى Natural parameter أو الذاتي.

والمعادلات

$$x_1 = \cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ x_2 = \sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ x_3 = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

تسمى بالتمثيل البارامتري الطبيعي للمنحنى.

وفي الحالة العامة نعطي النظرية الآتية :

نظرية (٣.٣):

نفرض أن $(i = 1,2,3)$ $x_i(t) \in C^1$ فإن البارامتر t يكون بارامتر طبيعي للمنحنى $C : \underline{x} = \underline{x}(t)$ إذا كان وكان فقط $\left|\underline{x}'(t)\right| = 1$

البرهان:

لإثبات ذلك نفرض أولاً أن t هي طول القوس للمنحنى $x_i = x_i(t)$ من قيمة اختيارية t_o أي أن $t - t_o = s$. وباستخدام (3.11) نحصل على

$$|\underline{x}'(t)| = \left|\frac{dx}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = 1$$

والعكس إذا كان $\left|\frac{dx}{dt}\right| = 1$ وباستخدام (3.9) فإن $dt{=}ds$ أي أن $ds{=}dt$

$$s = \int_{t_o}^{t} dt = t - t_o$$

مثال (٩.٣):

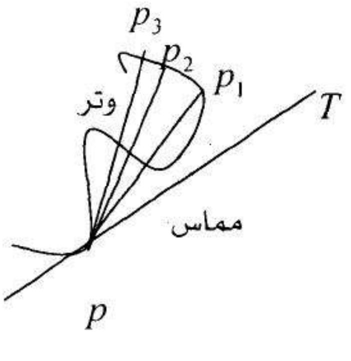
بحساب المشتقة الأولى $x'(t)$ للمنحنى

$$x_1 = \frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_3 = \cos t$$

نجد أن $|\underline{x}'(t)| = 1$ ولهذا فإن البارامتر t هو البارامتر الطبيعي للمنحنى. في الواقع هذا المنحنى هو دائرة في المستوى $x_1 = x_2$ مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة

(٣.٣) خط المماس والمستوى العمودي: Tangent Line and Normal Plane

نعتبر منحنى معطى بالتمثيل الطبيعي $\underline{x} = \underline{x}(s)$ ، المماس للمنحنى عند نقطة ما p عليه يعرف بأنه الوضع النهائي لمتتابعة الأوتار من النقطة p إلى مجموعة نقاط المنحنى الأخرى عندما تؤول أطراف الأوتار إلى النقطة p كما هو موضح في شكل (٥.٣).



شكل (٥.٣)

الاتجاه الموجب للمماس T هو اتجاه زيادة s والمماس يوازي الاتجاه

$$\underline{T} = \dot{x}(s)\ ,\ \dot{} = \frac{d}{ds} \qquad (3.12)$$

وهو متجه الوحدة في اتجاه المماس حيث s بارامتر طول القوس.

وإذا كان $x = \underline{x}(t)$ أي تمثيل بارامتري للمنحنى فإن $T = \frac{dx}{dt} / |x'(t)|$ أو في الصورة

$$T = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}, \qquad ' = \frac{d}{dt}$$

تعريف (١.٣):

النقطة $x \in C^1$ التي عندها $|\underline{x}'(t)| \neq \underline{0}$ تسمى نقطة عادية Ordinary point أو نقطة منتظمة Regular أما النقطة التي عندها $|\underline{x}'(t)| = \underline{0}$ تسمى نقطة مفردة (شاذة) Singular point.

نبين الآن أن تغير البارامتر (الفترة المعرف عليها المنحنى) قد يؤدي إلى نفس المنحنى وهذا يوضح معنى الانتظام regularity ولذلك نقول أنه إذا كان:

$$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow J \subset \mathbb{R} \;\;,\;\; t \in I \longrightarrow f(t) = u \in J$$

راسم أو دالة ذات قيم حقيقية وتحقق

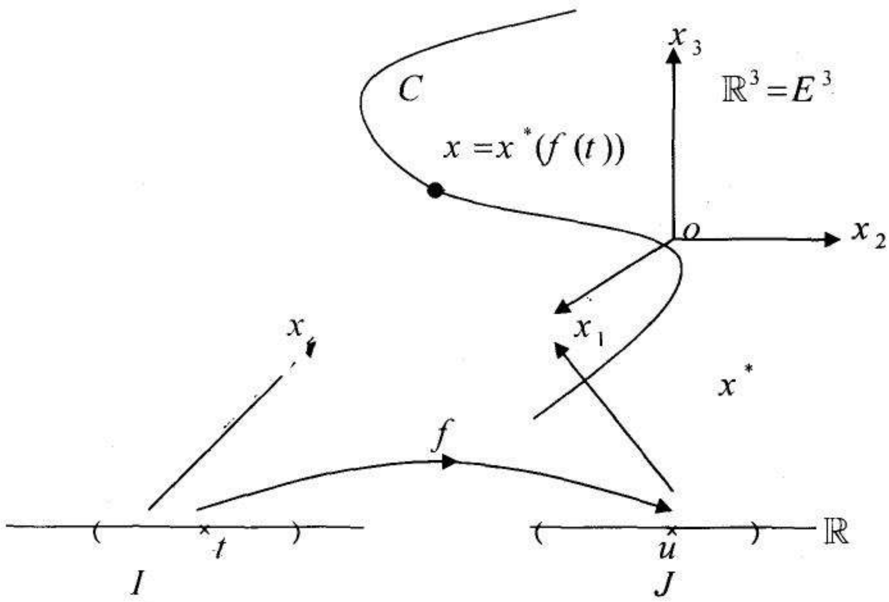
$$\text{(i)} \qquad \frac{du}{dt} \neq 0 \,,\, \forall u \in J \;\;, \qquad\qquad \text{(ii)} \qquad f(t) \in C^1 \text{ in } I$$

في هذه الحالة يقال أن الدالة $u = f(t)$ تسمح بإعادة التمثيل البارامتري re parameterization للمنحنى ليصبح على الصورة

$$C : x = x(t) \longleftrightarrow C : x^* = x(t(u))$$

وإذا كانت $0 < \frac{du}{dt}$ على الفترة J فإن $u = f(t)$ دالة تزايدية وإذا كانت $\frac{du}{dt} < 0$ على الفترة J فإن $u = f(t)$ دالة تناقصية.

ويقال في هذه الحالة أن التمثيل البارامتري المنتظم $x = x(t)$ يكافئ التمثيل البارامتري المنتظم $x = x^*(t)$ كما هو موضح في شكل (٦.٣) (أنظر مثال (٣.٣)).



شكل (٦.٣)

بعد هذا العرض نكون قد توصلنا إلى الفرق بين التمثيل البارامتري المنتظم والمنحنى المنتظم ونقدمها كالآتي:

- التمثيل البارامتري المنتظم هو دالة اتجاهية $x = x(u)$ تحقق $|\dfrac{dx}{du}| \neq 0$.
- المنحنى المنتظم من طبقة C^m هو تجمع من تمثيلات بارامترية من طبقة C^m بحيث أي أثنين من هذا التجمع يرتبطا من خلال تحويل بارمتري مسموح به من طبقة C^m .
- طول قوس منحنى مستقل عن أي تمثيل بارامتري.

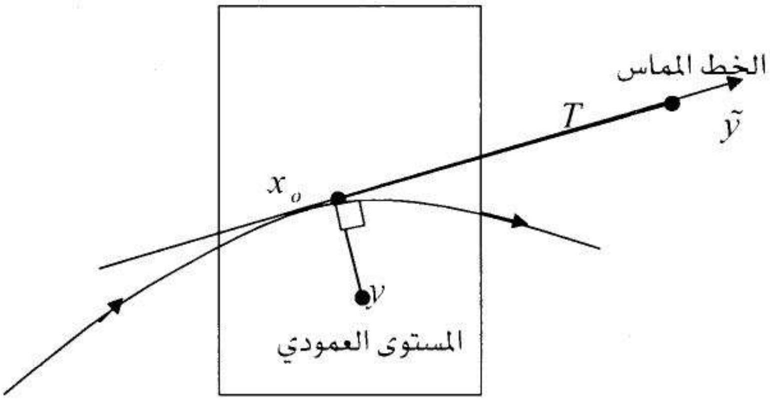
معادلة خط المماس عند النقطة التي لها بارامتر طول القوس $s = s_o$ على المنحنى $x = x(s)$ هي معادلة خط مستقيم اتجاهه يوازي المتجه $\dot{x}(s_o)$ وتعطى في الصورة:

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{x}(s_o) + u\underline{\dot{x}}(s_o)\ , u \in \mathbb{R}, \cdot = \frac{d}{ds} \qquad (3.13)$$

ومعادلـة **المستوى العمـودي** (علـى المـاس T للمنحنـى) عنـد النقطـة $p(s = s_o)$ هـي معادلة مستوى يمر بالنقطة $\underline{x}(s_o)$ والعمودي عليه هو $\dot{\underline{x}}(s_o)$ وتعطى من

$$< \underline{y} - \underline{x}(s_o),\ \dot{\underline{x}}(s_o) > = 0 \qquad (3.14)$$

حيث $\underline{y}$ نقطة على المستوى (بخلاف $x_o = x(s_o)$) وليست على المنحنى كما هو موضح في الشكل (٧.٣).



شكل (٧.٣)

مثال (١٠.٣):

أوجد معادلة المستوى العمودي ومعادلة المماس للمنحنى

$$x_1 = \frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_3 = \cos t$$

عند النقطة p التي تناظر البارامتر $t = \dfrac{\pi}{4}$.

الحل:

اتجاه المماس للمنحنى المعطى يعطى من

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t\right)$$

إذاً متجه الوحدة في اتجاه المماس عند النقطة p يعطى من

$$\underline{T} = \dot{x} = \frac{dx}{dt} / |\frac{dx}{dt}|,$$

$$\therefore \quad \underline{T} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ at } t = \frac{\pi}{4}$$

والنقطة p التي تناظر $t = \frac{\pi}{4}$ هي $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

المعادلات البارامترية للمماس تعطى من المعادلة الاتجاهية (3.13) على الصورة

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_i) = p + uT \ , \ u \in \mathbb{R}$$

أو ما يكافئ

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(1+u), \ \tilde{y}_2 = \frac{1}{2}(1+u), \ \tilde{y}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-u)$$

معادلة **المستوى العمودي** (مستوى عمودي على المنحنى عند نقطة p عليه) تعطى من (3.14) على الصورة

$$< (y - p), \underline{T} > = 0 \ , \ y = (y_i)$$

أو ما يكافئ

$$y_1 + y_2 - \sqrt{2}\, y_3 = 0$$

واضح أن العمودي على المستوى الغمودي له الاتجاه $(1,1,-\sqrt{2})$ أو يوازي متجه الوحدة T في اتجاه العمودي (المماس للمنحنى) عند النقطة p.

مثال (١١.٣):

الدالة الإتجاهية $x(t) = (t, t^2, 0)$ تمثل جزء القطع المكافئ $x_2 = x_1^2$ في المستوى $x_1 x_2$.

مثال (١٢.٣):

أوجد التمثيل البارمتري للمنحنى $x_2^2 = x_1, x_3^2 = 1 - x_1$

الحل:

المنحنى المعطى هو تقاطع سطحين ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً ويكون عدد لانهائي من الحلول التي تعتمد على بارامتر واحد. بالجمع نحصل على

$$x_2^2 + x_3^2 = 1$$

وهي معادلة دائرة في المستوى $x_2\ x_3$ ومعادلاتها البارامترية تعطى من

$$x_2 = \sin t,\ x_3 = \cos t$$

وبالتعويض في المعادلات المعطاة نحصل على $x_1 = \sin^2 t$ ويكون التمثيل البارامتري (المعادلة الاتجاهية) هو

$$x(t) = (\sin^2 t, \sin t, \cos t),\quad 0 \le t < 2\pi$$

وإذا كانت $x_1 = u \ge 0$ ، $0 \le x_1 \le 1$ فإن

$$x_1 = u, x_2 = \pm\sqrt{u},\ x_3 = \pm\sqrt{1-u},\ u \le 1$$

فيكون لدينا تمثيلين بارامتريين يتوقفان على أجزاء المنحنى في الفراغ

$$x(t) = (u, \sqrt{u}, \sqrt{1-u})$$

$$x(t) = (u, -\sqrt{u}, -\sqrt{1-u})$$

ملاحظة (٦.٣):

المنحنى في المثال السابق هو تقاطع أسطوانتين مكافئتين أي قاعدتهما قطاعات مكافئة في المستوى x_1x_2 ، x_1x_3 على الترتيب والتمثيل البارامتري بدلالة البارامتر t يكافئ التمثيل البارامتر بدلالة البارامتر u أي أنهما يصفا نفس المنحنى من خلال التحويل $u = \sin^2 t$ وبالتالي فهو منحنى منتظم.

(٤.٣) المستوى اللاصق : Osculating plane

المستوى المماس Tangent plane لمنحنى فراغي عند نقطة ما عليه هو أي مستوى يحتوي على المماس عند تلك النقطة. عموماً يوجد أحد هذه المستويات المماسية للمنحنى ويختلف عن أي مستوى آخر ويسمى بالمستوى اللاصق.

تعريف (٢.٣) :

يقال أن الدالة $\phi(t)$ لها موضع صفري عند $t = t_o$ رتبته n إذا كان وفقط إذا كان

$$\phi^{(k)}(t_o) = 0,\ k = 0,1,...,n-1,\ \ \phi^{(n)}(t_o) \neq 0 \qquad (3.15)$$

والتي تكافئ تكرار الجذور (المواضع الصفرية) حيث

$$\lim_{t \to t_o} \frac{\phi(t)}{(t-t_o)^n} = A \neq 0 \ \ (\text{const.})$$

أو

$$\therefore\ \phi(t) = A(t-t_o)^n + O(t-t_o)^{n+1} \qquad (3.16)$$

تعريف (٣.٣):

يقال أن المنحنى $\underline{x} = \underline{x}(t)$ والمستوى $<\underline{x} - \underline{a}, \underline{\gamma}> = 0$ لهما التصاق من رتبة n عند النقطة المشتركة $\underline{a}$ إذا كان وكان فقط دالة المسافة $\phi(t)$ بين نقطة على المنحنى $x(t)$ ونقطة على المستوى لها موضع صفري من رتبة $n+1$ عند $t = t_o$. حيث $\phi(t)$ هي الدالة الناتجة من التعويض بنقط المنحنى في معادلة المستوى. يقال أن الالتصاق من رتبة أكبر من n إذا كان وإذا كان فقط

$$\phi^{(k)}(t_o) = 0, k = 0,1,...,n+1 \qquad (3.17)$$

مثال (١٣.٣):

أوجد رتبة الالتصاق بين منحنى الحلزون

$$x_1 = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, x_2 = \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, x_3 = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

والمستوى $x_2 = x_3$ عند النقطة $s=0$ حيث s بارامتر طول قوس المنحنى.

الحل:

واضح أن النقطة $(1, 0, 0)$ $(s = 0$ في المعادلات البارامترية للمنحنى) واقعة على المستوى والمنحنى في نفس الوقت (نقطة مشتركة). المستوى المعطى معادلته هي

$$\sigma : x_2 - x_3 = 0$$

دالة المسافة $\phi(s)$ تعني طول العمود الساقط من النقطة $x(s)$ على المنحنى إلى المستوى σ (هندسة تحليلية في الفراغ) أي هي

$$\phi(s) = \frac{x_2(s) - x_3(s)}{\sqrt{2}}$$

ومن معادلات المنحنى نحصل على

$$\phi(s) = -\frac{s}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}$$

واضح أن

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = 0,\ \phi'''(0) \neq 0\ ,\ ' = \frac{d}{ds}$$

إذاً الموضع الصفري $s = 0$ لدالة المسافة $\phi(s)$ من الرتبة الثالثة والالتصاق من الرتبة الثانية.

تعريف (٤.٣):

المستوى المماس للمنحنى والذي له الالتصاق من رتبة أكبر من الواحد يسمى المستوى اللاصق osculating plane.

معادلة المستوى اللاصق تعطى من النظرية التالية :

نظرية (٤.٣):

نفرض أن $\underline{x} = \underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ منحنى فراغ يحقق :

(i) $x_i(\text{t}) \in C^2$, (ii) $\underline{x}' \times \underline{x}''(t) \neq \underline{0}$ at $t = t_o$

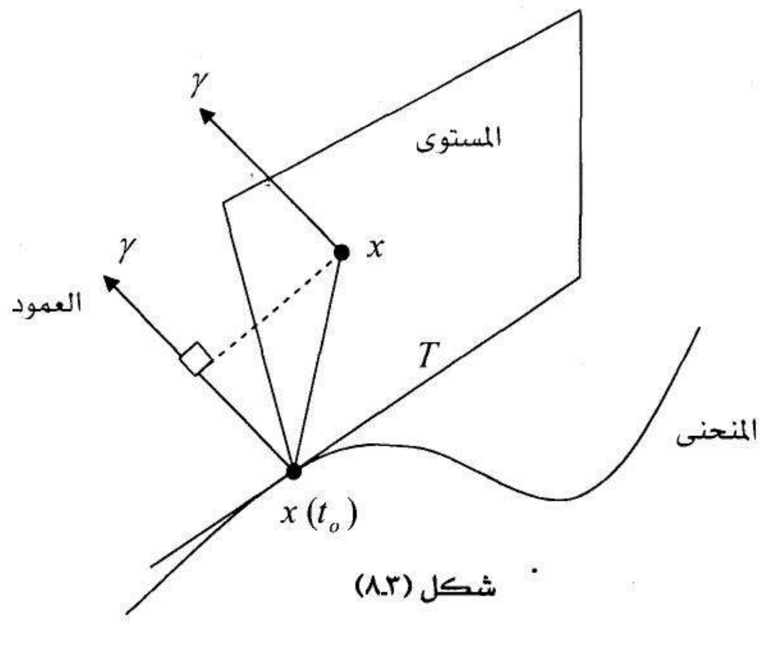
إذاً المنحنى $\underline{x} = \underline{x}(t)$ له مستوى التصاق وحيد عند النقطة $t = t_o$ معادلته هي

$$[\underline{x} - \underline{x}(t_o), \underline{x}'(t_o), \underline{x}''(t_o)] = 0 \qquad (3.18)$$

أو ما يكافئ

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1(t_o) & x'_1(t_o) & x''_1(t_o) \\ x_2 - x_2(t_o) & x'_2(t_o) & x''_2(t_o) \\ x_3 - x_3(t_o) & x'_3(t_o) & x''_3(t_o) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.19)$$

كما هو موضح في شكل (٨.٣).



شكل (٨.٣)

البرهان:

بعد النقطة t_o على المنحنى عن المستوى

$$< \underline{x} - \underline{x}(t_o), \underline{\gamma} > = 0$$

(العمودي عليه $\underline{\gamma}$ وله نقطة مشتركة $x(t_o)$ مع المنحنى)

يعطى من

$$\phi(t) = \pm \frac{<\underline{x}(t) - \underline{x}(t_o), \underline{\gamma}>}{\sqrt{<\underline{\gamma},\underline{\gamma}>}} \qquad (3.20)$$

حيث $\underline{\gamma}$ متجه ثابت وهو العمودي على المستوى.

بالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على

$$\therefore \ \pm\sqrt{<\underline{\gamma}\ ,\ \underline{\gamma}>}\ \ \phi'(t) = <\underline{x}'(t_o), \underline{\gamma}> \quad , \quad (\underline{x}(t_o)\text{ثابت})$$

وبالتفاضل مرة أخرى نحصل على

$$\pm\ \sqrt{<\underline{\gamma},\ \underline{\gamma}>}\ \ \phi''(t) = <\underline{x}''(t_o), \underline{\gamma}>$$

إذا كان

$$\phi'(t_o) = \phi''(t_o) = 0$$

$$\therefore <\underline{x}'(t_o), \underline{\gamma}> = <\underline{x}''(t_o),\ \underline{\gamma}> = 0$$

أي أن المتجه γ عمودي على كل من $x''(t_o), x'(t_o)$ إذاً المتجه γ يوازي المتجه

$$\underline{x}'(t_o) \times \underline{x}''(t_o)$$

وهذا معناه أن دالة المسافة $\phi(t)$ لها موضع صفري من رتبة أعلى من 2 عند $t = t_o$ أي

$$\phi(t_o) = \phi'(t_o) = \phi''(t_o) = 0$$

وهذا يكافئ أن المتجه $\underline{x}'(t_o) \times \underline{x}''(t_o)$ يوازي المتجه γ . إذاً يوجد مستوى مماس وحيد له التصاق من رتبة أعلى من الأولى وهو المستوى اللاصق الذي معادلته (3.18) أو (3.19).

مثال (١٤،٣):

أوجد معادلة المستوى اللاصق عند $(1, 0, 0)$ على المنحنى

$$\underline{x}(\mathrm{t}) = (\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}})$$

الحل:

معادلة المستوى اللاصق عند $t = 0$ أي عند $(1, 0, 0)$ (باستخدام النظرية والعلاقة (3.19)) هي

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

أو ما يكافئ $x_2 = x_3$ (في المحدد (3.19) بدلنا الأعمدة بالصفوف).

تعريف (٥،٣):

- يقال أن المنحنى $y = f(x)$ له تلاصق من الرتبة الثانية مع المنحنى $y = \Phi(x)$ عند النقطة $x = x_o$ إذا تحقق

$$f^{(k)}(x) = \Phi^{(k)}(x), k = 0,1,2$$

أي أن المشتقات التفاضلية حتى الرتبة الثانية عند $x = x_o$ متطابقة بمعنى

$$f(x_o) = \Phi(x_o), f'(x_o) = \Phi'(x_o), f''(x_o) = \Phi''(x_o) \quad (3.21)$$

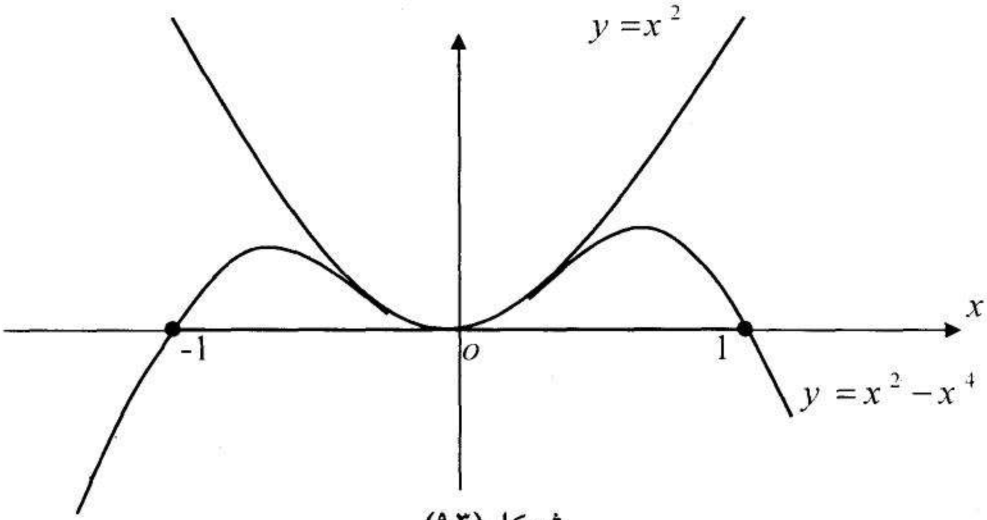
مثال (١٥،٣):

بين أن المنحنى $y = f(x) = x^2$ له تلاصق من الرتبة الثانية مع المنحنى $y = \Phi(x) = x^2 - x^4$ عند النقطة $(0,0)$.

الحل:

النقطة $(0,0)$ هي نقطة أصل الإحداثيات وواقعة على كل من المنحنيين وتحقق شروط التلاصق (3.21) كما هو موضح في شكل (٩،٣) حيث

$$f^{(k)}(0) = \Phi^{(k)}(0), k = 0,1,2$$



شكل (٣.٩)

ملاحظة (٣.٧):

تذكر أن الخط المماس عند نقطة p على منحنى يعرف على أنه الوضع النهائي للخط الذي يمر خلال نقطتين متجاورتين على المنحنى عندما تقترب النقطتين من النقطة p.

ملاحظة (٣.٨):

المستوى اللاصق عند نقطة p على منحنى يمكن تعريفه على أنه الوضع النهائي للمستوى المار خلال ثلاث نقط متجاورة على المنحنى عندما تقترب النقاط الثلاث من النقطة p.

(٣.٥) الثلاثي المتحرك عند أي نقطة على المنحنى (حقل المتجهات):

Moving Frame:

لكل نقطة من نقاط المنحنى $\underline{x} = \underline{x}(t)$ يصاحبها ثلاث متجهات وحدة متعامدة فيما بينها ولتكن $\underline{T}, \underline{n}, \underline{b}$ Orthonormal Vectors هذه الثلاثية تسمى الثلاثي المتحرك Frame field أو الإطار المتحرك على امتداد المنحنى.

أولاً : نعرف الثلاثي المتحرك للمنحنى المعطى بالتمثيل الطبيعي (s) $\underline{x} = \underline{x}(s)$ حيث

$$\underline{T} = \dot{\underline{x}}(s),\ \underline{n} = \frac{\ddot{\underline{x}}(s)}{|\ddot{\underline{x}}(s)|}, \underline{b} = \frac{\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}}{|\dot{\underline{x}}(s) \times \ddot{\underline{x}}|}, \dot{.} = \frac{d}{ds} \quad (3.22)$$

ولإثبات ذلك نستخدم المتطابقات المعرفة في الباب الأول:

مثلاً :

$$< \dot{\underline{x}} . \dot{\underline{x}} >= 1,$$

$$\therefore \frac{d}{dt} < \dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} > \equiv 0$$

ويكون

$$< \dot{x}(s), \ddot{x}(s) >= 0$$

أي أن $\ddot{x}(s)$ عمودي على $\dot{x}$ وليكن n متجه الوحدة على امتداد $\ddot{x}(s)$ حيث

$$n = \frac{\ddot{x}(s)}{|\ddot{x}(s)|}$$

وبالحساب المباشر نجد أن (من (3.22)).

$$\begin{aligned} &< \underline{T}, \underline{n} > = < \underline{n}, \underline{b} > = < \underline{b}, \underline{T} > = 0 \\ &< \underline{T}, \underline{T} > = < \underline{n}, \underline{n} > = < \underline{b}, \underline{b} > = 1 \\ &\underline{T} = \underline{n} \times \underline{b}\ ,\ \underline{n} = \underline{b} \times \underline{T},\ \underline{b} = \underline{T} \times \underline{n} \\ &[\underline{T},\ \underline{n}, \underline{b}] = 1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

لاحظ أن المتجهات $\underline{T}, \underline{n}, \underline{b}$ في هذا الترتيب لها نفس الترتيب في الوضع لمحاور الاحداثيات وتسمى بمتجهات الوحدة للمماس $\underline{T}$ tangent والعمود الأساسي $\underline{n}$ principal normal والعمود الجانبي (الثانوي) $\underline{b}$ binormal والمستقيمات غير المحددة الواقع عليها هذه المتجهات تسمى بخط المماس والعمود الأساسي والعمود الثانوي حيث العمود الأساسي يقع في المستوى اللاصق والعمود الثانوي عمودي عليه.

أوجه الثلاثي المكون من حقول المتجهات T, n, b عبارة عن ثلاث مستويات هي

المستوى العمودي normal plane

$$<\underline{X}-\underline{x}(s),\underline{T}>=0 \qquad (3.24)$$

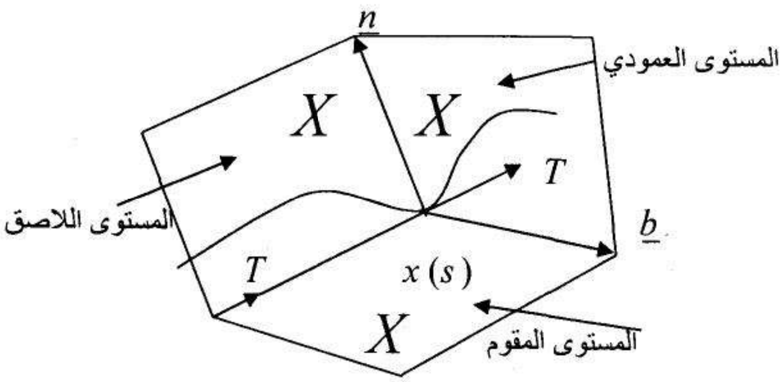
والمستوى المقوم rectifying plane

$$<\underline{X}-\underline{x}(s),\underline{n}>=0 \qquad (3.25)$$

والمستوى اللاصق

$$<\underline{X}-\underline{x}(s),\underline{b}>=0 \qquad (3.26)$$

حيث $\underline{X}$ متجه الموضع لأي نقطة في هذه المستويات كما هو موضح في شكل (٣-١٠).



شكل (٣-١٠)

لاحظ أن المستوى المقوم هو مستوى تماس يحتوى على العمود الثانوي. وعليه فإنه عند كل نقطة على المنحنى يوجد ثلاثي متحرك من المتجهات وثلاثي متحرك من المستويات وهي إطارات ملازمة للمنحنى وهي حقول المستويات plane vector field وحقول المتجهات المصاحبة لمنحنى الفراغ.

ملاحظة (٣-٩):

الثلاثي (T,n,b) يكون إطار متحرك عند أي نقطة على المنحنى كما لو كان هناك راصد observer يتحرك على المنحنى. هذا الإطار يعتبر صورة للإطار الثابت (e_1,e_2,e_3) بالنسبة للفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3$.

مثال (٣-١٦):

بالنسبة لمنحنى الحلزون

$$x_1 = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, x_2 = \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, x_3 = \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad (s \text{ بارامتر طول القوس})$$

أوجد الثلاثي المتحرك $\underline{T},\underline{n},\underline{b}$ والمستويات التي تحدد بأوجه الثلاثي المتحرك عند النقطة $s = 0$

الحل:

بالتفاضل واستخدام العلاقات (3.22)، (3.23)، (3.24)، (3.25)، (3.26) نحصل على الثلاثي

$$\underline{T} \equiv (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad \underline{n} \equiv (-1,0,0), \quad \underline{b} \equiv (0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

عند البارامتر $s = 0$ الذي يناظر النقطة $x(0) = (1,0,0)$ على المنحنى.

إذاً المستوى العمودي والمستوى اللاصق والمستوى المقوم يعطى من

$$x_2 + x_3 = 0 \ , \quad x_2 - x_3 = 0, \ x_1 = 0,$$

على الترتيب.

ملاحظة (٣-١٠):

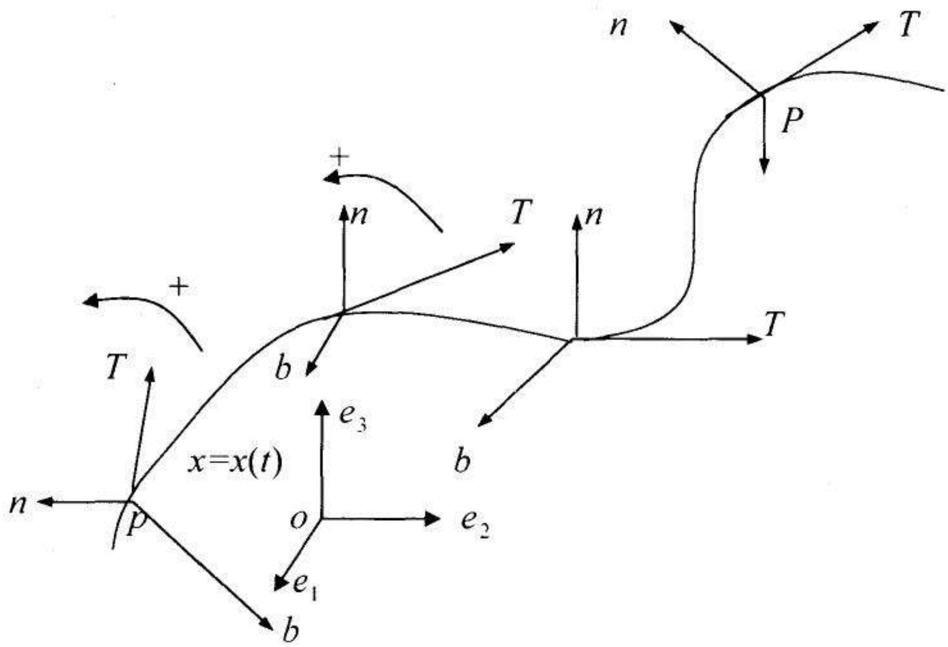
في المثال السابق $|\frac{dx}{ds}| = 1$ لأن s بارامتر طول القوس.

ثانياً: للمنحنى المنتظم $\underline{x} = \underline{x}(t)$ يكون $\frac{ds}{dt} = |\underline{\dot{x}}(t)| \neq 0$ وباستخدام طريقة

جرام شميدت Gram Schmidtt والعلاقة بين الضرب القياسي والاتجاهي في الباب الثاني يمكن تكوين حقل الثلاثي العياري المتعامد $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ على الصورة :

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \frac{\underline{x}'}{|\underline{x}'|}, \\ \underline{n} &= \frac{<\underline{x}',\underline{x}'>\underline{x}''-<\underline{x}',\underline{x}''>\underline{x}'}{|\underline{x}'||\underline{x}'\times\underline{x}''|}, \qquad (3.27) \\ \underline{b} &= \frac{\underline{x}'\times\underline{x}''}{|\underline{x}'\times\underline{x}''|} \end{aligned}$$

كما هو موضح بالشكل (٣.١٠).



شكل (٣.١٠)

العلاقات (3.27) يمكن الحصول عليها بسهولة (جرام . شميدت) حيث المتجه

$$u = x'' - \langle x'', T \rangle T$$

عمودي على المتجه T، $\frac{u}{|u|}$ متجه الوحدة العمودي n ، $b = T \times n$.

تعريف (٦.٣):

الثلاثي المتحرك $\{T, n, b\}$ على امتداد المنحنى المنتظم $\underline{x} = \underline{x}(s)$ يسمى إطار فرينيه المتحرك Frenet Frame field.

مثال (١٧.٣):

إذا كانت $x = x(s)$ ، $x = x^{*}(s^{*})$ تمثيلات طبيعية لنفس المنحنى. إذاً

$$s = \pm s^{*} + \text{const.}$$

الحل:

نفرض أن $s = s(s^{*})$ إذاً

$$\frac{dx}{ds^{*}} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^{*}},$$

$$\left|\frac{dx}{ds^{*}}\right| = \left|\frac{dx}{ds}\right| \left|\frac{ds}{ds^{*}}\right|$$

وحيث أن x، x^{*} تمثيلات طبيعية فيكون لدينا

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| = \left|\frac{dx}{ds^{*}}\right| = 1$$

$$\therefore \left|\frac{ds}{ds^{*}}\right| = 1 \quad \text{or} \quad \frac{ds}{ds^{*}} = \pm 1$$

وبالتكامل نحصل على

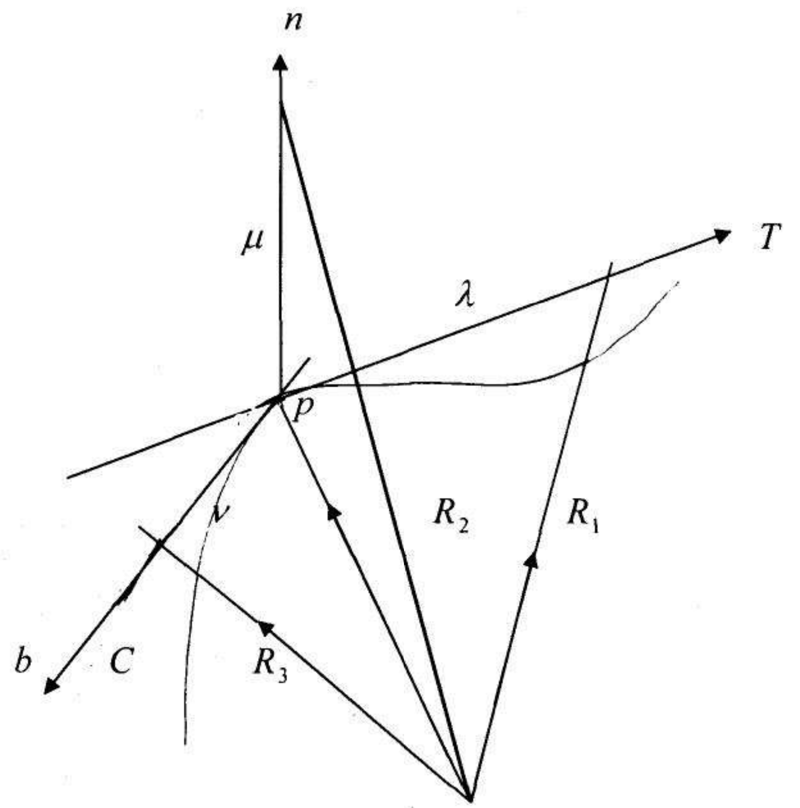
$$s = \pm s^{*} + \text{const.}$$

وهو المطلوب إثباته.

ملاحظة (١١.٣):

باستخدام الاتجاهات T, n, b نحصل على معادلات خط المماس وخط العمود الأساس وخط العمود الثانوي عند نقطة $p = x(s_o)$ على المنحنى $C : x = x(s)$ كما هو موضح في شكل (١١.٣).

$$\begin{aligned} R_1 &= x(s_o) + \lambda T \\ R_2 &= x(s_o) + \mu n \qquad , \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \qquad (3.28) \\ R_3 &= x(s_o) + \nu b \end{aligned}$$



شكل (١١.٣)

تمارين (٣)

(١) أوجد المعادلات البارامترية لمنحنى الحلزون الدائري الذي يقع على الاسطوانة $x_1^2+x_2^2=4$ ويمر خلال النقط $(2,0,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$. هل يوجد أكثر من حلزون دائري من هذا النوع؟

(**إرشاد:** منحنى الحلزون الدائري له التمثيل البارامتري $r(\theta)=(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$ وبالتعويض بالنقط المعطاة نجد أن $a = 2$، $b=\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}$).

(٢) أوجد المعادلات البارامترية لمنحنى القطع الناقص الذي يقع في المستوى $x_2=\dfrac{x_1}{\sqrt{3}}$ ومحوره الأكبر يقع في المستوى $x_1\,x_2$ ومحورة الأصغر هو محور ox_3.

(**إرشاد:** $x_3=b\sin t$ ، $x_2=a\cos t$ ، $x_1=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos t$ ، $a>b$)

(٣) بين أن المنحنى التكعيبي $(a=b=c=1)$ هو تقاطع الاسطوانات الآتية:

$$x_2=x_1^2,\ x_3=x_1^3$$

(**إرشاد:** ضع $x_1=t$ والمنحنى التكعيبي $x(t)=(at,bt^2,ct^3)$)

(٤) أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى

$$x_2^2=x_1, x_3^2=1-x_1 \quad 0\le t\le 2\pi$$

(**إرشاد:** $x_1=\sin^2 t, x_3=\cos t, x_2=\sin t, x_2^2+x_3^2=1$)

(٥) أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى

(أسطوانتين دائريتين قائمتين) $x_1^2+x_2^2=\rho^2$, $x_1^2+x_3^2=\rho^2$

ما هي المنحنيات التي لها هذا التمثيل البارامتري؟

(**إرشاد:** استخدم نظرية الدوال الضمنية وتأكد من أن $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_2,x_3)} \neq 0$ وعبر عن x_2,x_3 بدلالة x_1 نجد أن المنحنى دائرة في المستوى $x_2 = x_3$).

(٦) أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى $x_1 x_2 x_3 = 1,\ x_2^2 = x_1$

(**إرشاد:** مثل التمرين السابق)

(٧) هل المنحنى التكعيبي في تمرين (٣) يقطع الخط المستقيم

$$x_1 = 1+u,\ x_2 = -1+5u,\ x_3 = 1+7u\ ?$$

(**إرشاد:** ساوي المركبات للخط المستقيم مع مركبات المنحنى وأوجد قيم u المناسبة).

(٨) ما هو المنحنى المعطى بالمعادلات البارامترية

$$x_1 = 1+\sin t,\ x_2 = -1-\sin t,\ x_3 = 2\sin t\ ?$$

(**إرشاد:** راجع النظريات (2.1) & (2.2))

(٩) هل المنحنى

$$x_1 = \cos e^t, x_2 = \sin e^t, x_3 = \sin e^t$$

خط مستقيم أو منحنى مستوي.

(**إرشاد:** راجع النظريات (2.1) & (2.2))

(١٠) أوجد كل الدوال $f(t)$ من الطبقة الثالثة C^3 التي تجعل المنحنى

$$x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = f(t)$$

منحنى مستوي.

(**إرشاد:** الدالة $f(t)$ يقال أنها من طبقة C^k إذا كانت متصلة ولها مشتقات تفاضلية متصلة حتى الرتبة k وكذلك تحقق $[\underline{x}',\underline{x}'',\underline{x}'''] \equiv 0$).

(١١) أوجد التمثيل البارامتري للدائرة $a = x_1 , 4a^2 = <\underline{x} , \underline{x}>$ وأوجد طول محيطها عن طريق التكامل.

(**إرشاد:** الدائرة المعطاة هي تقاطع مستوى مع كرة نصف قطرها $2a$ ومركزها نقطة الأصل).

(١٢) أوجد طول قوس المنحنى $\underline{x}(t) = (e^t , e^{-t} , \sqrt{2}t)$ من $t = 0$ إلى t_o.

(١٣) أوجد طول المنحنى التكعيبي $\underline{x}(t) = (6t , 3t^2 , t^3)$ من $t = 0$ إلى $t = 6$.

(١٤) أوجد معادلات خط التماس والمستوى العمودي عند أي نقطة اختيارية للمنحنى في (١٣).

(١٥) أوجد معادلات المماس والمستوى العمودي للمنحنى الحلزوني $\underline{x}(t) = (\cos t , \sin t , t)$ عند أي نقطة أختيارية P. إذا قطع المستوى العمودي محور x_3 في نقطة Q، بين أن المستقيم PQ يوازي المستوى x_1x_2.

(١٦) أوجد الزاوية بين المنحنين

(i) $x_2^2 = x_1 \ , \ x_3^2 = 2 - x_1$ (أسطوانتين مكافئتين)

(ii) $x_1 = t \ , \ x_2 = t^2 , \ x_3 = t^3$ (منحنى تكعيبي)

عند النقطة $(1, 1, 1)$.

(**إرشاد:** أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى (i) والزاوية بين المنحنيين هي الزاوية بين المماسين لهذين المنحنيين).

(١٧) أوجد معادلة المماس والمستوى العمودي للمنحنيات

(i) $x_2 = f(x_1) \ , \ x_3 = g(x_1)$

(ii) $F(x_1 , x_2) = 0, \ G(x_1 , x_3) = 0$

(iii) $F(x_1 , x_2 , x_3) = 0 \ , \ G(x_1 , x_2 , x_3) = 0$

(إرشـاد : أوجـد التمثيـل البـارمتري للمنحنيـات مـستعيناً بنظريـة الدالـة الـضمنية ومناقشة كل الحالات الممكنة للدوال المعطاة).

(١٨) أوجد مركبات متجه المماس للمنحنى (تقاطع سطحين)

(سطح مجسم ناقصي (بيضاوي)) $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 = 9$

(سطح كرة) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$

عند النقطة $(2, 1, 1)$.

(إرشاد: مثل تمرين (١٧)).

(١٩) أوجد اتجاه متجه التماس عند النقطة المفردة للمنحنى $\underline{x}(t) = (t^2, t^3, t^4)$

(إرشاد: النقاط المفردة تتعين من $\underline{x}'(t) = \underline{0}$)

(٢٠) هل البارامتر t هو بارامتر طول قوس للمنحنى (بارامتر طبيعي)

$$x_1 = \frac{\sqrt{t^2 + t + 4}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{t^2 + 4 - t}}{2}, \ x_3 = \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{t^2 + 4 + t}}{2}.$$

(إرشاد : تحقق من أن $|\underline{x}'| = 1$).

(٢١) بـين أن المـستوى اللاصـق للمنحنـى $\underline{x}(t) = (t, 1-t, t+t^2)$ عنـد النقطـة $(1,0,2)$ يوازي محور x_3 (العمودي على المستوى عمودي على محور x_3).

(إرشاد: أوجد $\underline{b}$ وأثبت أن $<\underline{b}, \underline{e}_3> = 0$).

(٢٢) أوجد المستوى اللاصق للمنحنى التكعيبي عند أي نقطة اختيارية.

(٢٣) أوجد رتبة التصاق المنحنى $x_3 = x_2^2, \ x_1^2 = 1 - x_3$ مع المستوى اللاصق عند النقطة $(1,0,0)$.

(إرشاد: أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى حيث أنه تقاطع أسطوانتين).

(٢٤) أوجد رتبة التصاق المنحنى $\underline{x}(t)=(t,t^2,t^3)$ مع كل من المستويات الإحداثية الثلاث.

(٢٥) بين أن المستوى اللاصق لمنحنى مستوي هو المستوى الواقع فيه المنحنى.

(٢٦) بين أن المنحنى الذي له كل المستويات اللاصقة عند النقاط على امتداد المنحنى توازي مستوى ثابت هو منحنى مستوي.

(٢٧) أوجد حقل المتجهات $\underline{T},\underline{n},\underline{b}$ للمنحنيات

(i) $\underline{x}(t)=(2\sin^2 t,\ \sin 2t, 2\cos t)$

(ii) $x_1^2+x_2^2=a^2, 2x_1x_2=ax_3$

(منحنى تقاطع أسطوانة دائرية قائمة مع مجسم زائدي).

(٢٨) أوجد رتبة التصاق المنحنى

$$\underline{x}(t)=(4(t-1),-6(t+2\cos t),3(1-e^{-2t}))$$

مع المستوى $x_1+x_2-x_3+16=0$ عند النقطة $(-4,-12,0)$ ، هل هذا المستوى هو مستوى لاصق للمنحنى؟

(٢٩) بين أن التمثيل البارامتري

$$x(s)=(\frac{1}{2}f(s),\frac{1}{2f(s)},\frac{1}{\sqrt{2}}\log f(s)),\ f(s)>0$$

تمثيل طبيعي حيث $f(s)=s+\sqrt{s^2+1}$

(**إرشاد:** أثبت أن $|\frac{dx}{ds}|=1$).

(٣٠) أوجد التمثيل البارامتري الطبيعي للمنحنى

$$x=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t), t\in\mathbb{R}$$

(إرشاد: استخدم العلاقة $s=\int_0^t |\frac{dx}{dt}|dt$ لنحصل على s دالة في t ومنها نحصل على $(t=t(s)$

(٣١) بين أن الدوال الاتجاهية

$$x=(t,\sin t,e^t),-\infty<t<\infty\ ;\ x=(\log u,\sin\log u,u),\ 0<u<\infty$$

هي تمثيلات بارامترية لنفس المنحنى الموجة (منحنى منتظم).

(إرشاد: استخدم تغيير البارامتر المسموح به $t=\log u$ وتأكد من أن $(\frac{dt}{du}=\frac{1}{u}>0$

(٣٢) أوجد طول قوس المنحنى $x=(3\cosh 2t,3\sinh 2t,6t),0\le t\le\pi)$

(٣٣) بين أن المماسات للمنحنى $x=(at,bt^2.t^3)\ ,2b^2=3a$ تصنع زاوية ثابتة مع الاتجاه الثابت $\underline{a}=(1,0,1)$

(٣٤) بين أن المنحنى $x(u)=(u,1-\frac{1}{u},\frac{1}{u}-u)$ يقع في مستوى حيث $u\in\mathbb{R}-\{0\}$.

(٣٥) أوجد تقاطع المستوى x_1x_2 مع خطوط التماس للمنحنى

$$C:x=(\cos u,\sin u,u),u>0$$

(إرشاد: أوجد معادلة المماس للمنحنى C عند أي نقطة اختيارية u وضع $x_3=0$ (المركبة الثالثة في معادلة المماس) نحصل على نقاط التقاطع وهي تمثل منحنى واقع في المستوى $x_3=0$).

الباب الرابع

الهندسة الخارجية لمنحنى الفراغ

Extrinsic Geometry of Space Curve

بعد أن قدمنا تعريف منحنى الفراغ من خلال دالة اتجاهية منتظمة في متغير واحد وقدمنا كذلك طرق الحصول على التمثيل البارامتري المنتظم للمنحنى وعرفنا دالة المسافة القوسية على المنحنى من خلال المشتقة الأولى للدالة الاتجاهية التي تعرف المنحنى. المشتقة الاتجاهية هذه تمثل متجه السرعة من خلال المشتقة الأولى. عرفنا كذلك الإطار المتحرك (إطار فرينيه) والمستويات المصاحبة له عند أي نقطة على المنحنى. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن ماذا عن متجه التسارع ونعني به الانحناء وكيف نفرق بين منحنى في المستوى ومنحنى في الفراغ وذلك من خلال دالة الليّ وهذا هو موضوع هذا الباب الذي يحتوي على طرق حساب الانحناء واللّيّ وصيغ سيريه - فرينيه التفاضلية المصاحبة لإطار فرينيه وأخيراً نطبق ذلك على المنحنى الحلزوني.

(١.٤) دالة (حقل) الانحناء لمنحنى فراغ:

Curvature Function of Space Curve:

تعريف (١.٤):

يعرف الانحناء عند نقطة ما على منحنى فراغ منتظم بأنه مقياس المعدل الذي عنده يدور المنحنى مبتعداً عن خط المماس عند تلك النقطة.

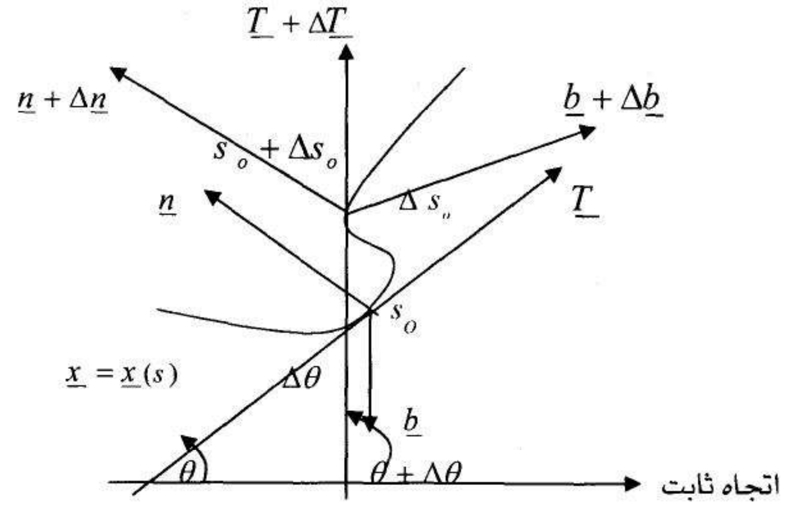
نعتبر منحنى في الفراغ له المعادلة الاتجاهية (بدلالة بارامتر طول القوس s) الآتية:

$$\underline{x} = \underline{x}(s) \qquad (4.1)$$

الانحناء للمنحنى (4.1) عند النقطة التي لها البارامتر $s = s_o$ هو معدل دوران المماس ويعطى من

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \qquad (4.2)$$

حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية بين المماس $\underline{T}$ عند النقطة s_o والمماس $\underline{T}+\Delta\underline{T}$ عند النقطة $s_o + \Delta s_o$ كما هو موضح في شكل (٤ـ١).



شكل (٤ـ١)

مثال (٤ـ١):

أوجد الانحناء للدائرة التي نصف قطرها a وتمثيلها البارامتري هو

$$\underline{x}(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{a}, \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{a}, a\cos\frac{s}{a}\right) \quad (s \text{ بارامتر طول القوس})$$

الحل:

اتجاه المماسات للمنحنى (الدائرة) عند النقط المتجاورة s_o , $s_o + \Delta s_o$ تعطى من

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_{s=s_o} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o}{a}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o}{a}, -\sin\frac{s_o}{a}\right), \quad (\text{متجه الوحدة})$$

$$(\frac{dx}{ds})_{s_o+\Delta s_o}=(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o+\Delta s_o}{a},\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o+\Delta s_o}{a},-\sin\frac{s_o+\Delta s_o}{a})$$ و

على الترتيب. إذاً الزاوية $\Delta\theta$ بين المماسين تعطى من

$$\cos\Delta\theta=\cos\frac{s_o}{a}\cos\frac{s_o+\Delta s_o}{a}+\sin\frac{s_o}{a}\sin\frac{s_o+\Delta s_o}{a}$$

$$=\cos\frac{\Delta s_o}{a}\ \Rightarrow\ \Delta\theta=\frac{\Delta s_o}{a}$$ (باستخدام المتطابقات المثلثية)

حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية بين المماسين عند النقطتين $s_o+\Delta s_o, s_o$

$$\therefore\quad \frac{\Delta\theta}{\Delta s_o}=\frac{1}{a}\ ,\quad \text{i. e.,}\quad \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s_o}=\frac{1}{a}=\frac{1}{R}$$

أيّ أنه بالنسبة للدائرة يكون الانحناء مساوي مقلوب نصف القطر وعموماً مقلوب الانحناء يسمى نصف قطر الانحناء كما سوف نرى ذلك في الباب القادم. لاحظ أن هذا المنحنى هو دائرة واقعة في المستوى $x_1=x_2$.

تعريف (٢٤):

يعرف متجه الانحناء لمنحنى C عند نقطة ما بأنه معدل دوران متجه المماس عند هذه النقطة.

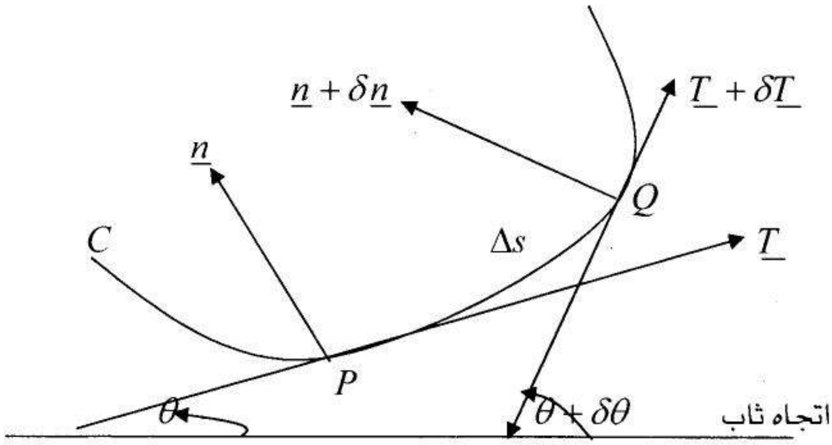
نظرية (١٤):

المنحنى المنتظم $C:\underline{r}=\underline{r}(s)$ (متصل وقابل للتفاضل مرتين) له انحناء محدد k عند كل نقطة من نقطه ويعطى من $k=|\frac{d^2\underline{r}(s)}{ds^2}|$ حيث $\underline{r}=\underline{r}(s)$ هو التمثيل الطبيعي للمنحنى C.

البرهان:

نفرض أن P نقطة ما على المنحنى C وأن المماس عند P هو $\underline{T}$ والعمودي الأساسي عند P هو $\underline{n}$ ونفرض أن Q نقطة قريبة قرباً كافياً من P أي أن المماس

عند Q هو $\underline{T} + \delta\underline{T}$ والعمودي الأول (الأساسي) هو $\underline{n} + \delta\underline{n}$ كما هو موضح في شكل (٢.٤).



شكل (٢.٤)

وباستخدام تمرين (٣) من تمارين (٢) في الباب الثاني نحصل على:

$$\delta\underline{T} = 2\sin\frac{\delta\theta}{2}.\ \underline{k}$$

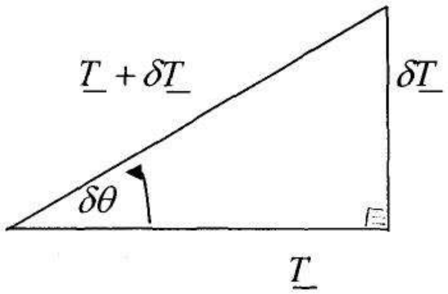
حيث $\underline{k}$ وحدة المتجهات في اتجاه δT كما هو موضح في شكل (٣.٤) حيث

$$|\underline{T}| = |\underline{T} + \delta\underline{T}| = 1$$

$$\therefore \frac{\delta\underline{T}}{\delta s} = \frac{2\sin\frac{\delta\theta}{2}}{\delta\theta}\ \frac{\delta\theta}{\delta s}.\underline{k} = \frac{\sin\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}.\frac{\delta\theta}{\delta s}.\underline{k}$$

$$\therefore \lim_{\substack{\delta\underline{T}\to 0\\ \delta s\to 0}} \frac{\delta\underline{T}}{\delta s} = \frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{d\theta}{ds}.\underline{n} \quad , \qquad \lim_{\substack{\delta\underline{T}\to 0\\ \delta s\to 0}} \underline{k} = \underline{n}$$

$$\therefore \dot{\underline{T}} = k\,\underline{n} \qquad (4.3)$$



شكل (٣.٤)

حيث

$$T = \frac{dr}{ds} \text{ ، } \underline{T} + \delta\underline{T} = (\frac{dr}{ds})_{s+\Delta s}$$

عند النقطة $Q(s + \Delta s)$ ، $P(s)$ على الترتيب.

المتجه $\underline{k}$ المعرف من خلال الدالة الاتجاهية

$$\ddot{\underline{r}}(\mathrm{s}) = \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} = \frac{d\underline{T}}{ds} = \underline{k} \qquad (4.4)$$

يسمى بمتجه الانحناء Curvature Vector ويكون طول هذا المتجه هو الانحناء k ويعطى من

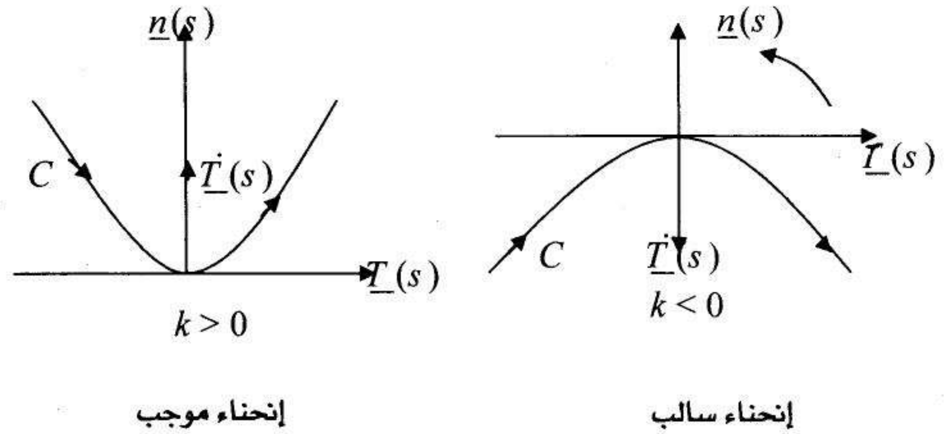
$$k = |\dot{\underline{T}}| = |\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}| = [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2]^{\frac{1}{2}} ,. \frac{d}{ds} \qquad (4.5)$$

وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

اتجاه متجه الانحناء يتحدد بالطريقة الآتية:

إذا أخذنا $\underline{n}$ ناحية الجهة المقعرة convex من المنحنى فإن الانحناء يكون موجب أما إذا أخذنا $\underline{n}$ متجه ناحية الجهة المحدبة convex من المنحنى فإن k تكون سالبة ويسمى $\rho = \frac{1}{k}$ بنصف قطر الانحناء radius of curvative. وسنتفق من

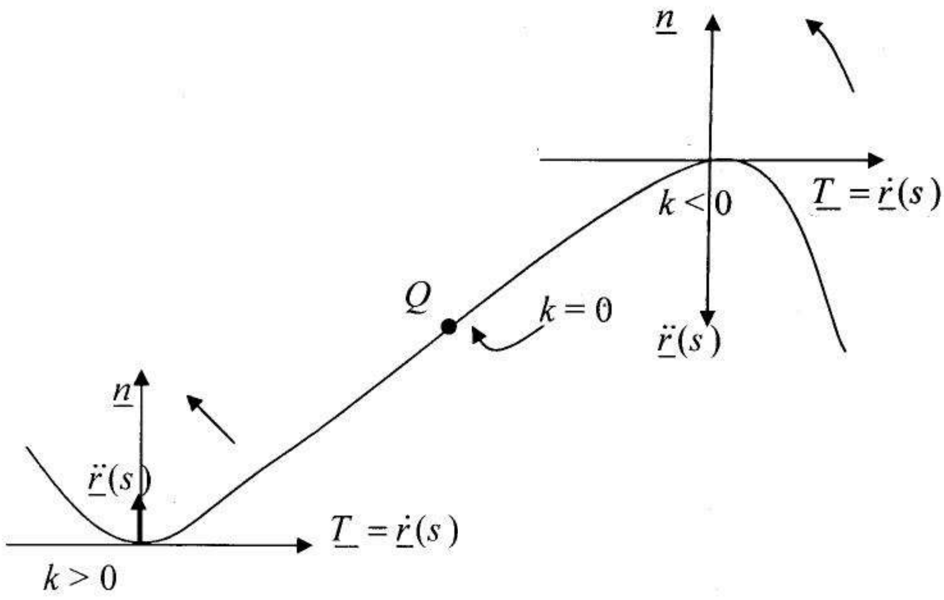
الآن على أن يكون الزوج $(\underline{T}(s), \underline{n}(s))$ بريمة يمينية في الفراغ $E^3 = \mathbb{R}^3$ كما هو مبين بالشكل (٤.٤).



شكل (٤.٤)

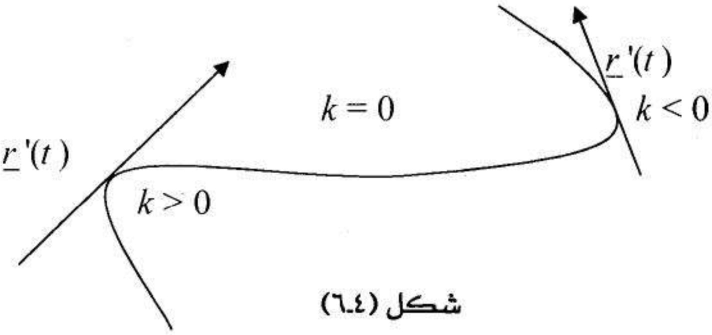
النقطة التي عندها يكون $\ddot{\underline{r}}(s) = \underline{0}$ أو $\ddot{\underline{r}}(s) = \lambda\ \dot{\underline{r}}(s)$ بحيث $\ddot{\underline{r}}(s) \neq \underline{0}$ تسمى نقطة انقلاب للمنحنى Inflection Point أو نقطة انعطاف أي النقطة التي يغير فيها المنحنى انحنائه من سالب إلى موجب أو العكس.

ويمكن القول بأن انحناء المنحنى موجب إذا كان $\dot{T} = \dfrac{d^2 r}{ds^2}$ في اتجاه العمود الأساسي n أما إذا كان يوازي n في الاتجاه المعاكس فإن الانحناء يكون سالب (أنظر شكل (٥.٤).



شكل (٥.٤)

واضح أن Q نقطة انقلاب للمنحنى المبين بالشكل (٥.٤) وبمقتضى هذا الاتفاق يتضح أن انحناء المنحنى في الفراغ غير سالب ولكن بالنسبة للمنحنيات التي تقع في المستوى تظهر غالباً إشارة تصاحب الانحناء ولتحديد هذه الإشارة نستخدم الاعتبارات التالية : متجه التماس $\underline{r}'(t)$ للمنحنى $\underline{r}=\underline{r}(t)$ يدور أثناء حركته على المنحنى في اتجاه زيادة t (البارامتر) وبالتالي الانحناء يكون موجب أو سالب بالاعتماد على اتجاه دوران المتجه $\underline{r}'(t)$ كما هو موضح بالشكل (٦.٤).



شكل (٦.٤)

ملاحظة (٤-١):

نقطة الانقلاب أو الإنعطاف تسمى أحياناً نقطة مستقيمة straight point حيث $k = 0$.

نظرية (٤-٢):

إذا كان انحناء المنحنى ينعدم عند كل نقطه عليه فإن المنحنى خط مستقيم.

البرهان:

$$\because k = \left|\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}\right| = 0 \Rightarrow \frac{d^2r}{ds^2} = \underline{0}$$

وبالتكامل مرتين نحصل على

$$\underline{r}(s) = \underline{a}s + \underline{b}$$

حيث $\underline{b}$, $\underline{a}$ متجهات ثابتة والمعادلة $\underline{r}(s) = \underline{a}\ s + \underline{b}$ تمثل المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم الذي اتجاهه $\underline{a}$ ويمر بالنقطة $\underline{b}$ أي أن المنحنى الذي له الانحناء ينعدم عند كل نقطه عليه يكون إما خط مستقيم أو فترة مفتوحة (قطعة مستقيمة) من خط مستقيم والعكس صحيح.

(٤-٢) دالة اللي لمنحنى الفراغ: Torsion function of a space curve

نعلم أنه بالنسبة للمنحنيات في المستوى يكون المستوى اللاصق للمنحنى ثابت دائماً ($\underline{b}$ = const.) ويكون هو المستوى الذي يقع فيه المنحنى نفسه. ولكن لمنحنى الفراغ لا يكون هذا صحيحاً ($\underline{b}$ دالة في s) دائماً حيث أن المستوى اللاصق للمنحنى يغير اتجاهه عند كل نقطة من نقط المنحنى وعلى ذلك فإنه يكون لهذا المستوى معدل دوران هو في نفس الوقت معدل دوران العمود الثانوي للمنحنى أي معدل دوران $\underline{b}$ والذي يساوي $\dot{\underline{b}} = \frac{d\underline{b}}{ds}$ ولذلك نعطي التعريف الآتي:

تعريف (٢٤):

يعرف اللي عند نقطة على منحنى الفراغ بأنه مقياس المعدل الذي عنده المنحنى يلتوي عن المستوى اللاصق له عند هذه النقطة وعليه يكون للمنحنى المستوى اللىّ منعدم.

فإذا رمزنا إلى $|\dot{\underline{b}}|$ بالرمز τ فإن (τ تسمى اللىّ torsion للمنحنى):

$$\tau = |\dot{\underline{b}}| = |\frac{d\underline{b}}{ds}| \qquad (4.6)$$

إذا كان $\tau = 0$ فإن $0 = \dot{\underline{b}} = \frac{d\underline{b}}{ds}$ أي أن $\underline{b}$ متجه ثابت المقدار والاتجاه وليكن مساوياً $\underline{b}_o$ وبناء على ذلك إذا كانت معادلة المنحنى هي $\underline{r} = \underline{r}(s)$ فإن:

$$\frac{d}{ds} < \underline{r}(s), \underline{b}_o > = < \dot{\underline{r}}(s), \underline{b}_o > = < \underline{T}, \underline{b}_o > = 0$$

لأن $\underline{b}_o$ عمودي على $\underline{T}$ وهذا يعني أن

$$< \underline{r}(s), \underline{b}_o > = \text{const.}$$

وهي معادلة خطية في مركبات الدالة $\underline{r}(s)$، إذاً فهي معادلة مستوى.

وحيث أن $< \underline{n}, \underline{b}_o > = 0$ فإننا نستنتج أن المنحنى يقع بأكمله في المستوى المولد بالمتجهات $T, \ n$ (المستوى اللاصق) ويسمى المنحنى في هذه الحالة منحنى مستوى plane curve. أيضاً إذا كان لدينا منحنى مستوى فإن المنحنى يقع في المستوى الذي يحتوي المماس والعمودي الأول (العمود الأساسي) n على المنحنى وبذلك يكون العمودي على المستوى الذي يقع فيه المنحنى ثابت الاتجاه أي أن

$$\dot{\underline{b}} = \frac{d\underline{b}}{ds} = 0 \quad \text{وهذا يكافئ أن} \quad \tau = |\dot{\underline{b}}| = 0$$

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية :

نظرية (٣.٤):

الشرط الضروري والكافي كي يكون منحنى الفراغ مستوياً هو أن الليّ له يتلاشى تطابقياً أي لجميع نقاطه..

ملاحظة (٢.٤):

إذا كانت ψ هي الزاوية التي يدور بها المستوى اللاصق فإن الليّ τ يعرف من خلال $\tau = \dfrac{d\psi}{ds}$ حيث s البارامتر الطبيعي للمنحنى $\underline{r} = \underline{r}(s)$.

نظرية (٤.٤):

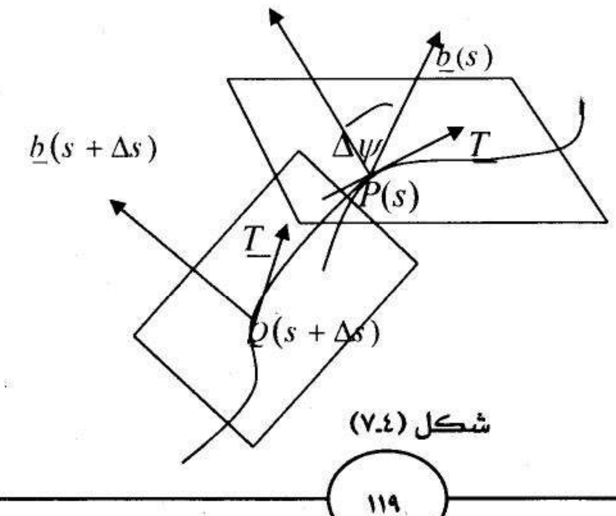
المنحنى المنتظم (مستمر وقابل للتفاضل ثلاث مرات) له ليّ مطلق محدود عند كل نقطة من نقطه والتي عندها الانحناء k يختلف عن الصفر ويعطى بالعلاقة

$$|\tau| = \frac{1}{k^2}|[\frac{d\underline{r}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}]| \qquad (4.7)$$

حيث $\underline{r} = \underline{r}(s)$ هو التمثيل البارامتري الطبيعي للمنحنى.

البرهان:

إذا كان الانحناء للمنحنى عند النقطة $P(s)$ يختلف عن الصفر فهو لا يساوي الصفر عند جميع النقط القريبة جداً من $P(s)$ بسبب خاصية الاتصال.



شكل (٧.٤)

عند كل النقط التي فيها $k \neq 0$ تكون المتجهات $\underline{\dot{r}}(s),\ \underline{\ddot{r}}(s)$ تختلف عن الصفر وغير متوازية وبالتالي فإن المستوى اللاصق يكون موجود عند كل نقطة $Q(s+\Delta s)$ مجاورة للنقطة $P(s)$. نفرض أن $\underline{b}(s),\ \underline{b}(s+\Delta s)$ هي متجهات العمود الثاني (الثانوي) عند $P,\ Q$ على الترتيب على امتداد المنحنى $\underline{r}=\underline{r}(s)$ ، $\Delta\psi$ هي الزاوية بين هذين المتجهين كما في شكل (٤ــ٨). بما أن $\underline{b}(s), \underline{b}(s+\Delta s)$ متجهات وحدة فإن

$$|\underline{b}(s+\Delta s)-\underline{b}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\psi}{2}$$ (أنظر تمرين (٣) في تمارين الباب الثاني)

$$\therefore \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\underline{b}(s+\Delta s)-\underline{b}(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\frac{\Delta\psi}{2}}.\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$$

$$= \frac{d\psi}{ds} = |\tau|$$

وباستخدام تعرف اللىّ نجد أن

$$|\tau| = \left|\frac{d\underline{b}}{ds}\right|$$

وحيث أن

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\underline{T}\wedge\underline{n})$$ (من تعريف $\underline{b}$)

فإن

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = \frac{d\underline{T}}{ds}\wedge\underline{n} + \underline{T}\wedge\frac{d\underline{n}}{ds} = \underline{T}\wedge\frac{d\underline{n}}{ds}$$ (من (4.3))

ومنها ينتج أن $\dot{\underline{b}}$ عمودي على كل من $\underline{T}$ و $\frac{d\underline{n}}{ds}$ وبما أن $\frac{d\underline{n}}{ds}$ عمودي على $\underline{n}$ إذاً $\dot{\underline{b}}$ يوازي n وبالتالي يكون (من (4.3)، (4.4))

$$|\tau| = |<\frac{d\underline{b}}{ds}, \underline{n}>| = |<\frac{d\underline{b}}{ds}, \frac{1}{k}\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}>|$$

$$= \frac{1}{k}|<\frac{d\underline{b}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}>|$$

ولكن

$$\underline{b} = \underline{T} \wedge \underline{n} = \frac{1}{k}\frac{d\underline{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}$$

إذاً

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = \frac{1}{k}\frac{d\underline{r}}{ds} \wedge \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}$$

إذاً

$$|\tau| = \frac{1}{k^2}\ |[\frac{d\underline{r}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}]|$$

وهذا يكمل برهان النظرية.

نعتبر

$$\tau = \pm\frac{1}{k^2}[\frac{d\underline{r}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}]$$

حيث الإشارة الموجبة تدل على دوران المستوى اللاصق في الاتجاه من $\underline{b}$ إلى $\underline{n}$ والإشارة السالبة تدل على أن الدوران في الاتجاه من $\underline{n}$ إلى $\underline{b}$.

ملاحظة (٣.٤):

الانحناء k للمنحنى يمكن أن يتخذ مقياساً لمدى انحراف المنحنى عن أن يكون خط مستقيم وكذلك اللي τ يمكن أن يتخذ مقياساً لمدى انحراف المنحنى عن أن يكون منحنى مستوى.

مثال (٢٤):

أثبت أن انحناء المنحنى

$$\underline{r} = (a\cos\theta,\ a\sin\theta, b\theta)$$

ثابت وأن المماس للمنحنى يصنع زاوية ثابتة مع محور oz .

الحل:

بما أن

$$\frac{d\underline{r}}{d\theta} = (-a\sin\theta,\ a\cos\theta, b)$$

$$\therefore \left|\frac{d\underline{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{ds}{d\theta}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\theta\ , a\cos\theta, b)$$

حقل متجه الانحناء $\underline{k}$ يعطى من

$$\underline{k} = \frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{d\underline{T}}{d\theta}.\ \frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$$

لاحظ أن

$$\frac{1}{|r'|} = 1/\left|\frac{d\underline{r}}{d\theta}\right| = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, ' = \frac{d}{d\theta}$$

إذاً دالة الانحناء تعطى من

$$\therefore\ \ k = |\underline{k}| = \frac{a}{a^2+b^2} = \text{const.}$$ (لاحظ أنه ثابت وليس دالة)

وهذا يوضح أن الانحناء $k > 0$ إذا كانت $a > 0$ ، الانحناء $k < 0$ إذا كانت $a < 0$.

الزاوية ϕ بين المماس T للمنحنى ومحور oz تعطى من

$$\cos\phi = <\underline{T},\underline{e}_3> = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{const.}$$ (T, e_3 متجهات وحدة)

حيث $\underline{e}_3$ وحدة المتجهات في اتجاه محور oz .

إذاً الزاوية بين محور oz والمماس $\underline{T}$ هي

$$\phi = \cos^{-1}\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ملاحظة (٤.٤):

منحنى الفراغ في المثال السابق يسمى حلزون دائري (أنظر شكل (١.٣)).

(٣.٤) صيغ سيريه ـ فرينيه التفاضلية:

Serret – Frenet Differential formulas

نفرض أن لدينا منحنى $\underline{r} = \underline{r}(s)$ في الفراغ حيث s هو بارامتر طول القوس. من سابقاً نعلم أنه عند النقطة P على هذا المنحنى يوجد الثلاثي $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ حيث $\underline{T} = \underline{T}(s), \underline{n} = \underline{n}(s), \underline{b} = \underline{b}(s)$ والمطلوب الآن هو إيجاد صيغ للمشتقات $\dot{\underline{T}}(s), \dot{\underline{n}}(s), \dot{\underline{b}}(s)$. لذلك سنرمز للثلاثي $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ بالرمز $\underline{v}_i(s)$ حيث $i = 1, 2, 3$ أي أن:

$$\underline{v}_1 = \underline{T}, \underline{v}_2 = \underline{n}, \underline{v}_3 = \underline{b}$$

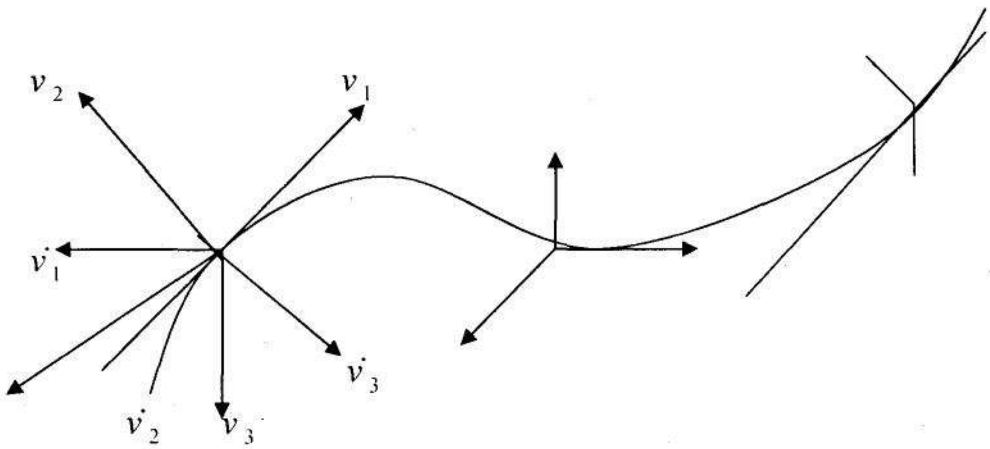
وحيث أن هذا الثلاثي عياري متعامد فإن:

$$<\underline{v}_i, \underline{v}_j> = \delta_i^j \qquad (4.8)$$

بالطبع عندما نفاضل أي دالة متجهة $\underline{v}_i(s)$ بالنسبة إلى s ينتج حقل متجه على امتداد المنحنى ولذلك فإنه يمكن كتابة $\dot{\underline{v}}_i(s)$ كعلاقة خطية من المتجهات $\underline{v}_j$ أي أن :

$$\dot{\underline{v}}_i(s) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\underline{v}_j \ , \quad \frac{d}{ds} = \dot{}, \forall i \qquad (4.9)$$

حيث (a_{ij}) هي مصفوفة من الرتبة الثالثة ومحددها موجب ولا يساوي الصفر كما هو موضح في شكل (٨.٤).



شكل (٨.٤)

بضرب طرفي المعادلة (4.9) ضرباً قياسياً في $\underline{v}_k$ ثم استخدام (4.8) نحصل على:

$$<\underline{\dot{v}}_i, \underline{v}_k> = <\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\underline{v}_j, \underline{v}_k> = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik} \qquad (4.10)$$

$$\therefore\ a_{ik} = <\underline{\dot{v}}_i, \underline{v}_k>$$

وبتفاضل العلاقة (4.8) وباستخدام (4.10) نحصل على

$$<\underline{\dot{v}}_i, \underline{v}_j> + <\underline{v}_i, \underline{\dot{v}}_j> = 0$$

$$\therefore\ a_{ij} + a_{ji} = 0 \quad \text{or} \quad a_{ij} = -a_{ji} \qquad (4.11)$$

بوضع $i = j$ في (4.11) نحصل على

$$a_{ii} = 0 \qquad (4.12)$$

من (4.11)، (4.12) نستنتج أن المصفوفة (a_{ij}) شبه متماثلة.

والآن بوضع $i = 1,2,3$ في المعادلة (4.9) واستخدام (4.11)، (4.12) نجد أن:

$$\dot{\underline{v}}_1(s) = \dot{\underline{T}}(s) = a_{12}\underline{n} + a_{13}\underline{b},$$

$$\dot{\underline{v}}_2(s) = \dot{\underline{n}}(s) = -a_{12}\underline{T} + a_{23}\underline{b}, \qquad (4.13)$$

$$\dot{\underline{v}}_3(s) = \dot{\underline{b}}(s) = -a_{13}\underline{T} - a_{23}\underline{n}$$

وبما أن $\dot{\underline{T}} = k\,\underline{n}$. إذاً من المعادلة الأولى في (4.13) نجد أن $a_{12} = k\ ,\ a_{13} = 0$

ومن المعادلة الثالثة في (4.13) نحصل على $\dot{\underline{b}}(s) = -a_{23}\underline{n}$ ولكن (من (4.6))
$\tau^2 = |\dot{\underline{b}}|^2$ إذاً $a_{23} = \pm\,\tau$.

وسنأخذ الإشارة الموجبة إذا كان الثلاثي يكون بريمة يمينية وكان البارامتر على المنحنى في اتجاه تزايد s أي نختار $a_{23} = \tau$ وهذا يؤدي إلى $\dot{\underline{b}} = -\tau\,\underline{n}$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٤-٥):

لمنحنى الفراغ المنتظم $r = r(s)$ يتحقق

$$\dot{\underline{T}} = k\,\underline{n}\ ,\ \dot{\underline{n}} = \tau\underline{b} - k\underline{T}\ \ ,\dot{\underline{b}} = -\tau\underline{n}\ \ ,\ \dot{} = \frac{d}{ds} \qquad (4.14)$$

وهذه الصيغ تعرف بصيغ سيريه - فرينية التفاضلية لأي منحنى منتظم في الفراغ. وفيزيائياً تمثل معادلات الحركة لنقطة تتحرك على منحنى فراغ.

المعادلات (4.14) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

باستخدام هذه الصيغ يمكننا إيجاد صيغة للليّ والتي يمكن منها حساب $k\ ,\tau$ بسهولة ولذلك نعتبر الحالات الآتية:

أولاً : إذا كان المنحنى معطى في الصورة $\underline{r} = \underline{r}\ (s)$ (تمثيل طبيعي) فإن

$$\underline{\dot{r}}(s)=\underline{T}\,,\underline{\ddot{r}}(s)=\underline{\dot{T}}=k\,\underline{n}\;,\;k=|\,\ddot{r}(s)\,|$$

$$\underline{\dddot{r}}(s)=k\,\underline{\dot{n}}+\dot{k}\,\underline{n}=k\,(\tau\underline{b}-k\underline{T})+\dot{k}\,\underline{n} \qquad \text{(من (4.14))}$$

$$\therefore\; \underline{\dddot{r}}(s)=-k^2\underline{T}+\dot{k}\,\underline{n}+k\,\tau\underline{b}$$

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}$ يعطى من

$$\underline{\ddot{r}}\times\underline{\dddot{r}}=k^2\tau\underline{T}+k^3\underline{b}$$

وحاصل الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ ، $\dddot{r}$ هو:

$$<\underline{\dot{r}},(\underline{\ddot{r}}\times\underline{\dddot{r}})>=[\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}]=k^2\tau$$

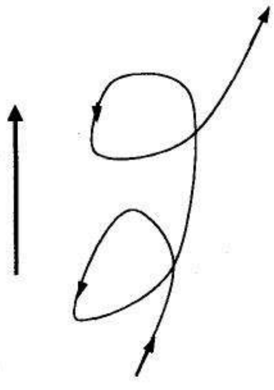
$$\therefore \tau=\frac{1}{k^2}[\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}],k^2=|\,\underline{\ddot{r}}\,|^2$$

أو في الصورة

$$k=|\,\ddot{r}\,|,\;\tau=\frac{1}{|\,\underline{\ddot{r}}\,|^2}[\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}] \qquad (4.15)$$

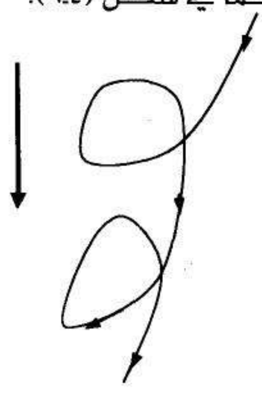
ملاحظة (٤.٥):

الثلاثي $\{\underline{T},\underline{n},\underline{b}\}$ بهذا الترتيب يكون بريمة يمينية أي الدوران عكس عقارب الساعة يؤدي إلى الصعود. ومع عقارب الساعة يؤدي إلى الهبوط (بريمية يسارية) كما في شكل (٤.٩).



بريمة يمنى

$(\tau>0)$



بريمة يسرى

$(\tau<0)$

شكل (٤.٩)

ثانياً: إذا كان المنحنى غير معطى في الصورة الطبيعية أي بدلالة بارامتر طول القوس s كبارامتر ولكن بدلالة أي بارامتر آخر u مثلاً أي $\underline{r}=\underline{r}(u)$ فكيف تكون الصيغ (4.15) بدلالة البارامتر u ؟

للإجابة على هذا السؤال نعلم أن :

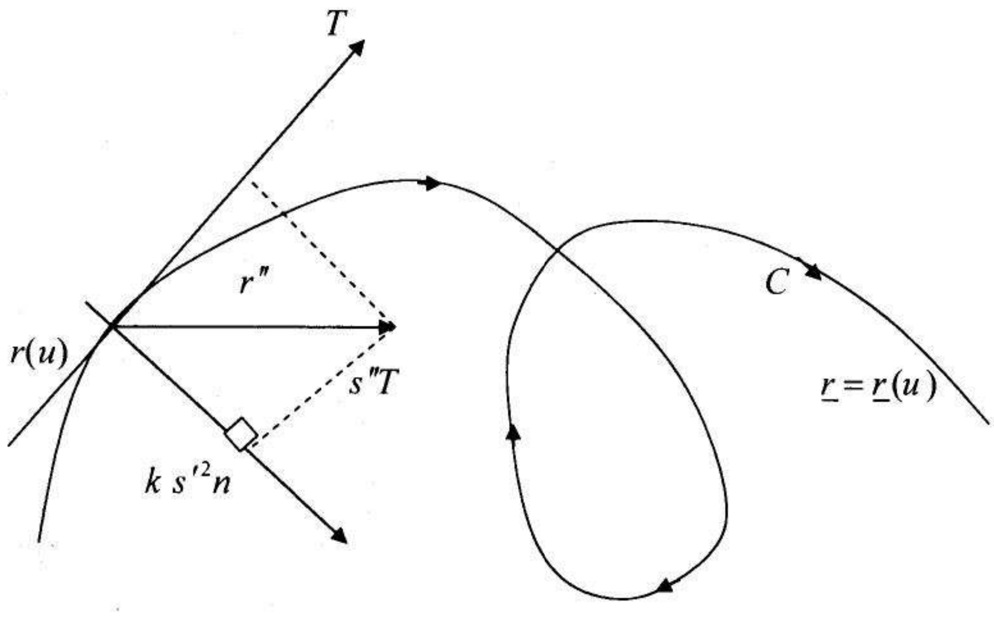
$$\underline{r}'(u)=\frac{d\underline{r}}{du}=\frac{d\underline{r}}{ds}.\frac{ds}{du}=\underline{T}s'\ ,\ '=\frac{d}{du}\ ,\ |r'|=s'\neq 0$$

$$\therefore\ \underline{r}''(u)=\frac{d}{du}(\underline{T}s')=\ \underline{T}s''+\dot{\underline{T}}s'^2$$

ومن (4.14) نحصل على

$$\underline{r}''(u)=\ \underline{T}s''+ks'^2\,\underline{n} \qquad (4.14)'$$

ونوضح ذلك في شكل (٤-١٠).



شكل (٤-١٠)

ملاحظة (٤.٦):

المتجه $r'(u)$ يسمى متجه السرعة velocity بينما قيمته $|r'(u)|$ تسمى السرعة speed وتساوي $v = s' = \dfrac{ds}{du}$ ومتجه التسارع هو $r''(u)$ acceleration vector.

ملاحظة (٤.٧):

من الصيغة التفاضلية $r''(u) = v'T + kv^2 n$ حيث $v = s' = \dfrac{ds}{dt}$ هي السرعة يتضح ما يأتي:

المركبة المماسية $s''T = v'T$ لمتجه التسارع $r''(u)$ تقيس معدل تغير السرعة v (قيمة $r'(u)$). بينما المركبة العمودية $kv^2 n$ تقيس معدل تغير اتجاه $r'(u)$. ومن قوانين الحركة لنيوتن نرى أن هذه المركبات تمثل قوى تؤثر على الجسيم المتحرك أثناء حركته.

مثال (٤.٣):

أثناء حركة سيارة على طريق مستقيم فإن القوة الوحيدة التي تؤثر أو يشعر بها السائق أثناء تزايد أو تناقص السرعة هي القوة المماسية $v'T = s''T$.

مثال (٤.٤):

في المثال السابق إذا كان الطريق منحني (بدون جوانب unbounded) والسرعة هي v فإن القوة المؤثرة على جانبي الطريق هي $kv^2 n$.

ملاحظة (٤.٨):

في المثال السابق الانحناء k يقيس مدى تغير اتجاه الطريق وتأثير السرعة هو v^2 .

وبالتفاضل مرة أخرى للعلاقة $(4.14)'$ بالنسبة إلى u يكون لدينا

$$\underline{r}'''(u) = \underline{T}s''' + k\underline{n}s's'' + \dot{k}s'^3\underline{n} + 2ks's''\underline{n} + ks'^3(\tau\underline{b} - k\underline{T})$$

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\underline{r}'', \underline{r}'''$ يعطى من

$$\underline{r}''\times\underline{r}''' = 3ks's''\underline{b} - k\tau s'^2 s''\underline{n} - ks'^2(s'' - k^2 s'^3)\underline{b} + k^2\tau s'^5\underline{T}$$

وبالضرب قياسياً في r' نحصل على

$$<\underline{r}',(\underline{r}''\times\underline{r}''')>=k^2\tau s'^6 \qquad (4.16)$$

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\underline{r}',\underline{r}''$ هو

$$\underline{r}'\times\underline{r}''=k\, s'^3\underline{b}$$

$$\therefore\ k^2=\frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}{s'^6} \quad \text{أو} \quad k=\frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{s'^3} \qquad (4.17)$$

من (4.16)، (4.17) نحصل على

$$k=\frac{|r'\times r''|}{|r'|^3},\ \tau=\frac{[\underline{r}',\underline{r}'',\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2} \qquad (4.18)$$

وهذه هي صيغ الانحناء واللي لأي منحنى في الفراغ معطى بدلالة أي بارامتر عام u.

مثال (٥٤):

أوجد متجه الانحناء $\underline{k}$ والانحناء k للمنحنى التكعيبي

$$\underline{r}=(u,\frac{1}{2}u^2,\frac{1}{3}u^3),u\in\mathbb{R}$$

عند النقطة التي لها البارامتر $u=1$.

الحل:

من معادلة المنحنى نحصل على

$$\underline{r}'(u)=\underline{T}s'=(1,u,u^2)\ ,\ '=\frac{d}{du}$$

بأخذ المقياس للطرفين يكون لدينا

$$s'^2=1+u^2+u^4,$$

$$\therefore \frac{ds}{du}\sqrt{1+u^2+u^4}=s'$$

$$\therefore\ \underline{T} = (1+u^2+u^4)^{-\frac{1}{2}}\ (1,u,u^2)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى u نجد أن

$$\underline{T}\,' = (1+u^2+u^4)^{-\frac{1}{2}}(0,1,2u) - (1+u^2+u^4)^{-\frac{3}{2}}(u+2u^3)(1,u,u^2)$$

بعد الاختصار وتجميع الحدود نحصل على

$$\underline{T}\,' = -(1+u^2+u^4)^{-\frac{3}{2}}(u+2u^3, u^4-1, u^3+2u)$$

وبما أن $\dot{\underline{T}} = \frac{d\underline{T}}{ds} = \underline{T}\,'\ \frac{du}{ds} = \frac{\underline{T}\,'}{s\,'}$

إذاً متجه الانحناء $\underline{k}$ يأخذ الصورة

$$\underline{k} = \dot{\underline{T}} = -(1+u^2+u^4)^{-2}(u+2u^3, u^4-1, u^3+2u)$$

عند النقطة $u = 1$ يكون

$$\underline{k} = -\frac{1}{3}(1,0,1), \quad \text{or.} \quad \underline{k} = -\frac{1}{3}(\underline{e}_1 + \underline{e}_3) \quad , k = |\underline{k}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

مثال (٦٤):

عين الثلاثي $(\underline{T}, \underline{n}\ , \underline{b})$ عند أي نقطة على المنحنى

$$r(u) = (3u - u^3, 3u^2, 3u + u^3)\ , u \in \mathbb{R}$$

ومن ثم أثبت أن $k = \tau$ عند أي نقطة على المنحنى.

الحل:

من معادلة ا لمنحنى (مثل المثال السابق) نحصل على

$$\underline{T}s\,' = (3-3u^2, 6u, 3+3u^2)\ , \ ' = \frac{d}{du}$$

$$\therefore \underline{T}s\,' = 3(1-u^2, 2u, 1+u^2)$$

$$\therefore s\,'^2 = 9((1-u^2)^2 + 4u^2 + (1+u^2)^2) = 18(1+u^2)^2$$

$$\therefore \quad \underline{s}' = \frac{ds}{du} = 3\sqrt{2}(1+u^2)$$

ومنها نحصل على متجه التماس على الصورة

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)}(1-u^2, 2u, 1+u^2)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى u للدالة T نحصل على (تفاضل حاصل ضرب دالتين إحداهما قياسية).

$$\underline{T}' = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)^2}(-4u, 2(1-u^2), 0)$$

$$\therefore \underline{T}' = \frac{\sqrt{2}}{(1+u^2)^2}(-2u, 1-u^2, 0)$$

ومن تعريف متجه الانحناء نحصل على

$$\underline{k} = \dot{\underline{T}} = \frac{\underline{T}'}{s'} = \frac{1}{3(1+u^2)^3}(-2u, 1-u^2, 0) \quad , . = \frac{d}{ds}$$

إذاً العمود الأساسي يعطى من

$$\underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} = \frac{1}{1+u^2}(-2u, 1-u^2, 0)$$

ومن تعريف العمودي الثانوي b نحصل على

$$\underline{b} = \underline{T} \times \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}\ (1+u^2)^2} \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1-u^2 & 2u & 1+u^2 \\ -2u & 1-u^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \ \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)}((u^2-1)\underline{e}_1 - 2u\ \underline{e}_2 + (1+u^2)\underline{e}_3)$$

وبالإشتقاق بالنسبة إلى u نحصل على

$$\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(1+u^2)(2u)-(u^2-1)(2u)}{(1+u^2)^2}, \frac{(1+u^2)(-2)-(-2u)(2u)}{(1+u^2)^2}, 0\right)$$

$$\therefore\ \underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)^2}(4\,u, 2(u^2-1), 0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(1+u^2)^2}(2u, u^2-1, 0)$$

ومن تعريف $\dot{b}$ نحصل على

$$\dot{\underline{b}} = \frac{\underline{b}'}{s'} = \frac{1}{3(1+u^2)^3}(2u, u^2-1, 0)$$

$$\therefore\ \dot{\underline{b}} = \frac{-1}{3(1+u^2)^3}(-2u, 1-u^2, 0) = \frac{-1}{3(1+u^2)^3}.(1+u^2)n$$

$$\therefore \dot{\underline{b}} = -\frac{1}{3(1+u^2)^2}\underline{n} = -\tau \underline{n}\ \ ,\ \tau = \frac{1}{3(1+u^2)^2} = k$$

مثال (٤-٧):

بالنسبة لمنحنى الفراغ $\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)\ , u \in \mathbb{R}$

(i) أوجد الانحناء والليّ للمنحنى

(ii) أثبت أن العمودين الجانبين للمنحنى عند النقطتين $(1,6,3)$, $(-8,-12,12)$ متعامدان.

(iii) أوجد معادلة المستوى اللاصق للمنحنى عند النقطة $(-1,-6,3)$

(iv) أثبت أن المماس للمنحنى عند جميع نقطه يصنع زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت وأوجد هذا الاتجاه.

الحل:

بما أن $\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)$

وبالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى u نحصل على

$$\underline{r}' = (3u^2, 6, 6u) = \underline{T}s' \tag{4.19}$$

$$\underline{r}'' = (6u, 0, 6) = \underline{T}s'' + ks'^2\underline{n} \qquad (4.20)$$

حيث $' = \frac{d}{du}, s$ بارامتر طول القوس.

بضرب (4.20) ,(4.19) اتجاهياً نحصل على:

$$\underline{r}' \wedge \underline{r}'' = (36, 18u^2, -36u) = ks'^3\underline{b} \qquad (4.21)$$

بتربيع العلاقة (4.19) نحصل على $(<r', r'> = s'^2)$:

$$s'^2 = 9u^4 + 36 + 36u^2 = (3(u^2+2))^2$$

$$\therefore \; s' = \frac{ds}{du} = \pm 3(u^2+2)$$

فإذا ما اتفقنا على اختيار قياس s في اتجاه تزايد u أي تكون s دالة تزايديه في u فإن $\frac{ds}{du}$ تكون موجبة وبالتالي نختار الإشارة الموجبة أي أن

$$s' = 3(u^2+2) \qquad (4.22)$$

كذلك إذا ما اتفقنا أن يكون العمود الأساس اتجاه الناحية المقعرة من المنحنى فإن k تكون موجبة. ومن (4.21) نجد أن اتجاه $\underline{b}$ يطابق تماماً اتجاه المتجه $\underline{r}' \wedge \underline{r}''$ أي له الاتجاه $(2, u^2, -2u)$. إذاً $\underline{b}$ تكون مساوية لهذا المتجه مقسومة على طوله أي

$$\underline{b} = \frac{(2, u^2, -2u)}{\sqrt{u^4 + 4u^2 + 4}} = \frac{1}{u^2+2}(2, u^2, -2u) \qquad (4.23)$$

الانحناء k نحصل عليه أيضاً من (4.21) وذلك بتربيع الطرفين أي أن

$$k^2 s'^6 = (18)^2(u^4 + 4u^2 + 4) = (18)^2(u^2+2)^2$$

$$\therefore k^2 = \left(\frac{18(u^2+2)}{s'^3}\right)^2 \qquad (4.24)$$

بأخذ الجذر التربيعي مع ملاحظة أن s',k موجبة وبالتعويض من (4.22) عن s' نحصل على

$$k = \frac{2}{3(u^2+2)^2} \qquad (4.25)$$

لإيجاد الليّ τ نفاضل (4.20) مع التركيز فقط على الحد المشتمل على $\underline{b}$ فنحصل على (باستخدام صيغ فرينيه (4.14))

$$\underline{r}''' = (6,0,0) = (\ldots)\underline{T} + (\ldots)\underline{n} + (ks'^3\tau)\underline{b} \qquad (4.26)$$

بضرب (4.21) في (4.26) قياسياً نحصل على

$$216 = k^2 s'^6 \tau \Rightarrow \tau = \frac{216}{k^2 s'^6} \qquad (4.25)'$$

وباستخدام العلاقة (4.24) نجد أن

$$\tau = \frac{2}{3(u^2+2)^2}$$

عند النقطة الأولى (1,6,3) يكون البارامتر $u=1$ وعند النقطة الثانية (-8,-12,12) يكون البارامتر $u=-2$. يمكن حساب $\underline{b}$ عند $u=1, u=-2$ من (4.23) كالآتي:

$$(\underline{b})_{u=1} = (\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}) \ , (\underline{b})_{u=-2} = (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$$

واضح أن $$<(\underline{b})_{u=1},(\underline{b})_{u=-2}>=0$$

وبالتالي يكون المتجهان $(\underline{b})_{u=-2};(\underline{b})_{u=1}$ متعامدان.

من المعادلة (4.21) نجد أن المتجه $(36,18u^2,-36u)$ يوازي العمود الثاني $\underline{b}$ إذاً المتجه $(2,u^2,-2u)$ يوازي $\underline{b}$ (//). بالتالي فإن المتجه (2,1,2) يوازي $\underline{b}$ عند $u=-1$ وهو عمودي على المستوى اللاصق للمنحنى عند النقطة (-1,-6,3).

إذاً معادلة المستوى اللاصق المطلوب هي

$$2(x+1)+(y+6)+2(z-3)=0 \quad \text{or} \quad 2x+y+2z+2=0$$

من المعادلة (4.19) نجد أن المماس $\underline{T}$ للمنحنى يوازي المتجه الذي مركباته $(u^2,2,2u)$ ويعطى بالآتي:

$$\underline{T}=\frac{(u^2,2,2u)}{\sqrt{u^4+4u^2+4}} \quad \text{or} \quad \underline{T}=\frac{(u^2,2,2u)}{u^2+2}$$

لنعتبر المتجه الثابت $\underline{a}=(1,1,0)$ حيث وحدة المتجهات $\underline{e}$ على امتداد a تعطى من:

$$e=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),\ \ <\underline{e},\underline{T}>=\cos\ \theta$$

حيث θ الزاوية بين $\underline{T},\underline{e}$. واضح أن

$$\cos\theta=<\underline{T},\underline{e}>=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

أي أن المماس للمنحنى يصنع دائماً زاوية ثابتة $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الثابت $\underline{e}$.

ملاحظة (٤-٩):

المنحنى في المثال السابق يحقق $k=\tau$ ويصنع زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت a ويسمى منحنى الحلزون.

ملاحظة (٤-١٠):

طريقة حل المثال السابق تعتبر خطوات ثابتة ومحددة يمكنك إتباعها في حل أي تمرين من هذا النوع حيث يمكن عمل برنامج حاسوب مناسب لهذه الطريقة وفي هذه الحالة نقوم بإعطاء معادلة المنحنى البارامترية ونأخذ النتائج كما نريد.

مثال (٤-٨):

أثبت أنه على طول المنحنى المنتظم من نوع C^4 على الأقل وله المعادلة الاتجاهية $\underline{r}=\underline{r}(s)$ يكون

$$[\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{r}^{(4)}]=k^{5}\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{k})$$

حيث s البارامتر الطبيعي (بارامتر طول القوس)، $\frac{d}{ds}=.$

الحل:

من معادلة المنحنى $r=r(s)$ نعلم أن

$$\underline{\ddot{r}}=\underline{\dot{T}}=k\,\underline{n} \qquad (4.27)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s نحصل على

$$\underline{\dddot{r}}=-k^{2}\underline{T}+\dot{k}\,\underline{n}+\tau k\,\underline{b} \qquad (4.28)$$

$$\therefore\ \underline{\ddot{r}}\wedge\underline{\dddot{r}}=\ k^{2}\tau\underline{T}+k^{3}\underline{b} \qquad (4.29)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s لطرفي (4.29) واستخدام صيغ سرية . فرينيه التفاضلية مع مراعاة قواعد التفاضل لحاصل الضرب الاتجاهي نحصل على

$$\underline{\ddot{r}}\wedge\underline{r}^{(4)}=(\frac{1}{ds}k^{3})\underline{b}+k^{3}\tau\underline{n}-\tau k^{3}\underline{n}+\frac{d}{ds}(\tau k^{2})\underline{T}$$

$$=(\frac{d}{ds}k^{3})\underline{b}+\frac{d}{ds}(\tau k^{2})\underline{T} \qquad (4.30)$$

بضرب (4.28) ,(4.30) قياسياً نحصل على

$$<\underline{\dddot{r}},\underline{\ddot{r}}\wedge r^{(4)}>=\tau k\ \frac{d}{ds}k^{3}\ \text{-}\ k^{2}\frac{d}{ds}\tau k^{2}$$

$$=3\tau k^{3}\dot{k}\ -k^{2}(\dot{\tau}k^{2}+2k\,\tau\dot{k})=\tau k^{3}\dot{k}\ -k^{4}\dot{\tau}$$

$$=k^{5}.\frac{\tau\dot{k}\ \text{-}\ k\,\dot{\tau}}{k^{2}}$$

$$\therefore\ [\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{r}^{(4)}]=-k^{5}\frac{d}{ds}(\frac{-\tau}{k})=k^{5}\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{k})$$

وهو المطلوب.

(٤.٤) المنحنى الحلزوني The Helix:

تعريف (٤.٤):

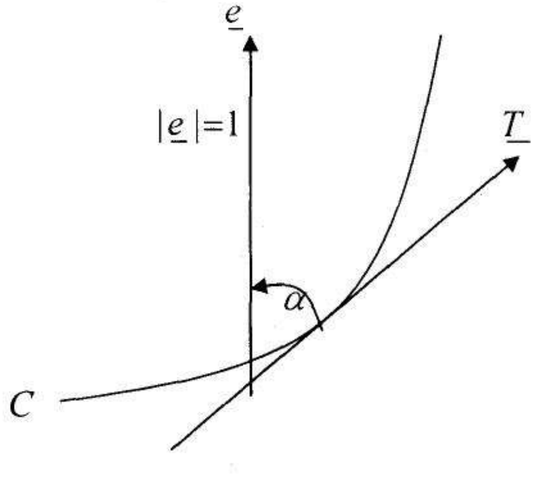
يعرف المنحنى الحلزوني بأنه المنحنى C الذي يصنع المماس $\underline{T}$ له عند أي نقطة عليه زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت كما في شكل (١١.٤).

ويمكن أن يعرف أيضاً على أنه المنحنى المرسوم على أسطوانة بحيث يصنع المماس للمنحنى زاوية ثابتة مع رواسم الأسطوانة.

ليكن $\underline{e}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المتجه الثابت أي في اتجاه رواسم الأسطوانة مثلاً فإن

$$<\underline{T}(s),\underline{e}>=\cos\alpha = \text{const.} = \text{ثابت} \qquad (4.31)$$

حيث $T(s)$ حقل المماس للمتجه $r=r(s)$ ، s بارامتر طبيعي، α زاوية الحلزون.



شكل (١١.٤)

بتفاضل العلاقة (4.31) بالنسبة إلى s واستخدام صيغة فرينيه نحصل على

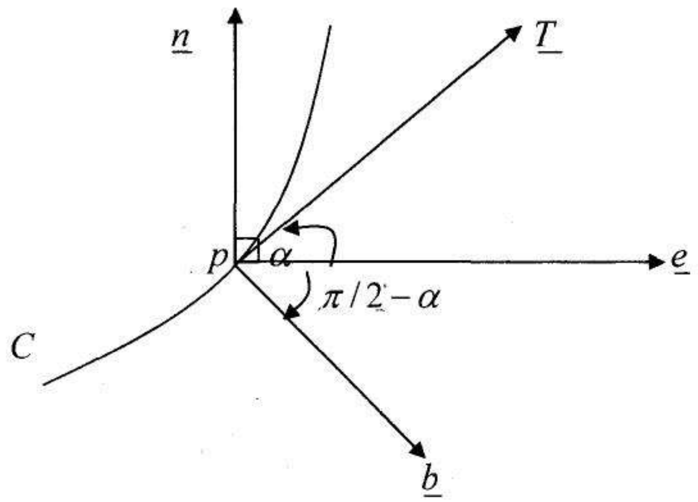
$$<k\ \underline{n},\underline{e}>=0$$

وبغض النظر عن الحالة التي يكون فيها المنحنى الحلزوني هو أحد رواسم الأسطوانة

أي مع استبعاد الحالة التي فيها $k = 0$ $(k \neq 0)$ ، أي أن المنحنى ليست خط مستقيم أو يتكون من نقاط مستقيمة أو نقاط انقلاب

$$\therefore <\underline{n},\underline{e}>=0 \qquad (4.32)$$

وهذا يعني أن العمود الأساسي للمنحنى الحلزوني يكون عمودياً على رواسم الأسطوانة (الاتجاه الثابت) المرسوم عليها هذا المنحنى كما في شكل (١٢.٤).



شكل (١٢.٤)

بتفاضل العلاقة (4.32) بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$<(\tau\underline{b}-k\underline{T}),\underline{e}>=0\ ,$$

$$\therefore\ <\tau\underline{b},\underline{e}>-<k\underline{T},\underline{e}>=0$$ (من خواص الضرب القياسي)

ولكن $\underline{n}\perp\underline{e}$ أي أن المتجه $\underline{e}$ يقع في المستوى المقوم للمنحنى أي المستوى الذي يحتوي على $\underline{b},\underline{T}$ وحيث أن المتجه e يصنع زاوية ثابتة α مع $\underline{T}$ وكذلك يصنع زاوية ثابتة مقدارها $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ مع $\underline{b}$ فإننا نحصل على

$$<\underline{T},\underline{e}>=\cos\alpha\ ,<\underline{b},\underline{e}>=\sin\alpha \qquad (4.33)$$

أي أن (باستخدام المساقط على الاتجاهات $\underline{T},\underline{b}$)

$$\underline{e}=\underline{T}\cos\alpha+\underline{b}\sin\alpha \qquad (4.34)$$

بتفاضل هذه ا لعلاقة بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نجد أن:

$$\underline{0}=k\,\underline{n}\cos\alpha-\tau\underline{n}\sin\alpha=(k\cos\alpha-\tau\sin\alpha)\underline{n}$$

$$\therefore\ k\cos\alpha-\tau\sin\alpha=0 \ \text{ or } \ \frac{k}{\tau}=\tan\alpha=\text{const.}$$

والعكس إذا كان لأي منحنى $\frac{k}{\tau}=c$ ثابت مثلاً فإن المنحنى لابد أن يكون منحنى حلزوني ولإثبات ذلك نعتبر الآتي:

$$\frac{d}{ds}(\underline{T}+c\,\underline{b})=\dot{\underline{T}}+c\dot{\underline{b}}$$

$$=k\,\underline{n}-c\,\tau\,\underline{n}=0\,,\ \frac{k}{\tau}=c$$

إذاً $\underline{T}+c\,\underline{b}$ متجه ثابت الاتجاه و $\frac{\underline{T}+c\,\underline{b}}{\sqrt{1+c^2}}$ هو متجه الوحدة في هذا الاتجاه الثابت.

بوضع $\underline{e}=\frac{\underline{T}+c\underline{b}}{\sqrt{1+c^2}}$ يكون لدينا العلاقات الآتية:

$$<\underline{e},\underline{T}>=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\,,<\underline{e},\underline{b}>=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$\therefore$ $\underline{T}$ يصنع زاوية ثابتة α مع الاتجاه $\underline{e}$ حيث

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\ ,\ \tan\alpha=c=\text{const.}$$

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٤ـ٦):

الشرط الضروري والكافي كي يكون منحنى الفراغ $C : r = r(s)$ منحنى حلزوني هو أن يتحقق $\frac{k}{\tau} = c$ حيث k , τ هما الانحناء واللّيّ للمنحنى.

ملاحظة (٤ـ١١):

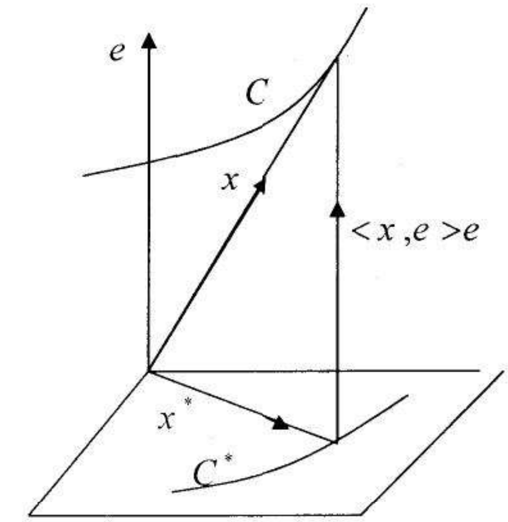
يمكن إيجاد تعريف آخر للمنحنى الحلزوني بأنه المنحنى الذي يتميز بأن النسبة بين الانحناء واللّيّ له تكون ثابتة.

تعريف (٤ـ٥):

مسقط المنحنى الحلزوني العام C على مستوى عمودي عليه هو منحنى C^* يعطى من

$$C^* : x^* = x(s) - < x , e > e$$

حيث e متجه الوحدة في اتجاه محور الحلزون ويتحقق $< e , T > = \cos\alpha$ كما هو مبين في شكل (٤ـ١٣).

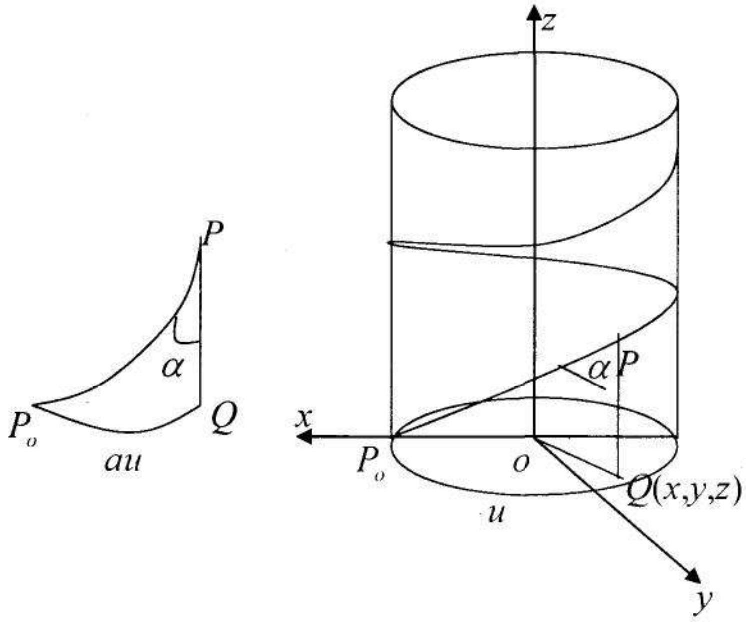


شكل (٤ـ١٣)

تعريف (٦.٤):

الحلزون الدائري هو المنحنى المرسوم على سطح أسطوانة دائرية قائمة $x^2 + y^2 = a^2$ ويكون محور الأسطوانة هو محور الحلزون الدائري (الاتجاه الثابت) حيث محور z هو محور الأسطوانة (يوازي رواسم الأسطوانة).

معادلات الحلزون الدائري يمكن استنتاجها من هندسة الشكل (١٤.٤).



شكل (١٤.٤)

حيث في المثلث P_oPQ نجد $\frac{QP}{P_oQ} = \cot\alpha$ ، $\widehat{P_oQ}$ قوس من دائرة نصف قطرها a

$$\therefore\ QP = z\ , P_oQ = au \qquad \text{(طول قوس من قطاع دائري)}$$

$$\therefore\ z = au \cot\alpha$$

حيث $P(x, y, z) \in C$ على الأسطوانة

واضح أن P_oQ قوس من الدائرة ويصنع زاوية مركزية قياسها البارامتر u وبالتالي نجد أن:

$$x = a\cos u\,,\ y = a\sin u,\ z = au\cot\alpha \qquad (4.35)$$

وعليه فإن الدالة الاتجاهية التي تعرف منحنى الحلزون الدائري تعطى من

$$\underline{r} = (a\cos u, a\sin u, au\cot\alpha) \qquad (4.36)$$

ملاحظة (٤.١٢):

يسمى الجزء على المنحنى المناظر لتغير في البارامتر u مقداره 2π بالخطوة the pitch على المنحنى الحلزوني حيث $Q = P_{xy}.P$ هي مسقط النقطة P على المستوى xy وتقع على الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ قاعدة الأسطوانة.

سندرس الآن الهندسة الذاتية لهذا النوع من المنحنيات في الفراغ حيث التمثيل البارامتري (4.36) يعرف الدالة الاتجاهية التي تصف المنحنى الحلزوني

$$\therefore\ \dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{T} = (-a\sin u, a\cos u, a\cot\alpha)\frac{du}{ds} = \frac{dr}{du}.\frac{du}{ds}$$

$$\therefore |\underline{T}|^2 = 1 = (a^2 + a^2\cot^2\alpha)\dot{u}^2 = a^2\operatorname{cosec}^2\alpha\ \dot{u}^2,$$

$$\therefore\ \dot{u} = \frac{\sin\alpha}{a} \neq 0\,,\ (\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore\ \dot{\underline{r}} = (-\sin u\sin\alpha, \cos u\sin\alpha, \cos\alpha)$$

وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نحصل على:

$$\ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{T}} = k\,\underline{n} = (-\cos u\sin\alpha, -\sin u\sin\alpha, 0)\dot{u}$$

$$k\,\underline{n} = (-\frac{1}{a}\cos u\sin^2\alpha, -\frac{1}{a}\sin u\sin^2\alpha, 0) \qquad (4.37)$$

بأخذ مربع المقياس للطرفين نجد أن

$$k^2=\frac{\sin^4\alpha}{a^2} \quad \text{or} \quad k=\frac{\sin^2\alpha}{a}= \text{ const.} \qquad (4.38)$$

بالتعويض في (4.37) يكون لدينا

$$\underline{n}=(-\cos u,-\sin u,0)$$

إذاً العمود الثانوي $\underline{b}=\underline{T}\wedge\underline{n}$ يمكن الحصول عليه على الصورة:

$$\underline{b}=(\sin u\cos\alpha,-\cos u\cos\alpha,\sin\alpha)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$\dot{\underline{b}}=-\tau\underline{n}=\frac{1}{a}\sin\alpha\cos\alpha(\cos u,\sin u,0)$$

$$\therefore\ -\tau\underline{n}=-\frac{1}{a}\sin\alpha\cos\alpha\underline{n}$$

وبذلك يكون الليّ لمنحنى الحلزون الدائري على الصورة

$$\tau=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a}=\text{const.} \qquad (4.39)$$

ومن (4.38)، (4.39) نحصل على $\dfrac{k}{\tau}=\tan\alpha=\ \text{const.}$

وعموماً أي منحنى في الفراغ معطى على الصورة:

$$\underline{r}=(a\cos u,a\sin u,bu),b=a\cot\alpha$$

هو متجه حلزون دائري حيث a,b ثوابت $a>0,b\neq 0$.

وبذلك نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية:

نظرية (٧.٤):

بالنسبة لمنحنى الحلزون الدائري يكون كل من الانحناء واللي ثابت.

ملاحظة (١٣.٤):

إذا كان كل من الانحناء واللّيّ ثابت لجميع نقاط منحنى فراغ فإن المنحنى هو حلزون دائري.

مثال (٩.٤):

بين أن حقل الإطار الثلاثي $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ على امتداد المنحنى الحلزوني الدائري يعطى من:

$$\left.\begin{aligned} \underline{T} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin u, a\cos u, b) \\ \underline{n} &= -(\cos u, \sin u, 0) \\ \underline{b} &= \underline{T}\times\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin u, -b\cos u, a) \end{aligned}\right\} \qquad (4.40)$$

الحل:

استخدم نتائج النظرية السابقة حيث $b = a\cot\alpha$ والحسابات التي اتبعناها في المثال (٨.٤) نصل إلى العلاقات (4.40).

مثال (١٠.٤):

وضح برسم توضيحي اتجاهات متجه الانحناء ومتجه الوحدة في اتجاه متجه الانحناء ومتجه العمود الأساسي للمنحنى التكعيبي

$$x = t\,e_1 + \frac{1}{3}t^3 e_2$$

الحل:

اتجاه المماس T للمنحنى التكعيبي يعطى من

$$x' = \frac{dx}{dt} = e_1 + t^2 e_2$$

$$\therefore T = \frac{x'}{|x'|} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}(e_1 + t^2 e_2)$$

ومتجه الانحناء $\underline{k}$ يعطى من

$$\underline{k}=\dot{T}=\frac{dT}{ds}=\frac{dT}{dt}.\frac{dt}{ds}$$

$$=T'/|\frac{dx}{dt}|=-2t(1+t^4)^{-2}(t^2e_1-e_2)$$

واضح أن عند $t=0$ توجد نقطة انقلاب ومتجه الوحدة $\underline{u}_k$ في اتجاه متجه الانحناء $\underline{k}$ يعطى من

$$\underline{u}_k=\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}=\frac{-t}{|t|(1+t^4)^{\frac{1}{2}}}(t^2e_1-e_2)$$

حيث دالة الانحناء تعطى من

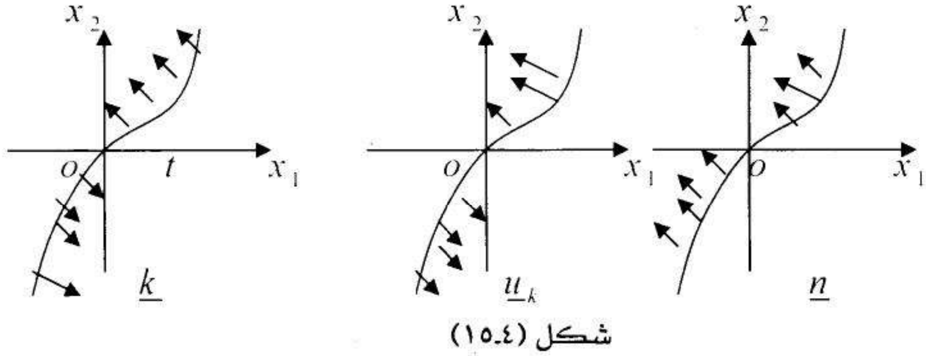
$$k=|\underline{k}|=2|t|(1+t^4)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=\begin{cases}2t(1+t^4)^{-\frac{5}{2}} & ,t>0\\ 0 & ,t=0\\ -2t(1+t^4)^{-\frac{5}{2}} & ,t<0\end{cases}$$

وبالتالي $\underline{u}_k$ يكون اتجاهه لقيم $t>0$ عكس اتجاهه لقيم $t<0$ حيث

$$\lim_{t\to 0^+}\underline{u}_k=e_2\ ,\ \lim_{t\to 0}\underline{u}_k=-e_2$$

كما هو مبين في الشكل (١٥.٤)



شكل (١٥.٤)

تمارين (٤)

(١) أثبت أن الانحناء k للمنحنى $r(u)=(u,\frac{u^2}{2},\frac{u^3}{3})$

عند النقطة التي لها البارامتر $u=1$ يحقق $2\sqrt{3}\,k=2$.

(٢) بالنسبة لمنحنى الفراغ $C\ :\ r=r(s)$ بين أنه يوجد حقل متجه $\underline{d}$ على امتداد المنحنى يحقق

$$\frac{dT}{ds}=\underline{d}\wedge\underline{T}\ ,\ \frac{dn}{ds}=\underline{d}\wedge\underline{n},\frac{db}{ds}=\underline{d}\wedge\underline{b}$$

(**إرشاد:** ضع $\underline{d}=f\,T+g\,n+h\,b$ حيث f, g, h دوال في s أي دوال معرفة على امتداد المنحنى واستخدام صيغ فرينيه ومقارنة طرفي العلاقات المعطاة نصل إلى المطلوب. المتجه $\underline{d}$ يسمى متجه داربوا Darboux ويعطى من $\underline{d}=\tau\,b+k\,b$)

(٣) عين إنحناء المنحنى

$$r(u)=(a(u-\sin u),a(1-\cos u),bu),\qquad (a, b\ \text{ثوابت})$$

وبين أن اللي τ_o عند $u=0$ واللي $\tau_{\pi/2}$ عند $u=\frac{\pi}{2}$ يحقق

$$\tau_o\,\tau_{\pi/2}=\frac{1}{a^2+b^2}$$

(**إرشاد:** اتبع نفس خطوات أي مثال في هذا الباب).

(٤) أثبت أن المنحنى $r(u)=(u,1+\frac{1}{u},\frac{1}{u}-u),u\neq 0$ يقع بأكمله في المستوى.

(**إرشاد:** أثبت أن اللي منعدم لجميع قيم u).

(٥) أوجد الانحناء واللي للمنحنى

$$r(u)=(a\cos u,a\sin u,a\cos 2u)\ ,\quad a\ \text{ثابت}$$

(٦) لأي منحنى فراغ منتظم $C : r = r(s)$ من طبقة C^3 وممثل بدلالة بارامتر طول القوس s أثبت أن :

$$\text{(i)} \quad <\dot{r}, \dddot{r}> = -k^2 \qquad \text{(ii)} \quad <\ddot{r}, \dddot{r}> = k\,\dot{k}$$

$$\text{(iii)} \quad \dddot{r} = -k^2 T + \dot{k} n + k\tau b \quad \text{(iv)} \quad <\ddot{T}, \dot{b}> = -\dot{k}\,\tau\,,\ \dot{} = \frac{d}{ds}$$

حيث $k\,,\tau$ هما حقول الليّ والانحناء للمنحنى C.

(**إرشاد**: بالتفاضل بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه التفاضلية).

(٧) احسب قيمة حاصل الضرب الثلاثي القياسي $[\dot{b}, \ddot{b}, \dddot{b}]$, $[\dot{T}, \ddot{T}, \dddot{T}]$

حيث $b,\ T$ هما حقول متجهات المماس والعمود الثانوي على امتداد منحنى فراغ منتظم $C : r = r(s)$

(٨) أثبت أن متجه الموضع لأي نقطة على المنحنى المنتظم $C : r = r(s)$ من طبقة C^4 حيث s بارامتر طول القوس يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{ds}(\sigma(\frac{d}{ds}\rho\frac{d^2r}{ds^2})) + \frac{d}{ds}(\frac{\sigma}{\rho}\frac{dr}{ds}) + \frac{\rho}{\sigma}\frac{d^2r}{ds^2} = 0$$

حيث ρ ، σ هما أنصاف أقطار الانحناء واللّيّ عند أي نقطة على المنحنى.

(٩) أثبت أن الشرط الضروري والكافي كي يكون المنحنى $C : r = r(s)$ حلزون هو

$$[\frac{d^2r}{ds^2}, \frac{d^3r}{ds^3}, \frac{d^4r}{ds^4}] = 0\,, \quad \text{(}s\text{ بارامتر طول القوس)}$$

(**إرشاد**: استخدم تعريف الحلزون ومثال (٤.٨)).

(١٠) أثبت أن الخواص الآتية متكافئة بالنسبة لمنحنى فراغ منتظم:

(i) المماسات للمنحنى تكون زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت.

(ii) الأعمدة الثانوية (الجانبية) تكون زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت.

(iii) الأعمدة الأساسية للمنحنى توازي مستوى ما.

(iv) النسبة بين الانحناء واللي للمنحنى تساوي مقدار ثابت.

(**إرشاد**: الخواص السابقة هي خواص الحلزون العام التي تم استنتاجها في هذا الباب).

(١١) إذا كانت الزوايا التي يصنعها المماس والعمود الثانوي لمنحنى منتظم $C:r=r(s)$ في الفراغ مع اتجاه ثابت e هي θ ، ϕ على الترتيب فأثبت أن

$$\frac{d\phi}{d\theta}+\frac{\tau}{k}\frac{\sin\theta}{\sin\phi}=0$$

حيث τ, k هي الانحناء واللي على الترتيب.

(**إرشاد**: $<e,T>=\cos\theta$ ، $<e,b>=\cos\phi$ وبالتفاضل واستخدام صيغ فرينيه حيث θ,ϕ دوال في بارامتر طول القوس s نصل إلى المطلوب).

(١٢) أثبت أن المماسات للمنحنى التكعيبي

$$r(u)=(2u^3,3u^2,6u)$$

تصنع زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت وأن المحل الهندسي للنقط التي يقطع فيها المماس المستوى $x=0$ هو قطع مخروطي.

(**إرشاد**: معادلة المماس هي $R=r(u)+\lambda t$ ، ضع المركبة الأولى تساوي صفر وأوجد قيمة λ المناظرة).

(١٣) أثبت أنه إذا كانت المماسات لمنحنى منتظم توازي مستوى معلوم فإن المنحنى يقع في المستوى.

(**إرشاد**: ضع $<T(s),e>=0$ حيث e اتجاه العمودي على المستوى وهو اتجاه ثابت وبالتفاضل نحصل على $<n,e>=0$ وبالتالي فإن $e=b$ أي أن b ثابت وبالتالي فإن اللي τ ينعدم).

(١٤) أثبت أن الليّ τ والانحناء k للمنحنى

$$r(u)=(a\int \sin f(u)du, a\int \cos f(u)du, bu)$$

يحقق العلاقة $k=c\tau$ حيث a, b, c ثوابت، $f(u)$ دالة منتظمة من طبقة C^3.

(**إرشاد:** المشتقة الأولى $r'(u)=(a\sin f(u), a\cos f(u), b)$ وأكمل مثل أي مثال في هذا الباب مع ملاحظة تفاضل دالة الدالة).

(١٥) أوجد الليّ للمنحنى

$$r(u)=a\int R(u)\wedge R'(u)du \ , '=\frac{d}{du}$$

حيث $R(u)$ دالة اتجاهية تحقق $|R(u)|=1,\ R'(u)\neq 0,\ a$ مقدار ثابت

(**إرشاد:** المشتقة الأولى $r'=aR\wedge R'$ ، المشتقة الثانية $r''=aR\wedge R''$ ، المشتقة الثالثة $r'''=aR'\wedge R''+aR\wedge R'''$ واستخدام العلاقات التي تعطي الانحناء والليّ ومتطابقات الضرب الاتجاهي لأربع متجهات).

(١٦) أخذت نقطة Q على العمود الأساسي لمنحنى منتظم C في الفراغ له الليّ ثابت ويساوي τ بحيث النقطة Q تبعد مسافة ثابتة مقدارها λ عن المنحنى أوجد الزاوية بين العمود الثانوي $\tilde{b}$ للمنحنى $\tilde{C}$ المرسوم بالنقطة Q والعمودي الثانوي b.

(**إرشاد:** المنحنى $\tilde{C}$ المرسوم بالنقطة Q له التمثيل البارامتري $\tilde{r}=r(s)+\lambda n(s)$ حيث s بارامتر عام بالنسبة للمنحنى $\tilde{C}$ ولكنه بارامتر طبيعي بالنسبة للمنحنى C وبالاشتقاق وتعيين $\tilde{b}$ نصل إلى المطلوب).

(١٧) أخذت نقطة Q على المماس لمنحنى منتظم $C: r=r(s)$ بحيث تبعد مسافة ثابتة μ عن المنحنى C . أوجد الانحناء والليّ للمحل الهندسي $\hat{C}$ الذي ترسمه النقطة Q عندما يتحرك المماس على امتداد نقاط المنحنى C.

(**إرشاد:** المحل الهندسي للنقطة Q هو $\hat{r}=r(s)+\mu T(s)$ حيث s بارامتر عام بالنسبة للمنحنى $\hat{C}$ ولكنه بارامتر طبيعي للمنحنى C).

(١٨) في التمرين السابق إذا كان ρ هو نصف قطر أنحناء المنحنى C عند نقطة p (نقطة التماس) وأن s هو بارامتر طول قوس المنحنى C مقاساً من نقطة ثابتة حتى النقطة p فإن نصف قطر إنحناء المحل الهندسي $\hat{C}$ عند النقطة Q هو $\hat{\rho}$ ويعطى من $\hat{\rho}=\dfrac{(\rho^2+\mu)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+\mu^2+\mu\dot{\rho}}$ حيث $\dot{}=\dfrac{d}{ds}$.

(١٩) أثبت أن دالة الانحناء k واللي τ لمنحنى ڤيفياني يعطى من

$$k(u)=\frac{\sqrt{13+3\cos u}}{a(3+\cos u)^{\frac{3}{2}}} \quad , \ \tau(u)=\frac{6\cos\frac{u}{2}}{a(13+3\cos u)}$$

(**إرشاد:** التمثيل البارامتري لهذا المنحنى موجود في مثال (٣-٧) في الباب الثالث).

(٢٠) عبر عن حقل متجه داربوا $\underline{d}$ من خلال إطار فرينيه وبين أنه يقع في المستوى المقوم.
(**إرشاد:** انظر تمرين (٢) واكتب $\underline{d}$ كتركيبة خطية من $\underline{T}$ ، $\underline{n}$ ، $\underline{b}$).

(٢١) أوجد الانحناء k^* لمسقط الحلزون العام على مستوى عمودي على محوره.
(**إرشاد:** انظر تعريف (٤-٥) حيث $\dfrac{dx^*}{ds}=T-<T,e>e$ أي أن $\dfrac{dx^*}{ds}=T-e\cos\phi$ ومنها $|\dfrac{dx^*}{ds}|=\dfrac{ds^*}{ds}=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$ حيث s^* بارامتر طول قوس المسقط وأكمل باقي الحسابات).

(٢٢) أثبت أن الانحناء k^* لمسقط الحلزون العام على مستوى عمودي عليه يعطى من

$$|k^*|=|k|\sin^2\alpha \ , \ \alpha\neq 0$$

حيث α زاوية الحلزون).
(**إرشاد:** نفس التمرين السابق مع اختلاف الصياغة).

الباب الخامس

المنحنيات المصاحبة لمنحنى فراغ

Associated Curves of a Space Curve

هذا الباب يتناول دراسة المنحنيات المرتبطة بحركة الإطار المتحرك لمنحنى فراغ معلوم (منتظم). وبالتفصيل فإننا نقوم بدراسة المميز الكروي أو الصورة الكروية ومنحنى المحل الهندسي لمراكز كل من دائرة وكرة الانحناء والمنحنى الناشر والمنتشر ومنحنيات برتراند.

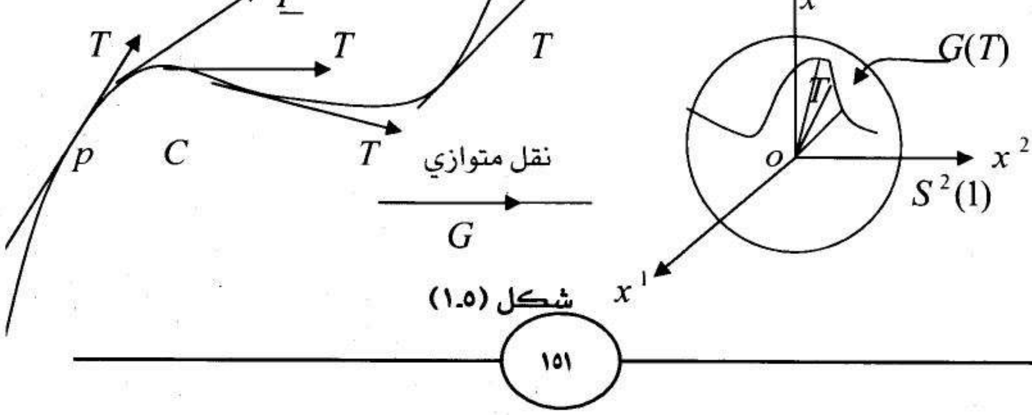
(١.٥) المميز الكروي Spherical Indicatrix:

تعريف (١.٥):

نفرض أن لدينا منحنى منتظم $C : r = r(s)$ وT وحدة متجه التماس للمنحنى عند أي نقطة عليه. فإذا استخدمنا النقل المتوازي G للمماس بحيث نقطة التماس للمنحنى تنقل إلى مركز كرة الوحدة $S^2(1)$. المنحنى $G(T)$ والمرسوم برؤوس المماسات T يقع على كرة الوحدة ويسمى راسم جاوس أو الصورة الكروية أو المميز الكروي للمماس T للمنحنى C حيث

$$G(T):r_1(s)=T(s) \qquad (5.1)$$

كما هو موضح في شكل (١.٥).



شكل (١.٥)

تعريف (٥.٢):

إذا رسمنا عند نقطة الأصل وحدة المتجهات n (العمود الأول) في اتجاه العمود الأساسي للمنحنى $C : r = r(s)$ فإن رأس هذا المنحنى ترسم منحنى يقع على سطح كرة الوحدة $S^2(1)$ (مركزها نقطة الأصل) وهذا المنحنى يسمى الصورة الكروية للعمود الأساسي الأول ويرمز له بالرمز $G(n)$ حيث

$$G(n): r_2(s) = n(s) \qquad (5.2)$$

تعريف (٥.٣):

بالنقل المتوازي (كما في تعريف (٥.١)، (٥.٢)) للعمود الثانوي $b(s)$ إلى نقطة أصل الإحداثيات فإننا نحصل على $G(b)$ المميز الكروي للعمود الثانوي حيث

$$G(b): r_3(s) = b(s) \qquad (5.3).$$

ملاحظة (٥.١):

الصور الكروية $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ أخذت أسمها من كونها ممثلة بدوال اتجاهية أطوالها الوحدة، وبالتالي فهي تمثل منحنيات نقاطها لها متجهات موضع أطوالها الوحدة وتقع على سطح كرة الوحدة $S^2(1)$ (مركزها نقطة أصل الاحداثيات ونصف قطرها الوحدة).

ملاحظة (٥.٢):

الدوال الإتجاهية (5.1)، (5.2)، (5.3) تمثل منحنيات الصور الكروية حيث s بارامتر طول قوس المنحنى الأصلي ولكن s يعتبر بارامتر عام على هذه المنحنيات. ولذلك نفرض أن $s_1(s)$، $s_2(s)$، $s_3(s)$ هي بارامترات طول القوس على الصور الكروية $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ على الترتيب وكل منها دوال منتظمة في s.

مثال (٥.١):

أوجد الانحناء k_1 للمميز الكروي للمماس للمنحنى المنتظم $C : r = r(s)$ حيث s بارامتر طول قوس المنحنى C.

الحل:

المعادلة الاتجاهية للمميز الكروي للمماس $G(T)$ هي

$$r_1 = T(s) \qquad (5.4)$$

نفرض أن s_1 هو بارامتر طول قوس المنحنى $G(T)$. وبأخذ البارامتر s_1 كبارامتر طبيعي على المنحنى $G(T)$ فإن s يكون بارامتر عام للمنحنى $G(T)$. إذاً بالتفاضل بالنسبة إلى s نحصل على

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = \dot{T}(s), \dot{} = \frac{d}{ds}, T_1 = \frac{dr_1}{ds_1} \qquad (5.5)$$

وباستخدام صيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى C نحصل على

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = kn \qquad (5.6)$$

بالضرب قياسياً لهذه المعادلة في نفسها أو بالتربيع نحصل على $(\frac{ds_1}{ds})^2 = k^2 \neq 0$

$$\therefore \quad \frac{ds_1}{ds} = k \qquad (5.7)$$

أخذنا الإشارة الموجبة حيث s_1 دالة تزايدية في s لأن $k > 0$ للمنحنى C.

وبالتعويض في (5.6) نحصل على

$$T_1 = n \qquad (5.8)$$

أي أن المماس للمميز الكروي $G(T)$ يوازي العمود الأساسي للمنحنى C.

وبتفاضل العلاقة (5.8) بالنسبة إلى s نحصل على

$$\frac{dT_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \dot{n}$$

وباستخدام صيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى C والمنحنى $G(T)$ نحصل على

$$k_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \tau b - kT \qquad (5.9)$$

وبالتربيع نحصل على

$$k_1^2 \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = k^2 + \tau^2 \qquad (5.10)$$

وباستخدام (5.7) نحصل على

$$k_1^2 k^2 = k^2 + \tau^2 \quad \text{or} \quad k_1 = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k}$$

$$\therefore\ k_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2} \qquad (5.11)$$

وبالتعويض في (5.9) نحصل على

$$n_1 = \frac{\tau b - kT}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \qquad (5.12)$$

أي أن العمود الأساسي n_1 للمميز الكروي $G(T)$ يقع في المستوى المولد بالمتجهات T, b (المستوى المقوم للمنحنى C).

وباستخدام (5.8)، (5.12) نحصل على

$$b_1 = T_1 \wedge n_1 = n \times \frac{(\tau b - kT)}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}$$

$$\therefore\ b_1 = \frac{\tau T + kb}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}\ . \qquad (5.13)$$

أي أن العمود الثانوي b_1 للمميز $G(T)$ يقع أيضاً في المستوى المقوم للمنحنى C.

مثال (٢.٥):

بين أن المستوى المقوم للمنحنى C يوازي المستوى العمودي للمميز الكروي $G(T)$ للمنحنى C عند أي نقطة عليه.

الحل:

المستوى المقوم للمنحنى C يحتوي على المتجهات T، b وبالتالي فإن العمودي عليه هو حقل المتجه n. المستوى العمودي للمنحنى $G(T)$ يحتوي على المتجهات n_1، b_1 وبالتالي العمودي عليه هو $n_1 \times b_1 = T_1$. ومن العلاقة (5.8) نجد أن $T_1 = n$ أي أن العمودي على كل من المستوى المقوم للمنحنى C والمستوى العمودي للمميز $G(T)$ يوازي العمود الأساسي الأول n وبالتالي فإن المستوى المقوم للمنحنى C والمستوى العمودي للمميز الكروي متوازيان (لهما نفس العمودي).

مثال (٣.٥):

أوجد العلاقة بين إطاري فرينيه على كل من المنحنى C ومنحنى المميز الكروي $G(T)$ من خلال التحويلات الخطية.

الحل:

العلاقات (5.8)، (5.12)، (5.13) يمكن كتابتها في شكل مصفوفي كالآتي:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k\xi & 0 & \tau\xi \\ \tau\xi & 0 & k\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} \qquad (5.14)$$

واضح أن مصفوفة هذا التحويل محددها يساوي الوحدة وبالتالي فإن المصفوفة مصفوفة عمودية أي أن العلاقة بين الإطارات المتحركة على كل من C، $G(T)$ تعطى من خلال تحويل خطي عمودي (5.14) (ارجع إلى التحويلات الخطية في الجبر الخطي).

مثال (٤.٥):

أوجد اللّيّ للمميز الكروي $G(T)$ للمماس لمنحنى منتظم $C : r = r(s)$ عند أي نقطة عليه.

الحل:

من العلاقة (5.13) وبالتفاضل بالنسبة إلى s للدالة الاتجاهية $b_1 = b_1(s)$
نحصل على (**صيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى $G(T)$**)

$$-\tau_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \frac{(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau)(kT - \tau b)}{(\tau^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{k\dot{\tau} - \dot{k}\tau}{\tau^2 + k^2} \cdot \frac{kT - \tau b}{\sqrt{k^2 + \tau^2}}$$

$$\therefore\ \tau_1 n_1 k = \frac{\tau b - kT}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \frac{d}{ds} \tan^{-1}(\frac{\tau}{k})$$

$$= n_1 \frac{d}{ds} \tan^{-1}(\frac{\tau}{k}) \qquad \text{((5.12) من)}$$

$$\therefore\ \tau_1 = \frac{1}{k} \frac{d}{ds} \tan^{-1}(\frac{\tau}{k}) \qquad (5.15)$$

مثال (٥.٥):

أثبت أن اللي τ_3 للمميز الكروي $G(b)$ لمنحنى منتظم $C : r = r(s)$ عند أي نقطة عليه تعطى من

$$\tau_3 = -\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \tan^{-1} \frac{\tau}{k} \qquad (5.16)$$

الحل:

في هذا المثال نتبع أسلوب مخالف للأسلوب الذي اتبعناه في المثال السابق حيث المعادلة الإتجاهية للمميز $G(b)$ هي $G(b): r_3 = b(s)$

ولحساب اللي τ_3 نستخدم الصيغة (4.18) التي تعطي اللي لأي منحنى فراغ ممثل بدلالة بارامتر عام حيث في هذه الحالة يكون

$$\tau_3=\frac{[\dot{r}_3,\ddot{r}_3,\dddot{r}_3]}{|\dot{r}_3\times\ddot{r}_3|^2}=\frac{[\dot{b},\ddot{b},\dddot{b}]}{|\dot{b}\times\ddot{b}|^2}\ ,\ \dot{}=\frac{d}{ds} \qquad (*)$$

وبحساب المشتقات $\dot{b}$ ، $\ddot{b}$ ، $\dddot{b}$ من صيغ فرينيه ومشتقاتها نحصل على

$$\dot{b}=-\tau n\ ,\ \ddot{b}=-\dot{\tau}n-\tau(\tau b-kT)$$

$$\dddot{b}=-\ddot{\tau}n-\dot{\tau}(\tau b-kT)-2\tau\dot{\tau}b+\tau^3n+(k\tau)\dot{}T+k^2\tau n$$

$$=(k\dot{\tau}+(k\tau)\dot{})T+(\tau^3+k^2\tau-\ddot{\tau})n+(-3\tau\dot{\tau})b$$

$$\therefore\ \dot{b}\times\ddot{b}=\tau^2(\tau T+kb)\ ,\quad |\dot{b}\times\ddot{b}|=\tau^2\sqrt{\tau^2+k^2}$$

وبما أن $[\dot{b},\ddot{b},\dddot{b}]=<\dot{b}\times\ddot{b},\dddot{b}>$ وبالتعويض عن $\dddot{b}$ نحصل على

$$[\dot{b},\ddot{b},\dddot{b}]=\dot{k}\tau^4+k\tau^3\dot{\tau}-2k\tau^3\dot{\tau}$$

$$=\dot{k}\tau^4-k\tau^3\dot{\tau}=\tau^3(\dot{k}\tau-k\dot{\tau})$$

وبالتعويض في الصيغة (*) التي تعطي اللي τ_3 نحصل على

$$\tau_3=\frac{1}{\tau}\frac{\dot{k}\tau-k\dot{\tau}}{\tau^2+k^2}=-\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}\tan^{-1}(\frac{\tau}{k})$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (٥ـ٣):

هذه النتيجة يمكن الحصول عليها كما في المثال (٥ـ٤) حيث نعين أولاً $T_3(s)\times n_3(s)=b_3(s)$ وبالتفاضل بالنسبة إلى s نصل إلى المطلوب.

مثال (٥ـ٦):

أوجد نصف قطر انحناء المميز الكروي $G(T)$ لمتجه التماس لمنحنى الحلزون الدائري $r(u)=(a\cos u,a\sin u,bu)$ حيث a,b ثوابت.

الحل:

المميز الكروي $G(T)$ يعطى بالتمثيل البارامتري $G(T):r_1(s_1)=T(s)$

حيث s_1 بارامتر طول قوس منحنى المميز الكروي $G(T)$.

وسبق أن أوجدنا في مثال (١.٥) أن الانحناء k_1 للمميز الكروي $G(T)$ يعطى من

$$k_1=\sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2} \qquad (5.17)$$

وفي الباب السابق رأينا أن المنحنى الحلزوني الدائري يحقق $\frac{\tau}{k}$ ثابت ويساوي $\frac{b}{a}$. إذاً

نصف قطر الانحناء ρ_1 يعطى من

$$\rho_1=\frac{1}{k_1}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{const.} \qquad (5.18)$$

هذا المثال صحيح في حالة الحلزون العام وبالتالي يمكن صياغته على الصورة:

مثال (٧.٥):

أثبت أن نصف قطر انحناء المميز الكروي للمماس لمنحنى الحلزون العام ثابت.

مثال (٨.٥):

أثبت أن المميز الكروي $G(T)$ لمنحنى الحلزون العام هو منحنى مستوي.

الحل:

من العلاقة (5.15) التي تعطي ليّ المميز الكروي $G(T)$ نجد أن

$$\tau_1=\frac{1}{k}\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{\tau}{k} \ , \frac{\tau}{k}=\text{const.}$$

$$=\frac{1}{k}\frac{d}{ds}\tan^{-1}\ (\text{const.}) = \text{zero}$$

وبما أن الليّ τ_1 منعدم تطابقياً على المميز الكروي $G(T)$ لمنحنى الحلزون العام، إذاً فهو منحنى مستوي.

مثال (٥.٩):

أثبت أن المميز الكروي $G(T)$ لمنحنى الحلزون العام هو دائرة.

الحل:

في مثال (٥ـ٧)، (٥ـ٨) بينا أن $\tau_1=0\ ,k_1=\text{const.}$ وبالتالي فإن المميز الكروي $G(T)$ للحلزون العام هو دائرة.

بالمثل نعطي المثال التالي:

مثال (٥.١٠):

المميز الكروي $G(n)$، $G(b)$ للحلزون العام يحقق

$$\tau_3=0,k_3=\text{const.};\ \tau_2=0,k_2=\text{const.}$$

أي أن المميز الكروي $G(n)$، $G(b)$ للحلزون العام هو دائرة.

النتائج التي توصلنا إليها في مثال (٥.٨)، (٥.٩) يمكن الحصول عليها بطريقة أخرى من خلال المثال التالي:

مثال (٥.١١):

بالنسبة لمنحنى الحلزون الدائري بين أن:

(i) المميز الكروي $G(T)$ هو دائرة في المستوى $z=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{const.}$ ومركزها يقع على محور الحلزون.

(ii) المميز الكروي $G(n)$ هو دائرة في المستوى $z=0$ ومركزها نقطة الأصل.

(iii) المميز الكروي $G(b)$ هو دائرة في المستوى $z=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{const.}$ ومركزها يقع على محور الحلزون.

الحل:

التمثيل البارامتري لمنحنى الحلزون الدائري هو

$$r(u)=(a\cos u, a\sin u, bu)$$

حيث a, b ثوابت.

وبالحسابات الروتينية التي تعودنا عليها في الباب السابق يمكن الوصول بسهولة إلى

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin u, a\cos u, b), \\ n &= (-\cos u, -\sin u, 0), \qquad\qquad (5.19) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin u, -b\cos u, a). \end{aligned}$$

وبحساب اللّيّ للمميز الكروي $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ نجد (في المثال (٥-٩)، (٥-١٠)) أنه يساوي الصفر أي أن $\tau_1=0, \tau_2=0, \tau_3=0$ لأن

$$\frac{k}{\tau}=\text{const.}, \frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{\tau}{k}=0, \frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{k}{\tau}=0$$

بينما الانحناءات k_1، k_2، k_3 تحقق

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2}=\text{const.}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (5.20) \\ k_2 &= 1 \ , \ k_3=\sqrt{1+(\frac{k}{\tau})^2}=\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2}=\text{const.} \end{aligned}$$

من التمثيلات البارامترية (5.19) للمميزات الكروية $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ نلاحظ أن المركبة الثالثة (المركبة في اتجاه e_3 أي محور z) ثابتة وهذا يعني أن الصورة الكروية لكل حقل متجه من الإطار المصاحب للحلزون الدائري هي دائرة حول محور z (محور الحلزون). وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (١.٥):

الصورة الكروية لكل حقل متجه من حقول الإطار $\{T, n, b\}$ المصاحب لمنحنى الحلزون الدائري هي دائرة حول محور الحلزون.

تعريف (٤.٥):

الانحناء الكلي لمنحنى فراغ منتظم هو عبارة عن الجذر التربيعي لمجموع مربعات أطوال أقواس المميز الكروي للمماس والعمود الثانوي مقسوماً على مربع طول المسافة القوسية للمنحنى الأصلي.

التمثيل البارامتري للمميز الكروي للعمود الجانبي $b = b(s)$ لمنحنى الفراغ C $r = r(s)$: يعطى في الصورة $G(b): r_3(s_3) = b(s)$ وبالتفاضل نحصل على

$$\frac{dr_3}{ds_3}.\frac{ds_3}{ds} = -\tau n \ ,T_3 = \frac{dr_3}{ds_3}$$

حيث s_3 هو بارامتر طول قوس المميز الكروي $G(b)$.

$$\therefore T_3.\frac{ds_3}{ds} = -\tau n \ ,$$

وباختيار

$$\therefore \frac{ds_3}{ds} = \tau \ ,T_3 = -n \qquad (5.21)$$

ومن العلاقة (5.7) والتعريف (٤.٥) نحصل على الانحناء الكلي في الصورة:

$$(\frac{ds_1}{ds})^2 + (\frac{ds_3}{ds})^2 = k^2 + \tau^2 \qquad (5.22)$$

وبالتالي يمكن صياغة ما يلي:

تمهيدية (١.٥):

الانحناء الكلي لمنحنى منتظم يساوي $\sqrt{k^2 + \tau^2}$.

(٢.٥) دائرة الانحناء Circle of Curvature

تعريف (٥.٥):

إذا كان $C\ :\ r = r(s)$ منحنى في الفراغ فإن نصف قطر الدائرة التي لها إلتصاق من الرتبة الثالثة مع المنحنى C عند أي نقطة p عليه يعرف بأنه نصف قطر الانحناء للمنحنى C عند النقطة p ، وتسمى هذه الدائرة بدائرة الانحناء.

هذا التعريف يمكن صياغته بأسلوب آخر كالآتي:

تعريف (٦.٥):

تعرف دائرة الانحناء عند نقطة p على المنحنى C بأنها الوضع النهائي للدائرة التي تمر بهذه النقطة p وكذلك نقطتين متجاورتين على المنحنى C عندما تقترب النقطتين من النقطة p.

من هذا التعريف نصل إلى:

تمهيدية (٢.٥):

دائرة الانحناء عند نقطة p تقع بأكملها في المستوى اللاصق عند النقطة p.

إذا كان $C : r = r(s)$ منحنى فراغ ومركز دائرة الانحناء (يقع على امتداد العمودي على المماس عند p) عند النقطة p هو الممثل بالمتجه R فإنه حسب التعريف يكون $pc = R\text{-}r$ أي أن العمود الأساسي n يكون على امتداد قطر الدائرة المار بالنقطة p.

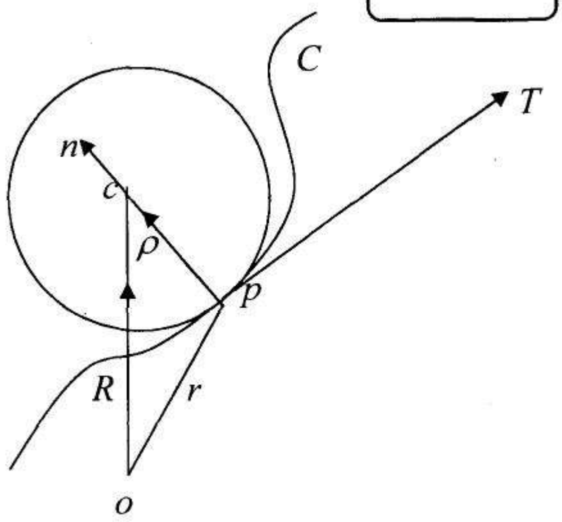
$$\therefore\ R - r(s) = \rho n \qquad (5.23)$$

حيث ρ كمية قياسية تعرف بنصف قطر الانحناء (شكل (٢.٥).

من التعاريف السابقة يتضح أن هذه الدائرة هي تقاطع الكرة

$$(R - r(s))^2 = \rho^2 \qquad (5.24)$$

مع المستوى اللاصق عند النقطة p حيث ρ ، R لا يعتمدان على بارامتر طول القوس s.



شكل (٢.٥)

المعادلة (5.24) يمكن كتابتها على الصورة

$$F(s)=(R-r(s))^2-\rho^2=0 \qquad (5.25)$$

شرط أن يكون هناك إلتصاق من الرتبة الثالثة بين المنحنى ودائرة الانحناء هو أن يتحقق

$$F=\dot{F}=\ddot{F}=0\ ,\ \dddot{F}\neq 0\ ,\ .=\frac{d}{ds} \qquad (5.26)$$

هذه الشروط تعني أنه يوجد جذر مكرر ثلاث مرات للدالة F أي توجد ثلاث نقاط منطبقة ومشتركة بين المنحنى والدائرة.

بإشتقاق المعادلة (5.25) مرتين والتعويض في (5.26) نحصل على

$$<R-r(s),T>=0\ , \qquad (5.27)$$

$<R-r(s),k\,n>-<T,T>=0$, (خواص الضرب القياسي)

$$\therefore k<R-r(s),n>-1=0\ .$$

أو ما يكافئ

$$< R - r(s), n > = \frac{1}{k} \qquad (5.28)$$

من العلاقة (5.27) ، (5.28) نستنتج أن المتجه $R\text{-}r(s)$ عمودي على المماس T بينما له مسقط في اتجاه n يساوي $\rho = \frac{1}{k}$

$$\therefore\ R - r(s) = \frac{1}{k} n$$

وبأخذ المقياس والتربيع نجد أن

$$(R - r(s))^2 = \frac{1}{k^2}$$

وباستخدام(5.25) نحصل على $\rho^2 = \frac{1}{k^2}$ أو $\rho = \frac{1}{|k|}$ أي أن نصف قطر الانحناء عند النقطة p على المنحنى هو $\rho = \frac{1}{|k|}$.

إذاً مركز الانحناء لهذه الدائرة يمثل بمتجه الموضع

$$R = r(s) + \rho n \ , \ \rho = \frac{1}{k} \qquad (5.29)$$

بالقياس نقترح أن نضع $\sigma = \frac{1}{\tau}$ وتسمى σ نصف قطر الليّ عند النقطة p.

ملاحظة (٥.٤):

الكمية القياسية σ ليس لها أي معنى هندسي مثل نصف قطر الانحناء (كمية جبرية وهي مقلوب الليّ).

الآن نقوم بدراسة المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء حيث أنه عندما تتحرك النقطة p على المنحنى فإن مركز دائرة الانحناء يرسم منحنى يسمى المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء.

بإشتقاق الدالة الاتجاهية (5.29) بالنسبة إلى s باعتبار s_1 هو بارامتر طول قوس المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$\frac{dR}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = T + \dot{\rho} n + \rho(\tau b - kT)$$
$$= T + \dot{\rho} n + \rho\tau b - \rho k T \quad , \ \rho k = 1$$
$$\therefore T_1 \frac{ds_1}{ds} = \dot{\rho} n + \rho\tau b \qquad (5.30)$$

حيث T_1 هو متجه وحدة المماس للمحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء.

وبأخذ المقياس لطرفي (5.30) نحصل على

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\tau)^2} > 0 \qquad (5.31)$$

أي أنه عند زيادة s فإن s_1 تزيد بمعنى أن $s_1 = s_1(s)$ دالة تزايدية في s

ومن (5.30)، (5.31) يكون لدينا

$$T_1 = \frac{\dot{\rho} n + \rho\tau b}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\tau)^2}} \qquad (5.32)$$

وبالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى s يمكنك الحصول على الانحناء k_1 ، كذلك اللّيّ τ_1 لمراكز دائرة الانحناء. وعلى الطالب تكملة هذا الجزء باعتباره تمرين على غرار ما سبق دراسته.

(٣.٥) كرة الانحناء Sphere of Curvature

تعريف (٧.٥):

تعرف كرة الانحناء (الكرة اللاصقة Osculating Sphere) لمنحنى في الفراغ عند نقطة p عليه بأنها الكرة التي لها التصاق من الرتبة الرابعة مع المنحنى عند هذه النقطة.

بمعنى آخر فإن كرة الانحناء هي الوضع النهائي للكرة التي تمر بالنقطة p وكذلك ثلاث نقاط متجاورة أخرى عندما تقترب هذه النقاط من النقطة p.

نفرض أن $\tilde{R}$ هو متجه الموضع لمركز كرة الانحناء التي نصف قطرها هو R فتكون معادلة الكرة على الصورة

$$< \tilde{R} - r(s), \tilde{R} - r(s) > = R^2$$

أو

$$F(s) = < \tilde{R} - r(s), \tilde{R} - r(s) > - R^2 = 0 \qquad (5.33)$$

شروط الالتصاق بين الكرة والمنحنى هي

$$F = \dot{F} = \ddot{F} = \dddot{F} = 0,\ F^{(4)}(s) \neq 0,\ . = \frac{d}{ds}$$

وباستخدام (5.33) فإن هذه الشروط تؤول إلى

$$< \tilde{R} - r(s), T > = 0, \qquad (5.34)$$

$$< \tilde{R} - r(s), kn > = 1, \qquad (5.35)$$

$$< \tilde{R} - r(s), \dot{k}n + k(\tau b - kT) > = 0,$$

أو

$$< \tilde{R} - r(s), \dot{k}n + k\tau b > = 0 \qquad (5.36)$$

واضح من (5.34)، (5.35)، (5.36) أن حقل المتجه $\tilde{R} - r(s)$ عمودي على المماس T وله مسقط في اتجاه n وكذلك له مسقط في اتجاه b أي أن حقل المتجه $\tilde{R} - r(s)$ (المعرف على امتداد نقاط المنحنى) يمكن كتابته كتركيبه خطية من المتجهات T,n,b على الصورة

$$\tilde{R} - r(s) = \xi_1 T + \xi_2 n + \xi_3 b. \qquad (5.37)$$

وباستخدام شروط الالتصاق (5.34)، (5.35)، (5.36) نحصل على

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{1}{k} = \rho, \xi_3 = \dot{\rho}\sigma$$

إذاً الدالة الاتجاهية (5.37) التي تعرف المحل الهندسي لمراكز كرة الانحناء تأخذ الصورة

$$\tilde{R} = r(s) + \rho n + \dot{\rho}\sigma b \qquad (5.38)$$

من هذه الدالة الاتجاهية نجد أن نصف قطر كرة الانحناء يساوي

$$R = |\tilde{R} - r(s)| = \sqrt{\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2} \qquad (5.39)$$

واضح أن نصف قطر كرة الانحناء متغير ويختلف باختلاف انحناء وليّ المنحنى.
الدالة الاتجاهية (5.38) يمكن كتابتها على الصورة

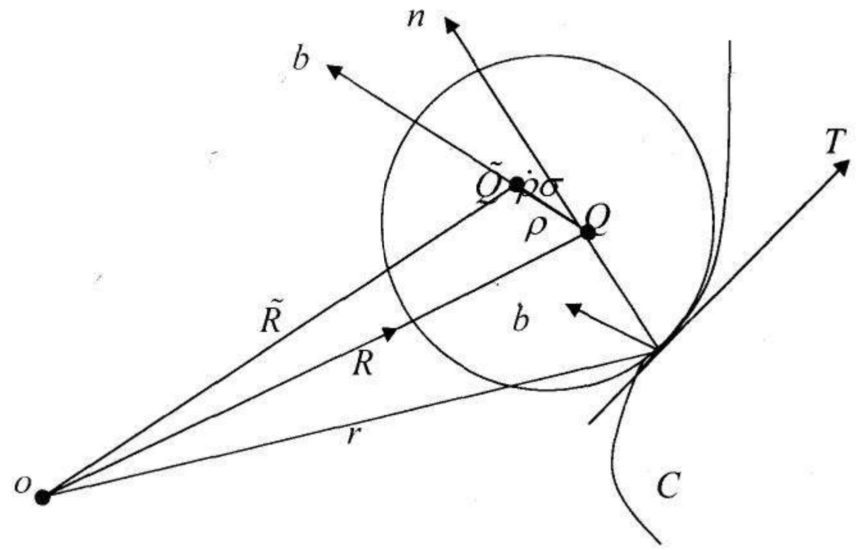
$$\tilde{R}(s) = R(s) + \dot{\rho}\sigma b \, , R(s) = r(s) + \rho n$$

حيث $R(s)$ المحل الهندسي لدائرة الانحناء والمتجه $R(s) - r(s)$ يقع على امتداد العمود الأساسي بينما المتجه $\tilde{R}(s) - R(s)$ يقع على امتداد العمود الثانوي والمتجه

$$\tilde{R}(s) - r(s) = \rho n + \dot{\rho}\sigma b$$

يقع في المستوى العمودي ومساقطه على المتجهات n, b هي $\rho, \dot{\rho}\sigma$ على الترتيب كما هو موضح في شكل (٣.٥). حيث Q مركز دائرة الانحناء و $\tilde{Q}$ مركز كرة الانحناء وبالتالي فإن

$$\overline{P\tilde{Q}} = \tilde{R} - r(s) \, , \quad \overline{PQ} = R - r(s) \, , \quad \overline{Q\tilde{Q}} = \tilde{R} - R$$



شكل (٣.٥)

نفرض أن s هو بارامتر طول قوس المنحنى $C : r = r(s)$ و $\tilde{s}$ هو بارامتر طول قوس المحل الهندسي $\tilde{C}$ لكرة الانحناء حيث

$$\tilde{C} : \tilde{R}(\tilde{s}) = r(s) + \rho n + \dot{\rho}\sigma b \qquad (5.40)$$

الآن نقوم بدراسة الهندسة الخارجية للمنحنى $\tilde{C}$ كما رأينا سابقاً في حالة دائرة الانحناء كالآتي:

نأخذ $\tilde{s}$ هو البارامتر الطبيعي بالنسبة للمنحنى $\tilde{C}$ بينما s (بارامتر طبيعي للمنحنى C) هو بارامتر عام له أي أن

$$\tilde{T} = \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{s}} \quad , \frac{d\tilde{s}}{ds} = \dot{\tilde{s}} \neq 0$$

وباشتقاق المعادلة (5.40) بالنسبة إلى s نحصل على

$$\tilde{t}\,\dot{\tilde{s}} = (\frac{\rho}{\sigma} + \dot{\sigma}\dot{\rho} + \sigma\ddot{\rho})b \qquad (5.41)$$

نأخذ في اعتبارنا أننا نقيس $\tilde{s}$ على المنحنى $\tilde{C}$ في اتجاه تزايد s على المنحنى C أي أن $\tilde{s}=\tilde{s}(s)$ دالة تزايدية في s وبالتالي فإن $\dot{\tilde{s}}=\frac{d\tilde{s}}{ds}>0$

إذاً يمكننا اختيار (بأخذ المقياس للمعادلة (5.41))

$$\tilde{T}=b\,,\ \frac{d\tilde{s}}{ds}=\frac{\rho}{\sigma}+\dot{\rho}\dot{\sigma}+\sigma\ddot{\rho} \qquad (5.42)$$

أو ما يكافئ

$$\frac{d\tilde{s}}{ds}=\frac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)^{\dot{}},\ \ \dot{.}=\frac{d}{ds} \qquad (5.43)$$

وباشتقاق المعادلة الاتجاهية في (5.42) واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$\tilde{k}\tilde{n}\frac{d\tilde{s}}{ds}=-\tau n$$

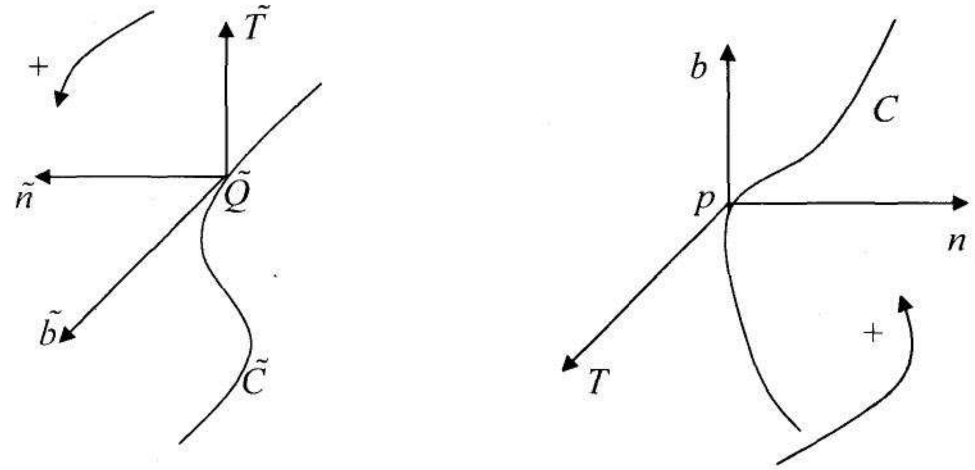
وبما أن $\frac{d\tilde{s}}{ds}>0$ فإنه يمكننا أخذ

$$\tilde{n}=-n\,,\ \tilde{k}\frac{d\tilde{s}}{ds}=\tau \qquad (5.44)$$

ومن (5.43) نحصل على

$$\tilde{k}=\frac{\tau}{\frac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)^{\dot{}}} \qquad (5.45)$$

وبالأخذ في الاعتبار أن الإطار (T, n, b) يكون مجموعة يمينية فإنه لابد وأن يكون الإطار $(\tilde{T},\tilde{n},\tilde{b})$ مجموعة يمينية كما هو موضح في شكل (٤.٥).



شكل (٤.٥)

إذاً العمود الثاني (الثانوي) $\tilde{b}$ للمنحنى $\tilde{C}$ يكون موازياً المماس T للمنحنى C وذلك لأن

$$\tilde{b} = \tilde{T} \wedge \tilde{n} = b \times (-n) = T$$

$$\therefore \tilde{b} = T \tag{5.46}$$

وباشتقاق المعادلة (5.46) بالنسبة إلى s نحصل على

$$-\tilde{\tau}\,\tilde{n}\,\dot{\tilde{s}} = kn \;,\; \tilde{n} = -n$$

وبأخذ المقياس للطرفين (أو باستخدام (5.44)) نحصل على $\tilde{\tau}\,\dot{\tilde{s}} = k$

إذاً (باستخدام (5.43)) يكون لدينا

$$\tilde{\tau} = \frac{k}{\dfrac{\rho}{\sigma} + (\dot{\rho\sigma})} \tag{5.47}$$

من العلاقات (5.45)، (5.47) نحصل على (بالقسمة)

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{\tau}} = \frac{\tau}{k} \tag{5.48}$$

نظرية (٢.٥):

المحل الهندسي لمركز كرة الانحناء للمنحنى الحلزوني الذي زاويته α يكون أيضاً حلزون زاويته $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

البرهان:

بالنسبة للمنحنى الحلزون يكون $\frac{k}{\tau}=\tan\alpha$. إذاً $\frac{\tau}{k}=\cot\alpha$ وبالتعويض في العلاقة (5.48) نحصل على $\frac{\tilde{k}}{\tilde{\tau}}=\cot\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\text{const.}$

وهو المطلوب إثباته.

نظرية (٣.٥):

الشرط الضروري والكافي لوقوع منحنى فراغ $C: r=r(s)$ على سطح كرة (منحنى كروي spherical curve) هو أن يتحقق

$$\frac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)\dot{}=0\ \ ,\ .=\frac{d}{ds} \tag{5.49}$$

حيث ρ,σ هما أنصاف أقطار الليّ والانحناء للمنحنى C على الترتيب.

البرهان:

إذا كان المنحنى C واقع على سطح كرة فإنه في هذه الحالة تكون كرة الانحناء (أقرب كرة للمنحنى) هي نفس الكرة ومركز كرة الانحناء هو نفسه مركز هذه الكرة لجميع نقط المنحنى. وبالتالي حينما تتحرك النقطة p على المنحنى C لا يوجد إلا مركز انحناء واحد وبالتالي المنحنى $\tilde{C}$ يختزل بالكامل إلى نقطة ويكون إذاً $\frac{d\tilde{s}}{ds}=0$ ومن (5.43) نحصل على الشرط الضروري وهو تحقق (5.49).

وبالعكس يمكن إثبات أن هذا الشرط كافي بمعنى أنه إذا تحقق الشرط (5.49) فإن المنحنى يقع على سطح كرة.

لذلك نفرض أن (5.49) محقق ومن (5.43) يكون $\frac{d\tilde{s}}{ds}=0$ وبالتالي فإن

$$\frac{d\tilde{R}}{ds}=\frac{d\tilde{R}}{d\tilde{s}}.\frac{d\tilde{s}}{ds}=0$$

إذاً المنحنى $\tilde{C}$ عبارة عن متجه ثابت (لا يعتمد على s أي لا يعتمد على نقاط المنحنى C) وبالتالي لا يوجد إلا مركز انحناء واحد لجميع نقاط المنحنى أي أنه لا يوجد إلا كرة انحناء واحدة ويقع عليها المنحنى. إذاً جميع نقاط المنحنى أي المنحنى ذاته يقع على سطح هذه الكرة. وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

ملاحظة (٥.٥):

التناظر بين الإطارات المتحركة (T, n, b)، $(\tilde{T},\tilde{n},\tilde{b})$ على المنحنيات C، $\tilde{C}$ على الترتيب تعطى من خلال تحويل خطي غير الشاذ (من (4.42)، (4.44)، (4.46)) على الصورة

$$\begin{pmatrix}\tilde{T}\\ \tilde{n}\\ \tilde{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\ n\\ b\end{pmatrix} \qquad (5.50)$$

واضح أن هذا التحويل عمودي حيث مصفوفة التحويل (5.50) محددها يساوي الوحدة (موجب) ولذلك فإن هذا التحويل يحافظ على توجيه الإطارات المتحركة على كل من المنحنيات C ، $\tilde{C}$ كما هو موضح في شكل (٤.٥).

(٤.٥) المنحنى الناشر لمنحنى فراغ The Involute of a Space Curve

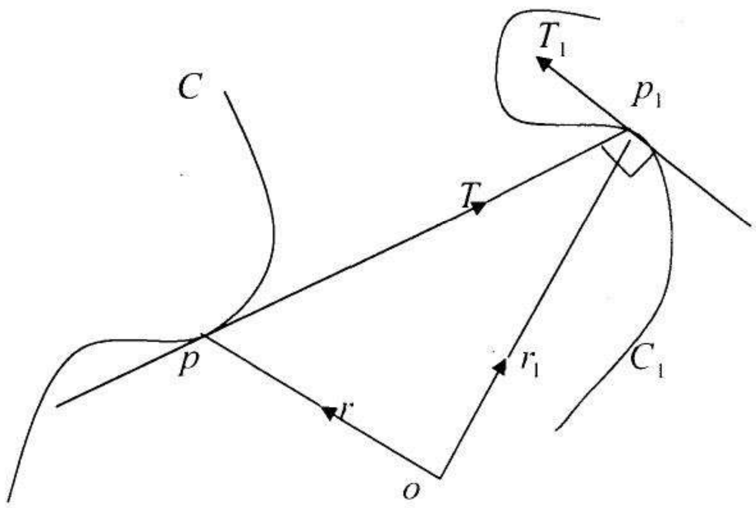
تعريف (٨.٥):

نفرض أن $C:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow E^3$ و $C_1:J\subset\mathbb{R}\longrightarrow E^3$ منحنيان فراغ بحيث المماسات للمنحنى C أعمدة على المنحنى C_1 أي أعمدة على المماسات للمنحنى C_1 في هذه الحالة المنحنى C_1 يسمى ناشر Involute للمنحنى C (معلوم).

لنعتبر نقطة p على المنحنى $C:r=r(s)$ وحسب التعريف يكون المماس للمنحنى C عند النقطة p عمودياً على المنحنى C_1 أي يقطع المنحنى $C_1:r_1=r_1(s_1)$ على التعامد عند نقطة ولتكن p_1 ومن هندسة الشكل (٥.٥) نجد أن $\overrightarrow{op_1}=\overrightarrow{op}+\overrightarrow{pp_1}$ حيث $\overrightarrow{pp_1}$ في اتجاه المماس $T=\dfrac{dr}{ds}$ للمنحنى C عند النقطة p التي لها متجه الموضع $r=r(s)$ وليكن $\overrightarrow{pp_1}=\lambda T$.

$$\therefore r_1(s_1)=r(s)+\lambda T(s) \qquad (5.51)$$

حيث $r_1(s_1)$ متجه الموضع للنقطة p_1, s_1 بارامتر طول قوس المنحنى C_1, λ كمية قياسية.



شكل (٥.٥)

باشتقاق المعادلة (5.51) بالنسبة إلى s مع اعتبار أن s_1 دالة في s نحصل على

$$\frac{dr_1}{ds_1}.\frac{ds_1}{ds}=T+\dot{\lambda}T+\lambda kn$$

$$\therefore T_1.\frac{ds_1}{ds}=(1+\dot{\lambda})T+\lambda kn \qquad (5.52)$$

ومن تعريف المنحنى الناشر $C_1(T \perp T_1)$ نحصل على (بضرب (5.52) في T قياسياً):

$$<T_1,T>=0=1+\dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda}=\frac{d\lambda}{ds}=-1$$

بالتكامل نحصل على $\lambda=c-s$ حيث c ثابت اختياري. وبالتعويض عن λ في (5.51) نحصل على :

$$r_1(s_1)=r(s)+(c-s)T \qquad (5.53)$$

وهذه هي الصورة العامة للمنحنى الناشر.

إذاً يوجد عدد لانهائي من منحنيات النواشر لمنحنى فراغ أي أن المنحنى الناشر لمنحنى معلوم ليس وحيد (لأن المعادلة (5.53) تحتوي على ثابت اختياري c وهو بارامتر عائلة النواشر).

باشتقاق المعادلة (5.53) بالنسبة إلى s_1 نحصل على ($\frac{dr}{ds_1}=T.\frac{ds}{ds_1}$):

$$T_1=k(c-s)\frac{ds}{ds_1}n \qquad (5.54)$$

ومنها نجد أن $T_1=\pm n$ ونتفق على اختيار

$$T_1=n, \qquad (5.55)$$

$$\therefore \frac{ds_1}{ds}=k(c-s) \qquad (5.56)$$

وحيث أن $\frac{ds_1}{ds}\neq 0$ إذاً يجب أن تكون $c \neq s$ عند أي نقطة على المنحنى C وإذا أخذنا $s_1=s_1(s)$ دالة تزايدية في s فإنه يجب أن تكون $c>s$، $k>0$.

باشتقاق العلاقة (5.55) واستخدام صيغ فرينيه التفاضلية نحصل على

$$k_1 n_1 \frac{ds_1}{ds}=\tau b-kT \qquad (5.57)$$

وبأخذ المقياس (الطول أو المعيار) للطرفين يكون لدينا

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\tau^2 + k^2} \qquad (5.58)$$

ومن (5.56) يكون لدينا

$$k_1 = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k(c - s)} \qquad (5.59)$$

وبالتعويض في (5.57) نحصل على

$$n_1 = \frac{\tau b - kT}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} \qquad (5.60)$$

حيث n_1 متجه ناحية الجهة المقعرة من المنحنى C_1.

وبالتعويض من (5.60)، (5.55) في العلاقة $b_1 = T_1 \times n_1$ نحصل على

$$b_1 = n \times \frac{\tau b - kT}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}$$

$$\therefore\ b_1 = \frac{\tau T - kb}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \qquad (5.61)$$

ملاحظة (٦.٥):

كل من العمود الأساسي n_1 والعمود الثانوي b_1 للمنحنى الناشر C_1 يقع في المستوى المقوم (مولد بالمتجهات T, b) للمنحنى C.

باشتقاق العلاقة (5.61) بالنسبة إلى s نحصل على

$$-\tau_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \frac{(\tau \dot{k} - \dot{\tau} k)(\tau b - kT)}{(k^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ \tau_1 n_1 = \frac{\dot{\tau} k - \dot{k}\tau}{k^2 + \tau^2} \cdot \frac{\tau b - kt}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \cdot \frac{ds}{ds_1}$$

بأخذ مربع المقياس والتعويض عن $\frac{ds}{ds_1}$ من (5.56) نحصل على

$$\tau_1 = \frac{\dot{\tau}k - \dot{k}\tau}{k\,|c-s|(k^2+\tau^2)}$$

أو

$$\tau_1 = \frac{-1}{k\,|c-s|} \cdot \frac{\tau\dot{k} - k\dot{\tau}}{k^2+\tau^2}$$

$$\therefore \tau_1 = \frac{-1}{k\,|c-s|} \frac{d}{ds} \tan^{-1}\left(\frac{k}{\tau}\right) \qquad (5.62)$$

نظرية (٥.٤):

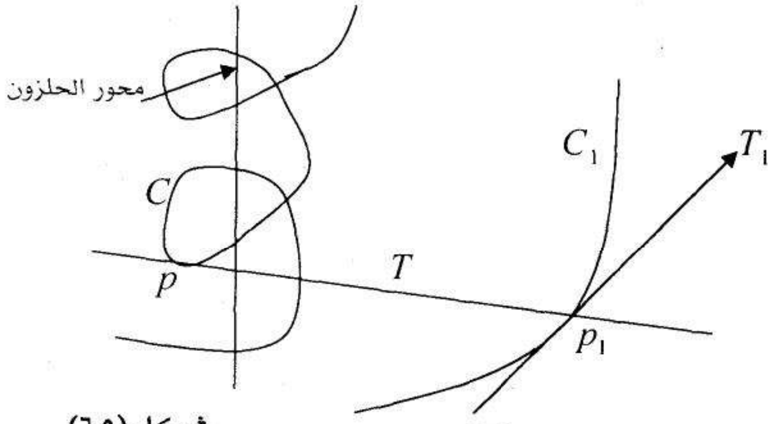
المنحنى الناشر لمنحنى حلزوني هو منحنى مستوى والعكس صحيح.

البرهان:

بما أن المنحنى الحلزون يحقق أن $\frac{k}{\tau}$ ثابت وباستخدام (5.62) نجد أن $\tau_1 = 0$ أي أن المنحنى الناشر للحلزون منحنى مستوي وإذا كانت $\tau_1 = 0$ فإن

$$\frac{d}{ds} \tan^{-1}\left(\frac{k}{\tau}\right) = 0$$

أي أن $\frac{k}{\tau}$ ثابت وبالتالي فإن C منحنى حلزوني كما هو موضح في شكل (٦.٥).



شكل (٦.٥)

من (5.61) ,(5.60)، (5.55) يمكننا صياغة العلاقة بين الإطار (T,n,b) للمنحنى C والإطار (T_1,n_1,b_1) للمنحنى C_1 (الناشر) على الصورة

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k\xi & 0 & \tau\xi \\ \tau\xi & 0 & k\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} , \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}} \qquad (5.63)$$

ملاحظة (٥.٧):

واضح أن هذا التحويل خطي عمودي غير شاذ حيث أن محدد مصفوفة التحويل يساوي الوحدة (موجب) ولذلك فإنه يحافظ على اتجاه الإطارات المتحركة على كل من C، C_1 (راجع التحويلات الخطية في الجبر الخطي).

(٥.٥) المنتشر لمنحنى فراغ Evolute

تعريف (٥.٩):

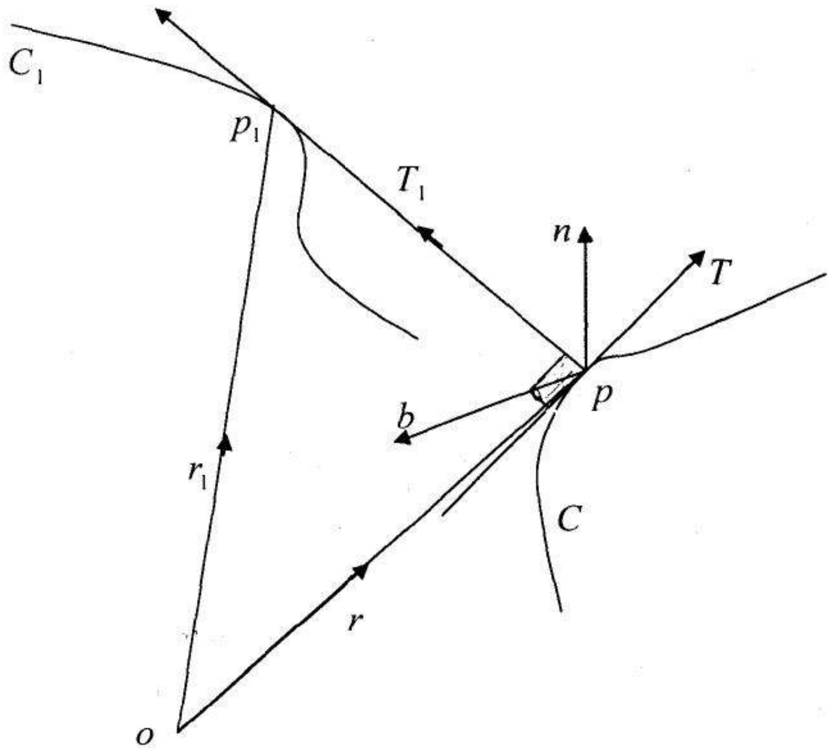
يعرف المنتشر Evolute لمنحنى فراغ C بأنه منحنى فراغ C_1 بحيث يكون ناشراً لمنحنى الفراغ C أو بعبارة أخرى هو منحنى فراغ C_1 مماساته تقطع المنحنى C على التعامد.

لإيجاد معادلة المنحنى المنتشر C_1 نفرض أن p نقطة على المنحنى C حيث $\overrightarrow{op}=\underline{r}$ ولتكن p_1 النقطة المناظرة لها على المنحنى C_1 حيث $\overrightarrow{op_1}=\underline{r}_1$ كما هو موضح في شكل (٥.٧).

ومن هندسة الشكل نجد أن $\overrightarrow{op_1}=\overrightarrow{op}+\overrightarrow{pp_1}=r+\overrightarrow{pp_1}$ ولكن حسب التعريف يكون $\overrightarrow{pp_1}$ في اتجاه المماس للمنحنى C_1 عند p_1 وكذلك يكون المماس T عمودي على $\overrightarrow{pp_1}$ وهذا يؤدي إلى أن $\overrightarrow{pp_1}$ يوازي المستوى العمودي المولد بالمتجهات b, n أي أن $\overrightarrow{pp_1}=un+vb$ حيث u, v دوال قياسية يلزم تعيينها من تعريف C_1

$$\therefore r_1(s_1)=r(s)+un+vb \qquad (5.64)$$

حيث s_1 هو بارامتر المسافة القوسية على C_1 و كل من u, v دوال في s.



شكل (٧.٥)

بالتفاضل بالنسبة إلى s للعلاقة (5.64) نحصل على

$$\therefore T_1 \frac{ds_1}{ds} = (1-uk)T + (\dot{u} - v\tau)n + (\dot{v} + u\tau)b \qquad (5.65)$$

ولكن المتجه $\overrightarrow{pp_1}$ يمكن التعبير عنه في الصورة $r_1 - r = \lambda T_1$ حيث λ كمية قياسية، T_1 المماس للمنحنى C_1 عند النقطة p_1. وباستخدام (5.64)، (5.65) نحصل على

$$(1-uk)T + (\dot{u} - v\tau)n + (\dot{v} + u\tau)b = \lambda(un + vb)$$

وبمقارنة معاملات T,n,b على الطرفين نحصل على (الاستقلال الخطي لعناصر الإطار)

$$1-uk=0,\ \dot{u}-v\tau=\lambda u\ ,\ \dot{v}+u\tau=\lambda v$$

أو ما يكافئ

$$\frac{\dot{u}-v\tau}{u}=\frac{\dot{v}+u\tau}{v}=\lambda\ ,\ u=\frac{1}{k}=\rho$$

ومن هذه العلاقات نحصل على العلاقة (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين):

$$\tau=\frac{\dot{u}v-\dot{v}u}{u^2+v^2}=\frac{\dfrac{\dot{u}v-\dot{v}u}{u^2}}{1+\dfrac{v^2}{u^2}}$$

$$\therefore\ \tau=\frac{d}{ds}\tan^{-1}\left(\frac{-v}{u}\right) \qquad (5.66)$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى s يكون لدينا

$$\int\tau\,ds=\tan^{-1}\left(\frac{-v}{u}\right)$$

ولكن من تعريف الليّ τ نجد أن

$$\int\tau\,ds=\psi+c\quad\Rightarrow\frac{-v}{u}=\tan(\psi+c)$$

أو $\dfrac{d\psi}{ds}=\tau$ حيث $v=-u\tan(\psi+c)\ ,u=\rho$

$$\therefore v=-\rho\tan(\psi+c) \qquad (5.67)$$

حيث c ثابت اختياري، ψ الزاوية التي يدور بها المستوى اللاصق (أو العمود الثانوي) والتي تعرف الليّ.

إذاً المعادلة الإتجاهية (5.64) تصبح على الصورة

$$r_1(s_1)=r(s)+\rho(n-b\tan(\psi+c)) \qquad (5.68)$$

وهذه هي معادلة المنتشر C_1 لمنحنى منتظم $C: r=r(s)$ ومنها يتضح أنه لأي منحنى فراغ يوجد له عدد لانهائي من المنتشرات نظراً لظهور ثابت اختياري c.

كذلك نرى بسهولة من (5.68) أن المماس T_1 للمنتشر C_1 له نفس الاتجاه (أو عكس الاتجاه) للمتجه $\overrightarrow{pp_1}=r_1-r$ أي له الاتجاه

$$\frac{\rho}{\cos(\psi+c)}(n\cos(\psi+c)-b\sin(\psi+c)) \qquad (5.69)$$

أو يوازي متجه الوحدة $n\cos(\psi+c)-b\sin(\psi+c)$

نظرية (٥.٥):

إذا كان C_1'، C_1'' منتشران للمنحنى C فإن C_1' يصنع زاوية $\psi+c'$ مع العمود الأساسي n والمنحنى C_1'' يصنع زاوية $\psi+c''$ مع n والزاوية بينهما ثابتة وتساوي $c'-c''$ عند جميع النقط المتناظرة على المنحنيين.

البرهان:

نفرض أن المنتشرين C_1'، C_1'' للمنحنى C هما

$$r_1'=r+\rho(n\cos(\psi+c')-b\sin(\psi+c')),$$

$$r_1''=r+\rho(n\cos(\psi+c'')-b\sin(\psi+c'')).$$

المماسات لهما تكون في اتجاه متجهات الوحدة الآتية على الترتيب:

$$T_1'=n\cos(\psi+c')-b\sin(\psi+c'),$$

$$T_1''=n\cos(\psi+c'')-b\sin(\psi+c'').$$

وبما أن الزاوية بين المنحنيين C_1'، C_1'' هي الزاوية θ بين متجهي الوحدة T_1'، T_1'' وباستخدام تعريف جيب تمام الزاوية وكذلك المتطابقات المثلثية نحصل على

$$\cos\theta = \langle T_1', T_2'' \rangle = \cos(c'' - c') \Rightarrow \theta = c'' - c'$$

وهذا يكمل برهان النظرية.

للحصول على الانحناء k_1 للمنتشر C_1 نشتق العلاقة (5.68) بالنسبة إلى s وعمل الاختصارات اللازمة نجد أن

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = \sec(\psi + c)(\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c)).$$
$$(n\cos(\psi + c) - b\sin(\psi + c)) \qquad (5.70)$$

نختار

$$T_1 = n\cos(\psi + c) - b\sin(\psi + c) \qquad (5.71)$$

$$\therefore \frac{ds_1}{ds} = \sec(\psi + c)(\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c)) \qquad (5.72)$$

وباشتقاق العلاقة (5.71) بالنسبة إلى s نحصل على

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} n_1 = -k\cos(\psi + c)T \quad , \frac{d\psi}{ds} = \tau$$

وباختيار

$$n_1 = -T \qquad (5.73)$$

نحصل على

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} = k\cos(\psi + c)$$

وبالتعويض عن $\frac{ds_1}{ds}$ من (5.72) نحصل على

$$k_1 = \frac{k\cos^2(\psi + c)}{\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c)} \qquad (5.74)$$

ومن العلاقات (5.71)، (5.73) نجد أن

$$b_1 = T_1 \wedge n_1 = n\sin(\psi + c) + b\cos(\psi + c) \quad (5.75)$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة إلى s نحصل على الليّ τ_1 في الصورة

$$\tau_1 = \frac{-k\sin(\psi + c)}{(\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c)\sec(\psi + c)}$$

وحيث أن $\rho = \frac{1}{k}$ إذاً $\dot{\rho} = -\frac{\dot{k}}{k^2}$ وبالتالي يكون لدينا

$$\tau_1 = \frac{k^3\sin(\psi + c)\cos(\psi + c)}{\dot{k}\cos(\psi + c) - k\tau\tan(\psi + c)} \quad (5.76)$$

ملاحظة (٥.٨):

العلاقة بين الإطارات المتحركة على امتداد كل من المنحنى C والمنتشر C_1 تعطى بالتحويل الخطي العمودي (غير الشاذ) الآتي:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\psi + c) & -\sin(\psi + c) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\psi + c) & \cos(\psi + c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

مثال (٥.٦):

بين أن المنحنى المنتشر لمنحنى مستوى هو منحنى حلزون.

الحل:

إذا كان C منحنى مستوى أي أن $\tau = 0$ فيكون $\psi = 0$ وعلى ذلك فإن المنحنى المنتشر C_1 يعطى من.

$$r_1 = r + \rho n - \rho(\tan c)\, b \;, \quad T_1 = n\cos c - b\sin c$$

$$<T_1, b> = -\sin c = \text{const.} \;, \quad <T_1, n> = \cos c = \text{const.}$$

أي أن المماس T_1 للمنحنى المنتشر C_1 يصنع زاوية ثابتة مع كل من b و n ومن تعريف المنحنى الحلزوني نصل إلى المطلوب.

ملاحظة (٥.٩):

في حالة المنحنى المستوي $(\tau = 0)$ وباختيار قيمة للثابت c تساوي صفر فإننا نحصل على $r_1 = r + \rho n$ وهي معادلة المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء.

ملاحظة (٥.١٠):

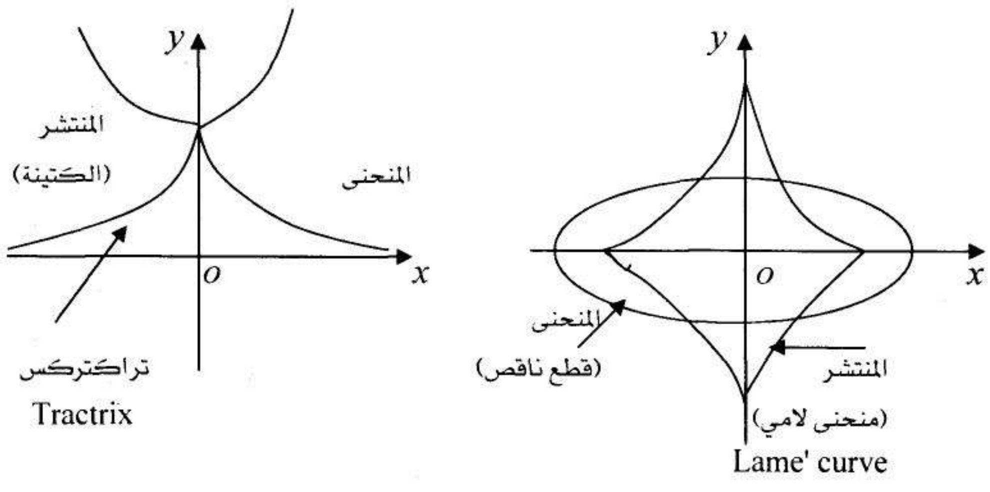
تعريف المنتشر لمنحنى معلوم مستقل عن التمثيل البارامتري لأي دالة تفاضلية.

ملاحظة (٥.١١):

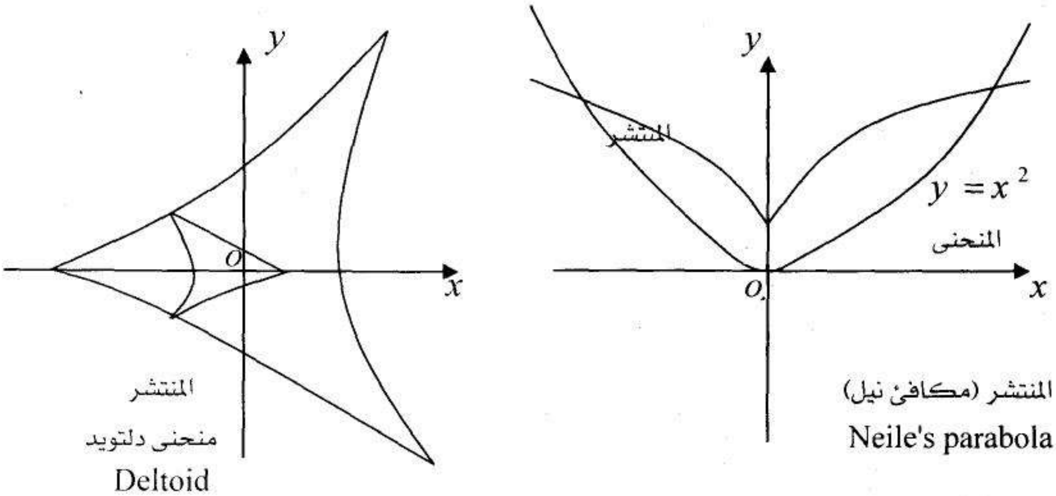
إذا كان E منحنى منتشر لمنحنى I فإن I يقال أنه ناشر للمنحنى E.

ملاحظة (٥.١٢):

المحل الهندسي لمراكز ودائرة الالتصاق (الانحناء) لمنحنى معلوم هو المنتشر لهذا المنحنى. ونوضح ذلك من خلال شكل (٥.٨)، (٥.٩).



شكل (٥.٨)



شكل (٥.٩)

(٥.٦) منحنيات برتراند Bretrand Curves

تعريف (٥.١٠):

يقال أن المنحنيين C, C^* أنهما منحنيان من نوع برتراند إذا كان لهما نفس العمود الأساسي. إذا كان المنحنى C ممثل بالحقل الاتجاهي $r = r(s)$ فإن المنحنى C^* يكون له التمثيل الاتجاهي

$$r^* = r + \lambda n \qquad (5.78)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى s يكون لدينا

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k)T + \dot{\lambda} n + \lambda \tau b, \; . = \frac{d}{ds} \qquad (5.79)$$

حيث s^* بارامتر المسافة القوسية على المنحنى C^* و T^* المماس له عند النقطة p^* التي تناظر p كما هو موضح في شكل (٥.١٠).

ولكن $n = n^*$ إذاً $<T^*, n> = 0$ وبضرب طرفي العلاقة (5.79) في n نحصل على $\dot{\lambda} = 0$ وبالتكامل نجد أن $\lambda = c = \text{const.}$.

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥ـ٧):

المسافة بين النقط المتناظرة على منحنيات برتراند C,C^* ثابتة ولا تعتمد على النقاط المتناظرة.

إذاً التمثيل البارامتري لزوج برتراند C,C^* يأخذ الصورة (من (5.78))

$$r^* = r + cn \qquad (\text{ثابت } c) \qquad (5.80)$$

والعلاقة (5.79) تصبح على الصورة

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1-ck)T + c\tau b \qquad (5.81)$$

ولكن

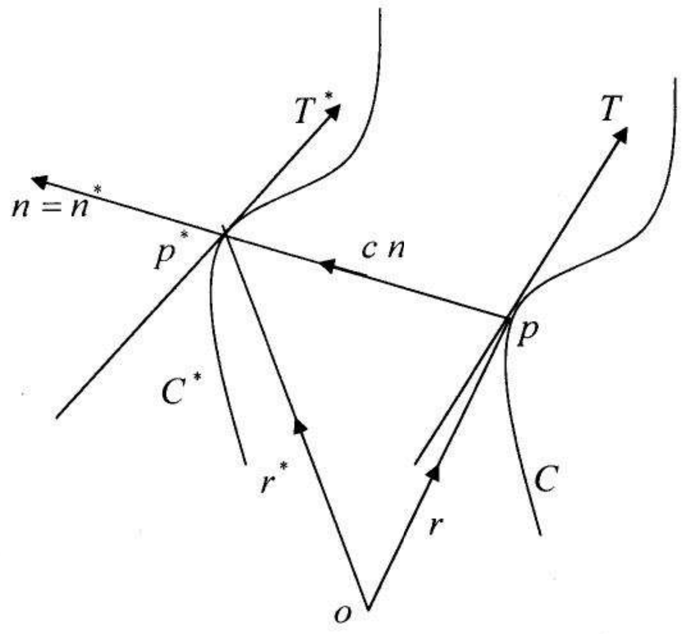
$$\frac{d}{ds} <T, T^*> = k <n, T^*> + k^* <T, n^*> = 0, (n = n^*)$$

$$\therefore <T, T^*> = \text{const.} = \cos\alpha$$

حيث α زاوية ثابتة بين المماسات للمنحنين عند النقاط المتناظرة.

أي أن المماسين لكل من منحنيات برتراند C,C^* يحصران بينهما زاوية ثابتة α.

وبما أن المتجهات T, T^*, b, b^* تقع في مستوى عمودي على $n = n^*$ وكذلك فإن T عمودي على b وعلى b^* وعليه فإن الزاوية بين b, b^* تكون مساوية للزاوية α أيضاً كما هو موضح في شكل (٥ـ١٠).



شكل (٥-١٠)

ومن المعادلة (5.81) نجد أن (بضرب الطرفين قياسياً في T):

$$<T, T^*> \frac{ds^*}{ds} = 1 - ck$$

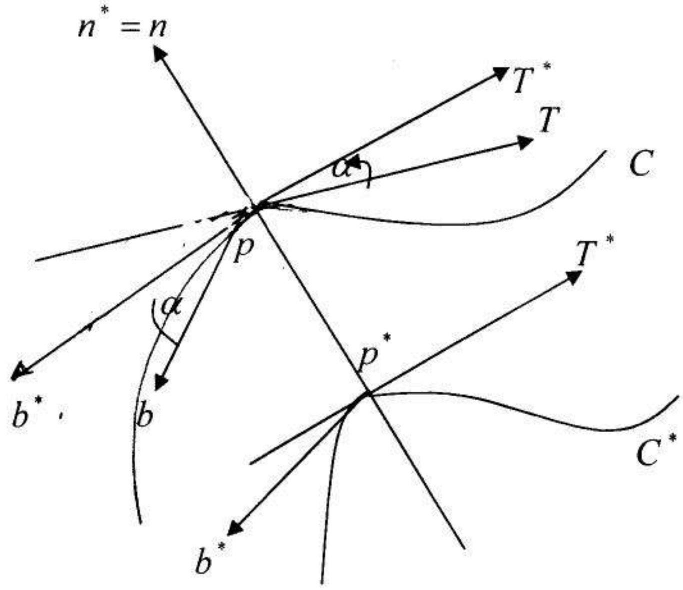
$$\therefore \cos\alpha \frac{ds^*}{ds} = 1 - ck \qquad (5.82)$$

نكتب هنا أيضاً (بضرب طرفي العلاقة (5.81) قياسياً في b):

$$<b, T^*> \frac{ds^*}{ds} = c\tau,$$

$$\therefore \sin\alpha \frac{ds^*}{ds} = c\tau \qquad (5.83)$$

حيث الزاوية α موضحة في شكل (٥-١١).



شكل (١١.٥)

ملاحظة (١٣.٥):

شكل (١١.٥) يوضح العلاقة بين الإطارات المتحركة على الزوج C، C^* حيث أننا قمنا بنقل متوازي للإطار C^* عند النقطة p^* إلى النقطة p على المنحنى C.

من العلاقات (5.82)، (5.83) يمكن كتابة T^*, b^* كتركيبة خطية من $b,\ T$ على الصورة

$$\left.\begin{aligned} T^* &= T\cos\alpha + b\sin\alpha \\ b^* &= T^*\wedge n^* = T^*\wedge n = b\cos\alpha - n\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad (5.84)$$

وبقسمة العلاقة (5.82) على العلاقة (5.83) نحصل على العلاقة الخطية الآتية

$$\tau\cos\alpha + k\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{c} \qquad (5.85)$$

ويمكن الحصول على علاقة مماثلة لهذه العلاقة بالنسبة للمنحنى C^* وذلك بعد وضع $-\alpha$ بدلاً من α، $-c$ بدلاً من c، k^*،τ^* بدلاً من k،τ وأخيراً s^* بدلاً من s أي نحصل على علاقة خطية على الصورة :

$$\tau^* \cos\alpha - k^* \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{c} \qquad (5.86)$$

وبنفس الطريقة فإن العلاقات المناظرة للعلاقات (5.82)، (5.83) تصبح على الصورة

$$\cos\alpha \frac{ds}{ds^*} = 1 + ck^* \qquad (5.82)'$$

$$\sin\alpha \frac{ds}{ds^*} = c\tau^* \qquad (5.83)'$$

من (5.82)، $(5.82)'$ نحصل على

$$\cos^2\alpha = (1-ck)(1+ck^*) \qquad (5.87)$$

من (5.83)، $(5.83)'$ نحصل على

$$\sin^2\alpha = c^2\tau\tau^* \qquad (5.88)$$

من (5.87) يمكن الحصول على k^* على الصورة (بفك الأقواس وترتيب الحدود):

$$k^* = \frac{ck - \sin^2\alpha}{c(1-ck)} \qquad (5.89)$$

ومن (5.88) نجد أن

$$\tau^* = \frac{\sin^2\alpha}{c^2\tau} \qquad (5.90)$$

بجمع (5.87)، (5.88) نحصل على ($\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$):

$$c^2\tau\tau^* + (1-ck)(1+ck^*) = 1 \qquad (5.91)$$

أو في الصورة (بفك الأقواس)

$$c(1-ck)k^* + c^2\tau\tau^* = ck \qquad (5.92)$$

وهذا يعني أن k^*, τ^* يرتبطان بعلاقة خطية وكذلك فإن k, τ يرتبطان بعلاقة خطية.

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥.٨):

المنحنيات الفراغية التي تحقق العلاقة الخطية (5.92) هي منحنيات برتراند.

ومن العلاقة (5.90) نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥.٩):

بالنسبة لزوج منحنيات برتراند يتناسب اللّيّ لأحد منحنيات الزوج تناسب عكسي مع ليّ الآخر.

تصنيف منحنيات برتراند:

نعتبر الآن المنحنيات التي تحقق العلاقة الخطية الآتية:

$$\mu\tau + \nu k + \gamma = 0 \qquad (5.93)$$

هذه المنحنيات لها أشكال مختلفة تعتمد على قيم الثوابت μ,ν,γ ونوضح ذلك من خلال الحالات الآتية:

(i) $\nu = \gamma = 0, \tau = 0$ (منحنيات مستوية)

(ii) $\mu = \gamma = 0, k = 0$ (عائلة من الخطوط المستقيمة)

(iii) $\gamma = 0$، $\mu \neq 0, \nu \neq 0$ تصف منحنيات تحقق $\mu\tau + \nu k = 0$ أي أن $\dfrac{\tau}{k} = -\dfrac{\nu}{\mu} = \text{const.}$ وبالتالي فهي تصف عائلة من المنحنيات الحلزونية.

(iv) $\gamma \neq 0$، $\nu = 0$، $\tau = \text{const.}$ وهي تصف عائلة من المنحنيات لها اللّيّ ثابت

(v) $\nu \neq 0, \gamma \neq 0$. ولدراسة هذه الحالة نحول العلاقة (5.93) إلى الصورة العمودية

$$\tau\cos\alpha + k\,\sin\alpha = \eta \qquad (5.94)$$

حيث

$$\tan\alpha=\frac{\nu}{\mu}\,,\;\eta=\frac{-\gamma}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$$

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}},\cos\alpha=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$$

$$\therefore\ \eta=\frac{-\gamma}{\nu}\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}=\frac{\sin\alpha}{-\frac{\nu}{\gamma}}$$

وبوضع $c=-\dfrac{\nu}{\gamma}$ نحصل على $\eta=\dfrac{\sin\alpha}{c}$

إذاً العلاقة (5.94) تأخذ الصورة

$$\tau\cos\alpha+k\,\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{c}\qquad(5.95)$$

وهي نفس العلاقة (5.85) التي تصف منحنيات برتراند.

(vi) $k\ =\ \text{const.}$ ، $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. لدراسة هذه الحالة نقوم بالتعويض في (5.95) لنحصل على $k\ =\dfrac{1}{c}$ حيث c المسافة بين نقطة ما على المنحنى C والنقطة المناظرة لها على المنحنى C^* المرافق له بمفهوم برتراند.

ملاحظة (٥.١١):

المقدار c يساوي نصف قطر انحناء المنحنى C حيث أن متجه الموضع لأي نقطة على المنحنى C^* هو $r^*=r+cn$ وفي هذه الحالة فإن r^* ينطبق على مركز انحناء المنحنى C.

وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥.٩):

المنحنى ذو الانحناء الثابت ومنحنى المحل الهندسي لمراكز إنحنائه يكونا زوج من منحنيات برتراند وعكس هذه النظرية صحيح.

ملاحظة (١٢.٥):

من العلاقات (5.84) وحيث أن $n^* = n$ ، إذاً يكون لدينا العلاقة المصفوفية بين الإطار (T, n, b) والإطار (T^*, n^*, b^*) على الصورة

$$\begin{pmatrix} T^* \\ n^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

واضح أن هذه العلاقة هي تحويل خطي عمودي لأن محدد مصفوفة التحويل (مصفوفة دوران) تساوي واحد (موجب) وهو يمثل دوران الإطار (T, n, b) حول المتجه $n = n^*$ (العمود الأساسي للمنحنى C) بزاوية α.

ملاحظة (١٣.٥):

واضح أن محور الدوران $n = n^*$ لا تغيري invariant أي لا يتغير بالدوران حوله بزاوية α.

تمارين (٥)

(١) أوجد العلاقة بين انحناءات الصورة الكروية $G(T), G(n), G(b)$ لمنحنى منتظم.

(٢) أوجد العلاقة بين الليّ لكل صورة من الصور الكروية $G(T), G(n), G(b)$ لمنحنى منتظم.

(٣) أثبت أنه عند النقط المتناظرة على كل من المميز الكروي $G(T)$ والمميز الكروي $G(b)$ لمنحنى فراغ منتظم يكون المماسان لهذين المميزان متوازيان.

(٤) أثبت أن انحناء المميز الكروي $G(b)$ لمنحنى C هو $k_3=\sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2}$

حيث k، τ هما الانحناء والليّ للمنحنى C.

(٥) أثبت أن نصفا قطري الانحناء للمميز الكروي $G(n)$ ، $G(b)$ لمنحنى الحلزون الدائري هي $\rho_2=1, \rho_3=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ على الترتيب.

(٦) أوجد الليّ للمميز الكروي $G(n)$ ، $G(b)$ لمنحنى فراغ منتظم.
(**إرشاد**: اتبع نفس الخطوات بالنسبة للمميز $(G(T)$).

(٧) بالنسبة لمنحنى فراغ منتظم C أثبت أن $\frac{k}{\tau}=\frac{\tau_3}{\tau_1}$ حيث k, τ هما الليّ والانحناء للمنحنى C وأن τ_1, τ_3 هما الليّ للمميز الكروي $G(b)$ ، $G(T)$ على الترتيب.

(٨) إذا كان المستوى اللاصق عند كل نقطة على المنحنى يمس كرة ثابتة فأثبت أن المستوى المار بالمماس والعمودي على العمود الأساسي يمر بمركز الكرة.

(**إرشاد**: العمودي b على المستوى اللاصق يمر بمركز الكرة ويكون على امتداد قطر فيها عند نقطة التماس).

(٩) أثبت أنه بالنسبة لمنحنى المحل الهندسي C_1 لمراكز كرة الانحناء للمنحنى C يتحقق $\rho\rho_1 = \sigma\sigma_1$.

(**إرشاد:** استخدم العلاقات التي تعطي k_1, τ_1 بالنسبة للمحل الهندسي لمراكز كرة الانحناء).

(١٠) أثبت أنه إذا كان C منحنى له الانحناء ثابت لجميع نقطة فإن منحنى المحل الهندسي C_1 لمراكز الانحناء يكون له الانحناء ثابت.

(**إرشاد:** إذا كان $k = \text{const.}$ فإن $\dot{\rho}=0$ وعليه فإن $k_1 = k$)

(١١) أثبت أنه إذا كان C منحنى إنحنائه ثابت لجميع نقاطه فإن المحل الهندسي C_1 لمراكز الانحناء يكون الليّ له يساوي k^2/τ حيث k, τ هما الليّ والانحناء للمنحنى C.

(**إرشاد:** ضع $\rho=\dfrac{1}{k}=\text{const.}$ في (5.47))

(١٢) أثبت أن الناشر لمنحنى مستوى يكون مع المنحنى زوج برتراند.

(١٣) أوجد المنحنى الناشر لكل من القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافئ والدائرة والخط المستقيم (إن أمكن).

(١٤) هل يمكن تعريف المنحنى المنتشر لمنحنى مستوى.

(١٥) أوجد المنحنى المنتشر لمنحنى الحلزون الدائري.

(١٦) أثبت أنه إذا وجد تناظر أحادي بين نقط منحنيين بحيث أن الأعمدة الثانوية تكون منطبقة عند النقط المتناظرة فإن هذه المنحنيات تقع في مستوى.
(**إرشاد:** ضع $\overline{r} = r + \lambda b$ ونفذ نفس خطوات منحنيات براتراند).

(١٧) أثبت أنه إذا وجد تناظر أحادي بين منحنيين $C ,\bar{C}$ بحيث أن المماسات عند النقط المتناظرة تكون متوازية فإن الأعمدة الأساسية والأعمدة الثانوية تكون أيضاً متوازية.

(**إرشاد:** ضع $T(s)=\bar{T}(\bar{s})$ وبالتفاضل بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه).

(١٨) أثبت أن المنحنى المعرف بالدالة الاتجاهية

$$r(u)=c_1\int e(u)du+c_2\int e(u)\wedge e'(u)du$$

حيث $e(u)$ دالة اتجاهية تحقق $|e(u)|=1,|e'(u)|=1$ ، $'=\frac{d}{du}$.

هو منحنى برتراند والعكس أي أن منحنى برتراند يمكن تعريفه بالدلة الاتجاهية السابقة حيث c_1,c_2 ثوابت.

(**إرشاد:** التكامل يختفي بعد المشتقة الأولى $(r'(u))$)

(١٩) بين أن المنحنى المنتشر للدائرة هو مركزها.

(٢٠) إذا كان $r(x)=(f(x),g(x))$ منحنى مستوى. أوجد إحداثيات أي نقطة $\tilde{r}(x)$ على المنحنى المنتشر.

(**إرشاد:** استخدام $\tilde{r}=r+\rho n$ ، $r'=(f',g')$ ،

$$n=\frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}(g',-f')\ )$$

(٢١) أوجد الثلاثي المتحرك على امتداد منحنى المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء لمنحنى منتظم $C:r=r(s)$.

(**إرشاد:** استخدم (5.28)، (5.32)).

(٢٢) أوجد الانحناء واللّيّ لمنحنى المحل الهندسي لمراكز دائرة الانحناء.

(**إرشاد:** أكمل الخطوات التي اتبعتها في التمرين السابق).

(٢٣) بين أن كل من العمود الأساسي n_1 والعمود الثانوي b_1 للميز $G(T)$ للمنحنى C يقع في المستوى المقوم للمنحنى C .

(**إرشاد:** ارجع إلى العلاقات (5.12)، (5.13)).

(٢٤) أثبت أنه إذا كان C انحنائه ثابت لجميع نقاطه فإن المحل الهندسي لمراكز الانحناء يكون له نفس الانحناء للمنحنى C .

(**إرشاد:** ضع $\rho=\dfrac{1}{k}=\text{const.}$ في (5.45) نحصل على $\tilde{k}=k$)

(٢٥) أثبت أن المنحنى

$$x(u)=(a\cos^2 u, u\cos u\sin u, a\sin u)$$

يقع على سطح كرة (منحنى كروي spherical curve).

(**إرشاد:** احسب $\rho=\dfrac{1}{k}$, $\dfrac{1}{\tau}=\sigma$ وتحقق من أن $\dot{.}=\dfrac{d}{ds}$, $\dfrac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)^{\dot{}}=0$)

(٢٦) أوجد شرط أن يقع الحلزون العام على سطح كرة نصف قطرها r أي أوجد شرط أن يكون الحلزون العام منحنى كروي.

(**إرشاد:** ضع $\dfrac{k}{\tau}=$ ثابت أي $\dfrac{\rho}{\sigma}=$ ثابت نحصل على $(\dot{\rho}\sigma)^{\dot{}}=0$) وهذا يؤدي إلى $\dot{\rho}\sigma=\text{const.}$)

الباب السادس

النظرية الأساسية للمنحنيات في الفراغ

Fundamental Theorem for Curves

الهدف من هذا الباب هو أن نبين كيف أن كل من الانحناء والليّ يؤثر في شكل المنحنى. ولهذا فإننا نقوم بإعطاء تقريب قانوني للمنحنى informative approximation بالقرب من نقطة اختيارية عليه. ولذلك نستخدم تقريب تيلور للمنحنى والتعبير عن هذا التقريب كدوال في الانحناء والليّ وإطار فرينيه عند هذه النقطة. وفي الجزء الثاني من الباب نعطي النظرية الأساسية لوجود ووحدانية منحنى الفراغ من خلال الانحناء والليّ كدوال في بارامتر طول القوس.

(١.٦) التمثيل القانوني المحلي لمنحنى في الفراغ:

Canonical Representation of a Space Curve:

نعتبر منحنى ممثل تمثيل بارامتري طبيعي أي بدلالة بارامتر طول القوس وليكن $C : r = r(s)$ والذي يسمى عادة منحنى سرعته الوحدة unit speed curve لأن $T = \dfrac{dr}{ds}$ متجه السرعة velocity vector وقيمته هي السرعة ($|\dfrac{dr}{ds}| = 1$) speed. نفرض أن p أي نقطة على المنحنى المنتظم C في الفراغ. نقوم بإجراء انتقال بحيث تصبح p هي نقطة الأصل. بدوران المحاور حول p كي تصبح المتجهات الأساسية $(\underline{T}, \underline{n}, \underline{b})$ على امتداد محاور الإحداثيات منطبقة على حقل المتجهات (e_1, e_2, e_3) عند p ونفرض أن طول القوس على المنحنى C هو s بحيث أن p تناظر البارامتر $s = 0$ (الإحداثي المحلي). في هذه الحالة فإن المنحنى C يحقق

$$\underline{r}(0) \equiv 0 \,, \underline{\dot{r}}(0) \equiv \underline{T}_o \,, (\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o) \equiv (e_1, e_2, e_3),$$

$$\underline{\ddot{r}}(s)|_{s=0} = \ddot{r}(0) = \dot{T}(s)|_{s=0} = kn|_{s=0} \quad (6.1)$$

أو

$$\ddot{\underline{r}}(0)=\dot{\underline{T}}_o=k_o\underline{n}_o$$

أيضاً

$$\dddot{\underline{r}}(s)=\frac{d\dot{\underline{T}}}{ds}=\frac{d}{ds}(k\,\underline{n})=-k^2\underline{T}+\dot{k}\,\underline{n}+k\,\tau\underline{b} \qquad (6.2)$$

بالمثل يكون

$$\dddot{\underline{r}}(o)=-k_o^2\underline{T}_o+\dot{k}_o n_o+k_o\tau_o\underline{b}_o \qquad (6.3)$$

حيث

$$\underline{T}_o=\underline{T}(0),\underline{n}_o=\underline{n}(0),\underline{b}_o=\underline{b}(0),$$

$$k_o=k(0),\tau_o=\tau(0),\dot{k}_o=\dot{k}(0)$$

وهذا يعني أن المنحنى له التصاق من الرتبة الثالثة مع المستوى اللاصق عند p أي أن المستوى يشترك مع المنحنى في ثلاث نقط.

وبكتابة مفكوك تيلور Taylor للدالة الاتجاهية $r(s)$ حول النقطة p على الصورة

$$r(s)=r(0)+s\dot{r}(0)+\frac{s^2}{2}\ddot{r}(0)+\frac{s^3}{3!}r^{(3)}(0)+\ldots$$

وبالتعويض من (6.1)، (6.2)، (6.3) نحصل على:

$$r(s)=(s-k_o^2\frac{s^3}{6}+\ldots)T_o+(k_o\frac{s^2}{2}+\frac{\dot{k}_o s^3}{6}+\ldots)n_o$$
$$+(k_o\tau_o\frac{s^3}{6}+\ldots)b_o \qquad (6.4)$$

أو ما يكافئ

$$r(s)=f_1(s)T_o+f_2(s)n_o+f_3(s)b_o=\sum_{i=1}^{3}f_i e_i$$

حيث f_1 ، f_2 ، f_3 مجموع متسلسلات قوى تقاربيه تقارب منتظم في s.

تمثيل المنحنى المعرف بالمتسلسلة (6.4) يسمى **التمثيل القانوني (القياسي)** canonical representation حول النقطة p أي في منطقة جوار مباشر محيطة بالنقطة p وصغيرة صغر كافي.

وباختيارنا السابق لإطار فرينيه $(\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o)$ عند النقطة p كمحاور للإحداثيات (ox, oy, oz) للنظام الكارتيزي للإحداثيات (الإطار الثابت) نحصل على معادلة المنحنى بالنسبة للإطار الثابت أي كتابة المتسلسلة (6.4) على الصورة:

$$r(s) = f_1(s)e_1 + f_2(s)e_2 + f_3(s)e_3$$

حيث

$$\begin{aligned} x &= f_1(s) = s - \frac{k_o^2 s^3}{6} + \dots \\ y &= f_2(s) = \frac{k_o s^2}{2} + \frac{k_o s^3}{6} + \dots \\ z &= f_3(s) = \frac{k_o \tau_o s^3}{6} + \dots \end{aligned} \qquad (6.5)$$

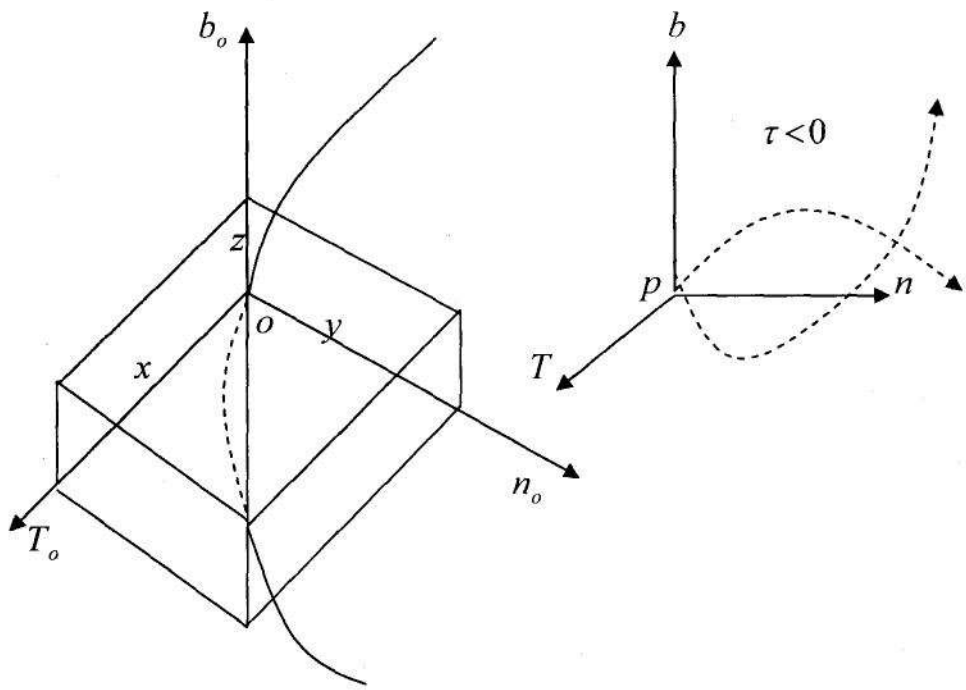
وحيث أن s صغيرة صغر كافي لأن الدراسة بالقرب من نقطة الأصل p وبالتالي نأخذ التقريب الأول في كل مركبة من المركبات x, y, z وليكن على الصورة

$$x = s, \; y = \frac{k_o s^2}{2}, \; z = \frac{k_o \tau_o s^3}{6} \qquad (6.6)$$

المعادلات (6.6) تعرف تمثيل بارامتري لمنحنى هو تقريب للمنحنى الأصلي C حول النقطة p وليكن $\tilde{C}$ ويسمى **تقريب فرينيه** للمنحنى C بالقرب من $s = 0$ أي بالقرب من p. وبالتالي المنحنى $\tilde{C}$ يعطى من خلال الدالة الاتجاهية

$$\tilde{C} : \tilde{r}(s) = s\, e_1 + \frac{k_o}{2} s^2 e_2 + \frac{k_o \tau_o s^3}{6} e_3 \qquad (6.7)$$

كما هو موضح في شكل (١.٦).



شكل (٦-١)

الحد الأول في $\tilde{r}(s)$ يعرف المماس للمنحنى C عند $s = 0$ (أحسن تقريب خطي best linear approximation) . الحدان الأول والثاني في $\tilde{r}(s)$ يعرفان قطع مكافئ parabola على الصورة

$$\tilde{r}_1(s)=s\,e_1+\frac{k_o s^2}{2}e_2 \qquad (6.8)$$

حيث $x = s, y = \dfrac{k_o s^2}{2}$ هي المعادلات البارامترية للقطع ا لمكافئ وبحذف s نحصل على المعادلة الكرتيزية

$$y=\frac{k_o x^2}{2}$$

هذا المنحنى واقع في المستوى xy ومنطبق على المستوى اللاصق عند $s = 0$. واضح أن هذا المنحنى يتحدد تماماً بالانحناء k_o للمنحنى C عند $s = 0$ كما هو موضح في شكل (٢.٦)١.

الحدان الأول والثالث في $\tilde{r}(s)$ يعرفان منحنى تكعيبي cubic curve على الصورة

$$\tilde{r}_2 = s\,e_1 + \frac{k_o \tau_o s^3}{6} e_3 \qquad (6.9)$$

حيث $x = s \,, z = \dfrac{k_o \tau_o s^3}{6}$ هي المعادلات البارامترية للمنحنى التكعيبي وبحذف s نحصل على المعادلة الكرتيزية

$$z = \frac{k_o \tau_o x^3}{6}$$

وهي تمثل منحنى واقع في المستوى xz ومنطبق على المستوى المقوم عند $s = 0$ كما هو موضح في شكل (٢.٦)٢.

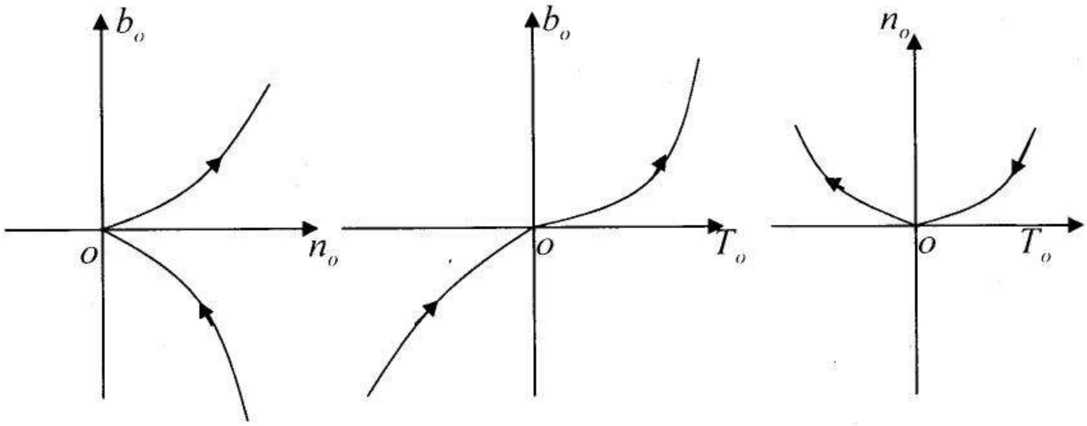
الحدان الثاني والثالث يعرفان منحنى مكافئ تكعيبي cubic parabola على الصورة

$$\tilde{r}_3 = \frac{k_o s^2}{2} e_2 + \frac{k_o \tau_o s^3}{6} e_3 \qquad (6.10)$$

حيث $y = \dfrac{k_o s^2}{2} \,, z = \dfrac{k_o \tau_o s^3}{6}$ هي المعادلات البارامترية للمنحنى المكافئ التكعيبي

$$z^2 = \frac{2\tau_o^2}{9k_o} y^3$$

هذا المنحنى واقع في المستوى yz ومنطبق على المستوى العمودي عند $s = 0$.. وواضح أن هذا المنحنى يتحدد تماماً بدلالة الانحناء k_o والليّ τ_o عند $s = 0$ كما هو مبين في شكل (٢.٦)٣ . حيث المنحنى يصعد إلى أعلى عندما الليّ يكون سالب ($\tau < 0$).



(٣) المسقط على المستوى العمودي   (٢) المسقط على المستوى المقوم   (١) المسقط على المستوى اللاصق

شكل (٢.٦)

ملاحظة (١.٦):

الحد $\frac{k_o \tau_o s^3}{6}$ هو أصغر حد في $\bar{r}$ وهذا يعني أن اللي τ_o يتحكم في حركة المنحنى C بحيث تظل عمودية على المستوى اللاصق عند $s = 0$ كما هو موضح في شكل (١.٦).

(٢.٦) المعادلات الذاتية لمنحنى الفراغ:

Intrinsic Equations of a Space Curve:

تعريف (١.٦):

إذا أعطينا الانحناء $k = k(s) > 0$ واللي $\tau = \tau(s)$ كدوال في البارامتر الطبيعي s لمنحنى C في الفراغ فإن هذه الدوال تكون كافية لتحديد المنحنى وفي هذه الحالة يقال أن المنحنى معطى بمعادلاته الذاتية (الطبيعية) Intrinsic equations.

تعريف (٢.٦):

المعادلة الطبيعية natural equation للمنحنى هي معادلة تصف (تحدد) المنحنى بطريقة مستقلة عن أي اختيار للإحداثيات أو التمثيل البارامتري.

دراسة المعادلات الطبيعية بدأت بالمشكلة الآتية:

إذا أعطينا دالتين في بارامتر واحد، أوجد منحنى الفراغ الذي يحقق أن الانحناء والليّ له هي الدوال المعطاة.

وكان أويلر Euler أول من أعطى حل تكاملي للمنحنيات المستوية $(\tau = 0)$. وإذا كانت الزاوية المماسية tangential angle بين المماس ومحور x هي θ فإن

$$\theta = \int k(s)ds$$

حيث $k = k(s)$ دالة الانحناء.

إذاً المعادلات $k = k(s)\ , \ \tau = 0$ يمكن حلها من خلال التمثيل البارامتري للمنحنى حيث

$$x = \int \cos\theta d\theta \ , \ y = \int \sin\theta d\theta$$

تعريف (٣.٦):

المعادلة التي تعبر عن منحنى المستوى من خلال بارامتر المسافة القوسية ونصف قطر الانحناء ρ أو الانحناء k تسمى معادلة سيزارو Cesaro.

تعريف (٤.٦):

المعادلة التي تعبر عن منحنى المستوى من خلال بارامتر المسافة القوسية والزاوية المماسية تسمى معادلة فيفل Whewell.

وسوف نبرهن الآن كنتيجة لصيغ سيرية ـ فرينيه أن أي منحنى في الفراغ إذا أعطي عن طريق معادلاته الذاتية يتعين تعييناً تاماً بواسطة هذه المعادلات.

إذا كان لدينا منحنيان C, C^* في الفراغ وكانت لهما نفس المعادلات الذاتية، بمعنى أن:

$$k(s) = k^*(s)\ ,\ \tau(s) = \tau^*(s) \qquad (6.11)$$

فإن المنحنيان يكونان متشابهان symmetric فيما عدا موضعهما في الفراغ ونعني بذلك أن أي منحنى وليكن C^* يمكن أن يكون صورة للمنحنى C وذلك بحركة جاسئة R أي مكونة من دوران ثم انتقال على الصورة

$$C^* = RC = AC + \underline{a}$$

حيث A مصفوفة الدوران ، $\underline{a}$ متجه الانتقال.

ملاحظة (٢.٦):

المعادلات الذاتية للمنحنى من الممكن أن تعطى من خلال دوال ضمنية

$$F_1(k, \tau, s) \equiv 0\ , F_2(k, \tau, s) \equiv 0$$

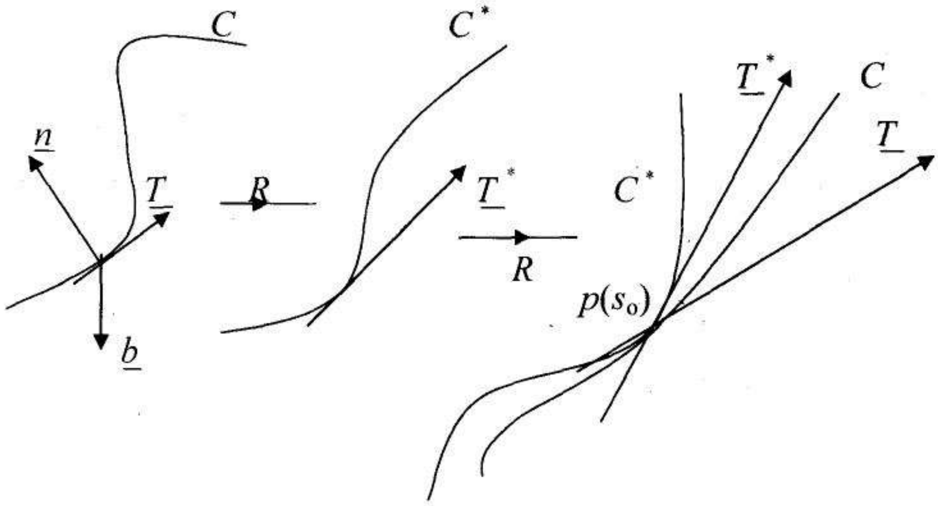
نظرية (١.٦):

أي منحنى في الفراغ يتعين تعييناً تاماً (فيما عدا موضعه) بواسطة الانحناء والليّ له كدوال في البارامتر الطبيعي (بارامتر طول القوس) s.

البرهان:

نفرض أن لدينا منحنيين C, C^* لهما نفس الانحناء $k = k(s)$ ونفس الليّ $\tau = \tau(s)$ كدالة في بارامتر طول القوس s .

بإزاحة المنحنى C إلى النقطة التي يكون عندها $s = s_o$ هي نقطة البداية على كل من C, C^* ثم بدوران المنحنى C حول هذه النقطة (مركز دوران) حتى ينطبق الثلاثي Traid $(\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o)$ للمنحنى C على الثلاثي $(\underline{T}_o^*, \underline{n}_o^*, \underline{b}_o^*)$ بالنسبة للمنحنى C^* كما هو مبين في شكل (٦.٣).



شكل (٦-٣)

بعد إجراء الحركة المتماسكة (الجاسئة) Rigid motion التي جعلت الإطارين $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ ، $(\underline{T}^*,\underline{n}^*,\underline{b}^*)$ ينطبقا عند $s=s_o$ نبين هل الإطارين عند كل النقاط ينطبقا وإذا كان كذلك فإن المنحنى C^* ينطبق تماماً على المنحنى C ومن أجل ذلك نبين هل الزوايا $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ بين $\underline{T},\underline{T}^*$ ، $\underline{n},\underline{n}^*$ ، $\underline{b},\underline{b}^*$ على الترتيب كلها تساوي صفر لجميع نقاط المنحنيين.

ولذلك نتبع الخطوات الآتية:

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_1)=\frac{d}{ds}<\underline{T},\underline{T}^*>$$

$$=<\underline{T},\dot{\underline{T}}^*>+<\dot{\underline{T}},\underline{T}^*>$$

$$=<\underline{T},k\,\underline{n}^*>+<k\,\underline{n},\underline{T}^*>$$ (صيغ فرينيه للإطارين)

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_1)=k\,(<\underline{T},\underline{n}^*>+<\underline{n},\underline{T}^*>)\,,(k=k^*)\qquad(6.12)$$

أيضاً

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_2)=\frac{d}{ds}<\underline{n},\underline{n}^*>$$

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_2) =< \underline{n},(\tau\underline{b}^* - k\underline{T}^*) > + < (\tau\underline{b} - k\underline{T}),\underline{n}^* >$$

$$= -k\,(< \underline{n},\underline{T}^* > + < \underline{n}^*,\underline{T} >) + \tau(< \underline{n},\underline{b}^* > + < \underline{n}^*,\underline{b} >),\ \ (6.13)$$

$$(k = k^*, \tau = \tau^*)$$

كذلك

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_3) = \frac{d}{ds} < \underline{b},\underline{b}^* > = -\tau < \underline{b},\underline{n}^* > -\tau < \underline{n},\underline{b}^* >$$ (صيغ فرينيه)

$$= -\tau(< \underline{b},\underline{n}^* > + < \underline{b}^*,\underline{n} >)\ \ ,(\tau = \tau^*) \qquad (6.14)$$

بجمع (6.12)، (6.13)، (6.14) نحصل على

$$\frac{d}{ds}(< \underline{T},\underline{T}^* > + < \underline{n},\underline{n}^* > + < \underline{b},\underline{b}^* >) = 0$$

وبالتكامل يكون لدينا

$$< \underline{T},\underline{T}^* > + < \underline{n},\underline{n}^* > + < \underline{b},\underline{b}^* > = \text{ const.} = c \qquad (*)$$

ولكن عند النقطة $s = s_o$ تتحقق الشروط الابتدائية

$$\underline{T}_o = \underline{T}_o^*, \underline{n}_o = \underline{n}_o^*, \underline{b}_o = \underline{b}_o^*$$

حيث

$$< \underline{T}_o,\underline{T}_o^* > = < \underline{n}_o,\underline{n}_o^* > = < \underline{b}_o,\underline{b}_o^* > = 1 \Rightarrow c = 3$$

وعليه فإنه عند s_o ولجميع قيم s نجد أن المتطابقة (*) تصبح على الصورة:

$$< \underline{T},\underline{T}^* > + < \underline{n},\underline{n}^* > + < \underline{b},\underline{b}^* > = 3 \qquad (6.15)$$

ومن ناحية أخرى نعلم أنه بالنسبة لمتجهين من متجهات الوحدة يتحقق

$$-1 \leq < \underline{T},\underline{T}^* > = \cos\theta_1 \leq 1$$

وبالمثل يكون لدينا

$$-1 \leq <\underline{n},\underline{n}^*> \leq 1 \, , -1 \leq <\underline{b},\underline{b}^*> \leq 1$$

وبالتالي فإن المتطابقة (6.15) تؤدي إلى

$$<\underline{T},\underline{T}^*>=1, <\underline{n},\underline{n}^*>=1, <\underline{b},\underline{b}^*>=1 \quad (6.16)$$

ومن ذلك نستنتج أنه لجميع قيم s يكون

$$\underline{T}=\underline{T}^*, \underline{n}=\underline{n}^*, \underline{b}=\underline{b}^* \qquad (6.17)$$

أي أن الإطارين منطبقين لجميع نقاط المنحنيين.

وحيث أن $\underline{T}=\dfrac{d\underline{r}}{ds}, \underline{T}^*=\dfrac{d\underline{r}^*}{ds}$ إذاً $\dfrac{d\underline{r}^*}{ds}=\dfrac{d\underline{r}}{ds}$

وبالتكامل للطرفين بالنسبة إلى s نحصل على

$$\underline{r}(s)=\underline{r}^*(s)+c \quad (c=\text{const}). \quad (6.18)$$

ومن الشروط الابتدائية عند $s=s_o$ يكون $\underline{r}(s_o)=\underline{r}^*(s_o)$ وبالتالي لجميع قيم s يكون $c=0$. وبالتالي نحصل على $\underline{r}(s)=\underline{r}^*(s)$ أي أن المنحنيين C, C^* منطبقان وهو المطلوب.

ملاحظة (٣.٦):

النظرية السابقة تسمى النظرية الأساسية لوجود ووحدانية المنحنى
The fundamental Existence and Uniqueness Theorem

ملاحظة (٤.٦):

المعادلات $k=k(s); \tau=\tau(s)$ تسمى التمثيل الذاتي intrinsic للمنحنى في الفراغ وهو مختلف عن التمثيلات المختلفة التي سبق وأن عرفناها والتي تعتمد على محاور الإحداثيات والبارامتر العام u وجميعها خارجية extrinsic أي ليست مرتبطة ارتباطاً ذاتياً بالمنحنى.

مثال (٦.١):

المعادلات الذاتية لمنحنى الحلزون الدائري هي:

$$k = \text{const.} \qquad , \qquad \tau = \text{const.}$$

مثال (٦.٢):

المعادلات $k = \text{const.}, \tau = 0$ هي المعادلات الذاتية للدائرة التي نصف قطرها هو $\rho = \dfrac{1}{k}$.

مثال (٦.٣):

أوجد المعادلات الذاتية للمنحنى

$$\underline{r} = (2ae'' \cos u, 2ae'' \sin u, ae''), u \in \mathbb{R}$$

$$= ae''(2\cos u, 2\sin u, 1)$$

الحل:

بما أن $\underline{r} = (2ae'' \cos u, 2ae'' \sin u, ae'')$

وبالتفاضل بالنسبة إلى u نحصل على

$$\underline{r}' = \frac{d\underline{r}}{du} = (2ae''(\cos u - \sin u), 2ae''(\sin u + \cos u), ae'')$$

$$\therefore \underline{r}' = \underline{T} s' \ , ' = \frac{d}{du}$$ (من صيغ فرينيه)

$$\therefore \underline{r}'' = (-4ae'' \sin u, 4ae'' \cos u, ae'')$$

$$= \underline{T} s'' + ks'^2 \underline{n}$$ (من صيغ فرينيه)

$$\therefore \underline{r}''' = (-4ae''(\sin u + \cos u), 4ae''(\cos u - \sin u), ae'')$$

$$= \underline{T} s''' + k \underline{n} s' s'' + k' s'^3 \underline{n} + 2ks's'' \underline{n} + ks'^3(\tau b - kT)$$

$\underline{r}''' = (\ldots)\underline{T} + (\ldots)\underline{n} + k\,\tau s^3 \underline{b}$, (من صيغ فرينيه)

وبما أن $s'^2 = |\underline{r}'|^2$

$$\therefore s'^2 = a^2 e^{2u}[4(\cos u - \sin u)^2 + 4(\cos u + \sin u)^2) + 1]$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية نحصل على

$$s' = 3ae^u \neq 0$$

$$\therefore s = \int_{-\infty}^{u} 3ae^u \, du = 3ae^u \qquad (6.19)$$

ومن r', r'' يكون لدينا حاصل الضرب الاتجاهي الآتي:

$$\underline{r}' \times \underline{r}'' = [2a^2e^{2u}(\sin u - \cos u), -2a^2e^{2u}(\sin u + \cos u), 8a^2e^{2u}]$$

$$= ks'^3 \underline{b}$$

بأخذ مربع المقياس (الطول) للطرفين نحصل على

$$k^2 s'^6 = 72a^4e^{4u}$$

$$\therefore\ ks'^3 = 6\sqrt{2}a^2e^{2u} \qquad (6.20)$$

ولكن من (6.19) نجد $e^u = \dfrac{s}{3a}$ وبالتعويض في (6.20) نحصل على

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{3s} \qquad (6.21)$$

نكون حاصل الضرب الثلاثي القياسي

$$[\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}'''] = [8a^3e^{3u}(\cos^2 u - \sin^2 u) - 8a^3e^{3u}(\cos^2 u - \sin^2 u) + 8a^3e^{3u}]$$

$$= k^2 \tau s'^6$$

وبتجميع الحدود يكون لدينا

$$k^2 \tau s'^6 = 8a^3e^{3u}$$

ومن (6.20) نحصل على

$$\tau=\frac{8a^3e^{3u}}{72a^4e^{4u}}=\frac{1}{9ae^u}=\frac{1}{3s}$$

$$\therefore\ \tau=\frac{1}{3s} \qquad (6.22)$$

والمعادلتان (6.21)، (6.22) هما المعادلات الذاتية للمنحنى المعطى. هذا المنحنى يحقق أن

$$\frac{\tau}{k}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

أي أن المنحنى هو حلزون عام. ونعطي تفسير لذلك كالآتي:

ملاحظة (٦.٥):

المنحنى في المثال السابق يمكن كتابته على الصورة

$$r=\lambda(u)(2\cos u,2\sin u,1)\ ,\ \lambda(u)=ae^u$$

وهو عبارة عن دائرة نصف قطرها 2 واقعة في المستوى $z=1$ حيث كل نقطة من نقاطها تغيرت بمقدار $\lambda(u)=ae^u$ لنحصل على المنحنى الحلزوني وفي هذه الحالة يقال أن λ مغير البعد equiform (أي مغير للأطوال والقياسات).

مثال (٦.٤):

أوجد المعادلات الذاتية لمنحنى الكتينة

$$\underline{r}=a\cosh\frac{u}{a}\underline{e}_1+u\,\underline{e}_2\ ,\ a=\text{const.}\ ,\ u\in\mathbb{R}$$

الحل:

حيث أن منحنى الكتينة هو منحنى مستوي فإن $\tau\equiv 0$ ويتبقى لنا أن نعين الانحناء k كدالة في بارامتر طول القوس s.

بتفاضل معادلة المنحنى بالنسبة إلى u نحصل على:

$$\underline{r}' = \frac{d\underline{r}}{du} = \sinh\frac{u}{a}\underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

بأخذ المقياس على الطرفين نحصل على:

$$|\underline{r}'| = (1+\sinh^2\frac{u}{a})^{\frac{1}{2}} = \cosh\frac{u}{a} \quad \text{(من المتطابقات الزائدية)}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى u يكون لدينا

$$\underline{r}'' = \frac{1}{a}\cosh\frac{u}{a}\underline{e}_1,$$

نكون حاصل الضرب الاتجاهي

$$\underline{r}' \wedge \underline{r}'' = -\frac{1}{a}\cosh\frac{u}{a}\underline{e}_3$$

ومن الصيغ التي تعطي الانحناء (من الباب الرابع)

$$k^2 = \frac{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|^2}{|\underline{r}'|^6} = \frac{1}{a^2\cosh^4\bar{u}} \qquad (6.23)$$

حيث $\bar{u} = \frac{u}{a}$ ، $\frac{du}{d\bar{u}} = a \neq 0$. ومن تعريف طول القوس نجد أن

$$s = \int_0^u |r'|du = \int_0^u \cosh\frac{u}{a}du$$

$$= a\sinh\frac{u}{a} = a\sinh\bar{u} \qquad (6.24)$$

$$\therefore s^2 + a^2 = a^2\sinh^2\bar{u} + a^2$$

$$\therefore s^2 + a^2 = a^2\cosh^2\bar{u} \qquad (6.25)$$

وبحذف $\bar{u}$ بين (6.25) ,(6.23) نحصل على:

$$k = \frac{a}{s^2+a^2}$$

وبذلك تكون المعادلات الذاتية لمنحنى الكتينة هي

$$k = \frac{a}{s^2 + a^2}, \tau = 0$$

ملاحظة (٦.٦):

بالنسبة للمنحنى المستوى تكون أحد معادلاته الذاتية $\tau = 0$

ملاحظة (٧.٦):

بالنظر إلى معادلات فرينيه التفاضلية نجد أنها نظام من المعادلات التفاضلية الاتجاهية ذات الرتبة الأولى في T، n، b.

والسؤال الذي يطرح نفسه هل يمكن إيجاد حل لهذا النظام ونجيب على هذا السؤال في حالات خاصة وليكن في حالة المنحنى المستوى:

إذا كان $C: x = x(\theta)$ منحنى مستوى حيث θ الزاوية التي يصنعها المماس له مع محور x_1 فإن متجه وحدة المماس يعطى من

$$T = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \qquad (6.26)$$

$$\dot{T} = (-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)\dot{\theta}\ , \ \dot{} = \frac{d}{ds} = \frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}$$

متجه العمودي n على T يعطى من

$$n = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \qquad (6.27)$$

$$\dot{n} = (-\cos\theta e_1 - \sin\theta e_2)\dot{\theta}$$

$$= (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)(-\dot{\theta})$$

$$\therefore \dot{n} = -\dot{\theta}T$$

وحيث أن المنحنى مستوى فإن $\tau = 0$ ومن المعادلة الثانية من معادلات فرينيه نجد أن

$$\dot{n} = -kT$$

وبالتالي فإن معادلات فرينيه تؤول إلى

$$\dot{T}=k\,n\ ,\ \dot{n}=-k\,T$$

ومن (6.26)، (6.27) نجد أن T, n حلول لمعادلات فرينيه إذا كان $\dot{\theta}=k$ أو

$$\theta=\int k\,ds+c$$

إذاً من (6.26) يكون لدينا

$$\begin{aligned} x(s)&=\int T\,ds+c \\ &=\int(\cos\theta(s)e_1+\sin\theta e_2)ds+c \\ &=\int(\cos\theta(s)e_1+\sin\theta(s)e_2)\frac{ds}{d\theta}d\theta+c \end{aligned}$$

$$\therefore x(s)=\int\frac{1}{k(\theta)}(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)d\theta+c \quad (6.28)$$

مثال (٦.٥):

أوجد المنحنى الذي معادلاته الذاتية $k=\frac{1}{s},\tau=0,s>0$.

الحل:

من المعادلات الذاتية يتضح أن المنحنى مستوى ولذلك نستخدم الصيغ التكاملية (6.28) حيث $k(\theta)=\dot{\theta}=\frac{1}{s}$ وبالتكامل بالنسبة إلى s نحصل على

$$\theta=\log s+c_1 \Rightarrow \log s=\theta-c_1$$

(العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية) $\therefore\ s=e^{\theta-c_1}$

$$\therefore k=\frac{1}{s}=e^{-(\theta-c_1)}$$

وبالتعويض في (6.28) نجد أن

$$x=\int e^{\theta-c_1}(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)d\theta+c_2$$

وبالتكامل بالتجزيء (e_1 ، e_2 متجهات ثابتة) نحصل على

$$x=\frac{1}{2}e^{\theta-c_1}(\cos\theta+\sin\theta)e_1+\frac{1}{2}e^{\theta-c_1}(\sin\theta-\cos\theta)e_2+c_2$$

وإذا أخذنا $c_2=0$ ، $c_1=\frac{\pi}{4}$ مثلاً نجد أن

$$x=\frac{1}{2}e^{\theta-\frac{\pi}{4}}[(\cos\theta+\sin\theta)e_1+(\sin\theta-\cos\theta)e_2]$$

والذي يمكن كتابته على الصورة (متطابقات مثلثية):

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta-\frac{\pi}{4}}[\cos(\theta-\frac{\pi}{4})e_1+\sin(\theta-\frac{\pi}{4})e_2]$$

وبوضع $\phi=\theta-\frac{\pi}{4}$ نحصل على

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\phi}[\cos\phi e_1+\sin\phi e_2]$$

وهي معادلة الحلزون اللوغاريتمي Logarithmic Spiral.

تمارين (٦)

(١) أوجد المنحنى بمعلومية معادلاته الطبيعية (الذاتية) الآتية:

$$k = \cos s , \tau = \sin s$$

عند الشروط الابتدائية

$$\underline{T}_o = (-1,0,0), \underline{n}_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \underline{b}_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

حيث k الانحناء، τ الليّ، $\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o$ الثلاثي المتعامد عند $s = 0$.

(**إرشاد:** عوض عن k، τ في معادلات فرينيه وتكامل الطرفين بالنسبة إلى s واستخدام الطرق المعروفة في حل نظام من المعادلات الخطية التفاضلية المتجانسة).

(٢) أوجد المنحنى الذي معادلاته الذاتية هي:

$$k = \frac{1}{as + b}, \tau = 0, s > 0, a > 0$$

(**إرشاد:** اتبع نفس خطوات المثال (٦.٥)).

(٣) إذا كان العمود الأساسي لمنحنى معطى كدالة اتجاهية في بارامتر طول القوس أي أن $n = n(s)$ أوجد المنحنى.

(**إرشاد:** استخدم العلاقة $n(s) = \dot{T}(s) = \dfrac{d^2T}{ds^2}$ وتكامل الطرفين مرتين بالنسبة إلى s).

(٤) إذا كان العمود الثانوي لمنحنى معطى كدالة اتجاهية في بارامتر طول القوس أي أن $b = b(s)$ أوجد المنحنى.

(**إرشاد:** استخدم العلاقة $b = T \wedge n = T \wedge \dot{T}$ والتكامل للطرفين).

(٥) أوجد المعادلات الذاتية للمنحنيات التي وردت في كل أمثلة الباب الرابع.

(٦) أوجد المعادلات الذاتية للمميز الكروي $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ لمنحنى فراغ C.

(٧) بين أن المعادلات الذاتية للمميز الكروي $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ لمنحنى فراغ C تعتمد على المعادلات الذاتية للمنحنى C.

(**إرشاد:** ارجع إلى الباب الخامس تجد الانحناءات k_1, k_2, k_3 دوال في كل من k , τ وكذلك بالنسبة لليّ τ_1, τ_2, τ_3).

(٨) أوجد المعادلات الذاتية لكل من المنحنى الناشر والمنتشر لمنحنى فراغ وبين علاقتها بالمعادلات الذاتية للمنحنى الأصلي.

(**إرشاد:** ارجع إلى الباب الخامس حيث كل من الانحناء والليّ معرف بدلالة معلومات المنحنى الأصلي).

(٩) أوجد العلاقة بين المعادلات الذاتية لزوج منحنيات برتراند.

(**إرشاد:** انظر الباب الخامس تجد العلاقات مباشرة).

(١٠) أوجد العلاقة بين المعادلات الذاتية لمنحنى المحل الهندسي لمراكز كرة الانحناء والمعادلات الذاتية للمنحنى الأصلي.

(**إرشاد:** ارجع إلى الباب الخامس تجد العلاقات مباشرة).

الجزء الثالث (الهندسة الذاتية والخارجية للسطوح في الفراغ الثلاثي)

الباب السابع

السطح المنتظم في الفراغ الثلاثي
Regular Surface

يعتبر هذا الباب تطبيق على الدالة الاتجاهية في متغيرين وفيه نقدم تعريف السطح المنتظم من خلال التمثيلات المختلفة وخصوصاً التمثيل البارمتري والدالة الضمنية وصورة مونج. ونتعرض لمفهوم الانتظام وتوجيه السطح والتعرف على النقاط الشاذة عليه. ونقدم تعريف الغطاء البارامتري والخطوط على السطح وكذلك حساب حقل متجه الوحدة العمودي على السطح والمستوى المماس له عند أي نقطة منتظمة.

(١.٧) مقدمة (بديهيات عن السطوح): Intuition Surfaces

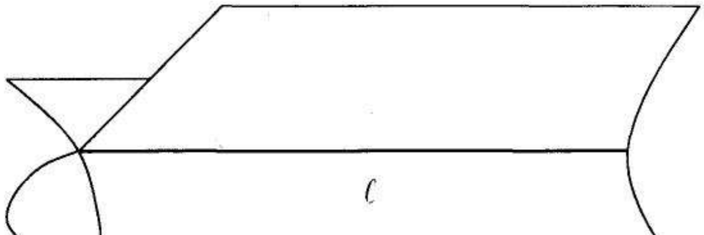
في الحياة اليومية نرى سطوح كثيرة مثل البالونات والأنابيب وأكواب الشاي والأغشية الرقيقة مثل فقاعات الصابون والتي تمثل نماذج فيزيائية ولدراسة هندسة هذه السطوح تحتاج إلى إحداثيات لعمل الحسابات اللازمة. هذه السطوح موجودة في الفراغ الثلاثي لكن لا يمكن أن نفكر بأنها ثلاثية البعد. على سبيل المثال إذا قطعنا أسطوانة مقطع طولي فإنه يمكن فردها أو بسطها unroll لتصبح قطعة مستوية flat على سطح مكتب. هذا يوضح أن هذه السطوح ثنائية البعد بالوراثة inherently ولهذا يجب وصفها بإحداثيين. هذا يعطينا الانطباع الأول عن كيفية الوصف الهندسي للسطوح. بالتحديد نحاول فرد spread قطعة من المستوى حول سطح ويتطلب ذلك تمدد stretching (بلا إنقطاع) ولي (ضغط squeezing أو إنحناء bending) twisting بدون لصق gluing أو تمزيق tearing وهذا يوضح كيف تظهر منحنيات السطح في الفراغ. هذا الفرد يقدم إحداثيات لعمل حساب التفاضل والتكامل على السطح. حساب التفاضل على السطح يمكننا من الوصف الهندسي للسطح مثل حساب التفاضل الخاص بصيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى.

السطح المنتظم regular surface يمكن الحصول عليه من تشويه deforming قطع من الورق المستوية وترتيبها بطريقة ما بحيث الشكل الناتج يكون خالي من النقاط الحادة sharp point أو الأنياب cusps أو الأحرف المدببة cuspidal edges أو التقاطعات الذاتية (السطح يقطع نفسه) self intersections وبالتالي يمكن التحدث عن المستوى المماس عند نقاط الشكل.

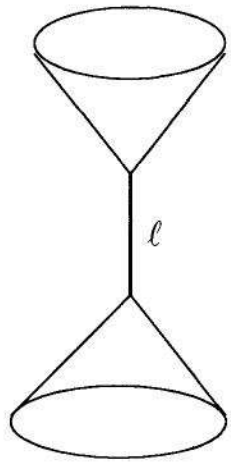
وبالتالي يمكن القول أن السطح في الفراغ الثلاثي الإقليدي $\mathbb{R}^3$ وهو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ (بمعنى تجمع خاص من النقاط) وبالطبع ليست كل المجموعات الجزئية تكون سطوح وبالتأكيد نعني سطوح ملساء smooth وثنائية البعد.

ونوضح ذلك من خلال سطوح تبدو محلياً مثل ورقة ثنائية البعد مطوية twisted sheet كما هو موضح من خلال الأشكال (١.٧)، (٢.٧)، (٣.٧)، (٤.٧).

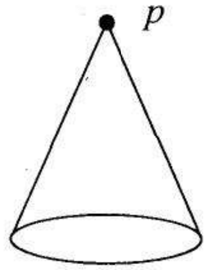
شكل (١.٧): مجموعة جزئية تمثل سطح



شكل (٢.٧): مجموعة جزئية ليست سطح



شكل (٣.٧): مجموعة جزئية ليست سطح



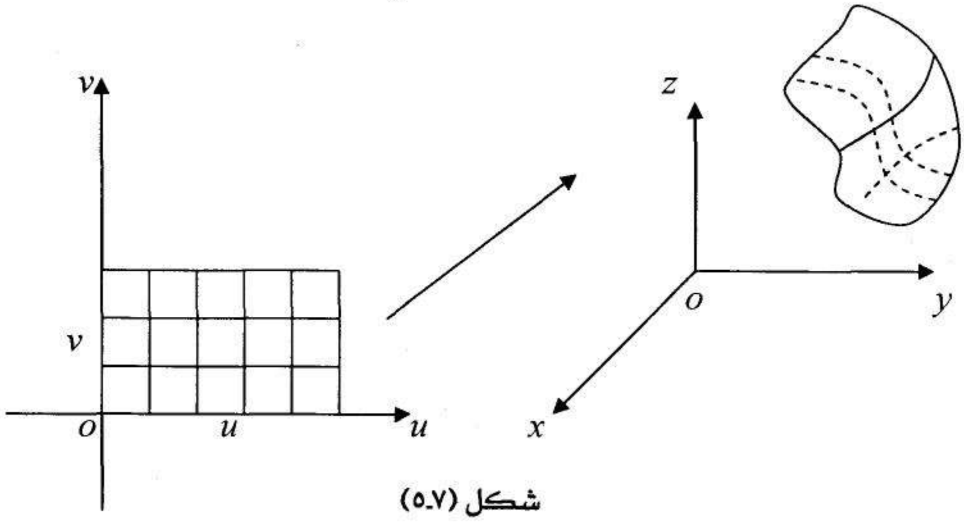
شكل (٤.٧): مجموعة جزئية ليست سطح

نلاحظ أن شكل (٢.٧) لا يمثل سطح بسبب خط التقاطع ℓ ولكن نفس الشكل بعد حذف خط التقاطع يصبح سطح. كذلك في شكل (٣.٧) الشكل لا يمثل سطح بسبب الخط ℓ الواصل بين رؤوس المخروطين. وفي شكل (٧-٤) نرى أن الشكل ليس سطح بسبب رأس المخروط (ناب) أي أن المخروط بدون رأسه يصبح سطح.

ملاحظة (١.٧):

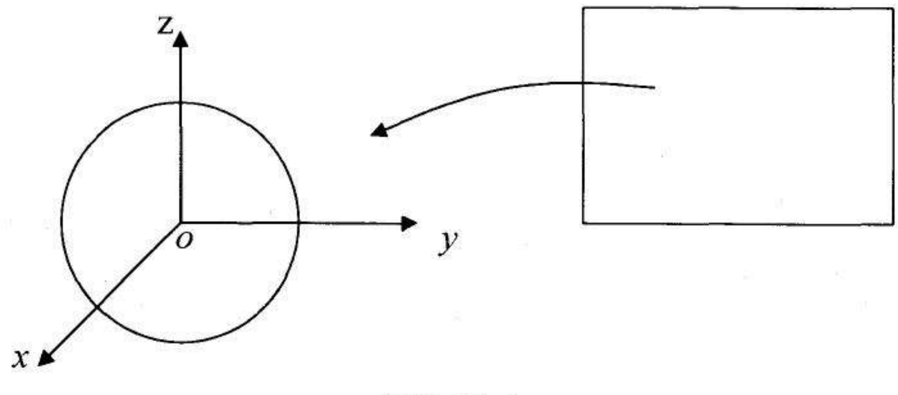
المنحنى المنتظم يعني وجود متجه مماس غير صفري وبالنسبة للسطوح يعني وجود مستوى مماس معرف تعريف جيد well-defined.

بـديهياً الـسطوح في الفـراغ الثلاثـي تكـون ثنائيـة البعـد ونـستطيع أن تمثلـها بارامترياً (وسيطياً) parametric بمتغيرين ونوضح ذلك في شكل (٥.٧).



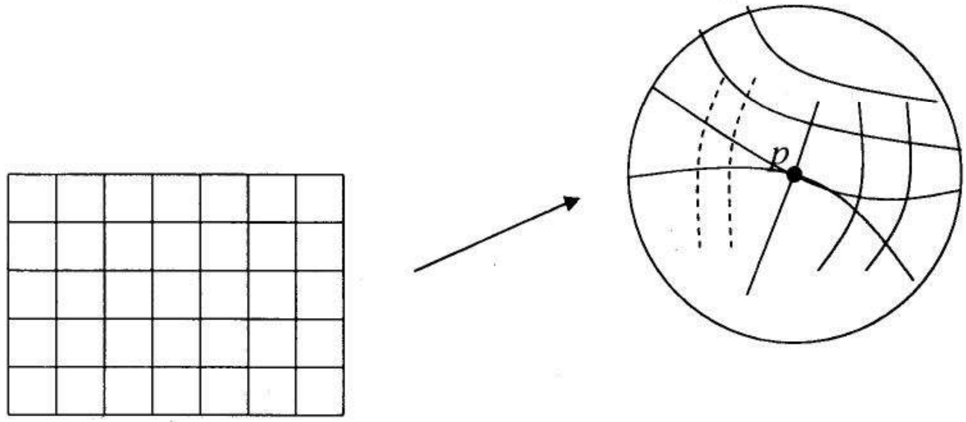
شكل (٥.٧)

والسؤال الآن كيف نمثل الكرة (مثلاً) بارامترياً شكل (٦.٧).

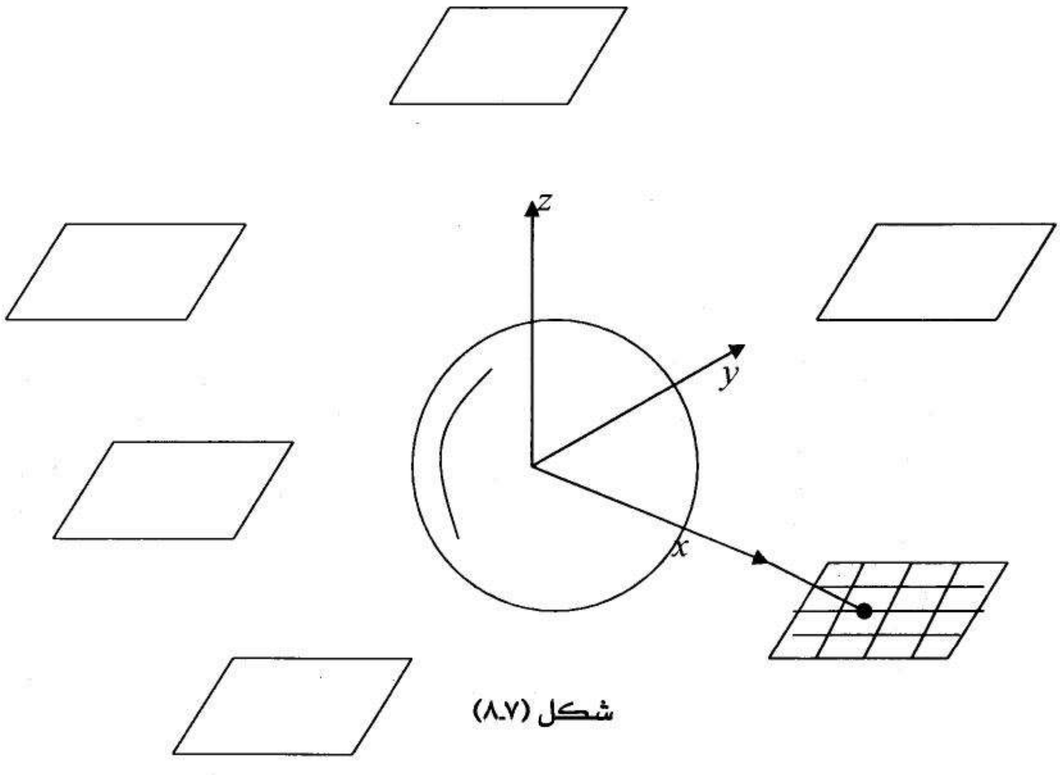


شكل (٦.٧)

قد يفشل التمثيل البارامتري فمثلاً الكرة لا يمكن تمثيلها بارامترياً مع المستوى بطريقة حسنة nicely حيث المشكلة تظهر عند النقطة p كما هو موضح في شكل (٧.٧).

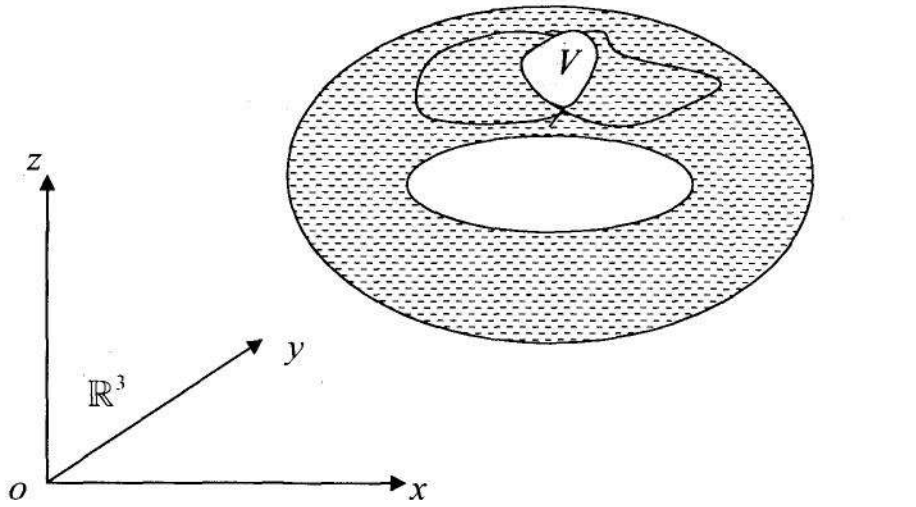


شكل (٧.٧)



شكل (٨.٧)

قد توجد منطقة تقاطع V (overlap) بين تمثيلات بارامترية مختلفة. كما هو موضح بالشكل (٩.٧).



شكل (٩.٧)

وفي ختام هذه المقدمة نعطي الملاحظات الآتية:

ملاحظة (٢.٧):

السطح هو مجموعة جزئية من نقاط الفراغ له تمثيلات بارامترية (من خلال بارمترين) متعددة لكل منها يسمح بتمثيل بارامتري لجزء فقط من السطح.

ملاحظة (٣.٧):

التمثيلات البارامترية من الممكن أن تتقاطع مثل خرائط الكرة الأرضية فمثلاً الاتحاد السوفيتي سابقاً قد يوجد في خريطة (تمثيل بارامتري) أسيا وكذلك في خريطة أوروبا.

تعريف (١.٧):

الخاصية الهندسية هي خاصية لا تعتمد على الإطار الإحداثي الثابت للفراغ الإقليدي $\mathbb{R}^3$ كما أنها مستقلة تماماً عن التمثيلات البارامترية أي أنها خاصية لاتغيريه invariant.

ملاحظة (٤.٧):

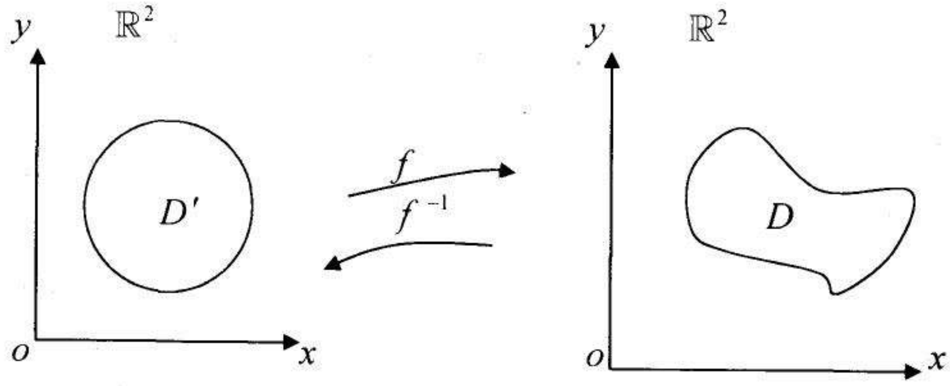
كل ما عرضناه في هذه المقدمة كتب بطريقة مختصرة وسوف نجعله أكثر دقة وتفصيلاً في باقي أجزاء الباب.

(٢.٧) مفهوم السطوح: The Concept of the Surfaces

نفرض أن D جزء من مستوى ما وأن D' المنطقة الموجودة داخل دائرة ما والتي تسمى قرص مفتوح open disk أي أن

$$D'=\{(x^1,x^2):(x^1)^2+(x^2)^2<a^2\}$$

إذا كانت D صورة للقرص المفتوح D' بواسطة راسم توبولوجي فإن D تسمى منطقة بسيطة elementary region أي أن D منطقة بسيطة إذا كان وكان فقط $D=f\,(D')$ حيث f راسم توبولوجي (f راسم تناظر أحادي وأن f^{-1}, f دوال متصلة بمفهوم التوبولوجي). في هذه الحالة يقال أن D تكافئ D' تكافؤ هوميومورفيك كما هو موضح في شكل (٧-١٠).



شكل (٧-١٠)

نفرض أن C منحنى بسيط مغلق في المستوى. من نظرية جوردان Jordan Theory نجد أن C يقسم المستوى إلى جزئين، أحد هذه الأجزاء محدود finite والآخر غير

محدود infinite والجزء المحدود في هذه الحالة يمكن اعتباره صورة قرص مفتوح بواسطة راسم توبولوجي.

مثال (١.٧):

المناطق الموجودة داخل كل من المربع والمستطيل والقطع المكافئ هي مناطق بسيطة.

تعريف (٢.٧):

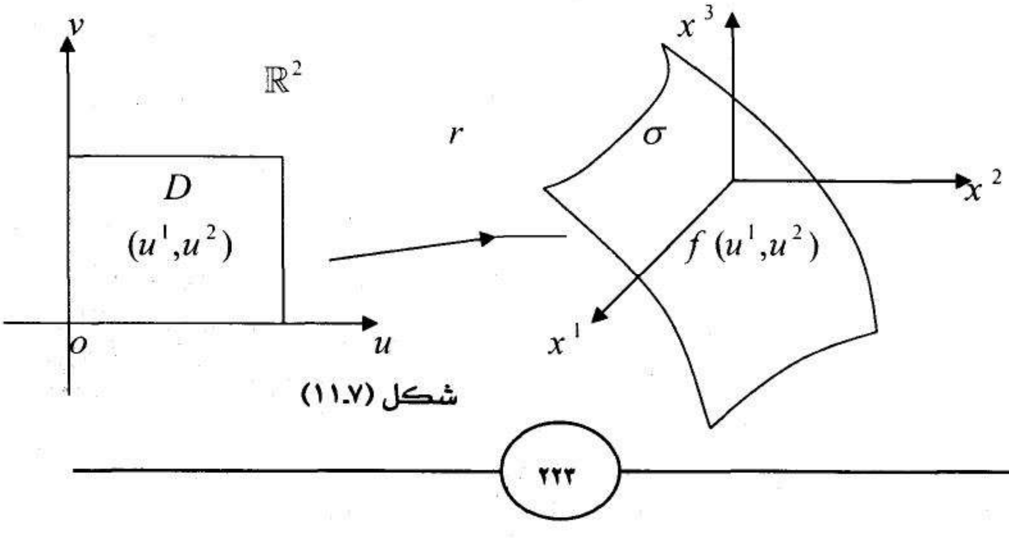
مجموعة النقط σ في الفراغ E^3 تسمى بالسطح الأولي elementary surface إذا كانت محددة لمنطقة بسيطة D في مستوى ما بواسطة راسم توبولوجي أي أن σ سطح أولي إذا كان وكان فقط $\sigma = f\ (D)$ حيث f راسم توبولوجي.

نفرض أن u^1, u^2 هي الإحداثيات الكارتيزية لأي نقطة في المنقطة D وأن x^1, x^2, x^3 هي إحداثيات النقطة المناظرة لها على السطح البسيط. الإحداثيات x^1, x^2, x^3 لنقط السطح البسيط هي دوال في إحداثيات نقط المنطقة D أي أن

$$x^1 = f_1(u^1, u^2), x^2 = f_2(u^1, u^2), x^3 = f_3(u^1, u^2)$$

هذا النظام من المعادلات يسمى بمعادلات السطح σ في الصورة البارامترية وهذه المعادلات تكافئ الصورة الاتجاهية

$$\underline{r} = \underline{r}(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)) \quad (7.1)$$



شكل (١١.٧)

حيث الدالة الاتجاهية $\underline{r} = \underline{r}(u^1, u^2)$ وحيدة القيمة single valued والإحداثيات البارامترية u^1, u^2 تسمى بالإحداثيات المنحنية curvilinear coordinates وعند تثبيت u^1 أو u^2 فإننا نحصل على منحنى يقع على السطح. هذه المنحنيات تسمى بمنحنيات الإحداثيات.

تعريف (٣،٧):

المجموعة σ من نقط الفراغ E^3 تسمى بالسطح البسيط simple surface إذا كانت هذه المجموعة مترابطة connected وكل نقطة $x \in \sigma$ تقع داخل منطقة مجاورة من σ بحيث أن المنطقة المجاورة تكون سطح أولي.

ويمكن أن نرى أن مجموعة السطوح الأولية هي مجموعة جزئية من مجموعة السطوح البسيطة ومثال على ذلك

مثال (٢،٧):

الكرة هي سطح بسيط وليس سطح أولي.

تعريف (٤،٧):

السطح البسيط يقال أنه متكامل complete إذا كانت نقطة النهاية لأي متتابعة تقاربيه من النقط التي على السطح هي أيضاً نقطة على السطح.

مثال (٣،٧):

سطح الكرة ومجسم القطع المكافئ peraboloid سطوح متكاملة ولكن الجزء الكروي open ball (دون المحيط) ليس سطح متكامل.

تعريف (٥،٧):

إذا كان السطح البسيط المتكامل محدود فإن السطح يسمى بالسطح المغلق closed.

مثال (٤،٧):

سطح الكرة وسطح قارب النجاة torus سطوح مغلقة.

تعريف (٦.٧):

المنطقة المجاورة للنقطة $\underline{x}$ على السطح σ هي الجزء المشترك بين σ وأي منطقة مجاورة للنقطة $\underline{x}$ في الفراغ E^3. ولهذا فإن كل نقطة على السطح البسيط لها منطقة مجاورة من هذا السطح عبارة عن سطح أولي.

وبالتالي فإنه عند ذكر المنطقة المجاورة لنقطة ما على السطح البسيط نعني بها سطح أولي مجاور لهذه النقطة.

تعريف (٧.٧):

المجموعة σ من نقط الفراغ E^3 تسمى بالسطح العام إذا كانت هي صورة لسطح بسيط بواسطة راسم توبولوجي محلي في الفراغ E^3.

تعريف (٨.٧):

يقال أن الرواسم $f_i : \sigma_i \longrightarrow \sigma , i = 1,2$ تعرف نفس السطح العام σ إذا وجد تناظر أحادي بين نقط σ_1 ، σ_2 بحيث أن صور النقط المتناظرة لهذين السطحين تنطبق على السطح σ ، حيث σ_i سطوح بسيطة.

نفرض أن السطح العام σ معطى بواسطة راسم توبولوجي محلي $f : \bar{\sigma} \longrightarrow \sigma$ حيث $\bar{\sigma}$ سطح بسيط. في هذه الحالة تكون المنطقة المجاورة للنقطة $f(\underline{x})$ على السطح العام σ هي صورة لمنطقة مجاورة للنقطة $\underline{x}$ على السطح $\bar{\sigma}$ بواسطة الراسم f.

بما أن f راسم توبولوجي في المنطقة المجاورة للنقطة $\underline{x}$ فإن $f(\underline{x})$ لها منطقة مجاورة على σ عبارة عن سطح أولي.

(٣.٧) السطح المنتظم: Regular Surface

تعريف (٩.٧):

السطح σ يقال أنه سطح منتظم (قابل للتفاضل k من المرات) إذا كان كل نقطة من نقطاه لها منطقة مجاورة تسمح بتمثيل بارامتري منتظم على الصورة:

$$x^i = x^i(u^\alpha) = x^i(u^1, u^2), i = 1,2,3; \alpha = 1,2 \qquad (7.2)$$

حيث x^i دوال منتظمة (دوال منتظمة وقابلة للتفاضل k من المرات) معرفة في منطقة $D \subset \mathbb{R}^2$ من المستوى uv.

فمثلاً التمثيل البارامتري للسطح هو

$$\underline{r} = \underline{r}(u^1, u^2)$$

أو

$$\underline{r} = \underline{r}(u^\alpha), \qquad \alpha = 1,2$$ حيث

أو ما يكافئ

$$x^i = x^i(u^\alpha), i = 1,2,3; \alpha = 1,2$$

وسنستخدم في معالجتنا لنظرية السطوح أسلوب أينشتين الاختزالي الجمعي Einstein's summation convention المشار إليه في الباب الأول.

ولذلك نعتبر مجموعتين من الرموز الترقيمية أحدهما لاتينية i, j, k ومداها هو $1,2,3$ وأخرى إغريقية $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ومداها هو $1, 2$. توضيحاً لذلك نعتبر الأمثلة الآتية:

$$a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 , \quad A_{\alpha\beta} B^\alpha = A_{\alpha 1} B^1 + A_{\alpha 2} B^2$$

$$A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = A_{11} B^{11} + A_{12} B^{12} + A_{21} B^{21} + A_{22} B^{22}$$

نظرية (١.٧):

إذا كانت $x^i = x^i(u^\alpha) = x^i(u^1, u^2), i = 1,2,3$ هي دوال منتظمة في المنطقة D من المستوى $u^1 u^2$ والتي تحقق أن المصفوفة الجاكوبية

$$\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} \qquad (7.3)$$

لها المرتبة 2 عند كل نقطة $(u^1, u^2) \in D$ فإن المعادلات (7.2) تعين سطح ما σ هو صورة لسطح بسيط D بواسطة راسم توبولوجي محلي والذي يحدد للنقطة $(u^1, u^2) \in D$ نقطة في الفراغ إحداثياتها تعطى بالمعادلات (7.2).

البرهان:

لإثبات هذه النظرية نحاول إثبات أن الراسم

$$f\ :(u^1,u^2)\in D \longrightarrow \underline{r}=\underline{r}(u^1,u^2)\in\sigma\subset E^3$$

راسم أحادي (متباين) محلي. نفرض على العكس أن الراسم غير أحادي ولذلك توجد النقطة (u_o^1,u_o^2) بحيث أنه في النقطة المجاورة لها والصغيرة صغراً كافياً يمكن اختيار النقطتين $(u^\alpha)=(u^1,u^2),(v^\alpha)=(v^1,v^2)\in D$ والتي تحقق المعادلات

$$x^i(u^\alpha)-x^i(v^\alpha)=0, i=1,2,3;\alpha=1,2$$

أو ما يكافئ

$$x^i(u^1,u^2)-x^i(v^1,v^2)=0, i=1,2,3$$

ولكن

$$\begin{aligned}x^i(u^1,u^2)-x^i(v^1,v^2)&=x^i(u^1,u^2)-x^i(u^1,v^2)\\&\quad+x^i(u^1,v^2)-x^i(v^1,v^2)\\&=(u^2-v^2)x_2^i(u^1,\theta^i)+(u^1-v^1)x_1^i(\lambda^i,v^2)=0\end{aligned}$$

(وذلك باستخدام مفكوك تيلور في منطقة الجوار المباشر من الرتبة الأول).

أي يكون لدينا نظام المعادلات الخطية (في المجاهيل u^1-v^1 ، u^2-v^2) المتجانسة الآتية:

$$(u^2-v^2)x_2^i(u^1,\theta^i)+(u^1-v^1)x_1^i(\lambda^i,v^2)=0, i=1,2,3 \quad (7.4)$$

حيث

$$x_\alpha^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha},\alpha=1,2$$

نفرض أن u^1-v^1,u^2-v^2 لا يساويان الصفر في آن واحد ومن المعادلات (7.4) يكون للمصفوفة (أنظر حل المعادلات الخطية المتجانسة في الجبر الخطي)

$$\begin{bmatrix} x_1^1(\lambda^1,v^2) & x_2^1(u^1,\theta^1) \\ x_1^2(\lambda^2,v^2) & x_2^2(u^1,\theta^2) \\ x_1^3(\lambda^3,v^2) & x_2^3(u^1,\theta^3) \end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

مرتبة Rank أقل من 2، أي أن جميع محددات الرتبة الثانية تنعدم في القيمة ومن استمرار الدوال x_2^i, x_1^i ينتج أن جميع محددات الرتبة الثانية للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{bmatrix}$$

تنعدم عند النقطة (u_o, v_o) أي أن مرتبة هذه المصفوفة تقل عن العدد 2 وحيث أن المصفوفة (7.5) هي المصفوفة البديلة Transpose للمصفوفة (7.3) ولذلك نكون قد توصلنا إلى تناقض. أي أنه لابد أن يكون الراسم $f : D \longrightarrow \sigma$ راسم توبولوجي.

نظرية (٢.٧):

نظام المعادلات (7.2) يمثل سطحاً في الفراغ إذا كان وكان فقط مرتبة المصفوفة الجاكوبية (7.3) تساوي 2.

البرهان:

المصفوفة الجاكوبية تعطى من (7.3) ولذلك نعتبر الحالات الآتية:

(i) مرتبة المصفوفة (7.3) تساوي صفراً وفي هذه الحالة لابد وأن تنعدم جميع عناصر المصفوفة.

أي أن
$$x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = 0; i = 1,2,3, \alpha = 1,2$$

وبالتالي يكون $x^i = a^i =$ const. ولذلك المجموعة (7.2) تمثل نقطة ثابتة $(x^i) = (a^1, a^2, a^3)$ في الفراغ E^3.

(ii) مرتبة المصفوفة (7.3) تساوي 1. في هذه الحالة توجد $3\text{-}1 = 2$ من العلاقات التي تربط الدوال الإحداثية x^i وتكون خالية تماماً من u^1,u^2 أي توجد العلاقات

$$f_1(x^1,x^2,x^3)=0, f_2(x^1,x^2,x^3)=0$$

التي تمثل معاً منحنى في الفراغ أي أن المعادلات (7.2) تمثل منحنى فر اغي وليست سطحاً.

(iii) مرتبة المصفوفة (7.3) تساوي 2 وعليه يجب أن ترتبط الدوال x^i بعلاقة واحدة $f(x^i)=f(x^1,x^2,x^3)$ وهذه تمثل سطحاً في الفراغ أي أن مجموعة المعادلات (7.2) تمثل سطحاً في الفراغ. وفي هذه الحالة تسمى المعادلات (7.2) التمثيل البارامتري للسطح ويعطى بالمعادلة الاتجاهية

$$\begin{aligned} r(u^1,u^2) &= r(u^\alpha)=(x^i(u^\alpha)) \\ &= (x^1(u^1,u^2),x^2(u^1,u^2),x^3(u^1,u^2)) \qquad (7.6) \end{aligned}$$

إذا كانت الدالة الاتجاهية (7.6) لها مشتقات جزئية متصلة لأي رتبة بالاضافة إلى $\underline{r}_1,\underline{r}_2 \neq 0$ حيث

$$\underline{r}_\alpha=\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}, \alpha=1,2 \qquad (7.7)$$

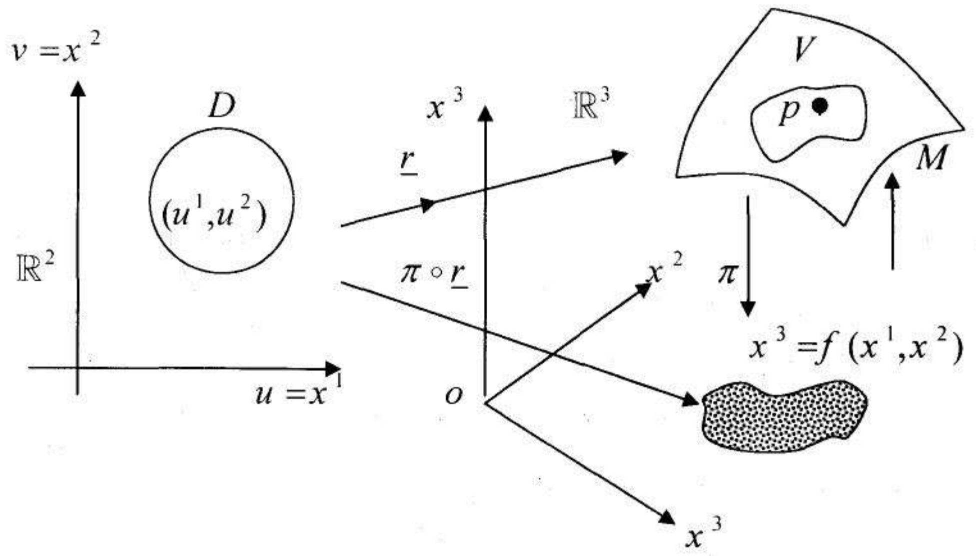
فإن التمثيل البارامتري (7.2) أو (7.6) يسمى تمثيل بارامتري منتظم.

باختيار مناسب لمحاور الاحداثيات x^1,x^2,x^3 فإن بعض السطوح تسمح بتمثيل بارامتري للسطح الكلي على الصورة:

$$x^1=u^1, x^2=u^2, x^3=f(u^1,u^2) \qquad (7.8)$$

حيث $f(u^1,u^2)$ دالة معرفة في المنطقة D من المستوى uv.

معادلات هذا السطح يمكن كتابتها في الصورة الكرتيزية $x^3=f(x^1,x^2)$ وتسمى صورة مونج Mong form للسطح كما هو موضح في شكل (١٢.٧).



شكل (١٢.٧)

التناظر بين نقط السطح M ونقط المنطقة D من المستوى x^1x^2 نحصل عليه عن طريق راسم الإسقاط π بواسطة خطوط مستقيمة توازي محور x^3. المعادلات البارامترية (7.8) في هذه الحالة تأخذ الشكل

$$\underline{r}(u^1,u^2)=(u^1,u^2,f(u^1,u^2)) \qquad (7.9)$$

تعريف (١٠.٧):

يعرف السطح σ بأنه المحل الهندسي للنقطة $(x^1,x^2,x^3)\in E^3$ التي تتحرك في الفراغ بحيث أن الإحداثيات x^i تحقق المعادلة الضمنية

$$F(x^1,x^2,x^3)=0 \qquad (7.10)$$

وتسمى هذه المعادلة بالصيغة الضمنية implicit form للسطح في الفراغ E^3.

مثال (٥.٧):

إذا كانت $F(x^1,x^2,x^3)=0$ علاقة خطية في المتغيرات x^1,x^2,x^3 على الصورة $a_i x^i + a_o =0$ فإن السطح يسمى سطح المستوى في الفراغ حيث العمودي عليه له الاتجاه $a=(a_i)$ وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوي $\frac{|a_o|}{|a|}$.

مثال (٦.٧):

إذا كانت المعادلة $F(x^1,x^2,x^3)=0$ تمثل علاقة من الدرجة الثانية (أي F كثيرة حدود من الدرجة الثانية) في المتغيرات x^1,x^2,x^3 على الصورة

$$a_{ij} x^i x^j + 2a_{10}x^1 + 2a_{02}x^2 + 2a_{03}x^3 + a_0 =0, a_{ij} = a_{ji}$$

فإن السطح يسمى بسطح الدرجة الثانية quadratic surface في الفراغ مثل سطح الكرة ومجسم القطع الناقص ومجسم المخروط ومجسم القطع المكافئ وهكذا...

نظرية (٣.٧):

نفرض أن $F(x^1,x^2,x^3)$ دالة منتظمة في المتغيرات x^i و M مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $F(x^1,x^2,x^3)=0$ و $(x_o^1,x_o^2,x_o^3)\in M$ نقطة عندها يتحقق $\nabla F=(F_i)\neq 0$ حيث $F_i=\frac{\partial F}{\partial x^i}$ وبالتالي النقطة (x_o^1,x_o^2,x_o^3) لها منطقة مجاورة بحيث كل نقاط M التابعة لها تكون سطح أولي.

البرهان:

نفرض مثلاً أنه عند النقطة (x_o^1,x_o^2,x_o^3) يكون $F_3=\frac{\partial F}{\partial x^3}\neq 0$. ومن نظرية الدوال الضمنية توجد الأعداد $F_i=\frac{\partial F}{\partial x^i}$ والدالة المنتظمة $f(x^1,x^2)$ المعرفة في المنطقة $|x^\alpha - x_o^\alpha|<\delta_1, \alpha=1,2$ بحيث أن جميع النقط تحقق المعادلة $F(x^1,x^2,x^3)=0$ وهذه النقط تقع داخل المنطقة (متوازي السطوح):

$$|x^1 - x_o^1| = |x^2 - x_o^2| < \delta_1 \ , |x^3 - x_o^3| < \delta_2$$

إذاً السطح الأولي يعطى بالمعادلة

$$x^3 = f(x^1, x^2), |x^\alpha - x_o^\alpha| < \delta_1, \alpha = 1, 2$$

وهذا يكمل برهان النظرية.

ملاحظة (٥.٧):

في البرهان السابق اعتبرنا السطح ممثل بالمعادلة الضمنية

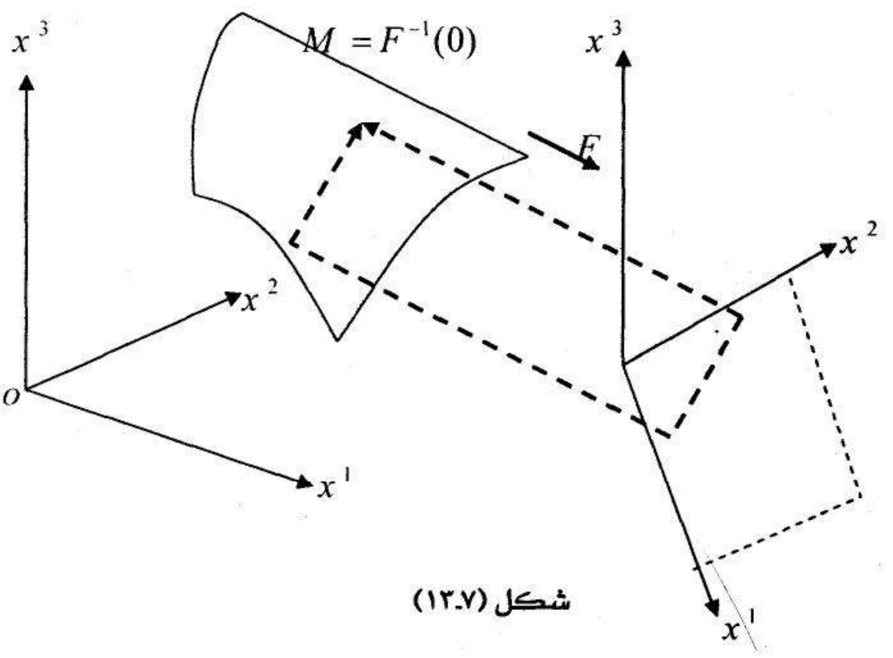
$$F(x^1, x^2, x^3) = 0$$

والتي يمكن صياغتها كالآتي: إذا كان

$$F : M \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0 \in F(M)$$

فإن $F^{-1}(0)$ هي سطح منتظم في $\mathbb{R}^3$ كما هو موضح في شكل (١٢.٧).



شكل (١٢.٧)

(٤.٧) تمثيل بارامتري خاص للسطح:

Special Parameterization of a Surface

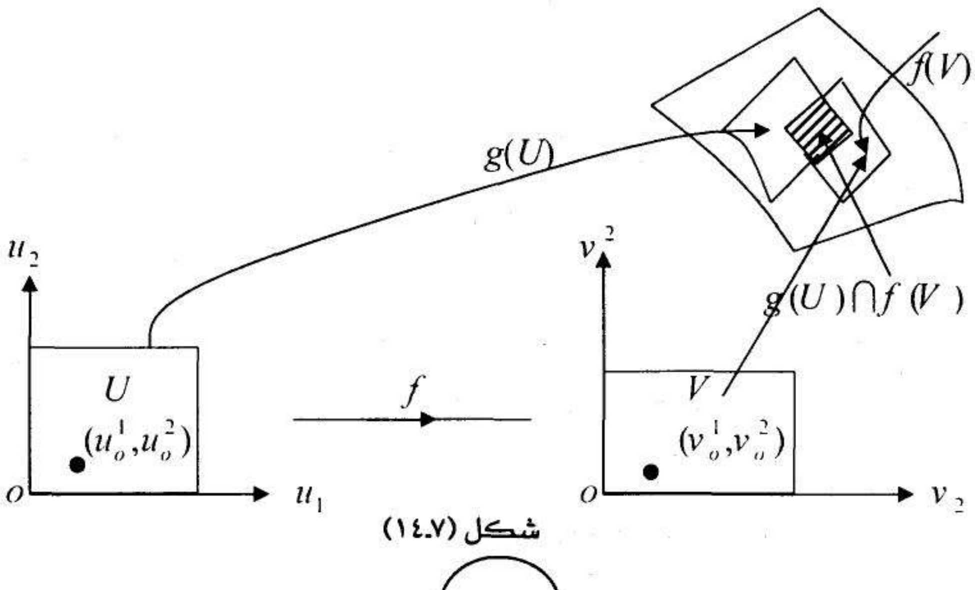
السطح المنتظم σ يسمح لعدد لانهائي من التمثيلات البارامترية في المنطقة المجاورة لكل من نقاط هذا السطح. نفرض أن (7.2) هو تمثيل بارامتري ما للسطح في المنطقة المجاورة للنقطة $P(u_o^\alpha)=P(u_o^1,u_o^2)$ وإذا كانت $f_\beta(v^\alpha)$, $\beta=1,2,\alpha=1,2$ هي دوال تحقق الشروط

$$u_o^\beta=f_\beta(v_o^\alpha),Det(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(v^1,v^2)})\neq 0,\alpha,\beta=1,2$$

عند النقطة (v_o^1,v_o^2). فإن المعادلات

$$x^i=x^i(f_1(v^1,v^2),f_2(v^1,v^2)),i=1,2,3$$

تحدد تمثيل بارامتري منتظم للسطح. أي أن المعادلات $u^\beta=f_\beta(v^\alpha)$ تعين راسم توبولوجي من المنطقة الصغيرة V الصغيرة صغراً كافياً والمجاورة للنقطة (v_o^1,v_o^2) في المستوى v^1v^2 إلى المنطقة U المجاورة للنقطة (u_o^1,u_o^2) في المستوى u^1u^2 كما هو موضح في شكل (١٢.٧).



شكل (١٤.٧)

نظرية (٤.٧):

نفرض أن σ سطح في الفراغ $\mathbb{R}^3$ يسمح بتمثيل بارامتري

$$x^i = x^i(u^\alpha) = x^i(u^1, u^2)$$

في المنطقة المجاورة للنقطة p وأن $Det(\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}) \neq 0$ عند p . إذاً في المنطقة المجاورة للنقطة p من السطح σ يمكن تعريف المعادلة $x^3 = f(x^1, x^2)$ حيث f دالة منتظمة.

البرهان:

من الشروط المعطاة نجد أن نظرية الدوال الضمنية محققة وبالتالي توجد الدوال المنتظمة $u^\alpha = (x^1, x^2)$ والتحويل العكسي $x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2)$ والتي تحقق

$$\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)} \cdot \frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(x^1,x^2)} = I \qquad (*)$$

حيث I مصفوفة الوحدة ومن الفرض وباستخدام (*) يكون

$$Det(\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}) \neq 0 \quad , \quad Det(\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(x^1,x^2)}) \neq 0$$

وبالتالي يمكن إدخال البارامترات v^1, v^2 وفقاً للعلاقات

$$u^\alpha = u^\alpha(v^1, v^2), \alpha = 1, 2 \quad .$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$x^1 = v^1, x^2 = v^2, x^3 = x^3(u^1(v^1,v^2), u^2(v^1,v^2))$$

أو في الصورة المكافئة (صورة مونج) $x^3 = f(x^1, x^2)$ وهذا يكمل البرهان.

ملاحظة (٦.٧):

النظرية (٤.٧) تعطي شروط وجود تمثيل مونج للسطح المنتظم.

نظرية (٥.٧):

نفرض أن σ سطح منتظم وأن $x = x(u^{\alpha})$ تمثيل بارامتري منتظم عليه ونعتبر مجموعة المعادلات التفاضلية (معادلتين) الآتية:

$$A_{\alpha\beta}(u^1,u^2)du^{\alpha}=0, Det(A_{\alpha\beta})\neq 0; \alpha,\beta=1,2 \quad (7.11)$$

المعرفة في منطقة مجاورة للنقطة $(u_o^{\alpha})=(u_o^1,u_o^2)$. عندئذ السطح σ يسمح بتمثيل بارامتري بحيث أن منحنيات الإحداثيات u^{α} هي منحنيات تكاملية للمعادلات (7.11) في المنطقة المجاورة لهذه النقطة.

البرهان:

كي لا نفقد الحالة العامة نفرض أن $A_{\alpha\beta}\neq 0, \alpha\neq\beta$

وليكن $u^2=f_1(v^1,u_o^1)$ هو حل للمعادلة التفاضلية الأولى في (7.11) والذي يحقق

$$u^2=f_1(v^1,u_o^1)=v^1$$

نفرض كذلك $u^1=f_2(v^2,u_o^2)$ هو حل للمعادلة التفاضلية الثانية في (7.11) والذي يحقق

$$u^1=f_2(v^2,u_o^2)=v^2$$

بما أن $\dfrac{\partial f_1}{\partial v^1}=1\neq 0, u^1=u_o^1, \dfrac{\partial f_2}{\partial v^2}=1, u^2=u_o^2$

إذاً المعادلات

$$u^2=f_1(v^1,u_o^1), u^1=f_2(v^2,u_o^2)=v^2$$

قابلة للحل في v^1، v^2 في المنطقة المجاورة للنقطة (u_o^1,u_o^2) وأن الحل يأخذ الصورة

$$v^{\alpha}=v^{\alpha}(u^1,u^2), \alpha=1,2$$

بما أن $v^1(u^1,u^2)=\text{const.}$ هو تكامل المعادلة الأولى في (7.11) فإن المعادلة

$dv^1=\dfrac{\partial v^1}{\partial u^1}du^1+\dfrac{\partial v^2}{\partial u^2}=0$ تتناسب مع المعادلة $A_{11}du^1+A_{21}du^2=0$

ومنها يجب أن يتحقق (شرط التناسب هو شرط حذف du^1,du^2)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \end{vmatrix}=0$$

بالمثل يكون

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{22} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix}=0$$

فإذا فرضنا أن $Det\,(\dfrac{\partial(v^1,v^2)}{\partial(u^1,u^2)})=0$ فإن $Det\,(A_{\alpha\beta})=0$ وهذا مستحيل.

إذاً لابد أن يكون $Det\,(\dfrac{\partial(v^1,v^2)}{\partial(u^1,u^2)})\neq 0$ ومنها يكون $v^1(u^1,u^2)$، $v^2(u^1,u^2)$ تمثيل بارامتري على السطح وأن منحنيات الإحداثيات $v^1=$ const.، $v^2=$ const. هي منحنيات تكاملية وهذا يكمل برهان النظرية.

ملاحظة (٧.٧):

برهان النظرية السابقة يعتمد على نظرية الدالة الضمنية ونظرية الدالة العكسية (في الباب الثاني).

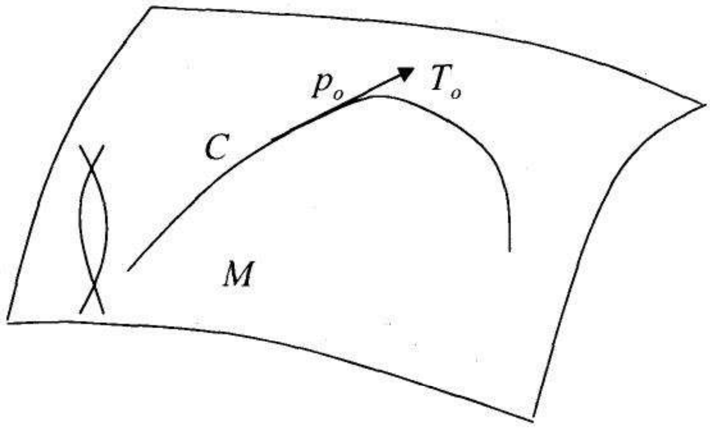
(٥.٧) الاتجاهات على السطح : Directions on the Surface

لنعتبر سطح M في الفراغ معطى بالمعادلة الضمنية $F(x^1,x^2,x^3)=0$ وأن $p_o=(x_o^1,x_o^2,x_o^3)$ نقطة عليه يمر بها منحنى $C:r(s)=(x^i(s))$ وهذا المنحنى واقع على السطح M . المماس $\underline{T}_o$ لهذا المنحنى عند p_o هو المتجه

$$T_o = (\frac{d\underline{r}}{ds})_o = ((\frac{dx^i}{ds})_o) = (\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds})_{p_o} \qquad (7.12)$$

تعريف (١١.٧):

نسمي أي مماس لأي منحنى واقع على السطح عند أي نقطة عليه اتجاهاً على السطح. فمثلاً المماس $\underline{T}_o$ هو اتجاهاً على السطح كما هو موضح في شكل (١٥.٧)



شكل (١٥.٧)

شرط وقوع المنحنى C على السطح M هو أن جميع نقط المنحنى C تحقق المتطابقة

$$F(x^1(s), x^2(s), x^3(s)) = 0 \qquad (7.13)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى s نحصل على ($dF \equiv 0$)

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}\frac{dx^1}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x^2}\frac{dx^2}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x^3}\frac{dx^3}{ds} = 0$$

هذه العلاقة تصح عند جميع نقط المنحنى C على السطح M وبالأخص أيضاً عند النقطة p_o أي أن

$$(\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o}(\frac{dx^1}{ds})_o + (\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o}(\frac{dx^2}{ds})_o + (\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}(\frac{dx^3}{ds})_o = 0$$

لنعتبر المتجه L

$$\underline{L} = ((\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o}, (\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o}, (\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}) \qquad (7.14)$$

أي أن $\underline{L}$ عمودي على $\underline{T}_o$ ونلاحظ أن المتجه $\underline{L}$ من تعريفة يعتمد فقط على السطح وعلى النقطة p_o. في حين أن $\underline{T}_o$ يعتمد على السطح والنقطة p_o والمنحنى C.

ونعبر عن العمودي على السطح عن طريق التدرج أو الانحدار للدالة القياسية F حيث

$$L = (\nabla F)_{p_o} \ , < L, T_o > = < (\nabla F)_o, T_o > = 0 \qquad (7.15)$$

فإذا ما تصورنا جميع المنحنيات الواقعة على السطح M والمارة بالنقطة p_o فإن جميع مماساتها عند p_o تتعامد مع نفس المتجه $\underline{L}$ وعليه فإن جميع الخطوط المماسية للسطح من أي نقطة عليه p_o تقع جميعها في مستوى واحد يسمى بالمستوى المماس للسطح M عند p_o ويرمز له بالرمز $T_{p_o}M$. المتجه $\underline{L}$ العمودي على جميع الخطوط المماسية عند النقطة p_o يسمى العمودي على السطح. إذاً معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $p_o(x_o^1, x_o^2, x_o^3)$ هي

$$< (\nabla F)_{p_o}, y - x_o > = (\frac{\partial F}{\partial x^i})_{p_o}(y^i - x_o^i) = 0 \qquad (7.16)$$

حيث x_o, y هما متجه الموضع لنقطة عامة على المستوى المماس ونقطة التماس p_o على الترتيب.

معادلة خط العمودي على السطح عند النقطة p_o هي (حيث (y^i) نقطة على الخط).

$$\frac{y^1 - x_o^1}{(\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o}} = \frac{y^2 - x_o^2}{(\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o}} = \frac{y^3 - x_o^3}{(\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}} \qquad (7.17)$$

مثال (٧.٧):

أثبت أن المستوى المماس للسطح $x^1x^2x^3 = a^3$ عند أي نقطة عليه يكون مع مستويات الإحداثيات هرم ثلاثي ثابت الحجم.

الحل:

نضع معادلة السطح في الصورة الضمنية

$$F(x^1,x^2,x^3)=x^1x^2x^3-a^3=0$$

ونعتبر $p_o(x_o^1,x_o^2,x_o^3)$ نقطة على السطح أي أن $x_o^1x_o^2x_o^3=a^3$ ، نسب اتجاه العمودي على السطح عند هذه النقطة هي

$$(\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o}=x_o^2x_o^3,(\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o}=x_o^1x_o^3,(\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}=x_o^1x_o^2 \quad (7.18)$$

وهي مركبات المتجه $(\nabla F)_{p_o}$.

إذاً معادلة المستوى المماس عند p_o تعطى من (7.16)، (7.18) وتأخذ الصورة

$$(y^1-x_o^1)x_o^2x_o^3+(y^2-x_o^2)x_o^1x_o^3+(y^3-x_o^3)x_o^1x_o^2=0$$

أو

$$y^1x_o^2x_o^3+y^2x_o^1x_o^3+y^3x_o^1x_o^2=3x_o^1x_o^2x_o^3$$

حيث (y^1,y^2,y^3) نقطة عامة على المستوى.

وبالقسمة على $3x_o^1x_o^2x_o^3$ نحصل على

$$\frac{y^1}{3x_o^1}+\frac{y^2}{3x_o^2}+\frac{y^3}{3x_o^3}=1$$

وتكون الأطوال التي يقطعها المستوى من محاور الإحداثيات هي $3x_o^1,3x_o^2,3x_o^3$ وعليه فإن حجم الهرم (هرم ثلاثي قائم كل أوجهه مثلثات قائمة وحجمه يساوي $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع) هو

$$V=\frac{1}{3}.3x_o^1.\frac{1}{2}3x_o^2.3x_o^2$$

$$\therefore\ V=\frac{27}{6}x_o^1x_o^2x_o^3=\frac{9}{2}a^3=\text{const.}$$

(٦.٧) الخطوط البارامترية على السطح : Parametric Lines

لنعتبر سطحاً في الفراغ معطى بالتمثيل البارامتري (7.2) . لنعطي الآن أحد البارامترات وليكن u^1 قيمة ثابتة ولتكن u_o^1 فنحصل على $\underline{r}=\underline{r}(u_o^1,u^2)$ أو ما يكافئ

$$x^i = x^i(u_o^1,u^2),\ i=1,2,3 \qquad (7.19)$$

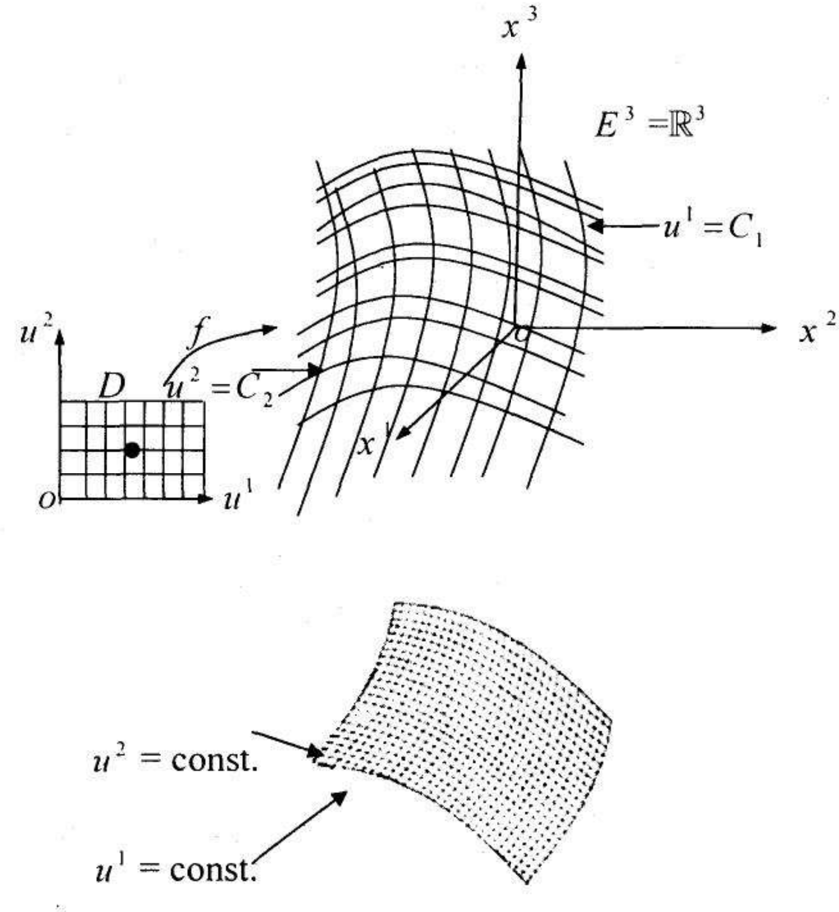
أي $x^i = g_i(u^2),\ i=1,2,3$ حيث g_i دوال معرفة ومتصلة وتفاضلية من تعريف الدوال x^i وهذا هو في الواقع التمثيل البارامتري لمنحنى في الفراغ حصلنا عليه من التمثيل البارامتري للسطح $x^i = x^i(u^\alpha)$ وذلك بتثبيت أحد البارامترات وليكن u^1 إذاً هذا المنحنى يقع على السطح. وخلاصة القول $u^1=u_o^1$ تعرف منحنى فراغ واقع على السطح يسمى خط u^2 البارامتري u^2 -parametric line وبإعطاء u^1 جميع القيم الثابتة الممكنة نحصل على جميع خطوط u^2 البارامترية على السطح. بالمثل يمكن الحصول على خط u^1 البارامتري u^1 –parametric line وكذلك عائلة خطوط u^1 البارامترية على السطح كما هو موضح في شكل (١٦.٧).

وحيث أن التناظر بين نقط السطح وأزواج قيم (u^1,u^2) هو تناظر أحادي إذاً من السهل أن نتبين الخصائص الآتية للخطوط البارامترية (الإحداثية) على السطح كما هو موضح في شكل (١٦.٧).

(i) أي خطين بارامترين من نفس النوع لا يمكن أن يتقاطعا ، لأنه مثلاً لو تقاطع الخطان $u^1=\alpha_2, u^1=\alpha_1$ ، $\alpha_1 \neq \alpha_2$ في نقطة فمعنى ذلك أن u^1 عند هذه النقطة لها أكثر من قيمة واحدة (على الأقل قيمتان $\alpha_1\ ,\alpha_2$) وهذا لا يحدث حيث أن f تناظر أحادي.

(ii) أي خطين بارامترين من نوعين مختلفين لابد وأن يتقاطعا في نقطة واحدة فقط. فمثلاً الخطان $u^1=u_o^1,\ u^2=u_o^2$ يتقاطعان في نقطة واحدة عندها u^1,u^2 تأخذ القيم u_o^1,u_o^2 ولا توجد سوى هذه النقطة.

(iii) أي نقطة على السطح لابد وأن يمر بها خطان بارامتريان من نوعين مختلفين ولا يمر بها سواهما. ولتوضيح ذلك، نفرض أن u^1, u^2 عند هذه النقطة تأخذ القيم u_o^1, u_o^2. إذاً الخط $u^1 = u_o^1$ يمر بالتأكيد بهذه النقطة كذلك الخط $v^1 = v_o^1$ يمر بها ولا توجد خطوط أخرى تمر بها.



شكل (١٦.٧): الخطوط البارامترية على السطح

(٧.٧) المنحنيات على السطح: Curves on a Surface

لنعبر عن كل من u^1, u^2 كدوال لمتغير ثالث v أي نضع $u^\alpha = u^\alpha(v),\ \alpha = 1,2$ وبالتعويض في المعادلة الاتجاهية (7.1) للسطح نحصل على

$$\underline{r} = \underline{r}(u^\alpha(\mathrm{v})) = \underline{r}\ (u^1(v), u^2(v)) \qquad (7.20)$$

وبالتالي حصلنا على منحنى فراغي تمثيله البارامتري حصلنا عليه من التمثيل البارامتري (7.1) للسطح، أي أنه منحنى فراغي يقع على السطح مع الأخذ في الاعتبار أن

$$(0,0) \neq (\frac{du^1}{dv}, \frac{du^2}{dv}) \qquad (7.21)$$

(مصفوفة جاكوب للتحويل $v \to (u^1, u^2)$ هي مصفوفة صف مختلف عن الصفر).

كحالة خاصة إذا أخذنا، ثابت $= u^1 = v, u^2$ نحصل عل خط u^1 البارامتري. بالمثل إذا أخذنا، ثابت$= u^2 = v, u^1$ نحصل على خط u^2 البارامتري.

بالتفاضل بالنسبة إلى v للدالة الاتجاهية (7.20) نحصل على

$$\frac{d\underline{r}}{dv} = \underline{r}_1 u'^1 + \underline{r}_2 u'^2, \qquad (7.22)$$

حيث

$$' = \frac{d}{dv},\ \underline{r}_\alpha = \frac{\partial\ \underline{r}}{\partial u^\alpha}, \alpha = 1,2$$

عند النقطة p_o يكون

$$(\frac{d\underline{r}}{dv})_o = (\underline{r}_1)_{p_o}(u'^1)_{p_o} + (\underline{r}_2)_{p_o}(u'^2)_{p_o} \qquad (7.23)$$

وهذا هو الاتجاه T_o على السطح كمماس للمنحنى (7.20) عند النقطة p_o حيث $T_o = (\frac{dr}{dv})_{p_o}$ تركيبة خطية من المتجهات r_1, r_2 المستقلة خطياً.

(٨.٧) المستوى المماس لسطح ممثل بارامترياً : Tangent Plane

سبق وأن أوجدنا معادلة المستوى المماس لسطح ممثل بمعادلة ضمنية وهنا نوجد معادلة المستوى المماس لسطح ممثل بارامترياً لذلك نعتبر خط u^1 البارامتري على السطح M أي

$$u^1 = v\,,\; u^2 = u_o^2 = \text{ثابت}\;،\; u'^1 = 1, u'^2 = 0$$

والاتجاه المناظر له على السطح M عند النقطة p_o هو

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dv}\right)_{p_o} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u^1}\right)_{p_o} = (\underline{r}_1)_{p_o}$$

بالمثل يمكن اعتبار خط u^2 البارامتري أي

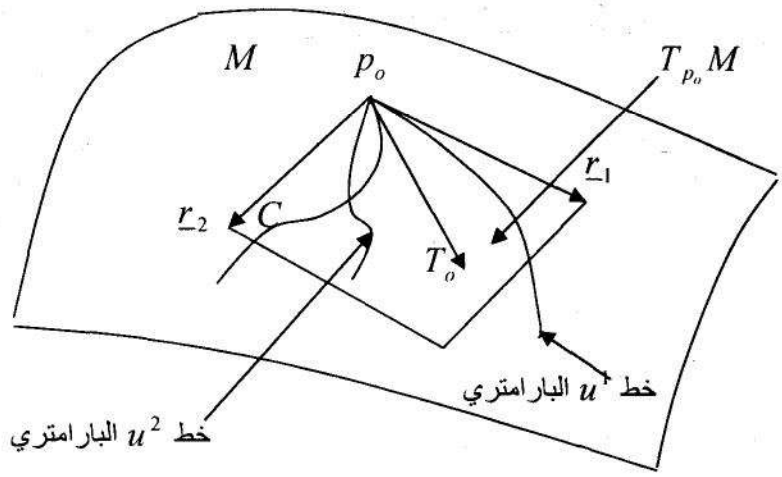
$$u^2 = v\,,\; u^1 = u_o^1 = \text{وثابت}\; u'^1 = 0,\; u'^2 = 1$$

والاتجاه المناظر له على السطح عند النقطة p_o هو $(\underline{r}_2)_{p_o}$.

إذاً المعادلة (7.23) تعطي الشكل العام للاتجاه $T_o = (\underline{r}')_{p_o}$ على السطح عند p_o كالآتي:

$$T_o = (u'^1)_{v_o}(\underline{r}_1)_o + (u'^2)_{v_o}(\underline{r}_2)_o \qquad (7.24)$$

أي أن المماس T_o لأي منحنى واقع على السطح ومار بالنقطة p_o أمكن التعبير عنه كعلاقة خطية من $(\underline{r}_2)_o, (\underline{r}_1)_o$ وهما المماسان للخطين البارامترين على السطح عند النقطة p_o وهما لا يتوقفان إلا على p_o ويحددان مستوى وفي هذا المستوى تقع جميع الخطوط المماسية لجميع المنحنيات الواقعة على السطح عند p_o. إذاً جميع الخطوط المماسية لجميع المنحنيات الواقعة على السطح عند p_o تقع في مستوى واحد يمر بالنقطة p_o وهو المستوى المماس Tangent Plane عند p_o ويرمز له بالرمز $T_{p_o}M$ كما هو موضح في شكل (١٧.٧).



شكل (١٧.٧)

(٩.٧) حقل متجه العمودي على السطح : Normal Vector Field

العمودي $\underline{L}$ على السطح هو عمودي على كل من $(\underline{r}_1)_{p_o}, (\underline{r}_2)_{p_o}$ أي أن $(\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2)_{p_o}$ يوازي $\underline{L}$ وبذلك تكون وحدة العمودي N على السطح عند p_o على الصورة :

$$N = \left(\frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|}\right)_{p_o} \qquad (7.25)$$

وبذلك يكون حقل متجه الوحدة العمودي unit normal vector field على السطح على الصورة

$$N = N(u^\alpha) = N(u^1, u^2),$$

حيث

$$N = \frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|} \qquad (7.26)$$

ملاحظة (٨.٧):

من السهل التأكد من أن N ثابت كوني (لا تغيري) Invariant بالنسبة إلى تحويلات الإحداثيات ذات الجاكوبي J أكبر من الصفر. وإذا كان الجاكوبي سالب

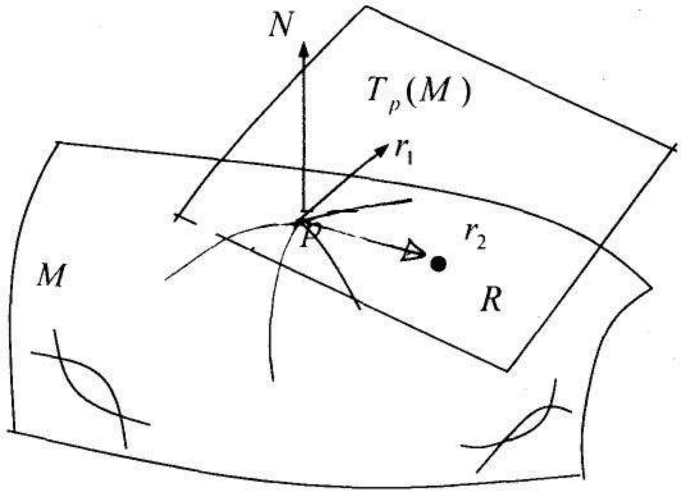
فإن N تغير إشارتها. بمعنى إذا تغيرت الإحداثيات البارمترية (u^1, u^2) إلى الإحداثيات $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ فإن $N(u^\alpha) = \pm N(\bar{u}^\alpha)$ حيث $J \neq 0$.

مثال (٨.٧):

نفرض أن R هو متجه الموضع لأي نقطة على المستوى المماس للسطح M عند النقطة $p(u_o^\alpha) = p(u_o^1, u_o^2)$ ، المتجهات الثلاث $R - \underline{r}(u_o^\alpha), \underline{r}_1(u_o^\alpha), \underline{r}_2(u_o^\alpha)$ تقع في المستوى المماس للسطح عند النقطة $\mathrm{p} = p(u_o^\alpha)$ وبالتالي يكون

$$[R - \underline{r}(u_o^\alpha), \underline{r}_1(u_o^\alpha), \underline{r}_2(u_o^\alpha)] = 0 \qquad (7.27)$$

وهذه هي المعادلة الاتجاهية للمستوى المماس للسطح عند النقطة $p(u_o^\alpha)$ ، كما هو موضح في شكل (١٨.٧).



شكل (١٨.٧)

مثال (٩.٧):

إذا كان السطح معطى بالمعادلات البارامترية $x^i = x^i(u^\alpha)$ فإن معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $p(u_o^\alpha)$ المعطاة بالمعادلة (7.27) تصبح على الصورة:

$$\begin{vmatrix} y^1 - x^1(u_o^\alpha) & y^2 - x^2(u_o^\alpha) & y^3 - x^3(u_o^\alpha) \\ x_1^1(u_o^\alpha) & x_1^2(u_o^\alpha) & x_1^3(u_o^\alpha) \\ x_2^1(u_o^\alpha) & x_2^2(u_o^\alpha) & x_2^3(u_o^\alpha) \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.28)$$

حيث $(y^i) \in T_p(M)$ ، $x_\alpha^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}, j = 1,2,3 \;; \;\; \alpha = 1,2$

مثال (١٠،٧):

معادلة المستوى المماس للسطح $M \;: x^3 = x^3(x^1, x^2)$ (في صورة مونج) عند أي نقطة عليه $p_o(x_o^1, x_o^2, x_o^3)$ يمكن الحصول عليها وذلك باعتبار معادلات السطح البارامترية على الصورة :

$$x^1 = u^1,\; x^2 = u^2, x^3 = x^3(u^1, u^2)$$

والنقطة p_o يكون لها الإحداثيات $(u_o^1, u_o^2, x^3(u_o^\alpha))$. وبذلك فإن معادلة المستوى المماس (7.28) تصبح على الصورة

$$\begin{vmatrix} y^1 - u_o^1 & y^2 - u_o^2 & y^3 - x^3(u_o^\alpha) \\ 1 & 0 & x_1^3(u_o^\alpha) \\ 0 & 1 & x_2^3(u_o^\alpha) \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.29)$$

حيث (y^1, y^2, y^3) أي نقطة عامة في المستوى المماس $T_p M$ عند p على السطح M.

مثال (١٠،٧):

إذا كان السطح معطى في الصورة الضمنية $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ حيث

$$|\nabla F|^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 \neq 0$$

وأن $x^i = x^i(u^\alpha)$ هو تمثيل بارامتري أملس smooth أو تفاضلي للسطح. وبالتالي فإن معادلة السطح تأخذ الصورة (متطابقة في البارامترات u^α):

$$F(x^i(u^\alpha)) = F(x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)) = 0 \quad (7.30)$$

بالتفاضل جزئياً لهذه المتطابقة بالنسبة إلى u^1 , u^2 نحصل على (تفاضل وتكامل (٣)):

$$F_1x_1^1 + F_2x_1^2 + F_3x_1^3 = 0,\ F_1x_2^1 + F_2x_2^2 + F_3x_2^3 = 0 \quad (7.31)$$

حيث
$$F_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}, x_\alpha^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha},\ i, j = 1,2,3;\ \alpha = 1,2$$

بحل المعادلتين (7.31) بالنسبة إلى F_i حيث $i, j = 1, 2, 3$ نحصل على

$$\frac{F_1}{\left|\frac{\partial(x^2,x^3)}{\partial(u^1,u^2)}\right|} = \frac{F_2}{\left|\frac{\partial(x^3,x^1)}{\partial(u^1,u^2)}\right|} = \frac{F_3}{\left|\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}\right|} \quad (7.32)$$

إذاً معادلة المستوى المماس عند النقطة $p_o = (x_o^1, x_o^2, x_o^3)$ تأخذ الصورة

$$\begin{aligned}(x^1 - x_o^1)\left|\frac{\partial(x^2,x^3)}{\partial(u^1,u^2)}\right| + (x^2 - x_o^2)\left|\frac{\partial(x^3,x^1)}{\partial(u^1,u^2)}\right| \\ + (x^3 - x_o^3)\left|\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}\right| = 0\end{aligned} \quad (7.33)$$

حيث $\left|\frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(u^1,u^2)}\right|$ محدد 2×2 عناصره المشتقات التفاضلية الجزئية بالنسبة إلى u^1, u^2 ويعطى على الصورة :

$$\frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(u^1,u^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} & \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^j}{\partial u^1} & \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \end{vmatrix}, i, j = 1,2,3, i \neq j \quad (7.34)$$

ملاحظة (٩.٧):

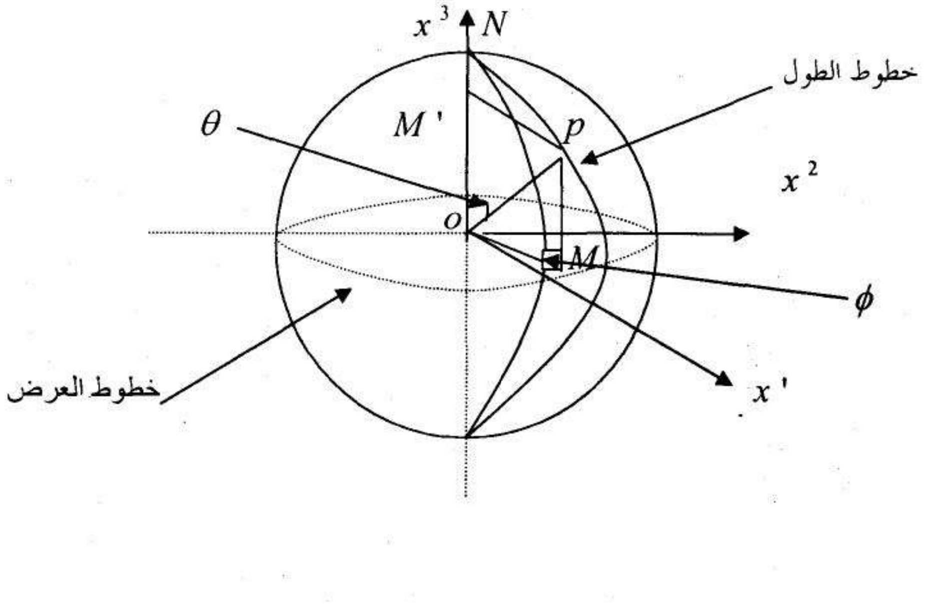
العلاقات (7.32) تعطي اتجاه خط العمودي على السطح عند أي نقطة عليه.

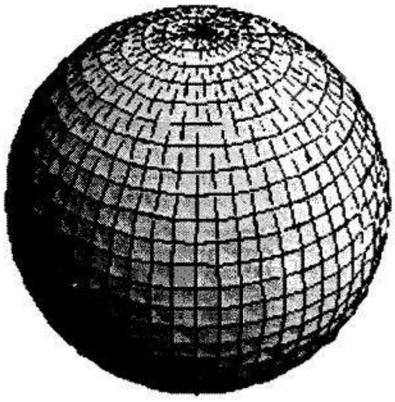
مثال (١٢.٧):

عين المعادلات البارامترية لسطح الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a.

الحل:

نفرض أن o هي مركز كرة نصف قطرها a يقع في مستوى الاستواء equator plane وكذلك المحورين المتعامدين ox^1, ox^2 في مستوى الاستواء والمحور ox^3 هو المحور المار بالقطب الشمالي N. نفرض أن p نقطة على سطح الكرة ومنحنى خط الطول meridian المار بهذه النقطة يصنع زاوية ϕ مع خط الطول المتقاطع مع محور ox^3 ونفرض أن θ هي الزاوية بين op ونصف القطر $\dot{o}N$. مسقط النقطة p على محور ox^3 وعلى المستوى الأستوائي المستوى x^1ox^2 هي M, M' على الترتيب. كما هو واضح من شكل (١٩.٧).





شكل (١٩.٧)

من الشكل نجد أن (العلاقة بين الإحداثيات الكروية والإحداثيات الكرتيزية)

$$PM' = a\sin\theta = oM$$

$$x^1 = oM\cos\phi = a\sin\theta\cos\phi \qquad (7.35)$$

$$x^2 = oM\sin\phi = a\sin\theta\sin\phi$$

$$x^3 = a\cos\theta$$

حيث $0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$

وإذا كانت $\phi = \phi(t), \theta = \theta(t)$ فإن النقطة p ترسم منحنى يقع على سطح الكرة. في الحالة الخاصة θ = const تعطى منحنيات العرض المتوازية Latitudes، ϕ = const تعطى خطوط الطول meridians.

مثال (١٣.٧):

أوجد معادلة المستوى المماس لسطح الكرة $S^2(a)$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a عند النقطة $(a,0,0)$ (هذه النقطة تناظر البارامترات $\phi=0$ ، $\theta=\frac{\pi}{2}$).

الحل:

المعادلة الاتجاهية لسطح الكرة (من (7.35)) تأخذ الشكل

$$\underline{r} = (a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta) \qquad (7.36)$$

حيث ϕ,θ هي الإحداثيات البارامترية على سطح الكرة.

بتفاضل المعادلة الاتجاهية (7.36) بالنسبة إلى ϕ,θ نحصل على

$$\underline{r}_\theta = (a\cos\theta\cos\phi, a\cos\theta\sin\phi, -a\sin\theta)$$

$$\underline{r}_\phi = (-a\sin\theta\ \sin\phi, a\sin\theta\cos\phi, 0)$$

وبالضرب الاتجاهي يكون لدينا

$$\underline{r}_\theta \wedge \underline{r}_\phi = a\sin\theta(a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta)$$

ومن (7.36) نحصل على

$$\underline{r}_\theta \wedge \underline{r}_\phi = a\sin\theta\underline{r} \qquad (7.37)$$

معادلة المستوى المماس لسطح الكرة عند النقطة p_o التي متجه الموضع لها هو $\underline{r}_o$ تعطى من

$$<(\underline{r} - \underline{r}_o), (\underline{r}_\theta \wedge \underline{r}_\phi)_{p_o}> = <(\underline{r} - \underline{r}_o), a\sin\theta\underline{r}_o> = 0, \theta \neq 0, \theta \neq \pi$$

وبالقسمة على $a\sin\theta$ نحصل على:

$$<(\underline{r} - \underline{r}_o), \underline{r}_o> = <\underline{r}, \underline{r}_o> - |\underline{r}_o|^2 = 0$$

$\therefore$ معادلة المستوى المماس هي ($\underline{r}$ متجه الموضع لنقطة عامة على المستوى المماس).

$$<\underline{r}, \underline{r}_o> = |\underline{r}_o|^2,\ r = (x^1, x^2, x^3) \in T_{p_o} S^2(a)$$

وإذا كانت $\underline{r}_o = (a,0,0)$ فإن معادلة المستوى تصبح $x^1 - a = 0$ وبالمثل فإن معادلة المستوى المماس عند النقطة $(0,a,0)$ هي $x^2 - a = 0$ وهو مستوى يوازي المستوى x^1x^3.

ملاحظة (١٠،٧):

التمثيل السابق لسطح الكرة يستخدم كنموذج لسطح الكرة الأرضية والإحداثيات θ , ϕ تحدد موقع نقطة على سطح الكرة وتحديد الإتجاهات وفروق التوقيت وتوزيع درجات الحرارة وهكذا من المفاهيم الجغرافية ولذا يسمى التمثيل الجيوغرافي Geographic Parameterization.

مثال (١٤،٧):

من المثال السابق يتضح أنه لا يمكن تحديد العمودي على سطح الكرة عند القطب الشمالي $(\theta = 0)$ والقطب الجنوبي $(\theta = \pi)$ حيث أنه في هذه الحالة يكون $r_\theta \wedge r_\phi = 0$ (من المعادلة (7.37)) أي أن r_θ , r_ϕ مرتبطين خطياً أو متوازيين وبذلك لا يمكن إيجاد المستوى المماس عند تلك النقط المذكورة.

(١٠،٧) النقاط الخاصة (الشاذة أو المفردة) على السطح:

Singular Points on a Surface

في العرض السابق لتعريف السطح المنتظم والتمثيلات المختلفة له من خلال تمثيل بارامتري أو من خلال دالة اتجاهية أو من خلال معادلة ضمنية بينا أن السطح المنتظم يحقق شرط تبعاً لنوع التمثيل فمثلاً:

(i) إذا كان السطح المنتظم معرف بالدالة الاتجاهية (بارامترياً)

$$R(u^1,u^2):D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow M\subset\mathbb{R}^3$$

فإنه يحقق

$$Rank\,(J)=Rank\,(\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(u^1,u^2)})=2 \qquad (7.38)$$

أو ما يكافئ (اتجاهياً) $R_1 \wedge R_2 \neq 0$

(ii) إذا كان السطح المنتظم معرف من خلال الدالة المنتظمة (الضمنية):

$$F(x^1,x^2,x^3)=0$$

فإنه يحقق

$$\therefore\ \nabla F=(\frac{\partial F}{\partial x^i})\neq 0 \qquad (7.39)$$

أو ما يكافئ

$$|\nabla F|=(\frac{\partial F}{\partial x^1})^2+(\frac{\partial F}{\partial x^2})^2+(\frac{\partial F}{\partial x^3})^2\neq 0$$

أي أنه على السطح المنتظم يجب أن يكون العمودي $R_1\wedge R_2$ معرف عند أي نقطة عليه.

تعريف (١٢.٧):

النقطة p على السطح المنتظم يقال أنها نقطة منتظمة (عادية) regular إذا كانت تحقق (7.38) أو (7.39) على حسب نوع التمثيل المناظر للسطح وخلاف ذلك يقال أن النقطة شاذة أو مفردة (غير عادية أوخاصة) singular point.

بناءً على هذا التعريف نجد أن النقطة الشاذة هي نقطة على السطح عندها حقل العمودي غير معرف أو بأسلوب آخر فإن الاتجاهات (المستوى المماس) غير محددة وهذا يكافئ أن مرتبة مصفوفة جاكوب للتحويل

$$R=R(u^1,u^2)=R(x^i(u^\alpha))$$

أقل من 2 أو انحدار (تدرج) gradient الدالة التفاضلية $F(x^i)=0$ يساوي الصفر وهذا يكافئ $\frac{\partial F}{\partial x^i}=0\ ,\ \forall i$

مثال (١٥.٧):

بين أن النقطة $(0,0)$ نقطة شاذة على السطح

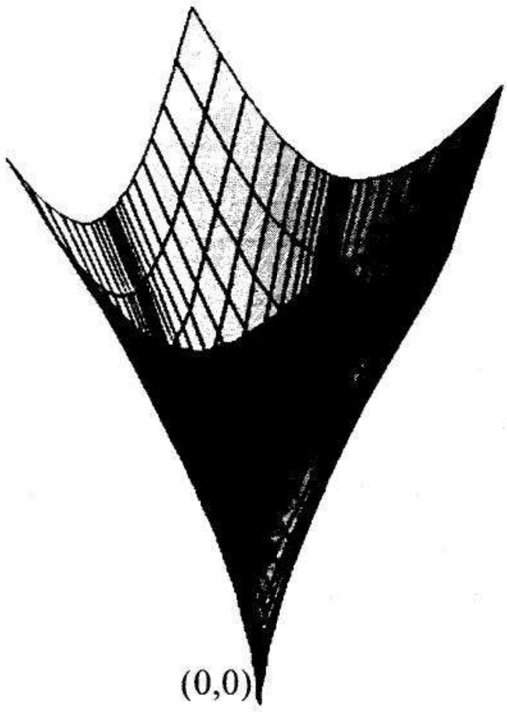
$$R(u^1,u^2)=((u^1)^3,(u^2)^3,((u^1)^6+(u^2)^6)^{1/3})$$

الحل:

نكون مصفوفة جاكوب للتحويل الإحداثي $(x^1,x^2,x^3) \longrightarrow (u^1,u^2)$
على الصورة:

$$J=\begin{bmatrix} 3(u^1)^2 & 0 & \frac{1}{3}(u^1)^6+(u^2)^6)^{-\frac{2}{3}}.6(u^2)^5 \\ 0 & 3(u^2)^2 & \frac{1}{3}(u^1)^6+(u^2)^6)^{-\frac{2}{3}}.6(u^2)^5 \end{bmatrix}$$

واضح أنه عندما $(u^1,u^2) \longrightarrow (0,0)$ فإن J تقترب من مصفوفة صفرية وبالتالي فإن $Rank\ J = 0 < 2$ إذاً النقطة $(0,0)$ نقطة شاذة على السطح كما هو موضح في شكل (٧-٢٠).



شكل (٧-٢٠)

مثال (١٦.٧):

بين أن النقطة $(0,0)$ نقطة شاذة على السطح

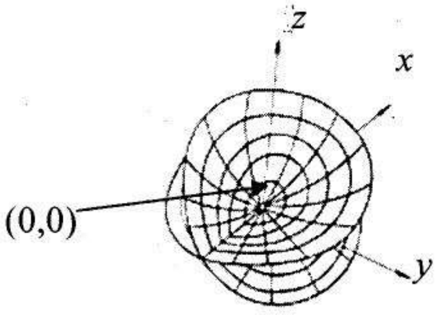
$$R(u^1,u^2)=((u^1)^2-(u^2)^2, 2u^1u^2, (u^1)^5)$$

الحل:

نكون مصفوفة جاكوب على الصورة:

$$J=\begin{bmatrix} 3u^1 & 2u^2 & 5(u^1)^4 \\ -2u^2 & 2u^1 & 0 \end{bmatrix}$$

عندما تقترب النقطة p من $(0,0)$ فإن J تصبح مصفوفة صفرية وبالتالي $R(J)<2$ أي أن النقطة $(0,0)$ على السطح هي نقطة شاذة كما هو موضح في شكل (٢١.٧).



شكل (٢١.٧)

مثال (١٧.٧):

بين أن كل نقاط الخط البارامتري $u^2=0$ هي نقاط شاذة على السطح

$$R(u^1,u^2)=(u^1,(u^2)^2,(u^2)^3)$$

الحل:

مصفوفة جاكوب للتحويل الإحداثي $(x^1,x^2,x^3)\longrightarrow(u^1,u^2)$ لها الصورة:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2u^2 & (3u^2)^2 \end{pmatrix}$$

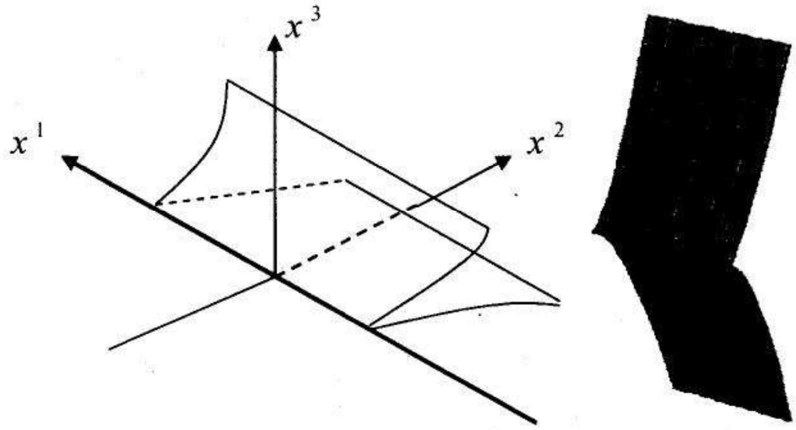
عندما $u^2 \to 0$ فإن

$$J \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أي أن $R(J) = 1 < 2$ وبالتالي فإن نقاط الخط البارامتري $u^2 = 0$ تقع على منحنى معادلته (نحصل عليها من معادلة السطح المعطى بوضع $u^2 = 0$) هي

$$R(u^1) = (u^1, 0, 0)$$

وهو خط مستقيم (مكون من نقاط شاذة) واقع على السطح (يسمى حرف مدبب cuspidal edge) كما هو موضح في شكل (٢٢.٧).



شكل (٢٢.٧)

مثال (١٨.٧):

بين أن النقطة $(0,0,0)$ نقطة شاذة بالنسبة للسطح

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$$

الحل:

السطح معطى بمعادلة ضمنية في x, y, z ولكن الدالة $F = 0$ حاصل ضرب دالتين إذاً كل منهما يساوي الصفر. أي أن المحل الهندسي (السطح) ممثل من الكرة

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{أو} \quad 1-x^2-y^2-z^2=0$$

والنقطة

$$x^2+y^2+z^2=0$$

وبحساب الانحدار ∇F للدالة نجد أنه يساوي الصفر عند نقطة الأصل o أي أن

$$(\frac{\partial F}{\partial x})_o=(\frac{\partial F}{\partial y})_o=(\frac{\partial F}{\partial z})_o=0$$

وهذا معناه أن النقطة $(0,0,0)$ نقطة شاذة.

ملاحظة (١١.٧):

النقطة الشاذة في المثال السابق تسمى نقطة شاذة منعزلة isolated singular point لأنها لا تقع على سطح الكرة بل هي مركز الكرة.

مثال (١٩.٧):

بين أن نقطة أصل الإحداثيات هي نقطة شاذة بالنسبة للمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المعادلة الضمنية

$$F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-2a^2(z^2-x^2-y^2)=0$$

الحل:

نقوم بحساب المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(x^2+y^2+z^2).2x-2a^2(-2x)$$

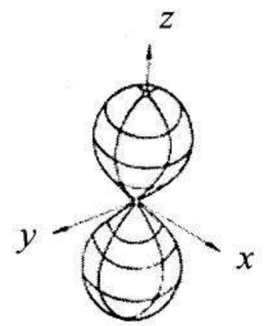
$$\frac{\partial F}{\partial y}=2(x^2+y^2+z^2).2y-2a^2(-2y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2(x^2+y^2+z^2).2z-2a^2(2z)$$

واضح أن $|\nabla F|$ ينعدم عند النقطة $(0,0,0)$ لأن

$$(\frac{\partial F}{\partial x})_o = (\frac{\partial F}{\partial y})_o = (\frac{\partial F}{\partial z})_o = 0$$

أي أن نقطة الأصل نقطة شاذة كما هو موضح في شكل (٧.٢٣).



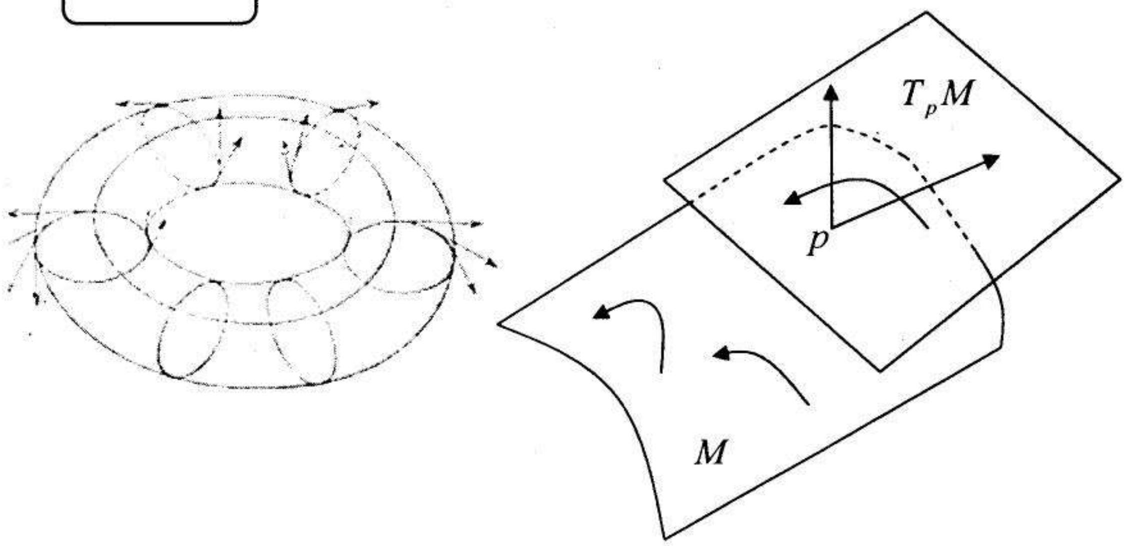
شكل (٧.٢٣)

ملاحظة (١٢.٧):

النقطة الشاذة في المثال السابق تسمى نقطة مخروطية canonical point لأن أحد أجزاء المحل الهندسي يمثل مخروط وله المعادلة $z^2 - x^2 - y^2 = 0$.

(١١.٧) توجيه السطح: Orientation of the Surface

في هذا الجزء نناقش بأي مفهوم يمكننا توجيه السطح. بديهياً وبما أن أي نقطة p على سطح منتظم $M: x = x(u^1, u^2)$ يكون لها مستوى مماس T_pM واختيار أي توجيه للمستوى T_pM يحدث توجيه في المنطقة المجاورة للنقطة p بمعنى الاتجاه الموجب للحركة على امتداد منحنيات مغلقة وصغيرة صغر كافٍ حول كل نقطة من منطقة الجوار المباشر كما هو موضح في شكل (٧.٢٤).



شكل (٧-٢٤)

تعريف (١٣.٧):

يقال أن السطح M موجه oriented إذا كان من الممكن عمل هذا التوجيه لكل نقطة $p \in M$ بحيث في تقاطع أي جوارين مباشر للنقطة p يتطابق التوجيه (أي لا يتغير) إذاً يقال أن السطح M موجه orientable وإذا لم نتمكن من ذلك فإن السطح M يقال أنه غير موجه nonorientable.

العرض السابق يمكن صياغته بالشكل الآتي:

إذا قمنا بتغيير البارامترات الإحداثية (u^1, u^2) إلى $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ من خلال التحويل

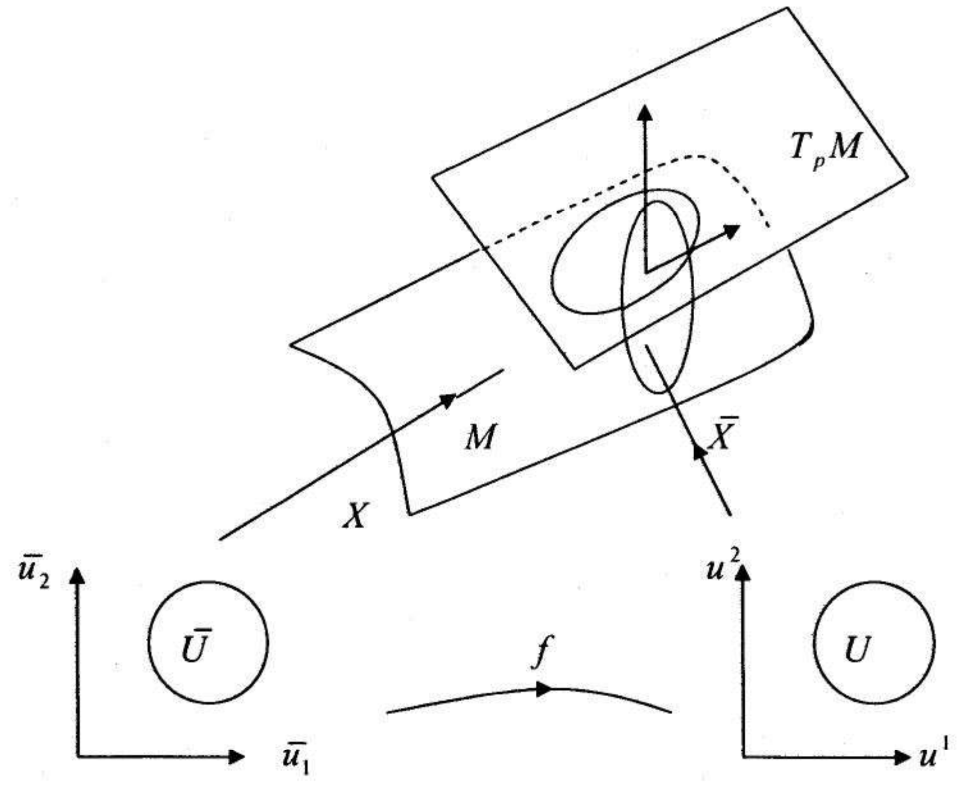
$$u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

فإن المستوى المماس المولد بالمتجهات X_{u^1}, X_{u^2} يتطابق مع المستوى المماس المولد بالمتجهات $X_{\bar{u}^1}, X_{\bar{u}^2}$ وهذا يتحقق إذا كان وكان فقط محدد جاكوب للتحويل $Det\left(\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}\right)$ موجب وهذا يعني أن العمودي $N(u^1, u^2)$ على السطح يغير اتجاهه أو لا يغير طبقاً لإشارة محدد الجاكوبيان.

هذا العرض يقودنا إلى تعريف محدد على الصورة:

تعريف (١٤.٧):

السطح المنتظم M يقال أنه موجه إذا أمكن تغطيته بعائلة من الرقع الإحداثية $\{U_i\}$ coordinates patches بحيث إذا كانت p تقع في التقاطع $U_1 \cap U_2$ مثلاً فإن تغير الإحداثيات البارامترية U_1 إلى U_2 يكون محدد جاكوب له موجب. اختيار مثل هذه العائلة من الرقع يسمى توجيه orientation للسطح M والسطح في هذه الحالة يقال أنه موجه خلاف ذلك يقال أن السطح غير موجه (الرقع الإحداثية نعني بها التمثيلات البارامترية أو الإحداثية) كما هو موضح في شكل (٢٥.٧).



شكل (٢٥.٧)

مثال (٢٠.٧):

السطح الممثل بدالة اتجاهيه تفاضلية في متغيرين هو سطح موجه. في الحقيقة كل السطوح التي يمكن أن تغطى بغطاء واحد هي موجهه بديهياً trivially orientable.

مثال (٢١.٧):

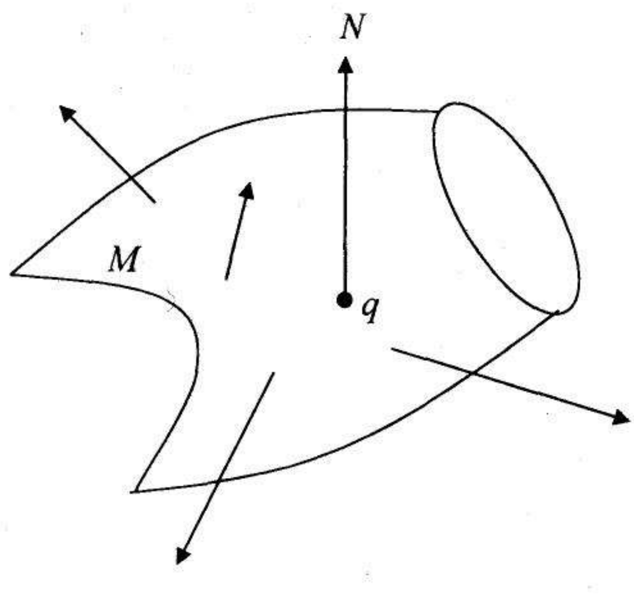
الكرة سطح موجه لأنها تغطى بغطاء جيوجرافي.

تعريف (١٥.٧):

حقل متجهات الوحدة العمودي التفاضلي المعرف على منطقة مفتوحة $U \subset M$ من سطح منتظم هو راسم تفاضلي من U إلى الفراغ الثلاثي حيث

$$N : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

والتي تحدد لكل نقطة $q \in U$ متجه وحدة $N(q) \in \mathbb{R}^3$ عمودي على M عند q كما هو موضح في شكل (٢٦.٧).



شكل (٢٦.٧)

تعريف (١٦.٧):

السطح المنتظم $U \subset M$ يقال أنه موجه إذا كان وفقط إذا وجد حقل متجه وحدة عمودي تفاضلي $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ على M (أي أن الحقل N ليست له نقاط شاذة).

مثال (٢٢.٧):

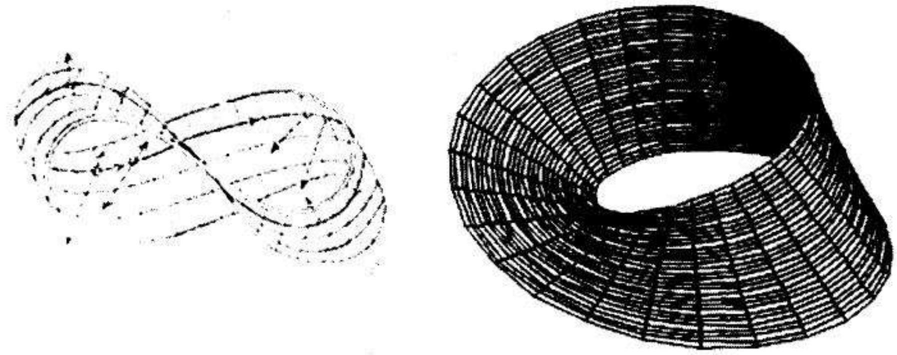
سطح شريط مبيس Möbius strip غير موجه.

الحل:

سطح شريط مبيس له التمثيل البارامتري

$$R(u^1,u^2)=((2-u^2\sin\frac{u^1}{2})\sin u^1,(2-u^2\sin\frac{u^1}{2})\cos u^1,u^2\cos\frac{u^1}{2})$$
$$,\ 0<u^1<2\pi,-1<u^2<1$$

وبحساب حقل متجه الوحدة العمودي $N(u^1,u^2)$ نجد أنه يغير من إشارته من منطقة إلى أخرى كما هو موضح في شكل (٢٧.٧).



شكل (٢٧.٧)

مثال (٢٣.٧):

بين أن السطح المنتظم المعرف من خلال الدالة الضمنية التفاضلية $F(x, y, z) = 0$ هو سطح موجه.

الحل:

سبق وأن بينا أن حقل متجه الوحدة العمودي على السطح $M : F(x, y, z) = 0$ يعطى من

$$N(x, y, z) = \left(\frac{F_x}{\sqrt{|\nabla F|}}, \frac{F_y}{\sqrt{|\nabla F|}}, \frac{F_z}{\sqrt{|\nabla F|}}\right)$$

وهو حقل متجه تفاضلي وبالتالي فإن السطح M موجه لأن F ومشتقاتها دوال تفاضلية.

ملاحظة (١٣.٧):

التوجيه ليس خاصية محلية locally للسطح المنتظم بل هو خاصية موسعة globally بمعنى أنها تشمل السطح كله. حيث أنه من تعريف السطح المنتظم نجد أنه يكافئ توبولوجياً diffeomorphic منطقة مفتوحة من المستوى من خلال الراسم

$$R : (u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

ومثال لسطح موجه مبين في شكل (٢٨.٧) وهو سطح السرج الذي تمثيله البارامتري

$$x(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

أو في الشكل الضمني

$$F(x, y, z) = z - x^2 + y^2 = 0$$

شكل (٢٨.٧)

تمارين (٧)

(١) أوجد معادلة المستوى المماس لمجسم القطع الناقص $\sum_{i=1}^{3} (\frac{x^i}{a_i})^2 = 1$ عند النقطة $(0,0,a_3)$ وكذلك معادلة العمودي على السطح عند هذه النقطة.

(٢) أثبت أن المستويات المماسية للسطح المعرف بالعلاقة $x^3 = x^1 f(\frac{x^2}{x^1})$ تمر بنقطة الأصل لنظام الإحداثيات الكرتيزية.

(٣) أثبت أن السطوح الثلاثة $\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 = a_j x^j, j = 1,2,3$ تتقاطع على التعامد فيما بينها (كور مراكزها تقع على محاور الإحداثيات وأنصاف أقطارها $\frac{a_j}{2}$ وتمس مستويات الإحداثيات x^2x^3 ، x^1x^3 ، x^1x^2 على الترتيب)

(**إرشاد** : السطوح الثلاث تتقاطع على التعامد إذا كانت المستويات المماسية لها تتقاطع على التعامد عند نقاط التقاطع أي أن الأعمدة على المستويات المماسية متعامدة).

(٤) أثبت أن الأعمدة على السطح

$x^1 = f(u^1)\cos u^2,\ x^2 = f(u^1)\sin u^2, x^3 = g(u^1)$ تقطع محور ox^3 .

(**إرشاد** : أوجد معادلة العمودي وعين نقطة تقاطعه مع محور ox^3 إن وجدت).

(٦) أوجد معادلة العمودي عند النقطة $(0,0,1)$ على السطح

$$\Phi(x,y,z) = ze^{xy} - x - y - 1 = 0$$

(**إرشاد** : اتجاه العمودي هو $\nabla\Phi$)

(٧) أوجد معادلة المستوى المماس عند النقطة $(0,1,1)$ للسطح

$$F(x,y,z) = x\cos y - y\cos x + z = 0$$

(٨) أوجد النقاط الشاذة (المفردة) على السطح $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$

(**إرشاد:** النقاط الشاذة هي النقاط التي تجعل $\nabla F = 0$ أي أن حقل المتجه العمودي يكون متجه صفري)

(٩) أوجد النقاط التي لا يمكن تحديد المستوى المماس عندها للسطح $x^2y^2 = z$

(**إرشاد:** المستوى المماس لا يمكن تحديده إذا كان العمودي على السطح غير معرف والمطلوب هو تحديد النقطة التي يكون عندها العمودي غير معرف).

(١٠) أوجد إنحناء المنحنى $u = v$ على السطح $r(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ ومن ثم أوجد الزاوية بين العمودي N على السطح والعمود الأساسي n على المنحنى.

(١١) أوجد المنحنى $u = v$ على السطح $r(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$ وأوجد معادلة المماس له عند النقطة $(a, 0, 0)$

(**إرشاد:** المنحنى الناتج بوضع $u = v$ في معادلة السطح هو منحنى حلزون دائري).

(١٢) بين أن النقاط الشاذة على امتداد خط u^2 البارامتري $(u^1 = \frac{\pi}{2})$ تمثل حرف مدبب على السطح شبه الكروي Pseudo-sphere

$$R(u^1, u^2) = (\sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2, \cos u^1 + \ln\tan\frac{u^1}{2})$$

(١٣) أوجد التمثيل البارامتري المنتظم للأسطوانة المقامة على المنحنى $y = f(x)$.

(١٤) أوجد التمثيل البارامتري المنتظم للأسطوانة الدائرية $x^2 + y^2 = 1$.

(١٥) أوجد التمثيل البارامتري للسطح المكون من الأعمدة لمنحنى فراغ منتظم.

(١٦) أوجد تمثيل بارامتري منتظم للمخروط المزدوج $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

(١٧) أوجد التمثيل البارامتري للسطح المكون من المماسات لمنحنى فراغ منتظم.

(١٨) هل السطح $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ كل نقاطه نقاط منتظمة.

(١٩) بين أن مجموع مربعات الأجزاء التي يقطعها المستوى المماس للسطح

$$R(u,v) = (u^3 \sin^3 v, u^3 \cos^3 v, (a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}})$$

من محاور الإحداثيات يكون ثابت دائماً.

(**إرشاد:** أوجد معادلة المستوى المماس عند أي نقطة عامة (u_o, v_o) واستخدم نفس الأسلوب في مثال (٧.٧)).

(٢٠) بين أن المجسم الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

سطح منتظم وأوجد تمثيل بارامتري منتظم له.

(**إرشاد:** استخدم تعريف السطح المنتظم من خلال دالة ضمنية).

(٢١) بين أن المستويات المماسية للسطح $z = y f(\frac{y}{x})$ تتلاقى في نقطة concurrent.

(**إرشاد:** أوجد معادلة المستوى المماس كما في أي مثال وضع بعد ذلك الحد المطلق يساوي الصفر وعين نقطة التلاقي).

(٢٢) أوجد النقاط الشاذة على السطح

$$R(u^1, u^2) = (u^1, u^2, u^1 u^2)$$

(**إرشاد:** كون مصفوفة جاكوب وأكمل كما في أي مثال).

(٢٣) أوجد النقاط الشاذة إن وجدت على السطح

$$R(u^1,u^2)=(u^2+\cos u^1,u^2+\sin u^1,u^1)$$

(٢٤) أوجد معادلة العمودي على السطح

$$R(u,v)=(u\cos v,u\sin v,2v)$$

ومن ثم أوجد المستوى المماس له عند $(0,0,2)$ وأوجد نقاطه الشاذة إن وجدت.

(٢٥) هل السطح $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$ موجه؟

(٢٦) بين أن السطح $z=x^2+y^2$ موجه وأوجد نقاطه الشاذة إن وجدت.

(٢٧) أوجد حقل متجه الوحدة العمودي على السطح

$$F(x,y,z)=x^2+3xy+y^2+z^2+2xz+yz-5=0$$

ومن ثم أوجد المستوى المماس له عند النقطة $(0,\sqrt{5},0)$.