South valley University

Faculty of science-Qena
Mathematics Department

الكلية: كلية التربية بالعردقة

المقرر: رياضيات – جزء التطبيقية

الفرقة: الأولي – شعبة الفيزياء و الكيمياء

البرنامج: اللغة العربية

الفصل الدراسي: الثـــــــاني

المحاضر: أ. د. جمال عبدالله أحمد حشودي

الرياضيات
الديناميكا

ا.د مهدى

الفرقة الأولى

كلية التربية
قسم فيزياء وكيمياء

تمهيد

أفضلُ ما أبدأ به هو حمدُ اللهِ بما هو أهله وأصلي وأسلم على من لانبي بعده سيدنا محمد عليه وعلى آله وصحبه.

لا شك أن هناك عدداً لا يُعد و لا يُحصى من الاجسام الي تتحرك على الأرض بينما الأرض بدورها تدور حول محورها متنقلةٍ في الفضاء في مدارها حول الشمس كما أن الشمس و معها مجموعة الكواكب تنتقل في الفضاء بين عدد هائل من النجوم المتحركة في الفضاء " وكل في فلك يسبحون"...حتى أننا لو تأملنا أدق جزء من المادة – الذرة – لوجدناها تموج بالحركة شأنها شأن المجموعة الشمسية ... وهكذا.

تنشأ حركة المادة بتغير المكان و الزمان ولذا لا يمكن فصل المكان و الزمان عن المادة المتحركة ، و لذلك عندما يغير جسم موضعه بالنسبة لغيره من الاجسام نقول أن الجسم في حالة حركةو يسمس هذا التغير النسبي في موضع الجسم بـ "الحركة الميكانيكية" ، كما يسمى العلم المختص بقوانين الحركة بـ " لم الميكانيكا".

فالميكانيكا علم يبحث في الحركة النسبية للاجسام مستقصياً مقوماتها وشتى صورها و لا تقتصر أهمية هذا العلم على النواحي الطبيعية و الفلسفية بل تتعدى ذلك إلى كونها أحد الأركان الاساسية في بناء وتطوير العلوم الهندسية.

لقد أنفقت البشرية آلاف السنين على تعليلات علمية لبعض الظواهر الميكانيكية. غير أن ما نسميه "الميكانيكا الكلاسيكية" يرجع إلى عَلَمين من أعلام القرن السابع عشر هما العالم جاليليو جاليلي (١٥٦٤-١٦٤٢) "**Galileo Galilei**" والذي اكتشف مبدأ القصور ، والسير اسحاق نيوتن)١٦٤٢-١٧٢٧) "**Isaac Newton**" وقد شاهد القرن الثامن عشر تقدماً كبيراً في ميكانيكا السوائل على يد دانيال برنولي "**Daniel Bernoulli**" (١٧٠٠-١٧٨٢)، كما حدثت طفرة أخرى على يد العالم جوزيف لويس كونت دي لاجرانج (١٧٦٣-١٨١٣) **Joseph-Louis Lagrange** فيما يسمى بـ الميكانيكا التحليلية. ثم خطت الميكانيكا خطوةً أخرى في بداية القرن العشرين على يد العالم ألبرت أينشتين " **Albert**

"Einstein" (١٨٧٩-١٩٥٥) بإدخال مفهوم النسبية. كما نشط البحث في النصف الأول من من القرن العشرين فيما يسمى بـ ميكانيكا الكم و الميكانيكا الموجية و ذلك لتفسير بعض الظواهر الطبيعية التي عجزت الميكانيكا الكلاسيكية عن تفسيرها.

هذا وينقسم علم الميكانيكا بوجه عام إلى فرعين أساسيين هما الاستاتيكا والديناميكا.

وتبحث الاستاتيكا في اتزان الاجسام تحت تأثير القوى ،أما الديناميكا فتبحث في وصف الحركة ودراسة مقوماتها وتنقسم بدورها إلى الكينماتيكا والكينتيكا

فالكينماتيكا هو علم وصف الحركة وصفاً مجرداً دون التعرض للقوى المسببة لهذه الحركة والكينتيكا يبحث في تكييف القوى للحركة.

مرةً أخرى تنقسم الميكانيكا من ناحية نوع المادة موضوع الدراسة إلى ميكانيكا الجسيمات والاجسام المتماسكة ، ميكانيكا المرونة واللدونة و ميكانيكا الموائع.

تنقسم ميكانيكا الموائع إلى ميكانيكا السوائل وديناميكا الغازات.

وعلى أية حال فإن دراسة كينماتيكا أو كينتيكا الجسيم المادي يمكن أن تتم في واحد من ثلاثة فضاءات – فضاء أحادي البعد (الحركة في خط مستقيم) ، فضاء ثنائي البعد (الحركة في مستوى) و فضاء ثلاثي الأبعاد (الحركة في الفراغ). وأخيراً فإن دراسة الحركة تتطلب اختيار نوع مناسب من الاحداثيات التي تتوافق مع نوع الحركة.

إن كان من توفيق فمن الله وإن كان من خطأ فمن نفسى ومن الشيطان عصمنا الله وإياكم

كينماتيكا الجســــــــيم

Kinematics of a Particle

لدراسة الظواهر الطبيعية للحركة بطريقة علمية يتعين علينا أن نتخذ صوراً ذهنية عن الصفات الميكانيكية للاجسام المتحركة دون غيرها من الصفات قليلة الأهمية في دراستنا للحركة. وعلى ذلك بُنيت التعاريف الأساسية و نُورد أهمها فيما يلي:

الجسيم: هو جزء معين من المادة و تعرف فيما يلي أنواع الاجسام

■ الجسيم أو النقطة المادية Particle or Mass Point

هو جزء من المادة و يشغل حيزاً صغيراً في الفراغ و يسمى النقطة المادية و نعتبر الجسيم إذا كانت صفات الجسيم من حيث الشكل أو الحجم غير ذات موضوع في دراستنا.

■ الجسم المتماسك Rigid Body

و هو جزء معين من المادة يظل حجمه و شكله بدون تغيّر مهما كانت القوى المـــؤثرة عليـــه حيث تبقى المسافة بين أي نقطتين من نقاطه بدون تغيير أي أن الجسم المعنيّ بالدراسة يُعتـــبر متماسكاً إذا كان ما يعتريه من تغيرات في الشكل أو الحجم لا أهمية لا في الدراسة.

■ الجسم المرن Elastic Body

هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية بفعل القوى المؤثرة عليـــه غـــير أنـــه يســـترجع صورتهاالأصلية بمجرد زوال هذه القوى.

■ الجسم اللدن Plastic Body

و هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية غير أنها –التغيرات– غير مسترجعة.

■ الاطار الانتسابي (الفراغ الأقليدي) Reference Frame

و هو فراغ ثلاثي الأبعاد – الطول و العرض و الارتفاع – ويفرض فيه ثبات المسافاتمن نقطة إلى أخرى و عدم تغيرها بوجود المادة أو حدوث حركة فيه. و تقاس المسافات بمقاييس معينة متفق عليها عالمياً ولتحديد الموضع (النسبي) في الفراغ يُختار هيكل أو اطار متماسك مـــن

ثلاثة محاور متلاقية في نقطة معينة – تُسمى نقطة الأصل – و يسمى هيكل رصد الحركة ويتم تحديد موضع النقطة المادية بمعرفة أبعادها الثلاثة بالنسبة لهذا الهيكل و يفضل غالباً الاستعانة بهيكل رصد متعامد المحاور.

■ الزمن Time

و هو يعبر عن الفترة الزمنية بين حدثين و لقد افترضت الميكانيكا الكلاسيكية أو ميكانيكا نيوتن صفة مطلقة لكل من الزمن و الفراغ بمعنى أنهما لا يتغيران بتغير المشاهد ولا يتأثرا بحركة الراصد و هو ما نفاه ألبرت أينشتين في نظريتة النسبية.

■ الكلتة Mass

و تُعرف على أنها تلك المادة الموجودة في جسم ما ويرمز لها عادةً بالرمز m .

كينماتيكا الجسيم في بعد واحد Kinematics of a Particle in One Dimension

أو الحركة في خط مستقيم Rectilinear Motion

■ السرعة و العجلة Velocity and Acceleration

نعلم أنه عندما يتحرك جسيم (نقطة مادية) في خط مستقيم فإن موضعه بالنسبة لنقطة ثابتة O – نقطة الأصل – يتغير من نقطة إلى أخرى. باعتبار أن الجسيم احتل الموضع عند النقطة A و على بعد x من نقطة الأصل O عند اللحظة الزمنية t ثم انتقل إلى الموضع عند النقطة B و التي تبعد $x+\delta x$ عن نقطة الأصل عند اللحظة الزمنية $t+\delta t$ ومن ثم فإن متوسط سرعة الجسيم في قطع المسافة AB هو $\dfrac{\delta x}{\delta t}$. و إذا أردنا تعيين سرعة الجسيم v عند النقطة A نحسب قيمة $\dfrac{\delta x}{\delta t}$ عندما تقترب δt من الصفر أي عندما تقترب النقطة A من النقطة B ويُعبر عن ذلك رياضياً كالتالي

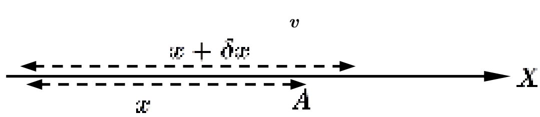
$$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

وتُعرف سرعة الجسيم v بأنها معدل التغير في الازاحة بالنسبة للزمن و تُكتب $v = \dfrac{dx}{dt}$ ، أما العجلة a فتعرف على أنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن والتي تكتب على الصورة الرياضية

$$a = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

ومن قاعدة السلسة في حساب التفاضل يمكن كتابة العجلة على الصورة

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$



وهذه العلاقة من العلاقات الهامة في حل بعض المسائل، وحيث أن الازاحة والسرعة و العجلة هي كميات متجهة فيمكن تطبيق قوانين المتجهات عليها من جمع و طرح وتحليل الاتجاهات و.....

■ تذكر أن

يمكن أن تُعطى عجلة الجسيم a في المسائل كدالة في الزمن t أو دالة في المسافة x أو دالة في السرعة v

١- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في الزمن t مثلا $a = \varphi(t)$

$$\begin{aligned} a = \varphi(t) \qquad & \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi(t) \\ & \Rightarrow dv = \varphi(t)dt \\ & \Rightarrow v = \int \varphi(t)dt + c_1 \end{aligned}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} \because \quad v &= \int \varphi(t)dt + c_1 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \int \varphi(t)dt + c_1 \\ \Rightarrow dx &= \int \varphi(t)dt + c_1 \quad dt \\ \therefore x &= \int \quad \int \varphi(t)dt + c_1 \quad dt + c_2 \end{aligned}$$

٢- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في المسافة x مثلا $a = f(x)$

$$\begin{aligned} a = f(x) \qquad & \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = f(x) \\ & \Rightarrow vdv = f(x)dx \\ & \Rightarrow v^2 = 2\int f(x)dx + c_3 \end{aligned}$$

ايضاً

$$\begin{aligned} \because \quad v^2 &= 2\int f(x)dx + c_3 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \mp\sqrt{2\int f(x)dx + c_3} \\ \Rightarrow \mp\frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx + c_3}} &= dt \\ \Rightarrow t + c_4 &= \mp\int \frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx + c_3}} \end{aligned}$$

٣- أخيراً إذا كانت العجلة معطاة كدالة في السرعة v مثلا $a = \varphi(v)$ فإن

$$a = \varphi(v) \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi(v)$$

بالتكامل

$$\Rightarrow \frac{dv}{\varphi(v)} = dt$$

$$\Rightarrow t = \int \frac{dv}{\varphi(v)} + c_5$$

أو باستخدام العلاقة

$$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \varphi(v)$$

$$\Rightarrow \frac{vdv}{\varphi(v)} = dx$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{vdv}{\varphi(v)} + c_6$$

حيث $c_1 - c_6$ ثوابت التكامل و يمكن تعيينها من شروط الحركة المعطاة في المسألة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة يتعين من $x = t^3 + 2t^2$. أوجد مقدار كل من السرعة و العجلة بعد مضي ثانية واحدة.

الحـــــــل

يمكن تعيين السرعة والعجلة كالآتي

السرعة $\because v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 + 4t$

العجلة $\because a = \dfrac{dv}{dt} = 6t + 4$

وبعد مضي ثانية واحدة يكون مقدار السرعة 7 ومقدار العجلة 10 من الوحدات.

مثـــ ٢ ـــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة زمنية يتعين من $x = t^3 - 3t^2$. أوجد مقـــدار كل من السرعة و العجلة عند أي لحظة ، متى تنعدم كل من السرعة والعجلة وما هو موضع الجسيم عندما تكون سرعته 24 .

الحـــــــل

السرعة والعجلة للجسيم عند أي لحظة تتعين من

السرعة $\because v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

العجلة $\because a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 6 = 6(t-1)$

هاتان العلاقتان تعطيان السرعة والعجلة كدوال في الزمن ولتعيين زمن انعدام السرعة والعجلة نساويهما بالصفر أي أن

$$0 = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \qquad \Rightarrow t = 0 \quad \text{Or} \quad t = 2$$

$$0 = 6t - 6 = 6(t-1) \qquad \Rightarrow t = 1$$

أي أن سرعة الجسيم تساوي صفر عند بداية الحركة وبعد مضي ثانيتين وتنعدم العجلة بعد مضي ثانية واحدة. تكون سرعة الجسيم مساوية 24 عند زمن يتعين من

$$24 = 3t^2 - 6t \qquad \Rightarrow 3t^2 - 6t - 24 = 0 \quad \text{Or} \quad t^2 - 2t - 8 = 0$$
$$\Rightarrow (t+2)(t-4) = 0 \qquad \therefore t = 4$$

وتكون سرعة الجسيم مساوية 24 بعد مرور أربع ثوان ويكون موضع الجسيم – بالتعويض في دالة الموضع – $x\big|_{t=4} = 4^3 - 3(4)^2 = 16$ ويهمل الزمن السالب.

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كان موضعه عنـــد أي لحظـــة زمنيـــة يـــتعين مـــن $x = 2\ 1 - e^{-t}$ حيث t يمثل الزمن ، أوجد السرعة كدالة في المسافة والعجلة كدالة في السرعة.

الحـــــــل

لتعيين سرعة الجسيم نشتق دالة الموضع بالنسبة للزمن ومن ثم

$$x = 2\ 1 - e^{-t} \qquad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 2e^{-t} \qquad \text{Note} \quad \frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\because x - 2 = -2e^{-t} \qquad \Rightarrow v = 2 - x$$

وهذه العلاقة تعطي السرعة كدالة في المسافة ولايجاد العلاقة بين العجلة والسرعة

$$\because a = v\frac{dv}{dx} = v(-1) = -v \qquad \text{Note} \quad \frac{dv}{dx} = -1 \quad \therefore a = -v$$

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $x = b - b\cos kt$ حيث b, k ثابتان ، أوجـــد السرعة و العجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة ثم أوجد أقصى بعد للجسيم عن نقطة الأصل.

الحـــــــل

السرعة والعجلة يتعينان كالآتي

$$x = b - b\cos kt \quad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = bk\sin kt \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} = bk^2 \cos kt$$

ولايجاد العجلة كدالة في المسافة حيث أن

$$\because b\cos kt = b - x \qquad \Rightarrow a = k^2 \;\; b - x$$

ولايجاد أقصى بعد أي أكبر ما يمكن يتحقق هذا حينما يكون المقدار $a\cos kt$ أقل ما يمكـــن ويحدث هذا حينما $\cos kt = -1$ أي أن $x_{\max} = b - b(-1) = 2b$ هناك طريقة أخرى.

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $v = u + bx$ حيث u, b ثابتان ، أوجد السرعة والعجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة وكدالة في السرعة.

الحـــــــــل

السرعة والعجلة يتعينان بتفاضل الموضع ثم السرعة بالنسبة للزمن

$$v = u + bx \quad \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = b\frac{dx}{dt} = bv = b(u + bx)$$

هذه العلاقة تُعطي العجلة كدالة في السرعة $a = bv$ وكدالة في المسافة $a = b(u + bx)$

وللحصول على السرعة والعجلة كدوال في الزمن حيث أن

$$\because v = u + bx \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = b(u + bx) \qquad \Rightarrow \frac{dx}{u + bx} = bdt$$

وباجراء التكامل بعد ضرب طرفي المعادلة في b يكون

$$\int \frac{bdx}{u + bx} = \int b^2 dt \quad \Rightarrow \ln(u + bx) = b^2\, t + C$$

حيث C ثابت التكامل ، يمكن كتابة العلاقة الاخيرة في الصورة

$$\because \ln(u + bx) = b^2\, t + C \qquad \therefore \ln v = b^2\, t + C \quad \text{Or} \quad v = Ae^{b^2 t}, \quad A = e^C$$

وهي علاقة السرعة بالزمن و العجلة بالزمن ايضاً من العلاقة $a = bAe^{b^2 t}$

مثـــ ٦ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بعجلة $6t + 2 \quad \mathrm{ft\,sec}^{-2}$ حيث t يمثل الزمن ، فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل وأصبحت سرعته 5 بعد مضي ثانية واحدة عين موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

الحـــــل

حيث أن العجلة تعطى بالعلاقة $a = 6t + 2$ وللحصول على السرعة نستبدل a بـ $\dfrac{dv}{dt}$ ثم بفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dv}{dt} = 6t + 2 \qquad \Rightarrow dv = (6t + 2)dt$$

$$\int dv = \int (6t + 2)dt + c_1 \qquad\qquad \therefore v = 3t^2 + 2t + c_1$$

حيث c_1 ثابت التكامل ويعين من الشروط الابتدائية و هي $v = 5$ عندما $t = 1$ وبالتعويض في معادلة السرعة نجد أن $\therefore c_1 = 0 \quad 5 = 3(1)^2 + 2(1) + c_1$ أي أن صيغة السرعة تصبح على الصورة $\therefore v = 3t^2 + 2t$ وللحصول على دالة الموضع نضع $\dfrac{dx}{dt} = v$ أي أن

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2t \qquad \Rightarrow dx = (3t^2 + 2t)dt \qquad \text{Or} \qquad x = t^3 + t^2 + c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 نستخدم الشرط وهو أن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل أي أن عندما $t = 0$ كانت $x = 0$ ويؤدي هذا $\therefore c_2 = 0 \quad 0 = 0^3 + 0^2 + c_2$ و يصبح موضع الجسيم عند أي لحظة في الصورة $x = t^3 + t^2$ و بعد خمس ثواني يكون $x\big|_{t=5} = 150$.

مثـــ ٧ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تتعين من العلاقة $a = -2v^2$ حيث a تمثل العجلة ، v هي السرعة. أوجد موضع الجسيم عند أي لحظة علماً بأن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل بسرعة قدرها الوحدة.

الحـــــل

نلاحظ أن العجلة تقصيرية وحيث أن $a = \dfrac{dv}{dt}$ فإن

$$\because a = -2v^2 \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2v^2$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$-\int \frac{dv}{v^2} = \int 2dt + c_1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{v} = 2t + c_1$$

حيث ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 1$ عندما $t = 0$ ومنها $\therefore c_1 = 1 \quad 1 = 2(0) + c_1$ وتتعين سرعة الجسيم تبعاً لذلك من العلاقة

$$\frac{1}{v} = 2t + 1 \quad \text{but} \quad v = \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dt}{dx} = 2t + 1 \quad \text{Or} \quad \frac{dt}{2t+1} = dx$$

وباجراء التكامل نحصل على

$$\frac{2dt}{2t+1} = 2dx \quad \Rightarrow \ln(2t+1) = 2x + c_2$$

من اشرط الابتدائي للحركة وهو $x = 0$ عندما $t = 0$ أي $c_2 = 0$ وتصبح صيغة العلاقة بين المسافة والزمن $x = \dfrac{1}{2}\ln(2t+1)$ ومنها يمكن ايجاد المسافة المقطوعة بعد مضي أي زمن.

مثـــال ٨

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تقصيرية تتعين من العلاقة $-4x^{-3}$ فإذا بدأ الجسيم في التحرك من السكون من موضع على بعد h من نقطة الأصل فاثبت أنه يصل إلى مســـافة ℓ من نقطة الأصل في زمن قدره $\dfrac{h}{2}\sqrt{h^2 - \ell^2}$ ثم أوجد سرعته عند هذا الموضع.

الحـــــــل

حيث أن $a = -16x^{-3}$ وايضاً $a = v\dfrac{dv}{dx}$ ومن ثم يكون

$$\therefore v\frac{dv}{dx} = -4x^{-3} \qquad \Rightarrow vdv = -4x^{-3}\ dx$$

باجراء التكامل

$$\therefore \int vdv = -\int 4x^{-3}\ dx + c_1 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{2}v^2 = \frac{2}{x^2} + c_1 \quad \text{Or} \quad v^2 = \frac{4}{x^2} + c$$

ويتعين الثابت c من الشرط الابتدائي و هو $v=0$ عندما $x=h$ وبالتالي $0=\frac{4}{h^2}+c$

أي أن $c=-\frac{4}{h^2}$ وبالتالي

$$v^2=\frac{4}{x^2}-\frac{4}{h^2}=\frac{4(h^2-x^2)}{x^2h^2} \qquad \therefore v=\pm\frac{2}{h}\frac{\sqrt{h^2-x^2}}{x}$$

وسنعتبر الاشارة السالبة لأن حركة حركة الجسيم نحو نقطة الأصل – أي في اتجاه تناقص x –

وحيث أن $v=\frac{dx}{dt}$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=-\frac{2}{h}\frac{\sqrt{h^2-x^2}}{x} \qquad \Rightarrow -\frac{xdx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\frac{2}{h}dt \quad \text{Or}$$

$$\Rightarrow -\int\frac{xdx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\int\frac{2}{h}dt+c_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{h^2-x^2}=\frac{2}{h}t+c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 حيث أن $x=h$ عندما $t=0$ وبالتالي $c_2=0$ أي أن

$$\therefore \sqrt{h^2-x^2}=\frac{2}{h}t \qquad \text{Or} \qquad t=\frac{h}{2}\sqrt{h^2-x^2}$$

والزمن الذي يستغرقة الجسيم حتي يصل إلى مسافة ℓ هي $t=\frac{h}{2}\sqrt{h^2-\ell^2}$

وللحصول على مقدار السرعة عند هذا الموضع نعوض عن $x=\ell$ في علاقة السرعة

$$v\Big|_{x=\ell}=\frac{2\sqrt{h^2-\ell^2}}{h\ell}$$

مثـــ ٩ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين السرعة والموضع والزمن يـــتعين مـــن $v=(1+x^2)t$ ، أوجد المسافة كدالة في الزمن إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل.

الحــــــل

حيث أن $v=(1+x^2)t$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = (1+x^2)t \quad \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = tdt \quad \therefore \int \frac{dx}{1+x^2} = \int tdt + c_1$$

$$\therefore \tan^{-1} x = \frac{1}{2}t^2 + c_1$$

ومن الشرط الابتدائي حيث بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل فإن

$$\therefore \tan^{-1} 0 = \frac{1}{2}0^2 + c_1 \quad \Rightarrow 0 = 0 + c_1 \;\therefore c_1 = 0 \qquad \therefore x = \tan\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Kinematics of a Particle in Two Dimensions كينماتيكا الجسيم في بعدين

Motion in a plane (x-y) الحركة في المستوي

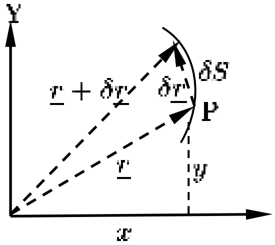
من المعلوم أنه يوجد نوعان من الكميات الطبيعية، الأول يتحدد تماماً بالمقدار مثل الطـــول و الحجم و الزمن و الكتلة و درجة الحرارة ....وتلك تسمى بالكميات القياسية. أمـــا النـــوع الثاني فلا يمكن تحديده بالمقدار فقط وإنما يلزم أن نعرف الاتجاه ايضاً إلى جانب المقدار مثـــل الازاحة و السرعة و العجلة .... وتسمى بالكميات المتجهة.

■ السرعة و العجلة في الاحداثيات الكارتيزية

عندما يتحرك جسيم في مستوى يلزم لتحديد موضعه احداثيان والذي يمكن كتابـــة موضـــع الجسيم في صورة متجهة كالتالي $\underline{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ حيث – كما نعلم من دراستنا الســـابقة – فإن $\hat{i}$ يمثل متجه وحدة في اتجاه المحور الأفقي X ، أما $\hat{j}$ فيمثل متجه وحدة في اتجاه المحـــور الرأسي Y . وعندما يتحرك جسيم فإن موضعه يتغير من لحظة إلى أخرى و يقال أن متجـــه الموضع دالة في الزمن أي أن $\underline{r} = \underline{r}(t)$ وبالتالي تكون الاحداثيات الكارتيزية للجسيم دوالاً في الزمن وتكتب في الصورة

$$\underline{r} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \qquad \text{Or} \qquad x = x(t), \quad y = y(t)$$

يسمى جزئا المعادلة السابقة بالمعادلتين البارامتريتين للمسار ، حيث t يسمى البارامتر وبحذف البارامتر بين مركبات الموضع نحصل على علاقة بين x, y وتسمى هـــذه العلاقـــة بالمعادلـــة الكارتيزية للمسار.



الآن نفرض أن جسيماً يتحرك في المستوى XY (هذه المحـــاور ثابتة) ونفرض أن الجسيم عند اللحظة t كان عند النقطـــة P حيث متجه موضعه هو $\underline{r}$ وبعد فترة زمنية δt أصبح الجســـيم عند النقطة Q و متجه موضعه $\underline{r} + \delta\underline{r}$ حيث طـــول القـــوس PQ هو δS وحيث أن السرعة المتوسطة للجسيم خلال انتقاله من النقطة P إلى النقطة Q خلال الفترة الزمنية δt تتعين من

$$\underline{v} = \frac{\underline{r} + \delta\underline{r} - \underline{r}}{\delta t} = \frac{\delta\underline{r}}{\delta t}$$

وبأخذ نهاية المقدار السابق عندما $\delta t \to 0$ و من ثم تقترب النقطة Q من النقطة P و بالتالي يمكن الحصول على سرعة الجسيم عند النقطة P عند الزمن t وتتعين من

$$\underline{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\underline{r}}{\delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{j} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$$

أي أن متجه السرعة $\underline{v}$ له مركبتان إحداهما v_x ومقدارها $\frac{dx}{dt}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية v_y وتساوي $\frac{dy}{dt}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه السرعة من العلاقة $v = |\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية θ تتيعين من العلاقة $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$

أيضاً متجه العجلة هو المعدل الزمني لتغير متجه السرعة وعليه

$$\underline{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\underline{v}}{\delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{a_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{a_y}\hat{j} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$$

مرةً أخرى نجد أن متجه العجلة له مركبتان إحداهما a_x ومقدارها $\frac{d^2x}{dt^2}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية a_y وتساوي $\frac{d^2y}{dt^2}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه العجلة من العلاقة $a = |\underline{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية φ تتيعين من العلاقة $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)$

ونستنتج مما سبق أن الحركة المستوية هي محصلة حركتين في خطين مستقيمين هما محورا الاحداثيات.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ١ـــال

إذا تحركت نقطة مادية في المستوى XY بحيث يتعين احداثي موضعها عند أي لحظـــة مـــن العلاقتين

$$x = t^2, \qquad y = 3t^2 + 4$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة ومعادلة المسار.

الحـــــــل

حيث أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 6t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 6$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = 2t\,\hat{i} + 6t\,\hat{j}, \qquad \underline{a} = 2\,\hat{i} + 6\,\hat{j}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت $2\sqrt{10}$ (لا يعتمد على الزمن). ولتعيين معادلة المســـار وهي حذف البارامتر t بين x, y وواضح أن $y = 3x + 4$ وهي معادلة خط مستقيم ميله 3 ويمر بالنقطة $(0, 4)$.

مثـــ٢ـــال

يتحرك جسيم فى المستوى الكارتيزي خاضعاً للعلاقة

$$x = 20t - 3t^2, \qquad y = 16t - 4t^2$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة وأقصى ارتفاع وسرعته عند هذا الموضع ومتى وايـــن يقع الجسم على المحور الأفقي X.

الحـــــــل

كما ذكرنا آنفاً أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية XY يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 6t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -6$$

$$\frac{dy}{dt} = 16 - 8t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -8$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = (20 - 6t)\,\hat{\imath} + (16 - 8t)\,\hat{\jmath}\,, \qquad \underline{a} = -6\hat{\imath} - 8\,\hat{\jmath}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت 10وحدة و لإيجاد اقصى ارتفاع ، نعلم أنه عند أقصى ارتفاع تنعدم مركبة السرعة الرأسية أي أن $\dot{y} = 0$ وعندها يكون $t = 2$

أي أن الجسيم يصل إلى أقصى ارتفاع بعد ثانيتين ويكون هذا الارتفاع مساوياً

$$y\big|_{t=2} = 16(2) - 4(2)^2 = 16$$

ولحساب السرعة عند هذا الموضع نعوض بالزمن $t = 2$ في متجة السرعة $\underline{v} = 8\,\hat{\imath}$

يقع الجسيم على المحور الأفقي عندما يكون الاحداثي الرأسي y مساوياً الصفر ومن ثم

$$0 = 16t - 4t^2 \quad \Rightarrow t(4 - t) = 0 \qquad \text{i.e. } t = 0,\, t = 4$$

أي أن الجسيم يقع على المحور الأفقي بعد أربع ثوان وموضعه x يتعين من

$$x\big|_{t=4} = 20(4) - 3(4)^2 = 32$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن مركبة السرعة الأفقية ثابتة وتساوي 3 ومركبة السرعة الرأسية تتناسب مع الاحداثي x وثابت التناسب يساوي 6 اثبت أن معادلة المسار قطع مكافئ إذا علمت أن النقطة $(2,4)$ تقع على المسار.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة الأفقية $\dot{x}$ ثابتة اي أن $\dot{x} = 3$ ومركبة السرعة الرأسية $\dot{y}$ تتناسب مع x أي أن $\dot{y} = 6x$ والآن

$$\frac{dx}{dt} = 3, \qquad \frac{dy}{dt} = 6x \qquad \Rightarrow \frac{dy\ /\ dt}{dx\ /\ dt} = \frac{6}{3}x = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{Or} \qquad dy = 2xdx$$

باجراء التكامل نحصل على $y = x^2 + c$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $y = 4$ As $x = 2$ وبالتعويض نجد أن $c = 0$

وتصبح معادلة المسار $y = x^2$ وهي معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن موضعه عند أي لحظة يتعين من

$$x = 3\cos 2t + 1, \qquad y = 4\sin 2t - 2$$

أوجد معادلة المسار.

الحـــــــل

معادلة المسار هي علاقة بين x, y و حيث أن $x = 3\cos 2t + 1, \qquad y = 4\sin 2t - 2$

ومن ثم $\dfrac{x-1}{3} = \cos 2t, \qquad \dfrac{y+2}{4} = \sin 2t$

بالتربيع والجمع ينتج أن $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $(1, -2)$ و طول محوره الأكبر 4 والأصغر 3

(اجتهد في رسم المسار رسماً تخطيطياً)

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية على المسار $y = 2x^2$ حيث الاطوال بالقدم وكانت المركبة الأفقية لسرعتها ثابتة وتساوي $2\ \mathrm{ft\,sec^{-1}}$. اوجد عجلة النقطة المادية مقداراً واتجاهاً ، ثم اوجد سرعتها مقداراً واتجاهاً عندما يكون الأحداثي الرأسي 8 .

الحـــــل

حيث أن $\dot{x} = 2$ وبالتفاضل بالنسبة للزمن يكون $\ddot{x} = 0$ أي أن المركبة الأفقية للعجلة تنعدم و للحصول على المركبة الرأسية للعجلة حيث $y = 2x^2$ فإن

$$y = 2x^2 \quad \Rightarrow \dot{y} = 4x\underset{2}{\dot{x}} = 8x \quad \text{again} \quad \ddot{y} = 8\dot{x} = 16$$

أي أن العجلة تتعين بالمتجة $a = 16\,\hat{j}$ ومقدارها 16 وتعمل في اتجاه المحور Y

ولتعيين السرعة حيث $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ فإن $\underline{v} = 2\,\hat{i} + 8x\,\hat{j}$ وعندما $y = 8$ فإن $x = \pm 2$

ومنها $\underline{v} = 2\,\hat{i} - 16\,\hat{j}$ أو $\underline{v} = 2\,\hat{i} + 16\,\hat{j}$ ومقدار السرعة في كلتا الحالتين $\sqrt{260}$

مثـــال ٦

بدأ جسيم حركته من السكون من النقطة (a,b) على مسار معادلته $y^2 = \dfrac{b^2}{a}x$ وكانت المركبة الرأسية لعجلته تتعين من $\ddot{y} = -k^2 y$. اوجد المركبة الأفقية للعجلة كدالة في x ثم أوجد x, y, v كدوال في الزمن.

الحـــــل

للحصول على المركبة الأفقية للعجلة بتفاضل معادلة المسار بالنسبة للزمن نجد أن

$$y^2 = \frac{b^2}{a}x \quad \Rightarrow y\dot{y} = \frac{b^2}{2a}\dot{x}$$

$$\text{differentiating again} \quad \Rightarrow \ \dot{y}^2 + y\ddot{y} = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ \dot{y}^2 + \sqrt{\frac{b^2}{a}x}\left(-k^2\sqrt{\frac{b^2}{a}x}\right) = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\therefore\ \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}\left(\dot{y}^2 - k^2\frac{b^2}{a}x\right) = \frac{2a}{b^2}\dot{y}^2 - 2k^2x \qquad (1)$$

والآن لحساب $\dot{y}$ من العلاقة $\ddot{y} = -k^2 y$ حيث $\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \dot{y}\dfrac{d\dot{y}}{dy}$ ومنها

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -k^2 y \qquad \Rightarrow \dot{y}d\dot{y} = -k^2 y dy \qquad \text{Or} \quad \dot{y}^2 = c - k^2 y^2$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من شرط أن الجسيم بـــدأ الحركـــة مـــن الســـكون أى أن $t = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = 0, \quad x = a, \quad y = b$ وتكون قيمة الثابت

$$0 = c - k^2 b^2 \qquad \therefore c = k^2 b^2$$

ومن ثم فإن المركبة الأفقية للعجلة تتعين من

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}(k^2 b^2 - k^2 \frac{b^2}{a} x) - 2k^2 x \qquad \Rightarrow \ddot{x} = 2ak^2 - 4k^2 x$$

وهذه العلاقة تعطى المركبة الأفقية للعجلة بدلالة x

$$\dot{y}^2 = k^2 b^2 - k^2 y^2 \qquad \Rightarrow \dot{y} = k\sqrt{b^2 - y^2} \quad \text{Or} \quad \frac{dy}{dt} = k\sqrt{b^2 - y^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = kdt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = kt + \alpha \quad \text{Or} \quad y = b\sin(kt + \alpha)$$

حيث α ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط عند $t = 0$ فإن $y = b$ ويكون

$$b = b\sin(\alpha) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

ومنها فإن $y = b\sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Or} \quad y = b\cos kt \quad y$ given as a function of t

أيضاً للحصول على المسافة x كدالة في الزمن

$$x = \frac{a}{b^2}y^2 = \frac{a}{b^2}b^2\cos^2 kt = a\cos^2 kt$$

والسرعة $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ و من ثم

$$v = \sqrt{\frac{4a^2}{\cancel{b^4}}\cancel{b^2}\cos^2 kt(\cancel{b^2}k^2\sin^2 kt) + k^2 b^2 - k^2 b^2\cos^2 kt}$$

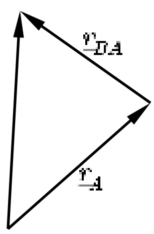
$$= \sqrt{4a^2 k^2\cos^2 kt\sin^2 kt + k^2 b^2\sin^2 kt} = k\sin kt\sqrt{4a^2\cos^2 kt + b^2}$$

■ الحركة النسبية في مستوى Relative Motion in a Plane

علمنا مما سبق أن صور الحركة و وصفها لحركة جسيم تتغير تبعاً لتغير مجموعة الاسناد (مجموعة المحاور المنسوبة إليها هذه الحركة سواء كارتيزية او قطبية أو ذاتية) وكذلك إذا ما كانت هذه المحاور ثابتة أو متغيرة وايضاً راصد الحركة (نقطة الأصل) فمثلا لو تصورنا أن هناك راصد لحركة قطار و تحرك القطار أمام الراصد فسيرى الراصد أن القطار يتحرك بسرعته التي يسير بها ، ولكن لو كان الراصد راكباً قطاراً آخر يسير بنفس سرعة القطار الأول و في نفس الاتجاه فبالنسبة لهذا الراصد سيكون القطار المرصود كما لو كان ساكناً.

نعتبر نقطة ثابتة O، نفرض أن نقطة ما A متجه الموضع لها هو $\underline{r}_A$ بالنسبة إلى O ونعتبر نقطة أخرى B متجه الموضع لها هو $\underline{r}_B$ بالنسبة إلى O أيضاً. فإذا نسبنا متجه موضع النقطة A إلى النقطة B فسيكون هو المتجه $\underline{r}_{BA}$ ، أي أن متجه الموضع قد تغير بتغير الراصد و من الشكل المجاور يكون

$$\underline{r}_B = \underline{r}_A + \underline{r}_{B|A} \qquad \Rightarrow \underline{r}_{B|A} = \underline{r}_B - \underline{r}_A$$



حيث رمزنا لمتجه موضع النقطة A بالنسبة إلى B بالرمز $\underline{r}_{AB}$. يُسمى المتجه $\underline{r}_{AB}$ بمتجه الموضع النسبي للنقطة A بالنسبة للنقطة B و للحصول على السرعة النسبية للنقطة A بالنسبة إلى B بتفاضل المعادلة السابقة نجد أن

$$\frac{d\underline{r}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{r}_B}{dt} - \frac{d\underline{r}_A}{dt} = \underline{v}_B - \underline{v}_A \qquad \Rightarrow \underline{v}_{B|A} = \underline{v}_B - \underline{v}_A$$

حيث $\underline{v}_A, \underline{v}_B$ سرعة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{v}_{A|B}$ هي سرعة A بالنسبة إلى B نلاحظ أن العلاقتان السابقتان علاقات اتجاهية وليست قياسية والعجلة النسبية عي مشتقة السرعة النسبية بالنسبة للزمن أي أن

$$\frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{v}_B}{dt} - \frac{d\underline{v}_A}{dt} = \underline{a}_B - \underline{a}_A \qquad \Rightarrow \underline{a}_{B|A} = \underline{a}_B - \underline{a}_A$$

حيث $\underline{a}_A, \underline{a}_B$ عجلة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{a}_{A|B}$ هي عجلة A بالنسبة إلى B

مثـــ ١ ـــال

تتحـــرك نقطتـــان ماديتـــان A, B بحيـــث يـــتعين موضـــعهما مـــن $x_A = t^3 - 2t$ ، $x_B = 2t^3 + t^2 - 5$. اوجد كلاً من السرعة النسبية العجلة النسبية.

الحـــــــل

حيث أن الموضع النسبي للنقطة B بالنسبة للنقطة A هو $\underline{x}_{B|A}$ حيث

$$\underline{x}_{B|A} = \underline{x}_B - \underline{x}_A \qquad \Rightarrow \underline{x}_{B|A} = (2t^3 + t^2 - 5) - (t^3 - 2t) = t^3 + t^2 + 2t - 5$$

ومن ثم فإن السرعة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{v}_{B|A} = \frac{d\underline{x}_{B|A}}{dt} = 3t^2 + 2t + 2$$

وأيضاً العجلة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{a}_{B|A} = \frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = 6t + 2$$

مثـــ ٢ ـــال

تتحرك باخرة A بسرعة ثابتة مقدارها 24 m.p.h في اتجاه الشرق ، بينما تتحرك باخرة B في اتجاه الجنوب بسرعة ثابتة مقدارها 18 m.p.h . أوجد سرعة الباخرة الأولى بالنسبة لراكب في الباخرة الثانية.

الحـــــــل

بفرض أن $\hat{i}$, $\hat{j}$ متجها وحدة في اتجاهي الشرق والجنوب فإنه يمكن كتابة سرعة البـــاخرتين A, B على الصورة

$$\underline{v}_A = 24\hat{i}, \quad \underline{v}_B = 18\hat{j}$$

و حيث أن السرعة النسبية تتعين من $\underline{v}_{B|A} = \underline{v}_A - \underline{v}_B$ فيكون $\underline{v}_{A|B} = 24\hat{i} - 18\hat{j}$

مقدار السرعة النسبية يتعين مـــن $v_{A|B} = \left|\underline{v}_{A|B}\right| = \sqrt{(24)^2 + (18)^2} = 30\,\text{m.p.h}$ و في اتجاه يصنع زاوية θ جنوب الشرق حيث $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{18}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

■ مســــــائل Problems ■

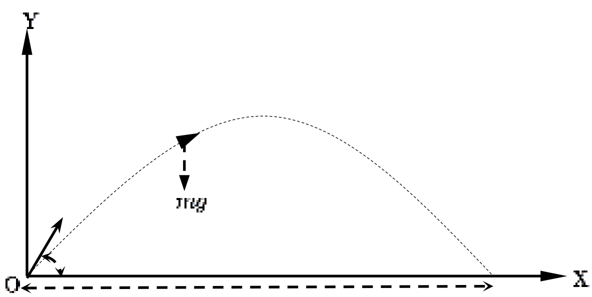
حركة المقذوفـــات

Projectiles Motion

تُعتبر حركة المقذوفات من اهم التطبيقات على الحركة المستوية للنقطة المادية (الجسيم). مـــن المعلوم أن المقذوفات تتعرض اثناء حركتها لجذب الأرض وكذلك مقاومـــة الهـــواء وبدايـــةً سنهمل مقاومة الهواء وسنعتبر أيضاً أن عجلة الجاذبية ثابتة في المقدار خلال حركة المقـــذوف وذلك للحصول على صورةٍ تقريبيةٍ لحركة المقذوف والتي بدورها تلقي ضوءاً لا بأس به على الحركة الحقيقية . وتُستخدم الاحداثيات الكارتيزية عادةً لدراسة هذا النوع مـــن الحركـــة- حيث نستخدم محورين متعامدين ثابتين هما غالباً OX, OY – على أن تُستكمل دراسة حركة المقذوفات مع الأخذ في الاعتبار مقاومة الهواء لاحقاً – إن شاء الله تعالى.

■ معادلات الحركة Equations of Motion

نعتبر الآن حركة مقذوف قُذف من نقطة O بسرعة مقدارها u وفي اتجاه يصنع زاوية α مع المحور الأفقي. كما ذكرنا آنفاً ستحرك الجسيم تحت تأثي قوة الوزن فقط (مقاومـــة الهـــواء أُهملت) وهي – كما نعلم – قوة رأسية إلى أسفل. من الواضح أم مسار المقذوف واقـــع في مستوى رأسي لذلك من المناسب استعمال الاحداثيات الكارتيزية – كما ذكرنـــا ســـالفاً – ولتكن نقطة الأصل هي نقطة القذف O . نفرض أن الجسيم يصل إلى سطح الأرض عنـــد النقطة A بعد زمن ما ومن ثم سنأخذ المحور OX في اتجاه OA والمحـــور OY هـــو المحـــور العمودي على OX في مستوى الحركة كما هو موضح بالشكل.



نفرض أن المقذوف بعد زمن t كان يشغل الموضع P والذي احداثياته (x, y)

ومن ثم بكتابة قانون نيوتن الأساسي في الاتجاهين الأفقي والرأسي يكون:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \text{and} \qquad m\ddot{y} = -mg \tag{1}$$

بالقسمة على m وتكامل جزئي (1) المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = c_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = c_2 - gt \tag{2}$$

حيث c_1, c_2 ثابتا التكامل واللذان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة. عند $t = 0$ يكون $\dot{x} = u\cos\alpha, \ \dot{y} = u\sin\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = u\cos\alpha$ و $c_2 = u\sin\alpha$ وبالتالي تأخذ المعادلة (2) الصورة الرياضية

$$\dot{x} = u\cos\alpha \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt \tag{3}$$

مرةً أخرى بأجراء التكامل بالنسبة للزمن لشقيّ المعادلة (3) ينتج أن

$$x = (u\cos\alpha)t + c_3 \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4 \tag{4}$$

ايضاً الثابتان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة حيث عند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = 0, \ y = 0$ ومنها نجد أن $c_3, c_4 = 0$ و المعادلة (4) تصبح

$$x = (u\cos\alpha)t \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

وبذلك نكون قد أوجدنا مركبتا سرعة المقذوف عند أي لحظة زمنية من جزئي المعادلة (3) وأيضاً موضع المقذوف يتعين عند أي لحظة من جزئي المعادلة (5) ونلاحظ من الشق الأول من المعادلة (3) نجد أن المركبة الأفقية للسرعة $\dot{x}$ دائماً ثابتة و تساوي $u\cos\alpha$ أما المركبة الرأسية $\dot{y}$ فتعتمد على الزمن . ويُسمى جزئا المعادلة (5) بالمعادلتين البارامتريتين لمسار القذيفة.

أهم خصائص حركة المقذوفات

■ أقصى ارتفاع للمقذوف Maximum Height

كما علمنا أن المركبة الأفقية للسرعة تظل ثابتة بينما تتناقص المركبة الرأسية حتى تنعدم عند موضع ما والذي يُمثل أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف ، عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الشق الثاني من المعادلة (3) نحصل على زمن الوصول إلى اقصى ارتفاع وليكن T وهو

$$T = \frac{u \sin \alpha}{g} \qquad (6)$$

ونحصل على أقصى ارتفاع Y بأن نضع $t = T$ في الجزء الثاني من المعادلة (5) أي أن أقصى ارتفاع يتعين من

$$Y = (u \sin \alpha) T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (7)$$

■ زمن الطيران (التحليق) Time of flight

يُعرف زمن الطيران بأنه الزمن المنقضي بين لحظة اطلاق القذيفة وحتى لحظة مرورها بالمستوى الأفقي المار بنقطة القذف (عند النقطة A) وسنرمز له بالرمز $T^\star$ وحيث أنه عند النقطة A يكون $y = 0$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الجزء الثاني من المعادلة (5) يكون

$$0 = (u \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (8)$$

المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية في الزمن t وجذراها هما

$$T^\star = 0, \qquad T^\star = \frac{2u \sin \alpha}{g} \qquad (9)$$

الجذر الأول $T^\star = 0$ عند بداية قذف الجسيم عند نقطة الأصل والجذر الثاني يُمثل زمن التحليق ومن الملاحظ من المعادلتين (6) و (9) نجد أن $T^\star = 2T$ وهذا يعني أن الزمن الذي يأخذه المقذوف من لحظة اطلاقه حتى وصوله الى اقصى ارتفاع يساوي زمن وصول المقذوف من أقصى ارتفاع غلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف.

■ مدى القذيفة على المستوى الأفقي **Range**

ويُقصد به طول المستقيم الواصل من نقطة القذف وحتى النقطة A (في نفس مستوى نقطة القذف) ولحساب المدى R نضع $t = T^{*}$ في الجزء الأول من المعادلة (5) ، أي أنه للحصول على صيغة رياضية للمدى على المستوى الأفقي نعوض عن الزمن بقيمة زمن التحليق في الجزء الأول من المعادلة (5) ومنها

$$R = (u\cos\alpha)T \qquad \Rightarrow R = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \tag{10}$$

و واضح أن المدى R يبلغ أقصى قيمة له – عند قيمة معينة للسرعة – عندما $\sin 2\alpha = 1$ أي عندما $\alpha = \pi / 4$ ويكون المدى حينئذ مساوياً

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \tag{11}$$

من المعادلة (10) نلاحظ أن المدى الأفقي يمكن الحصول عليه بقيمتين لزاوية القــذف همــا $(\alpha, \pi / 2 - \alpha)$ وذلك لأن $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

■ معادلة المسار لمقذوف **Path Equation**

بحذف البارامتر t بين جزئي المعادلة (5) نحصل على ما يُعرف بمعادلة المسار الكارتيزيـــة في الصورة الرياضية

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \tag{12}$$

و يتضح من المعادلة السابقة أنه لقيمة معينة للسرعة توجد زاويتان لإصابة الهدف.

ايضاً يمكن وضع المعادلة (12) في الصورة

$$y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2u^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2$$

ومنها نلاحظ أن مسار القذيفة هو قطع مكافئ رأســه النقطــة $\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$
ومحوره رأسي إلى أسفل وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{g}{2u^2 \cos^2 \alpha}$

■ مدى القذيفة على مستوى مائل Inclined Range

لإيجاد مدى القذيفة على مستوى مائل. نفرض أن الجسيم قُذف من نقطــة O بســرعة u وزاوية قذف α مع الأفقي أعلى مستوى مائل– يميل على الأفقي بزاوية φ – كما بالشكل وأن اتجاه القذف يقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى المائــل ، نفــرض أن الجسيم يصطدم بالمستوى المائل عند النقطة M ولتكن احداثياتها (x, y) . فإذا كان $R^\star$ هو المدى على المستوى المائل – المطلوب تعيينه – فإن

$$x = R^\star \cos\varphi, \qquad y = R^\star \sin\varphi$$

ونعلم أن هذين الاحداثيين يحققان معادلة المسار (12) وعلى ذلك وبالتعويض في معادلة المسار ينتج أن

$$R^\star \sin\varphi = R^\star \cos\varphi \tan\alpha - \frac{gR^{\star 2}\cos^2\varphi}{2u^2}\sec^2\alpha$$

ومن هذه المعادلة إما $R^\star = 0$ وهو مناظر لنقطة الأصل أو

$$R^\star = \frac{2u^2}{g} \; \cos\varphi \tan\alpha - \sin\varphi \; \cos^2\alpha \sec^2\varphi$$

$$= \frac{2u^2 \cos\alpha}{g\cos^2\varphi} \; \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi\cos\alpha \; = \frac{2u^2\cos\alpha}{g\cos^2\varphi}\sin(\alpha - \varphi) \qquad (13)$$

هذه المعادلة تُعطي المدى لقذيفة على مستوى مائل. كما يتضح من المعادلة أيضاً أن أقصــى مدى على المستوى المائل (بزاوية φ) يحدث عندما تكون $\cos\alpha \sin(\alpha - \varphi)$ أكبر ما يمكن وحيث أنه من المعلوم من حساب المثلثات

$$2\cos\alpha\sin(\alpha - \varphi) = \sin(2\alpha - \varphi) - \sin\varphi$$

وعلى هذا فإن اقصى مدي على المســتوى المائــل يمكــن الحصــول عليــه هــو عنــدما $\sin(2\alpha - \varphi) = 1$ أي عندما

$$2\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{Or} \qquad \alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\text{Or} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \qquad \text{Or} \qquad \alpha = \varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tag{14}$$

أي أننا نحصل على أقصى مدى على المستوى المائل عندما ينصف اتجاه القذف الزاويـــة بـــين الراسي والمستوى المائل ويكون اقصى مدى هو

$$R^{\star}_{\max} = \frac{u^2}{g\cos^2\varphi}\;\; 1 - \sin\varphi \;\; = \frac{u^2}{g(1 + \sin\varphi)} \tag{15}$$

ونلاحظ أنه بوضع $\varphi = 0$ في المعادلتين (14) ، (15) نحصل على النتائج المنـــاظرة في حالـــة المستوى الأفقي. تنبيه للحصول على المدى لمستوى مائل لأسفل نضع $-\varphi$ بدلا من φ.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

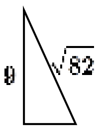
رصدت حركة مقذوف فوجد أن اقصى ارتفاع له فوق المستوى الأفقي المار بنقطة القذف هو 900 ft و أن مداه على المستوى الأفقي 400 ft عيّن سرعة القذف مقداراً واتجاهاً.

الحـــــــل

حيث أن اقصى ارتفاع والمدى يعينان من المعادلتين

$$Y = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ومنها بالتعويض بالقيم المعطاة



$$900 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad 400 = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

بقسمة المعادلتين نحصل على

$$\frac{9}{4} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Big/ \frac{2u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{\tan\alpha}{4} \quad \therefore \tan\alpha = 9$$

وهي اتجاه سرعة القذف ومقدار السرعة يتعين بالتعويض في أي من المعادلتين ويكون

$$900 = \frac{u^2}{2g} \times \frac{81}{82} \Rightarrow u^2 = \frac{1800 \times 82 \times 32.2}{81} \quad \text{Or} \quad u \cong 242.23 \quad (g = 32.2 \text{ ft} \sec^{-2})$$

حيث أن $\tan\alpha = 9$ فإن $\sin\alpha = \frac{9}{\sqrt{82}}$ كما بالشكل.

مثـــ ٢ ـــال

قذف جسيم من نقطة بسرعة ابتدائية مقدارها $3\sqrt{gh}$ لتصيب هدفاً عنـــد النقطـــة $(3h, h)$ بالنسبة إلى محورين متعامدين مارين بنقطة القـــذف. أوجـــد زاويـــتي القـــذف الممكنـــتين لإصابةالهدف.

الحـــــــل

حيث أن الهدف عند النقطة $(3h, h)$ ومن ثم فهذه النقطة تحقق معادلة المسار أي أن

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ h = 3h\tan\alpha - \frac{g(3h)^2}{2(9\,gh)\cos^2\alpha} \quad \text{Or} \quad 1 = 3\tan\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha}$$

$$2 = 6\tan\alpha - \sec^2\alpha \Rightarrow 2 = 6\tan\alpha - (1+\tan^2\alpha) \quad \therefore\ \tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 3 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\alpha$ وجذراها هما

$$\tan\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \quad \text{i.e.}\quad \tan\alpha_1 = 3+\sqrt{6},\quad \tan\alpha_2 = 3-\sqrt{6}$$

وهما الزاويتان الممكنتان لإصابة الهدف.

مثـــ ٣ ـــال

إذا كان T هو زمن وصول قذيفة إلى نقطة P على مسارها وكان T' هو زمن وصولها من تلك النقطة إلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف أوجد ارتفاع النقطة P عن المستوى الأفقي للقذف.

الحـــــــــل

حيث أن زمن الطيران هو الزمن من لحظة انطلاق القذيفة وحتى وصولها الى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف وكما رأينا فإن

$$\text{Time of Filght} = \frac{2u\sin\alpha}{g} = T + T' \qquad \therefore\ u\sin\alpha = \frac{1}{2}g\ \ T + T'$$

ولحساب ارتفاع النقطة P حيث $y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ولذلك

$$y_P = y\big|_{t=T} = (\underbrace{u\sin\alpha}_{\frac{1}{2}g(T+T')})T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g(T+T')T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gTT'$$

مثـــ ٤ ـــال

أطلقت قذيفة على هدف معين في مستوى أفقي يمر بنقطة القذف فسقطت قبل الهدف بمسافة ℓ عندما كانت زاوية القذف 15^0 وعندما قُذفت بنفس السرعة وضوعفت زاوية القـــذف سقطت بعد الهدف بمسافة ℓ . أوجد الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف.

الحـــــــل

باعتبار أن سرعة القذف هي u وأن هو المدى الصحيح لإصابة الهدف هو R وبناءً عليه فإن المدي في الحالة الأولى هو $R-\ell$ والمدى في الحالة الثانية هو $R+\ell$ وحيث أن معادلة المدي هي

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

في الحالة الأولى
$$R-\ell=\frac{u^2\sin 30}{g}=\frac{u^2}{2g}$$

في الحالة الثانية
$$R+\ell=\frac{u^2\sin 60}{g}=\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$$

من هاتين المعادلتين ينتج أن – بالجمع –

$$2R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{2} \qquad \text{Or} \qquad R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{4} \qquad (1)$$

وبفرض أن هي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف θ وبالتالي يكون (2)
$$R=\frac{u^2\sin 2\theta}{g}$$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن $\sin 2\theta=\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$ أي أن

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

وهي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف

مثــــ ٥ ــــال

أطلقت قذيفة من نقطة الأصل فوجد أنها تمر بالموضعين $(12,0)$,$(8,2)$ على مسارها أوجـــد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً واحسب الزمن الذي تأخذه القذيفة لتمر بالموضعين الســـابقين وسرعتها عند هذين الموضعين.

الحـــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(12,0)$, $(8,2)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة $(8,2)$ فإن
$$2 = 8\tan\alpha - \frac{g(8)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة $(12,0)$ فإن
$$0 = 12\tan\alpha - \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في 9 والثانية في 4 والطرح نحصل على

$$18 = 24\tan\alpha \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

وهي اتجاه سرعة القذف مع الأفقي و لتعيين مقدار السرعة بالتعويض في أي من المعادلتين

$$\Rightarrow 12\tan\alpha = \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha} \quad \therefore u^2 = \frac{g(12)^2}{24\tan\alpha\cos^2\alpha} = \frac{6g}{\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{2}g$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{25}{2}g}$$

<u>على الدارس أن يكمل الحل</u>

مثـــال ٦

قُذفت نقطة مادية لتمر بالموضعين $(a,b),\ (b,a)$ على مسارها حيث $a > b$. اثبت أن المدى على المستوى الأفقي يساوي $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ و أن زاوية القذف أكبر من $\tan^{-1}3$.

الحـــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(a,b),\ (b,a)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة (b,a) فإن
$$a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة (a,b) فإن
$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في a والثانية في b والطرح نحصل على

$$\underbrace{a^2-b^2}_{(a+b)\cancel{(a-b)}} = \frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\cancel{(a-b)}$$

$$\text{Or} \qquad a+b=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Or} \qquad \frac{ab}{a+b}=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$$

مرةً أخرى بضرب المعادلة الأولى في a^2 والثانية في b^2 و الطرح نحصل على

$$\underbrace{a^3-b^3}_{(a^2+ab+b^2)\cancel{(a-b)}} = ab\cancel{(a-b)}\tan\alpha \qquad \Rightarrow ab\tan\alpha = a^2+ab+b^2$$

ولكن معادلة المدي تُعطى من

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{2u^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

$$=\underbrace{\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}}_{ab/(a+b)}\tan\alpha=\frac{ab}{a+b}\tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وهو المطلوب $\therefore R=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

وحيث أننا أثبتنا أن $\tan\alpha=\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab}$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\pm 3=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}+3=\frac{(a-b)^2}{ab}+3$$

و حيث أن المقدار $\dfrac{(a-b)^2}{ab}>0$ فإن $\tan\alpha>3$ أو $\alpha>\tan^{-1}3$

مثـــ ٧ ـــال

أطلقت قذيفة بسرعة h من سطح الأرض بحيث تمر بنقطة أقصى بعد لها A في نفس المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. اثبت أنه لكي يصيب المقذوف هدفاً على ارتفاع h فوق النقطة A بحيث أن زاوية القذف في الحالتين واحدة فإن سرهة القذف يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$.

الحـــــل

واضح أن أقصى بعد حينما تكون الزاوية 45^0 ويكون المدى أي بعد النقطة A هو $R=\dfrac{u^2}{g}$

ولكي تصيب القذيفة الهدف B و الذي يقع على ارتفاع h فوق النقطة A نفترض أن السرعة أصبحت v ومن ثم يجب أن تكون النقطة $B = \left(\frac{u^2}{g}, h\right)$ تحقق معادلة المسار

$$h = \frac{u^2}{g}\tan 45 - \frac{g\left(u^2/g\right)^2}{2v^2\cos^2 45} \qquad \Rightarrow h = \frac{u^2}{g} - \frac{u^4}{gv^2} \quad \text{Or} \quad \frac{u^4}{gv^2} = \frac{u^2}{g} - h$$

$$\frac{u^4}{gv^2} = \frac{u^2 - gh}{g} \quad \text{Or} \quad v^2 = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - gh}} > u$$

أي أن السرعة يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2 - gh}}$

مثـــ ٨ ـــال

قذف جسيم بسرعة $64\ \text{ft}\sec^{-1}$ وفي اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الأفقي أوجد المدى على مستوى يميل بزاوية 30^0 على الأفقي إذا قذف الجسيم أعلى المستوى أو أسفل المستوى.

الحـــــل

حيث أن المدى على المستوى المائل يتعين من – $g = 32.2\ \text{ft}\sec^{-2}$ –

$$R = \frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha - \varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

حيث $u = 64\ \text{ft}\sec^{-1}$ ، $\varphi = 30^0$ ، $\alpha = 45^0$ نجد أن المدى على المستوى المائل لأعلى

$$R = \frac{2(64)^2\cos 45\sin(45-30)}{32.2\cos^2 30} = \frac{2(64)^2}{3(32.2)}\left(\sqrt{3} - 1\right) \cong 62.08\ \text{ft}$$

ثم بالتعويض عن $\varphi = -30^0$ نحصل على المدى على المستوى المائل إلى أسفل

$$R = \frac{2(64)^2\cos 45\sin(45+30)}{32.2\cos^2(-30)} = \frac{2(64)^2}{3(32.2)}\left(\sqrt{3} + 1\right) \cong 231.7\ \text{ft}$$

مثـــ ٩ ـــال

إذا كانت النسبة بين مقداري سرعة جسيم مقذوف عند أقصى ارتفاع و عندما يكون على ارتفاع يساوي نصف اقصى ارتفاع هي $\sqrt{\frac{6}{7}}$ فاثبت أن زاوية القذف هي 30^0.

الحـــــل

حيث أن الاحداثي الرأسي عند أي لحظة يتعين من $y = (u \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2$

وحيث أن أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة A هو $Y_A = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

وعند ارتفاع يساوي نصف أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة B هو $Y_A = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{4g}$

الزمن الذي يأخذه الجسيم من لحظة انطلاقه حتى يصل إلى النقطة B يتعين من

$$\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{4g} = (u \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$2(gt)^2 - 4(gt) u \sin\alpha + u^2 \sin^2 \alpha = 0 \qquad \Rightarrow gt = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) u \sin\alpha$$

مركبتا سرعة الجسيم عند النقطة B هما

$$\dot{x}_B = u \cos\alpha, \quad \dot{y}_B = u \sin\alpha - gt = u \sin\alpha - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) u \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} u \sin\alpha$$

ويكون مقدار السرعة عند B هو

$$v = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{(u \cos\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u \sin\alpha\right)^2} = \frac{u}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$$

عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}_A = 0$ ، $\dot{x}_A = u \cos\alpha$ أي أن

$$v = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = u \cos\alpha$$

وحيث أن $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{6}{7}}$ وبالتالي

$$\frac{\sqrt{2} u \cos\alpha}{u\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \qquad \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{Or} \quad \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{3}{7}$$

$$7 \cos^2 \alpha = 3 + 3 \cos^2 \alpha \qquad \Rightarrow 4 \cos^2 \alpha = 3 \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \alpha = 30^0$$

وهو المطلوب

مثـ ١٠ ـــال

اطلقت كرة من نقطة على سطح الأرض تبعد مسافة a من قاعدة حائط رأسي ارتفاعـــه b إذا كانت زاوية القذف مع الافقي α والكرة مرت بحافة الحائط اثبت أن أقصـــى ارتفـــاع للكرة هو $\dfrac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)}$.

الحـــــــل

نفترض أن سرعة القذف هي u وحيث أن الكرة تمس الحائط ومن ثم فإن النقطة (a,b) تقع على مسار الكرة ومن ثم فهي تحقق معادلة المسار

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Or} \qquad a\tan\alpha - b = \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore u^2 = \frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha}$$

والآن أقصى ارتفاع للكرة

$$\begin{aligned} Y &= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \\ &= \frac{\sin^2\alpha}{2g}\frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha} \\ &= \frac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)} \end{aligned}$$

■ حركة مقذوف مع اعتبار مقاومة الهواء

درسنا في الجزء السابق حركة المقذوف مع اهمال مقاومة الهواء وهي حالة مثالية حيث أنه في الواقع توجد مقاومة لحركة الجسيم المقذوف وهي مقاومة الهواء ، دعنا نفترض أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسيم وهي $\gamma m\underline{v}$ (حيث γm ثابت التناسب) والآن بكتابة قانون نيوتن الاساسي وبالتحليل في الاتجاهين الأفقي و الرأسي نحصل على

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\gamma \cancel{m}\dot{x} \quad \text{and} \quad \cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g - \gamma \cancel{m}\dot{y} \qquad (1)$$

لاحظ أن $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ و $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ وبتكامل شقي المعادلة (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\ln \dot{x} = c_1 - \gamma t \quad \text{and} \quad \ln\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) = c_2 - \gamma t \qquad (2)$$

حيث c_2, c_1 ثابتا التكامل و اللذان يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية للحركة وهي عند $t = 0\dot{x} = u\cos\alpha$ يكون $\dot{y} = u\sin\alpha,\ \dot{x} = u\cos\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = \ln u\cos\alpha$ و $c_2 = \ln\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$ بالتعويض عن قيمة الثابتين تأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha \;\; e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \qquad (3)$$

وجزئي هذه المعادلة يعينان مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة زمنية. مرةً أخرى بإجراء التكامل بالنسبة للزمن لجزئي المعادلة (3) يكون

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{\gamma}\; e^{-\gamma t} + c_3 \quad \text{and} \quad y = -\frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}t + c_4 \qquad (4)$$

ايضاً الثابتان c_4, c_3 يمكن تعيين قيمتهما من الشرط الابتدائي للحركة فعند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = y = 0$ ومنها نجد أن

$$c_3 = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}, \qquad c_4 = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$$

وتأخذ المعادلة السابقة (4) الصورة

$$x = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}\;\; 1 - e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)\; 1 - e^{-\gamma t} \;\; - \frac{g}{\gamma}t \qquad (5)$$

وجزئا هذه المعادلة يعينان موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

و للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نضع $\dot{y} = 0$ في المعادلة (3) ومن ثم

$$T = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right) \tag{6}$$

ويتعين أقصى ارتفاع من المعادلة (5) أي أن

$$y = \frac{u\sin\alpha}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 + \frac{\gamma u \sin\alpha}{g}\right)$$

زمن الطيران T' يتعين بوضع $y = 0$ في الشق الثاني من المعادلة (5)

$$T' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)\ 1 - e^{-\gamma T'}$$

أما معادلة المسار فتتعين بحذف البارامتر بين جزئي المعادلة وتأخذ الصورة

$$y = \frac{g}{\gamma u \cos\alpha}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)x + \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{u\cos\alpha}\right)$$

وأخيراً يجب أن نلاحظ أن الحركة التي سبق دراستها عند اهمال مقاومة الهواء هي حالة خاصة من هذه الحالة ويمكن الحصول على جميع النتائج والمعادلات التي سبق الحصول عليها (عند اهمال مقاومة الهواء) بجعل $\gamma \to 0$ فمثلاً للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نستخدم المفكوك اللوغاريتمي

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .....$$

هذا المفكوك صحيح بشرط أن $|x| < 1$ والآن بجعل $\gamma \to 0$ في المعادلة (6) نجد أن

$$\begin{aligned} T &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} - \frac{\gamma^2 u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma^3 u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{\gamma u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) = \frac{u\sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

وهو نفسه زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع والذي سبق الحصول عليه عند اهمال مقاومة الهواء (المعادلة (6)) ونترك للقارئ كتمرين الحصول على بقية النتائج في حالة اهمال مقاومة الهواء.

مثـ ١١ ـــال

قذف جسيم كتلته m بسرعة u و في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاومتـــه تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب يساوي μm. اثبت أن اتجاه حركته يصنع زاويـــة مقدارها α مع الأفقي بعد مضي زمن $\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu u}{g}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.

الحـــــــل

بكتابة معادلتي الحركة للجسيم في الاتجاهين OX,OY والتكامل واستخدام الشروط الابتدائية للحركة كما سبق أن اوضحنا بالتفصيل نحصل على مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة في الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha \;\; e^{-\mu t} \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}$$

حيث أن زاوية القذف هي α وأن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة مع المحور الأفقي تتناقص حتى تنعدم عند أقصى ارتفاع ثم يعكس الجسيم اتجاه حركته لتصبح الزاوية α لأسفل. يصنع اتجاه الحركة زاوية α بعد زمن t يتعين من

$$\tan\, -\alpha \;= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}}{u\cos\alpha \;\; e^{-\mu t}} = -\tan\;\alpha$$

أي أن

$$\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu} = -u\sin\alpha \;\; e^{-\mu t} \;\;\Rightarrow \left(2u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} = \frac{g}{\mu}$$

$$\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right) = e^{\mu t} \qquad\qquad \Rightarrow t = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right)$$

وهو المطلوب.

■ مســـائل Problems ■

قُذف جسيم بسرعة $\underline{u} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j}$ من نقطة A لتصطدم بسقف منزل ارتفاعــه ℓ عــن المستوى الأفقي المار بالنقطة A . فإذا كان أقصى ارتفاع للجسيم يساوي 2ℓ . فاثبــت أن سرعة الجسيم عند أصطدامه بسقف المنزل تتعين من $\underline{u}_A = a\,\hat{i} - \sqrt{b^2 - 2g\ell}\,\hat{j}$.

الحركـــــة في وسط مقـــــاوم

Motion in a Resisting Medium

تُعالج الكينماتيكا – كما رأينا – وصف الحركة المجردة دون التعرض لبعواعث تغيير هـــذه الحركة. والميكانيكا الكلاسيكية أو الميكانيكا النيوتونية مبنية على عدة قوانين وضعها العـــالم الانجليزي المعرف سير اسحق نيوتن في القرن السابع عشر وهي معروفة باسمه و أثبتت التجربة والمشاهدة معاً إلى يومنا هذا دقة هذه القوانين في وصفها لحركة الاجسام الا في حالات نادرة والتي تكون فيها سرعة الاجسام هائلة ، مما دعا ألبرت أينشتين رائد نظرية النسبية الأول إلى اعادة التفكير في الأسس التي أقام عليها العالم نيوتن نظريته االميكانيكية فخرج على العـــالم في بدايات القرن العشرين بنوع آخر من الميكانيكا يعتمد في جوهره على النسبية. تمتاز ميكانيكا نيوتن بسهولة في التفكير والتطبيق مع دقةٍ كافيةٍ لاغلب التطبيقات والأغراض الهندسية جعلتنا نستمر حتى يومنا هذا في استعمالها و تطبيقها مُرجئين الأخذ بأساليب النسبية إلى بضع حالات من الحركة السريعة جداً كحركة الالكترونات.

■ قوانين نيوتن للحركة Newton's Laws of Motion

القانون الأول

وينص على أن "كل جسيم بعيد عن المؤثرات يظل محتفظاً بحالة حركته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم وفقاً لأحوال البداية"

فإذا ما لاحظنا تغيّراً في سرعة الجسيم سواء كان ذلك في المقدار أو الاتجاه أو التغير في كليهما معاً وهو ما عُرف بعجلة الجسيم فقد نسب نيوتن هذا التغير أو هذه العجلة إلى مؤثر أسمـــاه القوة. و على هذا يمكن تعريف القوة على أنها ذلك المؤثر الي يُحدث تغييراً في حالة الجسم أو بتعبير آخر هو المؤثر الذي يُحدث العجلة.

القانون الثاني

لقد أستخدم هذا القانون كأساس للديناميكا. وينص هذا القانون على "هناك تناسب مباشـــر بين القوة المؤثرة والعجلة الناتجة". و وجد أن ثابت التناسب هو كتلة الجسيم m. أو بعبارةٍ

أخرى "المعدل الزمني للتغير في كمية حركة الجسيم يتناسب مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه ويكون في اتجاهها".

تُعرف كمية حركة الجسيم بحاصل ضرب كتلته في سرعته أي أن $\underline{P} = m\underline{v}$ وهي تبعاً لذلك كمية متجهه وبالتالي يمكن صياغة قانون نيوتن الثاني على الصورة

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = m\frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{v}\frac{dm}{dt}$$

وفي دراستنا هنا سنعتبر كتلة الجسيم ثابتة ومن ثم $\frac{dm}{dt} = 0$ ويأخذ قانون نيــوتن الصــورة $F = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a}$ حيث $\underline{a}$ يمثل متجه عجلة الجسيم.

نلاحظ أنه في الاحداثيات الكارتيزية تُعطى مركبات القوة في الصورة (F_x, F_y) وبالتالي

$$F_x = ma_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = ma_y = m\ddot{y}$$

و هذا القانون هو قانون لا يعتمد على برهان رياضي وإنما أثبتت التجارب صحته وتنبني عليه باقي قوانين الديناميكا بالاستنتاج الرياضي ولذا سُميّ بالقانون الأساسي للحركة.

القانون الثالث

ينص على أن "لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه و على خط واحد"

قانون الجذب العام

كل جسيمان يتجاذبان بقوة تتناسب طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مــع مربــع البعد بينهما و تؤثر في الخط الواصل بينهما وتأخذ الصورة الرياضية

$$\underline{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{F}$$

حيث m_1, m_2 تمثل كتلة الجسمين ، γ ثابت الجذب العام و يمكن تحديــد قيمتــه تجريبيــاً وتساوي ، r هو البعد بين الكتلتين ، $\hat{F}$ متجه وحدة في اتجاه القوة .

ولقد تطرقنا في ابوابٍ سابقة إلى حركة الاجسام الساقطة او المقذوفة رأسياً لأعلى مع اهمــال مقاومة الهواء – حركة الجسيم بعجلة ثابتة – والآن نتعرض لحركة الاجسام مع الأخــذ في

الاعتبار مقاومة الهواء سواء كانت الحركة رأسية أو أفقية. لاحظ أنه في حالـــة الســـرعات الصغيرة فإن المقاومة تتناسب مع السرعة أما إذا كانت حركة الجسم بسرعة كـــبيرة فـــإن المقاومة تتناسب مع مربع السرعة.

■ دراسة حركة جسيم ساقط مع وجود مقاومة تتناسب مع سرعته

نفرض جسيم كتلته m سقط من السكون من نقطة O و بأخذ هذه النقطة كنقطة أصل و الخط الرأسي لأسفل هو المحور Y و حيث أن مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة أي أنه يؤثر على الجسيم اثناء حركته قوة الوزن mg رأسياً لأسفل و مقاومة الهواء R رأســياً لأعلــى وتساوي μmv حيث v سرعة الجسيم عند اللحظة t، μm ثابت التناسب

معادلة الحركة هي

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{g-\mu v} = dt \qquad \text{Or} \qquad \frac{-\mu dv}{g-\mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v) = c_1 - \mu t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g-\mu v) = \ln g - \mu t \qquad \text{Or} \quad v = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t كالتالي

$$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t} \qquad \Rightarrow \quad dy = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t}\ \ dt$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t}\ \ dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$y = \frac{g}{\mu}\left(t + \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right) + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $y = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_2 = -\frac{g}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y = \frac{g}{\mu}\left(t + \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right) - \frac{g}{\mu^2}$$

وهذه العلاقة تعطي موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية t

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم كتلته m أفقياً في وسط مقاومته $\alpha m v$ حيث α ثابت ، v سرعة الجســـيم فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل بسرعة u فأوجد المسافة التي يتحركها الجسيم بعد زمن .

الحــــــــل

معادلة الحركة الأفقية للجسيم (لاحظ أن قوة الوزن ليس لها تأثير) هي

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha m v \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\alpha dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(v) = c_1 - \alpha t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln u$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(v) = \ln u - \alpha t \qquad \text{Or} \qquad v = ue^{-\alpha t} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عند أي لحظة t كالتالي

$$\frac{dx}{dt} = ue^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad dx = ue^{-\alpha t}dt$$

v

$$\Rightarrow \int dx = \int ue^{-\alpha t}dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$x = -\frac{u}{\alpha}e^{-\alpha t} + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $x = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{u}{\alpha}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$x = \frac{u}{\alpha}\ 1 - e^{-\alpha t}$$

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم كتلته الوحدة في وسط مقاومته تساوي $\lambda v + \mu v^2$ فإذا كانت المقاومة هـــي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسيم فأوجد المسافة المقطوعة قبل أن يقف الجسيم إذا علمت أن سرعته الابتدائية u .

الحـــــــل

معادلة الحركة للكتلة هي– قوة المقاومة هي القوة الوحيدة المؤثرة –

$$v\frac{dv}{dx} = -(\lambda v + \mu v^2) \qquad \Rightarrow \frac{\mu dv}{\lambda + \mu v} = -\mu dx$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(\lambda + \mu v) = c_1 - \mu x \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $x = 0$ ومنها $c_1 = \ln(\lambda + \mu u)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(\lambda + \mu v) = \ln(\lambda + \mu u) - \mu x \qquad \text{Or} \qquad \ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda + \mu v}\right) = \mu x \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عندما تنعدم السرعة

$$x\big|_{v=0} = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda}\right) = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}u\right)$$

مثـــ ٣ ـــال

قذف جسيمان كتلة كل منهما m رأسياً إلى اسفل من نفس النقطة و في نفـــس اللحظـــة بسرعتين u_1, u_2 في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة و ثابت التناسب μm فإذا كانـــت u_1', u_2' هما سرعتي الجسيمان بعد مضي زمن T فاثبت ان $u_1' - u_2' = (u_1 - u_2)e^{-\mu T}$.

الحـــــــل

بالنسبة للكتلة الأولى نفرض أن سرعتها عند أي لحظة هي ومن ثم فإن معادلة الحركة لها

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu m v \quad \Rightarrow \frac{dv}{g - \mu v} = dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv}{g - \mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v)=c-\mu t$$

حيث c ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v=u_1$ عندما $t=0$ ومنها $c=\ln(g-\mu u_1)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v)=\ln(g-\mu u_1)-\mu t \qquad \text{Or} \qquad g-\mu v=(g-\mu u_1)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_1' أي أن

$$g-\mu u_1'=(g-\mu u_1)e^{-\mu T} \tag{1}$$

بالنسبة للكتلة الثانية نفرض أن سرعتها عند أي لحظة t هي v' وباتالي معادلة حركتها

$$m\frac{dv'}{dt}=mg-\mu mv' \quad \Rightarrow \frac{dv'}{g-\mu v}=dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv'}{g-\mu v'}=-\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v')=c'-\mu t$$

حيث c' ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v'=u_2$ عندما $t=0$ ومنها $c'=\ln(g-\mu u_2)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v')=\ln(g-\mu u_2)-\mu t \qquad \text{Or} \qquad g-\mu v'=(g-\mu u_2)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_2' أي أن

$$g-\mu u_2'=(g-\mu u_2)e^{-\mu T} \tag{2}$$

وبطرح المعادلتين (2) , (1) نجد أن

$$\mu \ \ u_1'-u_2' \ =\mu(u_1-u_2)e^{-\mu T} \qquad \text{Or} \qquad u_1'-u_2'=(u_1-u_2)e^{-\mu T}$$

وهو المطلوب اثباته

مثـــ ٤ ـــال

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى بسرعة أبتدائية $\sqrt{g\mu^{-1}}$ في وسط مقاومته لوحدة الكتل تساوي μv^2 حيث v سرعة النقطة المادية ، μ ثابت التناسب . اثبـــت أن أقصـــى ارتفاع للنقطة المادية هو $\frac{1}{2\mu}\ln 2$ وتصل إليه في زمن قدره $\frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$.

الحـــــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \mu mv^2 \quad \Rightarrow \frac{vdv}{g+\mu v^2} = -dy \quad \text{Or} \quad \frac{2\mu vdv}{g+\mu v^2} = -2\mu dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\mu v^2) = c_1 - 2\mu y \tag{1}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln 2g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g+\mu v) = \ln 2g - 2\mu y \qquad \text{Or} \quad y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g+\mu v} \tag{2}$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t وعند أقصى ارتفاع يكون $v = 0$ وبالتالي

$$y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g} \qquad \Rightarrow Y = \frac{1}{2\mu}\ln 2$$

وهو أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم وللحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع حيث

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu mv^2 \quad \Rightarrow \frac{dv}{g+\mu v^2} = -dt \quad \text{Or} \quad \frac{\sqrt{\frac{\mu}{g}}dv}{1+\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right)^2} = -\sqrt{g\mu}\,dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = c_2 - \sqrt{g\mu}\,t \tag{3}$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{\pi}{4}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = \frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t \qquad \text{Or} \qquad v = \sqrt{\frac{g}{\mu}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right)$$

وهذه المعادلة تعطي السرعة عند أي لحظة زمنية وعند $v = 0$ فإن t

$$0=\sqrt{\frac{g}{\mu}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{g\mu}\,t\right)\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{g\mu}\,t\right)=0\qquad\text{Or}\quad t=\frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$$

مثـــ ٥ ـــال

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب μm فإذا تلاشت سرعة النقطة المادية بعد زمن T من لحظة القذف وعلى ارتفاع ℓ من نقطة القذف فاثبت إن السرعة الابتدائية التي قذفت بها النقطة المادية هي $\mu\ell + gT$.

الحـــــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-\mu mv\quad\Rightarrow\frac{\mu dv}{g+\mu v}=-\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\mu v)=c_1-\mu t \tag{1}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v=u$ عنـــدما $t=0$ – بفرض أن سرعة القذف u والمراد تعيينها – ومنها $c_1=\ln(g+\mu u)$ وتأخـــذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g+\mu v)=\ln(g+\mu u)-\mu t\qquad\text{Or}\quad g+\mu v=\ g+\mu u\ \ e^{-\mu t}$$

$$\text{at}\ \ t=T,\ v=0\quad\Rightarrow\ g=\ g+\mu u\ \ e^{-\mu T} \tag{2}$$

وللحصول على ارتفاع النقطة حيث

$$\because\ \ g+\mu v=(g+\mu u)e^{-\mu t}\qquad\text{Or}\qquad v=\frac{1}{\mu}\ (g+\mu u)e^{-\mu t}\ -g$$

ولكن $v=\dfrac{dy}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\mu}\ (g+\mu u)e^{-\mu t}\ -g\qquad\Rightarrow dy=\frac{1}{\mu}\ (g+\mu u)e^{-\mu t}\ -g\ \ dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$y=-\frac{1}{\mu}\left(\frac{(g+\mu u)}{\mu}e^{-\mu t}\ +gt\right)+c_2 \tag{3}$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط الحركة وهي $y = 0$ عندما $t = 0$ ومنـــها $c_2 = \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{(g+\mu u)}{\mu}e^{-\mu t} + gt\right)$$

والآن بالتعويض عن $y = \ell$ عندما $t = T$

$$\ell = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} - \frac{gT}{\mu}$$
$$\Rightarrow \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \quad \text{Or} \quad \frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell$$

(استخدمنا المعادلة (2))

$$\frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \qquad \Rightarrow u = gT + \mu\ell$$

و هو المطلوب اثباته

مثـــ ٦ ـــال

قذف جسيم كتلته m رأسياً لأعلى بسرعة u في وسط مقاومته تساوي $m\gamma v^2$. أثبت أن الجسيم يعود إلى نقطة القذف بسرعة قدرها $\frac{uu'}{\sqrt{u^2+u'^2}}$ حيث $u' = \sqrt{g\gamma^{-1}}$

الحـــــــل

لمعرفة السرعة التي يعود بها الجسيم إلى نقطة القذف نتبع حركته اثناء الصعود حتى يتوقف ثم يرجع مرة ثانية.

اثناء الصعود معادلة الحركة هي – اخترنا المحور Y رأسياً لأعلى ونقطة القذف هـــي نقطـــة الأصل–

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g+\gamma v^2} = -2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\gamma v^2) = c_1 - 2\gamma y \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln(g+\gamma u^2)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g+\gamma v^2)=\ln(g+\gamma u^2)-2\gamma y \quad Or \quad y=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g+\gamma u^2}{g+\gamma v^2}\right)$$

ويقف الجسيم عند انعدام سرعته وبالتعويض عن $v=0$ في المعادلة السابقة نجد أن

$$y\Big|_{v=0}=Y=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g+\gamma u^2}{g}\right)=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(1+\frac{u^2}{u'^2}\right), \quad (u'^2=\frac{g}{\gamma})$$

و الآن باعتبار الحركة أثناء الهبوط ، سنأخذ في هذه الحالة نقطة السقوط هي نقطة الأصل الجديدة والمحور Y لإسفل ويكون الشرط الابتدائي هو $v=0$ عندما $y=0$ حيث v سرعة الجسيم عند أي لحظة اثناء السقوط. والآن بكتابة معادلة الحركة اثناء السقوط

$$mv\frac{dv}{dy}=mg-\gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g-\gamma v^2}=-2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\gamma v^2)=c_2-2\gamma y \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v=0$ عندما $y=0$ ومنها $c_2=\ln g$ وتأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\ln(g-\gamma v^2)=\ln g-2\gamma y \quad Or \quad y=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g-\gamma v^2}\right)$$

وتصبح سرعة الجسيم عند عودته إلى نقطة القذف أي عند ارتفاع Y هي

$$\frac{1}{2\gamma}\ln\left(1+\frac{u^2}{u'^2}\right)=\frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g-\gamma v^2}\right) \quad Or \quad 1+\frac{u^2}{u'^2}=\frac{g}{g-\gamma v^2}$$

$$\therefore \frac{u'^2+u^2}{u'^2}=\frac{g}{g-\gamma v^2} \quad \Rightarrow g-\gamma v^2=\frac{gu'^2}{u'^2+u^2} \quad \Rightarrow \gamma v^2=g-\frac{gu'^2}{u'^2+u^2}$$

$$v^2=u'^2-\frac{u'^4}{u'^2+u^2}=\frac{u'^2(u'^2+u^2)}{u'^2+u^2}-\frac{u'^4}{u'^2+u^2}$$
$$=\frac{u'^2u^2}{u'^2+u^2} \qquad \therefore v=\frac{uu'}{\sqrt{u^2+u'^2}} \quad (u'^2=\frac{g}{\gamma})$$

■ الشغل والطاقة Work and Energy

إذا تحركت نقطة مادية تحت تأثير قوة يُقال أن القوة بذلت شغلاً ويُعرف الشغل المبذول بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة التي تحركتها النقطة المادية في اتجاه تأثي القوة أي أن

$$W = \underline{F}.\underline{r} = F\,r\cos\theta$$

لاحظ أن المركبة العمودية على متجه الازاحة لا تبذل شغلاً. العلاقة السابقة التي تُعطي الشغل تستخدم حينما تكون القوة غير متغيرة أما إذا كانت القوة متغيرة فإن الشغل المبذول في ازاحة صغيرة $d\underline{r}$ هو

$$dW = \underline{F}.d\underline{r} = F\,dr\cos\theta$$

ويكون الشغل الكلي المبذول يُعطى بالعلاقة $W = \int \underline{F}.d\underline{r}$ و هو كمية قياسية وإذا كانت $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن الشغل يكون

$$W = \int F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

<u>وحدات الشغل</u> و يقاس الشـــغل بوحـــدات الأرج أو الجـــول حيـــث $\text{Joule} = 10^7\ \text{erg}$ ، $\text{erg} = \text{dyne} \times \text{cm}$

■ <u>الطاقة</u> وتعرف على أنها مقدرة الجسم على بذل شغل و وحداتها هي نفس وحدات الشغل وهناك نوعان

■ طاقة الحركة

تعرف طاقة الحركة لجسيم كتلته m و سرعته v بالعلاقة $T = \frac{1}{2}mv^2$ و هي كمية قياسية موجبة وتقاس بالشغل المبذول بواسطة قوة في تحريك الجسيم حتى يصل إلى حالة الســـكون وحيث أن

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r} = \int_1^2 m\ddot{\underline{r}}.d\underline{r} = \int_1^2 m\ddot{\underline{r}}.\frac{d\underline{r}}{dt}dt$$
$$= m\int_1^2 \ddot{\underline{r}}.\dot{\underline{r}}\ \ dt = \frac{1}{2}m\int_1^2 \frac{d}{dt}\ \dot{\underline{r}}^2\ \ dt = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1$$

وتعرف هذه القاعدة بقاعدة الشغل والطاقة.

■ طاقة الوضع

في الديناميكا عادة تسمى طاقة الجهد U بطاقة الوضع لأن الجسيم يكتسب طاقة نتيجة لموضعه. تعرف طاقة الجهد او طاقة الوضع بأنها الشغل المبذول ضد القوة المؤثرة على الجسيم في تحريكه من نقطة إلى أخرى فإذا كان الشغل المبذول هو W طاقة الجهد بين الموضعين $1,2$ هي

$$U_2 - U_1 = -W_{1\to 2} = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

ويمكن أعتبار أن طاقة الوضع لجسيم كتلته m وعلى ارتفاع h من سطح الأرض تساوي الشغل المبذول اثناء هبوطه نفس المسافة حتى يعود غلى سطح الأرض أي أن

$$U = Fh = mgh$$

وطاقة الجهد هي دالة قياسية تعتمد على الموضع فقط ولا تعتمد على الزمن صراحةً. العلاقة السابقة

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

و التي تربط القوة مع طاقة الجهد هي علاقة خاصة – ليست صحيحة لجميع أنواع القوى – ولكنها صحيحة لبعض أنواع القوى وتسمى القوى المحافظة. لاحظ أن وحدات طاقة الجهد هي نفسها وحدات الشغل.

■ مبدأ ثبوت الطاقة

ينص هذا المبدأ على أن الطاقة لا تفنى ولا تستحدث من العدم بليمكن تحويلها من صورة إلى اخرى وفي حالة الطاقة الميكانيكية فإن مجموع طاقتى الحركة و الوضع لجسم ما مقدار ثابت.

من المعادلة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ والمعادلة $T_2 - T_1 = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ نجد أن

$$U_2 - U_1 = -(T_2 - T_1) \qquad \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

ونستنتج أن مجموع طاقتي الحركة والجهد يساوي مقداراً ثابتاً ويرمز له بالرمز E والذي يمثل الطاقة الكلية للجسم و هذا هو مبدأ ثبوت الطاقة والذي يمكن كتابته في الصورة

$$T + U = E$$

■ القدرة

في الآلات فإننا نهتم بالشغل المبذول بواسطة الآلة في وقت محدد و هو ما يقيس قدرة الآلة. و تعرف القدرة بأنها المعدل الزمني للشغل المبذول ويرمز لها بالرمز P ، أي أن $P = \dfrac{dW}{dt}$ و حيث أن $dW = \underline{F}.d\underline{r}$ وبالتالي تكون القدرة $P = \dfrac{\underline{F}.d\underline{r}}{dt} = \underline{F}.\underline{v}$ حيث $\underline{v}$ هو متجه السرعة. وحدات القدرة منها الوات حيث $\text{Watt} = \text{Joule sec}^{-1}$ و أيضاً الكيلو وات حيث $\text{K.W.} = 10^3\ \text{Watt}$ و أيضاً الحصان حيث $\text{hp} = 745.7\,\text{Watt}$.

■ القوى والمجالات المحافظة

سبق أن ذكرنا أن القوى المحافظة هي التي تحقق العلاقة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ و نلاحظ أن الشغل المبذول بمثل هذه القوة في ازاحة جسيم من الموضع 1 إلى الموضع 2 لا يعتمد على نوع المسار ولكن فقط على موضعي البداية والنهاية

فإذا أعتبرنا $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن

$$dU = -\underline{F}.d\underline{r} = -\ \ F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

وحيث أن

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

وبمقانة العلاقتين الأخيرتين نجد أن

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

وعندما تحقق القوة $\underline{F}$ العلاقة الأخيرة فإنه يكون $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ حيث $\underline{\nabla} \wedge \underline{F}$ يسمى دوران القوة و يتعين من

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

و هذا هو الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً.

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثــ ١ ــال

اوجـــد الشـــغل الـــذي تبذلـــه القـــوة $\underline{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ لازاحـــة جســـيم الازاحـــة $\underline{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$.

الحـــــــل

الشغل المبذول W و الذي تبذله القوة $\underline{F}$ لازاحة جسيم الازاحة $\underline{r}$ يتعين من

$$W = \underline{F}.\underline{r} = \ 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \ . \ 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k} \ = 6 - 2 + 5 = 9$$

مثــ ٢ ــال

اثبت أن مجال القـــوة $\underline{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\,\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$ محـــافظ وأوجد دالة الجهد.

الحـــــــل

نعلم أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً هو $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} = &\left\{\frac{\partial}{\partial y}\ 3xy^2z^2 - 6x^2z\ - \frac{\partial}{\partial z}\ 2xyz^3\ \right\}\hat{i} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial z}\ y^2z^3 - 6xz^2\ - \frac{\partial}{\partial x}\ 3xy^2z^2 - 6x^2z\ \right\}\hat{j} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial x}\ 2xyz^3\ - \frac{\partial}{\partial y}\ y^2z^3 - 6xz^2\ \right\}\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = &(6xyz^2 - 6xyz^2)\hat{i} + (3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz)\hat{j} \\ &+ (2yz^3 - 2yz^3)\hat{k} = \underline{0} \end{aligned}$$

أي أن مجال القوة محافظ.لإيجاد دالة الجهد وحيث أن القوة محافظة ومن ثم تتحقق العلاقـــات التالية

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

أي أن

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(y^2z^3 - 6xz^2),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2xyz^3,$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = -(3xy^2z^2 - 6x^2z)$$

بتكامل المعادلات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y, z ثابتين – ، بالنسبة إلي y – مع بقاء x, z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x, y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + f_1(y,z),$$
$$U = -xy^2z^3 + f_2(x,z),$$
$$U = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + f_3(x,y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y,z) = c, \quad f_2(x,z) = 3x^2z^2 + c, \quad f_3(x,y) = c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = 3x^2z^2 - xy^2z^3$$

(في هذا المثال أوجد الشغل المبذول لتحريك الجسيم من الموضع $A(-2,1,3)$ إلى الموضع $B(1,-2,-1)$)

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= U_1 - U_2 = U(-2,1,3) - U(1,-2,-1) \\ &= 3(-2)^2(3)^2 - (-2)(1)^2(3)^3 - \; 3(1)^2(-1)^2 - (1)(-2)^2(-1)^3 \;\; = 155 \end{aligned}$$

مثـــ ٣ ـــال

جسيم كتلته $2m^2$ يتحرك على المحور OX (في خط مستقيم) تحت تأثير قوة محافظة. إذا كان الجسيم عند الموضعين x_1, x_2 عند اللحظتين t_1, t_2 على الترتيب و أن $U(x)$ هي طاقة الجهد و أن E هي الطاقة الكلية فاثبت أن $t_2 - t_1 = m\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$.

الحـــــل

نعلم أن الطاقة الكلية E هو مجموع طاقتي الحركة T والوضع $U(x)$ وهو مقدار ثابت ، أي أن

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

ولكن $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ومنها

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \quad \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\ E - U(x) \quad \text{Or}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,dt$$

باجراء التكامل بين الموضعين x_1, x_2 المناظرين للحظتين t_1, t_2 نحصل على

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad \Rightarrow t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

وهو المطلوب اثباته.

مثـــ ٤ ـــال

في المثال السابق إذا كانت طاقة الجهد تعطى بالعلاقة $U(x) = \frac{1}{2}mk^2x^2$ وأن الجسيم بـــدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فاثبت أن $x = a\cos kt$.

الحـــــــل

حيث أن الجسيم بدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فإن الطاقة الكلية تعين من

$$E = T + U(x = a) = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}mk^2a^2 = \frac{1}{2}mk^2a^2$$

بتكامل المعادلة $\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = dt$ بين الموضعين (موضع البداية a وموضع عــام x المناظرين للزمنين $t = 0$ والزمن t على الترتيب)

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = \int_0^t dt \qquad \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}mk^2a^2 - \frac{1}{2}mk^2x^2}} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = t\Big|_0^t = t$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)}_{\pi/2} = kt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = kt + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = a\cos\ kt$$

<u>لاحظ أن</u> $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم كتلتــه m في المســتوى XY بحيــث أن متجــه موضــعه يــتعين مــن $\underline{r} = a\cos\omega t\,\hat{i} + b\sin\omega t\,\hat{j}$ حيث a, b, ω ثوابت أثبت أن القوة المؤثرة علــى الجســم محافظة و أوجد طاقة الجهد و طاقة الحركة عند أي موضع و تحقق من مبدأ ثبوت الطاقة.

الحــــــل

$$\because\ \underline{r} = a\cos\omega t\,\hat{i} + b\sin\omega t\,\hat{j} \quad = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\hat{i} + b\omega\cos\omega t\,\hat{j} \qquad \text{and}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\hat{j} = -\omega^2(x\,\hat{i} + y\,\hat{j})$$

وحيث أن القوة المؤثرة على الجسم تتعين من

$$\underline{F} = m\underline{a} = -m\omega^2\ \ x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

يكون مجال القوة محافظاً إذا تحقق $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = -m\omega^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

وبالتالي فإن مجال القوة محافظ. لإيجاد طاقة الجهد نستخدم العلاقة $\underline{F} = -\underline{\nabla} U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m\omega^2 x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = m\omega^2 y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

بتكامل العلاقات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y,z ثابتين – ، بالنسبة إلي y – مع بقاء x,z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x,y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + f_1(y,z),$$
$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + f_2(x,z),$$
$$U = f_3(x,y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 c,$$
$$f_2(x,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + c,$$
$$f_3(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \quad x^2 + y^2$$

طاقة الحركة تتعين من – حيث $\underline{v} = -a\omega \sin\omega t\,\hat{i} + b\omega\cos\omega t\,\hat{j}$ –

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \quad a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t$$

وللتحقق من مبدأ ثبوت الطاقة

$$
\begin{aligned}
E = T + U &= \frac{1}{2}m\omega^2 \;\; a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t \;\; + \frac{1}{2}m\omega^2 \;\; a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + b^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)) \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2) = \text{Constant}
\end{aligned}
$$

■ Problems مســـــائل ■