الفصل الاول

الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

(١.٣) مقدمة

الصورة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة هي

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \cdots, a_n$ مقادير ثابتة، $f(x)$ دالة في المتغير x.

وهذا النوع من المعادلات ذات أهمية كبيرة في المتذبذبات بكل أنواعها والميكانيكا والكهرباء وغير ذلك.

فإذا رمزنا للتفاضلات من الرتبة r ، $\frac{d^r}{dx^r}$ ، $(r = 1, 2, \cdots, n)$ بالرموز الاتية

$$\frac{d}{dx} \equiv D, \; \frac{d^2}{dx^2} \equiv D^2, \cdots, \frac{d^n}{dx^n} \equiv D^n$$

(حيث D يسمي "المعامل التفاضلي" أو " المؤثر التفاضلي " أو " عامل الاشتقاق ")، فانه يمكن كتابة المعادلة (١) علي الصورة

$$\left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) y = f(x)$$

أو

$$F(D) y = f(x)$$

حيث $F(D)$ كثيرة حدود من الدرجة n في المؤثر التفاضلي D.

(٢.٣) المؤثرات التفاضلية

(١.٢.٣) خواص المؤثر التفاضلي D

(أ) إذا كانت y, z دوال للمتغير x وكانت D ترمز للتفاضل بالنسبة الى x فإن

$$D\left(y(x) + z(x)\right) = Dy(x) + Dz(x)$$

وهو قانون توزيع المؤثر علي الجمع.

(ب) إذا كانت y دالة للمتغير x ، c مقدار ثابت فإن

$$D\left(cy(x)\right) = cDy(x)$$

وهو قانون التبادل مع الثوابت.

(ج) إذاكانت y دالة للمتغير x ، m,n عددين صحيحين موجبين فإن

$$D^m\{D^n y(x)\} = D^n\{D^m y(x)\} = D^{m+n} y(x)$$

وهو قانون الأسس.

أي أن المؤثر D يخضع للقوانين الجبرية فيما عدا أنه لا يتبادل مع المتغيرات وذلك لا نه $yDz \neq zDy$ إذاكانت y,z دالتين مختلفين للمتغير x على ذلك فمن الممكن أن تجرى العمليات الجبرية على المؤثر D كأي رمز جبري بشرط أن تكون قوى D صحيحة وموجبة.

(٢.٢.٣) خواص المؤثر التفاضلي $F(D)$

(أ) من تعريف المؤثر التفاضلي D فإن $F(D)$ دالة تفاضلية تأثيرية وتسمى مؤثر تفاضلي خطى لأنها تحقق الشرطين الاتيين

$$\text{(i)}\quad F(D)\{cy(x)\} = cF(D)y(x)$$

$$\text{(ii)}\quad F(D)\{y(x)+z(x)\} = F(D)y(x) + F(D)z(x)$$

حيث y,z دوال للمتغير x ، c ثابت.

(ب) إذاكانت $F_1(D), F_2(D)$ دالتين في المتغير D ، y دالة في المتغير x فإن مجموع وحاصل ضرب دالتين تأثيرين يعرف كالاتي

$$\text{(i)}\quad \{F_1(D)+F_2(D)\}\, y(x) = F_1(D)y(x) + F_2(D)y(x)$$

$$\text{(ii)}\quad F_1(D)F_2(D)\{y(x)\} = F_1(D)\{F_2(D)y(x)\}$$

البرهان

لاثبات رقم (ii)

من المعروف أن كل كثيرة حدود من الدرجة n والتي جميع معاملاتها أعداد حقيقية لها يوجه عام n من الجذور وقد يكون بعضها متكرر كما أنها قد تكون حقيقية أو مركبة وعلى ذلك فإنه قد يمكن تحليل $F(D)$ إلى n من العوامل الخطية ويكون

$$\begin{aligned} F(D)y &= \left(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n\right)y \\ &= (D-\alpha_1)(D-\alpha_2).....(D-\alpha_n)y \end{aligned}$$

حيث α_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ هي جذور المعادلة الجبرية

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

ويلاحظ أن

$$(D-a_1)(D-a_2)y = (D-a_2)(D-a_1)y$$

لأن

$$(D-a_1)(D-a_2)y=(D-a_1)(y'-a_2y)=y''-a_2y'-a_1y'+a_1a_2y$$
$$=y''-(a_1+a_2)y'+a_1a_2y$$
$$(D-a_2)(D-a_1)y=(D-a_2)(y'-a_1y)=y''-a_1y'-a_2y'+a_2a_1y$$
$$=y''-(a_1+a_2)y'+a_2a_1y$$

وبالمثل يمكن أثبات أن

$$[F_1(D)\,F_2(D)]y=[F_2(D)\,F_1(D)]y$$

وذلك إذا كانت معاملات $F_2(D), F_1(D)$ مقادير ثابتة

(٣.٢.٣) بعض المتطابقات الهامة

(أ) (قانون التعويض)

$$F(D)\,\mathrm{e}^{ax}=F(a)\,\mathrm{e}^{ax}$$

حيث $F(D)$ كثيرة حدود ذات معاملات ثابتة، a مقدار ثابت.

البرهان

بما أن $D^r\,\mathrm{e}^{ax}=a^r\,\mathrm{e}^{ax}$ ، حيث r عدد صحيح موجب فإن

$$F(D)\,\mathrm{e}^{ax}=(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)\,\mathrm{e}^{ax}$$
$$=a_0D^n\,\mathrm{e}^{ax}+a_1D^{n-1}\,\mathrm{e}^{ax}+.....+a_{n-1}D\,\mathrm{e}^{ax}+a_n\,\mathrm{e}^{ax}$$
$$=a_0a^n\,\mathrm{e}^{ax}+a_1a^{n-1}\,\mathrm{e}^{ax}+\cdots+a_{n-1}a\,\mathrm{e}^{ax}+a_n\,\mathrm{e}^{ax}$$
$$=F(a)\,\mathrm{e}^{ax}$$

(ب) (قانون الإزاحة)

$$D^n\{\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\}=\mathrm{e}^{ax}(D+a)^n\,z(x)$$

حيث $z(x)$ دالة للمتغير x ، a مقدار ثابت ، n عدد صحيح موجب و منها نستنتج أن

$$F(D)\{\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\}=\mathrm{e}^{ax}\,F(D+a)z(x)$$

البرهان:

نبرهن ذلك بالاستنتاج الرياضي

في حالة $n=1$

$$D\{e^{ax} z(x)\} = e^{ax} Dz(x) + z(x) D e^{ax} = e^{ax} Dz(x) + az(x) e^{ax}$$
$$= e^{ax}(D+a)z(x)$$

إذن العلاقة صحيحة في حالة $n=1$

نفرض أن العلاقة صحيحة في حالة $n=m$ أي أن

$$D^m\{e^{ax} z(x)\} = e^{ax}(D+a)^m z(x)$$

المطلوب أثبات صحة العلاقة في حالة $n=m+1$

$$D^{m+1}\{e^{ax} z(x)\} = D\,D^m\{e^{ax} z(x)\} = D\left\{e^{ax}\left[(D+a)^m z(x)\right]\right\}$$
$$= e^{ax}(D+a)\left\{(D+a)^m z(x)\right\} = e^{ax}(D+a)^{m+1} z(x)$$

إذن العلاقة صحيحة في حالة $n=m+1$ إذن فهي صحيحة لجميع قيم m الموجبة.

(ج)

$$F(D^2)\sin(ax+b) = F(-a^2)\sin(ax+b)$$
$$F(D^2)\cos(ax+b) = F(-a^2)\cos(ax+b)$$

حيث a, b مقادير ثابتة.

البرهان

إذا كانت r عدداً صحيحاً موجباً فإن

$$D^{2r}\sin(ax+b) = a^{2r}\sin(ax+b+2r\cdot\frac{\pi}{2})$$
$$= (-1)^r a^{2r}\sin(ax+b) = (-a^2)^r\sin(ax+b)$$
$$F(D^2)\sin(ax+b) = \left\{a_0D^{2n} + a_1D^{2n-2} + \cdots + a_{n-1}D^2 + a_n\right\}\sin(ax+b)$$
$$= a_0(-a^2)^n\sin(ax+b) + a_1(-a^2)^{n-1}\sin(ax+b) + ... + a_n\sin(ax+b)$$
$$= \{a_0(-a^2)^n + a_1(-a^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-a^2) + a_n\}\sin(ax+b)$$
$$= F(-a^2)\sin(ax+b)$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن أثبات أن

$$F(D^2)\cos(ax+b) = F(-a^2)\cos(ax+b)$$

(٣.٢.٣) المؤثرات التفاضلية العكسية $\frac{1}{D}, \frac{1}{F(D)}$

تعريف

المعامل التفاضلي العكسي $\frac{1}{D}$ هو المعامل الذى تأثيره على دالة في المتغير x هو عكس تأثير العامل التفاضلي D على نفس الدالة.

أي إذا كانت y دالة للمتغير x فإن

$$\frac{1}{D}\{Dy(x)\} = D\left\{\frac{1}{D}y(x)\right\} = y(x)$$

ومن ذلك يتضح أن $\frac{1}{D}$ هو المعكوس الجبري للمعامل D ولذلك فهو معامل تكاملي

$$\frac{1}{D}y(x) = \int y(x)dx$$

بدون وجود ثابت للتكامل لكى تتحقق العلاقة

$$\frac{1}{D}\{Dy(x)\} = y(x)$$

وبالمثل $\frac{1}{F(D)}$ ترمز للمعامل التفاضلي العكسي الذى تأثيره على دالة ما للمتغير x هو عكس تأثير المعامل التفاضلي $F(D)$ على نفس الدالة. أي أن

$$\frac{1}{F(D)}\{F(D)y(x)\} = F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}\right\}y(x) = y(x)$$

وباستخدام هذه العلاقة وبمراعاة أن $F(D)$ دالة تأثيرية يمكن أثبات أن $\frac{1}{F(D)}$ أيضاً دالة تأثيرية خطية أي أن .

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{\mathrm{F}(D)}\{cy(x)\} = c\frac{1}{\mathrm{F}(D)}y(x)$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{1}{\mathrm{F}(D)}\{y(x)+z(x)\} = \frac{1}{\mathrm{F}(D)}y(x) + \frac{1}{\mathrm{F}(D)}z(x)$$

حيث y, z دوال للمتغير x ، c مقدار ثابت.

البرهان

(i) نؤثر على الطرف الأيسر بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}\left[cy(x)\right]\right\}=cy(x) \qquad (*)$$

نؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{c\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cF(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cy(x) \quad (**)$$

بمقارنة $(*)$ ، $(**)$ نحصل علي المطلوب.

$$F(D)\left\{c\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cF(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cy(x)$$

(ii) نؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)+\frac{1}{F(D)}z(x)\right\}=F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}+F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}z(x)\right\}$$
$$=y(x)+z(x)$$

نؤثر على كل من طرفي المعادلة السابقة بالدالة التأثيرية $\frac{1}{F(D)}$ نحصل علي

$$\frac{1}{F(D)}y(x)+\frac{1}{F(D)}z(x)=\frac{1}{F(D)}\{y(x)+z(x)\}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن البرهنة على صحة المتطابقات الثلاث الاتية إذا كانت الدالة التأثيرية لها هي $\frac{1}{F(D)}$

(أ)

$$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{F(a)}\mathrm{e}^{ax}$$

حيث $F(a)\neq 0$ ، a مقدار ثابت.

البرهان

نؤثر على الطرف الأيسر بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}\right\}=\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)\mathrm{e}^{ax}\right\}=\mathrm{e}^{ax}$$

نؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(a)}e^{ax}\right\}=\frac{1}{F(a)}F(D)e^{ax}=\frac{1}{F(a)}F(a)e^{ax}=e^{ax}$$

حيث أن $F(a)$ ثابت. بالتالي نحصل علي

$$\frac{1}{F(D)}e^{ax}=\frac{1}{F(a)}e^{ax}$$

(ب)

$$\frac{1}{F(D)}\{e^{ax}\,z(x)\}=e^{ax}\,\frac{1}{F(D+a)}\{z(x)\}$$

البرهان

نؤثر على الطرف الأيمن بالمؤثر التفاضلي $F(D)$

$$F(D)\left[e^{ax}\left\{\frac{1}{F(D+a)}z(x)\right\}\right]=e^{ax}\,F(D+a)\left\{\frac{1}{F(D+a)}z(x)\right\}=e^{ax}\,z(x)$$

نؤثر على كل من الطرفين في المعادلة السابقة بالدالة التأثيرية $\frac{1}{F(D)}$

$$e^{ax}\,\frac{1}{F(D+a)}z(x)=\frac{1}{F(D)}\{e^{ax}\,z(x)\}$$

(ج)

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b)$$

حيث $F(-a^2)\neq 0$ ، a مقدار ثابت.

البرهان

تؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D^2)$

$$F(D^2)\left\{\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)\right\}=\frac{1}{F(-a^2)}F(D^2)\sin(ax+b)$$
$$=\frac{1}{F(-a^2)}F(-a^2)\sin(ax+b)=\sin(ax+b)$$

تؤثر على كل من الطرفين للمعادلة السابقة بالدالة التأثيرية $\dfrac{1}{F(D^2)}$

$$\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b)$$

وبالمثل يمكن إثبات العلاقة الثانية.

التكامل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية ذوات المعاملات الثابتة.

في هذا الجزء سوف نهتم بإيجاد التكامل الخاص (الحل الخاص) للمعادلة التفاضلية الخطية

$$F(D)y=f(x) \qquad (1)$$

وذلك في بعض الحالات الخاصة للدالة $f(x)$.

أولاً

إذا كانت $f(x)=e^{ax}$ أي أن $F(D)y=e^{ax}$. من تعريف المؤثر التفاضلي العكسي $\dfrac{1}{F(D)}$ ينتج أن

$$\frac{1}{F(D)}\{F(D)y(x)\}=\frac{1}{F(D)}e^{ax}$$
$$y(x)=\frac{1}{F(D)}e^{ax}$$

فإذا كانت $F(a)\neq 0$ فإن التكامل الخاص للمعادلة هو

$$y_p(x)=\frac{1}{F(a)}e^{ax}$$

وإذا كانت $F(a)=0$ فإنه يمكن كتابة $F(D)$ على الصيغة

$$F(D)=(D-a)^r\psi(D)$$

حيث r عدد صحيح موجب ، $\psi(a)\neq 0$. وهذا معناه أن a جذر متكرر r من المرات للدالة $F(D)$ وفى هذه الحالة يكون

$$F(a)=0, F'(a)=0, F''(a)=0, \cdots, F^{(r-1)}(a)=0$$

أما $F^{(r)}(a) \neq 0$

$$\frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^r \psi(D)}e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^r}\left\{\frac{1}{\psi(D)}e^{ax}\right\}$$

$$= \frac{1}{(D-a)^r}\left\{\frac{1}{\psi(a)}e^{ax}\right\} = \frac{1}{\psi(a)}\ \frac{1}{(D-a)^r}\left\{e^{ax}\cdot 1\right\}$$

$$\frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{\psi(a)}\cdot\ e^{ax}\ \frac{1}{D^r}\{1\} = \frac{1}{\psi(a)}e^{ax}\ \frac{x^r}{r!} = \frac{x^r}{\psi(a)r!}e^{ax} \qquad (1)$$

ولكن

$$F(D) = (D-a)^r \psi(D)$$

بمفاضلة هذه العلاقة r من المرات باستخدام نظرية ليبنز فإن

$$F^{(r)}(D) = \psi(D)r! + C_1^r \psi'(D)r!(D-a) + \cdots + (D-a)^r \psi^{(r)}(D)$$

$$F^{(r)}(a) = \psi(a)r! \quad \Rightarrow \frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{x^r}{\psi(a)r!}e^{ax} = \frac{x^r}{F^{(r)}(a)}e^{ax}$$

أي أنه إذا كانت r هي رتبة أول معامل تفاضلي للدالة F لا ينعدم عند القيمة a فإن التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y(x) = e^{ax}$$

حيث $F(a) = 0$ يكون

$$y(x) = \frac{x^r}{F^{(r)}(a)}e^{ax}$$

أمثلة محلولة

مثال (١)

أوجد التكامل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الأتية

$$\text{(i)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 2e^{3x}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 50e^{2x}$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=50e^{2x}$$

$$\text{(iv)}\quad \frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{dy}{dx}-y=6e^{-x}$$

الحل

(i) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-6D+8)y=2\,\mathrm{e}^{3x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-6D+8}\left\{2\,\mathrm{e}^{3x}\right\}=2\frac{1}{D^2-6D+8}\mathrm{e}^{3x}$$
$$=2\frac{1}{9-18+8}\mathrm{e}^{3x}=-2\,\mathrm{e}^{3x}$$

(ii) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+6D+9)y=50e^{2x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+6D+9}\left\{50\,\mathrm{e}^{2x}\right\}=50\cdot\frac{1}{D^2+6D+9}\left\{\mathrm{e}^{2x}\right\}$$
$$y_p(x)=50\cdot\frac{1}{4+12+9}\mathrm{e}^{2x}=2\,\mathrm{e}^{2x}$$

(iii) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-4D+4)y=50e^{2x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-4D+4}\{50e^{2x}\}=50\cdot\frac{1}{D^2-4D+4}e^{2x}$$
$$F(D)=D^2-4D+4,\quad F(2)=0$$
$$F'(D)=2D-4,\quad F'(2)=0$$
$$F''(D)=2\,,\quad F''(2)=2$$

بالتالي يكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=50\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x}=25x^2\,\mathrm{e}^{2x}$$

حل أخر (باستخدام قانون الإزاحة)

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{(D-2)^2}\{50e^{2x}\}=50e^{2x}\frac{1}{(D+2-2)^2}\{1\}$$
$$=50e^{2x}\cdot\frac{1}{D^2}\{1\}=\frac{50e^{2x}x^2}{2}=25x^2e^{2x}$$

(iv) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^4+2D^3-2D-1)y=6\,\mathrm{e}^{-x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{D^4+2D^3-2D-1}\{6\,\mathrm{e}^{-x}\}=6\frac{1}{D^4+2D^3-2D-1}\{\mathrm{e}^{-x}\}$$
$$F(D)=D^4+2D^3-2D-1\,,\qquad F(-1)=0$$
$$F'(D)=4D^3+6D^2-2,\qquad F'(-1)=0$$
$$F''(D)=12D^2+12D,\qquad F''(-1)=0$$
$$F'''(D)=24D+12,\qquad F'''(-1)=-12$$

بالتالي يكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=6\cdot\frac{1}{(-12)}x^3\,\mathrm{e}^{-x}=-\frac{1}{2}x^3\,\mathrm{e}^{-x}$$

تمرين

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y''-k^2y=\sinh kx$$

ثانياً

إذا كانت

$$f(x)=\sin(ax+b)\quad\text{or}\quad f(x)=\cos(ax+b)$$

أي أن

$$F(D)y(x)=\sin(ax+b)$$

فيكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\sin(ax+b)$$

ولكن $F(D)$ يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)=g(D^2)+h(D^2)D$$

وبفرض أن

$$c_1=g(-a^2),\qquad c_2=h(-a^2)$$

إذن التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{c_1+c_2D}\sin(ax+b)$$

وبالتأثير على الطرف الأيمن بالمؤثر التفاضلي $(c_1 - c_2 D)$ و المؤثر العكسي له. نحصل علي

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (c_1 - c_2 D)\frac{1}{c_1 - c_2 D}\left\{\frac{1}{c_1 + c_2 D}\sin(ax+b)\right\} \\ &= (c_1 - c_2 D)\left\{\frac{1}{c_1^2 - c_2^2 D^2}\sin(ax+b)\right\} \\ &= (c_1 + c_2 D)\left\{\frac{1}{c_1^2 + c_2^2 a^2}\sin(ax+b)\right\} \\ &= \frac{1}{c_1^2 + c_2^2 a^2}\{c_1 \sin(ax+b) - c_2 a\cos(ax+b)\} \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة يمكن أثبات أن التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y = \cos(ax+b)$$

هو

$$y_p(x) = \frac{1}{c_1^2 + a^2 c_2^2}\{c_1\cos(ax+b) + c_2 a\sin(ax+b)\}$$

مثال (٢)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 5\sin 3x + 3\cos 5x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2 + 16)y = 5\sin 3x + 3\cos 5x$$

التكامل الخاص هو

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2+16}\{5\sin 3x + 3\cos 5x\} \\ &= 5\cdot\frac{1}{D^2+16}\sin 3x + 3\cdot\frac{1}{D^2+16}\cos 5x \\ &= 5\cdot\frac{1}{-9+16}\sin 3x + 3\cdot\frac{1}{-25+16}\cos 5x \\ &= \frac{5}{7}\sin 3x - \frac{1}{3}\cos 5x \end{aligned}$$

مثال (٣)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=\cos 2x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+3D+2)y=\cos 2x$$

التكامل الخاص لها هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+3D+2}\cos 2x=\frac{1}{(-4)+3D+2}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{-2+3D}\cos 2x$$

$$y_p(x)=(-2-3D)\left\{\frac{1}{-9D^2+4}\cos 2x\right\}=\frac{1}{40}(-2-3D)\{\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{40}\{-6\sin 2x+2\cos 2x\}=\frac{1}{20}\{3\sin 2x-\cos 2x\}$$

مثال (٤)

اوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=\mathrm{e}^{5x}\sin 2x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-7D+12)y=\mathrm{e}^{5x}\sin 2x$$

الحل الخاص لها هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-7D+12}\mathrm{e}^{5x}\sin 2x=\frac{1}{(D-3)(D-4)}\{\mathrm{e}^{5x}\sin 2x\}$$

$$=\mathrm{e}^{5x}\frac{1}{(D+2)(D+1)}\{\sin 2x\}=\mathrm{e}^{5x}\frac{1}{D^2+3D+2}\{\sin 2x\}$$

$$y_p(x)=\mathrm{e}^{5x}\frac{1}{-4+3D+2}\{\sin 2x\}=\mathrm{e}^{5x}(-2-3D)\frac{1}{4-9D^2}\sin 2x$$

$$=\mathrm{e}^{5x}(-2-3D)\frac{1}{4+36}\sin 2x=\frac{\mathrm{e}^{5x}}{40}(-2\sin 2x-6\cos 2x)$$

$$=-\frac{\mathrm{e}^{5x}}{20}(\sin 2x+3\cos 2x)$$

ملحوظة

إذا كانت $F(-a^2)=0$ فإنه لإيجاد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$F(D)y = \sin(ax+b)$$

or

$$F(D)y = \cos(ax+b)$$

فإننا نستخدم قيمة الجيب و الجيب التام للدالة الأسية وتساوي الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية.

مثال (٥)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \cos\alpha x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+\alpha^2)y = \cos\alpha x$$

الحل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2+\alpha^2}\cos\alpha x = \text{Real part of}\left\{\frac{1}{D^2+\alpha^2}e^{i\alpha x}\right\}$$

$$= \text{Re}\left\{\frac{1}{D^2+\alpha^2}e^{i\alpha x}\right\}$$

ولكن

$$F(D) = D^2+\alpha^2, \quad F(i\alpha) = 0$$

$$F'(D) = 2D, \quad F'(i\alpha) = 2i\alpha$$

و بالتالي يكون

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2}\mathrm{e}^{i\alpha x} = \frac{x}{2\alpha i}\mathrm{e}^{i\alpha x} = \frac{x}{2\alpha i}(\cos\alpha x + i\sin\alpha x)$$

$$= \frac{x}{2\alpha}(\frac{1}{2}\cos\alpha x + \sin\alpha x) = \frac{x}{2\alpha}(\sin\alpha x - i\cos\alpha x)$$

و يكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{x}{2\alpha}\sin\alpha x$$

ثالثاً

إذا كانت $f(x)$ عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة r في x أي أن المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$F(D)y = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{F(D)}\{a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r\}$$

لإيجاد التكامل الخاص y_p نقوم بفك المؤثر $\frac{1}{F(D)}$ في صورة كثيرة حدود في D حسب قوي D التصاعدية وذلك بتحليل المؤثر $\frac{1}{F(D)}$ إلي كسوره الجزئية ثم استخدام نظرية ذات الحدين.

ملحوظة

مفكوك ذات الحدين باي اس $\alpha \in \mathbb{R}$ يكون علي الصورة التالية

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots,\ |x|<1$$

مثال (٦)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=x^2-5$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^3+4D)y=x^2-5$$

الحل الخاص لها هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^3+4D}\{x^2-5\}=\frac{1}{4D\left(1+\frac{D^2}{4}\right)}(x^2-5)$$

$$=\frac{1}{4D}\left(1+\frac{D^2}{4}\right)^{-1}(x^2-5)=\frac{1}{4D}\left(1-\frac{D^2}{4}+\cdots\right)(x^2-5)$$

$$=\frac{1}{4D}\left(x^2-5-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{11}{2}x\right)=\frac{x}{24}\left(2x^2-33\right)$$

قاعدة هامة (طريقة المعاملات غير المعينة)

نلاحظ من المثال السابق أنه إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة r_1 و كانت r_2 رتبة المشتقة ذات الأقل رتبة في الدالة $F(D)$ فإنه التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$F(D)=f(x)$$

يكون كثيرة حدود من درجة r_1+r_2 ويمكن فرضة علي الصورة

$$y(x)=b_0x^r+b_1x^{r-1}+\ldots+b_{r-1}x+b_r$$

حيث $r=r_1+r_2$. و تعيين $b_0,b_1,\cdots,b_r$ بالتعويض عن y و مشتقاتها في المعادلة التفاضلية ثم مساواة معاملات x المختلفة في الطرفين.

مثال (٧)

بطريقة المعاملات غير المعينة أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=27x^2-9x$$

الحل

بما ان $r_1=2$, $r_2=0$ فان $r=r_1+r_2=2$

نفرض أن

$$y(x)=b_0x^2+b_1x+b_2 \quad\Rightarrow\quad y'=2b_0x+b_1 \quad\Rightarrow\quad y''=2b_0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن $y(x)$ ، $y'(x)$ ، $y''(x)$

$$2b_0-4(2b_0x+b_1)+3(b_0x^2+b_1x+b_2)=27x^2-9x$$
$$3b_0x^2+(3b_1-8b_0)x+(3b_2-4b_1+2b_0)=27x^2-9x$$

بمقارنه معاملات قوي x

$$3b_0=27 \quad\Rightarrow\; b_0=9 \;\Rightarrow 3b_1-8b_0=-9 \quad\Rightarrow b_1=21$$
$$3b_2-4b_1+2b_0=0 \;\;\Rightarrow b_2=22$$

الحل الخاص هو

$$y_p(x)=9x^2+21x+22$$

ملحوظة

إذا كانت $f(x)=e^{ax}p(x)$ حيث $p(x)$ كثيرة حدود في x ، a ثابت فإنه التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y=\mathrm{e}^{ax}\;p(x)$$

يكون هو

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\left\{\mathrm{e}^{ax}\;p(x)\right\}=\mathrm{e}^{ax}\,\frac{1}{F(D+a)}\,p(x)$$

مثال (٨)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y\;=\mathrm{e}^{x}\,(8x^3-20x^2)$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-5D+6)y=\mathrm{e}^{x}(8x^3-20x^2)$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-5D+6}\left\{e^x(8x^3-20x^2)\right\}=\frac{1}{(D-3)(D-2)}\left\{e^x(8x^3-20x^2)\right\}$$

$$=e^x\frac{1}{(D-2)(D-1)}\left\{8x^3-20x^2\right\}=e^x\{\frac{1}{D-2}-\frac{1}{D-1}\}\{8x^3-20x^2\}$$

$$=e^x\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-1}+(1-D)^{-1}\right\}\{8x^3-20x^2\}$$

$$y_p(x)=e^x\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\frac{D^3}{8}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(1+D+D^2+D^3+\cdots\right)\right\}\{8x^3-20x^2\}$$

$$=e^x\left\{1/2+\frac{3}{4}D+\frac{7}{8}D^2+\frac{15}{16}D^3+\cdots\right\}\{8x^3-20x^2\}$$

$$=e^x\{4x^3-10x^2+18x^2-30x+42x-35+45\}$$

$$=e^x\{4x^3+8x^2+12x+10\}$$

ملحوظة

إذا كانت

$$f(x)=p(x)\sin\alpha x$$

or

$$f(x)=p(x)\cos\alpha x$$

حيث $p(x)$ كثيرة حدود في x ، a ثابت فإن التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y=p(x)\sin\alpha x$$

هو

$$y_p(x)=\text{Imaginary part of}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{i\alpha x}p(x)\}\right)$$

$$=\text{Im}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{i\alpha x}p(x)\}\right)$$

$$=\text{Im}\left\{e^{i\alpha x}\frac{1}{F(D+ia)}e^{i\alpha x}p(x)\right\}$$

وبالمثل التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y = p(x)\cos\alpha x$$

$$y_p = \text{Real part of}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{iax}\, p(x)\}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{iax}\, p(x)\}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left\{e^{iax}.\frac{1}{F(D+ia)}\, p(x)\right\}$$

مثال (٩)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\ddot{x} - 9x = 25t\,\sin 4t\;, \qquad D \equiv \frac{d}{dt}$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2 - 9)x = 25t\,\sin t, \qquad D \equiv \frac{d}{dt}$$

التكامل الخاص هو

$$x_p = \frac{1}{D^2 - 9}\{25t\,\sin 4t\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{D^2-9}25te^{i4t}\right\}$$

$$= \operatorname{Im}\left\{e^{i4t}\,\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)}25t\right\}$$

$$\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{D-3+4i} - \frac{1}{D+3+4i}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4i-3}\left(1+\frac{D}{4i-3}\right)^{-1} - \frac{1}{(4i+3)}\left(1+\frac{D}{4i+3}\right)^{-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4i-3}\left(1-\frac{D}{4i-3}+\cdots\right) - \frac{1}{4i+3}\left(1-\frac{D}{4i+3}+\cdots\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i+3} - \frac{D}{(4i-3)^2} + \frac{D}{(4i+3)^2} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{6}{(4i-3)(4i+3)} - \frac{(4i+3)^2-(4i-3)^2}{(4i-3)^2(4i+3)^2}D + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{6}{-25} - \frac{48i}{(-25)^2}D + \cdots\right\} = -\frac{1}{25} - \frac{8}{625}iD + \cdots$$

إذن

$$e^{4it}\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)}25t=e^{4it}\left(-\frac{1}{25}-\frac{8}{625}iD+....\right)(25t)$$

$$=e^{4it}(-t-\frac{8}{25}i)=-(\cos 4t+i\sin 4t)(t+\frac{8}{25}i)$$

$$=-t\cos 4t+\frac{8}{25}\sin 4t-i(t\sin 4t+\frac{8}{25}\cos 4t)$$

$$x_p=\operatorname{Im}\left\{e^{4it}\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)}25t\right\}=-(t\sin 4t+\frac{8}{25}\cos 4t)$$

تمارين (٣)

أوجد التكامل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية

(1) $(D^2-2D+2)y=\mathrm{e}^x$ (2) $(D^2-13D+12)y=36$

(3) $(D^2+13D+42)y=112\,\mathrm{e}^x$ (4) $(D^2+6D+25)y=104\,\mathrm{e}^{3x}$

(5) $(D^2-9)y=54\,\mathrm{e}^x$ (6) $(D^2-a^2)y=a\sinh ax$

(7) $(D^3-D)y=2\cosh x$ (8) $(D^3-D)y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

(9) $(D^3+4D^2+4D)y=8\,\mathrm{e}^{-2x}$ (10) $(D+1)y=10\sin 2x$

(11) $(D^2-5D+6)y=100\sin 4x$

(12) $(D^2+2D+401)y=\sin 20x+40\cos 20x$

(13) $(D^2+8D+25)y=18\cos x-16\sin x$

(14) $(D^3+6D^2+11D+6)y=2\sin 3x$

(15) $(D^2+1)y=4\cos x$ (16) $(D-1)y=(x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$

(17) $(D^3-3D-2)y=540x^3\,\mathrm{e}^{-x}$ (18) $(D^2+2D+2)y=2\,\mathrm{e}^{-x}\sin x$

(19) $(D^2+1)^2y=24x\cos x$ (20) $(D^5-D)y=12\,\mathrm{e}^x+8\sin x-2x$

(21) $(D^2-6D+25)y=2\,\mathrm{e}^{3x}\cos 4x+8\,\mathrm{e}^{3x}(1-2x)\sin 4x$

(22) $(D+1)y=x^3$ (23) $(D^2+2D)y=24x$

(24) $(D^2-6D+9)y=54x+18$

(25) $(D^4-6D^3+9D^2)y=54x+18$ (26) $(D^2-D-2)y=44-76x-48x^2$

(27) $(D^3-D^2-2D)y=44-76x-48x^2$

(28) $(D-k)^k y=k^x$ k عدد صحيح موجب

(29) $(D^2+1)y=\sec x$ (30) $(D-1)^3y=\dfrac{e^x}{x^2}$

(31) $(D-2)^2y=8(x^2e^{2x})\sin 2x$

الفصل الثاني

الدالة المكملة للمعادلات التفاضلية ذوات المعاملات الثابتة

(١.٣) مقدمة

نفرض أن $y = y_p(x)$ حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$F(D)y(x) = f(x)$$

ونفرض أن الحل العام هو

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

حيث $y_p(x)$ ، $z(x)$ دوال للمتغير x.

أي أن

$$F(D)\{y_p(x) + z(x)\} = f(x)$$
$$F(D)y_p(x) + F(D)z(x) = f(x)$$

ولكن $F(D)y_p(x) = f(x)$ لأن $y_p(x)$ حل خاص. لذلك يكون

$$F(D)z(x) = 0$$

حيث $z(x)$ هي الحل العام للمعادلة التفاضلية المختزلة الناتجة من المعادلة الأصيلة بوضع الطرف الأيمن يساوي صفر وتسمي $z(x)$ بالدالة المكملة أو الحل المكمل للمعادلة الأصلية وعلي ذلك فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية يساوي الدالة المكملة تضاف إليها أي تكامل خاص للمعادلة $F(D)y_p(x) = f(x)$.

بفرض أن $z_1, z_2, \dots, z_n$ حلول خاصة للمعادلة المختزلة $F(D)z(x) = 0$ و أن $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ثوابت اختيارية.

نعتبر الدالة

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \cdots + c_n z_n(x)$$

فيكون

$$\begin{aligned} F(D)z &= F(D)\{c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \cdots + c_n z_n(x)\} \\ &= F(D)\{c_1 z_1(x)\} + F(D)\{c_2 z_2(x)\} + \cdots + F(D)\{c_n z_n(x)\} \\ &= c_1 F(D) z_1(x) + c_2 F(D) z_2(x) + \cdots + c_n F(D) z_n(x) \\ &= c_1.0 + c_2.0 + \ldots + c_n.0 = 0 \end{aligned}$$

أي أنه إذا كانت كل من $z_1, z_2, \dots, z_n$ حلول خاصة للمعادلة المختزلة

$$F(D)z(x)=0$$

فإن الدالة

$$z(x)=c_1z_1(x)+c_2z_2(x)+\cdots+c_nz_n(x)$$

تكون أيضاً حل لهذه المعادلة وذلك لجميع قيم الثوابت الاختيارية $c_1,\cdots,c_n$.

(٢.٣) إيجاد الحل العام للمعادلة المختزلة (الدالة المكملة)

تعتبر المعادلة التفاضلية

$$F(D)y(x)=0 \qquad (1)$$

نفرض أن $y=\mathrm{e}^{\alpha x}$ حل خاص أي أنه يحقق المعادلة التفاضلية

$$F(D)\mathrm{e}^{\alpha x}=0 \;\Rightarrow F(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}=0$$

و حيث ان $\mathrm{e}^{\alpha x}\neq 0$ نجد ان $F(\alpha)=0$. أي أن $y=\mathrm{e}^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة (١) إذا كان $F(\alpha)=0$ أي إذا كانت α جذر للمعادلة المساعدة

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0 \qquad (2)$$

حيث $a_0,a_1,\cdots,a_n$ ثوابت حقيقية للمعادلة (١) وتحدد طبيعة جذور المعادلة المميزة (٢) الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية (١) وهناك ثلاث حالات.

(١.٢.٣) الحالة الأولي: إذا كانت جميع جذور المعادلة المساعدة حقيقية ومختلفة.

نفرض أن جذور المعادلة المساعدة (٢) هي $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ و جميعها حقيقية مختلفة. في هذه الحالة تكون الحلول الخاصة للمعادلة المختزلة (١) هي

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 x},\mathrm{e}^{\alpha_2 x},\cdots,\mathrm{e}^{\alpha_n x}$$

وهذه دوال مستقلة خطياً ويكون الحل العام للمعادلة المختزلة (١) هو

$$y_c(x)=c_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1 x}+c_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2 x}+\cdots+c_n\,\mathrm{e}^{\alpha_n x}$$

أمثلة

مثال (١)

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

$$\text{(i)}\quad 2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(ii) $$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-15y=0$$

(iii) $$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=0$$

الحل

(i) نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة ، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$2\alpha^2+5\alpha+2=0 \ \Rightarrow (2\alpha+1)(\alpha+2)=0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha=-1/2 \quad , \quad \alpha_2=-2$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$e^{-(1/2)x}, \ e^{-2x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=Ae^{-(1/2)x}+Be^{-2x}$$

حيث A, B ثوابت اختيارية.

(ii) نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة ، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2+2\alpha-15=0 \ \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha+5)=0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha_1=3, \quad \alpha_2=-5$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$e^{3x} \ , \ e^{-5x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=Ae^{3x}+Be^{-2x}$$

(iii) نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^3+\alpha^2-2\alpha=0 \ \Rightarrow \alpha(\alpha^2+\alpha-2)=0$$
$$\alpha(\alpha-1)(\alpha+2)=0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -2$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$1, \ e^{x}, \ e^{-2x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = A + Be^{x} + Ce^{-2x}$$

(٢.٢.٣)الحالة الثانية : إذاكانت بعض جذور المعادلة المساعدة أعداد مركبة

نفرض أن $p+iq$ هو أحد جذور المعادلة المساعدة (٢). و حيث ان معاملات المعادلة المساعدة اعداد حقيقية فان $p-iq$ هو أيضاً جذر للمعادلة المساعدة (٢) ويكون $e^{(p-iq)x}, e^{(p+iq)x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية (١).

وحيث ان المعادلة التفاضلية (١) معادلة خطية فيكون

$$\frac{1}{2}e^{(p+iq)x} + \frac{1}{2}e^{(p-iq)x} = e^{px}\cos qx$$

حل خاص.

كذلك

$$-\frac{1}{2}i\,e^{(p+iq)z} + \frac{1}{2}i\,e^{(p-iq)z} = e^{px}\sin qx$$

حل خاص.

ويكون جزء الحل العام للمعادلة المختزلة المناظر للجذرين $p+iq, \ p-iq$ هو

$$\begin{aligned} y_c(x) &= c_1 e^{px}\cos qx + c_2 e^{px}\sin qx \\ &= e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx) \end{aligned}$$

مثال (٢)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

$$\text{(i)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13y = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$

الحل

(i) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha-6\alpha+13=0 \;\Rightarrow \alpha_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=3\pm 2i$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$e^{3x}\cos 2x,\quad e^{3x}\sin 2x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=\mathrm{e}^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

(ii) نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2+25=0 \;\Rightarrow \alpha_{1,2}=\pm 5i$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$\cos 5x,\sin 5x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=c_1\cos 5x+c_2\sin 5x$$

مثال (٣)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية

$$y'''-y''+9y'-9y=0$$

الحل

نفرض أن $y=\mathrm{e}^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^3-\alpha^2+9\alpha-9=0 \;\Rightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+9)=0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$\mathrm{e}^x,\ \cos 3x\ ,\ \sin 3x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=c_1e^x+c_2\cos 3\mathrm{x}+c_3\sin 3x$$

(٣.٢.٣) الحالة الثالثة : إذا كان بعض جذور المعادلة المساعدة مكرراً

نفرض أن $\alpha=m$ جذر للمعادلة المساعدة (٢) مكرر r من المرات فيكون $(D-m)^r$ عامل للدالة $F(D)$

$$F(D)=(D-m)^{r}\psi(D)\ ,\ \psi(m)\neq 0$$

وتكون المعادلة التفاضلية (١) هي

$$F(D)y(x)=(D-m)^{r}\psi(D)y(x)=0 \qquad (3)$$

بفرض ان $\psi(D)y(x)=u(x)$ فتصبح المعادلة التفاضلية (٣) علي الشكل

$$(D-m)^{r}u(x)=0 \qquad (4)$$

واضح أن $u(x)=\mathrm{e}^{mx}$ حل خاص لهذه المعادلة وهذا الحل مكرر r من المرات و لكنه في الحقيقة حل واحد لأنه لن يكون هناك إلا ثابت واحد وعلي هذا فإن هذا الحل ناقص. لذا نفرض أن الحل العام هو

$$u(x)=\mathrm{e}^{mx}\,z(x)$$

حيث z دالة للمتغير x

$$(D-m)^{r}\{\mathrm{e}^{mx}\,z\}=0\Rightarrow \mathrm{e}^{mx}\,D^{r}u(x)=0$$

و منها نجد ان

$$D^{r}u(x)=0$$

واضح أن الدوال $1,\ x,\ x^{2},\cdots,\ x^{r-1}$ حلول خاصة للمعادلة الأخيرة. و تكون الحلول الخاصة المناظرة للجذر $\alpha=m$ المكرر r مرة هي

$$\mathrm{e}^{mx},x\,\mathrm{e}^{mx},\cdots,x^{r-1}\,\mathrm{e}^{mx}$$

وهذه دوال مستقلة خطياً. ويكون

$$u(x)=\mathrm{e}^{mx}\left(c_{0}+c_{1}x+\cdots+c_{r-1}x^{r-1}\right)$$

هو الحل العام للمعادلة المختزلة المناظر للجذر $\alpha=m$ المكرر r مرة.

مثال (٤)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

(i) $$\frac{d^{4}y}{dx^{4}}+4\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=0$$

(ii) $$\frac{d^{4}y}{dx^{4}}+6\frac{d^{3}y}{dx^{3}}+5\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-24\frac{dy}{dx}-36y=0$$

(iii) $$\frac{d^{4}y}{dx^{4}}-\frac{d^{3}y}{dx^{3}}-9\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-11\frac{dy}{dx}-4y=0$$

الحل

(i) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^4 + 4\alpha^2 = 0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha_{1,2} = 0, 0 \;\; , \;\; \alpha_{3,4} = \pm 2i$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$1, \;\; x, \;\; \cos 2x, \;\; \sin 2x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

(ii) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^4 + 6\alpha^3 + 5\alpha^2 - 24\alpha - 36 = 0$$
$$(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha + 3)^2 = 0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$e^{2x}, e^{-2x}, e^{-3x}, x e^{-3x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \left(c_3 + c_4 x\right) e^{-3x}$$

(iii) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^4 - \alpha^3 - 9\alpha^2 - 11\alpha - 4 = 0$$
$$(\alpha + 1)^3 (\alpha - 4) = 0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$e^{-x}, \;\; x e^{-x}, \;\; x^2 e^{-x}, \;\; e^{4x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + c_4 e^{4x}$$

أمثلة متنوعة

مثال (١)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=3-2x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+5D+4)y=3-2x$$

حيث $D\equiv\frac{d}{dx}$.

أولاً

نوجد حل المعادلة المختزلة

$$(D^2+5D+4)y=0$$

نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة المختزلة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2+5\alpha+4=0 \;\; \Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+4)=0$$

الحلول الخاصة هي

$$e^{-x}, e^{-4x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-4x}$$

ثانياً

نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+5D+4}\{3-2x\}=\frac{1}{(D+1)(D+4)}\{3-2x\}$$
$$=\frac{1}{4(D+1)\left(1+\frac{D}{4}\right)}\{3-2x\}=\frac{1}{4}\left[(1+D)^{-1}\left(1+\frac{D}{4}\right)^{-1}\right]\{3-2x\}$$
$$=\frac{1}{4}\left[(1-D+D^2-\cdots)\left(1-\frac{D}{4}+\frac{D^2}{16}-\cdots\right)\right]\{3-2x\}$$
$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{5D}{4}+\cdots\right]\{3-2x\}=\frac{1}{4}\left[\frac{11}{2}-2x\right]=\frac{1}{8}[11-4x]=\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x)=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$$

مثال (٢)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{2x}\,x^3$$

الحل

أولاً

نوجد حل المعادلة المختزلة

$$(D^2-5D+6)y=0$$

نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة المختزلة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2-5\alpha+6=0\ \Rightarrow(\alpha-2)(\alpha-3)=0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$e^{2x},\ e^{3x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=c_1\,e^{2x}+c_2\,e^{3x}$$

ثانياً

نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-5D+6}\left\{e^{2x}\,x^3\right\}=\frac{1}{(D-2)(D-3)}\left\{e^{2x}\,x^3\right\}=e^{2x}\,\frac{1}{D(D-1)}\,x^3$$

$$=-e^{2x}\left(\frac{1}{D}+\frac{1}{1-D}\right)x^3$$

$$y_p(x)=-e^{2x}\left(\frac{1}{D}+(1-D)^{-1}\right)x^3=-e^{2x}\left(\frac{1}{D}+(1+D+D^2+....)\right)x^3$$

$$=-e^{2x}\left(\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2+6x+6\right)$$

بالتالي فان الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x)=c_1\,e^{2x}+c_2\,e^{3x}-e^{2x}\left(\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2+6x+6\right)$$

مثال (٣)

اثبت أن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2k\frac{ds}{dt}+p^2s=a\cos qt$$

يمكن كتابته علي الصورة

$$s_p(t)=b\cos(qt-\epsilon)$$

حيث

$$b=\frac{a}{\left\{(p^2-q^2)^2+4k^2q^2\right\}^{1/2}}\ ,\quad \tan\epsilon=\frac{2kq}{p^2-q^2}$$

وإذا كانت k صغيرة جداً تبين أنه عندما تكون السعة b أكبر ما يمكن يكون الزمن الدوري للذبذبات القهرية يساوي تقريبا الزمن الدوري للذبذبات الحرة. وفي هذه الحالة فإنه

$$\epsilon=\frac{\pi}{2}\ ,\quad b=\frac{a}{2kp}$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+2kD+p^2)s=a\cos qt$$

حيث $D\equiv\dfrac{d}{dt}$

فيكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$
\begin{aligned}
s_p(t) &= \frac{1}{D^2+2kD+p^2}\{a\cos qt\} \\
&= \frac{1}{\left(p^2-q^2\right)+2kD}\{a\cos qt\} \\
&= \left[\left(p^2-q^2\right)-2kD\right]\frac{1}{\left(p^2-q^2\right)-4k^2D^2}\{a\cos qt\} \\
&= a\frac{1}{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}\left[\left(p^2-q^2\right)-2kD\right]\{\cos qt\} \\
&= \frac{a}{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}\left\{\left(p^2-q^2\right)\cos qt+2kq\sin qt\right\} \\
&= \frac{a}{\sqrt{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}}\left\{\frac{\left(p^2-q^2\right)}{\sqrt{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}}\cos qt+\frac{2kq}{\sqrt{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}}\sin qt\right\} \\
&= b\cos(qt-\epsilon)
\end{aligned}
$$

حيث

$$
b=\frac{a}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4k^2q^2}}, \quad \tan\epsilon=\frac{2kq}{p^2-q^2}
$$

للحصول علي النهاية العظمي للسعة b فإننا نوجد $\frac{db}{dq}$ ونساويها بالصفر .

$$
\begin{aligned}
&2\left(p^2-q^2\right)(-2q)+8k^2q=0 \\
&-4q(p^2-q^2-2k^2)=0 \ \Rightarrow q=0 \ \text{ Or } \ q^2=p^2-2k^2
\end{aligned}
$$

الزمن الدوري للذبذية القهرية هو

$$
\frac{2\pi}{p}\cong\frac{2\pi}{\sqrt{p^2-2k^2}}=\frac{2\pi}{q}
$$

لان k صغيرة جداً.

لإيجاد الزمن الدوري للذبذبية الحرة نحل المعادلة المختزلة.

$$\left(D^2+2kD+p^2\right)s=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4p^2}}{2}=-k\pm\sqrt{k^2-p^2}=-k\pm i\sqrt{p^2-k^2}=-k\pm ip$$

لأن k صغيرة جداً

$$s_c(t)=\mathrm{e}^{-kt}\left(c_1\cos pt+c_2\sin pt\right)=c_3\,\mathrm{e}^{-kt}\cos(pt-c_4),\quad \left(c_1=c_3\cos c_4\ ,\ c_2=c_3\sin c_4\right)$$

الزمن الدوري للذبذبة الحرة $\dfrac{2\pi}{p}$ اي ان الزمن الدوري للذبذبة القهرية يساوي تقريباً الزمن الدوري للذبذبة الحرة.

في هذه الحالة يكون

$$\tan\epsilon=\frac{2kq}{p^2-q^2}=\frac{2kq}{p^2-(p^2-2k^2)}$$

$$\tan\epsilon=\frac{2kq}{2k^2}=\frac{q}{k}\to\infty\ \Rightarrow\ \epsilon=\frac{\pi}{2}$$

$$b=\frac{a}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4k^2q^2}}=\frac{a}{\sqrt{(2k^2)^2+4k^2(p^2-2k^2)}}$$

$$=\frac{a}{2k\sqrt{p^2-k^2}}=\frac{a}{2kp}$$

تمارين (٣)

(١) أوجد الحل العام لجميع المعادلات التفاضلية المعطاة في تمارين (٢)

(٢) اثبت أن

$$y(x)=\frac{\cos ax-\cos(a+\epsilon)x}{(a+\epsilon)^2-a^2}$$

حل للمعادلة التفاضلية

$$\left(D^2+a^2\right)y=\cos(a+\epsilon)x$$

ثم استنتج التكامل الخاص للمعادلة

$$\left(D^2+a^2\right)y=\cos ax$$

(٣) بين أن التكامل الخاص للمعادلة

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2h\frac{dy}{dt}+\left(h^2+p^2\right)y=k\,\mathrm{e}^{-ht}\cos pt$$

يمثل ذبذبذية سعتها $\frac{k}{2p}\mathrm{e}^{-ht}$ ، أوجد أقصي سعة وبين أنها تكون كبيرة جداً إذا كانت h صغيرة جداً. أوجد السعة عندما $t\to\infty$.

(٤) بين أن حل المعادلة

$$(D^{2n+1}-1)y=0$$

يمكن وضعه على الصورة

$$y=Ae^x+\sum_{r=1}^{n}e^{\alpha x}(B_r\cos\beta x+C_r\sin\beta x)$$

حيث

$$\alpha=\cos\frac{2\pi r}{2n+1},\beta=\sin\frac{2\pi r}{2n+1}$$

(٥) إذا كان $\mathrm{F}(\mathrm{D}_1), D_1=x\dfrac{d}{dx}$ كثيرة حدود من الدرجة n فإثبت أن

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{F(D_1)} x^r = \frac{1}{F(r)} x^r, \quad F(r) \neq 0$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{F(D_1)} \left\{ x^r z(x) \right\} = x^r \frac{1}{F(D_1 + r)} z(x)$$

حيث z دالة في المتغير x

المعادلات التفاضلية ذوات المعاملات المتغيرة

(١.٤) مقدمة

معادلة أويلر الخطية هي معادلة من الشكل

$$\left(a_0x^nD^n+a_1x^{n-1}D^{n-1}+......+a_{n-1}xD+a_n\right)y(x)=\varphi(x)$$

حيث $a_0,a_1,\cdots,a_n$ ثوابت حقيقية $\varphi(x)$ دالة في المتغير x ، $D\equiv\dfrac{d}{dx}$

أما معادلة لجندر الخطية فهي من الشكل

$$\left\{a_0(ax+b)^nD^n+a_1(ax+b)^{n-1}D^{n-1}+......+a_{n-1}(ax+b)D+a_n\right\}y=\varphi(x)$$

يمكن اختزال هاتين المعادلتين إلى معادلتين خطيتين بمعاملات ثابتة عن طريق تحويلات مناسبة للمتغير المستقل.

(٢.٤) معادلة أويلر الخطية

باستخدام التعويض

$$x=\mathrm{e}^t\ \Rightarrow\frac{dx}{dt}=\mathrm{e}^t\ \Rightarrow\ \frac{dt}{dx}=\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{x}$$

فإذا أستخدمنا المؤثر D_1 ليدل على $\dfrac{d}{dt}$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\Rightarrow xDy=D_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\Rightarrow x^2D^2y=(D_1^2-D_1)y=D_1(D_1-1)y$$

وبالمثل يمكن أثبات أن

$$x^3D^3y=D_1(D_1-1)(D_1-2)y\ ,$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$x^nD^ny=D_1(D_1-1)(D_1-2).........(D_1-n+1)y$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نرى أنها تتحول إلى معادلة خطية ذات معاملات ثابتة فيها المتغير المستقل هو t

مثال (١)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية

$$\left(x^3D^3+3x^2D^2+xD+8\right)y(x)=32x^2$$

الحل

نضع

$$x=\mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad t=\ln x$$
$$xD=D_1\,,\;\; x^2D^2=D_1(D_1-1)\;\;,\; x^3D^3=D_1(D_1-1)(D_1-2)\,,\,D_1\equiv\frac{d}{dt}$$

فتتحول المعادلة التفاضلية الي

$$\left\{D_1(D_1-1)(D_1-2)+3D_1(D_1-1)+D_1+8\right\}y(x)=32\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$\left(D_1^3+8\right)y(t)=32\,\mathrm{e}^{2t}$$

المعادلة المساعدة هي

$$m^3+8=0 \;\;\Rightarrow (m+2)(m^2-2m+4)=0$$
$$m_1=-2\;\;,\;m_{2,3}=1\pm\sqrt{3}\;i$$

الحل المكمل هو

$$y_c(t)=c_1^{-2t}+\mathrm{e}^t\left(c_2\cos\sqrt{3}\,t+c_3\sin\sqrt{3}\,t\right)$$

الحل الخاص

$$y_p(t)=\frac{1}{D^3+8}\left\{32\,\mathrm{e}^{2t}\right\}=\frac{32}{8+8}\mathrm{e}^{2t}=2\,\mathrm{e}^{2t}$$

أذن الحل العام هو

$$y(t)=y_c+y_p=c_1\,\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^t\left(c_2\cos\sqrt{3}\,t+c_3\sin\sqrt{3}\,t\right)+2\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$y(x)=\frac{c_1}{x^2}+x\left\{c_2\cos\left(\sqrt{3}\ln x\right)+c_3\sin\left(\sqrt{3}\ln x\right)\right\}+2x^2$$

مثال (٢)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(x^2D^2-xD+4\right)y(x)=\cos\ln x+x\sin\ln x$$

الحل

نفرض أن

$$x=\mathrm{e}^{t} \quad \Rightarrow \quad xD=D_1 \ , \quad x^2D^2=D_1(D_1-1)$$

المعادلة تصبح

$$\left\{D_1(D_1-1)-D_1+4\right\} y(t)=\cos t+\mathrm{e}^{t}\sin t$$
$$(D_1^2-2D_1+4)y(t)=\cos t+\mathrm{e}^{t}\sin t$$

المعادلة المساعدة هي

$$m^2-2m+4=0$$
$$m_{1,2}=\frac{2+\sqrt{4-16}}{2}=1\pm\sqrt{3}\ i$$

الحل المكمل هو

$$y_c(t)=\mathrm{e}^{t}\left(c_1\cos\sqrt{3}\ \ t+c_2\sin\sqrt{3}\ \ t\right)$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(t)=\frac{1}{D_1^2-2D_1+4}\{\cos t\}+\frac{1}{D_1^2-2D_1+4}\{\mathrm{e}^{t}\sin t\}$$
$$=\frac{1}{3-2D_1}\{\cos t\}+\mathrm{e}^{t}\ \frac{1}{D_1^2+3}\{\sin t\}=\frac{3+2D_1}{9-4D_1^2}\{\cos t\}+\mathrm{e}^{t}\ \frac{1}{-1+3}\sin t$$
$$=\frac{1}{13}(3\cos t-2\sin t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\sin t$$

الحل العام هو

$$y(t)=y_c(t)+y_p(t)$$
$$=\mathrm{e}^{t}(c_1\cos\sqrt{3}\,t+c_2\sin\sqrt{3}\,t)+\frac{1}{13}(3\cos t-2\sin t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\sin t$$
$$y(x)=x\left\{c_1\cos\left(\sqrt{3}\ln x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{3}\ln x\right)\right\}+\frac{1}{13}\left\{3\cos\left(\ln x\right)-2\sin\left(\ln x\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)$$

(٣.٤) معادلة لجندر الخطية

بفرض أن

$$ax+b=\mathrm{e}^{t} \quad \Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{a}{ax+b}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt}\Rightarrow(ax+b)Dy=aD_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$(ax+b)^2D^2y=a^2(D_1^2-D_1)y=a^2D_1(D_1-1)y$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(ax+b)^nD^ny=a^nD_1(D_1-1)(D_1-2)\cdots(D_1-n+1)y$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نرى انها تتحول إلى معادلة خطية ذات معاملات ثابتة.

مثال (٣)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left\{(3x+2)^2D^2+3(3x+2)D-36\right\}y(x)=3x^2+4x+1$$

الحل

بفرض أن

$$3x+2=e^t \quad\Rightarrow(3x+2)^2D^2=9D_1(D_1-1)\ ,\ (3x+2)D=3D_1$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن

$$\left\{9D_1(D_1-1)+9D_1-36\right\}y(t)=\frac{1}{3}(e^{2t}-1)$$

$$(D_1^2-4)y=\frac{1}{27}(e^{2t}-1)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة.

المعادلة المساعدة هي

$$m^2-4=0\Rightarrow(m-2)(m+2)=0\Rightarrow m_1=2,m_2=-2$$

الحل المكمل هو

$$y_c(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$$

الحل الخاص هو

$$y_p(t)=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{D_1^2-4}\left\{e^{2t}\right\}-\frac{1}{D_1^2-4}\left\{e^{(0)t}\right\}\right]$$

$$F(D)=D_1^2-4\ ,\ F(2)=0\ ,\ F'(D)=2D_1\ ,\ F'(2)=4$$

$$y_p(t)=\frac{1}{27}\left(\frac{t}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{108}\left(t\,e^{2t}+1\right)$$

الحل العام هو

$$y(t)=y_c(t)+y_p(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{-2t}+\frac{1}{108}(t\,e^{2t}+1)$$

$$y(x)=c_1(3x+2)^2+c_2(3x+2)^{-2}+\frac{1}{108}\left[(3x+2)^2\ln(3x+2)+1\right]$$

(٤.٤) طريقة تغيير البارامترات (طريقة لاجرانج)

هذه الطريقة تمكننا من أيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$L_0(x)y^{(n)}+L_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+L_{n-1}(x)y'+L_n(x)y=\varphi(x) \qquad (*)$$

حيث $L_0, L_1, \cdots, L_n, \varphi$ دوال للمتغير x .

إذا علم حلول المعادلة المختزلة

$$L_0(x)y^{(n)}+L_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+L_{n-1}(x)y'+L_n(x)y=0$$

بفرض أن $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ حلول مستقلة خطية للمعادلة المختزلة. نفرض أن الحل العام للمعادلة الأصلية $(*)$ هو

$$y(x)=z_1(x)y_1+z_2(x)y_2+\cdots+z_n(x)y_n$$

حيث $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ دوال للمتغير x مطلوب أيجادها.

$$y'(x)=z_1(x)y_1'+z_2(x)y_2'+\cdots+z_n(x)y_n'+\left[z_1'(x)y_1+z_2'(x)y_2+\cdots+z_n'(x)y_n\right]$$

نضع

$$z_1'(x)y_1+z_2'(x)y_2+\cdots+z_n'(x)y_n=0 \qquad (1)$$

$$y''(x)=z_1y_1''+z_2y_2''+\cdots+z_ny_n''+(z_1'y_1'+z_2'y_2'+\ldots\ldots+z_n'y_n')$$

نضع

$$z_1'(x)y_1'+z_2'(x)y_2'+\cdots+z_n'(x)y_n'=0 \qquad (2)$$

$$y^{(3)}=z_1y_1^{(3)}+z_2y_2^{(3)}+\cdots+z_ny_n^{(3)}+(z_1'y_1''+z_2'y_2''+\cdots+z_n'y_n'')$$

نضع

$$z_1'(x)y_1''+z_2'(x)y_2''+\cdots+z_n'(x)y_n''=0 \qquad (3)$$

....

وهكذا

....

$$y^{(n-1)}=z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+\cdots+z_ny_n^{(n-1)}$$
$$+\left(z_1'y_1^{(n-2)}+z_2{}'y_2^{(n-2)}+\cdots+z_n'y_n^{(n-2)}\right)$$

نضع

$$z_1'y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+......+z_n'y_n^{(n-2)}=0 \qquad (n-1)$$

$$y^{(n)}=z_1y_1^{(n)}+z_2y_2^{(n)}+\cdots+z_ny_n^{(n)}+z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+\cdots+z_n'y_n^{(n-1)}$$

بالتعويض عن قيم $y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ في المعادلة الأصلية $(*)$ نحصل علي

$$L_0\left(z_1y_1^{(n)}+z_2y_2^{(n)}+\cdots+z_ny_n^{(n)}\right)+L_0\left(z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+\cdots+z_n'y_n^{(n-1)}\right)$$
$$+L_1\left(z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+\cdots+z_ny_n^{(n-1)}\right)+L_2\left(z_1y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+\cdots+z_ny_n^{(n-2)}\right)$$
$$+\cdots$$
$$+L_{n-1}\left(z_1y_1'+z_2y_2'+\cdots+z_ny_n'\right)+L_n\left(z_1y_1+z_2y_2+\cdots+z_ny_n\right)=\varphi(x)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$L_0\left(z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+\cdots+z_n'y_n^{(n-1)}\right)$$
$$+z_1F(D)y_1+z_2F(D)y_2+\cdots+z_nF(D)y_n=\varphi(x)$$

ولكن $y_1, y_2, \cdots, y_n$ هي حلول للمعادلة المختزلة

$$F(D)y_1=0 \;,\quad F(D)y_2=0 \;,\cdots, F(D)y_n=0$$

بالتالي نحصل علي

$$z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+...+z_n'y_n^{(n-1)}=\frac{1}{L_0}\varphi(x) \qquad (n)$$

للمعادلات $(1),(2),\cdots,(n-1),(n)$ تكون مجموعه من المعادلات الجبرية الآنية الخطية غير البسيطة التي تربط n من الدوال $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ بحل هذه المجموعة من المعادلات والتكامل نحصل على الدوال $z_1, z_2, \cdots, z_n$

مثال (١)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = \tan x \qquad (1)$$

الحل

الحلان المستقلان خطياً للمعادلة المختزلة المناظرة هما

$$y_1 = \cos x \;\;,\;\; y_2 = \sin x$$

ويكون الحل العام للمعادلة المختزلة هو

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

نفرض الحل العام للمعادلة (١) في الصورة

$$y(x) = z_1(x) y_1 + z_2(x) y_2 = z_1(x)\cos x + z_2(x)\sin x \qquad (2)$$

نوجد y' ، y''

$$y' = z_1 \sin x + z_2 \cos x + (z_1' \cos x + z_2' \sin x)$$

نضع الشرط

$$z_1' \cos x + z_2' \sin x = 0 \qquad (3)$$

وعلى ذلك يكون

$$y' = -z_1 \sin x + z_2 \cos x$$

ومنها ينتج أن

$$y'' = -z_1 \cos x + z_2 \sin x - z_1^1 \sin x + z_2' \cos x$$

وبالتعويض عن y ، y'' في المعادلة الأصلية (١) نجد أن

$$-z_1' \sin x + z_2' \cos x = \tan x \qquad (4)$$

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) ينتج أن

$$z_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - s\,\mathrm{e}\, cx$$
$$z_2' = \sin x$$

ومنها يكون

$$z_1 = \int (\cos x - \sec x)\,dx = \sin x - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + b_1$$
$$z_2 = -\cos x + b_2$$

حيث b_1, b_2 ثابتان اختياريان.

وإذن من (٢) ينتج أن الحل العام للمعادلة (١) هو

$$y(x) = \left(\sin x - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + b_1\right)\cos x + (-\cos x + b_2)\sin x$$
$$= b_1 \cos x + b_2 \sin x - \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right|$$

مثال (٢)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^3 + D)y = \operatorname{cosec} x$$

الحل

الدالة المكملة هي حل المعادلة المختزلة

$$y_c(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية.

نفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة

$$y(x) = z_1 + z_2 \cos x + z_3 \sin x$$

حيث z_1, z_2, z_3 دوال في x تحقق العلاقة

$$Dy = -z_2 \sin x + z_3 \cos x + (z_1' + z_2' \cos x + z_3' \sin x)$$

نضع

$$z_1' + z_2' \cos x + z_3' \sin x = 0 \qquad (1)$$

$$Dy = -z_2 \sin x + z_3 \cos x$$

$$D^2 y = -z_2 \cos x + z_3 \sin x + (-z_2' \sin x + z_3' \cos x)$$

نضع

$$-z_2' \sin x + z_3' \cos x = 0 \qquad (2)$$

$$D^2 y = -z_2 \cos x - z_3 \sin x$$
$$D^3 y = z_2 \sin x - z_3 \cos x - z_2' \cos x - z_3' \sin x$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية والاختصار

$$-z_2' \cos x - z_3' \sin x = \operatorname{cosec} x \qquad (3)$$

نوجد z_1', z_2', z_3' من المعادلات (١) ، (٢) ، (٣)

بجمع (١) ، (٣) نحصل على

$$z_1' = \operatorname{cosec} x$$
$$z_1 = \ln\left|\operatorname{cosec} x - \cot x\right| + b_1$$

بحل (٢) ، (٣) ينتج أن

$$z_2' = -\cot x \quad , \quad z_3' = -1$$
$$z_2 = -\ln|\sin x| + b_2 \ , \ z_3 = -x + b_3$$
$$y(x) = b_1 + b_2 \cos x + b_3 \sin x + \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| - \cos x \ln|\sin x| - x \sin x$$

(٥.٤) حل المعادلات التفاضلية إذا علم أحد حلول المعادلة المختزلة (تنزيل الرتبة)

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية

$$(L_0 D^n + L_1 D^{n-1} + \cdots + L_{n-1} D + L_n) y(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

حيث $L_0, L_1, \ldots, L_n, \varphi$ دوال للمتغير x

المعادلة السابقة يمكن كتابتها على الصورة $F(D) y(x) = \varphi(x)$

حيث $F(D)$ كثيرة حدود في D ذات معاملات متغيرة . نفرض أن $y = y_1$ حل خاص للمعادلة المختزلة $F(D)y = 0$

نفرض ان الحل العام للمعادلة (١) هو $y = zy_1$ حيث z دالة للمتغير x . باستخدام صيغة ليبنز

$$y^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} C_k^r z^{(k)} y_1^{(r-k)}$$

وبالتعويض عن $y^{(r)}$ حيث $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ في المعادلة (١)

$$L_0 \sum_{k=0}^{n} C_k^n z^{(k)} y_1^{(n-k)} + L_1 \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} z^{(k)} y_1^{(n-1-k)} + \ldots + L_n z y_1 = \varphi(x)$$

$$L_0 z y_1^{(n)} + L_0 \sum_{k=1}^{n} C_k^n z^{(k)} y_1^{(n-k)} + L_1 z y_1^{(n-1)} + L_1 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} z^{(k)} y_1^{(n-1-k)} + \ldots + L_n z y_1 = \varphi(x)$$

$$z\,(L_0 y_1^{(n)} + L_1 y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + L_n y_1)$$
$$+ L_0 \sum_{k=1}^{n} C_k^n z^{(k)} y_1^{(n-k)} + L_1 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} z^{(k)} y_1^{(n-1-k)} + \ldots + L_{n-1} z' y_1 = \varphi(x) \qquad (2)$$

ولكن y_1 حل خاص للمعادلة المختزلة

$$L_0 y_1^{(n)} + L_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + L_n y_1 = 0$$

و بالتالي المعادلة (٢) تصبح

$$L_0 \sum_{k=1}^{n} C_k^n z^{(k)} y_1^{(n-k)} + L_1 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} z^{(k)} y_1^{(n-1-k)} + \ldots + L_{n-1} z' y_1 = \varphi(x) \qquad (3)$$

بفرض أنه $z' = u$ فتتحول المعادلة (٣) الي

$$L_0 \sum_{k=1}^{n} C_k^n u^{(k-1)} y_1^{(n-k)} + L_1 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} u^{(k-1)} y_1^{(n-k-1)} + \ldots + L_{n-1} u\, y_1 = \varphi(x)$$

ويمكن وضع المعادلة الاخيرة على الصورة:

$$(\bar{L}_1 D^{n-1} + \bar{L}_2 D^{n-2} + \ldots + \bar{L}_n) u(x) = \bar{\varphi}$$

حيث $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \ldots, \bar{L}_n, \bar{\varphi}$ دوال للمتغير x. و هذه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة من الرتبة $(n-1)$ في المتغير u

حيث $u = z'$. أي أن التعويض $y = zy_1$ أوجد معادلة تفاضلية من رتبة تقل بمقدار الواحد عن المعادلة الأصلية.

مثال (١)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = (x-2)e^{2x} \qquad (1)$$

الحل

واضح أن $y = e^x$ حل للمعادلة المختزلة لأن

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= xe^x - 2(x+1)e^x + (x+2)e^x = e^x(x - 2x - 2 + x + 2) = 0 \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

نفرض أن الحل العام على الصورة

$$y = e^x z(x)$$

فيكون

$$y' = e^x (z' + z)$$
$$y'' = e^x (z'' + 2z' + z)$$

بالتعويض في المعادلة (١)

$$xe^{x}(z''+2z'+z)-2(x+1)e^{x}(z'+z)+(x+2)e^{x}z=(x-2)e^{2x}$$
$$xz''+(2x-2x+2)z'+(x-2x-2+x-2)z=(x-2)e^{x}$$
$$xz''-2z'=(x-2)e^{x}$$

بوضع $z'=u$ نجد ان المعادلة السابقة تتحول الي

$$u'-\frac{2}{x}u=\left(1-\frac{2}{x}\right)e^{x}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في u عاملها المكامل

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^{2}}$$

و بالتالي يكون حلها

$$\frac{u}{x^{2}}=\int\frac{1}{x^{2}}e^{x}dx-\int\frac{2}{x^{3}}e^{x}dx+c_{1}=\int\frac{1}{x^{2}}d(e^{x})-\int\frac{2}{x^{3}}dx+c_{1}$$
$$=\frac{1}{x^{2}}e^{x}+\int\frac{2}{x^{3}}e^{x}dx-\int\frac{2}{x3}e^{x}dx+c_{1}=\frac{1}{x^{2}}e^{x}+c_{1}$$
$$\therefore u=e^{x}+c_{1}x^{2}$$

$$z'=e^{x}+c_{1}x^{2}\quad\Rightarrow\quad z=\int e^{x}dx+c_{1}\int x^{2}dx+c_{2}=e^{x}+\frac{c_{1}x^{3}}{3}+c_{2}$$

ويكون الحل العام هو

$$y=e^{x}z=e^{x}(e^{x}+c_{3}x^{3}+c_{2})$$
$$=e^{2x}+e^{x}(c_{3}x^{3}+c_{2})$$

(٦.٤) طرق أخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

أولاً : الصورة القياسية : "The normal form"

نعتبر المعادلة التفاضلية

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (1)$$

بفرض أن

$$y=u(x)z(x) \qquad (2)$$

و بالتالي يكون

$$y'=uz'+u'z\quad,\quad y''=uz''+2u'z'+u''z$$

وبالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة التفاضلية (١) نحصل على

$$(uz'' + 2u'z' + u''z) + p(uz' + u'z) + quz = f(x)$$

وبإعادة تجميع حدود هذه المعادلة حسب معاملات u'', u', u يكون لدينا

$$u'' + \left(\frac{2z'}{z} + p\right)u' + \frac{1}{z}(z'' + pz' + qz)\, u = \frac{f(x)}{z} \qquad (3)$$

نختار الأن z بحيث ينعدم معامل u' في المعادلة (٣) أي بحيث يكون

$$\frac{2z'}{z} + p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}pdx$$

و منها يكون

$$z = e^{-\frac{1}{2}\int pdx} \qquad (4)$$

وبالتعويض عن $z(x)$ من (٤) في (٢) نحصل علي

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int pdx}$$

من المعادلة (٤) يكون لدينا

$$z' = -\frac{1}{2}pe^{-\frac{1}{2}\int pdx} = -\frac{1}{2}pz$$

$$z'' = -\frac{1}{2}(p'z + pz') = \left(-\frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p^2\right)z \qquad (5)$$

وبالتعويض عن z, z', z'' في (٣) نحصل على

$$u'' + Iu = f(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int pdx\right) \qquad (6)$$

حيث

$$I = \frac{1}{z}(z'' + pz' + qz) = \frac{1}{z}[(-\frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p^2)z + p(-\frac{1}{2}pz) + qz]$$

$$= -\frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 + q$$

ومنها

تسمي المعادلة التفاضلية (٦) التي لا تحتوى على حد به u' بالصورة القياسية "Normal form" للمعادلة التفاضلية المعلومة (١) وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية الآتية

نظرية (١)

باستخدام التحويل

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int p dx}$$

تتحول المعادلة التفاضلية (١) إلى الصورة القياسية

$$u'' + Iu = f_1(x)$$

حيث

$$I = q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 \quad , \; f_1(x) = f(x)e^{\frac{1}{2}\int p dx}$$

ويسمى I باللامتغير Invariant في الصورة القياسية.

ملحوظة

إذا كان اللامتغير I في الصورة القياسية (٦) كمية ثابتة أو على الصورة $\dfrac{\alpha}{(\beta x + \gamma)^2}$ ، حيث α, β, γ ثوابت فإن المعادلة (٦) تصبح ذات معاملات ثابتة أو على صورة معادلة "أويلر" على الترتيب وهذه يمكن حلها كما سبق.

تعريف

إذا كانت المعادلتان التفاضليتان

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + q_1(x)y_1 = 0 \quad , \quad y_2'' + p_2(x)y_2' + q_2(x)y_2 = 0$$

لهما نفس اللامتغير فإنه يقال أنهما متكافئتان.

مثال (١)

بالتحويل إلى الصورة القياسية أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3 \sec x \qquad (x < 0) \qquad (1)$$

الحل

نكتب المعادلة التفاضلية في الصورة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

أذن

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = x \sec x$$

واضح أن

$$p = -\frac{2}{x} \ , q = 1 + \frac{2}{x^2} \ \ , \ f(x) = x \sec x$$

باستخدام التحويل

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int p dx} = ue^{\int \frac{1}{x} dx} = ux \qquad (2)$$

تتحول المعادلة التفاضلية (١) إلى الصورة القياسية

$$u'' + Iu = f_1(x) = f(x)e^{\frac{1}{2}\int p dx} = x \sec x e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \sec x$$

نحسب الان

$$I = q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 = (1 + \frac{2}{x^2}) - \frac{1}{2}(\frac{2}{x^2}) - \frac{1}{4}(-\frac{2}{x})^2$$
$$= (1 + \frac{2}{x^2}) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1$$

أذن تكون الصورة القياسية للمعادلة التفاضلية (١) هي

$$u'' + u = \sec x \qquad (3)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة. الحلان المستقلان خطياً للمعادلة المختزلة المناظرة لها

$$u_1 = \cos x, \quad u_2 = \sin x$$

نكتب الحل العام للمعادلة (٣) في الصورة

$$u = z_1(x)u_1 + z_2(x)u_2$$
$$= z_1(x)\cos x + z_2(x)\sin x$$

حيث z_1', z_2' تحققان

$$z_1'\cos x + z_2'\sin x = 0$$
$$-z_1'\sin x + z_2'\cos x = \sec x$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن

$$z_1' = -\tan x, \quad z_2' = 1$$

بالتكامل

$$z_1 = \ln|\cos x| + b_1, \quad z_2 = x + b_2$$

b_1, b_2 ثابتان اختياريان. و يكون الحل العام للمعادلة هو

$$u = (\ln|\cos x| + b_1)\cos x + (x + b_2)\sin x$$
$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

بالتعويض في (٢) ينتج أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y = xu = x(c_1 \cos x + c_2 \sin x + c\,os x \ln|\cos x| + x \sin x)$$

مثال(٢)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 2x^3 y' + (x^4 + x^2 + \frac{1}{4})y = 0 \qquad (x > 0)$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2})y = 0 \qquad (1)$$

حيث

$$p = 2x, \quad q = x^2 + \frac{1}{4x^2} + 1$$

نستخدم التحويل

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int p dx} = ue^{-\int x dx} = ue^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (2)$$

فتصبح المعادلة التفاضلية (١) في الصورة القياسية

$$u'' + Iu = 0$$

حيث

$$I = q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 = (x^2 + \frac{1}{4x^2} + 1) - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}(4x^2) = \frac{1}{4x^2}$$

أذن تكون لدينا معادلة أويلر

$$u'' + \frac{1}{4x^2}u = 0$$

أي

$$4x^2u'' + u = 0 \qquad (3)$$

بوضع $x = e^t$

في المعادلة (٣) نحصل على المعادلة الخطية ذات المعاملات الثابتة

$$4(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}) + u = 0$$

أي

$$4u'' - 4u' + u = 0 \qquad (4)$$

المعادلة المساعدة

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2\alpha - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \ , \ \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

وأذن الحل العام للمعادلة (٤) هو

$$u = e^{\frac{1}{2}t}(c_1 + c_2 t) = x^{\frac{1}{2}}(c_1 + c_2 \ln x)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان. و باستخدام (٢) يكون الحل العام للمعادلة الأصلية (١) هو

$$y = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}(c_1 + c_2 \ln x)$$

مثال(٣)

أثبت أن المعادلتين

$$y'' - xy' + 2y = 0 \qquad (1)$$
$$z'' + xz' + 3z = 0 \qquad (2)$$

متكافئتان وأوجد العلاقة بين y, z .

الحل

نوجد اللامتغير I_1 للمعادلة (١) واللامتغير I_2 للمعادلة (٢)

$$I_1 = q_1 - \frac{1}{2}p_1' - \frac{1}{4}p_1^2 = 2 - \frac{1}{2}(-x)' - \frac{1}{4}(-x)^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}x^2$$
$$I_2 = q_2 - \frac{1}{2}p_2' - \frac{1}{4}p_2^2 = 3 - \frac{1}{2}(x)' - \frac{1}{4}x^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}x^2$$

وحيث أن $I_1 = I_2$ ، أذن المعادلتين (١) ، (٢) لهما نفس الصورة القياسية أي هما متكافئتان .

نوجد الان العلاقة بين y, z . حيث

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} = ue^{\frac{1}{2}\int x dx} = ue^{\frac{1}{4}x^2}$$
$$z = ue^{-\frac{1}{2}\int p_2 dx} = ue^{-\frac{1}{2}\int x dx} = ue^{-\frac{1}{4}x^2}$$

(لان المعادلتين لهما نفس الصورة القياسية) . أذن بالقسمة يكون $\frac{y}{z} = e^{\frac{1}{2}x^2}$ أي $y = ze^{\frac{1}{2}x^2}$

ثانيا : تحليل المؤثر:" **"Factorization of the operator**

نعتبر المعادلة التفاضلية

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

أو في الصورة

$$\left\{D^2 + p(x)D + q(x)\right\}y = f(x), \; (D \equiv \frac{d}{dx})$$

فإذا أمكن تحليل هذه المعادلة في الصورة

$$\{D + q_1(x)\}\{D + q_2(x)\}y = f(x) \qquad (2)$$

فإننا نضع

$$(D + q_2)y = z(x) \qquad (3)$$

وبذلك تؤول المعادلة (٢) إلى معادلة خطية من الرتبة الأولى في z

$$(D + q_1)z(x) = f(x) \qquad (4)$$

وهذه المعادلة يمكن حلها بسهولة ومنها نحصل على z بدلالة x ثم نعوض عن z في المعادلة (٣) فنحصل على معادلة خطية من الرتبة الأولى في y وبحلها نحصل على الحل y بدلالة x . وهذا يعنى أن معادلة الرتبة الثانية (٢) تؤول إلى معادلتين خطيتين من الرتبة الاولى وهما المعادلتين (٤) و (٣) . و ينبغي أن نلاحظ أن التحليل هنا يختلف عنه في حالة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة. اذ أن العوامل هنا تحتوى على المتغير المستقل ، وبذلك تكون على وجه العموم غير قابلة للمبادلة بالنسبة لحاصل الضرب.

نظرية (٢)

الشرط اللازم والكافي لكي يكون المؤثران

$$D+q_1(x)\ ,\ \ D+q_2(x)$$

قابلين للمبادلة بالنسبة لحاصل الضرب هو أن يكون

$$q_2'(x)=q_2'(x)$$

أي

$$q_1(x)=q_2(x)+\mathrm{c}$$

حيث c ثابت أخياري.

مثال (١)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+2)y''-(2x+5)y'+2y=2(x+2)^2e^{2x}\ , \quad (x\neq -2)$$

الحل

نكتب المعادلة التفاضلية في الصورة

$$\left\{(x+2)D^2-(2x+5)D+2\right\}y=2(x+2)^2e^{2x} \qquad (1)$$

بتحليل الطرف الأيسر من هذه المعادلة نحصل على

$$\{(x+2)D^2-(2x+5)D+2\}=\{(x+2)D-1)\}(D-2)y$$

وذلك لان

$$\begin{aligned}\{(x+2)D-1\}(D-2)y &= \{(x+2)D-1)\}(y'-2y)\\ &= (x+2)y''-(2x+5)y'+2y\end{aligned}$$

وبذلك تصبح المعادلة (١) في الصورة

$$\{(x+2)(D-1)\}(D-2)y=2(x+2)^2e^{2x} \qquad (2)$$

بوضع

$$(D-2)y=z(x) \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (٢) نحصل على

$$\{(x+2)D-1\}z=2(x+2)^2e^{2x}$$

أي

$$z' - \frac{1}{x+2} z = 2(x+2)e^{2x} \qquad (4)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى في z . لحل هذه المعادلة الخطية نستخدم العامل المكامل التالي

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x+2}dx} = e^{-\ln|x+2|} = \frac{1}{x+2}$$

ويضرب طرفي المعادلة (٤) في عامل التكامل نحصل على المعادلة التامة

$$d\left(\frac{z}{x+2}\right) = 2e^{2x}dx$$

وبالمكاملة يكون لدينا

$$z = (x+2)(e^{2x} + c_1) \qquad (5)$$

نعوض الان عن z من المعادلة (٥) في (٣) فنحصل على

$$(D-2)y = (x+2)(e^{2x} + c_1)$$

أي

$$y' - 2y = (x+2)(e^{2x} + c_1)$$

وهذه معادلة خطية من الرتبة الأولى في y و بإستخدام العامل المكامل

$$\mu(x) = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$$

و بالتالي نحصل على

$$d(ye^{-2x}) = (x+2)(1 + c_1 e^{-2x})$$

وبالمكاملة نجد أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}\left(\int \{(x+2) + c_1(x+2)e^{-2x}\}dx + \mathrm{c}_2\right) \\ &= e^{2x}\left\{\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{4}c_1(2x+5)e^{-2x} + \mathrm{c}_2\right\} \\ &= c_1'(2x+5) + c_2 e^{2x} + \frac{x}{2}(x+4)e^{2x}, \quad (c_1' = -\frac{1}{4}c_1) \end{aligned}$$

حيث c_1', c_2 ثابتان اختياريان

مثال(٢)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - (2x + \frac{3}{x})y' + 4y = 2 \quad (x > 0)$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$\{D^2 - (2x + \frac{3}{x})D + 4\}y = 2 \qquad (1)$$

نحلل الطرف الأيسر من هذه المعادلة

$$\text{L.H.S} = (D - \frac{3}{x})(D - 2x)y$$

ويمكن التحقق من ذلك كما يلى

$$(D - \frac{3}{x})(D - 2x)y = (D - \frac{3}{x})(y' - 2xy) = y'' - 2y - 2xy' - \frac{3}{x}y' + 6y$$
$$= y'' - (2x + \frac{3}{x})y' + 4y$$

ونأخذ المعادلة (١) الصورة

$$(D - \frac{3}{x})(D - 2x)y = 2 \qquad (2)$$

نفرض ان

$$(D - 2x)y = z \qquad (3)$$

نعوض من (٣) في (٢) وبذلك نحصل على المعادلة الخطية من الرتبة الأولى

$$(xD - 3)z = 2x$$

أي

$$z' - \frac{3}{x}z = 2 \qquad (4)$$

وباستخدام العامل المكامل

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = \frac{1}{x^3}$$

نحصل على المعادلة التامة

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x^3}\right)=\frac{2}{x^3}$$

وبالمكاملة ينتج أن حل المعادلة (٤) هو

$$z=c_1x^3-x \qquad (5)$$

وبالتعويض عن z من (٥) في (٣) نحصل على المعادلة الخطية من الرتبة الأولى

$$y'-2xy=c_1x^3-x$$

هذه معادلة خطية من الرتبة الاولي عاملها المكامل هو

$$\mu(x)=e^{-\int 2xd}=e^{-x^2}$$

و يكون حلها كالتالي

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x^2})=(c_1x^3-x)e^{-x^2}$$

$$ye^{-x^2}=\int(c_1x^2-1)xe^{-x^2}dx+c_2$$

$$=\int(c_1x^2-1)d\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)+c_2=-\frac{1}{2}(c_1x^2-1)e^{-x^2}-\frac{1}{2}c_1e^{-x^2}+c_2$$

$$y=c_1'(x^2+1)+c_2e^{x^2}+\frac{1}{2}\ ,\ c_1'=-\frac{1}{2}c_1$$

حيث c_1', c_2 ثابتان اختياريان.

ثالثاً : إيجاد قانون العلاقة بين حلي المعادلة المختزلة

نفرض أن المعادلة التفاضلية هي

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (1)$$

حيث p, q, f دوال للمتغير x

ونفرض أن $y=y_1$ حل للمعادلة المختزلة

$$y''+py'+qy=0$$

الحل العام للمعادلة (١) يمكن كتابته على الصورة

$$y=uy_1\ ,\ y'=u'y_1+uy_1'\ ,\ y''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية (١)

$$y_1 u'' + (2y_1' + py_1)u' + (y_1'' + py_1' + qy_1)u = f(x)$$

ولكن y_1 حل للمعادلة المختزلة، فيكون

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$u'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)u' = \frac{f}{y_1}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى في u' العامل المكامل لها هو

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)dx\right\} = \exp\{\ln y_1^2 + \int p dx\} = y_1^2 e^{\int p dx}$$

و يكون حلها كالتالي

$$\frac{d}{dx}(u'\mu) = \frac{f}{y_1}\mu \qquad \Rightarrow \qquad u'\mu = \int \frac{f}{y_1}\mu\, dx + c_2$$

$$u' = \frac{1}{\mu}\int \frac{f}{y_1}\mu dx + \frac{c_2}{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad u = \int\left\{\frac{1}{\mu}\int \frac{f}{y_1}\mu\, dx\right\}dx + \int \frac{c_2}{\mu}dx + c_1$$

الحل العام هو

$$y = c_1 y_1 + y_1 \int\left\{\frac{1}{\mu}\int \frac{f}{y_1}\mu dx\right\}dx + c_2 y_1 \int \frac{1}{\mu}dx$$

و يكون الحل الخاص هو

$$y_p = y_1 \int\left\{\frac{1}{\mu}\int \frac{f}{y_1}\mu dx\right\}dx$$

بينما الحل المكمل هو

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int\left\{\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}\right\}dx$$

$$y_2 = y_1 \int\left\{\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}\right\}dx \qquad (2)$$

وعلى ذلك فإنه لإيجاد الدالة المكملة للمعادلة (١) يكفى معرفة حل واحد للمعادلة المختزلة والقانون السابق (٢) يعطى الحل الأخر ويكون الحلان مستقلين خطياً. ويلاحظ انه من السهل في كثير من المعادلات معرفة حل المعادلة المختزلة بالتخمين والتحقق وذلك بفرض أن

$$y_1 = x\ ,\ y_1 = x^2\ ,\ y_1 = e^x\ ,\ y_1 = e^{-x}\ ,\ y_1 = e^{2x}$$

ثم بعد ذلك التحقق بالتعويض.

مثال (١)

حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

الحل

واضح أن $y_1 = e^x$ حل خاص للمعادلة لان

$$\text{L.H.S} = xe^x - 2(x+1)e^x + (x+2)e^x = 0 = \text{R.H.S}$$

و يعطي الحل الخاص الاخر من العلاقة

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \left\{ \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx} \right\} dx = e^x \int \left\{ e^{-2x} + e^{2\int (1+\frac{1}{x})dx} \right\} dx \\ &= e^x \int \left\{ e^{-2x} \; e^{2(x+\ln|x|)dx} \right\} dx = e^x \int \left\{ e^{-2x} \; e^{2x} x^2 \right\} dx \\ &= e^x \int x^2 dx = e^x \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

و يكون الحل العام

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 \frac{x^3}{3} e^x \\ &= (c_1 + c_2' x^3) e^x \quad , \qquad \left(c_2' = \frac{c_2}{3} \right) \end{aligned}$$

مثال (٢)

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - \frac{1}{(x-2)(x-1)}(xy' - y) = 0 \qquad (1)$$

الحل

واضح أن $y_1 = x$ حل خاص للمعادلة (١)، فيكون الحل الاخر

$$y_2 = y_1 \int \left\{ \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} \right\} dx = x \int \left\{ \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{(x-2)(x-1)} dx} \right\} dx$$

ولكن

$$\int \frac{x}{(x-2)(x-1)} dx = \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = 2\ln|x-2| - \ln|x-1| = \ln \frac{(x-2)^2}{x-1}$$

فيكون الحل الخاص الاخر

$$y_2 = x \int \left\{ \frac{1}{x^2} e^{\ln \frac{(x-2)^2}{x-1}} \right\} dx = x \int \frac{1}{x^2} \frac{(x-2)^2}{x-1} dx = x \int \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2(x-1)} dx$$

$$= x \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x^2} \right) dx$$

$$= x \left\{ \ln|x-1| + \frac{4}{x} \right\} = 4 + x \ln|x-1|$$

الحل العام هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$= c_1 x + c_2 \{4 + x \ln(x-1)\}$$

رابعا : المعادلات التامة : "Exact equations"

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x) \qquad (1)$$

تكون تامة أذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يكون تفاضلها هي المعادلة المعطاة (١).

و بتعبير أخر : يقال أن المعادلة (١) تكون تامة ، أذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

فمثلاً المعادلة التفاضلية

$$(x^2 + 1) y'' + 3xy' + y = 6x$$

تامة ، لأننا إذا فاضلنا معادلة الرتبة الأولى

$$(x^2 + 1) y' + xy = 3x^2$$

نحصل على المعادلة التفاضلية المعطاة.

نظرية (٣)

الشرط اللازم والكافي لكى تكون المعادلة التفاضلية (١) تامه هو

$$a_0'' - a_1' + a_2 = 0$$

وعندئذ يكون التكامل الأول للمعادلة (١) هو

$$a_0 y' + (a_1 - a_0')y = \int f(x)dx + c_1$$

حيث c_1 ثابت اختياري.

البرهان

بمكاملة المعادلة التفاضلية (١) نحصل على

$$\int a_0 y'' dx + \int a_1 y' dx + \int a_2 y dy = \int f(x)dx \qquad (2)$$

وحيث أن

$$\int a_0 y'' dx = a_0 y' - \int a_0' y' dx = a_0 y' - a_0' y + \int a_0'' y dx \qquad (3)$$

$$\int a_1 y' dx = a_1 y - \int a_1' y dx \qquad (4)$$

بالتعويض من (٤) و (٣) في (٢) نحصل على

$$\int (a_0'' - a_1' + a_2) y dx + a_0 y' + (a_1 - a_0')y = \int f(x)dx + c_1 \qquad (5)$$

حيث c_1 ثابت اختياري.

وعلى ذلك يكون الشرط اللازم لمكاملة المعادلة (١) مباشرة هو أن ينعدم معامل y في الدالة التي بعد علامة التكامل في (٥)

أي أن الشرط اللازم هو

$$a_0'' - a_1' + a_2 = 0 \qquad (6)$$

وبعكس الخطوات السابقة للبرهان ينتج أن هذا الشرط كاف. كذلك وباستخدام (٦) تؤول المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية (١) إلي المعادلة الخطية من الرتبة الاولى

$$a_0 y' + (a_1 - a_0')y = \int f(x)dx + c_1$$

وهذه يمكن حلها بسهولة.

ملاحظة

إذا كانت المعادلة التفاضلية (١) ليست تامة أي إذا لم يتحقق الشرط (٦) فإنه قد يكون من الممكن أن نجد عاملا مكاملاً لها و بضرب هذا العامل المكامل في المعادلة تتحول الي تامة و تحل كما سبق.

مثال (١)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2+1)y''+4xy'+2y=2(\cos x-x)$$

الحل

هنا

$$a_0=x^2+1\ ,\ a_1=4x\ ,\ a_2=2$$

و يكون

$$a_0''-a_1'+a_2=2-4+2=0$$

أذن المعادلة التفاضلية تكون تامة. ويكون التكامل الأول لهذه المعادلة هو

$$a_0y'+(a_1-a_0')y=\int f(x)dx+c_1$$

أي

$$y'+\frac{2x}{x^2+1}y=\frac{2\sin x-x^2+c_1}{x^2+1}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وتحل كما يلى بالضرب في العامل المكامل

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}=e^{\ln(x^2+1)}=x^2+1$$

نحصل على المعادلة التامة

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)y\right]=2\sin x-x^2+c_1$$

ومنها يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{x^2+1}\int(2\sin x-x^2+c_1)dx\\&=\frac{1}{x^2+1}\left(c_1x+c_2-2\cos x-\frac{x^3}{3}\right)\end{aligned}$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان.

مثال (٢)

اوجد الحل العام للمعادلة

$$xy'' + (3-2x)y' - 2y = e^{2x} \quad (x>0)$$

الحل

حيث أن

$$a_0'' - a_1' + a_2 = 0 + 2 - 2 = 0$$

إذن المعادلة تامة. ويكون التكامل الأول هو

$$a_0 y' + (a_1 - a_0')y = \int f(x)dx + c_1$$

أي

$$xy' + (3-2x-1)y = \int e^{2x}dx + c_1$$

ومنها

$$y' + 2(\frac{1}{x} - 1)y = \frac{e^{2x}}{2x} + \frac{c_1}{x}$$

وباستخدام العامل المكامل

$$\mu(x) = e^{2\int(\frac{1}{x}-1)dx} = e^{2\ln|x| - 2x} = x^2 e^{-2x}$$

نحصل على المعادلة التامة

$$\frac{d}{dx}(yx^2e^{-2x}) = \frac{x}{2} + c_1 x e^{-2x}$$

وبالمكاملة ينتج أن الحل العام هو

$$yx^2e^{-2x} = \frac{x^2}{4} + c_1\int xe^{-2x}dx + c_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}c_1(2x+1)e^{-2x} + c_2$$

$$y = c_1'(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) + c_2\frac{e^{2x}}{x^2} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

حيث c_1', c_2 ثابتان اختياريان $(c_1' = -\frac{1}{4}c_1)$.

مثال(٣)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - (2 - \frac{3}{x}) y' - \frac{2}{x} y = \frac{e^{2x}}{x} \qquad (x > 0)$$

الحل

حيث أن

$$a_0'' - a_1' + a_2 = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} \neq 0$$

أذن المعادلة ليست تامة. بفرض أن $z = z(x)$ عامل مكامل لهذه المعادلة و بضرب طرفي المعادلة المعطاة في هذا العامل المكامل نحصل على

$$zy'' - z(2 - \frac{3}{x}) y' - z\frac{2}{x} y = z\frac{e^{2x}}{x} \qquad (*)$$

الشرط اللازم والكافي لكى تكون المعادلة (*) تامة هو

$$z'' + (2 - \frac{3}{x}) z' + (\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}) z = 0$$

بمجرد النظر نرى أن $z = x$ حل خاص لهذه المعادلة وبوضع $z = x$ في (*) نحصل على المعادلة التامة .

$$xy'' - (2x - 3) y' - 2y = e^{2x}$$

وهى نفس المعادلة التفاضلية المعطاة في مثال (٢) وتحل كماسبق.

تمارين (٤)

١.أوجد الحل العام المعادلات التفاضلية (الخطية) التالية

$$(1)(x^3D^3+2xD-3)y=x^2\ln x+3x \qquad (2)\ (x^2D^2-3xD+4)y=4x^4$$

$$(3)(x^2D^2+xD)y=12\ln x \qquad (4)(x^2D^2-2)y=2x+\frac{6}{x}$$

$$(5)(x^2D^2-xD+4)y=\cos\ln x+x\sin\ln x$$

$$(6)(x^3D^3+3x^2D^2+xD+8)y=65\cos\ln x$$

$$(7)(x^4D^4+2x^3D^3+x^2D^2-xD+1)y=\ln x$$

$$(8)\{x^2D^2-2nxD+n(n+1)\}y=e^x x^{n+2} \qquad (9)(x^2D^2-2xD+2)y=x^3\sin x$$

$$(10)\{(1+x)^2D^2+(1+x)D+1\}y=4\cos\ln(x+1)$$

$$(11)\{(x+2)^2D^2-(x+2)D+1\}y=3x+4$$

$$(12)\{(x+1)^2D^2+(x+1)D-1\}y=\ln(x+1)^2+x-1$$

$$(13)\{(1+2x)^2D^2-6(1+2x)D+16\}y=8(1+2x)^2$$

٢.(باستخدام طريقة لاجرانج) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية:

$$(1)y''+y=\cot x, \qquad (2)y''+y=\sec x$$

$$(3)y''+y=-\frac{1}{x^2}\sin x+\frac{2}{x}\cos x, \qquad (4)y''+y=\operatorname{cosec}x\ \cot x$$

$$(5)\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=t\cos t, \qquad (6)y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$$(7)y''-2y'+y=\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}, \qquad (8)y''-y=\frac{2}{1+e^x}$$

$$(9)y''+y=\ln\cos x, \qquad (10)2x^2y''+7xy'+3y=\cos\sqrt{x}$$

$$(11)y''-4y'+3y=\frac{1}{1+e^{-x}} \qquad (12)\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=t\cos t,$$

$$(13)\; y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^{2}} \qquad (14)\; y''-2y'+y=\frac{e^{2x}}{(x+1)^{2}},$$

$$(15)\; y''-y=\frac{2}{1+e^{x}} \qquad (16)\; y''+y=\ln\cos x$$

$$(17)\; 2x^{2}y''+7xy'+3y=\cos\sqrt{x}$$

$$(18)\; y''-4y'+3y=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

٣.أوجد الحل العام المعادلات التفاضلية الأتية (بمعلومية أحد حلول المعادلة المختزلة)

$$(1)\; xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=(x^{2}+x-1)e^{2x} \qquad (2)\; (1-x)y''+xy'-y=0$$

$$(3)\; y''+2y'+y=\frac{1}{(e^{x}-1)^{2}}$$

$$(4)\; (x+1)y''+xy'-y=4(x+1)^{2}$$

$$(5)\; (x+2)y''-(2x+5)y'+2y=(x+1)e^{x}+1$$

$$(6)\; x^{2}y''-x(x+2)y'+(x+2)y=x^{3}+x+2$$

$$(7)\; (x^{2}+2x+2)y''-(3x^{2}+8x+8)y'+(2x^{2}+6x+6)y=(x^{2}+2x+2)^{2}e^{2x}$$

$$(8)\; x(x-2)y''-2(x-1)y'+2y=0\;,\quad y=x-1 \text{ is particular solution}$$

٤.بالتحويل الى الصورة القياسية أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية

$$(1)\; x^{2}y''-2x^{2}y'+(x^{2}-6)y=0$$

$$(2)\; x^{2}y''-2x(2x+3)y'+4(3x^{2}+3x+3)y=0$$

$$(3)\; x^{2}y''-2xy'+(x^{2}+2)y=2x^{3}e^{x}$$

$$(4)\; y''+2xy'+(x^{2}-8)y=81x^{2}e^{-\frac{1}{2}x^{2}}$$

$$(5)\; y''-2y'\cot y+2y\cot^{2}x=3\sin 2x$$

$$(6)\; x^{2}y''+2x(2-x)y'+(2-4x+37x^{2})y=0$$

$$(7)\; y''-2xy'+(x^{2}+2)y=e^{\frac{1}{2}(x^{2}-2x)}$$

$$(8)\; x^{2}y''+(x^{2}-2x)y'-(2x^{2}+x-2)y=x^{4}e^{x}$$

٥.(باستخدام تحليل المؤثر) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية

$$(1)\{xD^2-(x+2)D+2\}y=x-1$$

$$(2)\{xD^2-(3x+1)D+3\}y=2(1-x)e^x$$

$$(3)\{(x+1)D^2-(3x+4)D+3\}y=(3x+2)e^{3x}-3$$

$$(4)(x+1)y''-(x+3)y'+2y=(1-x)\sin x-(3+x)\cos x$$

$$(5)(x+2)y''-(2x+5)y'+2y=(x+2)^2e^{x-1}$$

$$(6)xy''-3y'+\frac{3}{x}y=2x^2-x-\frac{1}{x} \qquad (x\succ 0)$$

$$(7)xy''+(x-1)y'-y=x^2$$

٦.أوجد الحل العام المعادلات الأتية باستخدام قانون العلاقة بين حلى المعادلة المختزلة

$$(1)x(x-2)y''-2(x-1)y'+2y=0$$

$$(2)(x^2-1)y''+xy'-y=0$$

(3) $xy''+(x-1)y'-y=0$ ($y=x-1$ حل)

(4) $\tan^2 x\,y''-2\tan x\,y'+(2+\tan^2 x)y=0$, ($y=\sin x$ حل)

$$(5)(x^2+2x+2)y''-(3x^2+8x+8)y'+(2x^2+6x+6)y=0$$

٧.أثبت أن المعادلات الأتية تامة ثم أوجد حلها العام

$$(1)(1-x^2)y''+(1-3x)y'-y=0$$

$$(2)x(1+x)y''+(x-1)y'-y=x^2$$

$$(3)x(1+x)y''-2y'-2y=x^3$$

$$(4)xy''+(3+2x)y'+2y=2+e^{-2x}$$

$$(5)(x^2+2x+2)y''+4(x+1)y'+2y=(x^2+6x+8)e^x$$

$$(6)(2x^2+3x)y''+(6x+3)y'+2y=(x+1)e^x$$

المعادلات التفاضلية الخطية الآنية

(١.٥) المعادلات التفاضلية الخطية الآنية

نفرض المتغيرات $y_1, y_2, \ldots., y_n$ دوال للمتغير x ، $D \equiv \dfrac{d}{dx}$. نفرض أن هذه المتغيرات تحقق المعادلات التفاضلية الخطية الأتية

$$\left.\begin{array}{l} F_{11}(D)y_1 + F_{12}(D)y_2 + \cdots + F_{1n}(D)y_n = \varphi_1(x) \\ F_{21}(D)y_1 + F_{22}(D)y_2 + \cdots + F_{2n}(D)y_n = \varphi_2(x) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ F_{n1}(D)y_1 + F_{n2}(D)y_2 + \cdots + F_{nn}(D)y_n = \varphi_n(x) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

حيث $F_{11}, F_{12}, \cdots, F_{1n}$ ، $F_{21}, F_{22}, \cdots, F_{2n}$ ، ... ، $F_{n1}, F_{n2}, \cdots, F_{nn}$ هي كثيرات حدود في المؤثر التفاضلي D. و المطلوب حل هذه المعادلات معا لإيجاد $y_1, y_2, \ldots., y_n$ بدلالة x.

الطريقة المتبعة تشبه الطريقة الجبرية لحل المعادلات الأنية أي كما لو كانت $F_{11}, F_{12}, \ldots., F_{1n}$ معاملات ثابتة.

أذا رمزنا لمحدد المعاملات لمجموعه المعادلات (١) بالرمز Δ ورمزنا للمحددات الناتجة من المحدد Δ باستبدال الأعمدة الأولى والثانية ، ... و الاخيرة على الترتيب بالعمود الذى عناصره $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ بالرموز $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. فيكون المحدد Δ هو كثيرة حدود في المؤثر التفاضلي D بينما المحددات $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ دوال للمتغير x. من نظرية المعادلات الأتية الخطية فإن حل المجموعة (١) تحدده العلاقات التالية

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y_1 = \Delta_1 \\ \Delta y_2 = \Delta_2 \\ \ \vdots \qquad \vdots \\ \Delta y_n = \Delta_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

العلاقات (٢) تكون n من المعادلات التفاضلية الخطية ذوات معاملات ثابتة رتبة كل منها على الأكثر هي درجة كثيرة الحدود Δ. نفرض أن Δ من الدرجة r في D فيكون الحل العام لكل متغير يحتوى على r من الثوابت الاختيارية وبذلك نحصل على nr من الثوابت الاختيارية بالتعويض عن $y_1, y_2, \ldots., y_n$ في المعادلات التفاضلية (١) نحصل على متطابقات في x ومنها وبمقارنة المعاملات نحصل على $(n-1)r$ من العلاقات بين الثوابت الاختيارية التي عددها nr فيتبقى لدينا r من الثوابت المستقلة وهو العدد الواجب وجوده في حلول المعادلات (١) لأن Δ من الدرجة r في D

طريقة أخرى

في بعض المعادلات يكون من الممكن الحذف بين المعادلات للحصول على معادلة تحتوى على أحد المتغيرات وليكن y_1 ثم نحل المعادلة الناتجة في y_1 وبطريقة مماثلة يمكن الحصول على باقي المتغيرات .

مثال(١)

أوجد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين الآنيتين

$$\frac{dy}{dt}-x+3y=9e^{2t} \quad , \quad \frac{dx}{dt}+2x-2y=5e^{t}$$

ثم أوجد الحل الذى يحقق الشروط $x(0)=y(0)=2$.

الحل

نكتب المعادلتين على الصورة

$$-x+(D+3)y=9e^{2t} \qquad (1)$$

$$(D+2)x-2y=5e^{t} \qquad (2)$$

نحذف أولاً y بين المعادلتين وذلك بضرب (١) في ٢ والتأثير على (٢) بالمؤثر $(D+3)$ والجمع فينتج أن

$$\{-2+(D+3)(D+2)\}x=18e^{2t}+(D+3)(5e^{t})$$

منها نحصل علي

$$(D^2+5D+4)x=18e^{2t}+20e^{t} \qquad (3)$$

المعادلة المساعدة

$$m^2+5m+4=0 \;\Rightarrow\; (m+1)(m+4)=0 \;\Rightarrow\; m_1=-1 \;,\; m_2=-4$$

الحل المكمل

$$x_c=c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}$$

الحل الخاص

$$x_p=\frac{1}{D^2+5D+4}\{18e^{2t}+20e^{t}\}$$
$$=\frac{18}{4+10+4}e^{2t}+\frac{20}{1+5+4}e^{t}=e^{2t}+2e^{t}$$

و يكون الحل العام

$$x=x_c+x_p=c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}+e^{2t}+2e^{t} \qquad (4)$$

نكرر نفس الطريقة لحذف x فنؤثر على (١) بالمؤثر $(D+2)$ ونجمع مع (٢) فينتج أن

$$\{(D+2)(D+3)-2\}y = (D+2)(9e^{2t})+5e^{t}$$

منها نحصل علي

$$(D^2+5D+4)y = 36e^{2t}+5e^{t} \qquad (5)$$

الحل المكمل

$$y_c = c_3e^{-t}+c_4e^{-4t}$$

الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{D^2+5D+4}\{36e^{2t}+5e^{t}\} = 2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}$$

الحل العام

$$y = y_c+y_p = c_3e^{-t}+c_4e^{-4t}+2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t} \qquad (6)$$

الخطوة الأخيرة هي ايجاد علاقتين بين الثوابت c_3, c_4, c_1, c_2 وذلك لأن كلا من المعادلتين الأصليتين من الرتبة الأولى وحلها معا يجب أن يحتوى بالضبط على ثابتين اختياريين. و للحصول على العلاقات المطلوبة نعوض من (٦) و (٤) في أحدى المعادلتين الأصليتين. فبالتعويض في (٢) مثلا نجد أن

$$(D+2)(c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}+e^{2t}+2e^{t})-2y = 5e^{t}$$

$$(c_1e^{-t}-2c_2e^{-4t}+4e^{2t}+6e^{t})-2(c_3e^{-t}+c_4e^{-4t}+2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}) = 5e^{t}$$

$$(c_1-2c_3)e^{-t}-(2c_2+2c_4)e^{-4t} = 0$$

وحيث أن هذه العلاقة يجب أن تتحقق تطابقيا. إذن

$$c_3 = \frac{1}{2}c_1 \ , \ c_4 = -c_2$$

ويكون الحل العام للمعادلتين الآنيتين هو

$$x = c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}+e^{2t}+2e^{t}$$

$$y = \frac{1}{2}c_1e^{-t}-c_2e^{-4t}+2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}$$

وبالتعويض بالشرطين $x=y=2$ عندما $t=0$ نجد أن

$$2=c_1+c_2+3,\quad 2=\frac{1}{2}c_1-c_2+\frac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad c_1=-1\ ,\ c_2=0$$

ويكون الحل المطلوب هو

$$x=-e^{-t}+e^{2t}+2e^{t}\ ,\ y=-\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}$$

وفى بعض الحالات البسيطة –كما في هذا المثال – بعد الحصول على x يمكن اختصار العمل للحصول على y وذلك بالتعويض عن x من (٤) في (٢) فنجد

$$\begin{aligned}2y &= (D+2)(c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}+e^{2t}+2e^{t})-5e^{t}\\ &= c_1e^{-t}-2c_2e^{-4t}+4e^{2t}+6e^{t}-5e^{t}\\ y &= \frac{1}{2}c_1e^{-t}-c_2e^{-4t}+2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}\end{aligned}$$

ملحوظة

باستخدام المحددات يمكن الحصول على (٥) و (٣) كالاتي

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & D+3\\ D+2 & -2\end{vmatrix}=2-(D+3)(D+2)=-(D^2+5D+4)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}9e^{2t} & D+3\\ 5e^{t} & -2\end{vmatrix}=-18e^{2t}-20e^{t}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 9e^{2t}\\ D+2 & 5e^{t}\end{vmatrix}=-5e^{t}-36e^{2t}$$

$$\Delta x=\Delta_1\ ,\ \Delta y=\Delta_2$$

من ذلك نحصل على المعادلات (٥) و (٣).

مثال(٢)

حل مجموعة المعادلات

$$Dx+(D+1)y=1\qquad (1)$$
$$(D+2)x-(D-1)z=1\qquad (2)$$
$$(D+1)y+(D+2)z=0\qquad (3)$$

الحل

بطرح (٣) من (١) نحصل على

$$Dx-(D+2)z=1 \qquad (4)$$

المعادلة (٤) لا تحتوي y . نؤثر على (٢) بـ D وعلى (٤) بـ $(D+2)$ وبالطرح نجد

$$(5D+4)z=-2$$

ومنها

$$z=-\frac{1}{2}+c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

وبالتعويض عن z في (٣) نجد

$$(D+1)y=-(D+2)z=1-\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

و يكون الحل المكمل و الحل الخاص علي الصورة

$$y_c=c_2e^{-t}\quad ,\quad y_p=\frac{1}{D+1}\left\{1-\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}\right\}=1-6c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$y=y_c+y_p=1-6c_1e^{-\frac{4}{5}t}+c_2e^{-t}$$

وبالتعويض عن y ومشتقتها في (١) نجد أن

$$Dx=1-(D+1)y=\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

ومنها نحص علي

$$x=-\frac{3}{2}c_1e^{-\frac{4}{5}t}+c_3$$

و حيث أن

$$\begin{pmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -(D-1) \\ 0 & D+1 & D+2 \end{pmatrix}=-(5D^2+9D+4)$$

من الدرجة الثانية في D فهناك ثابتان اختياريان فقط في الحل العام ، وبالتعويض عن x, z في (٢) نجد

$$\left(\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}-3c_1e^{-\frac{4}{5}t}+2c_3\right)-\left(-\frac{4}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}+\frac{1}{2}-c_1e^{-\frac{4}{5}t}\right)=1\Rightarrow c_3=\frac{3}{4}$$

ويكون الحل العام هو

$$x=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}c_1e^{-\frac{4}{5}t},\quad y=1-6c_1e^{-\frac{4}{5}t}+c_2e^{-t},\ z=-\frac{1}{2}+c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

تمارين (٥)

أوجد الحل العام المعادلات التفاضلية الآنية الأتية

$(1)(D+5)x+2y=0\ ,\ Dx+(D+5)y=0$

$(2)(D+1)y=z+e^{x}\ ,\ \ (D+1)z=y+e^{x}$

$(3)(D+2)x+(D+1)y=0,\ \ (D+3)y+5x=0$

$(4)(D+3)y-2z=5,\ (D+3)z-2y=6e^{t}$

$(5)(D+2)x-2(D-2)y=0,\ (D-2)x+2(D+2)y=0$

$(6)(D-1)y+Dz=2x+1,\ (2D+1)y+2Dz=x$

$(7)(D-3)y+2(D+2)z=2\sin x\ ,\ 2(D+1)y+(D-1)z=\cos x$

$(8)(5D-11)y+(3D-7)z=e^{x}\ ,\ (3D-7)y+(2D-5)z=e^{2x}$

$(9)(3D+2)y+(2D-1)z=85\sin x\ ,\ (D-2)y+(D-3)z=8$

$(10)(2D^{2}+3)y+5z=2x^{2}+5\ ,\ 5y+(2D^{2}+3)\,\mathrm{z}=3-2\,\mathrm{x}^{2}$

$(11)(2D+2)y-(D+4)z=8\cos 2t,\ (3D+2)y-(D+6)z=4\sin 2t$

$(12)D^{2}x-4Dx+4x=y\ ,\ D^{2}y+4Dy+4y=25x+16e^{t}$

$(13)Dx-x-y+2z=e^{t}\ ,\ D^{2}x+Dy-z=0,\ Dx+x+y+z=0$

$(14)t\dfrac{dx}{dt}+y=0\ ,\ t\dfrac{dy}{dt}+x=0\ \ (15)\dfrac{dx}{dt}=2y\ ,\ \dfrac{dy}{dt}=2z\ ,\ \dfrac{dz}{dt}2x$

$(16)t^{2}D^{2}x+tDx+2y=0,\ t^{2}D^{2}y+t\dot{y}-2x=0$