مقدمة

INTRODUCTION

1-1 ما هي المعادلة التفاضلية الجزئية؟

المعادلة التفاضلية الجزئية تصف العلاقة بين دالة - أو دوال - مجهولة ومشتقاتها الجزئية. وهي موجودة في الواقع، في كل مجال من المجالات التي يوجد فيها تفاعل بين عدد من المتغيرات المستقلة، وعندما نحاول تحديد دوال في هذه المتغيرات وتكوين أنموذج لهذا التفاعل؛ عن طريق بناء المعادلات لهذه الدوال، وعندما تكون قيمة الدالة (الدوال) المجهولة عند نقطة معينة؛ تعتمد فقط على ما يحدث في جوار هذه النقطة؛ فإننا بشكل عام، نحصل على معادلة تفاضلية جزئية.

الصيغة العامة لمعادلة تفاضلية جزئية لدالة $u\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ تكون على الصورة:

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n},\ldots\right)=0 \qquad (1)$$

حيث $x_1,x_2,\ldots,x_n$ متغيرات مستقلة، و u الدالة المجهولة - المتغير التابع- و u_{x_i} ترمز للمشتقة التفاضلية الجزئية $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

بوجه عام، يصحب المعادلة التفاضلية الجزئية شروط إضافية. إذا أعطيت هذه الشروط عند لحظة زمنية، تمثل لحظة البداية، هذه الشروط تسمي الشروط الابتدائية *initial conditions* - كما في حالة المعادلات التفاضلية العادية - والشروط التي تتحقق عند حدود منطقة في الفراغ تسمى الشروط الحدية *boundary conditions*. أما المسائل المرتبطة

بالزمن فتعطى عادة شروطاً ابتدائية وأخرى حدية. وعندما تكون الشروط المعطاة في مسألة شروطاً ابتدائية؛ فإن المسألة تسمى بمسألة كوشي *Cauchy problem*.

هناك أنواع مختلفة من الشروط الحدية، أكثر هذه الشروط ظهوراً في مسائل الرياضيات التطبيقية والفيزياء الرياضية هي:

(1) شرط دريشلت *Dirichlet Condition*: حيث تُعطى قيم u على الحدود.

(2) شرط نيومان *Neumann Condition*: حيث تُعطى قيم $\frac{\partial u}{\partial n}$ على الحدود، حيث $\frac{\partial u}{\partial n}$ هي المشتقة الاتجاهية للدالة u، في اتجاه العمودي للخارج n على الحدود.

(3) الشرط المختلط *Mixed Condition*: هذا الشرط يكون على الصورة $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ لقيم x, y على الحدود، حيث h دالة متصلة معلومة معرفة على الحدود.

بالإضافة إلى هذه الشروط الثلاثة، والتي تعرف كذلك بالشرط الأول والثاني والثالث، على الترتيب؛ توجد شروط أخرى مثل شرط روبن *Robin Condition*، في هذا الشرط يتحقق أحد الشروط السابقة على جزء من الحدود، بينما يتحقق شرط آخر منها على بقية أجزاء الحدود.

بصفة عامة، تنشأ المعادلة التفاضلية الجزئية من أنموذج لمشكلة فيزيائية أو مشكلة هندسية. ولا يكون واضحاً، تلقائيا أن هذا النموذج مستقر؛ بمعنى أنه يؤدي إلى معادلة تفاضلية جزئية قابلة للحل. وعلاوة على ذلك؛ يكون المطلوب في معظم الحالات الحصول على حل وحيد مستقر تحت التغيرات الصغيرة في المعطيات. لذا فالفهم النظري للمعادلة التفاضلية يمكننا من تحقيق هذا المطلوب. كما سنرى في ما بعد، هناك طرق عديدة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية. كل طريقة تنطبق على فئة معينة من المعادلات التفاضلية الجزئية. ولذلك فمن المهم أن يكون هناك تحليل شامل للمعادلة، وللشروط الإضافية قبل - أو أثناء - حلها. والسؤال

الأساس: هو عماً إذا كانت المسألة التي تتكون من المعادلة وشروطها الإضافية قد صيغت جيدا؟ و للإجابة على هذا السؤال؛ قام الفرنسي هادامارد بدايةً بتعريف المسألة جيدة الصياغة *well-posed problem*.
ووفقا لتعريف هادامارد، نقول عن مسألة ما أنها جيدة الصياغة؛ إذا استوفت جميع الشروط التالية:

1. الوجود (*Existence*): يوجد للمسألة حل.
2. التفرد (*Uniqueness*): ليس هناك أكثر من حل واحد.
3. الاستقرار (*Stability*): التغيير الطفيف في المعادلة، أو في الشروط الإضافية؛ يؤدي إلى تغيير صغير في الحل.

الشرط الأول يتطلب وجود عدد غير كبير من الشروط الابتدائية والحدية، حتى لا نفقد إمكانية وجود حلول. الشرط الثاني يعني أن عدد الشروط الإضافية يجب أن لا يكون قليلاً، فيؤدي ذلك إلى وجود أكثر من حل. استقرار الحل يعني أن للتغييرات الصغيرة في المعطيات تأثيراً صغيراً على الحل. وهذا المفهوم يمكن دراسته سواء في نطاق محلي _ مثل فترة أو شريحة منتهية _ أو في نطاق غير منتهي.

إذا كان واحد أو أكثر من الشروط المذكورة أعلاه غير متحقق، نقول إن المسألة سيئة الصياغة *ill-posed problem*. ويمكن القول - إلى حد ما - إن المسائل الأساسية للفيزياء الرياضية كلها جيدة الصياغة. ومع ذلك؛ في بعض التطبيقات الهندسية؛ قد نجد مسائل سيئة الصياغة. عمليا، مثل هذه المشاكل هي غير قابلة للحل. لذلك، عندما نواجه مسألة سيئة الصياغة، ينبغي أن تكون الخطوة الأولى لتعديلها على النحو المناسب هو جعلها جيدة الصياغة.

عند تحديد طريقة الحل لمعادلة تفاضلية جزئية؛ فإننا نصنف المعادلة أولاً. هناك عدة تصنيفات للمعادلات التفاضلية الجزئية، سندرس بعضها في الفصول التالية، وسنعرض الآن بشيء من التفصيل تصنيفاً يعتمد على المفاهيم التالية:

- رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية:

The order of a Partial Differential Equation

التصنيف الأول للمعادلات التفاضلية؛ يكون حسب رتبة المعادلة. وتعرف الرتبة بأنها: رتبة أعلي مشتقة تفاضلية جزئية في المعادلة، فإذا كانت أعلى مشتقة في المعادلة هي من رتبة k، فإننا نقول إن المعادلة من رتبة k. فمثلا:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-u=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}+6x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

هي معادلات تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى، بينما:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية. والمعادلة $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$ من الرتبة الرابعة.

- خطية المعادلة التفاضلية الجزئية:

Linearity of a Partial Differential Equation

تصنيف أخر يضع المعادلة التفاضلية الجزئية في أحد شكلين: معادلات خطية، أو أخرى غير خطية. فيقال للمعادلة (1) إنها خطية؛ إذا كانت F دالة خطية في المجهول u، ومشتقاته التفاضلية. فمثلا المعادلة:

$$x^2y\frac{\partial u}{\partial x}+\left(x-y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}+yu=\sin\left(x+y\right)$$

هي معادلة خطية، بينما المعادلات:

$$x^2y\frac{\partial u}{\partial x}+\left(x-y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}+yu^2=0,\quad u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos u$$

هي معادلات غير خطية. المعادلات غير الخطية تصنف عادة إلى:

- ❖ معادلات شبه خطية ***Quasilinear equations***: (ونقول باختصار Q-خطية)؛ وذلك عندما تكون F (في المعادلة (1)) دالة خطية فقط في المشتقات العليا، مثل ذلك المعادلة $u_{xx}+u_{yy}=u_xu$.

- معادلات نصف خطية ***Semilinear equations***: (ونقول باختصار S - خطية)؛ إذا كانت F دالة غير خطية فقط في المجهول u، مثل ذلك المعادلة $u_{xx} + u_{yy} = u^2$.
- معادلات غير خطية ***Nonlinear equations***: إذا كانت F دالة غير خطية في المجهول u ومشتقاته التفاضلية.

عموما؛ يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة n في متغير تابع u، ومتغيرين المستقلين x, y على الصورة:

$$\sum_{i=0, j=0}^{i+j \le n} a_{ij}(x,y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \, \partial y^j} = R(x,y)$$

الدوال a_{ij} (تسمي بالمعاملات)، ودالة الطرف الأيمن R هي دوال في x, y، وقد تكون بعض المعاملات أو الطرف الأيمن مقادير ثابتة أو أصفاراً. ولكي تكون المعادلة التفاضلية من رتبة n؛ يجب أن يكون على الأقل معامل واحد $a_{ij} \ne 0$، بحيث $i + j = n$.

وعندما يكون الطرف الأيمن للمعادلة مساويا صفر؛ يقال إنها متجانسة *homogeneous*، وخلاف ذلك يقال: إن المعادلة غير متجانسة *nonhomogeneous*.

إذا كانت المشتقات الجزئية في المعادلة التفاضلية الخطية جميعها من الرتبة نفسها، أي إذا كان كل حد من حدود الطرف الأيسر، في المعادلة السابقة، له الرتبة نفسها، يقال: إنَّ هذه المعادلة ذات حدود متجانسة (*of homogeneous terms*) ونلفت النظر إلى عدم اللبس بين تجانس المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية، أي كونها متجانسة (انعدام الطرف الأيمن) وبين كونها ذات حدود متجانسة، أي كون المشتقات الجزئية جميعها من الرتبة نفسها. فالمعادلة:

$$u_{xxx} + xy^2 u_{xyy} - \sin x \, u_{yyy} = e^{x+y}$$

هي معادلة خطية ذات حدود متجانسة، لكنها غير متجانسة. أما المعادلة:

$$x u_{xx} + u_{yx} - y^2 u_{yy} = 0$$

فهي معادلة خطية متجانسة، وذات حدود متجانسة.

- المعادلات القياسية وأنظمة المعادلات:

Scalar equations and system of equations

يقال لمعادلة تفاضلية جزئية في مجهول واحد: إنها معادلة قياسية. في المقابل؛ يقال لمجموعة تتكون من عدد m من المعادلات، في عدد n من المجاهيل إنها نظام في m من المعادلات.

1-2 المعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء

Partial differential equations in Physics

تظهر المعادلات التفاضلية الجزئية دون استثناء في جميع فروع الفيزياء. فالقوانين الأساسية في الفيزياء تعطي وصفاً رياضياً لظواهر طبيعية، تعتمد على عاملي الزمان والمكان، ولذا فإن النماذج الرياضية لهذه الظواهر؛ تتضمن معادلة -أو معادلات -تفاضلية جزئية. على سبيل المثال: معادلات أويلر لديناميكا الأجسام الجاسئة ولحركة سائل مثالي، ومعادلات لاجرانج للحركة، ومعادلات هاملتون في الميكانيكا التحليلية، ومعادلة فورييه لانتشار الحرارة، ومعادلة كوشي، ومعادلة نافير في نظرية المرونة، ومعادلات نافير-ستوكس لحركة السوائل اللزجة، ومعادلات كوشي-ريمان في نظرية الدوال المركبة، ومعادلات كوشي-جرين للسلوك الساكن والديناميكي للمواد الصلبة المرنة، ومعادلات كيرشوف للدوائر الكهربائية، ومعادلات ماكسويل للحقول الكهرومغناطيسية، ومعادلة شرودنجر، ومعادلة ديراك في ميكانيكا الكم.

سنبين فيما بعد؛ كيفية اشتقاق بعض من هذه المعادلات. ولكننا نقدم النتائج التالية، والتي ستستخدم بكثرة فيما يلي:

تمهيدية (1): *إذا كانت f دالة متصلة على نطاق Ω في $\mathbb{R}^n$*، بحيث $\int_{\Omega_0} f(x)\,dx = 0$ *لكل* Ω_0 $(\Omega_0 \subseteq \Omega \subset \mathbb{R}^n)$، *فإن* $f \equiv 0$ *على* Ω.

تمهيدية (2): *نظرية رينولدز للانتقال:* ***Reynolds Transport Theorem***

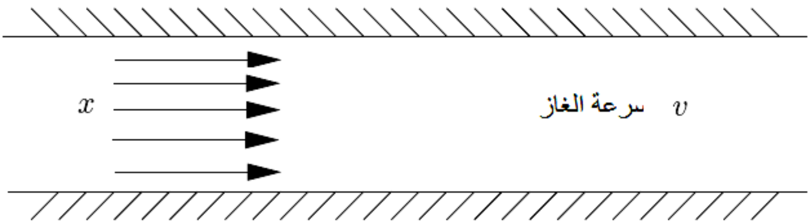
$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} u(x,t)\,dx = \int_{\Omega_t}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \nabla\cdot(uv)\right\}dx \qquad (2)$$

حيث v *ترمز للسرعة التي تتحرك بها نقاط الحيز* Ω_t *عند اللحظة* t.

الآن سنعرض عدداً من المعادلات التفاضلية الجزئية القياسية، التي تظهر في كثيرٍ من التطبيقات.

1- معادلة الاتصال (تدفق غاز، وتدفق المرور):
Continuity Equation (Gas Flow and Traffic Flow)

الآن نقدم وصفاً لظاهريتين فيزيائيتين مختلفتين، تدفق غاز في أنبوب والمرور على طريق سريع، حيث يمكن وصف تلك الظاهرتين بنفس المعادلة التفاضلية الجزئية، التي تسمى: معادلة الاتصال (أو الاستمرار). لتكن $\rho(x,t)$ كثافة غاز يتدفق (داخل أنبوب) بسرعة $v\,(x,t)$ في اتجاه x. إذا كان $\Omega_t := [x_1(t), x_2(t)]$ مقطعاً من الغاز المتحرك، حيث $x\,(t)$ هو الموضع x عند اللحظة t،



فإن كمية الغاز في هذا المقطع هي:

$$M_t = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)\,dx$$

بتطبيق تمهيدية (2) نحصل على:

$$\frac{dM_t}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right] dx$$

بحسب قانون بقاء الكتلة، فإن $\frac{dM_t}{dt} = 0$. وبالتالي؛ فإن:

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right] dx = 0$$

لأي مقطع اختياري Ω_t. وبحسب التمهيدية (1) فإن:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \qquad (3)$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى، وتسمى بمعادلة الاتصال. المقدار $\rho v\left(x,t\right)$ يعبر عن كتلة الغاز الذي يعبر مقطع الأنبوب عند النقطة x واللحظة t. وللحصول على معادلة في متغير واحد (v أو ρ)؛ فإننا بحاجة إلى علاقة إضافية بين الكثافة ρ والسرعة v.

المعادلة (3) تصف أي تدفق. فإذا كانت ρ كثافة السيارات في جزء ما من طريق سريع، تسير عليه السيارات بسرعة v فإن:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v\right)=0$$

وحيث إن زيادة الكثافة ρ تعني؛ أن سرعة السير v تكون صغيرة فإن:

$$v=v_{\max}\left(1-\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$$

وعادةً؛ تُعطى دالة التدفق المروري بالصيغة:

$$f\left(\rho\right)=\left(\rho v\right)\left(x,t\right)=\rho v_{\max}\left(1-\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$$

وعندئذ تصبح المعادلة (3) على الصورة:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}f\left(\rho\right)=0$$

2- معادلة الحرارة: **The heat equation**

اعتبر كوبا من سائل ما كثافته ρ يشغل حجم P في $\mathbb{R}^3$، فإذا كانت $u\left(x,t\right)$ درجة حرارة السائل؛ فإن الطاقة الحرارية في حيز Ω من السائل $\left(\Omega\subseteq P\right)$ تعطى بالصيغة:

$$E_t:=\int_{\Omega}\rho C_P u\left(x,t\right)dx$$

حيث C_P ثابت، يحدد مقدار الطاقة اللازمة لرفع درجة حرارة وحدة الكتلة من السائل بمقدار درجة واحدة. وبفرض أن السائل ساكن، أي إن حجم الحيز Ω ثابت، فإنه:

$$\frac{dE_t}{dt}=\int_{\Omega}\rho C_P u_t\left(x,t\right)dx$$

وحيث إن التغير، في الطاقة الحرارية E_t يساوي مجموع كميات الحرارة المتدفقة خلال الحدود $\partial\Omega$ للحيز Ω، والطاقة المتولدة داخل الحيز Ω، (نتيجة لتفاعل كيميائي أو تسخين أو خلاف ذلك)، وفي حالة عدم وجود مصدر داخلي للطاقة؛ فإن كمية الحرارة المتدفقة عبر الحدود $\partial\Omega$، (وحيث إن الحرارة تنتقل من الأجسام الساخنة إلى الأجسام الأقل في درجة الحرارة) هي:

$$f = -k\,\nabla u$$

حيث $0<k$ ثابت، يسمى معامل التوصيل الحراري. وبالتالي:

$$\int_{\Omega} \rho\, C_P u_t\left(x,t\right)dx = -\int_{\partial\Omega} f\cdot n ds = \int_{\partial\Omega} k\,\nabla u\cdot n ds = \int_{\Omega} \nabla\cdot\left(k\,\nabla u\right)dx$$

وبتطبيق التمهيدية (1) نجد أن:

$$u_t = \alpha\nabla^2 u\left(x,t\right);\quad x\in P,\ t>0 \qquad (4)$$

حيث $0<\alpha := k/\rho C_P$. المعادلة (4) تسمى معادلة الحرارة، أو معادلة الانتشار.

وللحصول على مسألة جيدة الصياغة؛ نعتبر الشرط الابتدائي:

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right);\qquad x\in P$$

وأحد الشروط الحدية:

(1) شرط دريشلت: $u\left(x,t\right)=g\left(x,t\right)$ لكل x نقطة على الحدود ∂P، ولحظة $0\le t$.

(2) شرط نيومان: $\frac{\partial u}{\partial n}\left(x,t\right)=g\left(x,t\right)$ لكل x نقطة على الحدود ∂P، ولحظة $0\le t$.

(3) شرط روبن(المختلط): $\beta u\left(x,t\right)+\frac{\partial u}{\partial n}\left(x,t\right)=g\left(x,t\right)$ لكل x نقطة على الحدود ∂P، ولحظة $0\le t$.

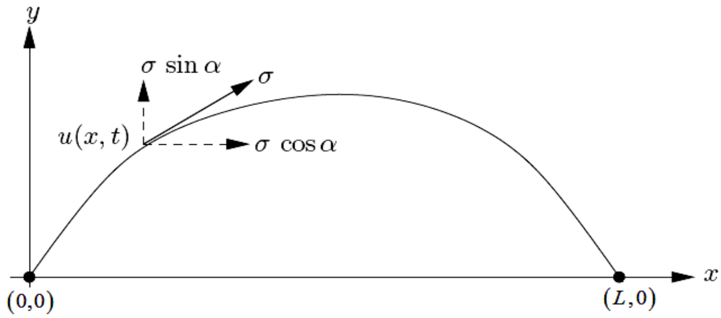
حيث g دالة معطاة على الحدود ∂P، لكل لحظة $0\le t$ و $0<\beta$.

3- اهتزاز وتر مرن مشدود: Vibrating String

إذا اعتبرنا وتراً مرناً مشدوداً بين نقطتين ثابتين، البعد بينهما L في اتجاه أفقي، كما بالشكل التالي.

لتبسيط المسألة، سنعتبر الفروض التالية:

(1) نظام الإحداثيات هو النظام الديكارتي، حيث نقطة الأصل عند إحدى نهايتي الوتر. وفي حالة السكون؛ يكون الوتر منطبقاً على محور x كما بالشكل:



(2) الوتر يتحرك في المستوى xy، عموديا على وضع السكون. أي إن الاهتزازات مستعرضة في اتجاه محور y. وبالتالي؛ فالإحداثي x يكون مستقلاً عن الزمن t.

اجعل $y=u(x,t)$ الدالة التي تعين الإحداثي y، لنقطة إحداثيها الأول x على الوتر عند اللحظة t أثناء اهتزاز الوتر. عند اللحظة t فإن جزء الوتر على أحد جانبي النقطة $(x,u(x,t))$؛ يشد جزء الوتر الآخر (على الجانب الآخر من النقطة) بقوة مقدارها σ، وفي اتجاه المماس عند هذه النقطة. وحيث إن الحركة رأسية في اتجاه محور y؛ فإن القوة المؤثرة ستكون هي المركبة الرأسية $\sigma\sin\alpha$ للشد σ، حيث α هي الزاوية بين الوتر عند النقطة $(x,u(x,t))$ واتجاه الموجب لمحور x. وبفرض أن الاهتزازات صغيرة؛ فإن $\sin\alpha(x,t)\simeq u_x(x,t)$.

فإذا اعتبرنا الجزء $[x_1,x_2]$ من الوتر؛ فإن مجموع القوى المؤثرة عليه عند اللحظة t يكون:

$$F=\sigma\sin\alpha(x_2,t)-\sigma\sin\alpha(x_1,t)$$

بينما تكون المركبات الأفقية للشد متزنة، أي إن

$$\sigma\cos\alpha(x_1,t)=\sigma\cos\alpha(x_2,t)$$

وعليه؛ إذا كانت القوة (للشد) σ ثابتة فإن:

$$F=\sigma\left\{u_x\left(x_2,t\right)-u_x\left(x_1,t\right)\right\}=\sigma\int_{x_1}^{x_2}u_{xx}\left(x,t\right)dx$$

وإذا اعتبرنا أن الوتر متجانس، أي إن كثافته -كتلة وحدة الطول- ρ ثابتة. عندئذ تكون كمية التحرك للجزء $\left[x_1,x_2\right]$ من الوتر هي:

$$I\left[x_1,x_2\right]=\rho\int_{x_1}^{x_2}u_t\left(x,t\right)dx$$

وبحسب قانون نيوتن الثاني؛ (*مجموع القوى المؤثرة يساوى التغير في كمية الحركة*) فإن:

$$\sigma\int_{x_1}^{x_2}u_{xx}\left(x,t\right)dx=\rho\int_{x_1}^{x_2}u_{tt}\left(x,t\right)dx$$

لأي x_1,x_2. وبتطبيق التمهيدية (1) نحصل على:

$$u_{tt}\left(x,t\right)=c^2u_{xx}\left(x,t\right);\quad 0<x<L,\ t>0 \qquad (5)$$

حيث $c=\sqrt{\sigma/\rho}$ مقدار ثابت. المعادلة (5) تسمى معادلة الموجة، (في بعد واحد).

للحصول على مسألة جيدة الصياغة؛ فإننا نحتاج إلى شروط إضافية، وحيث إن الوتر مثبت عند طرفيه؛ فإن ذلك يضيف الشروط الحدية:

$$u\left(0,t\right)=u\left(L,t\right)=0;\quad t\ge 0$$

ولتحديد حل وحيد فإننا نعتبر شروطاً ابتدائية تصف الوضع الابتدائي والسرعة الابتدائية، أي عند اللحظة $t=0$، مثل:

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=v_0\left(x\right);\quad 0<x<L.$$

إذا كان $x\in\mathbb{R}^3$ -في حالة دراسة اهتزازات وسط مرن- فإن معادلة الموجة (5) تكون على الصورة:

$$u_{tt}\left(x,t\right)=c^2\Delta u\left(x,t\right)$$

4- مزيد من معادلات العالم الحقيقي Further real world equations

- معادلة لابلاس **Laplace equation:**

واضح أن كثيراً من النماذج السابقة تحتوي على المؤثر:

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

هذا المؤثر يسمى مؤثر لابلاس (أو لابلاسيان) *Laplacian*.

المعادلة التفاضلية الجزئية -وربما كانت الأهم - هي معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ ، نسبة إلى الفرنسي لابلاس (1827-1749) الذي حصل على هذه المعادلة في 1780. حلول معادلة لابلاس تسمى بالدوال التوافقية *Harmonic functions*. تظهر معادلة لابلاس في تطبيقات كثيرة، على سبيل المثال: في مسائل التوصيل الحراري، والميكانيكا، والكهرومغناطيسية، ونظرية الاحتمالات، وميكانيكا الكم، والجاذبية، والبيولوجي، إلخ.

- معادلة الأسطح الرقيقة **The minimal surface equation:**

وجد الفرنسي لاجرانج في عام 1760 أن مساحة السطح للأغشية الرقيقة؛ تكون أصغر من مساحة السطح لكل سطح ينتج باضطراب صغير للغشاء. لذا تسمى مثل هذه السطوح بالسطوح الرقيقة. بَيَّنَ لاجرانج أن السطح الرقيق؛ هو الرسم البياني لحل المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية $\left(1+u_y^2\right)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left(1+u_x^2\right)u_{yy} = 0$.

- معادلة شرودنجر **The Schrödinger equation:**

واحدة من المعادلات الأساسية لميكانيكا الكم، والتي اكتشفها النمساوي شرودنجر في عام 1926. و معادلة شرودنجر تصف الحركة الموجية لجسيم في مجال الجهد V:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta u + Vu$$

حيث V دالة الجهد (معلومة)، m كتلة الجسيم، و $\hbar$ ثابت بلانك *Planck's constant* مقسوما على 2π.

- **معادلة إيكونال Eikonal equation**

رأينا فيما سبق إشتقاقين للمعادلة الموجية، أحدهما لموجة الصوت، والأخر لموجة مرنة (اهتزاز وتر مرن). كثيرُ من الظواهر الفيزيائية تمثل انتشار الموجات، من هذه الظواهر؛ الموجات الكهرومغناطيسية، وموجات الماء. بسبب اختلاف طول الموجة من ظاهرة لأخرى؛ فإن معادلة الموجة تأخذ صوراً مختلفة، فمثلا في البصريات الهندسية

Geometrical optics؛ حيث يكون طولُ الموجة للجزء المرئي من الطيف الضوئي مساويا نصف ميكرون (10^{-6} m) تقريبا، وللحصول على أنموذج لهذه الحالة، نبدأ بمعادلة الموجة في $\mathbb{R}^3$:

$$u_{tt} - c^2(x,y,z)\Delta u = 0.$$

ليس من الضروري أن تكون سرعة الموجة c مقداراً ثابتاً. باستخدام التعويض:

$$u(x,y,z,t) = e^{i\omega t}\psi(x,y,z)$$

نحصل على المعادلة:

$$\Delta\psi + k^2 n^2(x,y,z)\psi = 0 \qquad (6)$$

حيث $n = c_0/c(x,y,z)$, $k = \omega/c_0$ و c_0 متوسط سرعة الموجة في الوسط. المقدار n يسمى دليل الانكسار، والعدد k يسمى رقم الموجة.

في الواقع، طول الموجة يعطى بالصيغة $2\pi k^{-1}$، وحيث إن طول الموجة يكون أصغر بكثير من الأطوال الأخرى في المسألة؛ فإن العدد k يكون كبيراً جدا. هذه الحقيقية تستخدم في البحث عن حل للمعادلة (6) على الصورة:

$$\psi(x,y,z) = A(x,y,z;k)e^{ikS(x,y,z)}$$

تحت شرط أن الدالة A محدودة في المتغير k، أي إن

$$A\left(|\nabla S|^2 - n^2\right) = o\left(\frac{1}{k}\right)$$

ومن ثم؛ فإن الدالة S تحقق معادلة إيكونال *Eikonal equation*:

$$|\nabla S| = n(x,y,z)$$

أول من حصل على هذه المعادلة؛ هو الايرلندي هاملتون في عام 1827، وتمثل المعادلةُ الأساسَ لعلم البصريات الهندسية. وهذه المعادلة مفيدة للغاية في عديدٍ من التطبيقات في مجال البصريات، مثل: الرادار، والعدسات اللاصقة، وأجهزة العرض، والمرايا.

3-1 تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية

Constitution of Partial Differential Equations

في هذا الفصل؛ ندرس تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية أو نشأتها عند دراسة مسائل فيزيائية وهندسية.

أولاً: تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية؛ بحذف الثوابت الاختيارية

المعادلة التالية؛ تمثل عائلة (ثنائية البارامترات) من السطوح في $\mathbb{R}^3$:

$$\phi\left(x, y, z, a, b\right) = 0 \qquad (1)$$

حيث تعرف z كدالة في متغيرين مستقلين x, y، وتعتمد على ثابتين اختياريين a,b. بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x, y ينتج أن:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

وبحذف الثابتين a,b من المعادلات (1) و(2) نحصل على علاقة، بين المتغيرات x, y, z ومشتقات z الجزئية بالنسبة إلى كل من x, y، على الصورة:

$$\psi(x,y,z,p,q) = 0 \qquad (3)$$

حيث $p = z_x \, , \, q = z_y$. المعادلة (3) تفاضلية جزئية حلها العام (1).

كما سنري من الأمثلة التالية؛ أنه إذا كان عدد الثوابت الاختيارية في (1) مساويا لعدد المتغيرات المستقلة؛ فإن حذف هذه الثوابت يؤدي إلى ظهور معادلة تفاضلية جزئية واحدة من الرتبة الأولي. أما إذا كان عدد الثوابت الاختيارية أقل من عدد المتغيرات المستقلة؛ فإننا نحصل على أكثر من معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولي. بينما إذا كان عدد الثوابت الاختيارية أكثر من عدد المتغيرات المستقلة؛ ستظهر أكثر من معادلة تفاضلية جزئية من رتب أعلي من الرتبة الأولي.

مثال(1): احذف الثوابت الاختيارية a,b,c من العلاقات التالية، حيث z متغير تابع، و x, yمتغيران مستقلان :

$$1)\ z = a\left(x^2 + y\right) + c \qquad 2)\ z = \left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2$$

$$3)\ z = ax + by + c \qquad 4)\ z = ax + y$$

الحل:

1) العلاقة $z = a\left(x^2 + y\right) + c$؛ تحتوي على ثابتين اختياريين a,c، وكذلك تحتوي على متغيرين مستقلين x, y. وبالتفاضل في هذه

العلاقة بالنسبة إلى x مرة، وبالنسبة إلى y مرة أخرى، نحصل على $z_x = 2ax\,,\, z_y = a$.

وبالتالي؛ فإن حذف a من هاتين المعادلتين؛ يعطي $z_x = 2xz_y$. وهذه معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولي، والدرجة الأولي.

2) بتفاضل العلاقة $z = (x - a)^2 + (y - b)^2$، بالنسبة إلى x, y، نجد أن:

$$z_x = 2(x - a),\ z_y = 2(y - b)$$

وبحذف الثابتين a,b من هذه المعادلات؛ تنتج المعادلة:

$$z = \left(\frac{z_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_y}{2}\right)^2$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولي، والدرجة الثانية (غير خطية). ويمكن وضعها على الصورة $4z = z_x^2 + z_y^2$.

3) في العلاقة $z = ax + by + c$؛ واضح أن عدد الثوابت الاختيارية ثلاثة، بينما عدد المتغيرات المستقلة اثنان. بالتفاضل بالنسبة إلى x, y نحصل على $z_x = a \,,\, z_y = b$. وهذه العلاقات لا تكفي لحذف الثوابت a,b,c، لذا نلجأ إلى إجراء التفاضل مرة أخري في x, y فنجد أن:

$$z_{xx} = 0,\ z_{xy} = 0,\ z_{yy} = 0$$

وكلها معادلات من الرتبة الثانية، والدرجة الأولي.

4) عدد الثوابت الاختيارية في العلاقة $z = ax + y$ أقل من عدد المتغيرات المستقلة. بتفاضل العلاقة المعطاة بالنسبة إلى x, y؛ نحصل على $z_x = a,\, z_y = 1$. وبحذف الثابت الاختياري a تنتج المعادلتان:

$$z - y = xz_x,\ z_y = 1$$

وهما معادلتان تفاضليتان جزئيتان من الرتبة الأولي.

مثال (2):

أ- أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الكرات التي نصف قطر كل منها 2، ومركز كل منها يقع في المستوى $z = 0$.

ب- لأي f دالة؛ وضح أن المستويات $z=ax+by+f\left(a,b\right)$ هي حل لمعادلة كليروت (*Clairaut's equation*):

$$z=xz_x+yz_y+f\left(z_x,z_y\right)$$

ج- أثبت أن المعادلة الناتجة من حذف الثابتين الاختياريين a,b، من المعادلة $z=ax+h\left(a\right)y+b$ لأي h دالة اختيارية، هي معادلة تفاضلية جزئية الصورة $\phi\left(z_x,z_y\right)=0$، حيث ϕ دالة اختيارية.

الحل:

أ- معادلة الكرة التي نصف قطرها 2، ومركزها عند نقطة $(a,b,0)$ في المستوى $z=0$ هي:

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+z^2=4 \qquad (*)$$

وهذه المعادلة تعرف دالة ضمنية z في x,y، وتحتوي على ثابتين اختياريين a,b. بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلى x,y نجد أن:

$$2\left(x-a\right)+2zz_x=0,\quad 2\left(y-b\right)+2zz_y=0$$

ومنها بالتعويض عن $(y-b),(x-a)$ في معادلة الكرات (*)؛ نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات الرتبة الأولى $z^2\left(z_x^2+z_y^2+1\right)=4$.

ب- لحذف الثابتين الاختياريين a,b في المعادلة:

$$z=ax+by+f\left(a,b\right)$$

نفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلى x,y؛ لنحصل على $z_x=a,\ z_y=b$. ومنها بالتعويض عن a,b في معادلة المستويات المعطاة نحصل على معادلة كليروت:

$$z=xz_x+yz_y+f\left(z_x,z_y\right)$$

ج- تفاضل المعادلة $z=ax+h\left(a\right)y+b$ بالنسبة إلى x,y؛ يؤدي إلى $z_x=a,\ z_y=h\left(a\right)$.

وبالتـالي؛ فـإن المعادلـة التفاضـلية الجزئيـة الناتجـة بحـذف الثابـت الاختيـاري a هــي $z_y = h(z_x)$، والتــي يمكــن وضــعها علــى الصورة $\varphi(z_x, z_y) = 0$.

مثال(3): في العلاقات التالية؛ إذا كـان z متغيـراً تابعـاً، و x, y متغيـرين مستقلين، كون المعادلة التفاضلية بحذف الثابتين a,b:

$$1)\ z = a e^{bx} \sin by \qquad\qquad 2)\ z = ax^2 + by^2 + ab$$

$$3)\ axz + byz + abxy = 0$$

الحل:

1) بتفاضل طرفي $z = a e^{bx} \sin by$ بالنسبة إلى x, y ينتج أن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = abe^{bx} \sin by \qquad (*)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ab\, e^{bx} \cos by \qquad (**)$$

بتفاضل $(*)$ بالنسبة إلى x، وتفاضل $(**)$ بالنسبة إلى y نحصل على:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ab^2 e^{bx} \sin by, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -ab^2 e^{bx} \sin by$$

بجمع هاتين المعادلتين، نحصل على معادلة لابلاس في المستوى:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

2) بتفاضل طرفي $z = ax^2 + by^2 + ab$ بالنسبة إلى x, y؛ نجد أن:

$$z_x = 2ax, \quad z_y = 2by$$

ومنها؛ فإن التعويض عن a,b في العلاقة المعطاة يعطي:

$$4xyz = 2x^2 yz_x + 2y^2 xz_y + z_x z_y$$

3) بتفاضل العلاقة المعطاة:

$$axz + byz + abxy = 0 \qquad \text{(i)}$$

بالنسبة إلى x, y نحصل على:

$$az + axp + byp + aby = 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$axq + bz + byq + abx = 0 \qquad \text{(iii)}$$
بضرب المعادلة (ii) في x، والطرح من (i) نحصل على:
$$byz - x(ax + by)z_x = 0 \qquad (*)$$
كذلك بضرب المعادلة (iii) في y، و طرحها من (i)؛ ينتج أن:
$$axz - y(ax + by)z_y = 0 \qquad (**)$$
من (*)،(**) بالجمع نحصل على:
$$(ax + by)z = (ax + by)(xz_x + yz_y)$$

ومنها؛ بقسمة الطرفين على $(ax + by)$؛ نحصل على المعادلة التفاضلية:
$$z = xz_x + yz_y$$

مثال (4): احذف الثوابت الاختيارية a,b,c من العلاقة:
$$z = ax + by + cxy$$

الحل: بالتفاضل بالنسبة إلى x, y في طرفي:
$$z = ax + by + cxy \qquad (*)$$
نجد على الترتيب أن:
$$z_x = a + cy \qquad (**)$$
$$z_y = b + cx \qquad (***)$$
المعادلات (*) ـــ (***) غير كافية لتعيين a,b,c، لذلك نفاضل (***) بالنسبة إلى x، (أو نفاضل (**) بالنسبة إلى y)، فنجد أن $c = z_{xy}$.
وبالتعويض عن c في (**) و(***) نحصل على:
$$a = z_x - yz_{xy},\ b = z_y - xz_{xy}.$$
وهكذا؛ فإن التعويض عن a,b,c في (*) يؤدي إلى:

$$z=\left(z_x-yz_{xy}\right)x+\left(z_y-xz_{xy}\right)y-xyz_{xy}$$

أو بصورة بسيطة:

$$.z=xz_x+yz_y-xyz_{xy}$$

هذه إحدى المعادلات التي يمكن الحصول عليها من العلاقة (*)؛ بحذف الثوابت الاختيارية، وذلك لأن عدد الثوابت الاختيارية يزيد عن عدد المتغيرات المستقلة. يمكن الحصول كذلك على المعادلات:

$$.z_{xx}=0,\ z_{yy}=0$$

ثانياً: تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية بحذف الدوال الاختيارية

تنشأ كثير من المعادلات التفاضلية الجزئية عن حذف دالة اختيارية واحدة أو أكثر، تدخل ضمن علاقة تربط بين متغير تابع وعدة متغيرات مستقلة. وقد تكون للدالة الاختيارية متغير واحد أو عدة متغيرات، هي دوال في المتغير التابع و المتغيرات المستقلة على وجه العموم.

لنعتبر الدالة الاختيارية :

$$\phi(u,v)=0 \qquad (4)$$

حيث كل من u,v دالة معلومة، في المتغير التابع z، والمتغيرين المستقلين x,y، أي إن:

$$u=u(x,y,z),\quad v=v(x,y,z) \qquad (5)$$

بتفاضل (4) بالنسبة إلى x نحصل على:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad (6)$$

حيث $.p=z_x$

بالمثل؛ فإن تفاضل (4) بالنسبة إلى y تعطي:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad (7)$$

حيث $.q=z_y$

حذف $\frac{\partial\phi}{\partial u},\ \frac{\partial\phi}{\partial v}$ من المعادلتين (6) و(7)؛ يعني أن

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}+p\,\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial x}+p\,\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}+q\,\dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial y}+q\,\dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

هذه المعادلة؛ يمكن وضعها على الصورة:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}p+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}q=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \qquad (8)$$

حيث:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

وبوضع $\Phi=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)},\Psi=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)},R=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ تصبح المعادلة (8) على الصورة:

$$\Phi(x,y,z)z_x+\Psi(x,y,z)z_y=R(x,y,z) \qquad (9)$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية شبه خطية، من الرتبة الأولي والدرجة الأولى، تنتج بحذف الدالة الاختيارية ϕ من المعادلة (4). المعادلة (9) تسمي بمعادلة لاجرانج التفاضلية الجزئية. وهكذا؛ فإن حذف دالة اختيارية واحدة؛ يعطي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولي.

في الحالة عندما تعطى الدالة z بتعبير على الصورة:

$$z=\phi(u)+\psi(v) \qquad (10)$$

حيث ϕ,ψ دالتان اختياريتان في u,v على الترتيب، وكل من u,v دالة معلومة في x,y.

بالتفاضل في طرفي المعادلة (10)، بالنسبة إلى كل من x,y نجد أن:

$$z_x=\phi'(u)u_x+\psi'(v)v_x,\ \ z_y=\phi'(u)u_y+\psi'(v)v_y$$

ومن ثم فإن:

$$z_{xx}=\phi''(u)u_x^2+\psi''(v)v_x^2+\phi'(u)u_{xx}+\psi'(v)v_{xx},$$

$$z_{xy}=\phi''(u)u_xu_y+\psi''(v)v_xv_y+\phi'(u)u_{xy}+\psi'(v)v_{xy},$$

$$z_{yy}=\phi''(u)u_y^2+\psi''(v)v_y^2+\phi'(u)u_{yy}+\psi'(v)v_{yy}$$

وهكذا فإننا لدينا خمس معادلات، تتضمن أربع دوال اختيارية $\phi',\phi'',\psi',\psi''$. بحذف هذه الدوال الاختيارية من المعادلات الخمسة نحصل على العلاقة:

$$\begin{vmatrix} z_x & u_x & v_x & 0 & 0 \\ z_y & u_y & v_y & 0 & 0 \\ z_{xx} & u_{xx} & v_{xx} & u_x^2 & v_x^2 \\ z_{xy} & u_{xy} & v_{xy} & u_x u_y & v_x v_y \\ z_{yy} & u_{yy} & v_{yy} & u_y^2 & v_y^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

وهذه معادلة تتضمن المشتقات التفاضلية الجزئية $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$، ودوال معلومة في x, y. ولذلك؛ فإن (11) معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية. يمكن وضع المعادلة (11) على الصورة:

$$Pz_{xx} + Qz_{xy} + Rz_{yy} + Sz_x + Tz_y = W \qquad (12)$$

حيث P, Q, R, S, T, W دوال معلومة في x, y.

بوجه عام؛ فإن تطبيق الطريقة السابقة على علاقة على الصورة:

$$z = \sum_{k=1}^{n} f_k\left(u_k\right)$$

حيث $f_1, f_2, \ldots, f_n$ دوال اختيارية، و $u_1, u_2, \ldots, u_n$ دوال معلومة في x, y، يؤدي إلى معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة n.

مثال (5): احذف الدالتين الاختياريتين ϕ, ψ من العلاقات الآتية؛ لتكوين معادلات تفاضلية جزئية منها:

$$1)\; z = x^2\phi(x-y) \qquad 2)\; \psi\left(z/x^2, x-y\right) = 0$$

$$3)\; xyz = \phi(x+y+z) \qquad 4)\; z = \phi(xy) + \psi(x+y)$$

حيث z هو المتغير التابع، بينما x, y هما المتغيران المستقلان.

الحل:

1) إذا كان:

$$z = x^2\phi(x-y) \qquad (1)$$

فإننا بالتفاضل بالنسبة إلى x, y نحصل على:

$$\begin{aligned} z_x &= 2x\,\phi(x-y)+x^2\phi'(x-y), \\ z_y &= -x^2\,\phi'(x-y) \end{aligned} \qquad (2)$$

ومن (1) و (2) فإن:

$$\phi(x-y)=\frac{z}{x^2}, \quad \phi'(x-y)=-\frac{z_y}{x^2}$$

بالتعويض عن ϕ و ϕ' في (2) نحصل على:

$$z_x = 2x\left(z/x^2\right)-x^2\left(z_y/x^2\right)$$

وبالتالي نحصل على $x\left(z_x+z_y\right)=2z$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولي.

2) بفرض $u=z/x^2,\ v=x-y$ تصبح المعادلة المعطاة على الصورة $\psi(u,v)=0$. وبالتفاضل بالنسبة إلى كل من x, y نحصل على:

$$\left(\frac{-2z}{x^3}+\frac{z_x}{x^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}=0, \quad z_y\frac{\partial\psi}{\partial u}-x^2\frac{\partial\psi}{\partial v}=0$$

وهما معادلتان خطيتان في $\frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v}$.

حذف $\frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v}$ من هاتين المعادلتين يؤدي إلى المعادلة التفاضلية الجزئية $\left(xz_x-2z\right)+xz_y=0$. أو إلى المعادلة التفاضلية على الصورة $x\left(z_x+z_y\right)=2z$.

هي المعادلة التفاضلية نفسها في المثال السابق. و قد يظن أن هذه المعادلة تقبل حلين. لكنهما في الحقيقة حل واحد. فيمكن كتابة $z=x^2\phi(x-y)$ على الصورة $z/x^2=\phi(x-y)$. وهذه تعني وجود دالة ψ، تجعل المعادلة الأخيرة على الصورة $\psi\left(z/x^2, x-y\right)=0$.

3) أعطينا $xyz = \phi(x+y+z)$. وبالتفاضل بالنسبة إلى كل من x, y ينتج أن:

$$yz + xyz_x = (1+z_x)\phi'(x+y+z)$$
$$xz + xyz_y = (1+z_y)\phi'(x+y+z)$$

الآن؛ فإن حذف ϕ' من هاتين المعادلتين يعطي المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(1+z_y)(yz + xyz_x) = (1+z_x)(xz + xyz_y)$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الاولى. ويمكن وضعها على الصورة

$$x(y-z)z_x + y(z-x)z_y = z(x-y)$$

4) إذا $z = \phi(xy) + \psi(x+y)$. فإنه بالتفاضل بالنسبة إلى كل من x, y نجد أن:

$$\begin{aligned} z_x &= y\phi'(xy) + \psi'(x+y) \\ z_y &= x\phi'(xy) + \psi'(x+y) \end{aligned} \qquad (*)$$

هذه المعادلات لا تكفي لحذف ϕ, ψ, ϕ', ψ'. لذا فإننا نفاضل طرفي المعادلتين الأخيرتين بالنسبة إلى كل من x, y فنحصل على:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= y^2\phi''(xy) + \psi''(x+y) \\ z_{xy} &= \phi'(xy) + xy\phi''(xy) + \psi''(x+y) \\ z_{yy} &= x^2\phi''(xy) + \psi''(x+y) \end{aligned} \qquad (**)$$

الآن؛ يمكن حذف $\phi', \psi', \phi'', \psi''$ من المعادلات $(*)$، و$(**)$ لنحصل على:

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 & -z_x \\ x & 1 & 0 & 0 & -z_y \\ 0 & 0 & y^2 & 1 & -z_{xx} \\ 1 & 0 & xy & 1 & -z_{xy} \\ 0 & 0 & x^2 & 1 & -z_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(x+y)(z_x-z_y)+x(y-x)z_{xx}$$
$$+(x^2-y^2)z_{xy}+(y-x)z_{yy}=0$$

وهى معادلة خطية من الرتبة الثانية.

مثال(6): إذا كان c مقداراً ثابتاً و ϕ,ψ دالتين اختياريتين، فأوجد المعادلة التفاضلية الجزئية التي تنشأ عن حذف الدوال الاختيارية، في كل من العلاقات التالية:

$1)\ z=\phi(x+cy)+\psi(x-cy)$

$2)\ z=x\psi(y/x)$

$3)\ \phi(z/x^3,y/x)=0$

الحل:

1) إذا كانت $z=\phi(x+cy)+\psi(x-cy)$. بالتفاضل بالنسبة إلى كل من x,y نجد أن:

$$z_x=\phi'(x+cy)+\psi'(x-cy),\quad z_y=c\phi'(x+cy)-c\psi'(x-cy)$$

وبتكرار التفاضل في كل من x,y ينتج أن:

$$z_{xx}=\phi''(x+cy)+\psi''(x-cy),$$
$$z_{yy}=c^2\phi''(x+cy)+c^2\psi''(x-cy)$$

من العلاقتين الأخيرتين نحصل على معادلة الحركة الموجية

$$z_{yy}=c^2z_{xx}$$

2) بالتفاضل بالنسبة إلى كل من x,y، في طرفي العلاقة $z=x\psi(y/x)$ نحصل على:

$$z_x=\psi\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)\psi'\left(\frac{y}{x}\right),\quad z_y=\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبحذف ψ,ψ' من المعادلات الثلاثة تنتج المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$xz_x+yz_y=z$$

3) بوضع $u\left(x,y,z\right)=z/x^3,\ v\left(x,y,z\right)=y/x$ تصبح المعادلة المعطاة على الصورة $\phi(u,v)=0$. وحيث إنَّ حذف ϕ يعطي المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}z_x+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}z_y=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \qquad (*)$$

وحيث إن:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3z}{x^4} & -\frac{y}{x^2}\\ 0 & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=-\frac{3z}{x^5},$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}u_z & v_z\\ u_x & v_x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{x^3} & 0\\ -\frac{3z}{x^4} & -\frac{y}{x^2}\end{vmatrix}=-\frac{y}{x^5},$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}u_y & v_y\\ u_z & v_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{x}\\ \frac{1}{x^3} & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{x^4}$$

فإن المعادلة $(*)$ تصبح على الصورة $\frac{1}{x^4}z_x+\frac{y}{x^5}z_y=\frac{3z}{x^5}$. وبضرب الطرفين في x^5 نحصل على $xz_x+yz_y=3z$.

مثال(7): احذف الثوابت الاختيارية a,b، والدالة الاختيارية ϕ من العلاقات الآتية:

$$1)\ z=ax^2+\phi(y) \qquad 2)\ z=\frac{1}{2}\left(a^2+2\right)x^2+axy+bx+\phi(ax+y)$$

الحل:

1) إذا كانت $z=ax^2+\phi(y)$. فإنه بالتفاضل بالنسبة إلى كل من x,y؛ نحصل على $z_x=2ax,\ z_y=\phi'(y)$. وبالتفاضل مرة ثانية بالنسبة إلى

كل من x,y؛ ينتج أن $z_{xx}=2a,\ z_{xy}=0$. من هذه العلاقات يمكن الحصول على $xz_{xx}-z_x=0\ ,\ z_{xy}=0$

وهي معادلات تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية.

2) إذا كانت $z=\frac{1}{2}\left(a^2+2\right)x^2+axy+bx+\phi\left(ax+y\right)$؛ فإن التفاضل بالنسبة إلى كل من x,y يعطي:

$$z_x=x\left(a^2+2\right)+ay+b+a\phi'\left(ax+y\right),$$
$$z_y=ax+\phi'\left(ax+y\right),$$
$$z_{xx}=a^2\phi''\left(ax+y\right)+a^2+2,$$
$$z_{xy}=a\left\{1+\phi''\left(ax+y\right)\right\},$$
$$z_{yy}=\phi''\left(ax+y\right)$$

ومن المعادلات الثلاثة الاخيرة؛ نجد أن:

$$z_{xx}=a^2\left\{1+z_{yy}\right\}+2,\quad z_{xy}=a\left\{1+z_{yy}\right\}$$

وبالتالي فإن:

$$z_{xy}^2=a^2\left\{1+z_{yy}\right\}^2=\left\{z_{xx}-2\right\}\left\{1+z_{yy}\right\}=z_{xx}z_{yy}+z_{xx}-2z_{yy}-2$$

ومنها نحصل على $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2+z_{xx}-2z_{yy}=2$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية غير خطية، من الرتبة الثانية.

1-4 حل المعادلات $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$

بالإضافة إلى أهمية مجموعة المعادلات التالية

$$\frac{dx}{P\left(x,y,z\right)}=\frac{dy}{Q\left(x,y,z\right)}=\frac{dz}{R\left(x,y,z\right)}\qquad(1)$$

في كثير من الاستنتاجات في الفيزياء النظرية، على سبيل المثال كما في النظرية العامة للتحولات المشعة، وكذلك في الميكانيكا التحليلية، فإن هذه المعادلات تؤدي دوراً مهماً في نظرية المعادلات التفاضلية، كما سنرى لاحقا. من الواضح هندسياً أن هذه المعادلات تصف مجموعة منحنيات،

لأيٍّ منها؛ يكون المتجه المماس $\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)$ عند نقطة (x,y,z) موازيا المتجه (P,Q,R). النظرية التالية؛ تناقش مسألة وجود حلول وحيدة للمعادلات من النوع (1).

نظرية (1): *إذا كانت* $f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)$ *دولاً متصلة على المنطقة:*

$$D:=\{(x,y,z): |x-a|<k, |y-b|<l, |z-c|<m\}$$

وإذا حققت هذه الدوال شرط ليبشتز على المنطقة D، أي:

$$|f_1(x,y,z)-f_1(x,\eta,\zeta)|\le A_1|y-\eta|+B_1|z-\zeta|$$

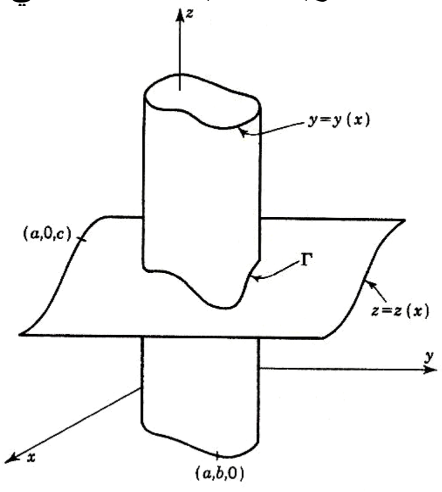
$$|f_2(x,y,z)-f_2(x,\eta,\zeta)|\le A_2|y-\eta|+B_2|z-\zeta|$$

فإنه يوجد العدد $\delta>0$، *بحيث لكل* x *في الفترة* $(a-\delta,a+\delta)$ *توجد دالتان وحيدتان* $y(x), z(x)$، *متصلتان، ولهما مشتقات متصلة على هذه الفترة بحيث:*

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,y,z),\qquad \frac{dz}{dx}=f_2(x,y,z) \tag{2}$$

بحيث $y(a)=b,\ z(a)=c$. *حيث* a,b,c *أعداد اختيارية.*

يمكن توضيح نتائج هذه النظرية هندسيا، بالشكل التالي:



بحسب النظرية؛ توجد أسطوانة $y=y(x)$ تمر بالنقطة $(a,b,0)$، وأسطوانة $z=z(x)$ تمر بالنقطة $(a,0,c)$، بحيث تتحقق المعادلات (2). وبالتالي؛ للمعادلات (2) حل يتكون من مجموعة النقاط المشتركة بين الأسطوانتين $y=y(x),\ z=z(x)$. أي إن هذا الحل هو منحنى تقاطعهما، ويمر بالنقطة (a,b,c). وحيث إن a,b,c أعداد اختيارية؛ فإن الحل العام للمعادلات (2) يتكون من المنحنيات الناتجة من تقاطع عائلة الأسطوانات، التي $y=y(x)$ عنصر منها، مع عائلة الاسطوانات التي تحوي الأسطوانة $z=z(x)$ كعنصر. وبالتالي؛ هذا الحل يعرف بالمعادلات:

$$u_1(x,y,z)=c_1,\quad u_2(x,y,z)=c_2 \tag{3}$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان. لإيجاد هذا الحل؛ فإننا نبحث عن الدوال P',Q',R' بحيث تكون الصيغة التفاضلية:

$$dW_1=\frac{P'dx+Q'dy+R'dz}{PP'+QQ'+RR'} \tag{4}$$

صيغة تفاضلية تامة. وبحسب قواعد التناسب؛ فإن النسبة في (4) تساوي أيا من النسب (1). بوضع:

$$dW_1=(1)\ \text{إحدى النسب}$$

والتكامل نحصل على عائلة السطوح في بارامتر واحد $u_1(x,y,z)=c_1$.

أيضا إذا وجدت الدوال P'',Q'',R''، بحيث تكون الصيغة التفاضلية:

$$dW_2=\frac{P''dx+Q''dy+R''dz}{PP''+QQ''+RR''} \tag{5}$$

صيغة تامة. فإن:

$$dW_2=(1)\ \text{إحدى النسب}$$

ومن ثم، نجد أن $dW_1=dW_2$. وبتكامل عائلة السطوح في بارامتر واحد. بالمثل يمكن تعيين عائلة السطوح $u_2(x,y,z)=c_2$.

مثال (1): أوجد المنحنيات التكاملية للمعادلات:

$$\frac{dx}{y(x+y)+az}=\frac{dy}{x(x+y)-az}=\frac{dz}{z(x+y)} \tag{6}$$

الحل: إذا أخذ $P'=Q'=1,\ R'=0$ نحصل على:

$$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=(6) \text{ إحدى النسب}$$

بوضع:

$$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=\frac{dz}{z\,(x+y)}$$

وبضرب الطرفين في $(x+y)$، ثم التكامل نحصل على السطح:

$$\frac{x+y}{z}=c_1$$

مرة ثانية؛ بأخذ $P''=x\,,\,Q''=-y\,,\,R''=0$، نحصل على:

$$\frac{xdx-ydy}{az\,(x+y)}=(6) \text{ إحدى النسب}$$

بمساواة هذه النسبة بالنسبة الثالثة في (6)، نحصل على:

$$\frac{xdx-ydy}{az\,(x+y)}=\frac{dz}{z\,(x+y)}$$

وبضرب الطرفين في $z\,(x+y)$، ثم التكامل نحصل على السطح:

$$\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)-az=c_2$$

وهكذا؛ فإن المنحنيات المطلوبة عائلة في بارامترين، تُعطى بالمعادلات

$$\frac{x+y}{z}=c_1, \quad \frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)-az=c_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

مثال (2): حل المعادلات:

$$\frac{dx}{y+\alpha z}=\frac{dy}{z+\beta x}=\frac{dz}{x+\gamma y} \qquad (7)$$

الحل: لأي أعداد λ,μ,υ؛ فإن النسبة التالية تساوي أيا من النسب (7)

$$\frac{\lambda dx+\mu dy+\upsilon dz}{\lambda(y+\alpha z)+\mu(z+\beta x)+\upsilon(x+\gamma y)} \qquad (8)$$

وهذه النسبة تعطي صيغة تفاضلية تامة، إذا كانت على الصورة:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\lambda dx+\mu dy+\upsilon dz}{\lambda x+\mu y+\upsilon z}$$

لأي عدد ρ. هذا يكون ممكنا فقط إذا تحقق الشرط:

$$\lambda(y+\alpha z)+\mu(z+\beta x)+\upsilon(x+\gamma y)=\rho(\lambda x+\mu y+\upsilon z)$$

ومن ذلك؛ نجد أن الصيغة (8) تكون تامة إذا كان

$$\left.\begin{aligned}-\rho\lambda+\beta\mu+\upsilon&=0\\ \lambda-\rho\mu+\gamma\upsilon&=0\\ \alpha\lambda+\mu-\rho\upsilon&=0\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

وهذه المعادلات الخطية يكون لها حل غير صفري (λ,μ,υ) فقط؛ إذا كان ρ جذرا للمعادلة:

$$\begin{vmatrix}-\rho & \beta & 1\\ 1 & -\rho & \gamma\\ \alpha & 1 & -\rho\end{vmatrix}=0$$

والتي يمكن وضعها على الصورة:

$$-\rho^3+(\alpha+\beta+\gamma)\rho+1+\alpha\beta\gamma=0\qquad(10)$$

للمعادلة (10) توجد ثلاثة جذور ρ_1,ρ_2,ρ_3. مقابل كل قيمة من قيم ρ، نوجد حل مجموعة المعادلات الجبرية (9). فإذا كان $(\lambda_i,\mu_i,\upsilon_i)$ الحل للمعادلات (9) الذي يناظر القيمة ρ_i لكل $i=1,2,3$، فإن كل من النسب:

$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\lambda_i dx+\mu_i dy+\upsilon_i dz}{\lambda_i x+\mu_i y+\upsilon_i z},\quad i=1,2,3\qquad(11)$$

تساوي أيا من النسب (7). لذا فإن هذه النسب متساوية، أي إن:

$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\lambda_i dx+\mu_i dy+\upsilon_i dz}{\lambda_i x+\mu_i y+\upsilon_i z}=\frac{1}{\rho_j}\frac{\lambda_j dx+\mu_j dy+\upsilon_j dz}{\lambda_j x+\mu_j y+\upsilon_j z}\qquad(12)$$

لكل $i,j\in\{1,2,3\}$.

وحيث إن كل من النسب (11) تعطي صيغة تفاضلية تامة؛ فإنه بتكامل المعادلات (12) نحصل على العلاقات التالية:

$$(\lambda_1 x+\mu_1 y+\upsilon_1 z)^{1/\rho_1}=c_1(\lambda_2 x+\mu_2 y+\upsilon_2 z)^{1/\rho_2}$$

$$(\lambda_1 x+\mu_1 y+\upsilon_1 z)^{1/\rho_1}=c_2(\lambda_3 x+\mu_3 y+\upsilon_3 z)^{1/\rho_3}$$

حيث c_1, c_2 عددان اختياريان. كل من هاتين العلاقتين تُعرف عائلة سطوح في بارامتر واحد. وبالتالي؛ فهما يُعرفان عائلة، ذات بارامترين، من المنحنيات التكاملية للمعادلات (7).

قبل أن نناقش بعض الحالات الخاصة للمعادلات (1) نسجل الملاحظتين التاليتين:

ملاحظة (1): في بعض الحالات يمكن الحصول بسهولة على واحدة من مجموعات السطوح من المعادلات (1)، ولكن ليس من السهل إيجاد المجموعة الثانية. عندما يحدث ذلك، فمن الممكن استخدام الحل الأول على النحو التالي. لنفترض، على سبيل المثال: أننا نحاول تحديد منحنيات تكاملية لمجموعة المعادلات التفاضلية (6)، وأنه أمكننا اشتقاق مجموعة السطوح:

$$\frac{x+y}{z}=c_1$$

لاستخدام هذا النتيجة للعثور على المجموعة الثانية من السطوح، فإننا نكتب $z=(x+y)/c_1$ في المتساوية الأولى من المعادلات (6)، ثم ضرب طرفي المعادلة الناتجة في $(x+y)$؛ تنتج المعادلة التفاضلية العادية:

$$\frac{dx}{y+a/c_1}=\frac{dy}{x-a/c_1}$$

التي يكون لها حل على الصورة:

$$(x-a/c_1)^2-(y+a/c_1)^2=c_2$$

حيث c_2 هو ثابت اختياري. هذا الحل يمكن كتابته على الصورة:

$$x^2-y^2-\frac{2a}{c_1}(x+y)=c_2$$

وهكذا نحصل على المنحنيات التكاملية:

$$\frac{x+y}{z}=c_1, \quad x^2-y^2-2az=c_2$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في مثال (1).

ملاحظة (2): بطريقة أكثر عمومية؛ يمكن إيجاد حل المعادلات (1) بارامترياً. لنعتبر، على سبيل المثال: أننا نناقش حل المعادلات (7)، في مثال (2). بوضع كل من النسب المتساوية (11) لتساوي dt، نحصل على العلاقات:

$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\lambda_i dx+\mu_i dy+\upsilon_i dz}{\lambda_i x+\mu_i y+\upsilon_i z}=dt$$

التي تُعطي عند تكامل طرفيها العلاقات البارامترية:

$$\lambda_i x+\mu_i y+\upsilon_i z=c_i e^{\rho_i t}$$

لكل $i=1,2,3$. هذه المعادلات البارامترية تعطي حل المعادلات (7).

نعود الآن لدراسة بعض الحالات الخاصة، التي يمكن فيها الدالة u_1 (وبالمثل u_2).

الحالة (1): إذا وجدت الدوال P',Q',R'، بحيث تتحقق العلاقة:

$$PP'+QQ'+RR'=0$$

وكانت $P'dx+Q'dy+R'dz$ صيغة تفاضلية تامة، عندئذ توجد دالة u_1، بحيث $\frac{\partial u_1}{\partial x}=P',\quad \frac{\partial u_1}{\partial y}=Q',\quad \frac{\partial u_1}{\partial z}=R'$

سوف نوضح هذه الطريقة بالمثال التالي:

مثال (3): حل المعادلات التالية:

$$\frac{dx}{x^2\left(y^3-z^3\right)}=\frac{dy}{y^2\left(z^3-x^3\right)}=\frac{dz}{z^2\left(x^3-y^3\right)}$$

الحل: عند أخذ $P'=x,Q'=y,R'=z$ يتضح أن:

$$PP'+QQ'+RR'$$
$$=x^3\left(y^3-z^3\right)+y^3\left(z^3-x^3\right)+z^3\left(x^3-y^3\right)=0$$

وتكـون $xdx+ydy+zdz=\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)$ صـيغة تفاضـلية تامة. وبالتالي؛ فإن $u_1=x^2+y^2+z^2$.

وبالمثل؛ إذا أخذنا $P''=\frac{1}{x^2},Q''=\frac{1}{y^2},R''=\frac{1}{z^2}$ نجد أن

$$PP'+QQ'+RR'=\left(y^3-z^3\right)+\left(z^3-x^3\right)+\left(x^3-y^3\right)=0$$

وأن $\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}+\frac{dz}{z^2}=-d\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ صـــيغة تفاضـــلية تامـــة.

وهكذا؛ نحصل على $u_2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

ولذلك؛ يكون الحل المطلوب على الصورة:

$$x^2+y^2+z^2=c_1,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c_2$$

الحالة (2): عندما تخلو إحدى المعادلات (1) من أحد المتغيرات، فإننا نستطيع الحصول على حل المعادلات (1) بسهولة. بفرض أنه يمكن كتابة المعادلـة $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}$ علـى الصـورة $\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)$. فـإن هـذه المعادلـة التفاضلية العادية يكون لها حل، ليكن على الصيغة $\phi\left(x,y,c_1\right)=0$. بحل هذه المعادلة في y والتعويض عن قيمة y للحصول على المعادلة:

$$\frac{dz}{dx}=g\left(x,z,c_1\right)$$

وحل هذه المعادلة يكون على الصيغة التالية:

$$\psi\left(x,z,c_1,c_2\right)=0$$

مثال (4): أوجد المنحنيات التكاملية للمعادلات:

$$\frac{dx}{x+z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z+y^2}$$

الحل: يمكن كتابة المعادلة الثانية من هذه المعادلات على الصورة:

$$\frac{dz}{dy}-\frac{z}{y}=y$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية خطية، و تكافئ المعادلة:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{z}{y}\right)=1$$

والتي منها نحصل على الحل:

$$z=c_1 y+y^2$$

بالتعويض عن z في المتساوية الأولى من المعادلات المعطاة في المثال؛ نحصل على المعادلة التفاضلية العادية:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+y+c_1$$

يمكن إعادة صياغة هذه المعادلة على الصورة:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{c_1}{y}+1$$

التي بتكاملها نحصل على الحل:

$$x=c_1\log y+c_2 y+y^2$$

وهكذا؛ فإن المنحنيات التكاملية للمعادلات المطلوبة تعطى بالمعادلات:

$$x=c_1\log y+c_2 y+y^2,\quad z=c_1 y+y^2$$

5-1 تمارين

(1) في كل من المعادلات التفاضلية الجزئية التالية؛ اذكر المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، ولكل معادلة حدد الرتبة، والخطية، والتجانس:

1) $z_x+z_y=z$ 2) $y^2zz_x-x^2z^2z_y=x^2y$

3) $z_r+z_s=1/z$ 4) $z_t^2+z_r=rt$

5) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ 6) $u_{xx}=xy$

7) $u_{xx}+u_{yy}-\left(x^2+y^2\right)u_{zzzz}=0$

(2) لكل من المعادلات التفاضلية الجزئية التالية؛ اذكر المتغير التابع، والمتغيرات المستقلة، ثم صنف كل معادلة من حيث الرتبة، والدرجة، والخطية، والتجانس.

$(i)\quad z_x - 3z_y = 0$

$(ii)\quad x^2 y z_x - \left(x^2 + y^2\right) z_y = xyz$

$(iii)\quad x^2 z_{xx} - y^2 \cos x \; z_{yy} = 0$

$(v)\quad \left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial^4 T}{\partial z^4} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

$(vi)\quad \rho^2 \dfrac{\partial^3 z}{\partial \theta^3} = \theta^3 \dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}$

$(vii)\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[A - \phi(x, y, z)\right]u = 0$

حيث A مقدار ثابت، و ϕ دالة معلومة في x, y, z.

(3) تحقق من أن العلاقات التالية تمثل حلولاً للمعادلات المناظرة:

(1) $z = \phi_1(x) + \phi_2(y); \quad z_{xy} = 0$

(2) $u = \phi(Ax - By); \quad A u_x - B u_y = 0$

(3) $u = x\,\phi(2x + y); \quad x u_x - 2x u_y - u = 0$

(4) $u = \phi_1(x + y) + \phi_2(2x + y) + \phi_3(3x + y);$

$u_{xxx} - 6u_{yxx} + 11u_{yyx} - 6u_{yyy} = 0$

(4) أثبت أن:

(أ) الدالة $f(x, y, z) = \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{-1/2}$ ؛ تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2 f = 0$ في ثلاثة أبعاد.

(ب) الدالة $h(x, y) = \ln\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]$ ؛ تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2 h = 0$ في بعدين.

(5) بين أن $u(x,t) = \varphi(2x - 5t) + \psi(2x + 5t)$ ؛ هي حل للمعادلة $4u_{tt} = 25u_{xx}$ ، ومن ثم أوجد حلاً خاصاً يحقق الشروط:

$$u(0,t) = u(\pi,t), \;\; u(x,0) = \sin 2x, \;\; u_t(x,0) = 0$$

(6) بين أن الدالة المعطاة -فيما يلي- تحقق المعادلة التفاضلية المناظرة:

$(i)\quad u = f\left(x^2 + y^2\right), \quad y u_x = x u_y$

$(ii)\quad u = f(xy), \quad x u_x - y u_y = 0$

$(iii)\ u=e^{y}f\,(x-y),\ u=u_x+u_y$

$(iv)\ u=ax+by+ab,\ u=xu_x+yu_y+u_xu_y$

(7) أثبت أن الدالة:

$$\phi(x,t)=A+B\int_0^{x/\sqrt{t}}e^{-s^2/4}ds$$

وكل من ϕ_x,ϕ_t. تحقق معادلة الحرارة $u_t=u_{xx}$. حيث A,B ثابتان اختياريان.

(8) إذا كانت $\psi(\tau)$ دالة اختيارية، بحيث يكون التكامل:

$$\phi(x,t)=\int_0^{\infty}\psi(\tau)\frac{1}{(t+\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t+\tau)}\right)d\tau$$

تقاربياً، فأثبت أن الدالة ϕ هي حل لمعادلة الحرارة $u_t=u_{xx}$.

(9) إذا كانت $u=u(x,y),\ \upsilon=\upsilon(x,y)$ حلولاً لمعادلتي كوشي ريمان $u_x=\upsilon_y,\ u_y=-\upsilon_x$. فأثبت أن كل من u,υ تحقق معادلة لابلاس.

(10) إذا كانت $u=\ln\frac{1}{r}$، حيث $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$، فأثبت أن u تحقق معادلة لابلاس.

(11) إذا كانت المعادلات التالية تمثل تقريباً خطياً في بعد واحد لانسياب غاز مثالي:

$$,\ u_x+\alpha^2\rho_t=0\ u_t+\rho_x=0$$

حيث $u(x,t)$ تمثل سرعة الغاز، و $\rho(x,t)$ تمثل كثافة الغاز. فأثبت أن كل من ρ,u تحقق معادلة الموجة $u_{tt}=c^2u_{xx}$.

(12) أثبت أن حل معادلة كورت دي فريس:

$$u_t+(\alpha+eu)u_x+\beta u_{xxx}=0$$

هو:

$$u = A\operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{eA}{12\beta}\right)^{1/2}(x - Vt)\right],\quad V = \alpha + \frac{1}{3}eA$$

(13) احذف الثوابت الاختيارية A_1, A_2 من العلاقات الآتية؛ لتكون معادلات تفاضلية جزئية، موضحاً العلاقة بين عدد الثوابت الاختيارية وعدد المتغيرات المستقلة في كل من هذه العلاقات، وانعكاس ذلك على المعادلات الناتجة:

$(i)\quad z = A_1 x - y,$ $\qquad (ii)\quad z = A_1 x + A_2 xy$

$(iii)\ z = A_1(x+y),$ $\qquad (iv)\quad z = A_1 xy + A_2$

$$(v)\ z = A_1 y e^{x} + \frac{1}{2}A_1^{2}e^{2x} + A_2$$

(14) أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية لعائلة السطوح التالية:

(أ) سطوح كروية نصف قطر كل منها 4، ومراكزها تقع على المستوى $x = y$.

(ب) المستويات التي تقطع أجزاء متساوية من محوري الإحداثيات x, y.

(15) احذف الدوال الاختيارية من المعادلات الآتية:

$$(i)\quad \phi\left(x+y+z,\ x^2+y^2-z^2\right) = 0$$

$$(ii)\quad z = (x+y)\,\phi\left(x^2-y^2\right)$$

$$(iii)\quad z = \phi(x+y)$$

$$(iv)\quad \phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$$

$$(v)\quad z = e^{x}\phi(2y-3x)$$

$$(vi)\ z = \phi_1(m_1 x + y) + \phi_2(m_2 x + y);\quad m_1 \neq m_2$$

(16) احذف الثابتين A_1, A_2، والدالة φ من العلاقة الآتية:

$$z = A_1 xy + \frac{1}{2}\left(A_1^2 + 2\right)y^2 + A_2 y + \varphi\left(x + A_1 y\right)$$

(17) كون المعادلات التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية والدوال الاختيارية من كل من العلاقات الآتية:

(1) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ (2) $ax + by + cz = 1$

(3) $z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$ (4) $z = x^2\phi(x-y)$

(5) $z = x\phi(y) + y\psi(x)$ (6) $z = \phi(x\psi(y))$

(7) $x + y = \varphi(xyz)$ (8) $z = (x+y)\phi(xy)$

(18) أوجد المنحنيات التكاملية لكل مجموعة من المعادلات التالية:

1) $\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$

2) $\dfrac{adx}{(b-c)yz} = \dfrac{bdy}{(c-a)xz} = \dfrac{cdz}{(a-b)xy}$

3) $\dfrac{dx}{xz-y} = \dfrac{dy}{yz-x} = \dfrac{dz}{1-z^2}$

حيث a,b,c أعداد حقيقية معلومة.

(19) حل كل من المعادلات المتزامنة التالية:

(i) $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{du}{nxy}$

(ii) $\dfrac{dx}{mu-ny} = \dfrac{dy}{nx-\ell u} = \dfrac{du}{\ell y - mx}$

(iii) $\dfrac{dx}{x^2-yu} = \dfrac{dy}{y^2-ux} = \dfrac{du}{u^2-xy}$

(iv) $\dfrac{dx}{u(x+y)} = \dfrac{dy}{u(x-y)} = \dfrac{du}{x^2+y^2}$

(v) $\dfrac{dx}{x\left(y^2-u^2\right)} = \dfrac{dy}{y\left(u^2-x^2\right)} = \dfrac{du}{u\left(x^2-y^2\right)}$

المعادلات التفاضلية الجزئية شبه الخطية من الرتبة الأولى

QUASI-LINEAR FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

2-1 مقدمة

كثيرٌ من المسائل في الرياضيات، والفيزياء، والهندسة يمكن صياغتها ومن ثم حلها كمعادلات تفاضلية من الرتبة الأولى. من جهة ثانية؛ فإن دراسة حلول معادلات الرتبة الأولى تفيد في دراسة معادلات تفاضلية من الرتب الأعلى. في هذا الفصل؛ سندرس المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية، وشبه الخطية ذات الرتبة الأولى، وحلولها بعدة طرق منها طريقة لاجرانج للمنحنيات المميزة، وطريقة فصل المتغيرات، واختزال المعادلة إلى صورة قياسية، ومن ثم إيجاد الحل. وسندرس مسالة كوشي للمعادلات شبه الخطية ذات الرتبة الأولى.

نبدأ أولاً بدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى في متغيرين، والتي في الحالة العامة تكون على الصورة:

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y\right) = 0, \qquad \left(x, y\right) \in D \subset \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

حيث F دالة معلومة، و $z = z\left(x, y\right)$ تمثل الدالة المجهولة، هذه الدالة تعتمد على المتغيرين x, y في منطقة محددة D في المستوى $\mathbb{R}^2$. المعادلة (1) تكتب، غالبا، على الصورة التالية:

$$F\left(x, y, z, p, q\right) = 0 \tag{2}$$

حيث $p = z_x, q = z_y$.

الصورة العامة لمعادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى في عدد n من المتغيرات المستقلة تكون على الصورة التالية:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, \dots z_{x_n}\right) = 0 . \qquad (3)$$

المعادلات السابقة تسمى شبه خطية Quasilinear (أو Q - خطية)، إذا كانت الدالة F خطية في مشتقات الرتبة الأولى للدالة المجهولة z. ولذلك؛ فإن الصورة العامة لمعادلة شبه خطية من الرتبة الأولى هي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(x_1, \dots, x_n, z\right)\frac{\partial z}{\partial x_k} = f\left(x_1, \dots, x_n, z\right) \qquad (4)$$

حيث إن المعاملات f, $a_k\left(1 \le k \le n\right)$ هي دوال في $x_1, \dots, x_n, z$.

الأمثلة التالية لمعادلات شبه خطية (Q- خطية):

$$x\left(y^2 + z\right)z_x - y\left(x^2 + z\right)z_y = \left(x^2 - y^2\right)z ,$$

$$zz_x + z_t + nz^2 = 0, \quad \left(y^2 - z^2\right)z_x - xyz_y = xz .$$

المعادلة (4) تسمى معادلة نصف خطية *Semilinear equation* (أو S - خطية)، إذا كانت المعاملات a_k، لكل $1 \le k \le n$، مستقلة عن z، وكانت الدالة f غير خطية في z. ومن ثم؛ فإنه يمكن التعبير عن المعادلة نصف الخطية بالصيغة:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(x_1, \dots, x_n\right)\frac{\partial z}{\partial x_k} = f\left(x_1, \dots, x_n, z\right) \qquad (5)$$

المعادلات التالية هي معادلات نصف خطية (أو S - خطية):

$$xz_x + yz_y = z^2 + x^2, \quad z_x + z_t - z^2 = 0,$$

$$\left(x+1\right)^2 z_x + \left(y-1\right)^2 z_y = \left(x+y\right)z^2.$$

المعادلة (1) تسمى معادلة خطية *linear equation* إذا كانت F دالة خطية في كل من المتغيرات z, z_x, z_y. الصورة العامة لمعادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى هي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(x_1, \dots, x_n\right)\frac{\partial z}{\partial x_k} + b\left(x_1, \dots, x_n\right)z = f\left(x_1, \dots, x_n\right) \qquad (6)$$

حيث إن المعاملات $b, a_k \left(1 \le k \le n\right)$ والدالة f - بوجه عام- هي دوال في المتغيرات المستقلة $x_1,\dots,x_n$.

واضح أن المعادلات الخطية هي حالة خاصة من المعادلات شبه الخطية إذا كانت الدوال $a_k \left(1 \le k \le n\right)$ مستقلة عن المتغيرات z و f دالة خطية في z. الأمثلة التالية تعرض نماذج لمعادلات خطية:

$$xz_x + yz_y = z + x^2,$$

$$\left(x+1\right)^2 z_x + \left(y-1\right)^2 z_y - z = e^x,$$

$$\left(y-t\right) z_x + \left(t-x\right) z_y + \left(x-y\right) z_t = 0.$$

المعادلات التي لا تكون خطية، عادة ما تسمى غير خطية.

المعادلات(6)-(4) تسمى متجانسة homogeneous، إذا كان $f \equiv 0$. وتسمى غير متجانسة Nonhomogeneous، إذا كان $f \neq 0$.

2-2 المعنى الهندسي لمعادلة الرتبة الأولى

Geometrical Interpretation of a First-Order Equation

لتوضيح المعنى الهندسي لمعادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى، نبدأ بمعادلة شبة خطية على الصورة:

$$a\left(x,y,z\right)z_x + b\left(x,y,z\right)z_y = c\left(x,y,z\right) \tag{1}$$

فإذا كان حل المعادلة (1) على الصورة $z = z\left(x,y\right)$، أو في صورة ضمنية:

$$f\left(x,y,z\right) = 0 \tag{2}$$

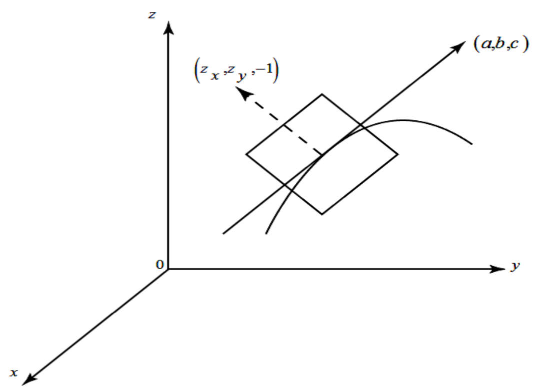
فإنه يمثل سطحا في الفراغ xyz. هذا السطح – عادة - يسمى سطح تكاملي Integral surface للمعادلة (1). وحيث إن متجه الانحدار:

$$\nabla f = \left(f_x, f_y, f_z\right) = \left(z_x, z_y, -1\right)$$

عند أية نقطة (x,y,z)، يكون عموديا على السطح(2). فإنه يمكن كتابة المعادلة (1) كحاصل ضرب قياسي لمتجهين:

$$az_x + bz_y - c = \left(a,b,c\right)\cdot\left(z_x, z_y, -1\right) \tag{3}$$

هذا يبين أن المتجه (a,b,c) يقع في المستوى المماس للسطح(2) عند النقطة (x,y,z)، ومن ثم؛ فإن المعادلة (3) تعرف مجالاً متجهاً يسمى الاتجاه المميز characteristic direction، أو محور مونج Monge axis.
وهكذا؛ فإن السطح(2) في الفضاء xyz يكون حل للمعادلة(1)؛ إذا وفقط إذا كان المجال المتجه (a,b,c) واقعا في المستوى المماس للسطح (2) عند كل نقطة (x,y,z)، حيث يكون $\nabla f \neq 0$، كما هو موضح بالشكل التالي:



إذا كان المماس عند كل نقطة لمنحنى ما - في الفضاء xyz - هو في اتجاه المجال (a,b,c)، فإن هذا المنحنى يسمى منحنى مميز. وإذا كانت المعادلات البارامترية لهذا المنحنى المميز على الصورة:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (4)$$

فإن المتجه المماس $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ لهذا المنحنى ينطبق على المتجه (a,b,c). وبالتالي، نحصل على مجموعة المعادلات التفاضلية العادية للمنحنى المميز:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x,y,z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x,y,z) \qquad (5)$$

والتي تسمى المعادلات المميزة (أو المعادلات المساعدة) للمعادلة شبه الخطية (1)، لأن حلول هذه المعادلات تعطي تمثيلاً بارامترياً للسطح التكاملي للمعادلة(1).

المسقط في المستوى $z=0$ لمنحنى مميز يسمى منحنى مميز أساسي أو - للسهولة – منحنى مميز. المعادلات البارمترية (5) يمكن وضعها في الصورة غير البارامترية:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}. \tag{6}$$

وقد ناقشنا في الباب الأول طرق حل مثل هذه المعادلات.

3-2 طريقة المنحنيات المميزة، ومسألة كوشي

Method of Characteristics and Cauchy Problem

من التفسير الهندسي للمعادلات شبه الخطية ذات الرتبة الأولى وخواص المنحنيات المميزة؛ يمكننا استنتاج طريقة لإيجاد الحل العام لمعادلة شبه خطية. هذه الطريقة تسمى طريقة المميزات، وترجع إلى لاجرانج، ولذا فإنها تسمى كذلك طريقة لاجرانج.

إذا كان $z=f(x,y)$، معادلة السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$a(x,y,z)z_x+b(x,y,z)z_y=c(x,y,z) \tag{1}$$

وإذا بدأنا نتحرك من نقطة اختيارية M على هذا السطح، في اتجاه المجال (a,b,c)، فإننا نرسم منحنى تكاملياً للمعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c} \tag{2}$$

وحيث إننا نفترض أن الدوال a,b,c وحيدة القيمة؛ فإن المنحنى الذي يمر بالنقطة M يكون وحيداً. وحيث إن المجال (a,b,c) يمس السطح التكاملي عند كل نقطة؛ فإن هذا المنحنى التكاملي للمعادلات(2) يقع كلية على السطح $z=f(x,y)$. هذا يعني أن السطح التكاملي للمعادلة(1)، يتولد بمجموعة المنحنيات التكاملية للمعادلات(2).

من جهة ثانية، إذا كانت المنحنيات التكاملية للمعادلات(2) تقع على سطح $z=f(x,y)$، فإن المتجه $(z_x,z_y,-1)$ العمودي على هذا السطح عند النقطة (x,y,z)؛ يكون متعامداً على الاتجاه المميز (a,b,c) للمنحنيات المولدة للسطح. ولذلك؛ نجد أن:

$$a\,z_x+b\,z_y-c=0$$

وهذا يعني أن $z=f\left(x,y\right)$ هو سطح تكاملي للمعادلة(1).

يبقى إثبات أنه إذا كانت:

$$\phi(x,y,z)=c_1,\qquad \psi(x,y,z)=c_2 \tag{3}$$

هي مجموعة المنحنيات التكاملية للمعادلات(2)، فإن أي سطح يتولد بهذه المنحنيات التكاملية؛ يُعرف بمعادلة على الصورة:

$$g\left(\phi,\psi\right)=0. \tag{4}$$

لأي دالة g نوع C^1. لإثبات ذلك، اعتبر منحنى ما على السطح، ليس من مجموعة المنحنيات التكاملية (3)، معادلاته:

$$u\left(x,y,z\right)=0,\qquad v\left(x,y,z\right)=0 \tag{5}$$

فإذا كان المنحنى (3) هو منحنى مولد للسطح، فإنه يقطع المنحنى (5). وشرط حدوث هذا التقاطع نحصل عليه بحذف x,y,z من المعادلات (3) و(4). هذا الشرط يأخذ الصورة:

$$g\left(c_1,c_2\right)=0 \tag{6}$$

وبالتالي؛ فإن السطح الذي يتولد بالمنحنيات (3) التي تحقق الشرط (6) تكون معادلته على الصورة (4).

هكذا؛ فإن مسألة إيجاد الحل العام للمعادلة (1)؛ تعني إيجاد سطح تكاملي في الفضاء xyz ، يحقق المعادلة (1)، ويحتوي مجموعة المنحنيات المميزة (حلول المعادلات(2)). هذه الطريقة يمكن صياغتها في النظرية التالية:

نظرية (1): *الحل العام لمعادلة تفاضلية جزئية شبه خطية من الرتبة الأولى (1) يكون على الصورة:*

$$g\left(\phi,\psi\right)=0, \tag{4}$$

حيث g *دالة اختيارية في* $\phi,\ \psi$،

$$\phi(x,y,z)=c_1,\quad \psi(x,y,z)=c_2$$

هي المنحنيات التكاملية للمعادلات المميزة (2)، لأي ثابتين اختياريين $c_1,\ c_2$.

مثال(1): حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة هي $dx = dy = dz$.

من هذه المعادلات؛ واضح أن النسبة الأولى و الثانية تحددان المنحنى $x-y=c_1$ ، ومن النسبة الأولى و الثالثة؛ نحصل على المنحنى $z-x=c_2$ ، حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان. وبالتالي؛ فإن الحل العام هو السطح الذي يتولد بالمنحنيات المميزة:

$$x-y=c_1,\ z-x=c_2$$

ومعادلته تكون على الصورة $F\left(x-y,z-x\right)=0$ ، حيث F دالة اختيارية.

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى z ؛ فإن الحل العام يصبح على الصورة:

$$z=x+g\left(x-y\right)$$

حيث g دالة اختيارية.

مثال(2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

الحل: المعادلات المميزة (أو المساعدة) لهذه المعادلة هي:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

بتكامل النسبتين الأولى والثانية، نحصل على $\frac{y}{x}=c_1$. ومن النسبتين الأولى و الثالثة بالتكامل؛ ينتج أن $\frac{z}{x}=c_2$. حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان. وبالتالي؛ فإن الحل العام هو السطح الذي يتولد بالمنحنيات المميزة $\frac{y}{x}=c_1,\ \frac{z}{x}=c_2$. ومعادلته تكون على الصورة $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$. أو على الصورة $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$، حيث كل من F و f دوال اختيارية.

مثال(3): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$p(bz-cy)+q(cx-az)=ay-bx$$

حيث a,b,c ثوابت حقيقية مطلقة.

الحل: المعادلات المساعدة هي:

$$\frac{dx}{bz-cy}=\frac{dy}{cx-az}=\frac{dz}{ay-bx}$$

ومنها؛ نجد أن $adx+bdy+cdz=0$. وبالتكامل نحصل على:

$$ax+by+cz=c_1$$

هي مجموعة من المستويات تعتمد على البارامتر c_1 (مقدار ثابت اختياري).

كذلك من النسب الثلاث السابقة نحصل على:

$$xdx+ydy+zdz=0$$

بالتكامل ينتج أن $x^2+y^2+z^2=c_2$.

هي معادلة مجموعة من السطوح الكروية، تعتمد على البارامتر c_2.

وهكذا؛ فإن الحل العام هو $F\left(ax+by+cz,\, x^2+y^2+z^2\right)=0$

حيث F دالة اختيارية.

مثال (4): استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$x^2z_x+y^2z_y=(x+y)z.$$

الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة تكون على الصورة:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{(x+y)z}$$

من المتساوية الأولى من هذه المعادلات، ينتج أن:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=c_1 \qquad (7)$$

حيث c_1 ثابت اختياري.

مرة ثانية، من المعادلات المميزة؛ نجد أن $\frac{dx-dy}{x^2-y^2}=\frac{dz}{(x+y)z}$.

ومنها؛ نحصل على المعادلة التفاضلية العادية $\frac{dz}{z}=\frac{d(x-y)}{x-y}$. بحل هذه المعادلة ينتج المنحنى المميز:

$$\frac{x-y}{z}=c_2 . \tag{8}$$

حيث c_2 ثابت اختياري. المعادلتان (7) و(8) تعطيان المنحنى المميز:

$$\frac{xy}{z}=c_3 . \tag{9}$$

حيث c_3 ثابت اختياري. وهكذا؛ فإن الحل العام يعطى بالمعادلة:

$$F\left(\frac{xy}{z},\frac{x-y}{z}\right)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

مثال (5): بين أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية $xz_x+yz_y=xe^{-z}$ يعطى بالمعادلة:

$$z=\ln\left(x+f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

حيث f دالة اختيارية.

الحل: المعادلات المميزة تكون على الصورة:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xe^{-z}}$$

أو المعادلات:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{xe^{-z}},\quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

ومنها؛ نحصل على المنحنيات المميزة $e^z=x+c_2,\quad \frac{y}{x}=c_1$، حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان.

وبالتالي؛ فإن الحل العام يعطى بالمعادلة $F\left(e^{z}-x,\frac{y}{x}\right)=0$. وهذه المعادلة تكافئ $z=\ln\left(x+f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$، حيث f دالة اختيارية.

العديد من المسائل في الرياضيات التطبيقية، والفيزياء، والهندسة تتضمن معادلات تفاضلية جزئية. وغالبا ما نبحث عن الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية التي تحقق بعض الشروط الإضافية. عادة، نسمي المعادلة التفاضلية ومجموعة الشروط الإضافية؛ بالمسألة.

الآن؛ ندرس مسألة القيمة الابتدائية *initial-valued problem* لمعادلات الرتبة الاولى، وهذه المسألة تعرف كذلك: بمسألة كوشي *Cauchy problem*.

نظرية(2): "مسألة كوشي لمعادلة من الرتبة الأولى-الحالة العامة":

بفرض أن C منحنى معطى في المستوى xy، معادلاته

$$x=x_0(t),\qquad y=y_0(t), \tag{10}$$

حيث t ينتمي إلى فترة I، بحيث إن المشتقات $x_0'(t),\ y_0'(t)$ هي دوال متصلة قطعياً، تحقق أن $(x_0')^2+(y_0')^2\neq 0$. وبفرض أن $z=z_0(t)$ دالة معطاة على المنحنى C. فإنه يوجد حل $z=z(x,y)$ للمعادلة التفاضلية:

$$F(x,y,z,z_x,z_y)=0 \tag{11}$$

في نطاق D في $\mathbb{R}^2$ تحتوي المنحنى C لكل t في الفترة I، هذا الحل $z(x,y)$ يحقق الشرط الابتدائي:

$$z\left(x_0(t),y_0(t)\right)=z_0(t) \tag{12}$$

لكل t في الفترة I.

المعادلات (11) و(12) تعرف بمسألة كوشي، هذه المسألة تتلخص في إيجاد حل $z(x,y)$، للمعادلة (11) في جوار منحنى معلوم C، بحيث تكون قيمة هذا الحل مساوية لقيمة معلومة $z_0(t)$، عند كل نقطة على C. المنحنى C يسمى بالمنحنى الابتدائي للمسألة، و$z_0(t)$ تسمى المعطيات الابتدائية. المعادلة (12) تسمى بالشرط الابتدائي للمسألة.

عند إيجاد الحل لمسألة كوشي؛ فإننا نعتبر المعادلات (11) و(12) بمثابة الشروط على F، x_0، y_0، و z_0 التي بتحققها نضمن وجود حل واحد فقط للمسألة. هندسيا، فإن المعادلات $x = x_0(t),\ y = y_0(t),\ z = z_0(t)$ تمثل منحنى ابتدائياً Γ في الفضاء xyz. المنحنى C، الذي تتحقق عليه المعطيات الابتدائية، هو مسقط المنحنى Γ على المستوى xy.

هذه الصورة العامة لنظرية كوشي لا يمكن إثباتها من غير فروض إضافية على الدالة F، وعلى المنحنى الابتدائي Γ. ولذلك؛ سوف نناقش فيما يلي طريقة لحل مسألة كوشي للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى، شبه الخطية (1). النظرية التالية تعرض صيغة واضحة لمسألة كوشي، للمعادلة التفاضلية شبه الخطية ذات الرتبة الأولى.

نظرية (3): (مسألة كوشي لمعادلة شبه خطية من الرتبة الأولى)

بفرض أن:

1) *الدوال* $x_0(t), y_0(t), z_0(t)$ *ومشتقاتها؛ متصلة على الفترة* $[0,1]$،

2) *المشتقات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى للدوال* a، b، و c، *في متغيراتها* x, y, z، *هي دوال متصلة على نطاق* D $(D \subset \mathbb{R}^3)$، *يحتوي المنحنى الابتدائي:*

$$\Gamma: \quad x = x_0(t), \quad y = y_0(t), \quad z = z_0(t), \tag{13}$$

حيث $0 \le t \le 1$،

3) *الدوال* x_0', y_0', a, b, c *تحقق الشرط الضروري والكافي،*

$$a(x_0, y_0, z_0)\, y_0'(t) - b(x_0, y_0, z_0)\, x_0'(t) \ne 0 \tag{14}$$

عندئذ يوجد حل وحيد $z = z(x, y)$ *للمعادلة شبه الخطية* (1) *في جوار المنحنى:*

$$C: \quad x = x_0(t), \quad y = y_0(t),$$

هذا الحل يحقق الشرط الابتدائي:

$$z_0(t) = z\left(x_0(t), y_0(t)\right) \tag{15}$$

لكل $0 \le t \le 1$.

مثال (6): بين لماذا لا يوجد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية $z_x + z_y = z$ يمر بالخط المستقيم $z = 1,\ y = x$؟

الحل: المعادلات البارامترية للخط المستقيم

$$x = t,\ y = t,\ z = 1$$

على طول هذا الخط نجد أن:

$$z_t = z_x + z_y = 0 \neq z$$

ومن ثم لا يوجد حل لمسألة كوشي:

$$z_x + z_y = z,\ z\left(x, x\right) = 1.$$

من جهة ثانية، فإن المعادلات المميزة في الصورة البارامترية هي:

$$\frac{dx}{ds} = 1,\quad \frac{dy}{ds} = 1,\quad \frac{dz}{ds} = z$$

وبالتالي؛ من هذه المعادلات والمعادلات البارامترية للخط المستقيم نجد أن:

$$J = \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

هذا يعني أن الخط المستقيم هو أحد المنحنيات المميزة.

مثال(7): إذا كان $\alpha \in \mathbb{R}$؛ فادرس مسألة كوشي:

$$z_x + z_y = 0,\quad z\left(\alpha y, y\right) = e^{-y^2}$$

الحل: المعادلات المميزة في الصورة البارامترية هي:

$$\frac{dx}{ds} = 1,\quad \frac{dy}{ds} = 1,\quad \frac{dz}{ds} = 0$$

والمعادلات البارامترية للشرط الابتدائي تكون على الصورة:

$$x = \alpha t,\ y = t,\ z = e^{-t^2}$$

وهكذا؛ فإن حلول المعادلات المميزة، التي تحقق الشروط الابتدائية، هي:

$$x = s + \alpha t,\ y = s + t,\ z = e^{-t^2}$$

من ذلك يتضح أن:

$$J=\begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix}=1-\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

فإذا $\alpha\neq 1$؛ فإن $J\neq 0$، وعندئذ الحل هو:

$$z=\exp\left(-\left(\frac{y-x}{1-\alpha}\right)^2\right).$$

في الحالة عندما $\alpha=1$؛ فإن $J=0$، في هذه الحالة لا يمكن حذف s,t من المعادلات البارامترية للمنحنيات المميزة، و المنحنى الابتدائي:

$$x=s+c_1,\ y=s+c_2,\ z=c_3$$

$$x=t,\ y=t,\ z=e^{-t^2}$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت إختيارية. لاحظ أن المنحنى الابتدائي هو أحد المنحنيات المميزة. وعلى طول هذا المنحنى:

$$\frac{dz}{dt}=z_x+z_y=-2te^{-t^2}\neq 0$$

هذا يعني أنه لا يوجد حل لمسألة كوشي:

$$z_x+z_y=0,\quad z(t,t)=e^{-t^2}.$$

ملاحظة: من الواضح أن طريقة حل المعادلة (1) باستخدام المنحنيات المميزة للمعادلات (2)؛ تعطي معلومات أكثر عن طبيعة الحل، وتبين بصورة واضحة اعتماد الحل للمعادلة (1) على المعطيات الابتدائية.

مثال(8): أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية $xq-yp=0$، الذي يمر بالمنحنى المعطى بالمعادلات $z=y^2$, $x=0$.

الحل: من المعادلات المساعدة $\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}$؛ يمكن الحصول على المنحنيات المميزة:

$$z=c_1,\ x^2+y^2=c_2$$

المعادلات البارامترية للمنحنى الابتدائي هي:

$$x=0,\ y=t,\ z=t^2$$

بـالتعويض عـن x, y, z مـن هـذه المعـادلات فـي معـادلات المنحنيـات المميزة نحصل على:

$$c_1 = t^2, \quad c_2 = t^2.$$

وبحذف t من هذه المعادلات نجد أن $c_1 = c_2$. وبالتـالي؛ بـالتعويض عـن c_1, c_2 من المنحنيات المميزة نحصل على:

$$z = x^2 + y^2$$

هي معادلة السطح المطلوب.

مثال (9): أوجد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(x + y) z z_x + (x - y) z z_y = x^2 + y^2$$

الذي يحقق معطيات كوشي: $z = 0, \quad y = 2x$.

الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة تكون على الصورة:

$$\frac{dx}{(x + y) z} = \frac{dy}{(x - y) z} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

ومنها؛ نستنتج أن:

$$\text{إحدى النسب} = \frac{xdx - ydy - zdz}{0} = \frac{ydx + xdy - zdz}{0}$$

وبالتالي؛ فإن:

$$ydx + xdy - zdz = 0, \quad xdx - ydy - zdz = 0$$

من ذلك؛ نحصل على المنحنيات المميزة:

$$xy - \frac{z^2}{2} = c_1, \quad x^2 - y^2 - z^2 = c_2$$

باستخدام معطيات كوشي (الشرط الابتدائي)؛ نحصل على $-3c_1 = 2c_2$.

ولذلك؛ فإن:

$$-3\left(xy - \frac{z^2}{2}\right) = 2\left(x^2 - y^2 - z^2\right)$$

وهكذا؛ فإن الحل المطلوب يعطي بالمعادلة:

$$7z^2 = 6xy + 4\left(x^2 - y^2\right).$$

مثال(10): أوجد الحل للمعادلة التفاضلية $py + qx + x + y = 0$ ، الذى يحقق الشرط الابتدائي $z = 0, \quad e^{x+y} = 2x\left(x + y\right)$.

الحل: المعادلات المميزة هي:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{-\left(x + y\right)}$$

ومنها؛ نجد أن $xdx = ydy, \quad dx + dy + dz = 0$. بالتالي فإن المنحنيات المميزة تعطى بالمعادلات:

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad x + y + z = c_2$$

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة، الذى يحقق الشرط الابتدائي، نوجد الثابتين c_1, c_2 بحيث إن المنحنيات المميزة تقطع المنحنى:

$$z = 0, \; e^{x+y} = 2x\left(x + y\right).$$

عند تقاطع المنحنيات المميزة مع المستوى $z = 0$ يكون:

$$x + y = c_2, \; x^2 - y^2 = c_1$$

ومن ذلك؛ نحصل على $x + y = c_2, \; x - y = \frac{c_1}{c_2}$. وبالتعويض في المعادلة $e^{x+y} = 2x\left(x + y\right)$ نحصل على:

$$e^{c_2} = \left(c_2 + \frac{c_1}{c_2}\right)c_2 = c_2^2 + c_1$$

بالتعويض عن c_1, c_2 من المنحنيات المميزة، نجد أن:

$$e^{x+y+z} = \left(x + y + z\right)^2 + x^2 - y^2$$

هو الحل الخاص المطلوب.

مثال(11): أوجد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية $p - q = 1$ ، الذي يحقق الشرط الابتدائي $z\left(x, 0\right) = x^2$.

الحل: مجموعة المعادلات التي تحدد المنحنيات المميزة هي $dx = -dy = dz$. منها نحصل على المنحنيات المميزة:

$$z - x = c_1, \; z + y = c_2$$

المعادلات البارامترية للمنحنى الابتدائي هي

$$x=t,\ y=0,\ z=t^2.$$

بالتعويض من هذه المعادلات في معادلات المنحنيات المميزة، وحذف البارامتر t من المعادلات الناتجة، نحصل على $c_2=(c_2-c_1)^2$. ومن ثم؛ نحصل على الحل المطلوب على الصورة:

$$z=(x+y)^2-y\ .$$

مثال(12): أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية: $x\left(y^2+z\right)p-y\left(x^2+z\right)q=\left(x^2-y^2\right)z$، الذي يمر بالخط المستقيم $z=1,\ x+y=0$.

الحل: المعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{x\left(y^2+z\right)}=\frac{dy}{-y\left(x^2+z\right)}=\frac{dz}{\left(x^2-y^2\right)z}$$

ومنها؛ نحصل على المنحنيات المميزة:

$$xyz=c_1,\quad x^2+y^2-2z=c_2$$

من جهة ثانية، فإن المعادلات البارامترية للخط المستقيم تكون على الصورة:

$$x=t,\ \ y=-t,\ \ z=1$$

منها، بالتعويض في معادلات المنحنيات المميزة نحصل على:

$$-t^2=c_1,\quad 2t^2-2=c_2$$

بحذف t من هذه المعادلات تنتج أن العلاقة $2c_1+c_2+2=0$. هذه العلاقة تبين أن السطح التكاملي المطلوب يعطى بالمعادلة:

$$x^2+y^2+2xyz-2z+2=0\ .$$

مثال(13): حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$yz_x+xz_y=z$$

بحيث تتحقق شروط كوشي:

$$z(x,0)=x^3,\qquad z(0,y)=y^3.$$

الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة الخطية تأخذ الصورة:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$$

ومنها؛ نستنتج أن:

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx+dy}{y+x}=\frac{dz}{z}$$

بحل هذه المعادلات نحصل على المنحنيات المميزة:

$$z=c_1(x+y),\quad x^2-y^2=c_2$$

وبالتالي؛ فإن الحل العام على الصورة $z=(x+y)f\left(x^2-y^2\right)$

باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن:

$$f\left(x^2\right)=x^2,\ f\left(-y^2\right)=y^2$$

وبالتالي؛ فإن $f(x)=|x|$ لكل x. ولذلك؛ فإن الحل المطلوب هو:

$$z=(x+y)\left|x^2-y^2\right|.$$

2-4 الصور القياسية للمعادلات الخطية من الرتبة الأولى

Canonical Forms of First-Order Linear Equations

اختزال الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى:

$$a(x,y)z_x+b(x,y)z_y+c(x,y)z=d(x,y),\qquad(1)$$

إلى صورة قياسية، يسهل تكاملها لإيجاد الحل العام. وللحصول على هذه الصورة القياسية؛ نستخدم المنحنيات المميزة للمعادلة(1) لتعريف تحويل جديد على الصورة التالية:

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y)\qquad(2)$$

حيث $\xi,\ \eta$ دوال لها مشتقات تفاضلية من الرتبة الأولى متصلة، والمحدد الجاكوبي لها $J\equiv\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$ غير صفري في نطاق ما D في $\mathbb{R}^2$، لذلك؛ فإنه يمكن تحديد x,y بصورة وحيدة من المعادلات (2). وبالتالي؛ باستخدام قاعدة السلسلة، نحصل على:

$$z_x=z_\xi\xi_x+z_\eta\eta_x,\qquad z_y=z_\xi\xi_y+z_\eta\eta_y,\qquad(3)$$

بالتعويض عن هذه المشتقات من (3) في (1) تنتج المعادلة:

$$Az_{\xi}+Bz_{\eta}+cz=d, \tag{4}$$

حيث:

$$A=a\xi_x+b\xi_y, \qquad B=a\eta_x+b\eta_y. \tag{5}$$

من المعادلات (5) يتضح أن $B=0$، إذا كان η حلا للمعادلة:

$$a\eta_x+b\eta_y=0, \tag{6}$$

لهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول. فإذا كان $\eta(x,y)$ حل للمعادلة (6)، فإن المنحنيات $\eta(x,y)=c_1$ - لأي c_1 ثابت اختياري- تكون منحنيات مميزة للمعادلة (1). ولذلك؛ فإننا نأخذ أحد التحويلين (2) من المنحنيات المميزة للمعادلة (1). والتحويل الثاني - $\xi(x,y)=c_2$ - يمكن أخذه ليكون مجموعة من منحنيات ملساء، تعتمد على بارامتر واحد c_2، بحيث لا تمس عند أيٍّ من نقاطها مجموعة المنحنيات المميزة، خلافاً لذلك يؤدي إلى $A=0$.

ولذلك؛ يجب التأكيد على أن $A\neq 0$ في جوار كل نقطة في النطاق D، حيث $\eta(x,y)$ معرفة (بوضع $B=0$) و $J\neq 0$ على D. لإثبات أن $A\neq 0$، افرض أن $A=0$ في جوار نقطة ما في النطاق D، فإن $B=0$ عند النقطة نفسها. ولذلك؛ فإن المعادلات (5) تكون مجموعة من معادلات خطية ومتجانسة في a,b. وحيث إن محدد مصفوفة المعاملات لهذه المعادلات لا يساوي الصفر $J\neq 0$، فإن $a=0,b=0$. وهذا يناقض الفرض بأن a,b لا تتلاشى متزامنةً. وهكذا؛ فإن $B=0$ و $A\neq 0$، وبالتالي؛ بالقسمة على A نحصل من المعادلة (4) على الصورة القياسية:

$$z_{\xi}+\alpha(\xi,\eta)z=\beta(\xi,\eta), \tag{7}$$

حيث $\alpha(\xi,\eta)=\dfrac{c}{A}$ و $\beta(\xi,\eta)=\dfrac{d}{A}$.

المعادلة (7) تمثل معادلة تفاضلية عادية في ξ كمتغير مستقل، باعتبار η مقداراً ثابتاً. هذا المعادلة تسمى الصورة القياسية للمعادلة (1) بدلالة الإحداثيات (ξ,η). بصورة عامة المعادلة (7) قابلة للحل، والحل العام للمعادلة (1)؛ يمكن الحصول عليه من حل المعادلة (7)، بعد استبدال $\xi,\ \eta$ بالمتغيرات x,y.

مثال (1): اختزل كل من المعادلات التالية:

$$z_x - z_y = z, \tag{8}$$

$$yu_x + u_y = x \tag{9}$$

إلى صورة قياسية، واستنتج الحل العام.

الحل: المعادلات المميزة للمعادلة (8) تكون على الصورة:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{z}$$

ومنها؛ نحصل على مجموعة المنحنيات المميزة $x + y = c$، حيث c ثابت اختياري. باستخدام التحويل:

$$\xi(x,y) = x + y, \quad \eta(x,y) = x$$

وحيث إن $z_x = z_\xi + z_\eta, \;\; z_y = z_\xi$، فإن المعادلة (8) تصبح على الصورة القياسية $z_\eta = z$. والحل العام لهذه المعادلة يكون على الصورة $z(\xi,\eta) = f(\xi)e^\eta$، حيث f دالة اختيارية في ξ فقط.

بدلالة المتغيرات x, y، فإن الحل العام للمعادلة (8) هو:

$$.\, z(x,y) = f(x+y)e^x \, .$$

المعادلات المميزة للمعادلة (9) هي:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{x}$$

من تساوي النسبتين الأولى والثانية؛ نحصل على $x - \frac{1}{2}y^2 = c$، حيث c ثابت اختياري. وباستخدام التحويل:

$$\xi(x,y) = x - \frac{1}{2}y^2, \quad \eta(x,y) = y,$$

نجد أن $u_x = u_\xi, \;\; u_y = -yu_\xi + u_\eta$. وبالتالي؛ فإن المعادلة (9) تصبح على الصورة القياسية:

$$u_\eta = \xi + \frac{1}{2}\eta^2$$

الحل العام لهذه المعادلة يكون على الصورة:

$$u(\xi,\eta)=\xi\eta+\frac{1}{6}\eta^3+f(\xi)$$

حيث f دالة اختيارية في ξ فقط. وهكذا؛ فإن الحل العام للمعادلة (9) بدلالة x,y هو

$$u(x,y)=xy+\frac{1}{3}y^3+f\left(x-\frac{y^2}{2}\right).$$

مثال (2): اختزل كل من المعادلات التالية:

$$z_x+2xyz_y=x, \qquad (10)$$

$$z_x-yz_y-z=1. \qquad (11)$$

الحل: بتكوين المعادلات المميزة للمعادلة (10):

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{x}$$

من تساوي النسبتين الأولى والثانية؛ نحصل على مجموعة المنحنيات المميزة $x^2-\ln y=c$، حيث c ثابت اختياري. وباستخدام التحويل:

$$\xi(x,y)=x^2-\ln y, \quad \eta(x,y)=y,$$

نجد أن $z_x=2xz_\xi,\ z_y=-\frac{1}{y}z_\xi+z_\eta$. وبالتالي؛ فإن المعادلة (10) تصبح على الصورة القياسية:

$$z_\eta=\frac{1}{2\eta}$$

الحل العام لهذه المعادلة يكون على الصورة $\eta=f(\xi)e^{2z}$، حيث f دالة اختيارية.

من ذلك؛ نحصل على الحل العام للمعادلة (10)، بدلالة x,y، على الصورة:

$$f\left(x^2-\ln y\right)e^{2z}=y.$$

المعادلات المميزة للمعادلة (11):

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{1+z}$$

من تساوي النسبتين الأولى والثانية؛ نحصل على مجموعة المنحنيات المميزة $ye^{x}=c$، حيث c ثابت اختياري. وبالتالي؛ نعرف التحويل:

$$\xi(x,y)=ye^{x},\quad \eta(x,y)=x,$$

باستخدام هذا التحويل؛ نجد أن $z_x=ye^{x}z_{\xi}+z_{\eta},\ z_y=e^{x}z_{\xi}$. وبالتالي؛ فإن المعادلة (11) تصبح على الصورة القياسية $z_{\eta}=1+z$.

الحل العام لهذه المعادلة؛ يكون على الصورة $1+z=f(\xi)e^{\eta}$، حيث f دالة اختيارية.

بالتعويض عن $\xi=ye^{x},\ \eta=x$ نحصل على الحل العام للمعادلة (11) على الصورة $z=f(ye^{x})e^{x}-1$.

5-2 طريقة فصل المتغيرات

Method of Separation of Variables

طريقة فصل المتغيرات ربما تكون الطريقة الأقدم لحل المعادلات التفاضلية. الفكرة الأساسية لطريقة فصل المتغيرات؛ تتلخص في تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلى مجموعة معادلات تفاضلية عادية. لتحقيق ذلك؛ فإن الحل المطلوب لمعادلة تفاضلية جزئية، من الرتبة الأولى في متغيرين مستقلين x,y ومتغير تابع واحد z، يُكتب كحاصل ضرب أو كمجموع:

$$z(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0,\quad z(x,y)=X(x)+Y(y)\neq 0$$

حيث $X(x),\ Y(y)$ دوال في $x,\ y$، على الترتيب. الأمثلة التالية تهدف إلى توضيح استخدام طريقة فصل المتغيرات في حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الأولى.

مثال (1): حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$z_x+2z_y=0, \qquad (1)$$

$$z(0,y)=4e^{-2y} \qquad (2)$$

الحل: نبحث عن الحل على الصورة:

$$z(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0$$

وبالتعويض في المعادلة(1)؛ ينتج أن:

$$X'(x)Y(y)+2X(x)Y'(y)=0$$

هذه المعادلة يمكن أن توضع على الصورة:

$$\frac{X'(x)}{2X(x)}=-\frac{Y'(y)}{Y(y)}. \qquad (3)$$

واضح في المعادلة (3) أن الطرف الأيسر يمثل دالة فقط في x، وأن الطرف الأيمن هو دالة فقط في y، وبالتالي؛ فإن المعادلة (3) تكون حقيقية؛ إذا كان كل من الطرفين يساوي المقدار الثابت نفسه λ، هذا الثابت يسمى ثابت فصل اختياري. نتيجة لذلك، فإن المعادلة (3) تختزل إلى معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$X'(x)-2\lambda X(x)=0, \qquad Y'(y)+\lambda Y(y)=0.$$

حلول هذه المعادلات هي على الترتيب:

$$X(x)=c_1e^{2\lambda x}, \qquad Y(y)=c_2e^{-\lambda y}$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان.

لذلك؛ فإن الحل العام للمعادلة (1) يكون على الصورة:

$$z(x,y)=c_1c_2e^{2\lambda x-\lambda y}=ce^{2\lambda x-\lambda y}.$$

حيث $c=c_1c_2$ ثابت اختياري.

باستخدام الشرط الابتدائي (2) نجد أن:

$$.ce^{-\lambda y}=4e^{-2y}$$

ومن ذلك؛ نحصل على $c=4,\ \lambda=-2$. ومن ثم؛ فإن حل مسألة القيمة الابتدائية (1) و(2) هو $z(x,y)=4e^{4x-2y}$.

مثال(2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير الخطية:

$$y^2u_x^2+x^2u_y^2=(xyu)^2. \qquad (4)$$

الحل: بفرض أن $u(x,y)=f(x)g(y)\neq 0$ حل للمعادلة (4)، وبالتعويض في (4)، نحصل على:

$$y^2\{f'(x)g(y)\}^2+x^2\{f(x)g'(y)\}^2=x^2y^2\{f(x)g(y)\}^2,$$

أو بصورة مكافئة فإن:

$$\frac{1}{x^2}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2+\frac{1}{y^2}\left\{\frac{g'(y)}{g(y)}\right\}^2=1,$$

أو على الصورة:

$$\frac{1}{x^2}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2=1-\frac{1}{y^2}\left\{\frac{g'(y)}{g(y)}\right\}^2=\lambda^2,$$

حيث λ^2 ثابت فصل. لذلك؛

$$\frac{1}{x}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}=\lambda,\qquad \frac{1}{y}\left\{\frac{g'(y)}{g(y)}\right\}=\sqrt{1-\lambda^2}$$

بتكامل هذه المعادلات ينتج أن:

$$f(x)=A\exp\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right),\qquad g(y)=B\exp\left(\frac{1}{2}y^2\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$

حيث $A,\ B$ ثابتان اختياريان. وبالتالي؛ فإن الحل العام هو:

$$u(x,y)=C\exp\left(\frac{\lambda}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

حيث $C=AB$ ثابت اختياري.

مثال (3): باستخدام الصيغة $z(x,y)=f(x)+g(y)$، لفصل المتغيرات؛ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية:

$$z_x^2+z_y^2=1 \tag{5}$$

الحل: باستخدام التعويض $z(x,y)=f(x)+g(y)$ ينتج أن:

$$\{f'(x)\}^2+\{g'(y)\}^2=1$$

ومنها؛ نحصل على:

$$\{f'(x)\}^2=1-\{g'(y)\}^2=\lambda^2$$

حيث λ^2 ثابت فصل اختياري. ومن ذلك؛ فإننا نستنتج التالي:

$$f'(x)=\lambda,\quad g'(y)=\sqrt{1-\lambda^2}$$

بحل هذه المعادلات التفاضلية العادية نحصل على:

$$f(x)=\lambda x+c_1,\quad g(y)=y\sqrt{1-\lambda^2}+c_2,$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان. .ولهذا فإن الحل العام للمعادلة (5) هو:

$$z(x,y)=\lambda x+y\sqrt{1-\lambda^2}+c,$$

حيث $c=c_1+c_2$ ثابت اختياري.

مثال (4): باستخدام الصيغة $z(x,y)=f(x)+g(y)$ لفصل المتغيرات؛ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية:

$$z_x^2+z_y+x^2=0 \qquad (6)$$

الحل: بالتعويض $z(x,y)=f(x)+g(y)$ في المعادلة (6) ينتج أن:

$$\{f'(x)\}^2+x^2=-g'(y)=\lambda^2$$

حيث λ^2 ثابت فصل اختياري. وبالتالي؛ فإننا بفصل المتغيرات نحصل على المعادلات التفاضلية العادية:

$$f'(x)=\sqrt{\lambda^2-x^2},\quad g'(y)=-\lambda^2$$

بتكامل هذه المعادلات نحصل على:

$$f(x)=\int\sqrt{\lambda^2-x^2}dx+c_1$$

باستخدام بالتعويض $x=\lambda\sin\theta$ نجد أن:

$$\begin{aligned}f(x)&=\lambda^2\int\cos^2\theta dx+c_1\\&=\frac{\lambda^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)dx+c_1\\&=\frac{\lambda^2}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{x}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}\right]+c_1\end{aligned}$$

كذلك لدينا $g(y)=-\lambda^2y+c_2$.

مما سبق؛ نجد أن الحل العام للمعادلة (6) يكون على الصورة:

$$z=\frac{\lambda^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{\lambda^2-x^2}-\lambda^2y+c,$$

حيث $c = c_1 + c_2$ ثابت اختياري.

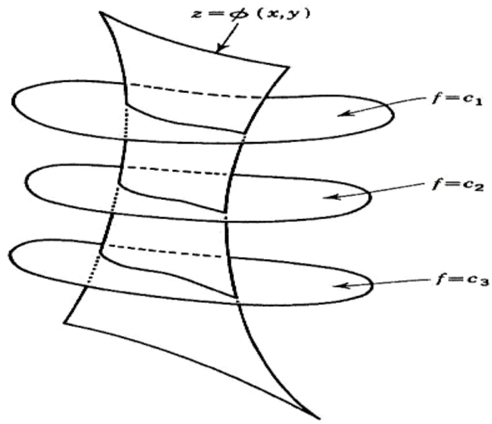
2-6 السطوح المتعامدة
Orthogonal Surfaces

من التطبيقات المهمة للمعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الأولى؛ مسألة إيجاد مجموعة السطوح العمودية على مجموعة معلومة من السطوح. بفرض أن مجموعة من السطوح في $\mathbb{R}^3$ معرفة بالمعادلة:

$$f\left(x, y, z\right) = c \tag{1}$$

حيث c ثابت اختياري، يسمى بارامتر مجموعة السطوح (1). فإننا نريد إيجاد مجموعة السطوح التي تقطع كل من السطوح (1) على التعامد، انظر الشكل التالي. المتجه العمودي عند النقطة (x, y, z) على السطح من المجموعة (1)، الذي يمر بهذه النقطة يتحدد بنسب الاتجاه التالية:

$$\left(P, Q, R\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{2}$$



فإذا كانت:

$$z = \Phi\left(x, y\right) \tag{3}$$

معادلة سطح يقطع كل سطح من المجموعة (1) على التعامد؛ فإن العمودي $\left(z_x, z_y, -1\right)$ على هذا السطح (3) عند النقطة (x, y, z)

يكون عمودياً على المتجه (P,Q,R)، العمودي على السطح من المجموعة (1) عند هذه النقطة. ولهذا نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$Pz_x + Qz_y = R \tag{4}$$

هذه المعادلة تحدد السطح (3).

بالتعويض من المعادلة (2) فإن المعادلة (4) تصبح على الصورة:

$$f_x \frac{\partial z}{\partial x} + f_y \frac{\partial z}{\partial y} = f_z$$

وبالعكس؛ فإن أي حل للمعادلة التفاضلية (4) يكون سطحاً عمودياً، عند كل نقطة عليه، على أحد السطوح (1)، الذي يمر بالنقطة نفسها. لذلك؛ فإن المعادلة التفاضلية (4) هي المعادلة التفاضلية العامة التي تحدد السطوح العمودية على مجموعة السطوح (1). وبالتالي؛ فإن السطوح العمودية على المجموعة (1) هي تلك السطوح التي تنشأ بالمنحنيات التكاملية للمعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z} \tag{5}$$

مثال (1): أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة السطوح المتعامدة على كل سطح من مجموعة السطوح المعرفة بالمعادلة:

$$z^2 = kxy \tag{6}$$

حيث k عدد حقيقي.

الحل: بالتفاضل في طرفي المعادلة (6) بالنسبة إلى x,y على الترتيب نحصل على:

$$p_1 = \frac{ky}{2z} = \frac{z}{2x}, \qquad q_1 = \frac{kx}{2z} = \frac{z}{2y}$$

بفرض أن السطح S أحد السطوح العمودية على مجموعة السطوح(6)، فإذا $n = (p,q,-1)$ و $n_1 = (p_1,q_1,-1)$ هما العموديان على السطح S

وواحد من السطوح (6)، على الترتيب، فإن شرط تعامد هذين السطحين يعني أن المتجهين n, n_1 يكونان متعامدين، عندئذ يتحقق التالي:

$$pp_1 + qq_1 + 1 = 0 . \tag{7}$$

بالتعويض عن $p_1,\ q_1$ في المعادلة (7) ينتج المعادلة التفاضلية، لمجموعة السطوح العمودية على السطوح (6)

$$z\left(py + qx\right) = -2xy \tag{8}$$

المعادلات المميزة لهذه المعادلة التفاضلية تكون على الصورة:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy}$$

والتي منها بالتكامل نحصل على المنحنيات المميزة:

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad 2x^2 + z^2 = c_2$$

حيث $c_1,\ c_2$ ثابتان اختياريان. وهكذا؛ فإن الحل العام للمعادلة(8)، الذي يمثل مجموعة السطوح العمودية على السطوح (6)، هو:

$$\varphi\left(x^2 - y^2, 2x^2 + z^2\right) = 0$$

حيث φ دالة اختيارية.

مثال (2): أوجد السطح الذي يتعامد على مجموعة السطوح المعرفة بالمعادلة:

$$z\left(x + y\right) = c\left(3z + 1\right) \tag{9}$$

والذي يمر بالدائرة $x^2 + y^2 = 1$ التي تقع في المستوى $z = 1$.

الحل: بوضع

$$f\left(x, y, z\right) = \frac{z\left(x + y\right)}{3z + 1}$$

فإن المعادلات المميزة تأخذ الصورة:

$$\frac{dx}{z\left(3z + 1\right)} = \frac{dy}{z\left(3z + 1\right)} = \frac{dz}{x + y}$$

والتي يمكن الحصول منها على مجموعة المنحنيات المميزة:

$$x - y = c_1, \qquad x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = c_2$$

حيث $c_1,\ c_2$ ثابتان اختياريان. وبالتالي؛ فإن كل سطح يتعامد على السطوح المعطاة (9) تكون معادلته

$$x^2+y^2-2z^3-z^2=\varphi(x-y)$$

هذا السطح يمر بالدائرة $x^2+y^2=1$ الواقعة في المستوى $z=1$ إذا - وفقط إذا- تحقق $\varphi(t)=-2$ لكل t. وعليه فإن معادلة السطح المطلوب هي:

$$x^2+y^2-2z^3-z+2=0$$

مثال(3): أوجد معادلة السطح العمودي على مجموعة السطوح المعرفة بالمعادلة:

$$z=cxy\left(x^2+y^2\right) \tag{10}$$

والذي يمر بالقطع الزائد $x^2-y^2=a^2$ الواقع في المستوى $z=0$.

الحل: عرف الدالة:

$$f(x,y,z)=\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{z}$$

وبالتالي؛ فإن مجموعة السطوح المعطاة تعرف بالمعادلة:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{c}$$

ومنها؛ نحصل على:

$$f_x=\frac{3x^2y+y^3}{z},\ f_y=\frac{x^3+3xy^2}{z},\ f_z=-\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{z^2}$$

وبذلك فإن المعادلات المميزة لمجموعة السطوح المطلوبة هي:

$$\frac{zdx}{3x^2y+y^3}=\frac{zdy}{3xy^2+x^3}=-\frac{z^2dz}{x^3y+xy^3} \tag{11}$$

ومنها؛ يمكن استنتاج أن:

$$\frac{xdx+ydy}{4\left(x^3y+xy^3\right)}=-\frac{zdz}{x^3y+xy^3}$$

ومن ثم؛ ينتج أن $xdx + ydy = -4zdz$. بالتكامل نحصل على مجموعة المنحنيات المميزة:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = c_1 \qquad (12)$$

حيث c_1 ثابت اختياري.

مرة ثانية؛ من النسبة الأولى والثانية في (11) نجد أن:

$$\frac{xdx + ydy}{4xy\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{xdx - ydy}{2xy\left(x^2 - y^2\right)}$$

أو:

$$\frac{xdx + ydy}{2\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{xdx - ydy}{x^2 - y^2}$$

وبالتكامل نحصل على مجموعة ثانية من المنحنيات المميزة:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 - y^2} = c_2 \qquad (13)$$

المنحنيات المميزة، المعرفة بالمعادلات (12) و(13)، تحدد عائلة السطوح:

$$\varphi\left(x^2 + y^2 + 4z^2, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 - y^2}\right) = 0$$

العمودية على السطوح (10)، حيث φ دالة اختيارية.

وبتطبيق الشروط $z = 0,\ x^2 - y^2 = a^2$ على المعادلات (12) و(13) نحصل على:

$$x^2 + y^2 = c_1, \quad \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a^2} = c_2$$

ومنها؛ ينتج أن $\sqrt{c_1} = c_2 a^2$. بالتعويض من (12) و(13) نجد أن:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 - y^2} a^2$$

أو:

$$\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+4z^2}=a^2\sqrt{x^2+y^2}$$

هي معادلة السطح المطلوب.

مثال (4): إذا كانت مجموعة من السطوح تعرف بالمعادلة:

$$ax^2+by^2-\lambda z^2=c, \qquad (14)$$

حيث $a,\ b,\ c$ أعداد حقيقية معلومة، و λ عدد حقيقي اختياري. أوجد مجموعة السطوح العمودية على السطوح (14). ثم أوجد من هذه المجموعة السطح الذي يمر المنحنى $z^2=y^a$، الواقع في المستوى $x=1$.

الحل: عرف الدالة $f\left(x,y,z\right)=ax^2+by^2-\lambda z^2$، نحصل على:

$$f_x=2ax,\ \ f_y=2by,\ \ f_z=-2\lambda z$$

بالتعويض عن λ من المعادلة (14)، حيث λ عدد اختياري، نحصل على:

$$f_x=2ax,\ \ f_y=2by,\ \ f_z=\frac{c-ax^2-by^2}{z}$$

وبذلك؛ فإن المعادلات المميزة لمجموعة السطوح المطلوبة هي:

$$\frac{dx}{ax}=\frac{dy}{by}=\frac{zdz}{c-ax^2-by^2}$$

منها نحصل على المعادلات التفاضلية العادية:

$$b\frac{dx}{x}=a\frac{dy}{y},\qquad \frac{xdx+ydy+zdz}{c}=\frac{dx}{ax}$$

بحل هذه المعادلات نحصل على المنحنيات المميزة:

$$\frac{y^a}{x^b}=c_1,\quad a\left(x^2+y^2+z^2\right)-2c\ln x=c_2, \qquad (15)$$

حيث $c_1,\ c_2$ ثابتان اختياريان. وبالتالي؛ فإن معادلة السطوح العمودية هي:

$$\varphi\left(\frac{y^a}{x^b},a\left(x^2+y^2+z^2\right)-2c\ln x\right)=0,$$

حيث φ دالة اختيارية.

لإيجاد السطح الذي يحقق الشروط $x=1,\ z^2=y^a$، فإننا نعوض عن $x=1,\ z^2=y^a$ في المعادلات (15) نحصل على:

$$y^a = c_1, \quad a\left(1+y^2+y^a\right)=c_2,$$

ومنها؛ فإن $c_2 = a\left(1+c_1^{2/a}+c_1\right)$. ومن ثم فإن

$$a\left(x^2+y^2+z^2\right)-2c\ln x = a\left(1+\frac{y^2}{x^{2b/a}}+\frac{y^a}{x^b}\right)$$

7-2 أمثلة لمعادلات الرتبة الأولى في عدة متغيرات مستقلة

Examples of higher dimensional first order equations

طريقة المنحنيات المميزة، والتي استخدمت لحل المعادلات الرتبة الأولى في متغيرين مستقلين يمكن بالطبع تعميمها لحل المعادلات التفاضلية الجزئية شبه الخطية من الرتبة الأولى، في الحالة عندما يوجد عدد n من المتغيرات المستقلة.

مثال(1): حل المعادلة التفاضلية الجزئية $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$

الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة هي:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n}$$

من هذه النسب بالتكامل نحصل على الحلول المستقلة:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \ \frac{x_2}{x_n} = c_2, \ldots, \ \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}.$$

وبالتالي؛ فإن الحل العام هو $z = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$. حيث Φ دالة اختيارية.

مثال (2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = \alpha z$$

حيث $\alpha \neq 0$ مقدار ثابت.

الحل: مجموعة المعادلات المميزة هي:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{\alpha z}$$

من هذه النسب يمكن الحصول على المعادلات التفاضلية العادية:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_n}{x_n},\ \frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_n}{x_n},\dots,\frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}=\frac{dx_n}{x_n},\ \frac{dz}{\alpha z}=\frac{dx_n}{x_n}$$

وحلول هذه المعادلات علي الصورة:

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\ \frac{x_2}{x_n}=c_2,\dots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},\ \frac{z}{x_n^{\alpha}}=c_n$$

وبالتالي؛ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\dots\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n},\frac{z}{x_n^{\alpha}}\right)=0$$

أو على الصورة:

$$z=x_n^{\alpha}\Psi\left(\frac{x_1}{x_n},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

حيث Φ,Ψ دوال اختيارية.

مثال (3): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial z}{\partial x_3}=x_1x_2x_3$$

الحل: واضح أن المعادلات المميزة هي:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}=\frac{dz}{x_1x_2x_3}$$

ومنها؛ يمكننا الحصول على:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2},\qquad \frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3},$$

$$x_2x_3dx_1+x_1x_3dx_2+x_1x_2dx_3-3dz=0$$

وبتكامل هذه المعادلات تنتج المنحنيات المميزة:

$$\frac{x_1}{x_2}=c_1,\quad \frac{x_2}{x_3}=c_2,\quad x_1x_2x_3-3z=c_3$$

وهكذا؛ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية يعطى بالمعادلة:

$$\psi\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},x_1x_2x_3-3z\right)=0$$

حيث ψ دالة اختيارية. أو على الصورة:

$$z=\frac{1}{3}x_1x_2x_3-\varphi\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3}\right)$$

حيث φ دالة اختيارية.

مثال (4): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=y+z.$$

الحل: نكون المعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z+u}=\frac{dz}{y+u}=\frac{du}{y+z},$$

من هذه النسب يمكن الحصول على المعادلات التفاضلية العادية:

$$\frac{dz-du}{u-z}=\frac{dy-dz}{z-y},\quad \frac{dx}{x}=\frac{dy+dz+du}{2(y+z+u)},\quad \frac{dx}{x}=\frac{dz-du}{u-z},$$

وبتكامل كل من هذه المعادلات نحصل على المنحنيات المميزة:

$$\frac{z-u}{y-z}=c_1,\qquad \frac{x^2}{y+z+u}=c_2,\qquad x(u-z)=c_3,$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية.

وهكذا؛ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$\Phi\left(\frac{z-u}{y-z},\frac{x^2}{y+z+u},x(u-z)\right)=0$$

حيث Φ دالة اختيارية.

مثال (5): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y.$$

الحل: نبدأ كالمعتاد بتكوين المعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{u-x}=\frac{dy}{u-y}=\frac{dz}{-z}=\frac{du}{x+y}$$

منها نستنتج المعادلات التفاضلية العادية:

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dz}{-z},\quad \frac{2du+dx+dy}{2u+x+y}=\frac{dz}{-z},\quad \frac{du-dx-dy}{-2(u-x-y)}=\frac{dz}{-z}$$

وحلول هذه المعادلات هي:

$$\frac{y-x}{z}=c_1,\quad z(2u+x+y)=c_2,\quad \frac{u-x-y}{z^2}=c_3$$

وبالتالي؛ فإن الحل العام المطلوب هو:

$$\Phi\left(\frac{y-x}{z},z(2u+x+y),\frac{u-x-y}{z^2}\right)=0$$

حيث Φ دالة اختيارية.

مثال (6): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$xy\frac{\partial u}{\partial x}-\sqrt{1-y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=xy\frac{\partial u}{\partial z}$$

الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة تكون على الصورة:

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{-y\sqrt{1-y^2}}=\frac{dz}{z\sqrt{1-y^2}-xy}=\frac{du}{0},$$

ومنها؛ نكون المعادلات التفاضلية العادية:

$$du=0,\qquad \frac{dx}{x}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,$$

$$\left(y+\sqrt{1-y^2}\right)dx+\left(2z+x-\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy+2ydz=0$$

حلول هذه المعادلات هي:

$$u=c_1,\quad x\sin^{-1}y=c_2,\quad 2yz+x\left(y+\sqrt{1-y^2}\right)=c_3,$$

ولذلك؛ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة هو:

$$u=\Phi\left(x\sin^{-1}y,2yz+x\left(y+\sqrt{1-y^2}\right)\right),$$

حيث Φ دالة اختيارية.

مثال (7): أوجد صورة قياسية للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(y-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

ومن ثم؛ أوجد الحل العام لهذه المعادلة.
الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة هي:

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{du}{0},$$

من هذه المعادلات؛ نحصل على المعادلات التفاضلية العادية:

$$dx+dy+dz=0, \quad xdx+ydy+zdz=0$$

بحل هاتين المعادلتين؛ نحصل على بعض المنحنيات المميزة للمعادلة المعطاة:

$$x+y+z=c_1, \quad x^2+y^2+z^2=c_2.$$

عرف التحويل:

$$\xi=x+y+z, \quad \eta=x^2+y^2+z^2, \quad \zeta=\zeta(x,y,z)$$

حيث ζ تركيبة اختيارية من x, y و z. وبفرض أن $\zeta=z$ فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+2x\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+2y\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+2z\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

بالتعويض عن المشتقات في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$(y-z)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+2x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+(z-x)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+2y\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$+(x-y)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+2z\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)=0,$$

وبالتبسيط نحصل من هذه المعادلة على:

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}=0$$

ولهذه المعادلة التفاضلية حل عام على الصورة $u=\varphi(\xi,\eta)$، حيث φ دالة اختيارية.
وبالتعويض عن ξ,η بدلالة x,y,z نحصل على الحل العام المطلوب:

$$u=\varphi\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right).$$

قبل أن ننهي هذا الفصل؛ بدراسة مسألة كوشي للمعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية من الرتبة الأولى في أكثر من متغيرين مستقلين، فإننا نعتبر المثال التالي الذي يبين استخدام الصيغة القياسية في إيجاد الحل العام لمعادلة، يحتوي على أكثر من متغيرين مستقلين. مسألة كوشي لمعادلة تفاضلية جزئية في عدد n من المتغيرات المستقلة تتلخص في إيجاد حل للمعادلة:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z\right)\frac{\partial z}{\partial x_i} = R\left(x_1, \ldots, x_n, z\right) \qquad (1)$$

يحقق الشرط الابتدائي:

$$z = z_0\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right),\ x_j = x_j^0\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right), \qquad (2)$$

حيث $j = 1, 2, \ldots, n$.

لحل هذه المسألة؛ نوجد لكل قيمة للمتجه $\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right)$ حلولاً المعادلات المميزة:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$$

تحت الشروط الابتدائية المعطاة بالمعادلات (2). ولتحقيق ذلك اجعل s بارامتراً على طول المنحنيات التكاملية للمعادلات (2)، فإن هذه المعادلات تصبح على الصورة:

$$\frac{dz}{ds} = c\left(x_1,\ldots,x_n,z\right),\quad \frac{dx}{ds} = a_j\left(x_1,\ldots,x_n,z\right),\quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ولتكن حلول هذه المعادلات على الصورة:

$$z = z\left(s, t_1,\ldots,t_{n-1}\right),\ x_j = x_j\left(s, t_1,\ldots,t_{n-1}\right), \qquad (3)$$

لكل $j = 1, 2, \ldots, n$.

المعادلات (3) تعطي تمثيلاً بارامترياً للسطح التكاملي (في $\mathbb{R}^{n+1}$) للمعادلة (1). بحذف $s, t_1,\ldots,t_{n-1}$ من المعادلات (3) نحصل على المعادلة الديكارتية $z = z\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ لهذا السطح التكاملي. ويمكن حذف هذه البارامترات إذا -وفقط إذا- تحقق الشرط التالي:

$$J=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (4)$$

في الحالة عندما $J(s=0)=0$، وحيث إن $x_1,...,x_n$ متغيرات مستقلة؛ فإنه يوجد $\lambda\neq 0$ و $k\,(1\leq k\leq n-1)$ بحيث:

$$\frac{\partial x_j}{\partial t_k}=\lambda a_j,\quad j=1,2,...,n$$

وهذا يعني أن السطح المعرف بالمعادلات (3)، الذي عليه $J=0$ يحقق المعادلات المميزة (2). ومن ثم؛ فهو أحد السطوح المميزة للمعادلة (1). وعندئذ لا يكون للمعادلة (1) حل وحيد. ويقال في هذه الحالة إن المسألة (1) و(2) غير متوافقة، أي ليس لها حل.

مثال (8): حل مسألة كوشي التالية:

$$x_1z_{x_1}+x_2z_{x_2}+z_{x_3}+z=0,\quad z\left(x_1,x_2,0\right)=h\left(x_1,x_2\right)$$

حيث h دالة C^1 معلومة.

الحل: المعادلات التفاضلية للمنحنيات المميزة:

$$\frac{dx_1}{ds}=x_1,\ \frac{dx_2}{ds}=x_2,\ \frac{dx_3}{ds}=1,\ \frac{dz}{ds}=-z$$

بحيث:

$$x_1(0)=t_1,\ x_2(0)=t_2,\ x_3(0)=0,\ z(0)=h\left(t_1,t_2\right)$$

بحل هذه المسائل للقيمة الابتدائية نحصل على:

$$\begin{aligned} &x_1\left(s,t_1\right)=t_1e^s,\quad x_2\left(s,t_2\right)=t_2e^s,\\ &x_3(s)=s,\quad z\left(s,t_1,t_2\right)=h\left(t_1,t_2\right)e^{-s} \end{aligned}\qquad (*)$$

وحيث إن:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial s}\\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & 1\\ e^s & 0 & 0\\ 0 & e^s & 0\end{vmatrix}=e^{2s}\neq 0$$

لأي s. فإن مسألة كوشي لها حل وحيد، نحصل عليه بحذف s,t_1,t_2 من المعادلات (*) نجد أن:

$$s=x_3,\quad t_1=x_1e^{-x_3},\quad t_2=x_2e^{-x_3}$$

وعليه؛ فإن الحل هو:

$$z\left(x_1,x_2,x_3\right)=h\left(x_1e^{-x_3},x_2e^{-x_3}\right)e^{-x_3}$$

مثال (9): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}+1=\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $x_2^2+x_1x_3=0$ عندما $z=0$.

الحل: المعادلات المميزة لهذه المعادلة هي:

$$\frac{dx_1}{-1}=\frac{dx_2}{+1}=\frac{dx_3}{+1}=\frac{dz}{+1}$$

واضح من النسبة الرابعة و كلٍّ من النسب الثلاثة الأولي يمكن الحصول على:

$$dz+dx_1=0,\quad dz-dx_2=0,\quad dz-dx_3=0$$

ومن ثم؛ فإننا نحصل على مجموعة الحلول المستقلة:

$$z+x_1=c_1,\ \ z-x_2=c_2,\ \ z-x_3=c_3$$

وهكذا؛ فإن الحل العام المطلوب هو:

$$F(x_1+z,\ z-x_2\ ,\ z-x_3)\ =0$$

حيث F دالة اختيارية.

لإيجاد الحل الخاص نختار الثوابت c_1,c_2,c_3، بحيث تحقق الشروط الابتدائية $.z=0,\ x_2^2+x_1x_3=0$

عندما $z=0$ نجد أن $c_1=x_1,\ c_2=-x_2\ ,\ c_3=-x_3$. وبالتعويض في معادلة الشرط $x_2^2+x_1x_3=0$ نجد أن $c_2^2+c_1c_3=0$

بالتعويض عن c_1,c_2,c_3 من العلاقات (1),(2),(3) نحصل علي الحل الخاص المطلوب: $.(z-x_2)^2+(x_1+z)(z-x_3)=0$

مثال (10): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(x_2+x_3+z\right)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\left(x_1+x_3+z\right)\frac{\partial z}{\partial x_2}$$
$$+\left(x_1+x_2+z\right)\frac{\partial z}{\partial x_3}=x_1+x_2+x_3$$

ثم أوجد الحل الخاص إذا كان $x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ عندما $.z=0$

الحل: من المعادلات الإضافية:

$$\frac{dx_1}{x_2+x_3+z}=\frac{dx_2}{x_1+x_3+z}=\frac{dx_3}{x_1+x_2+z}=\frac{dz}{x_1+x_2+x_3}$$

بالجمع نحصل على:

$$\text{احدي النسب}=\frac{dx_1+dx_2+dx_3+dz}{3\left(x_1+x_2+x_3+z\right)}$$

ومن النسبتين الأولي والرابعة نحصل علي:

$$\text{إحدى النسب}=-\frac{dz-dx_1}{z-x_1}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\frac{dx_1+dx_2+dx_3+dz}{3\left(x_1+x_2+x_3+z\right)}=-\frac{dz-dx_1}{z-x_1}$$

بالتكامل نحصل على:

$$\left(z-x_1\right)\left(x_1+x_2+x_3+z\right)^{1/3}=c_1 \qquad (1)$$

بنفس الطريقة نحصل على:

$$\left(z-x_2\right)\left(x_1+x_2+x_3+z\right)^{1/3}=c_2 \qquad (2)$$

$$\left(z-x_3\right)\left(x_1+x_2+x_3+z\right)^{1/3}=c_3 \qquad (3)$$

من المعادلات(3),(2),(1) نجد أن الحل العام يُعطى بالمعادلة الضمنية $F\left(u,v,w\right)=0$، حيث F دالة اختيارية في u,v,w حيث:

$$u=\left(z-x_1\right)\left(x_1+x_2+x_3+z\right)^{1/3}$$

$$v=\left(z-x_2\right)\left(x_1+x_2+x_3+z\right)^{1/3}$$

$$w=\left(z-x_3\right)\left(x_1+x_2+x_3+z\right)^{1/3}$$

لإيجاد الحل الخاص نختار الثوابت c_1,c_2,c_3، بحيث يتحقق الشرط:

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ عندما $z=0$ نجد أن:

$$c_1=-x_1\left(x_1+x_2+x_3\right)^{1/3},$$

$$c_2=-x_2\left(x_1+x_2+x_3\right)^{1/3},$$

$$c_3=-x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)^{1/3}.$$

ومنها:

$$c_1+c_2+c_3=-\left(x_1+x_2+x_3\right)^{4/3} \qquad (4)$$

وكذلك $c_1^3+c_2^3+c_3^3=-(x_1+x_2+x_3)(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$.

فإذا $x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ فإن:

$$c_1^3+c_2^3+c_3^3=-\left(x_1+x_2+x_3\right) \qquad (5)$$

من (5),(4) ينتج أن:

$$(c_1+c_2+c_3)^3=-(c_1^3+c_2^3+c_3^3)^4$$

بالتعويض في هذه العلاقة عن c_1,c_2,c_3 من العاقات (3),(2),(1) نجد أن:

$$\left\{\left[3z-\left(x_1+x_2+x_3\right)\right]\left[x_1+x_2+x_3+z\right]^{1/3}\right\}^3$$

$$=\left\{\left[\left(z-x_1\right)^3+\left(z-x_2\right)^3+\left(z-x_3\right)^3\right]\left(x_1+x_2+x_3+z\right)\right\}^4$$

ومنها؛ نجد أن الحل الخاص المطلوب يتحدد من المعادلة:

$$\left(x_1+x_2+x_3-3z\right)^3=\left(x_1+x_2+x_3+z\right)^3$$
$$\times\left[\left(z-x_1\right)^3+\left(z-x_2\right)^3+\left(z-x_3\right)^3\right]$$

8-2 تمارين

(1) (أ) بين أن عائلة المخروطات الدائرية القائمة والمتماثلة حول محور z:

$$x^2+y^2=\left(z-c\right)^2\tan^2\alpha$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الأولى:

$$yp-xq=0$$

(ب) بين أن السطوح الدورانية $z=f\left(x^2+y^2\right)$ حول محور z، حيث f دالة اختيارية، تحقق المعادلة $yp-xq=0$.

(ج) أثبت أن العائلة ثنائية البارامترات من المنحنيات:

$$u=ax+by+ab$$

تحقق المعادلة $xp+yq+pq=u$.

(2) أوجد المعادلة التفاضلية لكل من عائلات السطوح التالية:

$(1)\ z=x+y+f\left(xy\right)$ $\qquad$ $(2)\ z=f\left(x-y\right)$

$(3)\ z=xy+f\left(x^2+y^2\right)$ $\qquad$ $(4)\ 2z=\left(ax+y\right)^2+\beta.$

(3) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

$(1)\ u_x=0$

$(2)\ au_x+bu_y=0,$

حيث a,b مقداران ثابتان.

$(3)\ u_x+yu_y=0$

$(4)\ \left(1+x^2\right)u_x+u_y=0$

$(5)\ u_x+2xy^2u_y=0$

(4) حل كلاً من المعادلات ذات الرتبة الأولى التالية:

(1) $\left(x^2-y^2-u^2\right)u_x+2xyu_y=2xu$

(2) $(y-u)u_x+(x-y)u_y=u-x$

(3) $\left(x^2-yu\right)u_x+\left(y^2-ux\right)u_x=u^2-xy$

(4) $y^2u_x-xyu_y=x(u-2y)$

(5) $x^2u_x+y^2u_y=(x+y)u$

(5) أوجد الحل لكل من مسائل كوشي:

(1) $3u_x+2u_y=0,\quad u(x,0)=\sin x$

(2) $yu_x+xu_y=0,\quad u(0,y)=\mathrm{e}^{-y^2}$

(3) $xu_x+yu_y=2xy,\quad u=2 \text{ on } y=x^2$

(4) $u_x+xu_y=0,\quad u(0,y)=\sin y$

(5) $yu_x+xu_y=xy,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\quad u(0,y)=e^{-y^2}$

(6) $yu_x+xu_y=xy,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\quad u(0,y)=e^{-x^2}$

(6) حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$u_t+uu_x=0,\quad u\left(\tau,\frac{1}{2}\tau^2\right)=\tau$$

(7) حل مسألة كوشي:

$$2xyu_x+\left(x^2+y^2\right)u_y=0,$$

$$u=\exp\left(\frac{x}{x-y}\right) \text{ on } x+y=1$$

(8) أوجد حلولا للمعادلات التفاضلية التالية:

(1) $xu_x+yu_y+zu_z=0$

$$(2)\ x^2u_x+y^2u_y+z(x+y)u_z=0$$
$$(3)\ x(y-z)u_x+y(z-x)u_y+z(x-y)u_z=0$$
$$(4)\ yzu_x-xzu_y+xy\left(x^2+y^2\right)u_z=0$$
$$(5)\ x\left(y^2-z^2\right)u_x+y\left(z^2-y^2\right)u_y+z\left(x^2-y^2\right)u_z=0$$

(9) حل المعادلة التفاضلية $u_x+xu_y=y$ مستخدماً معلومات كوشي التالية:

$$(a)\ u(0,y)=y^2,\qquad (b)\ u(1,y)=2y$$

(10) برهن أن $u_1=e^x$ و $u_2=e^{-y}$ هي حلول للمعادلة التفاضلية:

$$\left(u_x+u_y\right)^2-u^2=0$$

ولكن $v=e^x+e^{-y}$ ليست حلاً لهذه المعادلة.

(11) حل مسألة كوشي التالية:

$$(y+u)u_x+yu_y=(x-y),\ u=1+x\ \text{ on }\ y=1$$

(12) أوجد السطوح التكاملية للمعادلة $uu_x+u_y=1$ تحت كل من الشروط الابتدائية التالية:

$$(1)\ x(s,0)=s,\ y(s,0)=2s,\ u(s,0)=s$$
$$(2)\ x(s,0)=s^2,\ y(s,0)=2s,\ u(s,0)=s$$
$$(3)\ x(s,0)=\frac{s^2}{2},\ y(s,0)=s,\ u(s,0)=s$$

وارسم المنحنيات المميزة في كل حالة.

(13) برهن أنه لا يوجد سطح تكاملي للمعادلة $yu_x-xu_y=0$ يمر بالمنحنى $x^2+y^2=a^2$, $u=y$.

(14) حل كلاً من مسائل كوشي التالية:

(a) $x^2u_x - y^2u_y = 0,\quad u \to e^x$ as $y \to \infty,$

(b) $yu_x + xu_y = 0,\quad u = \sin x$ on $x^2 + y^2 = 1,$

(c) $-xu_x + yu_y = 1$ for $0 < x < y,$

$u = 2x$ on $y = 3x,$

(d) $2xu_x + (x+1)u_y = y$ for $x > 0,$

$u = 2y$ on $x = 1,$

(e) $xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2$ for $x > 0, y > 0,$

$u = x^2$ on $y = 1,$

(15) أوجد السطح التكاملي للمسألة:

$$\left(u^2 - y^2\right)u_x + xyu_y + xu = 0,\quad u = y = x,\ x > 0$$

(16) (أ) حل مسألة كوشي:

$$u_x + uu_y = 1,\ u(0,y) = ay$$

(ب) أوجد الحل للمعادلة في (أ) تحت الشروط

$$x(s,0) = 2s,\quad y(s,0) = s^2,\quad u\left(0,s^2\right) = s$$

المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات الرتبة الأولى

NONLINEAR FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

3-1 الحلول العامة والمفردة

General solutions and Singular solutions

سنعرض في هذا الباب المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات الرتبة الأولى. في الحالة عندما تحتوى المعادلة التفاضلية على متغيرين مستقلين x,y فقط، ومتغير تابع z، تكون بوجه عام على الصورة:

$$F\left(x,y,z,p,q\right)=0 \qquad (1)$$

حيث F دالة غير خطية بالنسبة إلى p,q، حيث $p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

رأينا في الباب الأول أن مثل هذه المعادلة التفاضلية يمكن الحصول عليها عند حذف ثابتين اختياريين a,b في معادلة تعرف عائلة، في بارامترين، من السطوح:

$$\psi\left(x,y,z,a,b\right)=0 \qquad (2)$$

وسنبين لاحقاً؛ أن العكس صحيح، أي إن كل معادلة على الصورة (1) لها حل يعطى بالمعادلة (2).

المعادلة (1) تعطى عند كل نقطة (x,y,z)، على السطح من مجموعة السطوح (2) الذي يمر بهذه النقطة، علاقة $\varphi\left(p,q\right)=0$ بين

الأعداد p,q . هذه الأعداد تعرف الاتجاه العمودي $n\left(p,q,-1\right)$ على السطوح (2).

وهذه السطوح تعرف الحل التام *Complete solution* للمعادلة (1). ويقال كذلك الحل الكامل.

بهذا التفسير الهندسي للمعادلة (1)؛ سنرى أن مسالة إيجاد الحل للمعادلة (1) تتحول إلى إيجاد معادلة السطوح $\psi\left(x,y,z,a,b\right)=0$، حيث ψ دالة اختيارية تعتمد على البارامترين a,b.

وحيث إن العمودي على الغلاف لمجموعة من السطوح يكون عموديا على كل من هذه السطوح فإن الغلاف لمجموعة السطوح (2) يمثل حلاً للمعادلة (1). وبذلك؛ نستطيع أن نعرف حلا للمعادلة (1) لا يعتمد على ثوابت اختيارية، ولا يكون واحداً من السطوح (2). هذا الحل يسمى بالحل المفرد *Singular solution*. وهو حل مستقل وليس حلاً خاصاً ينتج عن التعويض، بقيم خاصة للثابتين a,b، في المعادلة (2). وبنفس الطريقة المتبعة في المعادلات التفاضلية العادية يمكن الحصول على الحل المفرد - إن وجد- بطريقتين مختلفتين.

الطريقة الأولى: بحذف الثابتين a,b من المعادلات الثلاثة:

$$\psi\left(x,y,z,a,b\right)=0,\ \ \frac{\partial\psi}{\partial a}=0,\ \ \frac{\partial\psi}{\partial b}=0$$

وبذلك؛ نحصل على علاقة $\gamma\left(x,y,z\right)=0$ تربط x,y,z تسمى المميز أو محذوف الثابتين، (أو باختصار المحذوف) a,b.

إذا كان المميز $\gamma\left(x,y,z\right)=0$ يحقق المعادلة التفاضلية (1)؛ فيكون هو غلاف السطوح (2)، أي $\gamma\left(x,y,z\right)=0$ تعطي الحل المفرد.

الطريقة الثانية: بحذف p,q من المعادلات الثلاثة:

$$F\left(x,y,z,p,q\right)=0,\ \ \frac{\partial F}{\partial p}=0,\ \ \frac{\partial F}{\partial q}=0$$

نحصل على علاقة $\varphi(x,y,z)=0$ تسمى المميز أو المحذوف p,q. إذا كان هذا المميز يحقق المعادلة التفاضلية (1)؛ فيكون هو غلاف السطوح (2)، أي الحل المفرد.

أما الحل العام *General solution* للمعادلة (1)؛ فيمكن الحصول عليه من الحل الكامل للمعادلة (1)، عندما توجد دالة في الثابتين a,b. فإذا كانت $b=\chi(a)$ دالة اختيارية قابلة للتفاضل، فإن المعادلة (2) تصبح على الصورة:

$$\psi\left(x,y,z,a,\chi(a)\right)=0 \qquad (3)$$

عندئذ ينتج الحل العام من حذف a من المعادلة (3) والمعادلة التي تنتج بتفاضل المعادلة (3) بالنسبة إلى a، وهو لذلك يمثل الغلاف لعائلة السطوح (3) ذات البارامتر الواحد a.

لتوضيح ما سبق. اعتبر المعادلة:

$$z^2\left(1+p^2+q^2\right)=1 \qquad (4)$$

فإن:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1 \qquad (5)$$

حل من النوع الأول(حل كامل)، حيث يعتمد على بارامترين a,b. لإثبات أن المعادلة (5) حل للمعادلة (4) نتبع خطوات تكوين المعادلات التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية. بتفاضل المعادلة (5) بالنسبة إلى x,y نجد أن:

$$2(x-a)+2zz_x=0$$
$$2(y-b)+2zz_y=0$$

ومنها:

$$(zz_x)^2+(zz_y)^2+z^2=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1.$$

من جهة ثانية، بحذف a,b من المعادلة (5) و المعادلات التالية:

$$x-a=0,\quad y-b=0$$

هـذه المعـادلات تنـتج مـن المعادلـة (5) بالتفاضـل بالنسـبة إلـى a,b.
بالتعويض، من هذه المعـادلات، فـي المعادلـة (5) نحصـل علـى $z^2=1$.
وبالتالي؛ فإن $z=\pm1$ هي معادلة الغلاف لعائلة الكرات (5). ومن معادلة الغلاف $z=\pm1$ واضح أن:

$$z_x=0, \quad z_y=0$$

ومن ثم؛ فإن الغلاف $z=\pm1$ يحقق المعادلة (4)، حيث:

$$z^2\left[z_x^2+z_y^2+1\right]=z^2\left[0+0+1\right]=1$$

هذا يعني أن الغلاف $z=\pm1$ حل مـن النـوع الثـاني (حـل شـاذ)، للمعادلـة (4).

ولإيجاد حل عام للمعادلة (4)، دعنا نعتبر، على سبيل المثال، عندما $b=a$. عندئذ؛ فإن المعادلة (5) تأخذ الصورة:

$$(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=1 \qquad (6)$$

هذه المعادلة تمثل عائلة من كرات تعتمد على بارامتر واحد a. بالتفاضل في (6) بالنسبة إلى a نحصل على:

$$-2(x-a)-2(y-a)=0$$

ومنها:

$$a=\frac{x+y}{2}$$

بالتعويض في (6) عن a، نحصل على معادلة الغلاف لعائلة الكرات (6):

$$\left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(y-\frac{x+y}{2}\right)^2+z^2=1$$

وهذه تكافئ المعادلة:

$$(x-y)^2+2z^2=2 \qquad (7)$$

واضح أنه بالتفاضل في (7) بالنسبة إلى x,y:

$$2(x-y)+4zz_x=0$$
$$-2(x-y)+4zz_y=0$$

ومنها:

$$4zz_x=-2(x-y),\quad 4zz_y=2(x-y)$$

بالقسمة على 2 والتربيع والجمع

$$4\left[(zz_x)^2+(zz_y)^2\right]=2(x-y)^2=4-4z^2$$

ومنها نحصل على:

$$(zz_x)^2+(zz_y)^2+z^2=1$$
$$z^2\left[p^2+q^2+1\right]=1$$

وعليه؛ فإن الغلاف (7) هو حل للمعادلة (4)، ويسمى الحل العام (صورة خاصة عند $b=a$).

ملاحظة: يمكن إيجاد حلول تامة مختلفة للمعادلة التفاضلية غير الخطية، بحيث لا يمكن إيجاد أحد هذه الحلول من آخر باختيارات ما للثوابت الاختيارية a,b، وعند الحصول على حل تام؛ فإن كل حل آخر -بما في ذلك كل حل تام آخر -يكون من مجموعة الحلول العامة والشاذة التي يمكن الحصول عليها من هذا الحل التام الذي وجدناه. فمثلاً للمعادلة $z^2\left(p^2+q^2+1\right)=1$ فإن:

$$(y-mx-c)^2=\left(1+m^2\right)\left(1-z^2\right)$$

حل تام. هذا الحل يمثل غلاف مجموعة السطوح

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$$

عندما نضع $b=ma+c$.

2-3 طريقة كوشي للمنحنيات المميزة
Cauchy's method of characteristics

سندرس الآن طريقة لحل المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية:

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad (1)$$

هذه الطريقة ترجع إلى كوشي، وتعتمد بصورة أساسية على أفكار هندسية. فالمستوى الذي يمر بالنقطة $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$، بحيث يكون المتجه العمودي عليه موازياً الاتجاه المعرف بنسب الاتجاه $\left(p_0,q_0,-1\right)$، يتحدد بصورة وحيدة بمجموعة الأعداد $\left(x_0,y_0,z_0,p_0,q_0\right)$. وبالعكس؛ فإن أية مجموعة تتكون من خمسة أعداد حقيقية تُعَّرف مستوى في الفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3$. لهذا السبب؛ فإن مجموعة الأعداد $\left(x,y,z,p,q\right)$تسمى عنصر مستوى(*Plane element*) من الفراغ $\mathbb{R}^3$. فإذا كانت الأعداد $\left(x_0,y_0,z_0,p_0,q_0\right)$ تحقق المعادلة:

$$F\left(x,y,z,p,q\right)=0 \qquad (2)$$

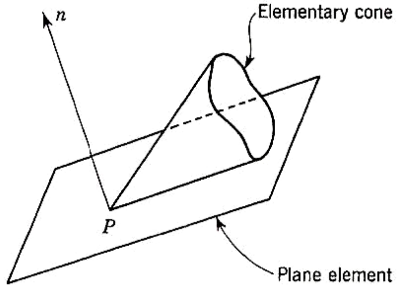
فإن هذه الأعداد تسمى عنصر تكامل لهذه المعادلة عند النقطة: $.P\left(x_0,y_0,z_0\right)$

إذا أمكن حل المعادلة(2) للحصول على التعبير:

$$q=G\left(x,y,z,p\right) \qquad (3)$$

عندما تكون الأعداد x_0,y_0,z_0 ثابتة، وتتغير p فإننا نحصل على مجموعة عناصر مستوى $\left\{x_0,y_0,z_0,p,G\left(x_0,y_0,z_0,p\right)\right\}$. هذه المجموعة تعتمد على بارامتر واحد p. وكلما تغيرت p نحصل على مجموعة من عناصر مستوى، كل هذه المستويات تمر بالنقطة$P\left(x_0,y_0,z_0\right)$. ولهذا فإن هذه المستويات تغلف مخروط رأسه عند النقطة P. مثل هذا المخروط -الذي هكذا ينشأ-يسمى المخروط

الأولـي (*Elementary cone*) للمعادلـة (2) عنـد النقطـة P، كمـا بالشـكل التالي.



من جهة ثانية؛ إذا S سطح معادلته هي:

$$z = g(x, y) \qquad (4)$$

وإذا كانت الدوال g, g_x, g_y هي دوال متصلة على منطقة معينـة D فـي المستوى xy، فإن المستوى المماس عند كل نقطـة مـن السـطح S يحـدد مجموعة عناصر المستوى:

$$\{x_0, y_0, g(x_0, y_0), g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0)\} \qquad (5)$$

هــذه المجموعــة تســمى عنصــر الممــاس للســطح S عنــد النقطــة $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$. وهكذا؛ يصبح واضحاً أن:

نظرية(1): *السطح S في الفراغ يكون سطحاً تكاملياً للمعادلـة التفاضـلية الجزئية (1) إذا – وإذا فقط- كان عنصر المماس عند كل نقطة على السطح مماسا للمخروط الأولي للمعادلة.*

الآن نوجد السـطح التكـاملي للمعادلـة(2) فـي صـورة بارامتريـة، وذلك بتعيين عائلة المنحنيات المميزة له. إذا C منحنى معرف بالمعادلات البارامترية:

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t) \qquad (6)$$

فإن هذا المنحنى يقع على السطح (4) إذا كان $z(t) = g(x(t), y(t))$.

وبالتـالي ؛ يكـون الممـاس$(x'(t), y'(t), z'(t))$ للمنحنـى عنـد النقطـة $(x(t), y(t), z(t))$ عمودياً على الاتجاه $(p, q, -1)$

$$z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t) \qquad (7)$$

وكذلك لكل t، حيث أن النقاط $\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ تقع على السطح التكاملي للمعادلة(2)، فإن:

$$F\left(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\right) = 0 \qquad (8)$$

من (7) بالتفاضل بالنسبة إلى p نحصل على:

$$0 = x'(t) + \frac{dq}{dp} y'(t) \qquad (9)$$

ومن (2) بالتفاضل بالنسبة إلى p نحصل على:

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dq}{dp} = 0 \qquad (10)$$

ومن $(10),(9),(7)$ نجد أن:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} \qquad (11)$$

وهذا يعني أن مركبات المماس، $x'(t), y'(t), z'(t)$، للمنحنى C تتناسب مع $F_p, F_q, pF_p + qF_q$ على الترتيب. وباختيار البارامتر t بحيث

$$x'(t) = F_p, \quad y'(t) = F_q, \quad z'(t) = pF_p + qF_q \qquad (12)$$

وهكذا؛ فإنه لإيجاد التمثيل البارامتري(6)، يتعين علينا حساب $p(t), q(t)$. حيث أن p دالة في t، مع أخذ المعادلات(12) في الاعتبار، فإن:

$$p'(t) = \frac{\partial p}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial p}{\partial y} y'(t) = F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$= F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x}$$

لأن $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$.

ومن المعادلة(2) بالتفاضل في x نحصل على:

$$F_x + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} p_x + \frac{\partial F}{\partial q} q_x = 0$$

وبالتالي ؛ نجد أن:

$$p'(t) = -\left(F_x + pF_z\right) \qquad (13)$$

بالمثل يمكن الحصول على:

$$q'(t) = -\left(F_y + qF_z\right) \qquad (14)$$

مما سبق؛ فإن المعادلات:

$$\begin{aligned} x'(t) &= F_p, \quad y'(t) = F_q, \;\; z'(t) = pF_p + qF_q \\ p'(t) &= -F_x - pF_z, \;\; q'(t) = -F_y - qF_z \end{aligned} \qquad (15)$$

تسمى المعادلات المميزة للمعادلة(2). بحلها نحصل على التمثيل البارامتري(6) لعائلة السطوح التكاملية (4)، السطوح التكاملية للمعادلة(2).

والآن؛ يمكننا حل مسألة كوشي للمعادلة(2): أي إيجاد حل المعادلة(2) الذي يمر بالمنحنىΓ، ذا المعادلات البارامترية:

$$x = \theta(\tau),\; y = \varphi(\tau),\; z = \gamma(\tau) \qquad (16)$$

هذا الحل المطلوب يمكن الحصول عليه بحل المعادلات المميزة (15) مع الأخذ في الاعتبار أن:

$$x_0 = \theta(\tau),\; y_0 = \varphi(\tau),\; z_0 = \gamma(\tau) \qquad (17)$$

هي قيم ابتدائية لكل من x, y, z، والقيم الابتدائية المناظرة لكل من p, q تتعين من العلاقات:

$$\gamma'(\tau) = p_0\theta'(\tau) + q_0\varphi'(\tau), \quad F(\theta, \varphi, \gamma, p_0, q_0) = 0$$

وهكذا؛ يكون حل المعادلات (15)، تحت الشروط الابتدائية(17)، على الصورة:

$$x = X(t,\tau),\; y = Y(t,\tau),\; z = Z(t,\tau) \qquad (18)$$

وبحذف البارامترين t, τ من المعادلات(18) نحصل على حل مسألة كوشي $(16),(2)$، على الصورة $\psi(x, y, z) = 0$.

هذه المعادلة تعرف السطح التكاملي للمعادلة(2) الذي يمر بالمنحنىΓ.

مثال(1): أوجد الحل للمعادلة:

$$z=\frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right)+\left(p-x\right)\left(q-y\right)$$

الذي يمر بمحور x.

الحل: واضح أن القيم الابتدائية هي:

$$x_0=\tau,\ y_0=0,\ z_0=0,\ p_0=0,\ q_0=2\tau$$

والمعادلات المميزة هي:

$$\frac{dx}{dt}=p+q-y\,,\quad \frac{dy}{dt}=q+p-x$$

$$\frac{dz}{dt}=p\left(p+q-y\right)+q\left(p+q-x\right)$$

$$\frac{dp}{dt}=p+q-y\,,\quad \frac{dq}{dt}=p+q-x$$

لاحظ أن:

$$\frac{d}{dt}\left(p+q-y\right)=\frac{dp}{dt}+\frac{dq}{dt}-\frac{dy}{dt}=p+q-y$$

$$\frac{d}{dt}\left(p+q-x\right)=p+q-x$$

وعليه؛ فإن:

$$p+q-x=c_1e^t\,,\qquad p+q-y=c_2e^t$$

حيث c_1,c_2 ثوابت تتعين من الشروط الابتدائية:

$$x_0=\tau,\ y_0=0,\ p_0=0,\ q_0=2\tau,\ t_0=0$$

من ذلك؛ ينتج أن:

$$p+q-x=\tau e^t\,,\quad p+q-y=2\tau e^t$$

وهكذا؛ فإن $q=\tau\left(e^t+1\right)$, $p=2\tau\left(e^t-1\right)$.

ومن ثم:

$$\frac{dx}{dt} = p + q - y = 2\tau e^t , \quad \frac{dy}{dt} = p + q - x = \tau e^t$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= p\left(p + q - y\right) + q\left(p + q - x\right)\\ &= 4\tau^2 e^t \left(e^t - 1\right) + \tau^2 e^t \left(e^t + 1\right)\\ &= 5\tau^2 e^{2t} - 3\tau^2 e^t\end{aligned}$$

وبالتكامل نحصل على:

$$x = \tau\left(2e^t - 1\right), \quad y = \tau\left(e^t - 1\right),$$

$$z = \frac{5}{2}\tau^2\left(e^{2t} - 1\right) - 3\tau^2\left(e^t - 1\right)$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{2e^t - 1}{e^t - 1} = \frac{x}{y}, \quad \tau = \frac{x - y}{e^t}$$

ومن هذه المعادلات؛ نستنتج أن $\tau = x - 2y$، $e^t = \dfrac{y - x}{2y - x}$. ومن ثم؛ ينتج أن:

$$z = \frac{1}{2} y\left(4x - 3y\right)$$

مثال(2): أوجد حل معادلة إيكونال $p^2 + q^2 = n^2$، الذي يحقق الشرط $z\left(x, 2x\right) = 1$، حيث n ثابت يسمى معامل الانكسار.

الحل: بوضع المعادلة على الصورة:

$$F\left(x, y, z, p, q\right) = p^2 + q^2 - n^2 = 0$$

والشرط المعطى على الصورة البارامترية:

$$x = \tau, \quad y = 2\tau, \quad z = 1$$

فإننا نحصل على المعادلات المميزة:

$$x'(t)=2p,\ y'(t)=2q,\ z'(t)=2n^2$$
$$p'(t)=0,\ q'(t)=0.$$

والشروط الابتدائية:

$$x_0=\tau,\ y_0=2\tau,\ z_0=1,\ p_0=\frac{2n}{\sqrt{5}},q_0=-\frac{n}{\sqrt{5}}$$

بتكامل هذه المعادلات المميزة، وتطبيق الشروط الابتدائية؛ نحصل على:

$$x=\tau+\frac{2n}{\sqrt{5}}t,\ y=2\tau-\frac{n}{\sqrt{5}}t,\ z=1+2n^2t,\ p=\frac{2n}{\sqrt{5}},\ q=-\frac{n}{\sqrt{5}}$$

ومنها؛ فإن الحل المطلوب هو $z=1+\frac{2n}{\sqrt{5}}(2x-y)$.

3-3 المعادلات المتوافقة

Compatible equations

يقال لمعادلتين:

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad (1)$$
$$G(x,y,z,p,q)=0 \qquad (2)$$

أنهما متوافقتان، إذا كان كل حل لإحداهما هو حل للأخرى. نحن الآن نبحث عن الشروط التي بتحققها تكون المعادلتان متوافقتين. إذا كان:

$$J:=\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}=\begin{vmatrix}F_p & G_p\\ F_q & G_q\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (3)$$

فإن المعادلات $(2),(1)$ تكون قابلة للحل في p,q، لتكن الحلول على الصورة:

$$p=\phi(x,y,z),\qquad q=\psi(x,y,z) \qquad (4)$$

الشرط اللازم للمعادلات $(2),(1)$ لتكون متوافقة؛ يكافئ الشرط بأن المعادلات (4) قابلة للتكامل. هذا يعني أن تكون معادلة بفافين:

$$\phi dx+\psi dy-dz=0$$

قابلة للتكامل. من نظرية (1)، الباب الأول، نعلم أن معادلة بفافين تكون قابلة للتكامل إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$\phi\left(-\psi_z\right)+\psi\phi_z-\left(\psi_x-\phi_y\right)=0$$

هذه المتساوية تكافئ المعادلة:

$$\phi_y+\psi\phi_z=\psi_x+\phi\psi_z \qquad (5)$$

من جهة ثانية؛ عند التعويض عن p,q من المعادلات (4) في المعادلات $(2),(1)$، والتفاضل بالنسبة إلى $x\,,z$ نحصل على:

$$F_x+F_p\phi_x+F_q\psi_x=0,\quad F_z+F_p\phi_z+F_q\psi_z=0$$

$$G_x+G_p\phi_x+G_q\psi_x=0,\quad G_z+G_p\phi_z+G_q\psi_z=0$$

ومن هذه المعادلات؛ نستنتج أن:

$$F_x+\phi F_z+F_p\left(\phi_x+\phi\phi_z\right)+F_q\left(\psi_x+\phi\psi_z\right)=0$$

$$G_x+\phi G_z+G_p\left(\phi_x+\phi\phi_z\right)+G_q\left(\psi_x+\phi\psi_z\right)=0$$

بضرب المعادلة الأولى في G_p، وضرب المعادلة الثانية في F_p، ثم الطرح ينتج أن:

$$\psi_x+\phi\psi_z=\frac{1}{G_qF_p-F_qG_p}\left\{G_pF_x-F_pG_x+\phi\left(G_pF_z-F_pG_z\right)\right\}$$

يمكن وضع هذه النتيجة على الصورة:

$$\psi_x+\phi\psi_z=\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial(G,F)}{\partial(x,p)}+\phi\frac{\partial(G,F)}{\partial(z,p)}\right\} \qquad (6)$$

حيث J معرفة بالمعادلة (3).

مرة ثانية؛ بالتعويض عن p,q من المعادلات (4) في المعادلات $(2),(1)$، والتفاضل بالنسبة إلى $y\,,z$ يمكننا الحصول على:

$$\phi_y+\psi\phi_z=-\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial(G,F)}{\partial(y,q)}+\psi\frac{\partial(G,F)}{\partial(z,q)}\right\} \qquad (7)$$

الآن؛ بالتعويض من المعادلات $(7),(6)$ في المعادلة (5)، وحيث إن $p=\phi,\ q=\psi$، فإن شرط أن تكون المعادلات $(2),(1)$ متوافقة هو:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,p)}+p\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,p)}+\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,q)}+q\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,q)}=0 \qquad (8)$$

مثال(1): بين أن المعادلات التالية متوافقة:

$$xp=yq,\;\; z\left(xp+yq\right)=2xy$$

الحل: عرف:

$$F\left(x,y,z,p,q\right)=xp-yq$$
$$G\left(x,y,z,p,q\right)=z\left(xp+yq\right)-2xy$$

نجد أن:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,p)}=\begin{vmatrix}F_x & G_x\\ F_p & G_p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}p & zp-2y\\ x & xz\end{vmatrix}=2xy$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,p)}=\begin{vmatrix}F_z & G_z\\ F_p & G_p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & xp+yq\\ x & xz\end{vmatrix}=-x\left(xp+yq\right)$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,q)}=\begin{vmatrix}F_y & G_y\\ F_q & G_q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-q & zq-2x\\ -y & yz\end{vmatrix}=-2xy$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,q)}=\begin{vmatrix}F_z & G_z\\ F_q & G_q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & xp+yq\\ -y & yz\end{vmatrix}=y\left(xp+yq\right)$$

ومنها نجد أن:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,p)}+p\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,p)}+\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,q)}+q\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,q)}\\&=2xy-xp\left(xp+yq\right)-2xy+yq\left(xp+yq\right)\\&=\left(xp+yq\right)\left(yq-xp\right)=0\end{aligned}$$

وهذا يبين أن المعادلتين متوافقتان.

3-4 طريقة شاربت

Charpit's method

تعتمد هذه الطريقة كثيراً على النتائج السابقة. في هذه الطريقة، فإن فكرة شاربت لإيجاد حل معادلة تفاضلية جزئية غير خطية على نحو:

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad (1)$$

تبدأ بتعيين معادلة ثانية:

$$G(x,y,z,p,q)=a \qquad (2)$$

بحيث يمكن حل المعادلتين (2) و(1)، والحصول على الدوال

$$p=p(x,y,z,a), \quad q=q(x,y,z,a) \qquad (3)$$

و من ثم؛ نكون معادلة بفافين:

$$dz=p(x,y,z,a)\,dx+q(x,y,z,a)\,dy \qquad (4)$$

وبحل معادلة بفافين (4) نحصل على الحل الكامل للمعادلة (1)، ليكن هذا الحل على الصورة:

$$\varphi(x,y,z,a,b)=0 \qquad (5)$$

حيث a,b ثابتان اختياريان.

لتعيين الدالة G، أي لإيجاد المعادلة (2) نستخدم الشرط الضروري والكافي لكي تكون المعادلة (4) قابلة للتكامل.

فإذا $n=p(x,y,z,a)i+q(x,y,z,a)j-k$ ؛ فإن المعادلة (4) تكون قابلة للحل إذا -وفقط إذا- $n\cdot\nabla\wedge n=0$. هذا الشرط يمكن وضعه على الصورة:

$$p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (6)$$

المشتقات الجزئية $\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z},\frac{\partial q}{\partial x},\frac{\partial q}{\partial z}$ يمكن حسابها من المعادلات (3). أو من المعادلات $(1),(2)$ كما يلي.

بالتفاضل، في طرفي المعادلات $(1),(2)$، بالنسبة إلى x,y,z نحصل على:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(p,x)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(p,q)}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(y,q)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(p,q)}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,q)}}{\frac{D(F,G)}{D(p,q)}}\,,\quad \frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(p,z)}}{\frac{D(F,G)}{D(p,q)}}$$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (6) ينتج أن:

$$p\left(F_zG_p-F_pG_z\right)+q\left(F_zG_q-F_qG_z\right)$$
$$+\left(F_xG_p-F_pG_x\right)+\left(F_yG_q-F_qG_y\right)=0$$

وهذا هو الشرط، الذي يجعل المعادلتين $(1),(2)$ متوافقتين. هذا الشرط يمكن وضعه على صورة معادلة لاجرانج الخطية في G ومشتقاتها:

$$F_pG_x+F_qG_y+\left(pF_p+qF_q\right)G_z-\left(F_x+pF_z\right)G_p-\left(F_y+qF_z\right)G_q=0$$

وكما درسنا في الباب الثاني؛ فإن حل هذه المعادلة يتعين من حلول مجموعة المعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+qF_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_z}=-\frac{dq}{F_y+qF_Z}\qquad(7)$$

وهكذا؛ فإنه يمكن اختيار $G(x,y,z,p,q)=a$ حل للمعادلات (7) بحيث $\frac{D(F,G)}{D(p,q)}\neq 0$.

لتوضيح طريقة شاربت دعنا نعرض المثال التالي:

مثال(1): أوجد الحل الكامل للمعادلة $yzp^2-q=0$.

الحل: بوضع $F(x,y,z,p,q)=yzp^2-q$. ونكون مجموعة المعادلات المساعدة:

$$\frac{dx}{2pyz}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{2p^2zy-q}=-\frac{dp}{yp^3}=-\frac{dq}{zp^2+yp^2q}$$

وحيث إن $yzp^2-q=0$، ومن تساوي النسبتين الثالثة والرابعة نحصل على:

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dp}{p}$$

وبالتكامل؛ نحصل على $zp = a$. بفرض أن $G = pz$، نجد أن:

$$\frac{D(F,G)}{D(p,q)} \neq 0$$

الآن؛ بحل المعادلتين $yzp^2 - q = 0,\ \ zp = a$ في p,q نحصل على:

$$p = \frac{a}{z},\ q = \frac{a^2 y}{z}$$

وبالتالي؛ فإن $dz = \frac{a}{z}dx + \frac{a^2 y}{z}dy$. ومن ذلك بالتكامل نحصل على الحل الكامل:

$$z^2 = ax + \frac{1}{2}a^2 y^2 + b$$

حيث a,b ثابتان اختياريان.

مثال (2): أوجد الحل الكامل لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

$$(1)\ p = xzq^2 \qquad\qquad (2)\ zp^2 + y^2(p - q) = 0$$

الحل: (1) بوضع:

$$F(x,y,z,p,q) := p - xzq^2 = 0 \tag{8}$$

نحصل على:

$$F_x = -zq^2, F_y = 0, F_z = -xq^2, F_p = 1, F_q = -2xzq$$

بتكوين المعادلات المساعدة:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2xzq} = \frac{dz}{p - 2xzq^2} = -\frac{dp}{-zq^2 - xpq^2} = -\frac{dq}{-xq^3}$$

وحيث إن $xzq^2 = p$ فإن:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2xzq} = \frac{dz}{-xzq^2} = \frac{dp}{q^2(xp + z)} = \frac{dq}{xq^3}$$

من النسبتين الثالثة والأخيرة؛ نجد أن $\frac{dz}{z} = -\frac{dq}{q}$. وبالتكامل ينتج أن $q = \frac{a}{z}$. حيث a ثابت اختياري. الآن نفرض أن:

$$G\left(x,y,z,p,q,a\right):=q-\frac{a}{z}=0 \qquad (9)$$

من (8) و(9) يتضح أن:

$$\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(p,q\right)}=\begin{vmatrix}1 & -2xzq\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

وأن $p=\frac{a^2x}{z},\ q=\frac{a}{z}$. وبذلك يكون:

$$dz=\frac{a^2x}{z}dx+\frac{a}{z}dy$$

بالضرب في z، والتكامل ينتج أن الحل الكامل المطلوب هو:

$$z^2=a^2x^2+2ay+b$$

حيث a,b ثابتان اختياريان.

تمرين: أوجد حلاً كاملاً آخرَ لهذه المعادلة.

(2) بوضع:

$$F\left(x,y,z,p,q\right)=zp^2+y^2\left(p-q\right)=0 \qquad (10)$$

منها نجد أن:

$$F_x=0,\ F_y=2y\left(p-q\right),\ F_z=p^2,\ \ F_p=2zp+y^2, F_q=-y^2$$

ومن ثم؛ نكون المعادلات المساعدة:

$$\frac{dx}{2zp+y^2}=\frac{dy}{-y^2}=\frac{dz}{p\left(2zp+y^2\right)-qy^2}=-\frac{dp}{p^3}=-\frac{dq}{2y\left(q-p\right)-qp^2}$$

ومن (10) فإن النسبة الثالثة تصبح على الصورة $\frac{dz}{zp^2}$. وبالتالي من النسبتين الثالثة والرابعة؛ نجد أن $\frac{dz}{z}=-\frac{dp}{p}$. وبالتكامل نحصل على $p=\frac{a}{z}$ حيث a ثابت اختياري.

بوضع:

$$G\left(x,y,z,p,q,a\right):=p-\frac{a}{z}=0 \qquad (11)$$

نحصل من (10) و(11) على:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}=\begin{vmatrix}2zp+y^2 & -y^2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=y^2\neq 0$$

وأن $p=\frac{a}{z},\ q=\frac{a}{z}\left(1+\frac{a}{y^2}\right)$. وبذلك؛ فإن:

$$dz=\frac{a}{z}dx+\frac{a}{z}\left(1+\frac{a}{y^2}\right)dy$$

بضرب الطرفين في z، والتكامل نحصل على الحل الكامل المطلوب:

$$z^2=ax+a\left(y-\frac{a}{y}\right)+b$$

حيث a,b ثابتان اختياريان.

5-3 تمارين

(1) أوجد الحل الكامل والحل المفرد– إن وجد – لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

(1) $q^2-3q+p=2$

(2) $p^2+q^2=4$

(3) $q+\sin p=0$

(4) $q^6+2p^2q^2+3p^3=0$

(5) $p-3x^2+y-q^2=0$

(6) $pq=xy$

(7) $py=2yx+\log q$

(8) $q=xyp^2$

(2) حل المعادلات التفاضلية التالية، مستخدماً التعويض المناظر لكل حالة:

(1) $x^2p^2+y^2q=z\ ,\ t=\ln x\ ,\ \tau=\ln y\ ,\ \theta=2z^{1/2}$

(2) $x^4p^2+y^2zq=2z^2\ ,\ t=\frac{1}{x},\ \tau=\frac{1}{y},\ \theta=\ln z$

(3) $pq=x^my^nz^{2a}\ ,\ t=\frac{x^{m+1}}{m+1},\ \tau=\frac{y^{n+1}}{n+1},\ \theta=\frac{z^{a-1}}{1-a}$

(4) $pq+2px^2y+2qxy^2=4xyz\ ,u=x^2,v=y^2$

(3) أوجد المعادلات المميزة للمعادلة $pq = z$ ، وحدد السطح التكاملي الذي يمر بالقطع المكافئ $x = 0, y^2 = z$.

(4) أوجد المعادلات المميزة للمعادلة $\left(1+q^2\right)z = px$، وحدد السطح التكاملي الذي يمر بالقطع المكافئ $y = 0, x^2 = 2z$.

(5) حدد المنحنيات المميزة للمعادلة $z = p^2 - q^2$، وأوجد السطح التكاملي الذي يمر بالقطع المكافئ $y = 0,\ \ 4z + x^2 = 0$.

(6) للمعادلة التفاضلية $\left(p^2+q^2\right)y = qz$، أوجد السطح التكاملي الذي يمر بالقطع الزائد $x = 0,\ \ z^2 - 2y^2 = 0$.

(7) أوجد حلاً للمعادلة $p^2 + q^2 = 4$ الذي يحقق الشرط الابتدائي: $z\left(x,1\right) = 2\sqrt{1+x^2}$.

(8) بين أن المعادلتين $xp - yq = x,\ \ x^2p + q + xz$ متوافقتان، ثم أوجد حلهما.

(9) بين أن المعادلة $z = xp + yq$ تكون متوافقة مع كل معادلة على الصورة:

$$F\left(x,y,z,p,q\right) = 0$$

تكون فيها F دالة متجانسة في المتغيرات x,y,z. أوجد حلاً عاماً للمعادلتين:

$$z = xp + yq, \quad 2xy\left(p^2+q^2\right) = z\left(yp + xq\right)$$

(10) بـــين أن المعـــادلتين $F\left(x,y,p,q\right)=0,\ G\left(x,y,p,q\right)=0$؛ متوافقتـــان إذا $\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,p\right)}+\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(y,q\right)}=0$. ثـــم بـــين أن المعـــادلتين $p=P\left(x,y\right),\ q=Q\left(x,y\right)$ متوافقتان إذا $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(11) أوجد الحل التام لكل من المعادلات التالية:

1) $\left(p^2+q^2\right)y=qz$

2) $p=\left(z+qy\right)^2$

3) $z^2=pqxy$

4) $xp+3yq=2\left(z-x^2q^2\right)$

5) $2\left(z+xp+yq\right)=yp^2$

6) $2\left(y+zq\right)=q\left(xpyq\right)$

(12) أوجد السطح التكاملي للمعادلـة $xp^2+yq=z$، الـذي يمـر الخـط المستقيم $y=1,\ x+z=0$.

(13) أثبـت أن السـطح التكـاملي للمعادلـــة $z\left(1-q^2\right)=2\left(xp+yq\right)$، والذي يمر بالخط المستقيم $x=1,\ y=hz+k$ يعرف بالمعادلة:

$$\left(y-kx\right)^2=z\left\{\left(1+h^2\right)x-1\right\}$$

المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

نناقش في هذا الفصل؛ المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الثانية. في الفصل (1.4) نقدم تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الرتبة الثانية، حيث تقسم المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الرتبة الثانية إلى ثلاثة أنواع رئيسة هي: المعادلات الزائدية، والمعادلات المكافئة، والمعادلات الناقصية. وفي الفصل (2.4) ندرس الصور القياسية لهذه الأنواع الرئيسية. وفي الفصل (3.4) نقدم طرق حل المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة، ونعمم هذه الطرق لمعادلات خطية من رتب أعلى من الرتبة الثانية. بينما نخصص الفصل (4.4) لدراسة بعض المعادلات الخطية ذات المعاملات المتغيرة. في الفصل (5.4) نقدم عدداً من التمارين على محتويات الباب.

1-4 تصنيف معادلات الرتبة الثانية الخطية
Classification of the linear second equations

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية في متغير تابع واحد u، وعدد من المتغيرات المستقلة $x_1, x_2, ..., x_n$ هي:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G \qquad (1)$$

حيث $A_{ij}\,,\, B_i\,,\, F, G$ دوال حقيقية معرفة على منطقة جزئية من الفراغ $(x_1, x_2,..., x_n)$. يفترض أن المعاملات A_{ij}, B_i, F, G والدالة u هي نوع C^2، على المنطقة من $\mathbb{R}^n$ المعرفة عليها المعادلة. لذلك نعتبر أن $A_{ij} = A_{ji}$؛ (لأن $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$).

ملاحظة: *يقال لدالة f إنها نوع $C^k(D)$، $0 \le k$، إذا كانت f وكل مشتقاتها التفاضلية حتى رتبة k؛ جميعها دوال متصلة على النطاق D.*

لمناقشة تصنيف معادلات الرتبة الثانية سنعتبر معادلة في متغير تابع واحد ومتغيرين مستقلين x, y. في هذه الحالة فإن المعادلة (1) تصبح على الصورة:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (2)$$

المعاملات $A, B, ..., G$ تكون دوالاً فقط في x, y. الدوال A, B, C لا تتلاشى متزامنةً.

لتوضيح فكرة تصنيف المعادلة(2)، بسهولة أكثر، دعنا نعتبر المعادلة الموجية في بعد واحد $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. فإنه لأي دالة F من النوع C^2 نجد أن:

$$F_{tt} = \lambda^2 F''(x + \lambda t), \quad F_{xx} = F''(x + \lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

وهذا يعني أن $u = F(x + \lambda t)$ حلاً للمعادلة الموجية $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ إذا - وفقط إذا - $\lambda^2 - a^2 = 0$، أي $\lambda = \pm a$. من هذا؛ يتضح أن حلول هذه المعادلة تعتمد على حلول المعادلة الجبرية $\lambda^2 - a^2 = 0$، التي تسمى بالمعادلة المساعدة.

الآن إذا اعتبرنا المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

فإن $u = F(\alpha x + \beta y)$ يكون حلاً لهذه المعادلة إذا -وفقط إذا- تحقق الشرط:

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = 0$$

وهذه معادلة جبرية من الدرجة الثانية في α,β تمثل هندسياً قطعاً زائداً إذا -وفقط إذا- $B^2 - 4AC > 0$ وتمثل قطعاً ناقصاً إذا -وفقط إذا- $B^2 - 4AC < 0$. وتمثل قطعاً كافئاً إذا -وفقط إذا- $B^2 - 4AC = 0$. حيث إن تصنيف المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية (معادلة القطع التربيعي) يعتمد على معاملات حدود الدرجة الثانية فقط.

وهكذا؛ فإن تصنيف المعادلة التفاضلية(2) يأتي من تصنيف المعادلة التربيعية الجبرية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

هذه المعادلة تمثل هندسيا قطعاً مخروطياً: زائداً، مكافئياً، أو ناقصياً، إذا كان المقدار (المميز) $B^2 - 4AC$ موجباً، صفراً، أو سالباً على الترتيب.

وبالتالي؛ فإن المعادلة(2) تكون زائدية(*hyperbolic*)، مكافئة (*parabolic*) أو ناقصية(*elliptic*) عند النقطة (x_0, y_0) إذا كان المقدار:

$$B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$$

موجباً، صفراً، أو سالباً على الترتيب. وإذا تحقق ذلك لكل نقاط منطقة ما في المستوى $\mathbb{R}^2$ فإن المعادلة تكون زائدية، مكافئة، أو ناقصية على هذه المنطقة.

مثال (1): حدد نوع كل من المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

1) $3u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + xu_y = 0$

2) $u_{xx} + yu_{yy} = 0$

3) $u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0$

4) $2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0$

الحل: 1) المعادلة $3u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + xu_y = 0$ ناقصية؛ لأن

$$B^2 - 4AC = -56 < 0$$

2) للمعادلة $u_{xx} + y\,u_{yy} = 0$، وتسمى معادلة تركومي، نجد أن:

$$B^2 - 4AC = -4y$$

ولـذا فهـي ناقصـة إذا $y > 0$، مكافئـة عنـدما $y = 0$ (علـى محـور x)، وزائدية عندما $y < 0$.

3) للمعادلة $u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0$؛ نجد أن:

$$B^2 - 4AC = 4\left(y^2 - x\right)$$

وعليه؛ فهي ناقصة على المنطقة $x > y^2$ من المستوى xy، تكون مكافئة على القطع المكافئ $x = y^2$، وتكون زائدية على المنطقة $y^2 > x$.

4) للمعادلـــــــــة $2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0$؛ فـــــــــإن $B^2 - 4AC = 4x^2y^2 \geq 0$، وبالتالي؛ فإنها زائديـة لكل x, y، ما عدا عندما $y = 0$، أو $x = 0$ تكون مكافئة، وذلك على المحاور الأساسية $x = 0, y = 0$.

فـي الحالـة العامـة؛ فـإن المعادلـة التفاضـلية الجزئيـة الخطيـة ذات الرتبة الثانية في n من المتغيرات المستقلة تكون على الصورة (1):

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G$$

وحيـث إن $u_{x_j x_i} = u_{x_i x_j}$، فـإن الجـزء الأساسـي للمعادلـة (1)، مجمـوع الحدود التـي تحتـوي علـى مشـتقات الرتبـة الثانيـة، يمكـن ترتيبـه بحيـث $A_{ij} = A_{ji}$. وبذلك؛ تكـون مصـفوفة المعـاملات $M = \left(A_{ij}\right)$ متماثلـة مـن النـوع $n \times n$، ومن ثم يكون لها عدد n مـن القيم الذاتيـة الحقيقيـة القيمـة. هذه القيم الذاتية تكون هي أصفاراً لكثيرة الحـدود مـن درجـة n، فـي λ المعرفـة بـالصيغة $P(\lambda) = \det(M - \lambda I)$. حيث I مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$. بفرض أن p هو عدد القيم الذاتية الموجبة، و z عدد القيم الذاتية الصفرية للمصفوفة A فإن:

- المعادلـــــة (1): تكـــــون معادلـــــة زائديـــــة، إذا $z = 0,\ p = n - 1$، أو $z = 0,\ p = 1$

- المعادلة (1): تكون مكافئة، إذا $z > 0$ (أي $\det M = 0$)
- المعادلة (1): تكون ناقصية، إذا $z = 0, p = n$ أو $z = 0, p = 0$
- يقال إن المعادلة (1) فوق زائدية، إذا $z = 0, 1 < p < n - 1$

وإذا كانت بعض المعاملات A_{ij} غير ثابتة؛ فإن نوع المعادلة (1) يتغير بتغيير الموضع.

مثال(2): حدد نوع كل من المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

$$1)\ 3u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + 4u_{x_2x_3} + 4u_{x_3x_3} = 0$$

$$2)\ u_{xx} + u_{xy} + 5u_{yx} + u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz} = 0$$

الحل: 1) بإعادة صياغة المعادلة $3u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + 4u_{x_2x_3} + 4u_{x_3x_3} = 0$ على الصورة:

$$3u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + 2u_{x_2x_3} + 2u_{x_3x_2} + 4u_{x_3x_3} = 0$$

نجد أن:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

واضح أن $\det M = 0$، وبالتالي فالمعادلة مكافئة.

2) حيث إن $u_{xy} = u_{yx},\ u_{yz} = u_{zy}$، فإنه يمكن وضع المعادلة المعطاة على الصورة:

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 3u_{yx} + u_{yy} + u_{yz} + u_{zy} + u_{zz} = 0$$

ومن ثم؛ نعيد كتابة المعادلة على الصورة:

$$u_{x_1x_1} + 3u_{x_1x_2} + 3u_{x_2x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_2x_3} + u_{x_3x_2} + u_{x_3x_3} = 0$$

حيث $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ وبالتالي؛ فإن مصفوفة المعاملات للجزء الأساسي لهذه المعادلة هي:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي؛ $\det\left(M - \lambda I\right) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 9\right)$. ومن ثم؛ فإن القيم الذاتية λ للمصفوفة M هي $1, 1\pm\sqrt{10}$، أي إن $z = 0, p = 2$. وهذا يعني أن المعادلة زائدية.

4-2 الصور القياسية لمعادلات الرتبة الثانية
Canonical forms of second order equations

يمكن تحويل المعادلة(2) إلى صورة قياسية باستبدال المتغيرات المستقلة. ولذلك نحتاج إلى تحويل مثل:

$$t = t\left(x, y\right), \quad \tau = \tau\left(x, y\right) \tag{3}$$

حيث t, τ دوال من نوع C^2 تحقق الشرط:

$$\frac{\partial(t,\tau)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} t_x & t_y \\ \tau_x & \tau_y \end{vmatrix} \neq 0$$

هذا الشرط يعني أن x, y دوال نوع C^2 في t, τ. وبالتالي؛ نستطيع حساب المشتقات بالنسبة إلى x, y، بدلالة المشتقات بالنسبة إلى t, τ، كما يلي:

$$u_x = u_t t_x + u_\tau \tau_x, \quad u_y = u_t t_y + u_\tau \tau_y$$

$$u_{xx} = u_{tt} t_x^2 + 2u_{t\tau} t_x \tau_x + u_{\tau\tau} \tau_x^2 + u_t t_{xx} + u_\tau \tau_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{tt} t_x t_y + u_{t\tau}\left[t_x \tau_y + t_y \tau_x\right] + u_{\tau\tau} \tau_x \tau_y + u_t t_{xy} + u_\tau \tau_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{tt} t_y^2 + 2u_{t\tau} t_y \tau_y + u_{\tau\tau} \tau_y^2 + u_t t_{yy} + u_\tau \tau_{yy}$$

وبالتعويض عن هذه المشتقات في المعادلة (2) نحصل على المعادلة:

$$A^* u_{tt} + B^* u_{t\tau} + C^* u_{\tau\tau} + D^* u_t + E^* u_\tau + F^* u = G^* \tag{4}$$

حيث:

$$A^* = A t_x^2 + B t_x t_y + C t_y^2$$

$$B^* = 2A t_x \tau_x + B\left(t_x \tau_y + t_y \tau_x\right) + 2C t_y \tau_y$$

$$C^* = A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2$$
$$D^* = At_{xx} + Bt_{xy} + Ct_{yy} + Dt_x + Et_y$$
$$E^* = A\tau_{xx} + B\tau_{xy} + C\tau_{yy} + D\tau_x + E\tau_y$$
$$F^* = F, \quad G^* = G$$

ويمكن إثبات أن $B^{*2} - 4A^*C^* = (t_x\tau_y - t_y\tau_x)^2 (B^2 - 4AC)$، أي:

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2 (B^2 - 4AC) \qquad (5)$$

حيث $J = \dfrac{\partial(t,\tau)}{\partial(x,y)} = t_x\tau_y - t_y\tau_x$.

المتساوية (5) تعني أن المقدارين $B^2 - 4AC$ (المميز للمعادلة (2)) و $B^{*2} - 4A^*C^*$ (المميز للمعادلة المحولة (4)) لهما الإشارة نفسها. ومن ثم؛ فإن المعادلة (4) هي من نفس نوع الصورة للمعادلة (2) تحت التحويل (3). المعادلة (4) تسمى الصورة القياسية للمعادلة (2).

نظرا للتناظر بين التعبيرين A^*, C^* فإنه يمكننا الحصول على صورة بسيطة للمعادلة القياسية. وذلك باستخدام تحويل مناسب (t, τ) يجعل:

$$A^* = 0, \quad C^* = 0$$

أي إن هذا التحويل يحقق الشروط:

$$At_x^2 + Bt_xt_y + Ct_y^2 = 0, \quad A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2 = 0$$

هاتان المعادلتان هما صورتان للمعادلة:

$$A\theta_x^2 + B\theta_x\theta_y + C\theta_y^2 = 0 \qquad (6)$$

بالقسمة على θ_y^2، في الحالة عندما $\theta_y = 0$، فإننا نقسم على θ_x^2، نحصل على:

$$A\left(\frac{\theta_x}{\theta_y}\right)^2 + B\left(\frac{\theta_x}{\theta_y}\right) + C = 0 \qquad (7)$$

من جهة ثانية؛ على المنحنى التكـاملي $\theta(x,y)=\text{const.}$ للمعادلـة (7) نجد أن $d\theta=0$. ولذلك $\theta_x dx+\theta_y dy=0$. ومنها بالتعويض عن:

$$\frac{\theta_x}{\theta_y}=-\frac{dy}{dx}$$

في المعادلة (7) نحصل على:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\left(\frac{dy}{dx}\right)+C=0 \qquad (8)$$

بحل هذه المعادلة في dy/dx نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[B+\sqrt{B^2-4AC}\right]}{2A},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\left[B-\sqrt{B^2-4AC}\right]}{2A} \qquad (9)$$

هذه معادلات تفاضلية عادية، تسمى بالمعادلات المميزة. لتكن حلول هذه المعادلات (9) على الصورة:

$$\phi_1(x,y)=c_1,\qquad \phi_2(x,y)=c_2$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية. وهكذا فإن:

$$t=\phi_1(x,y),\qquad \tau=\phi_2(x,y) \qquad (10)$$

تحويل يختزل المعادلـة (2) إلـى صـورة قياسـية. ويكـون لـدينا الحـالات التاليـة.

(1) الصورة القياسية للمعادلات الزائدية

The canonical form of hyperbolic equations

عنـدما تكـون المعادلـة (2) زائديـة؛ فـإن $B^2-4AC>0$، فـإن المعادلات المميزة (9)؛ تُعرف قيماً حقيقية مختلفة، ومن ثم نحصل على متغيرين مستقلين t,τ، وتصبح الصورة القياسية للمعادلة (2) هي:

$$u_{t\tau}=\frac{1}{B^*}H_1\left(D^*,E^*,F^*,G^*\right) \qquad (11)$$

حيث إن $H_1\left(D^*,E^*,F^*,G^*\right)$ بقية حدود المعادلة (4). يبقى فقط إثبات أن $B^*\neq 0$. وحيث إن:

$$B^*=2At_x\tau_x+B\left(t_x\tau_y+t_y\tau_x\right)+2C\,t_y\tau_y$$

$$=t_y\tau_y\left\{2A\left(\frac{t_x}{t_y}\right)\left(\frac{\tau_x}{\tau_y}\right)+B\left(\frac{t_x}{t_y}+\frac{\tau_x}{\tau_y}\right)+2C\right\}$$

وحيث إن $\frac{t_x}{t_y},\frac{\tau_x}{\tau_y}$ حلول المعادلة(7)، بفرض أن $A\neq 0$، فإن:

$$\frac{t_x}{t_y}+\frac{\tau_x}{\tau_y}=-\frac{B}{A},\ \left(\frac{t_x}{t_y}\right)\left(\frac{\tau_x}{\tau_y}\right)=\frac{C}{A}$$

وعليه؛ فإن:

$$B^*=t_y\tau_y\left\{2A\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A}+2C\right\}=t_y\tau_y\,\frac{4AC-B^2}{A}\neq 0$$

المعادلة(11) تسمى الصورة القياسية الأولى للمعادلة الزائدية(2).

بوضع $\alpha=t+\tau,\quad \beta=t-\tau$؛ فإن المعادلة$(11)$ تصبح على الصورة:

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=H_2\left(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta\right)\qquad(12)$$

وهذه المعادلة تسمى الصورة القياسية الثانية للمعادلة الزائدية(2).

مثال (3): اختزل المعادلة التالية إلى صورة قياسية:

$$y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$$

الحل: لدينا $A=y^2,\ B=0,\ C=-x^2$. وبالتالي:

$$B^2-4AC=0-4y^2\left(-x^2\right)=4x^2y^2\geq 0$$

المتساوية تحدث عندما $x=0$ (على محور y)، أو عندما $y=0$ (على محور x). أي إن المعادلة المعطاة هي زائدية لكل(x,y) في

$\mathbb{R}^2$، ما عدا عند النقاط (x,y) التي تقع على المحورين، وعند هذه النقاط تكون المعادلة مكافئة. المعادلات التفاضلية المميزة (9) تأخذ الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0\pm\sqrt{4x^2y^2}}{2y^2}=\pm\frac{x}{y}$$

بالتكامل نحصل على المنحنيات المميزة وهي:

$$y^2-x^2=c_1,\quad y^2+x^2=c_2$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان.

إذا عرفنا التحويل (3) بالمعادلات $t=y^2-x^2,\quad \tau=x^2+y^2$ نجد أن:

$$u_x=-2xu_t+2xu_\tau,\quad u_y=2yu_t+2yu_\tau$$

$$\begin{aligned}u_{xx}&=-2\left[u_t+x\left\{-2xu_{tt}+2xu_{t\tau}\right\}\right]\\&\quad+2\left[u_\tau+x\left\{-2xu_{\tau t}+2xu_{\tau\tau}\right\}\right]\\&=-2u_t+2u_\tau+4x^2u_{tt}-4x^2u_{t\tau}-4x^2u_{\tau t}+4x^2u_{\tau\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{yy}&=2u_t+2y\left[2yu_{tt}+2yu_{t\tau}\right]\\&\quad+2u_\tau+2y\left[2yu_{\tau t}+2yu_{\tau\tau}\right]\\&=2u_t+2u_\tau+4y^2u_{tt}+4y^2u_{\tau\tau}+8y^2u_{t\tau}\end{aligned}$$

بالتعويض عن $u_{yy}\,,\,u_{xx}$ في المعادلة المعطاة، نحصل على:

$$\begin{aligned}&y^2\left[4x^2u_{tt}+4x^2u_{\tau\tau}-8x^2u_{t\tau}-2u_t+2u_\tau\right]\\&-x^2\left[4y^2u_{tt}+4y^2u_{\tau\tau}+8y^2u_{t\tau}+2u_t+2u_\tau\right]=0\end{aligned}$$

ومنها تنتج المعادلة:

$$-16x^2y^2u_{t\tau}-2\left(x^2+y^2\right)u_t-2\left(x^2-y^2\right)u_\tau=0$$

وحيث إن $x^2+y^2=\tau,\quad x^2-y^2=-t$ فإن:

$$t^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 , \quad \tau^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

وبالتـالي؛ $\tau^2 - t^2 = 4x^2y^2$. وبـذلك؛ تصـبح المعادلـة الأخيـرة علـى الصورة:

$$-4\left(\tau^2 - t^2\right)u_{t\tau} - 2\tau u_t + 2tu_\tau = 0$$

وهذه تكافئ المعادلة:

$$u_{t\tau} + \frac{\tau}{2\left(\tau^2 - t^2\right)}u_t - \frac{t}{2\left(\tau^2 - t^2\right)}u_\tau = 0; \qquad \tau^2 - t^2 \neq 0$$

وهذه هي الصورة القياسية المطلوبة.

مثال (4): حول كلاً من المعادلات الزائدية التالية إلي الصورة القياسية

$$u_{t\tau} + \ldots = 0$$

1) $2u_{xx} - 4u_{xy} - 6u_{yy} + u_x = 0$

2) $u_{xx} - x^2yu_{yy} = 0 \quad (y > 0)$

الحل: 1) لدينا المعادلة التفاضلية للمنحنيات المميزة على الصورة:

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\left(\frac{dy}{dx}\right) - 6 = 0$$

ومنها $\left(\frac{dy}{dx} + 3\right)\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) = 0$.

وعليه؛ فالمنحنيات المميزة هي $y + 3x = c_1, \ y - x = c_2$ ، حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

بوضع $t = y + 3x \ , \ \tau = y - x$ نحصل على:

$$u_x = 3u_t - u_\tau , \quad u_y = u_t + u_\tau$$

$$u_{xx} = \left(u_x\right)_x = 3\left(3u_t - u_\tau\right)_t - \left(3u_t - u_\tau\right)_\tau$$

$$= 9u_{tt} - 6u_{t\tau} + u_{\tau\tau}$$

$$u_{yy} = \left(u_y\right)_y = \left(u_t + u_\tau\right)_t + \left(u_t + u_\tau\right)_\tau$$

$$= u_{tt} + 2u_{t\tau} + u_{\tau\tau}$$

$$u_{xy}=\left(u_x\right)_y=\left(3u_t-u_\tau\right)_t+\left(3u_t-u_\tau\right)_\tau$$
$$=3u_{tt}+2u_{t\tau}-u_{\tau\tau}$$

وبالتعويض بهذه المشتقات في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$-32u_{\xi\eta}+3u_\xi-u_\eta=0$$

وعليه؛ فالصورة القياسية المطلوبة هي: $u_{t\tau}-\frac{3}{32}u_t+\frac{1}{32}u_\tau=0$

2) المعادلة المساعدة في هذه الحالة تكون على الصورة:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x^2y=0\ ;\qquad y>0$$

ومنها؛ نحصل على $\frac{dy}{dx}=\pm x\sqrt{y}$ ($y>0$).

وبالتالي؛ فالمنحنيات المميزة هي:

$$x^2+4\sqrt{y}=c_2,\quad x^2-4\sqrt{y}=c_2$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية.

باستخدام التحويل:

$$t=x^2+4\sqrt{y},\quad \tau=x^2-4\sqrt{y}\qquad(\xi>\eta)$$

نحصل على الصورة القياسية للمعادلة المعطاة، وهي:

$$u_{t\tau}+\frac{3t+\tau}{t^2-\tau^2}u_t-\frac{t+3\tau}{t^2-\tau^2}u_\tau=0.$$

الآن؛ دعنا نعود إلي مسألة اختزال المعادلة التفاضلية (2) إلي الصورة القياسية الثانية $u_{tt}-u_{\tau\tau}+....=0$. لنبدأ باختزال معادلة الموجة:

$$u_{xx}-u_{yy}=0$$

إلى الصورة القياسية (11): $u_{t\tau}+...=0$.

لمعادلة الموجة $u_{xx}-u_{yy}=0$ فإن المعادلات التفاضلية للمنحنيات المميزة هي $\frac{dy}{dx}=\pm1$. وبالتالي؛ فإن المنحنيات المميزة هي:

$$y-x=C_1,\quad y+x=C_2$$

عائلة الخطوط المستقيمة المتعامدة والتي تصنع مع المحاور الأساسية ox,oy زوايا 45°. وعليه فإن آخذ التحويل:

$$t=\frac{y-x}{\sqrt{2}},\quad \tau=\frac{y+x}{\sqrt{2}}$$

(يعني تدور المحاور بزاوية مقدارها 45°) يختزل معادلة الموجة إلي الصورة القياسية $u_{t\tau}=0$.

مما سبق؛ يتضح أنه إذا كانت:

$$\varphi(x,y)=c_1,\quad \psi(x,y)=c_2$$

المنحنيات المميزة للمعادلة التفاضلية الجزئية (2) فإن التحويل:

$$t=\frac{\varphi(x,y)-\psi(x,y)}{\sqrt{2}},\quad \tau=\frac{\varphi(x,y)+\psi(x,y)}{\sqrt{2}}$$

يختزل المعادلة الزائدية (2) إلى الصورة القياسية (12). لسهولة في حساب المشتقات تحت هذا التحويل يمكن الاستغناء عن القسمة على $\sqrt{2}$ لتوضيح ذلك نعرض المثال التالي:

مثال (5): اختزل المعادلة الزائدية التالية إلي الصورة القياسية الثانية:

$$2u_{xx}-4u_{xy}-6u_{yy}+u_x=0$$

الحل: في المثال السابق (4)، رأينا أن المنحنيات المميزة لهذه المعادلة هي:

$$\varphi(x,y)\equiv y+3x=c_1,\ \psi(x,y)\equiv y-x=c_2$$

الآن لنضع:

$$t=\varphi(x,y)-\psi(x,y),\quad \tau=\varphi(x,y)+\psi(x,y)$$

أي: $t=4x,\ \tau=2(y+x)$، واضح أن $t_x\tau_y-t_y\tau_x=8\neq 0$.

باستخدام هذا التحويل، نحصل على الصورة القياسية التالية:

$$u_{tt}-u_{\tau\tau}+\frac{1}{8}u_t+\frac{1}{16}u_\tau=0$$

(2) الصورة القياسية للمعادلات المكافئة

The canonical form of parabolic equations

في هذه الحالة فإن $B^2-4AC=0$. عندئذ فإن مجموعة المعادلات المميزة (9)، تتكون فقط من معادلة واحدة هي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A}$$

ولذلك توجد عائلة واحدة من المنحنيات المميزة للمعادلة(2). هذا يعني أن $A^*=0$، (أو $C^*=0$). فإذا $A^*=0$ فإن:

$$\begin{aligned}A^* &= At_x^2+B\,t_xt_y+Ct_y^2\\ &= At_x^2+2\sqrt{A}\sqrt{C}\,t_xt_y+C\,t_y^2\\ &= \left(\sqrt{A}\,t_x+\sqrt{C}\,t_y\right)^2=0\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}B^* &= 2At_x\tau_x+B\left[t_x\tau_y+t_y\tau_x\right]+2C\,t_y\tau_y\\ &= 2At_x\tau_x+2\sqrt{A}\sqrt{C}\left(t_x\tau_y+t_y\tau_x\right)+2C\,t_y\tau_y\\ &= 2\left(\sqrt{A}t_x+\sqrt{C}t_y\right)\left(\sqrt{A}\tau_x+\sqrt{C}\tau_y\right)=0\end{aligned}$$

وهكذا؛ فإن المعادلة المحولة(4) تأخذ على الصورة:

$$u_{\tau\tau}=H_1\left(t,\tau,u,u_t,u_\tau\right)$$

وهذه هي الصورة القياسية للمعادلة المكافئة(1).

ملاحظة: إذا كانت $C^*=0$؛ فإن$\sqrt{A}\tau_x+\sqrt{C}\tau_y=0$، ومن ثم $B^*=0$. وهكذا؛ فإن الصورة القياسية هي:

$$u_{tt}=H\left(t,\tau,u,u_t,u_\tau\right)$$

مثال (6): اختزل المعادلة التالية إلى صورة قياسية:

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$$

الحل: بوضع $A=x^2,\ B=2xy,\ C=y^2$ نجد أن:

$$B^2-4AC=4x^2y^2-4x^2y^2=0$$

أي المعادلة المعطاة مكافئة. وبالتالي؛ فإنه توجد معادلة تفاضلية مميزة واحدة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A}=\frac{2xy}{2x^2}=\frac{y}{x}$$

وبحل هذه المعادلة، نحصل على العائلة من المنحنيات المميزة:

$$\frac{y}{x}=c$$

حيث c ثابت اختياري.

عرف التحويل $\tau=x,\ \ t=\frac{y}{x}$. يلاحظ أنه في حالة المعادلات المكافئة تكون إحدى الدالتين t,τ اختيارية، بشرط $\frac{\partial(t,\tau)}{\partial(x,y)}\neq 0$. على سبيل المثال: اختيارنا $\tau=x$ يحقق هذا الشرط حيث:

$$\frac{\partial(t,\tau)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} t_x & \tau_x \\ t_y & \tau_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -y/x^2 & 1 \\ 1/x & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{x}\neq 0$$

باستخدام التحول السابق يمكننا التعبير عن المشتقات التفاضلية بالنسبة إلى كلا من x,y بدلالة المشتقات بالنسبة إلى t,τ، فنجد أن:

$$xu_x=-tu_t+\tau u_\tau,\quad yu_y=tu_t$$

$$x^2u_{xx}=2tu_t+t^2u_{tt}-2t\tau u_{t\tau}+\tau^2u_{\tau\tau}$$

$$y^2u_{yy}=t^2u_{tt},\quad xyu_{xy}=-tu_t-t^2u_{tt}+t\tau u_{t\tau}$$

بالتعويض عن مشتقات الرتبة الثانية في المعادلة المعطاة، تنتج المعادلة:

$$\tau^2u_{\tau\tau}=0$$

وحيث إن $\tau\neq 0$، تحقيقا للشرط $\frac{\partial(t,\tau)}{\partial(x,y)}\neq 0$؛ فإننا نحصل على الصورة القياسية هي:

$$u_{\tau\tau}=0$$

ملاحظة: يمكن بسهولة تكامل الصورة القياسية السابقة بالنسبة إلى τ لنحصل على:

$$u_\tau=\varphi_1(t)$$

وبالتكامل مرة ثانية، نحصل على:

$$u(t,\tau)=\tau\varphi_1(t)+\psi(t)$$

بالتعويض عن $\tau=x$ ، $t=\frac{y}{x}$، نحصل على: الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$u(x,y)=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث φ,ψ دوال اختيارية نوع C^2.

مثال (7): اختزل كل من المعادلات المكافئة التالية إلى صورة قياسية:

1) $4u_{xx}+12u_{xy}+9u_{yy}-2u_x+u=0$

2) $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}=0$

الحل: 1) المعادلة التفاضلية للمنحنيات المميزة هي:

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-12\left(\frac{dy}{dx}\right)+9=0$$

$$\left(2\frac{dy}{dx}-3\right)^2=0$$

وعليه؛ فإن $2y-3x=c$ منحنى مميز. حيث c ثابت اختياري.

عرف التحويل $t=x\ ,\ \tau=2y-3x$، لاحظ أن $t_x\tau_y-t_y\tau_x=2\neq 0$.

وباستخدام هذا التحويل نحصل على:

$$A^*:=At_x^2+Bt_xt_y+Ct_y^2=4$$

$$C^*:=A\tau_x^2+B\tau_x\tau_y+C\tau_y^2=0$$

$$B^*:=2At_x\tau_x+B\left(t_x\tau_y+t_y\tau_x\right)+2Ct_y\tau_y=0$$

$$D^*:=At_{xx}+Bt_{xy}+Ct_{yy}+Dt_x+Et_y=-2$$

$$E^* := A\tau_{xx} + B\,\tau_{xy} + C\,\tau_{yy} + D\,\tau_x + E\,\tau_y = 6$$
$$F^* := F = 1$$

وبالتالي؛ فإن المعادلة المحولة (4):

$$A^* u_{tt} + B^* u_{t\tau} + C^* u_{\tau\tau} + D^* u_t + E^* u_\tau + F^* u = 0$$

تكون على الصورة القياسية:

$$4u_{tt} - 2u_t + 6u_\tau + u = 0\,.$$

2) المعادلة التفاضلية للمنحنيات المميزة هي:

$$e^{2x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2e^{x+y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{2y} = 0$$

هذه المعادلة تكافئ المعادلة التالية:

$$\left(e^x \frac{dy}{dx} - e^y\right)^2 = 0$$

هذه المعادلة تعرف عائلة واحدة في بارامتر واحد من المنحنيات المميزة هي $e^{-y} - e^{-x} = c$، حيث c ثابت اختياري.

بوضع $t = e^{-y} - e^{-x}\,,\ \tau = y$، نجد أن $t_x\tau_y - t_y\tau_x = -e^{-x} \neq 0$.

باستخدام التحويل $t = e^{-y} - e^{-x}\,,\ \tau = y$، فإن المعاملات في المعادلة المحولة (4) تساوي:

$$A^* = 0,\ B^* = 0,\ C^* = e^{2\tau},\ D^* = -\frac{te^{2\tau}}{1 - te^{\tau}},$$
$$E^* = 0,\ \ F^* = F = 0,\ \ G^* = G = 0$$

وعليه؛ فإن الصورة القياسية المطلوبة هي:

$$e^{2\tau}u_{\tau\tau} - \frac{te^{2\tau}}{1 - te^{\tau}}u_t = 0$$

أو على الصورة:

$$u_{\tau\tau} + \frac{t}{te^{\tau} - 1}u_t = 0$$

(3) الصورة القياسية لمعادلة ناقصية

The canonical form of elliptic equations

في الحالة عندما تكون المعادلة التفاضلية الجزئية(2) من النوع الناقصي، يكون $B^2-4AC<0$. وفي هذه الحالة فإن المعادلات المميزة (9) تصبح على الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+i\sqrt{\left|B^2-4AC\right|}}{2A},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{B-i\sqrt{\left|B^2-4AC\right|}}{2A}$$

و هذه المعادلات تكون لها حلول مركبة مترافقة:

$$\xi=\xi(x,y)=c_1,\quad \eta=\eta(x,y)=c_2$$

وللحصول على التحويل حقيقي نأخذ:

$$t=\frac{1}{2}(\xi+\eta)=\operatorname{Re}\xi,\quad \tau=\frac{1}{2i}(\xi-\eta)=\operatorname{Im}\xi$$

بذلك؛ نحصل على متغيرين حقيقيين t,τ.

لإيجاد صورة قياسية للمعادلة(2)، عندما يكون $B^2-4AC<0$، نبدأ تحويل المعادلة(2) باستخدام التعويض:

$$\xi=\xi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y)$$

فنحصل على معادلة مثل (4), أي:

$$A^*u_{\xi\xi}+B^*u_{\xi\eta}+C^*u_{\eta\eta}=H\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right)$$

حيث A^*,B^*,C^* لها نفس تعريف معاملات للمعادلة(4). وبوضع:

$$A^*=0,\quad C^*=0,\quad \xi=t+i\tau,\quad \eta=t-i\tau$$

فإن $A^*=0$ يؤدي إلى:

$$A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=0$$

ومنها ينتج أن:

$$A\left(t_x + i\,\tau_x\right)^2 + B\left(t_x + i\,\tau_x\right)\left(t_y + i\,\tau_y\right) + C\left(t_y + i\,\tau_y\right)^2 = 0$$

منها بفصل الأجزاء الحقيقية عن التخيلية نجد أن:

$$At_x^2 - A\tau_x^2 + Bt_xt_y - B\tau_x\tau_y + Ct_y^2 - C\tau_y^2 + i\left[2At_x\tau_x + B\left(t_x\tau_y + t_y\tau_x\right) + 2Ct_y\tau_y\right] = 0$$

$$\left[At_x^2 + Bt_xt_y + Ct_y^2\right] - \left[A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2\right] + i\left[2At_x\tau_x + B\left(t_x\tau_y + t_y\tau_x\right) + 2Ct_y\tau_y\right] = 0$$

وعليه:

$$\begin{aligned} At_x^2 + Bt_xt_y + Ct_y^2 &= A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2 \\ 2At_x\tau_x + B\left(t_x\tau_y + t_y\tau_x\right) + 2C\tau_yt_y &= 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

الآن؛ باستخدام التحويل $\tau = \tau(x,y)$, $t = t(x,y)$، حيث:

$$t = \operatorname{Re}\xi, \qquad \tau = \operatorname{Im}\xi$$

فإننا نحصل على الصورة التالية للمعادلة (2):

$$A^{**}u_{tt} + B^{**}u_{t\tau} + C^{**}u_{\tau\tau} = H'\left(t,\tau,u,u_t,u_\tau\right) \qquad (14)$$

حيث:

$$A^{**} = At_x^2 + Bt_xt_y + Ct_y^2,$$

$$C^{**} = A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2,$$

$$B^{**} = 2At_x\tau_x + B\left(t_x\tau_y + t_y\tau_x\right) + 2Ct_y\tau_y$$

وبحسب (13)؛ فإن $A^{**} = C^{**},\ B^{**} = 0$. وبالتالي؛ فإن المعادلة (14) تصبح على الصورة:

$$A^{**}u_{tt} + A^{**}u_{\tau\tau} = H'\left(t,\tau,u,u_t,u_\tau\right)$$

بالقسمة على A^{**}؛ فإننا نحصل على الصورة القياسية للمعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية (2):

$$u_{tt} + u_{\tau\tau} = F\left(t,\tau,u,u_t,u_\tau\right)$$

حيث $F = H'/A^{**}$.

مثال(8): اختزل المعادلة التالية إلى صورة قياسية:

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

الحل: بوضع $A = 1, \quad B = 0, \quad C = x^2$، نجد أن:

$$B^2 - 4AC = -4x^2 \le 0$$

المتساوية تتحقق فقط عندما $x = 0$. ولذلك؛ فإن المعادلة المعطاة هي ناقصية في كل المستوى ما عدا على محور y. (على محور y تكون المعادلة مكافئة). المعادلات المميزة (9) هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{-4x^2}}{2}$$

أي هي $\frac{dy}{dx} = -ix, \quad \frac{dy}{dx} = ix$. وبحل هذه المعادلات نحصل على:

$$y = \frac{1}{2} i x^2 + c_1, \quad y = -\frac{1}{2} i x^2 + c_2$$

ومنها؛ نعرف التحويل $\tau = \frac{1}{2} x^2 \quad , t = y$، حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

باستخدام هذا التحويل نحصل على:

$$u_x = u_t t_x + u_\tau \tau_x = x u_\tau$$
$$u_{xx} = u_\tau + x\left(u_\tau\right)_x = u_\tau + 2\tau u_{\tau\tau}$$
$$u_y = u_t t_y + u_\tau \tau_y = u_t$$
$$u_{yy} = u_{tt}$$

وبالتعويض u_{xx}, u_{yy} في المعادلة المعطاة، نحصل على:

$$u_{tt} + u_{\tau\tau} = -\frac{1}{2\tau} u_\tau .$$

مثال(9): حوّل كلاً من المعادلات الناقصية التالية إلى الصورة القياسية:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} + 17u_{yy} + u_x = 0$

2) $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0 \qquad (x > 0,\ y > 0)$

الحل: 1) لدينا المعادلة المساعدة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + i\sqrt{17 - 1}}{1} = 1 + 4i$$

ولهذه المعادلة حل على الصورة $y - x - 4ix = k$، حيث k ثابت اختياري. بوضع $t = y - x\ ,\ \ \tau = 4x$ نجد أن:

$$A^{**} := At_x^2 + Bt_x t_y + Ct_y^2 = 16$$

$$C^{**} := A\tau_x^2 + B\tau_x\tau_y + C\tau_y^2 = 16$$

$$B^{**} := 2At_x\tau_x + B\left(t_x\tau_y + t_y\tau_x\right) + 2Ct_y\tau_y = 0$$

$$\begin{aligned} H'(t, \tau, u, u_t, u_\tau) := & G^* - F^* u \\ & -\left(At_{xx} + Bt_{xy} + Ct_{yy} + Dt_x + Et_y\right)u_\xi \\ & -\left(A\tau_{xx} + B\tau_{xy} + C\tau_{yy} + D\tau_x + E\tau_y\right)u_\eta \\ & = u_t - 4u_\tau \end{aligned}$$

وبالتالي؛ فإن المعادلة المحولة(14) تصبح على الصورة:

$$16u_{tt} + 16u_{\tau\tau} - u_t + 4u_\tau = 0$$

وهكذا؛ فإن الصورة القياسية المطلوبة هي:

$$u_{tt} + u_{\tau\tau} - \frac{1}{16}u_t + \frac{1}{4}u_\tau = 0$$

2) حيث إن $x > 0,\ y > 0$ فإن المعادلة المميزة هي $\frac{dy}{dx} = i\,\frac{y}{x}$.

وحل هذه المعادلة هو $\ln y + i\ln x = k$، حيث k ثابت اختياري.

عرف التحويل $t = \ln y,\ \ \tau = \ln x$. واضح أن $t_x\tau_y - t_y\tau_x = \frac{1}{xy} \neq 0$، حيث $x > 0,\ y > 0$.

باستخدام هذا التحويل تنتج الصورة القياسية المطلوبة هي:

$$u_{tt}+u_{\tau\tau}-u_t-u_\tau=0.$$

في الأمثلة التالية سنوضح أنه باختزال المعادلة التفاضلية الجزئية إلى الصورة القياسية يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة.

مثال(10): اختزل المعادلة التالية إلى صورة قياسية، وأوجد الحل العام لها:

$$4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-2=0$$

الحل: اجعل $A=4,\quad B=5,\quad C=1$، تجد أن:

$$B^2-4AC=25-16=9>0$$

هذا يعني أن المعادلة التفاضلية المعطاة زائدية. في هذه الحالة تكون المعادلات المميزة على الصورة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4},\quad \frac{dy}{dx}=1$$

بالتكامل نحصل على المنحنيات المميزة $y-\frac{1}{4}x=c_1,\quad y-x=c_2$

ومنها نعرف التحويل $t=y-\frac{1}{4}x,\quad \tau=y-x$. باستخدام هذا التحويل ينتج أن:

$$u_x=-\frac{1}{4}u_t-u_\tau,\ \ u_y=u_t+u_\tau$$

$$u_{xx}=(u_x)_x=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}u_t-u_\tau\right)_t-\left(-\frac{1}{4}u_t-u_\tau\right)_\tau$$

$$=\frac{1}{16}u_{tt}+\frac{1}{2}u_{t\tau}+u_{\tau\tau}$$

$$u_{yy}=\left(u_y\right)_y=\left(u_t+u_\tau\right)_t+\left(u_t+u_\tau\right)_\tau$$

$$=u_{tt}+2u_{\tau t}+u_{\tau\tau}$$

$$u_{xy}=(u_x)_y=\left(-\frac{1}{4}u_t-u_\tau\right)_t+\left(-\frac{1}{4}u_t-u_\tau\right)_\tau$$
$$=-\frac{1}{4}u_{tt}-\frac{5}{4}u_{\tau t}-u_{\tau\tau}$$

بالتعويض عن هذه المشتقات في المعادلة المعطاة، ينتج أن:

$$-\frac{9}{4}u_{t\tau}=2-\frac{3}{4}u_t$$

ومنها؛ نحصل على الصورة القياسية المطلوبة:

$$(u_t)_\tau=-\frac{8}{9}+\frac{1}{3}(u_t). \qquad (15)$$

بوضع $v=u_t$ نجد أن:

$$v_\tau=\frac{1}{3}v-\frac{8}{9}=\frac{1}{3}\left(v-\frac{8}{3}\right)$$

هذه المعادلة على صورة المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى.
بفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{dv}{v-8/3}=\frac{1}{3}d\tau$$

وبالتكامل؛ نحصل على $v-\frac{8}{3}=\varphi'(t)e^{\frac{1}{3}\tau}$. ومنها:

$$u_t=\varphi'(t)e^{\frac{1}{3}\tau}+\frac{8}{3}$$

وبالتكامل في t، نحصل على الحل العام للمعادلة (15):

$$u(t,\tau)=\varphi(t)e^{\frac{1}{3}\tau}+\frac{8}{3}t+\psi(\tau)$$

وبالتعويض عن t,τ بدلالة x,y نحصل على الحل العام المطلوب:

$$u(x,y)=\varphi\left(y-\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{3}(y-x)}+\frac{8}{3}\left(y-\frac{1}{4}x\right)+\psi(y-x)$$

حيث φ,ψ دوال اختيارية نوع C^2.

3-4 تمارين

(1) حدد المنطقة التي فيها تكون المعادلة زائدية، مكافئة، أو ناقصية، ثم حول المعادلة إلى صورة قياسية في المنطقة المناظرة لكل من المعادلات التالية:

$(1)\ xu_{xx}+u_{yy}=x^2$ $\quad (2)\ u_{xx}+y^2u_{yy}=y$

$(3)\ u_{xx}+xyu_{yy}=0$ $\quad (4)\ x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=e^x$

$(5)\ u_{xx}+u_{xy}-xu_{yy}=0$ $\quad (6)\ e^xu_{xx}+e^yu_{yy}=u$

$$(7)\ u_{xx}-\sqrt{y}u_{xy}+\frac{1}{4}xu_{yy}+2xu_x-3yu_y+2u=e^{x^2-2y},\ y\geq 0$$

$$(8)\ u_{xx}-\sqrt{y}u_{xy}+xu_{yy}=\cos\left(x^2-2y\right),\quad y\geq 0$$

$$(9)\ u_{xx}-yu_{xy}+xu_x+yu_y+u=0$$

(2) صنف كلاً من المعادلات الآتية إلى: ناقصية، زائدية، أو مكافئة، ثم أوجد الحل العام لكل منها بالطريقة المناسبة:

$(i)\quad u_{xx}-u_{yy}=0$

$(ii)\quad x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$

$(iii)\quad u_t-c^2u_{xx}=0$

$(iv)\quad r+3s+4t+5p-2q+4z=2x-3$

$(v)\quad z_{xx}+z_{xy}+z_{yy}=0$

$(vi)\quad z_{xx}+2z_{xx}+z_{yy}=0$

$(vii)\quad z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}=0$

$(viii)\quad r-2s+t+q=0$

$(ix)\quad 2u_{xx}-u_{xy}+u_x-u_y+u=1$

$(x)\quad 2s+t+2p-3q+4z=e^{xy}$

$(xi)\quad yu_{xx}+2xu_{xy}+yu_{yy}=0$

$(xii)\quad u_{xx}-u_{xy}+3u_x-4u_y+u=x^2+y^2$

(3) أوجد المنحنيات المميزة لكل من المعادلات التالية، ثم حول المعادلة إلى صورة قياسية:

$(1)\ u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}+4u_x+5u_y+u=e^x$

$(2)\ 2u_{xx}-4u_{xy}+2u_{yy}+3u=0$

$(3)\ u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}+7u_y=\sin x$

$(4)\ u_{xx}+u_{yy}+2u_x+8u_y+u=0$

$(5)\ u_{xy}+2u_{yy}+9u_x+u_y=2$

$(6)\ 6u_{xx}-u_{xy}+u=y^2$

$(7)\ u_{xy}+u_x+u_y=3x$

$(8)\ u_{yy}-9u_x+7u_y=\cos y$

$(9)\ x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-u_x=1+2y^2$

$(10)\ u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y+4yu_x=0$

(4) حول كلاً من المعادلات التالية إلى الصورة القياسية $v_{\xi\eta}=cv$، حيث c مقدار ثابت

$(i)\ u_{xx}-u_{yy}+3u_x-2u_y+u=0$

$(ii)\ 3u_{xx}+7u_{xy}+2u_{yy}+u_y+u=0$

باستخدام التحويل $v=ue^{-(a\xi+b\eta)}$، حيث a,b مقادير ثابتة.

(5) أعطيت المعادلة المكافئة ذات المعاملات ثابتة:

$$u_{xx} = au_t + bu_x + cu + f$$

استخدم التحويل $u = ve^{\frac{1}{2}bx}$، عندما $c = -\frac{b^2}{4}$. أثبت أن المعادلة السابقة تُختزل إلى الصورة $v_{xx} = av_t + g$، حيث $g = fe^{-bx/2}$.

(6) اختزل معادلة تريكومي *Tricomi equation*

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

إلى الصورة القياسية التالية:

$$(i)\ u_{\xi\eta} - \left[6(\xi - \eta)\right]^{-1}\left(u_\xi - u_\eta\right) = 0, \quad \text{for } x < 0$$

$$(ii)\ u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta} = 0, \quad \text{for } x > 0$$

وأثبت أن المنحنيات المميزة عندما $x < 0$ هي قطوع مكافئة مكعبة.

(7) استخدم الإحداثيات القطبية r, θ $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ لتحويل معادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ إلى الصورة القطبية:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

(8) (أ) استخدم الإحداثيات الاسطوانية $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ لتحويل معادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ إلى الصورة:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$$

(ب) باستخدام الإحداثيات الكروية:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi$$

حول معادلة لابلاس إلى الصورة:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2\sin\phi}\left(\sin\phi u_\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta} = 0$$

(9) استخدام التحويل الخطي $\xi = ax + by\,,\ \eta = cx + dy$ ؛ لاختزال معادلة أويلر التالية إلى صورة قياسية:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

حيث a,b,c,d,A,B,C مقادير ثابتة.

(10) ناقش حل مسألة كوشي:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(x,0) = f(x),\quad u_y(x,0) = g(x)$$

(11) صنف كلاً من المعادلات التالية، وحول كلاً منها إلى صورة قياسية:

(1) $yu_{xx} - xu_{yy} = 0,\quad x > 0,\ y > 0$

(2) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$

(3) $u_{xx} + (\operatorname{sech}^4 x)u_{yy} = 0$

(4) $u_{xx} - (\operatorname{sech}^4 x)u_{yy} = 0$

(5) $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + 3yu_y = 0$

(6) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + xu_x = 0$

(12) حول المعادلة التفاضلية $u_{xy} + yu_{yy} + \sin(x+y) = 0$ إلى صورة قياسية، ومنها أوجد الحل العام.

(13) صنف كلاً من المعادلات التفاضلية التالية:

(1) $u_t = (pu_x)_x$ (2) $u_{tt} - c^2u_{xx} + \alpha u = 0$

(3) $(au_x)_x + (au_t)_t = 0$ (4) $u_{xt} - au_t = 0$

حيث $p(x,t), c(x,t), a(x,t), \alpha(x)$ دوال معلومة، تأخذ قيماً موجبة في المستوى xt ، وأوجد الحل العام للمعادلة(4).

(14) أوجد المنحنيات المميزة لكل من المعادلات التفاضلية التالية التي تمر بالنقطة $p(0,1)$:

(1) $u_{tt} - t u_{xx} = 0$

(2) $u_{tt} + 2e^{x} u_{tx} + e^{2x} u_{xx} + \cos x u_t + \sin x u_x + x^2 u = 0$

(3) $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) u_{tt} + 2\cos x u_{tx} + u_{xx} + u = 0$

(15) أوجد المنحنيات المميزة $\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y)$ للمعادلة:

$$u_{tt} + \left(e^{x} + t^2\right) u_{tx} + t^2 e^{x} u_{xx} = 0$$

بحيث $\eta(x,0) = \xi(x,0) = x$.

(16) حول كلاً من المعادلات التفاضلية التالية إلى صورة قياسية، ثم أوجد الحل لكل منها:

(1) $u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = 0$

(2) $u_{tt} - 2\sin t u_{tx} - \cos^2 u_{xx} - \cos t u_x = 0$

(3) $x^2 u_{tt} - 2tx u_{tx} + t^2 u_{xx} = \left(x^2/t\right) u_t + \left(t^2/x\right) u_x$