كينماتيكا الجســـــــــيم

Kinematics of a Particle

لدراسة الظواهر الطبيعية للحركة بطريقة علمية يتعين علينا أن نتخذ صوراً ذهنية عن الصفات الميكانيكية للاجسام المتحركة دون غيرها من الصفات قليلة الأهمية في دراستنا للحركة. وعلى ذلك بُنيت التعاريف الأساسية و نُورد أهمها فيما يلي:

الجسيم: هو جزء معين من المادة و تعرف فيما يلي أنواع الاجسام

■ **الجسيم أو النقطة المادية Particle or Mass Point**

هو جزء من المادة و يشغل حيزاً صغيراً في الفراغ و يسمى النقطة المادية و نعتبر الجسيم إذا كانت صفات الجسيم من حيث الشكل أو الحجم غير ذات موضوع في دراستنا.

■ **الجسم المتماسك Rigid Body**

و هو جزء معين من المادة يظل حجمه و شكله بدون تغيّر مهما كانت القوى المــؤثرة عليــه حيث تبقى المسافة بين أي نقطتين من نقاطه بدون تغيير أي أن الجسم المعنيّ بالدراسة يُعتــبر متماسكاً إذا كان ما يعتريه من تغيرات في الشكل أو الحجم لا أهمية لا في الدراسة.

■ **الجسم المرن Elastic Body**

هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية بفعل القوى المؤثرة عليــه غــير أنــه يســترجع صورهاالأصلية بمجرد زوال هذه القوى.

■ **الجسم اللدن Plastic Body**

و هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية غير أنها –التغيرات– غير مسترجعة.

■ **الاطار الانتسابى (الفراغ الأقليدي) Reference Frame**

و هو فراغ ثلاثي الأبعاد – الطول و العرض و الارتفاع – ويفرض فيه ثبات المسافاتمن نقطة إلى أخرى و عدم تغيرها بوجود المادة أو حدوث حركة فيه. و تقاس المسافات بمقاييس معينة متفق عليها عالمياً ولتحديد الموضع (النسبي) في الفراغ يُختار هيكل أو اطار متماسك مــن

ثلاثة محاور متلاقية في نقطة معينة – تُسمى نقطة الأصل – و يسمى هيكل رصد الحركة ويتم تحديد موضع النقطة المادية بمعرفة أبعادها الثلاثة بالنسبة لهذا الهيكل و يفضل غالباً الاستعانة بهيكل رصد متعامد المحاور.

■ الزمن Time

و هو يعبر عن الفترة الزمنية بين حدثين و لقد افترضت الميكانيكا الكلاسيكية أو ميكانيكا نيوتن صفة مطلقة لكل من الزمن و الفراغ بمعنى أنهما لا يتغيران بتغير المشاهد ولا يتأثرا بحركة الراصد و هو ما نفاه ألبرت أينشتين في نظريتة النسبية.

■ الكلتة Mass

و تُعرف على أنها تلك المادة الموجودة في جسم ما ويرمز لها عادةً بالرمز m .

كينماتيكا الجسيم فى بعد واحد Kinematics of a Particle in One Dimension

أو الحركة فى خط مستقيم Rectilinear Motion

■ السرعة و العجلة Velocity and Acceleration

نعلم أنه عندما يتحرك جسيم (نقطة مادية) في خط مستقيم فإن موضعه بالنسبة لنقطة ثابتة O – نقطة الأصل – يتغير من نقطة إلى أخرى. باعتبار أن الجسيم احتل الموضع عند النقطة A و على بعد x من نقطة الأصل O عند اللحظة الزمنية t ثم انتقل إلى الموضع عند النقطة B و التي تبعد $x+\delta x$ عن نقطة الأصل عند اللحظة الزمنية $t+\delta t$ ومن ثم فإن متوسط سرعة الجسيم في قطع المسافة AB هو $\dfrac{\delta x}{\delta t}$. و إذا أردنا تعيين سرعة الجسيم v عند النقطـــة A نحسب قيمة $\dfrac{\delta x}{\delta t}$ عندما تقترب δt من الصفر أي عندما تقترب النقطة A من النقطـــة B ويُعبر عن ذلك رياضياً كالتالي

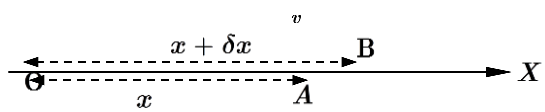
$$v=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta x}{\delta t}=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$$

وتُعرف سرعة الجسيم v بأنها معدل التغير في الازاحة بالنسبة للزمن و تُكتب $v=\dfrac{dx}{dt}$ ، أما العجلة a فتعرف على أنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن والتي تكتب علـــى الصـــورة الرياضية

$$a=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta v}{\delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$$

ومن قاعدة السلسة في حساب التفاضل يمكن كتابة العجلة على الصورة

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\times\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$



وهذه العلاقة من العلاقات الهامة في حل بعض المسائل، وحيث أن الازاحة والسرعة و العجلة هي كميات متجهة فيمكن تطبيق قوانين المتجهات عليها من جمع و طرح وتحليـــل اتجاهـــات و.....

■ تذكر أن

يمكن أن تُعطى عجلة الجسيم a في المسائل كدالة في الزمن t أو دالة في المسافة x أو دالة في السرعة v

١- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في الزمن t مثلا $a = \varphi(t)$

$$\begin{aligned} a = \varphi(t) \qquad &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi(t) \\ &\Rightarrow dv = \varphi(t)dt \\ &\Rightarrow v = \int \varphi(t)dt + c_1 \end{aligned}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} &\because \quad v = \int \varphi(t)dt + c_1 \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \int \varphi(t)dt + c_1 \\ &\Rightarrow dx = \quad \int \varphi(t)dt + c_1 \quad dt \\ &\therefore x \ = \int \quad \int \varphi(t)dt + c_1 \quad dt + c_2 \end{aligned}$$

٢- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في المسافة x مثلا $a = f(x)$

$$\begin{aligned} a = f(x) \qquad &\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = f(x) \\ &\Rightarrow vdv = f(x)dx \\ &\Rightarrow v^2 = 2\int f(x)dx + c_3 \end{aligned}$$

ايضاً

$$\begin{aligned} &\because \quad v^2 = 2\int f(x)dx + c_3 \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mp\sqrt{2\int f(x)dx + c_3} \\ &\Rightarrow \mp\frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx + c_3}} = dt \\ &\Rightarrow t + c_4 = \mp\int \frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx + c_3}} \end{aligned}$$

٣- أخيراً إذا كانت العجلة معطاة كدالة في السرعة v مثلا $a = \varphi(v)$ فإن

$$
\begin{aligned}
a = \varphi(v) \qquad & \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi(v) \\
& \Rightarrow \frac{dv}{\varphi(v)} = dt \qquad \text{بالتكامل} \\
& \Rightarrow t = \int \frac{dv}{\varphi(v)} + c_5
\end{aligned}
$$

أو باستخدام العلاقة

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \varphi(v) \\
& \Rightarrow \frac{vdv}{\varphi(v)} = dx \\
& \Rightarrow x = \int \frac{vdv}{\varphi(v)} + c_6
\end{aligned}
$$

حيث $c_1 - c_6$ ثوابت التكامل و يمكن تعيينها من شروط الحركة المعطاة في المسألة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثــ ١ ــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة يتعين من $x = t^3 + 2t^2$. أوجد مقدار كل من السرعة و العجلة بعد مضي ثانية واحدة.

الحــــــــل

يمكن تعيين السرعة والعجلة كالآتي

السرعة $$\because v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 4t$$

العجلة $$\because a = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$$

وبعد مضي ثانية واحدة يكون مقدار السرعة 7 ومقدار العجلة 10 من الوحدات.

مثــ ٢ ــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة زمنية يتعين من $x = t^3 - 3t^2$. أوجد مقــدار كل من السرعة و العجلة عند أي لحظة ، متى تنعدم كل من السرعة والعجلة وما هو موضع الجسيم عندما تكون سرعته 24 .

الحــــــــل

السرعة والعجلة للجسيم عند أي لحظة تتعين من

السرعة $$\because v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$$

العجلة $$\because a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6 = 6(t-1)$$

هاتان العلاقتان تعطيان السرعة والعجلة كدوال في الزمن ولتعيين زمن انعدام السرعة والعجلة نساويهما بالصفر أي أن

$$0 = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \qquad \Rightarrow t = 0 \quad \text{Or} \quad t = 2$$

$$0 = 6t - 6 = 6(t-1) \qquad \Rightarrow t = 1$$

أي أن سرعة الجسيم تساوي صفر عند بداية الحركة وبعد مضي ثانيتين وتنعدم العجلة بعد مضي ثانية واحدة. تكون سرعة الجسيم مساوية 24 عند زمن يتعين من

$$24 = 3t^2 - 6t \quad \Rightarrow 3t^2 - 6t - 24 = 0 \quad \text{Or} \quad t^2 - 2t - 8 = 0$$
$$\Rightarrow (t+2)(t-4) = 0 \qquad \therefore t = 4$$

وتكون سرعة الجسيم مساوية 24 بعد مرور أربع ثوان ويكون موضع الجسيم – بالتعويض في دالة الموضع – $x\big|_{t=4} = 4^3 - 3(4)^2 = 16$ ويهمل الزمن السالب.

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كان موضعه عند أي لحظة زمنية يتعين من $x = 2\ 1 - e^{-t}$ حيث t يمثل الزمن ، أوجد السرعة كدالة في المسافة والعجلة كدالة في السرعة.

الحـــــــل

لتعيين سرعة الجسيم نشتق دالة الموضع بالنسبة للزمن ومن ثم

$$x = 2\ 1 - e^{-t} \quad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 2e^{-t} \qquad \text{Note} \quad \frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\because x - 2 = -2e^{-t} \quad \Rightarrow v = 2 - x$$

وهذه العلاقة تعطي السرعة كدالة في المسافة ولايجاد العلاقة بين العجلة والسرعة

$$\because a = v\frac{dv}{dx} = v(-1) = -v \qquad \text{Note} \quad \frac{dv}{dx} = -1 \quad \therefore a = -v$$

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $x = b - b\cos kt$ حيث b,k ثابتان ، أوجد السرعة و العجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة ثم أوجد أقصى بعد للجسيم عن نقطة الأصل.

الحـــــــل

السرعة والعجلة يتعينان كالآتي

$$x = b - b\cos kt \quad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = bk\sin kt \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} = bk^2 \cos kt$$

ولايجاد العجلة كدالة في المسافة حيث أن

$$\because b\cos kt = b - x \qquad \Rightarrow a = k^2 \;\; b - x$$

ولايجاد أقصى بعد أي أكبر ما يمكن يتحقق هذا حينما يكون المقدار $a\cos kt$ أقل ما يمكـــن ويحدث هذا حينما $\cos kt = -1$ أي أن $x_{\max} = b - b(-1) = 2b$ هناك طريقة أخرى.

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $v = u + bx$ حيث u,b ثابتان ، أوجد السرعة والعجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة وكدالة في السرعة.

الحــــــــل

السرعة والعجلة يتعينان بتفاضل الموضع ثم السرعة بالنسبة للزمن

$$v = u + bx \quad \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = b\frac{dx}{dt} = bv = b(u + bx)$$

هذه العلاقة تُعطي العجلة كدالة في السرعة $a = bv$ وكدالة في المسافة $a = b(u + bx)$

وللحصول على السرعة والعجلة كدوال في الزمن حيث أن

$$\because v = u + bx \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = b(u + bx) \qquad \Rightarrow \frac{dx}{u + bx} = bdt$$

وباجراء التكامل بعد ضرب طرفي المعادلة في b يكون

$$\int \frac{bdx}{u + bx} = \int b^2 dt \quad \Rightarrow \ln(u + bx) = b^2\, t + C$$

حيث C ثابت التكامل ، يمكن كتابة العلاقة الاخيرة في الصورة

$$\because \ln(u + bx) = b^2\, t + C \qquad \therefore \ln v = b^2\, t + C \quad \text{Or} \quad v = Ae^{b^2 t}, \quad A = e^C$$

وهي علاقة السرعة بالزمن و العجلة بالزمن ايضاً من العلاقة $a = bAe^{b^2 t}$

مثـــ ٦ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بعجلة $\text{ft}\sec^{-2}$ $6t+2$ حيث t يمثل الزمن ، فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل وأصبحت سرعته 5 بعد مضي ثانية واحدة عين موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

الحــــــل

حيث أن العجلة تعطى بالعلاقة $a=6t+2$ وللحصول على السرعة نستبدل a بـــ $\dfrac{dv}{dt}$ ثم بفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dv}{dt}=6t+2 \qquad \Rightarrow dv=(6t+2)dt$$

$$\int dv=\int(6t+2)dt+c_1 \qquad\qquad \therefore v=3t^2+2t+c_1$$

حيث c_1 ثابت التكامل ويعين من الشروط الابتدائية و هي $v=5$ عندما $t=1$ وبالتعويض في معادلة السرعة نجد أن $\therefore c_1=0$ $\quad 5=3(1)^2+2(1)+c_1$ أي أن صيغة السرعة تصبح على الصورة $\therefore v=3t^2+2t$ وللحصول على دالة الموضع نضع $\dfrac{dx}{dt}=v$ أي أن

$$\frac{dx}{dt}=3t^2+2t \qquad \Rightarrow dx=(3t^2+2t)dt \qquad \text{Or} \qquad x=t^3+t^2+c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 نستخدم الشرط وهو أن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل أي أن عندما $t=0$ كانت $x=0$ ويؤدي هذا $\therefore c_2=0$ $\quad 0=0^3+0^2+c_2$ و يصبح موضع الجسيم عند أي لحظة في الصورة $x=t^3+t^2$ و بعد خمس ثواني يكون $x\big|_{t=5}=150$.

مثــ ٧ ــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تتعين من العلاقة $a=-2v^2$ حيث a تمثل العجلة ، v هي السرعة. أوجد موضع الجسيم عند أي لحظة علماً بأن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل بسرعة قدرها الوحدة.

الحــــــل

نلاحظ أن العجلة تقصيرية وحيث أن $a = \dfrac{dv}{dt}$ فإن

$$\because a = -2v^2 \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2v^2$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$-\int \frac{dv}{v^2} = \int 2dt + c_1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{v} = 2t + c_1$$

حيث ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 1$ عندما $t = 0$ ومنها $1 = 2(0) + c_1 \quad \therefore c_1 = 1$ وتتعين سرعة الجسيم تبعاً لذلك من العلاقة

$$\frac{1}{v} = 2t + 1 \quad \text{but} \quad v = \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dt}{dx} = 2t + 1 \quad \text{Or} \quad \frac{dt}{2t + 1} = dx$$

وباجراء التكامل نحصل على

$$\frac{2dt}{2t + 1} = 2dx \quad \Rightarrow \ln(2t + 1) = 2x + c_2$$

من اشرط الابتدائي للحركة وهو $x = 0$ عندما $t = 0$ أي $c_2 = 0$ وتصبح صيغة العلاقة بين المسافة والزمن $x = \dfrac{1}{2}\ln(2t + 1)$ ومنها يمكن ايجاد المسافة المقطوعة بعد مضي أي زمن.

مثـــ ٨ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تقصيرية تتعين من العلاقة $-4x^{-3}$ فإذا بدأ الجسيم في التحرك من السكون من موضع على بعد h من نقطة الأصل فاثبت أنه يصل إلى مســـافة ℓ من نقطة الأصل في زمن قدره $\dfrac{h}{2}\sqrt{h^2 - \ell^2}$ ثم أوجد سرعته عند هذا الموضع.

الحـــــــل

حيث أن $a = -16x^{-3}$ وايضاً $a = v\dfrac{dv}{dx}$ ومن ثم يكون

$$\therefore v\frac{dv}{dx} = -4x^{-3} \qquad \Rightarrow vdv = -4x^{-3}\ dx$$

باجراء التكامل

$$\therefore \int vdv = -\int 4x^{-3}\ dx + c_1 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{2}v^2 = \frac{2}{x^2} + c_1 \quad \text{Or} \quad v^2 = \frac{4}{x^2} + c$$

ويتعين الثابت c من الشرط الابتدائي و هو $v=0$ عندما $x=h$ وبالتالي $0=\frac{4}{h^2}+c$

أي أن $c=-\frac{4}{h^2}$ وبالتالي

$$v^2=\frac{4}{x^2}-\frac{4}{h^2}=\frac{4(h^2-x^2)}{x^2h^2} \qquad \therefore v=\pm\frac{2}{h}\frac{\sqrt{h^2-x^2}}{x}$$

وسنعتبر الاشارة السالبة لأن حركة حركة الجسيم نحو نقطة الأصل – أي في اتجاه تناقص x –

وحيث أن $v=\frac{dx}{dt}$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=-\frac{2}{h}\frac{\sqrt{h^2-x^2}}{x} \quad \Rightarrow -\frac{xdx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\frac{2}{h}dt \quad \text{Or}$$

$$\Rightarrow -\int\frac{xdx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\int\frac{2}{h}dt+c_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{h^2-x^2}=\frac{2}{h}t+c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 حيث أن $x=h$ عندما $t=0$ وبالتالي $c_2=0$ أي أن

$$\therefore \sqrt{h^2-x^2}=\frac{2}{h}t \qquad \text{Or} \qquad t=\frac{h}{2}\sqrt{h^2-x^2}$$

والزمن الذي يستغرقة الجسيم حتي يصل إلى مسافة ℓ هي $t=\frac{h}{2}\sqrt{h^2-\ell^2}$

وللحصول على مقدار السرعة عند هذا الموضع نعوض عن $x=\ell$ في علاقة السرعة

$$v\Big|_{x=\ell}=\frac{2\sqrt{h^2-\ell^2}}{h\ell}$$

مثـــ ٩ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين السرعة والموضع والزمن يـــتعين مـــن $v=(1+x^2)t$ ، أوجد المسافة كدالة في الزمن إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل.

الحـــــــل

حيث أن $v=(1+x^2)t$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt}=(1+x^2)t \quad \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2}=tdt \quad \therefore \int \frac{dx}{1+x^2}=\int tdt+c_1$$

$$\therefore \tan^{-1} x=\frac{1}{2}t^2+c_1$$

ومن الشرط الابتدائي حيث بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل فإن

$$\therefore \tan^{-1} 0=\frac{1}{2}0^2+c_1 \quad \Rightarrow 0=0+c_1 \ \therefore c_1=0 \quad \therefore x=\tan\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Kinematics of a Particle in Two Dimensions كينماتيكا الجسيم في بعدين

Motion in a plane (x-y) الحركة في المستوي

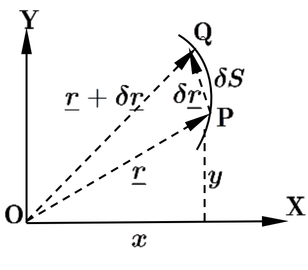
من المعلوم أنه يوجد نوعان من الكميات الطبيعية، الأول يتحدد تماماً بالمقدار مثل الطول و الحجم و الزمن و الكتلة و درجة الحرارة ....وتلك تسمى بالكميات القياسية. أما النوع الثاني فلا يمكن تحديده بالمقدار فقط وإنما يلزم أن نعرف الاتجاه ايضاً إلى جانب المقدار مثل الازاحة و السرعة و العجلة .... وتسمى بالكميات المتجهة.

■ السرعة و العجلة في الاحداثيات الكارتيزية

عندما يتحرك جسيم في مستوى يلزم لتحديد موضعه احداثيان والذي يمكن كتابة موضع الجسيم في صورة متجهة كالتالي $\underline{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ حيث – كما نعلم من دراستنا السابقة – فإن $\hat{i}$ يمثل متجه وحدة في اتجاه المحور الأفقي X ، أما $\hat{j}$ فيمثل متجه وحدة في اتجاه المحور الرأسي Y . وعندما يتحرك جسيم فإن موضعه يتغير من لحظة إلى أخرى و يقال أن متجه الموضع دالة في الزمن أي أن $\underline{r} = \underline{r}(t)$ وبالتالي تكون الاحداثيات الكارتيزية للجسيم دوالاً في الزمن وتكتب في الصورة

$$\underline{r} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \qquad \text{Or} \qquad x = x(t),\;\; y = y(t)$$

يسمى جزئا المعادلة السابقة بالمعادلتين البارامتريتين للمسار ، حيث t يسمى البارامتر وبحذف البارامتر بين مركبات الموضع نحصل على علاقة بين x, y وتسمى هذه العلاقة بالمعادلة الكارتيزية للمسار.



الآن نفرض أن جسيماً يتحرك في المستوى XY (هذه المحاور ثابتة) ونفرض أن الجسيم عند اللحظة t كان عند النقطة P حيث متجه موضعه هو $\underline{r}$ وبعد فترة زمنية δt أصبح الجسيم عند النقطة Q و متجه موضعه $\underline{r} + \delta\underline{r}$ حيث طول القوس PQ هو δS وحيث أن السرعة المتوسطة للجسيم خلال انتقاله من النقطة P إلى النقطة Q خلال الفترة الزمنية δt تتعين من

$$\underline{v} = \frac{\underline{r} + \delta\underline{r} - \underline{r}}{\delta t} = \frac{\delta\underline{r}}{\delta t}$$

وبأخذ نهاية المقدار السابق عندما $\delta t \to 0$ و من ثم تقترب النقطة Q من النقطة P و بالتالي يمكن الحصول على سرعة الجسيم عند النقطة P عند الزمن t وتتعين من

$$\underline{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{j} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$$

أي أن متجه السرعة $\underline{v}$ له مركبتان إحداهما v_x ومقدارها $\frac{dx}{dt}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية v_y وتساوي $\frac{dy}{dt}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه السرعة من العلاقة $v = |\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية θ تتيعين من العلاقة $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$

أيضاً متجه العجلة هو المعدل الزمني لتغير متجه السرعة وعليه

$$\underline{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \underline{v}}{\delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{a_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{a_y}\hat{j} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$$

مرةً أخرى نجد أن متجه العجلة له مركبتان إحداهما a_x ومقدارها $\frac{d^2x}{dt^2}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية a_y وتساوي $\frac{d^2y}{dt^2}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه العجلة من العلاقة $a = |\underline{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية φ تتيعين من العلاقة $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)$

ونستنتج مما سبق أن الحركة المستوية هي محصلة حركتين في خطين مستقيمين هما محورا الاحداثيات.

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثـــ ١ ـــال

إذا تحركت نقطة مادية في المستوى XY بحيث يتعين احداثي موضعها عند أي لحظـــة مـــن العلاقتين

$$x = t^2, \qquad y = 3t^2 + 4$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة ومعادلة المسار.

الحـــــــل

حيث أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 6t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 6$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = 2t\,\hat{i} + 6t\,\hat{j}, \qquad \underline{a} = 2\,\hat{i} + 6\,\hat{j}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت $2\sqrt{10}$ (لا يعتمد على الزمن). ولتعيين معادلة المســـار وهي حذف البارامتر t بين x, y وواضح أن $y = 3x + 4$ وهي معادلة خط مستقيم ميله 3 ويمر بالنقطة $(0, 4)$.

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم فى المستوى الكارتيزي خاضعاً للعلاقة

$$x = 20t - 3t^2, \qquad y = 16t - 4t^2$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة وأقصى ارتفاع وسرعته عند هذا الموضع ومتى وايـــن يقع الجسم على المحور الأفقي X.

الحـــــــل

كما ذكرنا آنفاً أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية XY يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 6t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -6$$

$$\frac{dy}{dt} = 16 - 8t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -8$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = (20 - 6t)\,\hat{i} + (16 - 8t)\,\hat{j}\,, \qquad\qquad \underline{a} = -6\hat{i} - 8\,\hat{j}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت 10وحدة و لإيجاد اقصى ارتفاع ، نعلم أنه عند أقصى ارتفاع تنعدم مركبة السرعة الرأسية أي أن $\dot{y} = 0$ وعندها يكون $t = 2$

أي أن الجسيم يصل إلى أقصى ارتفاع بعد ثانيتين ويكون هذا الارتفاع مساوياً

$$y\Big|_{t=2} = 16(2) - 4(2)^2 = 16$$

ولحساب السرعة عند هذا الموضع نعوض بالزمن $t = 2$ في متجة السرعة $\underline{v} = 8\,\hat{i}$

يقع الجسيم على المحور الأفقي عندما يكون الاحداثي الرأسي y مساوياً الصفر ومن ثم

$$0 = 16t - 4t^2 \quad \Rightarrow t(4 - t) = 0 \qquad \text{i.e. } t = 0,\, t = 4$$

أي أن الجسيم يقع على المحور الأفقي بعد أربع ثوان وموضعه x يتعين من

$$x\Big|_{t=4} = 20(4) - 3(4)^2 = 32$$

مثــ ٣ ــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن مركبة السرعة الأفقية ثابتة وتساوي 3 ومركبة السرعة الرأسية تتناسب مع الاحداثي x وثابت التناسب يساوي 6 اثبت أن معادلة المسار قطع مكافئ إذا علمت أن النقطة $(2, 4)$ تقع على المسار.

الحـــــل

حيث أن مركبة السرعة الأفقية $\dot{x}$ ثابتة اي أن $\dot{x}=3$ ومركبة السرعة الرأسية $\dot{y}$ تتناسب مع x أي أن $\dot{y}=6x$ والآن

$$\frac{dx}{dt}=3, \qquad \frac{dy}{dt}=6x \qquad \Rightarrow \frac{dy\,/\,dt}{dx\,/\,dt}=\frac{6}{3}x=2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2x \qquad \text{Or} \qquad dy=2xdx$$

باجراء التكامل نحصل على $y=x^2+c$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $y=4$ As $x=2$ وبالتعويض نجد أن $c=0$

وتصبح معادلة المسار $y=x^2$ وهي معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن موضعه عند أي لحظة يتعين من

$$x=3\cos 2t+1, \qquad y=4\sin 2t-2$$

أوجد معادلة المسار.

الحـــــــل

معادلة المسار هي علاقة بين x,y و حيث أن $x=3\cos 2t+1, \quad y=4\sin 2t-2$

ومن ثم

$$\frac{x-1}{3}=\cos 2t, \qquad \frac{y+2}{4}=\sin 2t$$

بالتربيع والجمع ينتج أن

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $(1,-2)$ و طول محوره الأكبر 4 والأصغر 3

(اجتهد في رسم المسار رسماً تخطيطياً)

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية على المسار $y = 2x^2$ حيث الاطوال بالقدم وكانـــت المركبـــة الأفقيـــة لسرعتها ثابتة وتساوي $2\ \text{ft}\sec^{-1}$. اوجد عجلة النقطة المادية مقداراً واتجاهـــاً ، ثم اوجـــد سرعتها مقداراً واتجاهاً عندما يكون الأحداثي الرأسي 8 .

الحـــــل

حيث أن $\dot{x} = 2$ وبالتفاضل بالنسبة للزمن يكون $\ddot{x} = 0$ أي أن المركبة الأفقيـــة للعجلـــة تنعدم و للحصول على المركبة الرأسية للعجلة حيث $y = 2x^2$ فإن

$$y = 2x^2 \quad \Rightarrow \dot{y} = 4x\underset{2}{\dot{x}} = 8x \quad \text{again} \quad \ddot{y} = 8\dot{x} = 16$$

أي أن العجلة تتعين بالمتجة $a = 16\,\hat{j}$ ومقدارها 16 وتعمل في اتجاه المحور Y

ولتعيين السرعة حيث $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ فإن $\underline{v} = 2\,\hat{i} + 8x\,\hat{j}$ وعندما $y = 8$ فإن $x = \pm 2$

ومنها $\underline{v} = 2\,\hat{i} - 16\,\hat{j}$ أو $\underline{v} = 2\,\hat{i} + 16\,\hat{j}$ ومقدار السرعة في كلتا الحالتين $\sqrt{260}$

مثـــال ٦

بدأ جسيم حركته من السكون من النقطة (a, b) على مسار معادلته $y^2 = \dfrac{b^2}{a}x$ وكانـــت المركبة الرأسية لعجلته تتعين من $\ddot{y} = -k^2 y$. اوجد المركبة الأفقية للعجلة كدالـــة في x ثم أوجد x, y, v كدوال في الزمن.

الحـــــل

للحصول على المركبة الأفقية للعجلة بتفاضل معادلة المسار بالنسبة للزمن نجد أن

$$y^2 = \frac{b^2}{a}x \quad \Rightarrow y\dot{y} = \frac{b^2}{2a}\dot{x}$$

$$\text{differentiating again} \quad \Rightarrow \dot{y}^2 + y\ddot{y} = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 + \sqrt{\frac{b^2}{a}x}\left(-k^2\sqrt{\frac{b^2}{a}x}\right) = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}\left(\dot{y}^2 - k^2\frac{b^2}{a}x\right) = \frac{2a}{b^2}\dot{y}^2 - 2k^2x \qquad (1)$$

والآن لحساب $\dot{y}$ من العلاقة $\ddot{y} = -k^2 y$ حيث $\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \dot{y}\dfrac{d\dot{y}}{dy}$ ومنها

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -k^2 y \qquad \Rightarrow \dot{y}d\dot{y} = -k^2 y dy \qquad \text{Or} \quad \dot{y}^2 = c - k^2 y^2$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من شرط أن الجسيم بدأ الحركة من السكون أى أن $t = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = 0, \quad x = a, \quad y = b$ وتكون قيمة الثابت

$$0 = c - k^2 b^2 \quad \therefore c = k^2 b^2$$

ومن ثم فإن المركبة الأفقية للعجلة تتعين من

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}(k^2 b^2 - k^2 \frac{b^2}{a} x) - 2k^2 x \qquad \Rightarrow \ddot{x} = 2ak^2 - 4k^2 x$$

وهذه العلاقة تعطى المركبة الأفقية للعجلة بدلالة x

$$\dot{y}^2 = k^2 b^2 - k^2 y^2 \qquad \Rightarrow \dot{y} = k\sqrt{b^2 - y^2} \quad \text{Or} \quad \frac{dy}{dt} = k\sqrt{b^2 - y^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = kdt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = kt + \alpha \quad \text{Or} \quad y = b\sin(kt + \alpha)$$

حيث α ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط عند $t = 0$ فإن $y = b$ ويكون

$$b = b\sin(\alpha) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

ومنها فإن $y = b\sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Or} \quad y = b\cos kt \quad y$ given as a function of t

أيضاً للحصول على المسافة x كدالة في الزمن

$$x = \frac{a}{b^2} y^2 = \frac{a}{b^2} b^2 \cos^2 kt = a\cos^2 kt$$

والسرعة $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ و من ثم

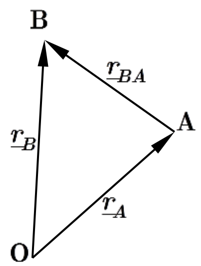
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{4a^2}{\cancel{b^4}}\cancel{b^2}\cos^2 kt(\cancel{b^2}k^2\sin^2 kt) + k^2 b^2 - k^2 b^2\cos^2 kt} \\ &= \sqrt{4a^2 k^2\cos^2 kt\sin^2 kt + k^2 b^2\sin^2 kt} = k\sin kt\sqrt{4a^2\cos^2 kt + b^2} \end{aligned}$$

■ الحركة النسبية في مستوى Relative Motion in a Plane

علمنا مما سبق أن صور الحركة و وصفها لحركة جسيم تتغير تبعاً لـتغير مجموعة الاسناد (مجموعة المحاور المنسوبة إليها هذه الحركة سواء كارتيزية او قطبية أو ذاتية) وكذلك إذا ما كانت هذه المحاور ثابتة أو متغيرة وايضاً راصد الحركة (نقطة الأصل) فمثلا لو تصورنا أن هناك راصد لحركة قطار و تحرك القطار أمام الراصد فسيرى الراصد أن القطار يتحرك بسرعته التي يسير بها ، ولكن لو كان الراصد راكباً قطاراً آخر يسير بنفس سرعة القطار الأول و في نفس الاتجاه فبالنسبة لهذا الراصد سيكون القطار المرصود كما لو كان ساكناً.

نعتبر نقطة ثابتة O، نفرض أن نقطة ما A متجه الموضع لها هو $\underline{r}_A$ بالنسبة إلى O ونعتبر نقطة أخرى B متجه الموضع لها هو $\underline{r}_B$ بالنسبة إلى O أيضاً. فإذا نسبنا متجه موضع النقطة A إلى النقطة B فسيكون هو المتجه $\underline{r}_{BA}$ ، أي أن متجه الموضع قد تغير بتغير الراصد و من الشكل المجاور يكون

$$\underline{r}_B = \underline{r}_A + \underline{r}_{B|A} \qquad \Rightarrow \underline{r}_{B|A} = \underline{r}_B - \underline{r}_A$$



حيث رمزنا لمتجه موضع النقطة A بالنسبة إلى B بالرمز $\underline{r}_{AB}$. يُسمى المتجه $\underline{r}_{AB}$ بمتجه الموضع النسبي للنقطة A بالنسبة للنقطة B و للحصول على السرعة النسبية للنقطة A بالنسبة إلى B بتفاضل المعادلة السابقة نجد أن

$$\frac{d\underline{r}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{r}_B}{dt} - \frac{d\underline{r}_A}{dt} = \underline{v}_B - \underline{v}_A \qquad \Rightarrow \underline{v}_{B|A} = \underline{v}_B - \underline{v}_A$$

حيث $\underline{v}_A, \underline{v}_B$ سرعة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{v}_{A|B}$ هي سرعة A بالنسبة إلى B نلاحظ أن العلاقتان السابقتان علاقات اتجاهية وليست قياسية والعجلة النسبية عي مشتقة السرعة النسبية بالنسبة للزمن أي أن

$$\frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{v}_B}{dt} - \frac{d\underline{v}_A}{dt} = \underline{a}_B - \underline{a}_A \qquad \Rightarrow \underline{a}_{B|A} = \underline{a}_B - \underline{a}_A$$

حيث $\underline{a}_A, \underline{a}_B$ عجلة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{a}_{A|B}$ هي عجلة A بالنسبة إلى B

مثـــ ١ ـــال

تتحـــرك نقطتـــان ماديتـــان A, B بحيـــث يـــتعين موضـــعهما مـــن $x_A = t^3 - 2t$ ، $x_B = 2t^3 + t^2 - 5$. اوجد كلاً من السرعة النسبية العجلة النسبية.

الحــــــــل

حيث أن الموضع النسبي للنقطة B بالنسبة للنقطة A هو $\underline{x}_{B|A}$ حيث

$$\underline{x}_{B|A} = \underline{x}_B - \underline{x}_A \qquad \Rightarrow \underline{x}_{B|A} = (2t^3 + t^2 - 5) - (t^3 - 2t) = t^3 + t^2 + 2t - 5$$

ومن ثم فإن السرعة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{v}_{B|A} = \frac{d\underline{x}_{B|A}}{dt} = 3t^2 + 2t + 2$$

وأيضاً العجلة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{a}_{B|A} = \frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = 6t + 2$$

مثـــ ٢ ـــال

تتحرك باخرة A بسرعة ثابتة مقدارها 24 m.p.h في اتجاه الشرق ، بينما تتحرك باخرة B في اتجاه الجنوب بسرعة ثابتة مقدارها 18 m.p.h . أوجد سرعة الباخرة الأولى بالنسبة لراكب في الباخرة الثانية.

الحــــــــل

بفرض أن $\hat{i}$, $\hat{j}$ متجها وحدة في اتجاهي الشرق والجنوب فإنه يمكن كتابة سرعة البـــاخرتين A, B على الصورة

$$\underline{v}_A = 24\,\hat{i}, \quad \underline{v}_B = 18\,\hat{j}$$

و حيث أن السرعة النسبية تتعين من $\underline{v}_{B|A} = \underline{v}_A - \underline{v}_B$ فيكون $\underline{v}_{A|B} = 24\,\hat{i} - 18\,\hat{j}$

مقدار السرعة النسبية يتعين مـــن $v_{A|B} = \left|\underline{v}_{A|B}\right| = \sqrt{(24)^2 + (18)^2} = 30\,\text{m.p.h}$ و في اتجاه يصنع زاوية θ جنوب الشرق حيث $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{18}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

الحركـــــة في وسط مقـــاوم

Motion in a Resisting Medium

تُعالج الكينماتيكا – كما رأينا – وصف الحركة المجردة دون التعرض لبعواعث تغيير هـــذه الحركة. والميكانيكا الكلاسيكية أو الميكانيكا النيوتونية مبنية على عدة قوانين وضعها العـــالم الانجليزي المعرف سير اسحق نيوتن في القرن السابع عشر وهي معروفة باسمه و أثبتت التجربة والمشاهدة معاً إلى يومنا هذا دقة هذه القوانين في وصفها لحركة الاجسام الا في حالات نادرة والتي تكون فيها سرعة الاجسام هائلة ، مما دعا ألبرت أينشتين رائد نظرية النسبية الأول إلى اعادة التفكير في الأسس التي أقام عليها العالم نيوتن نظريته االميكانيكية فخرج على العـــالم في بدايات القرن العشرين بنوع آخر من الميكانيكا يعتمد في جوهره على النسبية. تمتاز ميكانيكا نيوتن بسهولة في التفكير والتطبيق مع دقةٍ كافيةٍ لاغلب التطبيقات والأغراض الهندسية جعلتنا نستمر حتى يومنا هذا في استعمالها و تطبيقها مُرجئين الأخذ بأساليب النسبية إلى بضع حالات من الحركة السريعة جداً كحركة الالكترونات.

■ قوانين نيوتن للحركة Newton's Laws of Motion

القانون الأول

وينص على أن "كل جسيم بعيد عن المؤثرات يظل محتفظاً بحالة حركته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم وفقاً لأحوال البداية"

فإذا ما لاحظنا تغيّراً في سرعة الجسيم سواء كان ذلك في المقدار أو الاتجاه أو التغير في كليهما معاً وهو ما عُرف بعجلة الجسيم فقد نسب نيوتن هذا التغير أو هذه العجلة إلى مؤثر أسمـــاه القوة. و على هذا يمكن تعريف القوة على أنها ذلك المؤثر الي يُحدث تغييراً في حالة الجسم أو بتعبير آخر هو المؤثر الذي يُحدث العجلة.

القانون الثاني

لقد أستخدم هذا القانون كأساس للديناميكا. وينص هذا القانون على "هناك تناسب مباشـــر بين القوة المؤثرة والعجلة الناتجة". و وجد أن ثابت التناسب هو كتلة الجسيم m. أو بعبارةٍ

أخرى "المعدل الزمني للتغير في كمية حركة الجسيم يتناسب مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه ويكون في اتجاهها".

تُعرف كمية حركة الجسيم بحاصل ضرب كتلته في سرعته أي أن $\underline{P} = m\underline{v}$ وهي تبعاً لذلك كمية متجهه وبالتالي يمكن صياغة قانون نيوتن الثاني على الصورة

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = m\frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{v}\frac{dm}{dt}$$

وفي دراستنا هنا سنعتبر كتلة الجسيم ثابتة ومن ثم $\frac{dm}{dt} = 0$ ويأخذ قانون نيـــوتن الصـــورة $F = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a}$ حيث $\underline{a}$ يمثل متجه عجلة الجسيم.

نلاحظ أنه في الاحداثيات الكارتيزية تُعطى مركبات القوة في الصورة (F_x, F_y) وبالتالي

$$F_x = ma_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = ma_y = m\ddot{y}$$

و هذا القانون هو قانون لا يعتمد على برهان رياضي وإنما أثبتت التجارب صحته وتنبني عليه باقي قوانين الديناميكا بالاستنتاج الرياضي ولذا سُميّ بالقانون الأساسي للحركة.

القانون الثالث

ينص على أن "لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه و على خط واحد"

قانون الجذب العام

كل جسيمان يتجاذبان بقوة تتناسب طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مـــع مربـــع البعد بينهما و تؤثر في الخط الواصل بينهما وتأخذ الصورة الرياضية

$$\underline{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{F}$$

حيث m_1, m_2 تمثل كتلة الجسمين ، γ ثابت الجذب العام و يمكن تحديـــد قيمتـــه تجريبيـــاً وتساوي ، r هو البعد بين الكتلتين ، $\hat{F}$ متجه وحدة في اتجاه القوة .

ولقد تطرقنا في ابوابٍ سابقة إلى حركة الاجسام الساقطة او المقذوفة رأسياً لأعلى مع اهمـــال مقاومة الهواء – حركة الجسيم بعجلة ثابتة – والآن نتعرض لحركة الاجسام مع الأخـــذ في

الاعتبار مقاومة الهواء سواء كانت الحركة رأسية أو أفقية. لاحظ أنه في حالة السرعات الصغيرة فإن المقاومة تتناسب مع السرعة أما إذا كانت حركة الجسم بسرعة كبيرة فإن المقاومة تتناسب مع مربع السرعة.

■ دراسة حركة جسيم ساقط مع وجود مقاومة تتناسب مع سرعته

نفرض جسيم كتلته m سقط من السكون من نقطة O و بأخذ هذه النقطة كنقطة أصل و الخط الرأسي لأسفل هو المحور Y و حيث أن مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة أي أنه يؤثر على الجسيم اثناء حركته قوة الوزن mg رأسياً لأسفل و مقاومة الهواء R رأسياً لأعلى وتساوي μmv حيث v سرعة الجسيم عند اللحظة t، μm ثابت التناسب

معادلة الحركة هي

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{g-\mu v} = dt \qquad \text{Or} \qquad \frac{-\mu dv}{g-\mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v) = c_1 - \mu t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 0$ عندما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g-\mu v) = \ln g - \mu t \qquad \text{Or} \quad v = \frac{g}{\mu}\ 1-e^{-\mu t} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t كالتالي

$$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} = \frac{g}{\mu}\ 1-e^{-\mu t} \qquad \Rightarrow \quad dy = \frac{g}{\mu}\ 1-e^{-\mu t}\ \ dt$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{g}{\mu}\ 1-e^{-\mu t}\ \ dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$y = \frac{g}{\mu}\left(t + \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right) + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $y = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_2 = -\dfrac{g}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y = \frac{g}{\mu}\left(t + \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right) - \frac{g}{\mu^2}$$

وهذه العلاقة تعطي موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية t

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم كتلته m أفقياً في وسط مقاومته αmv حيث α ثابت ، v سرعة الجســـيم فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل بسرعة u فأوجد المسافة التي يتحركها الجسيم بعد زمن .

الحـــــــل

معادلة الحركة الأفقية للجسيم (لاحظ أن قوة الوزن ليس لها تأثير) هي

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\alpha dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(v) = c_1 - \alpha t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln u$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(v) = \ln u - \alpha t \qquad \text{Or} \quad v = ue^{-\alpha t} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عند أي لحظة t كالتالي

$$\frac{dx}{dt} = ue^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad dx = ue^{-\alpha t}dt$$

v

$$\Rightarrow \int dx = \int ue^{-\alpha t}dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$x = -\frac{u}{\alpha}e^{-\alpha t} + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $x = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{u}{\alpha}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$x = \frac{u}{\alpha}\ 1 - e^{-\alpha t}$$

مثــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم كتلته الوحدة في وسط مقاومته تساوي $\lambda v + \mu v^2$ فإذا كانت المقاومة هـــي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسيم فأوجد المسافة المقطوعة قبل أن يقف الجسيم إذا علمت أن سرعته الابتدائية u .

الحــــــــل

معادلة الحركة للكتلة هي– قوة المقاومة هي القوة الوحيدة المؤثرة –

$$v\frac{dv}{dx} = -(\lambda v + \mu v^2) \qquad \Rightarrow \frac{\mu dv}{\lambda + \mu v} = -\mu dx$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(\lambda + \mu v) = c_1 - \mu x \tag{1}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $x = 0$ ومنها $c_1 = \ln(\lambda + \mu u)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(\lambda + \mu v) = \ln(\lambda + \mu u) - \mu x \qquad \text{Or} \quad \ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda + \mu v}\right) = \mu x \tag{2}$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عندما تنعدم السرعة

$$x\Big|_{v=0} = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda}\right) = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}u\right)$$

مثــ ٣ ـــال

قذف جسيمان كتلة كل منهما m رأسياً إلى اسفل من نفس النقطة و في نفـــس اللحظـــة بسرعتين u_1, u_2 في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة و ثابت التناسب μm فإذا كانـــت u_1', u_2' هما سرعتي الجسيمان بعد مضي زمن T فاثبت ان $u_1' - u_2' = (u_1 - u_2)e^{-\mu T}$.

الحــــــــل

بالنسبة للكتلة الأولى نفرض أن سرعتها عند أي لحظة هي ومن ثم فإن معادلة الحركة لها

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{g-\mu v} = dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv}{g-\mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v) = c - \mu t$$

حيث c ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u_1$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c = \ln(g-\mu u_1)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v) = \ln(g-\mu u_1) - \mu t \qquad \text{Or} \qquad g-\mu v = (g-\mu u_1)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_1' أي أن

$$g-\mu u_1' = (g-\mu u_1)e^{-\mu T} \tag{1}$$

بالنسبة للكتلة الثانية نفرض أن سرعتها عند أي لحظة t هي v' وباتالي معادلة حركتها

$$m\frac{dv'}{dt} = mg - \mu mv' \quad \Rightarrow \frac{dv'}{g-\mu v} = dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv'}{g-\mu v'} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v') = c' - \mu t$$

حيث c' ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v' = u_2$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c' = \ln(g-\mu u_2)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v') = \ln(g-\mu u_2) - \mu t \qquad \text{Or} \qquad g-\mu v' = (g-\mu u_2)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_2' أي أن

$$g-\mu u_2' = (g-\mu u_2)e^{-\mu T} \tag{2}$$

وبطرح المعادلتين (2) , (1) نجد أن

$$\mu \quad u_1' - u_2' \quad = \mu(u_1 - u_2)e^{-\mu T} \qquad \text{Or} \qquad u_1' - u_2' = (u_1 - u_2)e^{-\mu T}$$

وهو المطلوب اثباته

مثـــ ٤ ـــال

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى بسرعة أبتدائية $\sqrt{g\mu^{-1}}$ في وسط مقاومته لوحدة الكتل تساوي μv^2 حيث v سرعة النقطة المادية ، μ ثابت التناسب . اثبـــت أن أقصـــى ارتفاع للنقطة المادية هو $\frac{1}{2\mu}\ln 2$ وتصل إليه في زمن قدره $\frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$.

الحـــــــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \mu mv^2 \quad \Rightarrow \frac{vdv}{g+\mu v^2} = -dy \quad \text{Or} \quad \frac{2\mu vdv}{g+\mu v^2} = -2\mu dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\mu v^2) = c_1 - 2\mu y \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln 2g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g+\mu v) = \ln 2g - 2\mu y \quad \text{Or} \quad y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g+\mu v} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t وعند أقصى ارتفاع يكون $v = 0$ وبالتالي

$$y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g} \qquad \Rightarrow Y = \frac{1}{2\mu}\ln 2$$

وهو أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم وللحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع حيث

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu mv^2 \quad \Rightarrow \frac{dv}{g+\mu v^2} = -dt \quad \text{Or} \quad \frac{\sqrt{\frac{\mu}{g}}dv}{1+\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right)^2} = -\sqrt{g\mu}\,dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = c_2 - \sqrt{g\mu}\,t \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{\pi}{4}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = \frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t \qquad \text{Or} \qquad v = \sqrt{\frac{g}{\mu}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right)$$

وهذه المعادلة تعطي السرعة عند أي لحظة زمنية وعند $v = 0$ فإن t

$$0 = \sqrt{\frac{g}{\mu}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right) = 0 \qquad \text{Or} \quad t = \frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$$

مثـــ ٥ ـــال

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب μm فإذا تلاشت سرعة النقطة المادية بعد زمن T من لحظة القذف وعلى ارتفاع ℓ من نقطة القذف فاثبت إن السرعة الابتدائية التي قذفت بها النقطة المادية هي $\mu\ell + gT$.

الحــــــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{\mu dv}{g + \mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g + \mu v) = c_1 - \mu t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $t = 0$ – بفرض أن سرعة القذف u والمراد تعيينها – ومنها $c_1 = \ln(g + \mu u)$ وتأخـــذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g + \mu v) = \ln(g + \mu u) - \mu t \qquad \text{Or} \quad g + \mu v = \; g + \mu u \;\; e^{-\mu t}$$

$$\text{at} \;\; t = T,\; v = 0 \quad \Rightarrow \;\; g = \; g + \mu u \;\; e^{-\mu T} \qquad (2)$$

وللحصول على ارتفاع النقطة حيث

$$\because \;\; g + \mu v = (g + \mu u)e^{-\mu t} \qquad \text{Or} \qquad v = \frac{1}{\mu}\;\; (g + \mu u)e^{-\mu t} \;\; - g$$

ولكن $v = \dfrac{dy}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu}\;\; (g + \mu u)e^{-\mu t} \;\; - g \qquad \Rightarrow dy = \frac{1}{\mu}\;\; (g + \mu u)e^{-\mu t} \;\; - g \;\; dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$y = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{(g+\mu u)}{\mu}e^{-\mu t} + gt\right) + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط الحركة وهي $y = 0$ عندما $t = 0$ ومنـــها $c_2 = \dfrac{(g+\mu u)}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{(g+\mu u)}{\mu}e^{-\mu t} + gt\right)$$

والآن بالتعويض عن $y = \ell$ عندما $t = T$

$$\ell = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} - \frac{gT}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \quad \text{Or} \quad \frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell$$

(استخدمنا المعادلة (2))

$$\frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \qquad \Rightarrow u = gT + \mu\ell$$

و هو المطلوب اثباته

مثـــ ٦ ـــال

قذف جسيم كتلته m رأسياً لأعلى بسرعة u في وسط مقاومته تساوي $m\gamma v^2$. أثبت أن الجسيم يعود إلى نقطة القذف بسرعة قدرها $\dfrac{uu'}{\sqrt{u^2+u'^2}}$ حيث $u' = \sqrt{g\gamma^{-1}}$

الحـــــــــل

لمعرفة السرعة التي يعود بها الجسيم إلى نقطة القذف نتبع حركته اثناء الصعود حتى يتوقف ثم يرجع مرة ثانية.

اثناء الصعود معادلة الحركة هي – اخترنا المحور Y رأسياً لأعلى ونقطة القذف هـــي نقطـــة الأصل–

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g+\gamma v^2} = -2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\gamma v^2) = c_1 - 2\gamma y \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln(g + \gamma u^2)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g + \gamma v^2) = \ln(g + \gamma u^2) - 2\gamma y \quad Or \quad y = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g + \gamma u^2}{g + \gamma v^2}\right)$$

ويقف الجسيم عند انعدام سرعته وبالتعويض عن $v = 0$ في المعادلة السابقة نجد أن

$$y\Big|_{v=0} = Y = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g + \gamma u^2}{g}\right) = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(1 + \frac{u^2}{u'^2}\right), \quad (u'^2 = \frac{g}{\gamma})$$

و الآن باعتبار الحركة أثناء الهبوط ، سنأخذ في هذه الحالة نقطة السقوط هي نقطة الأصـــل الجديدة والمحور Y لإسفل ويكون الشرط الابتدائي هو $v = 0$ عندما $y = 0$ حيـــث v سرعة الجسيم عند أي لحظة اثناء السقوط. والآن بكتابة معادلة الحركة اثناء السقوط

$$mv\frac{dv}{dy} = mg - \gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g - \gamma v^2} = -2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g - \gamma v^2) = c_2 - 2\gamma y \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 0$ عنـــدما $y = 0$ ومنها $c_2 = \ln g$ وتأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\ln(g - \gamma v^2) = \ln g - 2\gamma y \quad \text{Or} \quad y = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g - \gamma v^2}\right)$$

وتصبح سرعة الجسيم عند عودته إلى نقطة القذف أي عند ارتفاع Y هي

$$\frac{1}{2\gamma}\ln\left(1 + \frac{u^2}{u'^2}\right) = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g - \gamma v^2}\right) \quad \text{Or} \quad 1 + \frac{u^2}{u'^2} = \frac{g}{g - \gamma v^2}$$

$$\therefore \frac{u'^2 + u^2}{u'^2} = \frac{g}{g - \gamma v^2} \quad \Rightarrow g - \gamma v^2 = \frac{gu'^2}{u'^2 + u^2} \quad \Rightarrow \gamma v^2 = g - \frac{gu'^2}{u'^2 + u^2}$$

$$v^2 = u'^2 - \frac{u'^4}{u'^2+u^2} = \frac{u'^2(u'^2+u^2)}{u'^2+u^2} - \frac{u'^4}{u'^2+u^2}$$
$$= \frac{u'^2u^2}{u'^2+u^2} \qquad \therefore\ v = \frac{uu'}{\sqrt{u^2+u'^2}} \quad (u'^2 = \frac{g}{\gamma})$$

■ الشغل والطاقة Work and Energy

إذا تحركت نقطة مادية تحت تأثير قوة يُقال أن القوة بذلت شغلاً ويُعرف الشغل المبذول بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة التي تحركتها النقطة المادية في اتجاه تأثي القوة أي أن

$$W = \underline{F}.\underline{r} = F\,r\cos\theta$$

لاحظ أن المركبة العمودية على متجه الازاحة لا تبذل شغلاً. العلاقة السابقة التي تُعطي الشغل تستخدم حينما تكون القوة غير متغيرة أما إذا كانت القوة متغيرة فإن الشغل المبذول في ازاحة صغيرة $d\underline{r}$ هو

$$dW = \underline{F}.d\underline{r} = F\,dr\cos\theta$$

ويكون الشغل الكلي المبذول يُعطى بالعلاقة $W = \int \underline{F}.d\underline{r}$ و هو كمية قياسية وإذا كانت $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن الشغل يكون

$$W = \int F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

وحدات الشغل و يقاس الشـــغل بوحـــدات الأرج أو الجـــول حيـــث Joule $=10^7$ erg ، erg $=$ dyne $\times$ cm

■ **الطاقة** وتعرف على أنها مقدرة الجسم على بذل شغل و وحداتها هي نفس وحدات الشغل وهناك نوعان

■ طاقة الحركة

تعرف طاقة الحركة لجسيم كتلته m و سرعته v بالعلاقة $T = \frac{1}{2}mv^2$ و هي كمية قياسية موجبة وتقاس بالشغل المبذول بواسطة قوة في تحريك الجسيم حتى يصل إلى حالة الســـكون وحيث أن

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r} = \int_1^2 m\underline{\ddot{r}}.d\underline{r} = \int_1^2 m\underline{\ddot{r}}.\frac{d\underline{r}}{dt}dt$$

$$= m\int_1^2 \underline{\ddot{r}}.\underline{\dot{r}}\ \ dt = \frac{1}{2}m\int_1^2 \frac{d}{dt}\ \ \underline{\dot{r}}^2\ \ dt = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1$$

وتعرف هذه القاعدة بقاعدة الشغل والطاقة.

■ طاقة الوضع

في الديناميكا عادة تسمى طاقة الجهد U بطاقة الوضع لأن الجسيم يكتسب طاقة نتيجة لموضعه. تعرف طاقة الجهد او طاقة الوضع بأنها الشغل المبذول ضد القوة المؤثرة على الجسيم في تحريكه من نقطة إلى أخرى فإذا كان الشغل المبذول هو W طاقة الجهد بين الموضعين $1,2$ هي

$$U_2 - U_1 = -W_{1\to 2} = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

ويمكن أعتبار أن طاقة الوضع لجسيم كتلته m وعلى ارتفاع h من سطح الأرض تساوي الشغل المبذول اثناء هبوطه نفس المسافة حتى يعود غلى سطح الأرض أي أن

$$U = Fh = mgh$$

وطاقة الجهد هي دالة قياسية تعتمد على الموضع فقط ولا تعتمد على الزمن صراحةً. العلاقة السابقة

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

و التي تربط القوة مع طاقة الجهد هي علاقة خاصة – ليست صحيحة لجميع أنواع القوى – ولكنها صحيحة لبعض أنواع القوى وتسمى القوى المحافظة. لاحظ أن وحدات طاقة الجهد هي نفسها وحدات الشغل.

■ مبدأ ثبوت الطاقة

ينص هذا المبدأ على أن الطاقة لا تفنى ولا تستحدث من العدم بليمكن تحويلها من صورة إلى اخرى وفي حالة الطاقة الميكانيكية فإن مجموع طاقتى الحركة و الوضع لجسم ما مقدار ثابت.

من المعادلة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ والمعادلة $T_2 - T_1 = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ نجد أن

$$U_2 - U_1 = -(T_2 - T_1) \qquad \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

ونستنتج أن مجموع طاقتي الحركة والجهد يساوي مقداراً ثابتاً ويرمز له بالرمز E والذي يمثل الطاقة الكلية للجسم و هذا هو مبدأ ثبوت الطاقة والذي يمكن كتابته في الصورة

$$T + U = E$$

■ القدرة

في الآلات فإننا نهتم بالشغل المبذول بواسطة الآلة في وقت محدد و هو ما يقيس قدرة الآلة. و تعرف القدرة بأنها المعدل الزمني للشغل المبذول ويرمز لها بالرمز P ، أي أن $P = \dfrac{dW}{dt}$ و حيث أن $dW = \underline{F}.d\underline{r}$ وبالتالي تكون القدرة $P = \dfrac{\underline{F}.d\underline{r}}{dt} = \underline{F}.\underline{v}$ حيث $\underline{v}$ هـــو متجـــه السرعة. وحدات القدرة منها الوات حيث $\text{Watt} = \text{Joule}\,\text{sec}^{-1}$ و أيضاً الكيلو وات حيث $\text{K.W.} = 10^3\ \text{Watt}$ و أيضاً الحصان حيث $\text{hp} = 745.7\,\text{Watt}$.

■ القوى والمجالات المحافظة

سبق أن ذكرنا أن القوى المحافظة هي التي تحقق العلاقة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ و نلاحظ أن الشغل المبذول بمثل هذه القوة في ازاحة جسيم من الموضع 1 إلى الموضع 2 لا يعتمد علـــى نوع المسار ولكن فقط على موضعي البداية والنهاية

فإذا أعتبرنا $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن

$$dU = -\underline{F}.d\underline{r} = -\ \ F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

وحيث أن

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

وبمقانة العلاقتين الأخيرتين نجد أن

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

وعندما تحقق القوة $\underline{F}$ العلاقة الأخيرة فإنه يكون $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ حيث $\underline{\nabla} \wedge \underline{F}$ يسمى دوران القوة و يتعين من

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

و هذا هو الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

اوجـــد الشـــغل الـــذي تبذلـــه القـــوة $\underline{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ لازاحـــة جســـيم الازاحـــة $\underline{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$.

الحـــــــل

الشغل المبذول W و الذي تبذله القوة $\underline{F}$ لازاحة جسيم الازاحة $\underline{r}$ يتعين من

$$W = \underline{F}.\underline{r} = \ 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \ . \ 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k} \ = 6 - 2 + 5 = 9$$

مثـــ ٢ ـــال

اثبت أن مجال القـــوة $\underline{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\,\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$ محـــافظ وأوجد دالة الجهد.

الحـــــــل

نعلم أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً هو $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} = &\left\{\frac{\partial}{\partial y}\ 3xy^2z^2 - 6x^2z\ - \frac{\partial}{\partial z}\ 2xyz^3\ \right\}\hat{i} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial z}\ y^2z^3 - 6xz^2\ - \frac{\partial}{\partial x}\ 3xy^2z^2 - 6x^2z\ \right\}\hat{j} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial x}\ 2xyz^3\ - \frac{\partial}{\partial y}\ y^2z^3 - 6xz^2\ \right\}\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = &(6xyz^2 - 6xyz^2)\hat{i} + (3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz)\hat{j} \\ &+ (2yz^3 - 2yz^3)\hat{k} = \underline{0} \end{aligned}$$

أي أن مجال القوة محافظ. لإيجاد دالة الجهد وحيث أن القوة محافظة ومن ثم تتحقق العلاقـــات التالية

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

أي أن

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(y^2 z^3 - 6xz^2),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2xyz^3,$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = -(3xy^2 z^2 - 6x^2 z)$$

بتكامل المعادلات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y, z ثابتين – ، بالنسبة إلي y – مع بقاء x, z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x, y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3 + f_1(y, z),$$
$$U = -xy^2 z^3 + f_2(x, z),$$
$$U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3 + f_3(x, y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y,z) = c, \quad f_2(x,z) = 3x^2 z^2 + c, \quad f_3(x,y) = c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = 3x^2 z^2 - xy^2 z^3$$

(في هذا المثال أوجد الشغل المبذول لتحريك الجسيم من الموضع $A(-2,1,3)$ إلى الموضع $B(1,-2,-1)$)

$$W_{1\to 2} = U_1 - U_2 = U(-2,1,3) - U(1,-2,-1)$$
$$= 3(-2)^2(3)^2 - (-2)(1)^2(3)^3 - 3(1)^2(-1)^2 - (1)(-2)^2(-1)^3 = 155$$

مثـــال ٣

جسيم كتلته $2m^2$ يتحرك على المحور OX (في خط مستقيم) تحت تأثير قوة محافظة. إذا كان الجسيم عند الموضعين x_1, x_2 عند اللحظتين t_1, t_2 على الترتيب و أن $U(x)$ هي طاقة الجهد و أن E هي الطاقة الكلية فاثبت أن $t_2 - t_1 = m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$.

الحـــــــل

نعلم أن الطاقة الكلية E هو مجموع طاقتي الحركة T والوضع $U(x)$ وهو مقدار ثابـــت ، أي أن

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

ولكن $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ومنها

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \quad \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\ E - U(x) \quad \text{Or}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,dt$$

باجراء التكامل بين الموضعين x_1, x_2 المناظرين للحظتين t_1, t_2 نحصل على

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad \Rightarrow t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

وهو المطلوب اثباته.

مثـــ ٤ ـــال

في المثال السابق إذا كانت طاقة الجهد تعطى بالعلاقة $U(x) = \frac{1}{2}mk^2x^2$ وأن الجسيم بـــدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فاثبت أن $x = a\cos kt$.

الحـــــــل

حيث أن الجسيم بدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فإن الطاقة الكلية تعين من

$$E = T + U(x = a) = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}mk^2a^2 = \frac{1}{2}mk^2a^2$$

بتكامل المعادلة $dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$ بين الموضعين (موضع البداية a وموضع عـــام x المناظرين للزمنين $t = 0$ والزمن t على الترتيب)

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}=\int_0^t dt \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}mk^2a^2-\frac{1}{2}mk^2x^2}}=\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=t\Big|_0^t=t$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)}_{\pi/2}=kt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=kt+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \frac{x}{a}=\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x=a\cos\ kt$$

لاحظ أن
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم كتلتـــه m في المســـتوى XY بحيـــث أن متجـــه موضـــعه يـــتعين مـــن $\underline{r}=a\cos\omega t\,\hat{i}+b\sin\omega t\,\hat{j}$ حيث a,b,ω ثوابت أثبت أن القوة المؤثرة علـــى الجســـم محافظة و أوجد طاقة الجهد و طاقة الحركة عند أي موضع و تحقق من مبدأ ثبوت الطاقة.

الحـــــــل

$$\because\ \underline{r}=a\cos\omega t\,\hat{i}+b\sin\omega t\,\hat{j}\ =x\,\hat{i}+y\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \underline{v}=\frac{d\underline{r}}{dt}=-a\omega\sin\omega t\,\hat{i}+b\omega\cos\omega t\,\hat{j} \qquad \text{and}$$

$$\underline{a}=\frac{d\underline{v}}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t\,\hat{i}-b\omega^2\sin\omega t\,\hat{j}=-\omega^2(x\,\hat{i}+y\,\hat{j})$$

وحيث أن القوة المؤثرة على الجسم تتعين من

$$\underline{F}=m\underline{a}=-m\omega^2\ \ x\,\hat{i}+y\,\hat{j}$$

يكون مجال القوة محافظاً إذا تحقق $\underline{\nabla}\wedge\underline{F}=\underline{0}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = -m\omega^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

وبالتالي فإن مجال القوة محافظ. لإيجاد طاقة الجهد نستخدم العلاقة $\underline{F} = -\underline{\nabla} U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m\omega^2 x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = m\omega^2 y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

بتكامل العلاقات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y, z ثابتين – ، بالنسبة إلي y – مع بقاء x, z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x, y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + f_1(y,z),$$
$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + f_2(x,z),$$
$$U = f_3(x,y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y,z) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 c,$$
$$f_2(x,z) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + c,$$
$$f_3(x,y) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \quad x^2 + y^2$$

طاقة الحركة تتعين من – حيث $\underline{v} = -a\omega \sin \omega t\, \hat{i} + b\omega \cos \omega t\, \hat{j}$ –

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \quad a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t$$

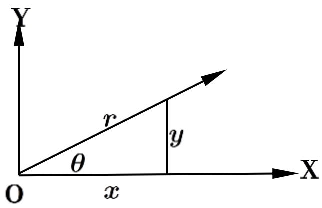
وللتحقق من مبدأ ثبوت الطاقة

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{1}{2} m\omega^2 \; a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t \; + \frac{1}{2} m\omega^2 \; a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + b^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)) \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 + b^2) = \text{Constant} \end{aligned}$$

الحـــــركة في المستوي القطبي

Motion in Polar Co-ordinates

من المناسب في بعض المسائل استخدام احداثيات أخرى غير الاحداثيات الكارتيزية ومن هذه الاحداثيات هي الاحداثيات القطبية.العلاقة بين الاحداثيات القطبيـــة والكارتيزية كما بالهمدسة تتعين من



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

■ السرعة الزاوية و العجلة الزاوية Angular Velocity and Acceleration

نعتبر جسيم يتحرك في مستوى ، وأن O نقطة ثابتة فيه (تسمى القطب) وكذلك مســـتقيم OX ثابت في المستوى. عند اللحظة الزمنية t يكون موضع الجسيم عند النقطة P حيـــث OP يصنع زاوية θ مع الخط الثابت OX . الزاوية θ تسمى الازاحة الزاوية للجسيم عند هذه اللحظة وبعد مرور زمن صغير δt نفرض أن الجسيم عند الموضع Q حيث OQ يصنع زاوية $\theta + \delta\theta$ مع الخط الثابت ، أي أن الجسيم أُزيح ازاحة زاوية $\delta\theta$ في زمن δt ومن ثم تكون السرعة الزاوية المتوسطة للجسيم حول O مساوية $\frac{\delta\theta}{\delta t}$ وعندما تؤول δt إلى الصفر فإننا نحصل على السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ ونرمز لها (عادةً) بالرمز ω أي أن

$$\text{Angular Velocity} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

و تعرف السرعة الزاوية للجسيم حول O بأنها معدل تغير الازاحة الزاوية بالنســـبة للـــزمن وايضاً فإن العجلة الزاوية للجسيم حول O هي معدل تغـــير الســـرعة الزاويـــة بالنســـبة للزمن أي أن

$$\text{Angular acceleration} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\dot{\theta}}{\delta t} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

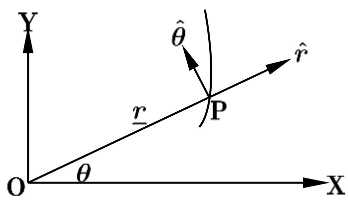
■ سرعة و عجلة الجسيم في الاحداثيات القطبية

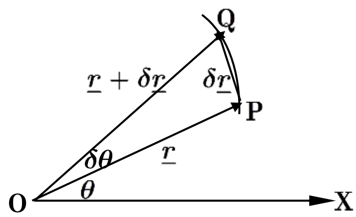
تستعمل هذه الاحداثيات في التحليل لدراسة حركة مستوية عندما تنشأ عجلة الجسيم من مركز أو قطب ثابت ويُختار هذا القطب ليكون هو النقطة الثابتة.

من الاحداثيات القطبية يتعين موضع الجسيم عند نقطة ما P بدلالة (r,θ) حيث r هو بعد الجسيم عن نقطة ثابتة O $\underline{r} = \mathbf{OP}$ ، θ هي الزاوية التى يصنعها r مع مستقيم ثابت OX ويلاحظ أن اتجاهي التحليل في هذه الحالة ليسا ثابتين كما كان الحال في الاحداثيات الكارتيزية بل يدوران مع حركة الجسيم. والعلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية (x,y) والاحداثيات القطبية (r,θ) من الهندسة هي

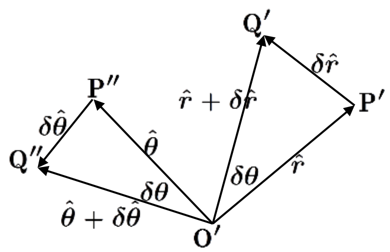
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

نفرض أن $\hat{r}$ هو متجه وحدة في اتجاه تزايد $\underline{r}$ ، وأن $\hat{\theta}$ هو متجه وحدة في الاتجاه العمودي على $\underline{r}$ – في اتجاه تزايد θ كما بالشكل





وبعد فترة زمنية صغيرة δt يصبح الجسيم عند النقطة Q حيث $\underline{\mathbf{OQ}} = \underline{r} + \delta\underline{r}$ و يصنع زاوية $\theta + \delta\theta$ مع المحور الثابت OX و أن متجي الوحدة عند Q في اتجاهي تزايد r,θ هما على الترتيب $\underline{r} + \delta\underline{r},\ \theta + \delta\theta$ وحيث أن $\delta\theta$ زاوية صغيرة فإن



$$\mathbf{P'Q'} = \left|\delta\hat{r}\right| = \mathbf{O'P'}\cdot\delta\theta = \delta\theta$$
$$\mathbf{P''Q''} = \left|\delta\hat{\theta}\right| = \mathbf{O'P''}\cdot\delta\theta = \delta\theta$$

وذلك لأن $\mathbf{O'P'} = |\hat{r}| = 1,\ \mathbf{O'P''} = |\hat{\theta}| = 1$ وعندما $\delta\theta \to 0$ فإن $\delta\hat{r}$ يصبح في اتجاه $\hat{\theta}$ وكذلك $\delta\hat{\theta}$ يصبح في اتجاه $-\hat{r}$ أي أن

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\hat{r}}{\delta\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \qquad \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\hat{\theta}}{\delta\theta} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad (\star)$$

وحيث أن متجه موضع الجسيم عند النقطة P هو $\underline{r} = r\,\hat{r}$ ولإيجاد سرعة الجسيم عند الموضع P بتفاضل العلاقة $\underline{r} = r\,\hat{r}$ بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\underbrace{\frac{d\hat{r}}{d\theta}}_{\hat{\theta}}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} \tag{1}$$

ولكن من المعادلة $(\star)$ حيث $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$ ، $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$ وبالتعويض من تلك العلاقة في المعادلة (1) نجد أن

$$\underline{v} = \underbrace{\dot{r}\,\hat{r}}_{v_r} + \underbrace{r\dot{\theta}\,\hat{\theta}}_{v_\theta}$$

من هذه المعادلة يتضح أن متجه السرعة له مركبتين الأولى v_r في اتجاه تزايد r وتساوي $\dot{r}$ ، والمركبة الثانية v_θ عمودية على المركبة الأولى وفي اتجاه تزايد الزاوية θ وقيمتها $r\dot{\theta}$ كما بالشكل. كما أن مقدار السرعة عند أي لحظة يتعين من

$$v = |\underline{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2}$$

و اتجاه السرعة هو اتجاه المماس لمنحنى المسار عند P ويصنع زاوية φ مع $\underline{r}$ حيث ويصنع متجه السرعة زاوية ψ مع $\underline{r}$ حيث

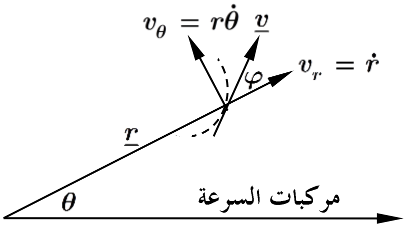
$$\tan\varphi = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}}$$

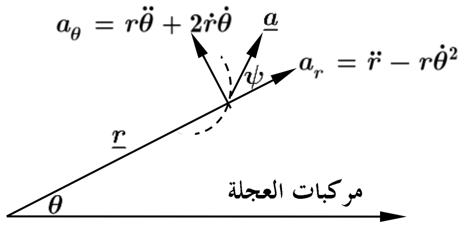
و الآن لايجاد متجه عجلة الجسيم في الاحداثيات القطبية عند أي لحظة نشتق المعادلة بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\frac{d\hat{r}}{dt} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$= \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}_{a_r}\hat{r} + \underbrace{\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)}_{a_\theta}\hat{\theta}$$

وهذه المعادلة تُعطي عجلة الجسيم عند أي لحظة ويتضح أن متجه العجلة له مركبتـــان الأولى a_r في اتجاه تزايد r وتساوي $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ، والثانية a_θ عمودية على المركبة الأولى وفي اتجاه تزايد الزاوية وقيمتها $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ كما بالشكل.





■ **انتبه** المركبة الثانية للعجلة a_θ يمكن كتابتها في الصورة $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$ و ذلك لأن

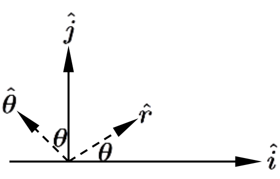
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

ومقدار العجلة يـــتعين مـــن $a = \left|\underline{a}\right| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)^2}$

ويصنع متجه العجلة زاوية ψ مع $\underline{r}$ حيث $\tan\psi = \dfrac{a_\theta}{a_r} = \dfrac{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$

ويمكن اثبات أن $\dfrac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta},\quad \dfrac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$ بطريقة أخرى أبسط كالآتي

من الشكل المجاور وبتحليل متجهي الوحدة $\hat{r}, \hat{\theta}$ في الاتجاهين $\hat{i}, \hat{j}$ نجد أن



$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \qquad (2)$$

(انتبه إلى أن) وكما ذكرنا آنفاً فإن $\hat{i}, \hat{j}$ متجها وحدة ثابتان مقداراً واتجاهاً وبتفاضل شقي المعادلة (2) السابقة بالنسبة للمتغير θ نحصل على

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\ \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\ = -\hat{r}$$

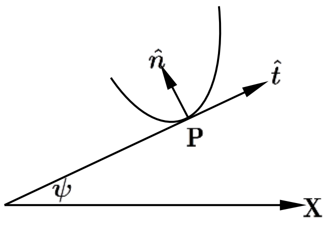
■ **حالة خاصة**: واضح أن الجسيم إذا تحرك على محيط دائرة نصف قطرها ℓ أي أن $r = \ell$ ويكون $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ ومن ثم تتعين سرعة الجسيم من العلاقة $\underline{v} = \ell\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ أي يكون متجه السرعة في الاتجاه العمودي على المماس للدائرة عند الجسيم وأيضاً فإن عجلة الجسيم تتعين عند أي لحظة من $\underline{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\hat{r} + \ell\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$.

الاحداثيات الذاتية (الطبيعية) Intrinsic Coordinates

إذا تحرك جسيم في مستوى حركة مقيدة بمسار معين كانزلاق حلقة على سلك منحنى ثابت الشكل والوضع كانت الاتجاهات الطبيعية للتحليل هي اتجاه المماس لمنحنى المسار والعمودي عليه ويعرفان بالاحداثيات الطبيعية

ناخذ نقطة ثابتة ولتكن O على المنحنى الطبيعي ومن ثم يتم تحديد موضع النقطة P (أية نقطة على المنحنى) بطول القوس $S =$ OP بين النقطة الثابتة O والنقطة P وكذلك بمعرفة الزاوية ψ و التي يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة P مع الاتجاه الافقي OX ومن ثم فإن احداثيات النقطة P هي (S, ψ) والتي تعرف بالاحداثيات الذاتية و عندما تتحرك النقطة P على المنحنى فإن S تتغير مع ψ و العلاقة التي تربط هذا التغير $S = S(\psi)$ هي و تُسمى هذه المعادلة بالمعادلة الذاتية للمسار . أيضاً $\rho = \dfrac{dS}{d\psi}$ حيث ρ يُسمى نصف قطر التقوس أو الانحناء عند النقطة P أما $\dfrac{d\psi}{dS}$ يُسمى الانحناء للمنحنى عند النقطة P .

■ سرعة وعجلة الجسيم في الاحداثيات الذاتية

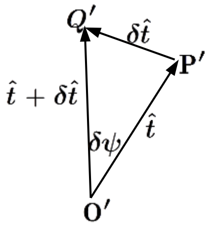


إذا كانت النقطة P نقطة متحركة على المنحنى حيث احداثياها (S, ψ) و بأخذ $\hat{t}$ متجه وحدة في اتجاه المماس للمنحنى عند النقطة P ، $\hat{n}$ متجه وحدة في اتجاه عمودي على المماس للمنحنى عند هذه النقطة – أي في اتجاه نصف قطر الانحناء –

واضح أنه حينما تتحرك النقطة P فإن متجهي الوحدة سيتغيران في الاتجاه من لحظة إلى اخرى – وهذا يعني أهما دوال في الزمن t (مع ثبوت أطوالهما الوحدة) –.

نفرض أن $\hat{n}, \hat{t}$ هما متجها وحدة في اتجاهي المماس لمنحنى المسار و العمودي عليه في اتجاه تزايد ψ. وبعد فترة زمنية صغيرة δt يصبح الجسيم عند الموضع Q حيث متجهي الوحدة في اتجاهي المماس والعمودي عليه يصبحان $\hat{n} + \delta\hat{n}, \hat{t} + \delta\hat{t}$ حيث المماسين عند Q, P يصنعان زاويتين $\psi + \delta\psi, \psi$ مع الخط الأفقي الثابت. نرسم $\hat{t} + \delta\hat{t}, \hat{t}$ المتجهين من نقطة

اصـــــل O' كمــــا بالشــــكل و حيــــث أن $\delta\psi$ زاويـــــة صـــــغيرة فــــإن $P'Q' = |\delta\hat{t}| = O'P'\,\delta\psi = \delta\psi$ حيث $O'P' = |\hat{t}| = 1$ وعندما تؤول $\delta\psi$ إلى الصفر أي أن $\delta\psi \to 0$ فإن $\delta\hat{t}$ يصبح في اتجاه العمودي $\hat{n}$ أي أن $\lim\limits_{\delta\psi \to 0} \dfrac{\delta\hat{t}}{\delta\psi} = \dfrac{d\hat{t}}{d\psi} = \hat{n}$



وحيث أن سرعة الجسيم دائماً تكون في اتجاه المماس للمـــنحنى S وقيمتها $\dot{S} = |\underline{v}| = v$ و عليه فإن متجه الســـرعة في الاحـــداثيات الذاتية هو $\underline{v} = \dot{S}\,\hat{t}$

وبتفاضل تلك العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على متجة العجلة

$$\underline{a} = \frac{d^2S}{dt^2}\hat{t} + \frac{dS}{dt}\frac{d\hat{t}}{dt}, \qquad \because \frac{d\hat{t}}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{t}}{d\psi}}_{\hat{n}}\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}\hat{n} \qquad \Rightarrow \underline{a} = \frac{d^2S}{dt^2}\hat{t} + \frac{dS}{dt}\frac{d\psi}{dt}\hat{n}$$

أو

$$\underline{a} = \ddot{S}\hat{t} + \dot{S}\dot{\psi}\hat{n} \quad \text{Or} \quad \underline{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \quad \text{Or} \quad \underline{a} = \underbrace{v\frac{dv}{dS}}_{a_t}\hat{t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{a_n}\hat{n}$$

لاحظ أن

$$\frac{dS}{dt}\frac{d\psi}{dt} = \dot{S}\frac{d\psi}{dS}\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{\dot{S}} = \dot{S}^2\frac{d\psi}{dS} = \frac{\dot{S}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

أي أن متجة العجلة في الاحداثيات الذاتية لها مركبتان إحداهما a_t في اتجاه المماس ومقدارها $\dfrac{dv}{dt}$ ، والثانية a_n في الاتجاه العمودي على المماس – في اتجــاه نصــف قطــر الانحنـــاء – ومقدارها $\dfrac{v^2}{\rho}$ ومقدار متجه العجلة يتعين من $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2}$

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم حركة مستوية بحيث كانت مركبتا سرعته في الاتجاهين ثابتتين. اثبت أن العجلة تتناسب عكسياً مع نصف قطر المتجه r.

الحـــــــل

حيث أن مركبتي السرعة ثابتتين فإن $\dot{r} = A$ و $r\dot{\theta} = B$ حيث A, B ثـــابتين وبالتفاضـــل بالنسبة للزمن نجد أن

$$\dot{r} = A \quad \Rightarrow \ddot{r} = 0 \qquad \text{و} \qquad r\dot{\theta} = B \quad \Rightarrow r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\because a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_r = 0 - \frac{B^2}{r} = -\frac{B^2}{r}$$

وايضاً

$$\because a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad a_\theta = \underbrace{r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}}_{0} + \dot{r}\dot{\theta} = \frac{AB}{r}$$

وحيث أن مقدار العجلة يتعين من

$$\left|\underline{a}\right| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\frac{B^4}{r^2} + \frac{A^2B^2}{r^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{B^4 + A^2B^2}{r^2}} = \frac{C}{r}, \qquad C = \sqrt{B^4 + A^2B^2}$$

وهذه العلاقة تعنى أن العجلة تتناسب عكسياً مع r أي أن $a \propto \dfrac{1}{r}$

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم على منحنى معادلته القطبية $r = 2\cos\theta$ بحيث أن عجلته تتجه دائماً نحو قطب الاحداثيات. اثبت أن سرعته تتناسب عكسياً مع مربع بعده عن القطب.

الحـــــــل

حيث أن $r = 2\cos\theta$ وبالتفاضل بالنسبة للزمن يكون

$$r = 2\cos\theta \qquad \Rightarrow \dot{r} = -2\sin\theta\ \dot{\theta}$$

وحيث أن العجلة تتجه دائماً نحو القطب فإن

$$a_r = 0 \qquad \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\, r^2\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow d\, r^2\dot{\theta} = 0 \qquad \therefore r^2\dot{\theta} = h \text{ (const.)}$$

ومقدار السرعة يتعين من

$$\begin{aligned}
|\underline{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} &= \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} \\
&= \sqrt{(-2\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + (r\dot{\theta})^2} \\
&= \sqrt{4\sin^2\theta + r^2}\;\dot{\theta} \\
&= \sqrt{4(1-\cos^2\theta) + r^2}\,\dot{\theta} \\
&= \sqrt{4 - 4\cos^2\theta + r^2}\,\dot{\theta} \\
&= \sqrt{4 - r^2 + r^2}\,\dot{\theta} = 2\underbrace{\dot{\theta}}_{h/r^2} = \frac{2h}{r^2}
\end{aligned}$$

أي أن السرعة تتناسب عكسياً مع مربع r

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك نقطة مادية على منحنى بسرعة ثابتة فإذا كانت السرعة الزاوية لها حول نقطة ثابتة O تتناسب عكسياً مع بعدها عن هذه النقطة. اوجد معادلة المسار.

الحــــــــل

بفرض أن سرعة النقطة المادية V ثابت وكذلك فإن السرعة الزاوية للنقطة المادية تتناسب عكسياً مع r أي أن

$$\frac{d\theta}{dt} \propto \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r} \quad (k \text{ is constant})$$

$$\because v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = V \quad (V \text{ is constant})$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{k}{r}\right)^2 = V^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = V^2 - k^2$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{V^2 - k^2} = \mu$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mu \qquad \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}\frac{k}{r} = \mu \qquad \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\mu}{k}d\theta$$

بالتكامل

$$\therefore \ln r = \frac{\mu}{k}\theta + \ln c \;\; (\ln c \text{ is integration constant})$$

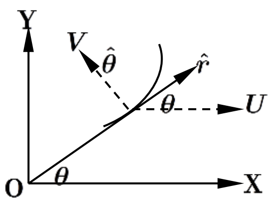
$$\therefore \ln\frac{r}{c} = \frac{\mu}{k}\theta \qquad \Rightarrow r = ce^{\mu/k\,\theta}$$

وهي تعطي معادلة المسار

مثــــ ٤ ــــال

تتحرك نقطة مادية على منحنى بحيث أن مركبتيه ثابتتان في المقدار احداهما U في اتجاه المحور X والثانية V متعامدة على متجه الموضع دائماً. اوجد المعادلة القطبية لمسار النقطة إذا علم أنها بدأت الحركة من الموضع $(a,0^0)$.

الحـــــــل



واضح أن السرعة V في اتجاه متجه الوحدة $\hat{\theta}$ و من الشكل المقابل

وبتحليل السرعة U في الاتجاهين $\hat{r},\hat{\theta}$ نجد أن

$$\frac{dr}{dt} = U\cos\theta \qquad \text{و} \qquad r\frac{d\theta}{dt} = V - U\sin\theta$$

بقسمة هاتين المعادلتين و فصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{U\cos\theta}{V - U\sin\theta} \qquad \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{U\cos\theta}{V - U\sin\theta}d\theta$$

بالتكامل نحصل على

$$\ln r = -\ln(V - U\sin\theta) + \ln c$$

حيث ثابت التكامل $\ln c$ و يتعين من الشرط أن النقطة بدأت الحركة من الموضع $(a,0^0)$

$$\ln a = -\ln(V - U\sin 0) + \ln c \qquad \Rightarrow \ln c = \ln a + \ln V = \ln aV$$

$$\therefore \ln r = \ln aV - \ln(V - U\sin\theta) \qquad \Rightarrow \ln r = \ln \frac{aV}{V - U\sin\theta}$$

$$\therefore \quad r = \frac{aV}{V - U\sin\theta}$$

وهي معادلة مسار النقطة المادية

مثـــال ٥

تتحرك نقطة مادية على منحنى الكتينة $S = c\tan\psi$ وكان اتجاه العجلة ينصف دائماً الزاوية بين المماس للمنحنى والعمودي عليه، فإذا كانت u هي مقدار السرعة عندما $\psi = 0$ أوجد مقداري السرعة والعجلة عند أي موضع .

الحـــــــل

نعلم أن متجه العجلة يتعين من $\underline{a} = v\dfrac{dv}{dS}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n}$ وحيث أن اتجاه العجلة ينصف دائماً الزاوية بين المماس والعمودي عليه فإن مركبتي العجلة متساويتان اي أن

$$\because v\frac{dv}{dS} = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v\frac{dv}{dS} = \frac{v^2}{\rho} \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dS}\rho = v \quad \text{Or}$$

$$\frac{dv}{dS}\frac{dS}{d\psi} = v \qquad \Rightarrow \frac{dv}{d\psi} = v \qquad \Rightarrow \frac{dv}{v} = d\psi$$

باجراء التكامل نحصل على $\ln v = \psi + c$ حيث c ثابت التكامل ويتعين من

$$(\text{at} \quad \psi = 0, \quad v = u, \qquad \therefore c = \ln u)$$

$$\therefore \ln v = \psi + \ln u \qquad \Rightarrow \ln\frac{v}{u} = \psi \qquad \Rightarrow v = ue^{\psi}$$

وهذه العلاقة تُعطي السرعة عند أي موضع ψ ومن معطيات المسألة فإن المسار هو $S = c\tan\psi$ ومن ثم

$$\therefore \rho = \frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

ومن هذا فإن مقدار العجلة يتعين من

$$= \sqrt{\left(v\frac{dv}{dS}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{v^2}{\rho}\right) = \sqrt{2}\,u^2 e^{2\psi}\frac{1}{c\sec^2\psi} = \frac{\sqrt{2}}{c}u^2 e^{2\psi}\cos^2\psi$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت العلاقة بين سرعة جسيم v يتحرك على منحنى مستوٍ وبين عجلته المماسية a_t هي $a_t = \dfrac{1}{1+v}$ فأوجد العلاقة بين v,S و v,t بين إذا علمت أن الجسيم بدأ الحركة من السكون عندما كانت $S=0$.

الحـــــــل

للحصول على علاقة بين v,t حيث أن $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{1+v} \qquad \Rightarrow (1+v)dv = dt$$

وباجراء التكامل يكون $$v + \frac{1}{2}v^2 = t + c_1$$

و للحصول على ثابت التكامل c_1 نستخدم الشرط $v=0$ عندما $t=0$ ومنها $c_1 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,t في الصورة $$v + \frac{1}{2}v^2 = t$$

مرةً أخرى حيث أن $a_t = v\dfrac{dv}{dS}$ وبناءً عليه يكون

$$v\frac{dv}{dS} = \frac{1}{1+v} \qquad \Rightarrow (v+v^2)dv = dS$$

وباجراء التكامل يكون $$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 = S + c_2$$

و للحصول على ثابت التكامل c_2 نستخدم الشرط $v=0$ عندما $S=0$ ومنها $c_2 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,S في الصورة $\dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{1}{3}v^3 = S$

مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية على دائرة نصف قطرها 2 ft بعجلة مماسية ثابتة مقدارها $4\,\text{ft}\sec^{-2}$ و مبتدئاً من سكون من نقطة A على الدائرة. أوجد سرعتها عند عودتها للنقطة A والزمن اللازم لذلك. أوجد عجلة النقطة المادية مقداراً واتجاهاً عند عودتها للنقطة A .

الحـــــــــل

من المعطيات $a_t = 4$ ومن ثم

$$\frac{dv}{dt} = 4 \quad \Rightarrow dv = 4dt \quad \Rightarrow v = 4t + c_1$$

و للحصول على ثابت التكامل c_1 نستخدم الشرط $v = 0$ عندما $t = 0$ ومنها $c_1 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,t في الصورة $v = 4t$

مرةً أخرى حيث أن $v = \dfrac{dS}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dS}{dt} = 4t \quad \Rightarrow dS = 4tdt \quad \Rightarrow S = 2t^2 + c_2$$

و لتعيين قيمة ثابت التكامل c_2 نستخدم الشرط $S = 0$ عندما $t = 0$ على اعتبار أن النقطة A هي نقطة القياس ومنها $c_1 = 0$ وتصبح العلاقة بين S,t في الصورة $S = 2t^2$ ومن هذه العلاقة يتعين الزمن اللازم للعودة للنقطة A حيث تكون النقطة قد قطعت مسافة S مساوية محيط الدائرة وهو 4π ويكون الزمن $4\pi = 2t^2 \quad \therefore t = \sqrt{2\pi}$

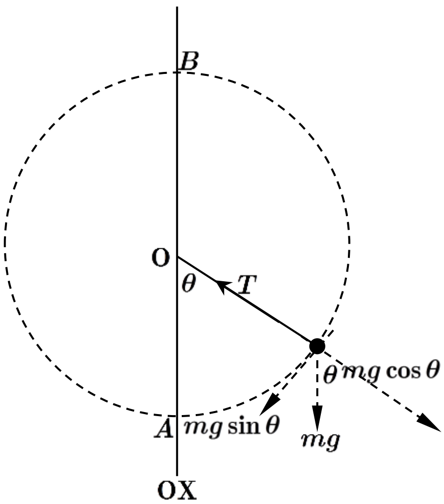
وسرعتها عندها بالتعويض في علاقة السرعة والزمن فيكون $v = 4\sqrt{2\pi}$

وتتعين العجلة بمركبتين احداهما ثابتة مقدارها $a_t = 4\,\text{ft}\sec^{-2}$ والعمودية a_n قيمتها

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{16(2\pi)}{2} = 16\pi \ \text{ft}\sec^{-2}$$

لاحظ أن $\rho = 2\text{ ft}$

■ الحركة على دائرة رأسية



نعتبر حركة جسيم كتلته m مربوط في طرف خيط غير مرن طوله ℓ و طرفه الآخر مثبت في نقطة O. إذا قذف الجسيم من اسفل نقطة A بسرعة افقية u فيتحرك الجسيم على محيط دائرة رأسية نصف قطرها يساوي طول الخيط. يؤثر على الخيط قوتان هما وزنه mg رأسياً لأسفل والشد في الخيط T في اتجاه $\hat{r}$ نحو القطب كما بالشكل. نفرض موضع عام للجسيم بعد دوران للخيط زاوية θ باعتبار مركز الدائرة هو القطب O والرأسي المار بمركز الدائرة هو الخط الثابت OX و حيث أن مركبات العجلة في الاحداثيات القطبية هي

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

وحيث أن $r = \ell \;\; \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ وتؤول مركبات العجلة إلى الصورة

$$a_r = -\ell\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \ell\ddot{\theta}$$

معادلة الحركة في اتجاه متجه الموضع

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

معادلة الحركة في اتجاه تزايد θ

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

وحيث أن $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ وبالتعويض في معادلة الحركة في اتجاه تزايد θ نجد

$$m\ell\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -mg\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ell\dot{\theta}d\dot{\theta} = -mg\sin\theta\; d\theta$$

باجراء التكامل يكون

$$m\ell\dot{\theta}^2 = 2mg\cos\theta + c_1 \qquad (1)$$

حيث ثابت التكامل ويتعين من الشرط الابتدائي للحركة وهو $v = u$ عندما $\theta = 0$ ولكن مركبات السرعة هي $(\dot{r}, r\dot{\theta})$ وهنـــا $r = \ell \ \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ أي أن مـــركبتي الســـرعة $(0, \ell\dot{\theta})$ اي أن $v = u = \ell\dot{\theta}$ عند $\theta = 0$ ومن ثم بالتعويض في المعادلة (1) يكون

$$m\frac{u^2}{\ell} = 2mg + c_1 \qquad \Rightarrow c_1 = m\frac{u^2}{\ell} - 2mg$$

و تصبح المعادلة (1)

$$m\ell\dot{\theta}^2 = 2mg(\cos\theta - 1) + m\frac{u^2}{\ell} \qquad \Rightarrow \ell^2\dot{\theta}^2 = 2g\ell(\cos\theta - 1) + u^2$$

$$\therefore v = \ell\dot{\theta} = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - 1) + u^2} \tag{2}$$

وهذه العلاقة تعطي السرعة عند اي موضع θ ولتعيين الشد T في الخيط نعوض عن $\ell\dot{\theta}^2$ في معادلة الحركة في اتجاه متجه الموضع أي أن

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \qquad \Rightarrow T = mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{u^2}{\ell} \tag{3}$$

وجدير بالذكر أننا هنا استخدمنا الاحداثيات القطبية ويمكن الحصول على نفس النتـــائج إذا استخدامنا الاحداثيات الذاتية

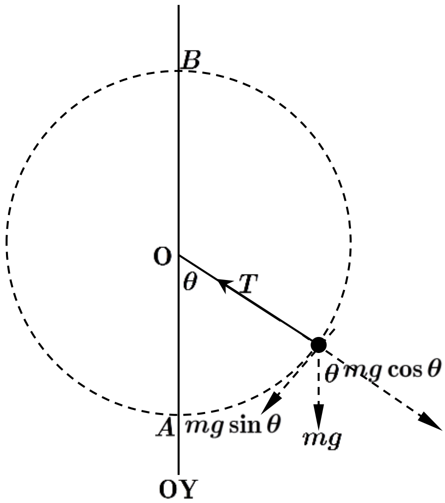
نلاحظ من المعادلة (2) أن اصغر قيمة للسرعة عند $\theta = \pi$ (أعلى نقطـــة في الـــدائرة B) وتساوي $v_B^2 = u^2 - 4g\ell$ ولكي يتم الجسيم دورة كاملة يجب أن تزيد سرعته v_B عـــن الصفر أي ان $u^2 - 4g\ell > 0$ ويكون الشرط اللازم لكي يعمل الجسيم دورات كاملة هو $u > 2\sqrt{g\ell}$ ، و إذا نقصت السرعة الابتدائية عن $2\sqrt{g\ell}$ فإن سرعة الجسيم تنعدم قبل أن يصل إلى أعلى نقطة و بذلك يعود الجسيم والخيط مرة اخرى. كما ينعدم الشد في الخيط عند نقطة معينة تتعين زاويتها θ من $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{u^2}{3g\ell}\right)$ (المعادلة (3))

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

جسيم كتلته m متصل بخيط خفيف غير مرن يرسم دائرة في مستوى رأسي فإذا كان الشد عند أعلى نقطة في المسار $4mg$ فأوجد الشد عند أي موضع واثبت أن الشد في الخيط عند أسفل نقطة للمسار هي $10mg$.

الحـــــــل



نعتبر أن طول الخيط ℓ والقوتان المؤثرتان على الجســـيم اثناء حركته هما وزنه mg والشد في الخيط T، نعتـــبر مركز الدائرة هو القطب O (النقطة الثابتة) و نأخـــذ OY هو خطاً ابتدائياً إلى أسفل وبالتالي معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر و في الاتجاه العمودي عليه (في اتجاه تزايد θ) هما (انتبه $r = \ell \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$)

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta \qquad (2)$$

وحيث أن $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ وبالتعويض في المعادلة (1) والتكامل

$$\ell\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -g\sin\theta \quad \Rightarrow \ell\dot{\theta}d\dot{\theta} = -g\sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \ell\dot{\theta}^2 = 2g\cos\theta + c \qquad (3)$$

حيث c ثابت التكامل وبالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (1) نحصل على

$$T = m(2g\cos\theta + c) + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta + C \qquad (4)$$

ومن معطيات المسألة الشد عند أعلى نقطة على المسار يســـاوي $4mg$ أي أن $T = 4mg$ عندما $\theta = \pi$ و منها يكون $C = 7mg$ و تصبح المعادلة (4) في الصورة

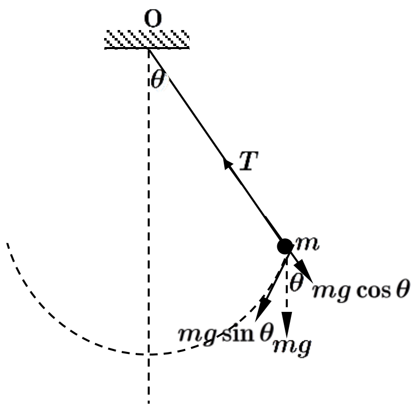
$$T = mg \;\; 3\cos\theta + 7$$

هذه العلاقة تعطي قيمة الشد عند أي موضع θ و قيمة الشد عند أسفل نقطة أي عندما $\theta = 0$ يكون الشد $T = mg\ \ 3\cos 0 + 7\ \ = 10mg$

لاحظ أننا في حل المثال استخدمنا الاحداثيات القطبية ويمكن اعادة حل المثال باستخدام الاحداثيات الطبيعية.

اثبت أن حركة البندول البسيط هي حركة توافقية بسيطة واجد زمنها الدوري.

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طرف خيط غير مرن (ساق خفيفة) مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طول الخيط وليكن b . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في اتجاه المماس لقوس الدائرة هى

$$mb\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\sin\theta$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\sin\theta \cong \theta$ ومن ثم تؤول المعادلة السابقة إلى الصورة

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\theta \qquad \text{Or} \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$. المعادلة الأخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من

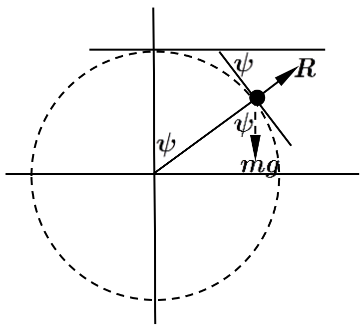
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريــق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثـــانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـــ " بندول الثواني ".

مثـــ ٢ ـــال

يترلق جسيم كتلته m على دائرة نصف قطرها b ملساء من الخارج مبتدئاً من السكون من أعلى نقطة من الدائرة. اوجد سرعة الجسيم عند اي موضع و كذلك رد الفعل للدائرة على الجسيم ، ثم اوجد الموضع الذي يترك فيه الجسيم الدائرة.

الحـــــــل



حيث أن القوى المؤثرة على الجسيم اثناء الحركة همـــا وزنه mg و رد الفعل العمودي علـــى الممـــاس R سنعتبر المستوى الأفقي المار بمركز الدائرة كمســـتوى قياس. معادلة الحركة للجسيم في اتجاه المماس هي

$$mv\frac{dv}{dS} = mg\sin\psi \quad \text{Or} \quad v\frac{dv}{d\psi}\frac{d\psi}{dS} = g\sin\psi \ \left(\frac{dS}{d\psi} = b\right)$$

$$\Rightarrow vdv = bg\sin\psi\ d\psi$$

بالتكامل نحصل على $v^2 = C - 2bg\cos\psi$

وثابت التكامل C يتعين من الشرط الابتـــدائي و هـــو $v = 0$ عنـــدما $\psi = 0$ ومنـــها $C = 2bg$ وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة في الصورة

$$v^2 = 2bg(1 - \cos\psi)$$

معادلة الحركة في الاتجاه العمودي على المماس هي

$$m\frac{v^2}{b} = mg\cos\psi - R \qquad \Rightarrow R = mg\cos\psi - m\frac{v^2}{b}$$

$$\Rightarrow \quad R = mg\cos\psi - 2mg(1-\cos\psi)$$
$$= mg(3\cos\psi - 2)$$

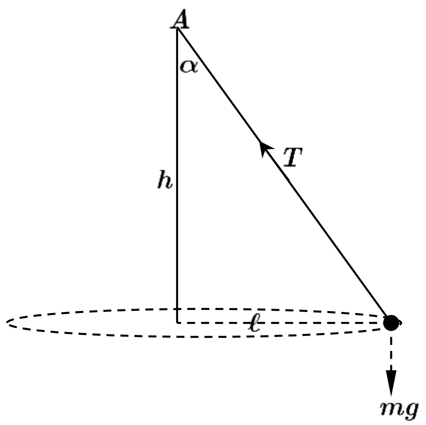
المعادلة الأخيرة تعين رد فعل الدائرة على الجسيم R عند أي موضع ψ ويترك الجسيم الدائرة عندما يتلاشى رد الفعل أي أن $R = 0$ و من العلاقة الاخيرة نحصل على

$$mg(3\cos\psi - 2) = 0 \qquad \Rightarrow \cos\psi = \frac{2}{3}$$

أي أن الجسيم يترك الدائرة عندما يتزلق مسافة رأسية تساوي ثلث نصف قطر الدائرة

مرةً أخرى استخدمنا في حل هذا المثال الاحداثيات الطبيعية ويمكن الحل ايضاً باستخدام الاحداثيات القطبية – كما يمكن الحل باستخدام مبدأ الشغل والطاقة.

■ الحركة على دائرة أفقية (البندول المخروطي)



يتكون البندول المخروطي من نقطة مادية كتلتها معلقة في نهاية خيط طرفه الآخر مثبت ثم قذفت النقطة المادية بحيث تتحرك في دائرة أفقية بسرعة زاوية ثابتة كما بالشكل هذا ولدراسة حركة البندول المخروطي ، نفرض أن النقطة المادية تتحرك بسرعة زاوية ثابتة ω على محيط دائرة نصف قطرها ℓ وبالتالي فإن سرعة النقطة المادية و عجلتها هما على الترتيب

$$v = \omega\ell, \qquad a_t = \frac{v^2}{\ell} = \omega^2\ell \; .$$

كذلك نجد أن القوى المؤثرة على حركة النقطة المادية هما قوتا الوزن mg و قوة الشد في الخيط T ، حيث أن النقطة المادية تتحرك في دائرة أفقية فإن مركبة الشد رأسياً لأعلى تساوي الوزن والمركبة الأفقية للشد هي التي تحفظ حركة النقطة المادية في الدائرة و تكون معادلة الحركة في الدائرة الأفقية هي

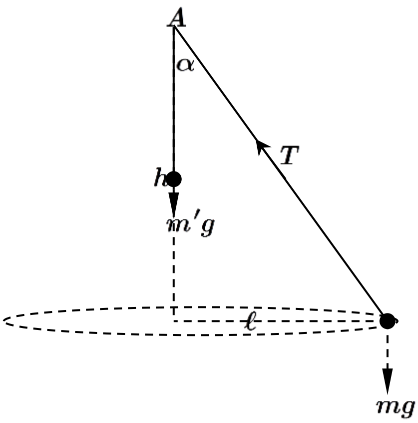
$$m\omega^2\ell = T\sin\alpha$$

و معادلة الاتزان في الاتجاه الراسي هي $\omega mg = T\cos\alpha$

و من المعادلتين السابقتين نحصل على $\tan\alpha = \frac{\omega^2\ell}{g}$ ولكن من الشكل نجد أن $\tan\alpha = \frac{\ell}{h}$ – حيث h يمثل المسافة من نقطة تثبيت طرف الخيط A حتى مركز الدائرة الأفقية – و من ثم نحصل على $\sqrt{\frac{g}{h}} = \omega$ و الزمن الـــدوري يعطـــى بـــــ $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$. العلاقـــة $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ تعطى العلاقة بين ω, h ومنها نتبين أن $h \propto \frac{1}{\omega^2}$ ، أي أن المسافة الرأسية للنقطة المادية أسفل A تتناسب عكسياً مع مربع السرعة الزاوية أي ω^2.

مثـــ ٣ ـــال

كتلتان m, m' متصلتان بخيط خفيف طوله ℓ يمر من حلقة صغيرة ثابتـــة. اوجـــد عـــدد الدورات التي تدورها الكتلة m في الثانية كبندول مخروطي لكي تظل الكتلة m' معلقة في حالة سكون على بعد h من الحلقة.



الحـــــــل

الكتلة m' في حالة سكون (متزنة) تحت تـــأثير وزنهـــا $m'g$ والشد في الخيط T

$$T = m'g$$

معادلة الحركة للكتلة m في اتجاه نصف قطر الـــدائرة الأفقية هي

$$m(\ell - h)\sin\alpha(2\pi n)^2 = T\sin\alpha$$

و ذلك بفرض أن n هي عدد الدورات التي تدورها الكتلة m في الثانية ، α هي الزاويـــة التي يصنعها الخيط مع الرأسي المار بالحلقة ، بالتعويض من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نجد أن

$$4\pi^2 n^2 m(\ell - h) = m'g$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m'g}{m(\ell - h)}}$$

■ مســـــائل Problems ■

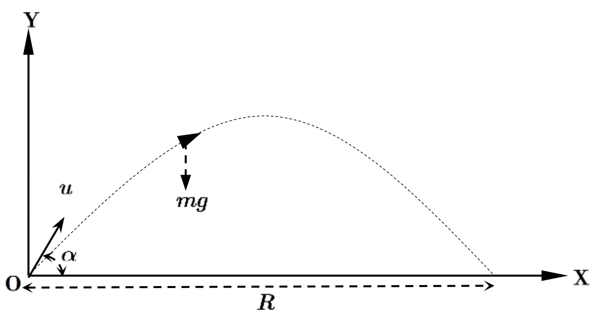
حركة المقذوفـــات

Projectiles Motion

تُعتبر حركة المقذوفات من اهم التطبيقات على الحركة المستوية للنقطة المادية (الجسيم). مـــن المعلوم أن المقذوفات تتعرض اثناء حركتها لجذب الأرض وكذلك مقاومـــة الهـــواء وبدايـــةً سنهمل مقاومة الهواء وسنعتبر أيضاً أن عجلة الجاذبية ثابتة في المقدار خلال حركة المقـــذوف وذلك للحصول على صورةٍ تقريبيةٍ لحركة المقذوف والتي بدورها تلقي ضوءاً لا بأس به على الحركة الحقيقية . وتُستخدم الاحداثيات الكارتيزية عادةً لدراسة هذا النوع مـــن الحركـــة- حيث نستخدم محورين متعامدين ثابتين هما غالباً OX, OY – على أن تُستكمل دراسة حركة المقذوفات مع الأخذ في الاعتبار مقاومة الهواء لاحقاً – إن شاء الله تعالى.

■ معادلات الحركة Equations of Motion

نعتبر الآن حركة مقذوف قُذف من نقطة O بسرعة مقدارها u وفي اتجاه يصنع زاوية α مع المحور الأفقي. كما ذكرنا آنفاً ستحرك الجسيم تحت تأثي قوة الوزن فقط (مقاومـــة الهـــواء أُهملت) وهي – كما نعلم – قوة رأسية إلى أسفل. من الواضح أم مسار المقذوف واقـــع في مستوى رأسي لذلك من المناسب استعمال الاحداثيات الكارتيزية – كما ذكرنـــا ســـالفاً – ولتكن نقطة الأصل هي نقطة القذف O . نفرض أن الجسيم يصل إلى سطح الأرض عنـــد النقطة A بعد زمن ما ومن ثم سنأخذ المحور OX في اتجاه OA والمحـــور OY هـــو المحـــور العمودي على OX في مستوى الحركة كما هو موضح بالشكل.



نفرض أن المقذوف بعد زمن t كان يشغل الموضع P والذي احداثياته (x, y) ومن ثم بكتابة قانون نيوتن الأساسي في الاتجاهين الأفقي والرأسي يكون:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \text{and} \qquad m\ddot{y} = -mg \tag{1}$$

بالقسمة على m وتكامل جزئي (1) المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = c_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = c_2 - gt \tag{2}$$

حيث c_1, c_2 ثابتا التكامل واللذان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائيـــة للحركـــة. عنـــد $t = 0$ يكون $\dot{x} = u\cos\alpha,\ \dot{y} = u\sin\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = u\cos\alpha$ و $c_2 = u\sin\alpha$ وبالتالي تأخذ المعادلة (2) الصورة الرياضية

$$\dot{x} = u\cos\alpha \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt \tag{3}$$

مرةً أخرى بأجراء التكامل بالنسبة للزمن لشقيّ المعادلة (3) ينتج أن

$$x = (u\cos\alpha)t + c_3 \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4 \tag{4}$$

ايضاً الثابتان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة حيث عند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = 0,\ y = 0$ ومنها نجد أن $c_3, c_4 = 0$ و المعادلة (4) تصبح

$$x = (u\cos\alpha)t \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

وبذلك نكون قد أوجدنا مركبتا سرعة المقذوف عند أي لحظة زمنية من جزئي المعادلـــة (3) وأيضاً موضع المقذوف يتعين عند أي لحظة من جزئي المعادلة (5) ونلاحظ من الشق الأول من المعادلة (3) نجد أن المركبة الأفقية للسرعة $\dot{x}$ دائماً ثابتة و تساوي $u\cos\alpha$ أمـــا المركبـــة الرأسية $\dot{y}$ فتعتمد على الزمن . ويُسمى جزئا المعادلة (5) بالمعـــادلتين البـــارامتريتين لمســـار القذيفة.

أهم خصائص حركة المقذوفات

■ أقصى ارتفاع للمقذوف Maximum Height

كما علمنا أن المركبة الأفقية للسرعة تظل ثابتة بينما تتناقص المركبة الرأسية حتى تنعدم عند موضع ما والذي يُمثل أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف ، عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الشق الثاني من المعادلة (3) نحصل على زمن الوصول إلى اقصى ارتفاع وليكن T وهو

$$T = \frac{u \sin \alpha}{g} \qquad (6)$$

ونحصل على أقصى ارتفاع Y بأن نضع $t = T$ في الجزء الثاني من المعادلة (5) أي أن أقصى ارتفاع يتعين من

$$Y = (u \sin \alpha)T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (7)$$

■ زمن الطيران (التحليق) Time of flight

يُعرف زمن الطيران بأنه الزمن المنقضي بين لحظة اطلاق القذيفة وحتى لحظة مرورها بالمستوى الأفقي المار بنقطة القذف (عند النقطة A) وسنرمز له بالرمز $T^\star$ وحيث أنه عند النقطة A يكون $y = 0$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الجزء الثاني من المعادلة (5) يكون

$$0 = (u \sin \alpha)t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (8)$$

المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية في الزمن t وجذراها هما

$$T^\star = 0, \qquad T^\star = \frac{2u \sin \alpha}{g} \qquad (9)$$

الجذر الأول $T^\star = 0$ عند بداية قذف الجسيم عند نقطة الأصل والجذر الثاني يُمثل زمن التحليق ومن الملاحظ من المعادلتين (6) و (9) نجد أن $T^\star = 2T$ وهذا يعني أن الزمن الذي يأخذه المقذوف من لحظة اطلاقه حتى وصوله الى اقصى ارتفاع يساوي زمن وصول المقذوف من أقصى ارتفاع غلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف.

■ مدى القذيفة على المستوى الأفقي Range

ويُقصد به طول المستقيم الواصل من نقطة القذف وحتى النقطة A (في نفس مستوى نقطة القذف) ولحساب المدى R نضع $t = T^*$ في الجزء الأول من المعادلة (5) ، أي أنه للحصول على صيغة رياضية للمدى على المستوى الأفقي نعوض عن الزمن بقيمة زمن التحليق في الجزء الأول من المعادلة (5) ومنها

$$R = (u\cos\alpha)T \qquad \Rightarrow R = \frac{2u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (10)$$

و واضح أن المدى R يبلغ أقصى قيمة له – عند قيمة معينة للسرعة – عندما $\sin 2\alpha = 1$ أي عندما $\alpha = \pi / 4$ ويكون المدى حينئذ مساوياً

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \qquad (11)$$

من المعادلة (10) نلاحظ أن المدى الأفقي يمكن الحصول عليه بقيمتين لزاوية القــذف همــا $(\alpha, \pi / 2 - \alpha)$ وذلك لأن $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

■ معادلة المسار لمقذوف Path Equation

بحذف البارامتر t بين جزئي المعادلة (5) نحصل على ما يُعرف بمعادلة المسار الكارتيزيــة في الصورة الرياضية

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad (12)$$

و يتضح من المعادلة السابقة أنه لقيمة معينة للسرعة توجد زاويتان لإصابة الهدف.

ايضاً يمكن وضع المعادلة (12) في الصورة

$$y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2u^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2$$

ومنها نلاحظ أن مسار القذيفة هو قطع مكافئ رأســه النقطــة $\left(\dfrac{u^2\sin 2\alpha}{2g}, \dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$

ومحوره رأسي إلى أسفل وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\dfrac{g}{2u^2\cos^2\alpha}$

■ مدى القذيفة على مستوى مائل Inclined Range

لإيجاد مدى القذيفة على مستوى مائل. نفرض أن الجسيم قُذف من نقطــة O بســرعة u وزاوية قذف α مع الأفقي أعلى مستوى مائل– يميل على الأفقي بزاوية φ – كما بالشكل وأن اتجاه القذف يقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى المائــل ، نفــرض أن الجسيم يصطدم بالمستوى المائل عند النقطة M ولتكن احداثياتها (x, y) . فإذا كان $R^\star$ هو المدى على المستوى المائل – المطلوب تعيينه – فإن

$$x = R^\star\cos\varphi, \qquad y = R^\star\sin\varphi$$

ونعلم أن هذين الاحداثيين يحققان معادلة المسار (12) وعلى ذلك وبالتعويض في معادلة المسار ينتج أن

$$R^\star\sin\varphi = R^\star\cos\varphi\tan\alpha - \frac{gR^{\star 2}\cos^2\varphi}{2u^2}\sec^2\alpha$$

ومن هذه المعادلة إما $R^\star = 0$ وهو مناظر لنقطة الأصل أو

$$R^\star = \frac{2u^2}{g}\ \cos\varphi\tan\alpha - \sin\varphi\ \cos^2\alpha\sec^2\varphi$$

$$= \frac{2u^2\cos\alpha}{g\cos^2\varphi}\ \cos\varphi\sin\alpha - \sin\varphi\cos\alpha\ = \frac{2u^2\cos\alpha}{g\cos^2\varphi}\sin(\alpha-\varphi) \qquad (13)$$

هذه المعادلة تُعطي المدى لقذيفة على مستوى مائل. كما يتضح من المعادلة أيضاً أن أقصــى مدى على المستوى المائل (بزاوية φ) يحدث عندما تكون $\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)$ أكبر ما يمكن وحيث أنه من المعلوم من حساب المثلثات

$$2\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi) = \sin(2\alpha-\varphi) - \sin\varphi$$

وعلى هذا فإن اقصى مدي على المســتوى المائــل يمكــن الحصــول عليــه هــو عنــدما $\sin(2\alpha-\varphi) = 1$ أي عندما

$$2\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{Or} \qquad \alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\text{Or} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \qquad \text{Or} \qquad \alpha = \varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tag{14}$$

أي أننا نحصل على أقصى مدى على المستوى المائل عندما ينصف اتجاه القذف الزاوية بين الراسي والمستوى المائل ويكون اقصى مدى هو

$$R^{\star}_{\max} = \frac{u^2}{g\cos^2\varphi}\ \ 1 - \sin\varphi \ \ = \frac{u^2}{g(1+\sin\varphi)} \tag{15}$$

ونلاحظ أنه بوضع $\varphi = 0$ في المعادلتين (14) ، (15) نحصل على النتائج المناظرة في حالة المستوى الأفقي. تنبيه للحصول على المدى لمستوى مائل لأسفل نضع $-\varphi$ بدلا من φ .

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــال ١

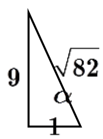
رصدت حركة مقذوف فوجد أن اقصى ارتفاع له فوق المستوى الأفقي المار بنقطة القذف هو 900 ft و أن مداه على المستوى الأفقي 400 ft عيّن سرعة القذف مقداراً واتجاهاً.

الحـــــل

حيث أن اقصى ارتفاع والمدى يعينان من المعادلتين

$$Y = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ومنها بالتعويض بالقيم المعطاة



$$900 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad 400 = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

بقسمة المعادلتين نحصل على

$$\frac{9}{4} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Big/ \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{\tan\alpha}{4} \quad \therefore \tan\alpha = 9$$

وهي اتجاه سرعة القذف ومقدار السرعة يتعين بالتعويض في أي من المعادلتين ويكون

$$900 = \frac{u^2}{2g} \times \frac{81}{82} \Rightarrow u^2 = \frac{1800 \times 82 \times 32.2}{81} \quad \text{Or} \quad u \cong 242.23 \quad (g = 32.2 \text{ ft sec}^{-2})$$

حيث أن $\tan\alpha = 9$ فإن $\sin\alpha = \frac{9}{\sqrt{82}}$ كما بالشكل.

مثـــال ٢

قذف جسيم من نقطة بسرعة ابتدائية مقدارها $3\sqrt{gh}$ لتصيب هدفاً عنـــد النقطـــة $(3h, h)$ بالنسبة إلى محورين متعامدين مارين بنقطة القـــذف. أوجـــد زاويـــتي القـــذف الممكنـــتين لإصابةالهدف.

الحـــــل

حيث أن الهدف عند النقطة $(3h, h)$ ومن ثم فهذه النقطة تحقق معادلة المسار أي أن

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore h = 3h\tan\alpha - \frac{g(3h)^2}{2(9\,gh)\cos^2\alpha} \quad \text{Or} \quad 1 = 3\tan\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha}$$

$$2 = 6\tan\alpha - \sec^2\alpha \Rightarrow 2 = 6\tan\alpha - (1+\tan^2\alpha) \quad \therefore \tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 3 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\alpha$ وجذراها هما

$$\tan\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \quad \text{i.e.} \quad \tan\alpha_1 = 3+\sqrt{6}, \quad \tan\alpha_2 = 3-\sqrt{6}$$

وهما الزاويتان الممكنتان لإصابة الهدف.

مثـــ ٣ ـــال

إذا كان T هو زمن وصول قذيفة إلى نقطة P على مسارها وكان T' هو زمن وصولها من تلك النقطة إلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف أوجد ارتفاع النقطة P عن المستوى الأفقي للقذف.

الحـــــــل

حيث أن زمن الطيران هو الزمن من لحظة انطلاق القذيفة وحتى وصولها الى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف وكما رأينا فإن

$$\text{Time of Filght} = \frac{2u\sin\alpha}{g} = T + T' \qquad \therefore u\sin\alpha = \frac{1}{2}g \;\; T + T'$$

ولحساب ارتفاع النقطة P حيث $y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ولذلك

$$y_{\mathrm{P}} = y\big|_{t=T} = (\underbrace{u\sin\alpha}_{\frac{1}{2}g(T+T')})T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g(T+T')T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gTT'$$

مثـــ ٤ ـــال

أطلقت قذيفة على هدف معين في مستوى أفقي يمر بنقطة القذف فسقطت قبل الهدف بمسافة ℓ عندما كانت زاوية القذف 15^0 وعندما قُذفت بنفس السرعة وضوعفت زاوية القـــذف سقطت بعد الهدف بمسافة ℓ . أوجد الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف.

الحــــــــل

باعتبار أن سرعة القذف هي u وأن هو المدى الصحيح لإصابة الهدف هو R وبناءً عليه فإن المدي في الحالة الأولى هو $R-\ell$ والمدى في الحالة الثانية هو $R+\ell$ وحيث أن معادلة المدي هي

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

في الحالة الأولى
$$R-\ell=\frac{u^2\sin 30}{g}=\frac{u^2}{2g}$$

في الحالة الثانية
$$R+\ell=\frac{u^2\sin 60}{g}=\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$$

من هاتين المعادلتين ينتج أن – بالجمع –

$$2R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{2}\qquad \text{Or}\qquad R=\frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{4}\qquad (1)$$

وبفرض أن هي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف θ وبالتالي يكون (2) $R=\frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن $\sin 2\theta=\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$ أي أن

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

وهي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف

مثـــ ٥ ـــال

أطلقت قذيفة من نقطة الأصل فوجد أنها تمر بالموضعين $(12,0)$, $(8,2)$ على مسارها أوجـــد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً واحسب الزمن الذي تأخذه القذيفة لتمر بالموضعين الســـابقين وسرعتها عند هذين الموضعين.

الحــــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(12,0)$, $(8,2)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة $(8,2)$ فإن
$$2 = 8\tan\alpha - \frac{g(8)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة $(12,0)$ فإن
$$0 = 12\tan\alpha - \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في 9 والثانية في 4 والطرح نحصل على

$$18 = 24\tan\alpha \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

وهي اتجاه سرعة القذف مع الأفقي و لتعيين مقدار السرعة بالتعويض في أي من المعادلتين

$$\Rightarrow 12\tan\alpha = \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha} \quad \therefore\ u^2 = \frac{g(12)^2}{24\tan\alpha\cos^2\alpha} = \frac{6g}{\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{2}g$$

$$\therefore\ u = \sqrt{\frac{25}{2}g}$$

<u>على الدارس أن يكمل الحل</u>

مثـــ ٦ ـــال

قُذفت نقطة مادية لتمر بالموضعين $(a,b),\ (b,a)$ على مسارها حيث $a > b$. اثبت أن المدى على المستوى الأفقي يساوي $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ و أن زاوية القذف أكبر من $\tan^{-1}3$.

الحـــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(a,b),\ (b,a)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة (b,a) فإن
$$a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة (a,b) فإن
$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في a والثانية في b والطرح نحصل على

$$\underbrace{a^2-b^2}_{(a+b)\cancel{(a-b)}} = \frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\cancel{(a-b)}$$

$$\text{Or} \quad a+b=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Or} \quad \frac{ab}{a+b}=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$$

مرةً أخرى بضرب المعادلة الأولى في a^2 والثانية في b^2 و الطرح نحصل على

$$\underbrace{a^3-b^3}_{(a^2+ab+b^2)\cancel{(a-b)}} = ab\cancel{(a-b)}\tan\alpha \qquad \Rightarrow ab\tan\alpha = a^2+ab+b^2$$

ولكن معادلة المدي تُعطى من

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{2u^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

$$=\underbrace{\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}}_{ab/(a+b)}\tan\alpha=\frac{ab}{a+b}\tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وهو المطلوب $\qquad \therefore R=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

وحيث أننا أثبتنا أن $\qquad \tan\alpha=\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab}$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\pm 3=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}+3=\frac{a-b\ ^{2}}{ab}+3$$

و حيث أن المقدار $\dfrac{a-b\ ^{2}}{ab}>0$ فإن $\tan\alpha>3$ أو $\alpha>\tan^{-1}3$

مثـــال ٧

أطلقت قذيفة بسرعة h من سطح الأرض بحيث تمر بنقطة أقصى بعد لها A في نفس المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. اثبت أنه لكي يصيب المقذوف هدفاً على ارتفاع h فوق النقطة A بحيث أن زاوية القذف في الحالتين واحدة فإن سرهة القذف يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$.

الحـــل

واضح أن أقصى بعد حينما تكون الزاوية 45^0 ويكون المدى أي بعد النقطة A هو $R=\dfrac{u^2}{g}$

ولكي تصيب القذيفة الهدف B و الذي يقع على ارتفاع h فوق النقطة A نفترض أن السرعة أصبحت v ومن ثم يجب أن تكون النقطة $B=\left(\dfrac{u^2}{g},h\right)$ تحقق معادلة المسار

$$h=\frac{u^2}{g}\tan 45-\frac{g\ \left(u^2\ /\ g\right)^2}{2v^2\cos^2 45}\qquad \Rightarrow h=\frac{u^2}{g}-\frac{u^4}{gv^2}\quad \text{Or}\quad \frac{u^4}{gv^2}=\frac{u^2}{g}-h$$

$$\frac{u^4}{gv^2}=\frac{u^2-gh}{g}\qquad \text{Or}\quad v^2=\frac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}>u$$

أي أن السرعة يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$

مثـــ ٨ ـــال

قذف جسيم بسرعة $64\ \text{ft sec}^{-1}$ وفي اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الأفقي أوجد المدى على مستوى يميل بزاوية 30^0 على الأفقي إذا قذف الجسيم أعلى المستوى أو أسفل المستوى.

الحـــــــل

حيث أن المدى على المستوى المائل يتعين من – $g=32.2\ \text{ft sec}^{-2}$ –

$$R=\frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

حيث $u=64\ \text{ft sec}^{-1}$ ، $\varphi=30^0$ ، $\alpha=45^0$ نجد أن المدى على المستوى المائل لأعلى

$$R=\frac{2(64)^2\cos 45\sin(45-30)}{32.2\cos^2 30}=\frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \sqrt{3}-1\ \cong\ 62.08\ \text{ft}$$

ثم بالتعويض عن $\varphi=-30^0$ نحصل على المدى على المستوى المائل إلى أسفل

$$R=\frac{2(64)^2\cos 45\sin(45+30)}{32.2\cos^2(-30)}=\frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \sqrt{3}+1\ \cong\ 231.7\ \text{ft}$$

مثـــ ٩ ـــال

إذا كانت النسبة بين مقداري سرعة جسيم مقذوف عند أقصى ارتفاع و عندما يكون على ارتفاع يساوي نصف اقصى ارتفاع هي $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ فاثبت أن زاوية القذف هي 30^0 .

الحـــــل

حيث أن الاحداثي الرأسي عند أي لحظة يتعين من $y = (u\sin\alpha)\, t - \frac{1}{2}gt^2$

وحيث أن أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة A هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

وعند ارتفاع يساوي نصف أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة B هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{4g}$

الزمن الذي يأخذه الجسيم من لحظة انطلاقه حتى يصل إلى النقطة B يتعين من

$$\frac{u^2\sin^2\alpha}{4g} = (u\sin\alpha)\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$2(gt)^2 - 4(gt)u\sin\alpha + u^2\sin^2\alpha = 0 \qquad \Rightarrow gt = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha$$

مركبتا سرعة الجسيم عند النقطة B هما

$$\dot{x}_B = u\cos\alpha, \quad \dot{y}_B = u\sin\alpha - gt = u\sin\alpha - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha$$

ويكون مقدار السرعة عند B هو

$$v = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha\right)^2} = \frac{u}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$$

عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}_A = 0$,$\dot{x}_A = u\cos\alpha$ أي أن

$$v = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = u\cos\alpha$$

وحيث أن $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{6}{7}}$ وبالتالي

$$\frac{\sqrt{2}u\cos\alpha}{u\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \qquad \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{Or} \quad \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{3}{7}$$

$$7\cos^2\alpha = 3 + 3\cos^2\alpha \qquad \Rightarrow 4\cos^2\alpha = 3 \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \alpha = 30^0$$

وهو المطلوب

مثـ ١٠ ـــال

اطلقت كرة من نقطة على سطح الأرض تبعد مسافة a من قاعدة حائط رأسي ارتفاعـــه b إذا كانت زاوية القذف مع الافقي α والكرة مرت بحافة الحائط اثبت أن أقصـــى ارتفـــاع للكرة هو $\dfrac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)}$.

الحـــــــل

نفترض أن سرعة القذف هي u وحيث أن الكرة تمس الحائط ومن ثم فإن النقطة (a,b) تقع على مسار الكرة ومن ثم فهي تحقق معادلة المسار

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Or} \qquad a\tan\alpha - b = \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ u^2 = \frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha}$$

والآن أقصى ارتفاع للكرة

$$\begin{aligned} Y &= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \\ &= \frac{\sin^2\alpha}{2g}\,\frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha} \\ &= \frac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)} \end{aligned}$$

■ حركة مقذوف مع اعتبار مقاومة الهواء

درسنا في الجزء السابق حركة المقذوف مع اهمال مقاومة الهواء وهي حالة مثالية حيث أنه في الواقع توجد مقاومة لحركة الجسيم المقذوف وهي مقاومة الهواء ، دعنا نفترض أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسيم وهي $\gamma m\underline{v}$ (حيث γm ثابت التناسب) والآن بكتابة قانون نيوتن الاساسي وبالتحليل في الاتجاهين الأفقي و الرأسي نحصل على

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\gamma\cancel{m}\dot{x} \quad \text{and} \quad \cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g - \gamma\cancel{m}\dot{y} \tag{1}$$

لاحظ أن $\underline{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ و $\underline{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$ وبتكامل شقي المعادلة (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\ln\dot{x} = c_1 - \gamma t \quad \text{and} \quad \ln\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) = c_2 - \gamma t \tag{2}$$

حيث c_2, c_1 ثابتا التكامل و اللذان يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية للحركة وهي عند $t = 0\dot{x} = u\cos\alpha$ يكون $\dot{y} = u\sin\alpha, \dot{x} = u\cos\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = \ln u\cos\alpha$ و $c_2 = \ln\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$ بالتعويض عن قيمة الثابتين تأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha\ e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \tag{3}$$

وجزئي هذه المعادلة يعينان مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة زمنية. مرةً أخرى بإجراء التكامل بالنسبة للزمن لجزئي المعادلة (3) يكون

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ e^{-\gamma t} + c_3 \quad \text{and} \quad y = -\frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}t + c_4 \tag{4}$$

ايضاً الثابتان c_4, c_3 يمكن تعيين قيمتهما من الشرط الابتدائي للحركة فعند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = y = 0$ ومنها نجد أن

$$c_3 = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}, \qquad c_4 = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$$

وتأخذ المعادلة السابقة (4) الصورة

$$x = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ \ 1 - e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)\ 1 - e^{-\gamma t}\ \ - \frac{g}{\gamma}t \tag{5}$$

وجزئا هذه المعادلة يعينان موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

و للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نضع $\dot{y} = 0$ في المعادلة (3) ومن ثم

$$T = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right) \tag{6}$$

ويتعين أقصى ارتفاع من المعادلة (5) أي أن

$$y = \frac{u\sin\alpha}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 + \frac{\gamma u \sin\alpha}{g}\right)$$

زمن الطيران T' يتعين بوضع $y = 0$ في الشق الثاني من المعادلة (5)

$$T' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)\ 1 - e^{-\gamma T'}$$

أما معادلة المسار فتتعين بحذف البارامتر بين جزئي المعادلة وتأخذ الصورة

$$y = \frac{g}{\gamma u \cos\alpha}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)x + \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{u\cos\alpha}\right)$$

وأخيراً يجب أن نلاحظ أن الحركة التي سبق دراستها عند اهمال مقاومة الهواء هي حالة خاصة من هذه الحالة ويمكن الحصول على جميع النتائج والمعادلات التي سبق الحصول عليها (عند اهمال مقاومة الهواء) بجعل $\gamma \to 0$ فمثلاً للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نستخدم المفكوك اللوغاريتمي

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .....$$

هذا المفكوك صحيح بشرط أن $|x| < 1$ والآن بجعل $\gamma \to 0$ في المعادلة (6) نجد أن

$$\begin{aligned} T &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} - \frac{\gamma^2 u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma^3 u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{\gamma u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) = \frac{u\sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

وهو نفسه زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع والذي سبق الحصول عليه عند اهمال مقاومة الهواء (المعادلة (6)) ونترك للقارئ كتمرين الحصول على بقية النتائج في حالة اهمال مقاومة الهواء.

مثـ ١١ ـــال

قذف جسيم كتلته m بسرعة u و في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاومتـــه تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب يساوي μm . اثبت أن اتجاه حركته يصنع زاويـــة مقدارها α مع الأفقي بعد مضي زمن $\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu u}{g}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.

الحـــــــل

بكتابة معادلتي الحركة للجسيم في الاتجاهين OX,OY والتكامل واستخدام الشروط الابتدائية للحركة كما سبق أن اوضحنا بالتفصيل نحصل على مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة في الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha \;\; e^{-\mu t} \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}$$

حيث أن زاوية القذف هي α وأن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة مع المحور الأفقي تتناقص حتى تنعدم عند أقصى ارتفاع ثم يعكس الجسيم اتجاه حركته لتصبح الزاوية α لأسفل. يصنع اتجاه الحركة زاوية α بعد زمن t يتعين من

$$\tan \; -\alpha \;\; = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} \; - \frac{g}{\mu}}{u\cos\alpha \;\; e^{-\mu t}} = -\tan \;\; \alpha$$

أي أن

$$\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} \; - \frac{g}{\mu} = -u\sin\alpha \;\; e^{-\mu t} \;\; \Rightarrow \left(2u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} \; = \frac{g}{\mu}$$

$$\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right) = e^{\mu t} \qquad\qquad \Rightarrow t = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right)$$

وهو المطلوب.

■ مســـائل Problems ■

قُذف جسيم بسرعة $\underline{u} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j}$ من نقطة A لتصطدم بسقف منزل ارتفاعــه ℓ عـــن المستوى الأفقي المار بالنقطة A . فإذا كان أقصى ارتفاع للجسيم يساوي 2ℓ . فاثبـــت أن سرعة الجسيم عند أصطدامه بسقف المترل تتعين من $\underline{u}_A = a\,\hat{i} - \sqrt{b^2 - 2g\ell}\,\hat{j}$.

الحركــــة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، ثم حركة جسيم في مســـتوى ثم تناولنا في الباب الذي يليه حركة المقذوفات وهي نوع مـــن أنـــواع الحركـــة في المســـتوى وسنتعرف بمشيئة الله في هذا الباب على نوع له أهميه من أنواع الحركة تُســـمى " الحركـــة التوافقية البسيطة " أو الحركة الموجية. إذا تحرك جسيم متذبذباً حول موضع اتزانـــه (وهـــو الوضع الذي إذا زُحزح الجسيم عنه وهو متزن عاد إليه مرةً أخرى) سُميت حركة الجســـيم بالحركة الاهتزازية أو الحركة الدورية وهناك أنواع مختلفة من الإهتزازات منها

♦الإهتزاز الحر أو الحركة التوافقية البسيطة وهى ما سندرسه بالتفصيل.

♦الإهتزاز القسري إذا أثرت قوة قاسرة دورية على جسيم يُقال أن الحركة إهتزاز قسري.

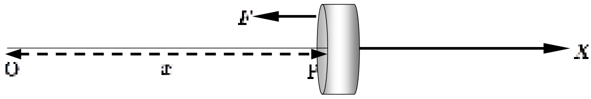
♦الإهتزاز المخمد الحر وفيها يكون الجسيم لقوة مقاومة مثل الاحتكاك والتي تجعـــل ســـعة الذبذبة تتناقص تدريجياً حتى تنعدم ومن ثم يتوقف الجسيم عن الحركة.

♦الإهتزاز القسري المخمد وهذه الحالة تمثل الحالتين السابقتين معاً وفيها يتلاشى تأثير المقاومة تدريجياً مع الزمن ويتبقى تأثير الذبذبة القسرية.

الإهتزاز الحر يُقال أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة وفيها يتحرك الجسيم متذبـــذباً حول موضع اتزانه دون أن تتغير سعة الذبذبة أو الزمن الدوري لها كما أن القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً تتجه نحو نقطة ثابتة أثناء الحركة ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناســـب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تُسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفـــرض أن O هـــي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذي سيمثله المحور OX وأن موضع الجسيم عند اللحظة t هو P حيث $\mathrm{OP} = x$ كما بالشكل. من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = k/m \qquad \text{....(1)}$$



والاشارة السالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الذبذبة ولإيجاد سرعة الجسيم عند أي موضع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad ....(2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج أن $v\dfrac{dv}{dx} = -\omega^2 x$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$v^2 = c_1 - \omega^2 x^2 \qquad ....(3)$$

حيث c_1 هو ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج إلى شروط أبتدائية ولذلك سنعتبر أن أقصى مسافة للجسيم هي a والتي عندها يسكن الجسيم (أي أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c_1 = \omega^2 a^2$ وتُكتب المعادلة (3) في الصورة

$$v^2 = \omega^2 a^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 \;\; a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad .....(4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الأشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه الموجب (أي في اتجاه OX – تزايد x) وسنعتبر الأشارة السالبة إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه المضاد.

والآن لمعرفة موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية نضع $v = dx/dt$ في المعادلة (4) (على اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \omega dt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad ....(5a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل ويُسمى " زاوية الطور " ويُعيّن من الشروط الأبتدائية للحركة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$x = a\sin\;\; \omega t + \epsilon \qquad ......(5b)$$

وهذه المعادلة تُمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالــة الأشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $\left|\sin\ \omega t+\epsilon\ \right|\leq 1$ ومن المعادلة (5 b) يكون

$$|x| = \left|a\sin\ \omega t+\epsilon\ \right| = |a|\left|\sin\ \omega t+\epsilon\ \right| \leq a \qquad \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x = a$ ، $x = -a$ لذلك فإن a تُسمى سعة الحركة التوافقية.

كما يمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x = \pm a$ ، كما تكــون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x = 0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x و $-x$ متساوٍ.

■ الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية ، ومن ثم فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويُعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من أحد أطراف الذبذبة $x = +a$ إلى الطــرف الآخر $x = -a$ ثم العودة مرة أخرى $x = +a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبةً كاملــةً وحيث أن

$$\begin{aligned} x = a\sin(\omega t+\epsilon) &= a\sin(\omega t+\epsilon+2\pi) \\ &= a\sin\left(\omega\underbrace{\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'}+\epsilon\right) \\ &= a\sin(\omega t'+\epsilon), \qquad\qquad \left(t' = t+\frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned}$$

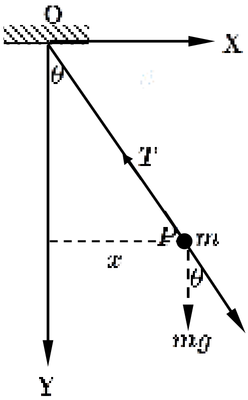
أي أن x عند الزمن t هي نفسها عند الزمن $t' = t+\frac{2\pi}{\omega}$ و ذلك يعني أن الجسيم يعود إلى وضعه الأول بعد زمن $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ و هو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري).

و لأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملــها الجسيم في وحدة الزمن و هو ما يُعرف بالتردد.

■ التردد Frequency

يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) وسنرمز له بالرمز ν وهو مقلوب الزمن الدوري أي أن $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طــرف خــيط غــير مــرن (ساق خفيفة) طولها L مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طــول الخيط L . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحــت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومــن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في الاتجاه الأفقي OX هى (بتحليل قوة الشد) بفرض أن $\angle YOP = \theta$

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ddot{x} = -T\frac{x}{L}$$

وحيث أن θ صغيرة جداً فيمكن اعتبار أن الحركــة هــي حركــة أفقيــة فقــط أي أن $T\cos\theta = mg$ ومن ثم تصبح المعادلة السابقة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L\cos\theta}$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\cos\theta \cong 1$ ومن ثم تؤول المعادلــة السابقة إلى الصورة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -\frac{g}{L}\,x$$

هذه المعادلة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من – حيث – $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

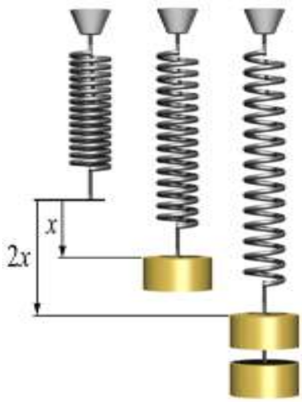
و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـ " بندول الثواني ".

■ قانون هوك Hooke's Law

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب تناسباً طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. الصيغة الرياضية لهذا القانون هي $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه و عدد لفاته إلى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell}x$$

حيث λ ثابت يُسمى معامل المرونة للخيط و الزنبرك ، x مثل الأستطالة الحادثة ، ℓ لطول الطبيعي للخيط ، T وة الشد الناشئة في الخيط. (الأستطالة الحادثة هي الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي).



كما ذكرنا ما يسري على الخيط المرن يسري على الزنبركات في حالة الأستطالة فقط أما في حالة الأنضغاط فتختفي القوة الناشئة في الخيط خلافاً لحالة الزنبرك و هذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم اغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ فاثبت أن حركة هذا الجسيم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن الدوري لها.

الحـــــــــل

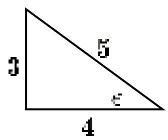
حيث أن موضع الجسيم يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = -6\sin 2t + 8\cos 2t, \quad \text{again differentiating} \quad \therefore \ddot{x} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$$

$$\text{Or} \ \therefore \ddot{x} = -4(\underbrace{3\cos 2t + 4\sin 2t}_{x}) = -2^2 x$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $\omega = 2$ حيث أن العجلة تتناسب مع المسافة و زمنها الدوري τ يتعين من $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ وسعة الحركة يمكن الحصول عليه كالآتي

$$3\cos 2t + 4\sin 2t = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\sin 2t\right)$$
$$= 5\ \sin\epsilon\, cos2t + \cos\epsilon \sin 2t \ = 5\sin(2t + \epsilon)$$



ومن ثم فإن سعة الذبذبة هي 5

مثـــ ٢ ـــال

إذا تعينت سرعة نقطة مادية تتحرك في خط مستقيم من العلاقة $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ فاثبت أن حركة هذه النقطة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$.

الحـــــــــل

حيث أن $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ و باجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير x ينتج أن

$$v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \Rightarrow 2v\frac{dv}{dx} = n^2(4b - 2x) \quad \text{Or}$$
$$\underbrace{v\frac{dv}{dx}}_{\text{accel}} = -n^2(x - 2b) \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -n^2(x - 2b)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها مركز الذبذبة $4b$ و $\omega = n$

(توضيح: بوضع $y = x - 2b$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -n^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = 2b$).

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v = 0$ ومنها

$$0 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \quad \Rightarrow (x - 2b)(x - 6b) = 0 \quad \text{i.e.} \;\; x = 2b, \; x = 6b$$

وهذه القيم تمثل أطراف الذبذبة ومن ثم فتكون سعة الذبذبة هي $2b$ والزمن T اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$ يمثل ربع الزمن الدوري أي أن

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \because T = \frac{1}{4}\tau \qquad \Rightarrow T = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u, u' سرعتي الجسيم على بعدين b, b' من مركز الذبذبة على الترتيب. أوجد الزمن الدورى لها.

الحـــــــــل

حيث أن السرعة لجسيم يتحرك حركة توافقية هي $v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ حيث أن سعة الحركة هي a وعند الموضعين المذكورين يكون

$$u^2 = w^2(a^2 - b^2), \qquad u'^2 = w^2(a^2 - b'^2)$$

من العلاقتين نحصل على – بالطرح –

$$u'^2 - u^2 = w^2(b^2 - b'^2), \qquad Or \qquad \omega^2 = \frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2}}$$

ومن ثم يكون الزمن الدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b^2 - b'^2}{u'^2 - u^2}}$ وهو المطلوب

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = \mu - \mu\cos 2t$ حيث μ ثابت فاثبـــت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة واوجد زمنها الدوري ومركزها.

الحـــــــل

حيث أن موضع الجسيم المتحرك $x = \mu - \mu\cos 2t$ وبالتفاضل مرتين للحصـــول علـــى العجلة نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\sin 2t \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\underbrace{\mu\cos 2t}_{\mu - x} = 4(\mu - x) = -4(x - \mu)$$

وهي معادلـــة حركـــة توافقيـــة بســـيطة مركزهـــا النقطـــة $x = \mu$ وزمنـــها الـــدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ حيث $\omega = 2$.

(توضيح: بوضع $y = x - \mu$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -2^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = \mu$).

(على الدارس ايجاد سعة الذبذبة).

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة اثناء جزء من الحركة – مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الذبذبة – هي X_1, X_2, X_3 عند نهايات ثلاث ثوانٍ متتالية عيّن الزمن الدوري للحركة.

الحـــــــل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركة التوافقيـــة البســـيطة هـــي $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$ و سنفرض أن زمن وصول الجسيم إلى الموضع X_1 هو t وبالتالي زمن وصوله إلى الموضع X_2 هو $t + 1$ وزمن وصوله إلى الموضع X_3 هو $t + 2$ ويكون

$$\begin{aligned} X_1 &= a\sin(\omega t + \epsilon) \\ X_2 &= a\sin(\omega(t+1) + \epsilon) \\ X_3 &= a\sin(\omega(t+2) + \epsilon) \end{aligned}$$

من المعادلات السابقة – بجمع الأولى والثالثة – ينتج أن

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= a\ \ \sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon) \\ &= 2\underbrace{a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{X_2}\cos\omega \\ &= 2X_2\cos\omega \end{aligned}$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

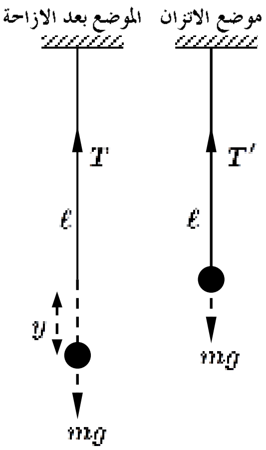
$$\because\ X_1 + X_3 = 2X_2\cos\omega$$
$$\Rightarrow \cos\omega = \frac{X_1 + X_3}{2X_2}$$
$$\text{Or} \qquad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)$$

وحيث أن الزمن الدوري يُعطى بالعلاقة $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وبالتعويض عن قيمة ω يكون $\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{X_1+X_3}{2X_2}\right)}$ و يجب أن يتحقق الشرط $-2X_2 \le X_1 + X_3 \le 2X_2$

مثـــال ٦

عُلق جسيم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زحزح الجسيم من موضع اتزانه مسافةً رأسيةً صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبةً في الثانية. فإذا كان طول الخيط عند موضع الاتزان هو ℓ. اوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الاستطالة مساويةً للطول الطبيعي هو $m(4\pi^2 n^2 \ell - g)$.

الحـــل



حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الاتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط (قبل تعليق الكتلة m) و أن T' هو قيمة الشد في الخيط عند الاتزان ، في حالة الاتزان تؤثر على الكتلة قوتا الوزن والشد في الخيط فقط ومن قانون هوك يكون

$$mg = T' = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \qquad (1)$$

إذا أعطينا الكتلة ازاحة y بعيدا عن موضع اتزانها في هذه الحالة فإن معادلة حركة الكتلة هي

$$m\ddot{y} = mg - T \qquad (2)$$

حيث T هو الشد في الخيط و يساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$ وبالتعويض عن قيمة الشد في المعادلة (2) و باستخدام المعادلة (1)

$$\therefore m\ddot{y} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$$
$$= \cancel{mg} - \underbrace{\cancel{\frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0)}}_{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0}y = -\frac{\lambda}{\ell_0}y$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{\lambda}{\ell_0 m}x = -w^2 x, \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$$

المعادلة الاخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 m}{\lambda}}$ و التردد يتعين من $\therefore n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$ $\nu = \frac{1}{\tau}$ و نجد من هذه العلاقة $2\pi n\ ^2 m = \frac{\lambda}{\ell_0}$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$\cancel{m}g = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4\pi^2 n^2 \cancel{m}(\ell - \ell_0)$$

$$\therefore \ell - \ell_0 = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \text{ Or } \ell_0 = \ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$

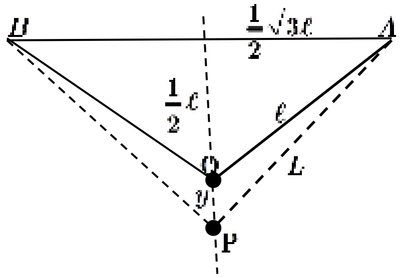
وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعيين قيمة الشد حينما تكون الاستطالة مساوية للطول الطبيعي من قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4\pi^2 n^2 m \ell_0 = 4\pi^2 n^2 m\left(\ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}\right) = m\ \ 4\pi^2 n^2 \ell - g$$

مثــال ٦

عُلق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن c مثبت طرفاه في نقطتين A, B يقعان في مستوى أفقي واحد. و في وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية 60^0 مع الرأسي و يكون طول كل منهما ℓ ، معامل مرونة الخيط يساوي mg . فإذا زحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي و ترك ليتذبذب. اوجد زمن الذبذبة.

الحـــــل



باعتبار أن λ هو معامل المرونة للخيط حيث $\lambda = mg$ و بفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط ومن ثم فعند حالة الاتزان يكون الشد من قانون هوك

$$mg = 2\lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \cos 60^0 = \lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

ولكن $\lambda = mg$ ومن ثم $\ell_0 = \frac{1}{2}\ell$

باعتبار أن y يمثل المسافة الرأسية و L هو هو طول الخيط بعد الازاحة كما بالشكل

ومن ثم بكتابة معادلة الحركة الرأسية للكتلة يكون

$$m\ddot{y} = mg - 2\lambda \frac{L - \ell_0}{\ell_0} \cos \angle \mathrm{OPA}$$

حيث P موضع الجسيم عند اللحظة t ، O هو موضع الاتزان وعند موضع عام حيث

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB} = L$ هو طول الخيط والآن

$$L^2 = \left(y + \frac{1}{2}\ell\right)^2 + \frac{3}{4}\ell^2 = \ell^2 + \ell y + y^2$$

ومن ثم

$$L = \ell\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)^{1/2} = \ell + \frac{1}{2}y$$

حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية فأعلى وايضاً

$$\cos \angle \mathrm{OPA} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{L} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{\ell + \frac{1}{2}y}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{2\ell}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

لأول قوة حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية

$$m\ddot{y} = mg - \frac{2\lambda\left(\ell + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\ell\right)}{\frac{1}{2}\ell} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

وهذا
$$\ddot{y} = g - g\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

أو
$$\ddot{y} = -\frac{5g}{2\ell}y$$

والاخيرة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $2\pi\sqrt{2\ell\ /\ 5g}$

■ مســـــــائل Problems ■

الحركة الدفعية وتصادم الاجسام

Impulse and Collision Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وسنتعرف بمشيئة الله تعالى في هذا الباب على نوع من أنواع الحركة تُسمى " الحركة الدفعية ".

■ الدفع وقانون الحركة

إذا بدأنا بقانون نيوتن الثاني للحركة معوضين عــن العجلــة بصــورتها $a = \dfrac{dv}{dt}$ يكــون $F = m\dfrac{dv}{dt}$ وبضرب طرفي هذه العلاقة في dt وتكاملها بين اللحظتين t_1, t_2 حيث سرعة الجسيم عندهما v_1, v_2 فإن

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv = mv\Big|_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1$$

يُعرف التكامل الزمني للقوة F بين اللحظتين t_1, t_2 والوارد بالطرف الأيسر للمعادلة السابقة ب دفع القوة خلال الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ ويرمز له بالرمز $\underline{I}$ اختصاراً لكلمة **Impulse** أي أن $\int_{t_1}^{t_2} F dt = \underline{I}$. ودفع أي قوة هو متجه ينطبق عليها نظراً لأن الزمن كمية قياسية.

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة

ينص هذا المبدأ على أن كمية الحركة mv في اتجاه خط التصادم (في حالة الكرات يكون خط المركزين) ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ قانون نيوتن التجريبي Experimental Newton's Law

في اتجاه خط المركزين تخضع لقاعدة نيوتن التجريبية والتي تنص على أن الســـرعة النســـبية للجسمين بعد التصادم تساوي معكوس السرعة النسبية لهما قبل التصادم مضروباً في معامــل الأرتداد (يُرمز له بالرمز e)أي أن

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

ويُطبق هذا القانون في اتجاه خط التصادم (خط المركزين) ، وتنحصر قيمة معامل الأرتداد e بين الصفر والواحد $0 \leq e \leq 1$ ويكون $e = 0$ إذا كان الجسمان عديمي المرونة ويساوي الواحد $e = 1$ إذا كان الجسمان تامي المرونة.

ايضاً حيث أن الكرتين ملساوتان فإنه لا توجد قوة عمودية على خط المركزين (خط التصادم) ومن ثم فإنه في حالة التصادم غير المباشر تظل مركبة السرعة لكل من الكرتين في اتجاه العمودي على خط المركزين ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ تصادم الاجسام

عند تصادم جسمان مرنان فإنه يحدث نتيجةً لهذا التصادم ردود فعل كبيرة جداً تؤثر على كلا الجسمين لفترة صغيرة ثم يميل الجسمان بعدها للعودة إلى حركتهما ، تُسمى ردود الأفعال هذه بردود الأفعال الدفعية.

سنعتبر في دراستنا تصادم الاجسام الملساء بحيث أننا سنهمل جميع قوى الاحتكاك ويبقى فقط ردود الأفعال العمودية على الأسطح المشتركة و لسهولة الدراسة سنعتبر تصادم اجسام على هيئة كرات مرنة ملساء كما سنهمل كلا من قوى الأوزان لصغر دفوعها و التغير في مواضع الكرات أثناء فترة التصادم باعتبار أن هذه الفترة الزمنية للتصادم صغيرة جداً ، أي أن التصادم سيغير من سرعات الكرات ولن يغير من مواضعها أثناء فترة حدوثة. وفي دراستنا سوف نعتبر نوعين من التصادم (تصادم مرن وتصادم غير مرن) – التصادم غير المرن تم دراسته سابقاً – والتصادم المرن ينقسم إلى تصادم مباشر وتصادم غير مباشر.

■ التصادم المباشر وغير المباشر (مائل)

نعتبر تصادم كرتين ملساوتين ، الخط الواصل بين المركزين الهندسيين للكرتين يُسمى بخط المركزين أو خط التصادم ، و إذا كان التصادم بحيث كانت السرعتان قبل التصادم كلاهما في اتجاه خط التصادم للكرتين سُميّ هذا التصادم بـ "التصادم المباشر" أما في حالة التصادم غير المباشر يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كليهما مائلاً على خط التصادم بزاوية معينة – نلاحظ أن التصادم المباشر هو حالة خاصة من التصادم غير المباشر فيها زاوية الميل صفراً.

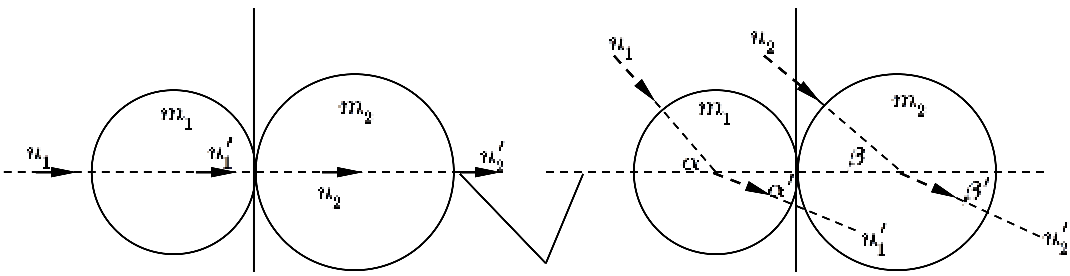
و في التصادم المرن سواءً كان التصادم مباشراً أو غير مباشر يُطبق قانون مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية و قانون نيوتن التجريبي في اتجاه خط التصادم. ويأخذ مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في حالة التصادم المباشر الصورة الرياضية

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2'$$

أما في حالة التصادم غير المباشر يكون

$$m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta = m_1 u_1' \cos\alpha' + m_2 u_2' \cos\beta'$$

كما أن سرعة أي من الكرتين في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة قبل وبعد التصادم و من ثم فإن الكرة الساكنة أو الكرة المتحركة في اتجاه خط التصادم فإن حركتها بعد التصادم إذا تحركت تكون في اتجاه خط التصادم.



خط التصادم (خط المركزين)

تصادم مباشر

تصادم غير مباشر (مائل)

■ تصادم كرة بمستوى ثابت

نعتبر كرة ملساء كتلتها m اصطدمت بمستوى ثابت أملس وأن سرعة الكرة قبل التصـــادم مباشرة هي u وأن سرعتها بعد التصادم هي u' كما بالشكل و نظراً لأن كل من الكـــرة والمستوى أملسين فإن سرعة الكرة في اتجاه المستوى (العمودي على خط التصادم) لا تـــتغير بالتصادم أي أن

$$u \sin\alpha = u' \sin\theta \qquad (1)$$

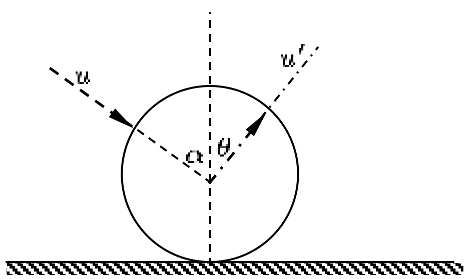
ومن قانون نيوتن التجريبي $u' \cos\theta = eu \cos\alpha$

وهاتان العلاقتان كافيتان لتعيين سرعة الكرة بعد التصادم إذا عُلمت سرعة الكرة قبل التصادم.

ومن العلاقة $u' \cos\theta = eu \cos\alpha$ نجد أنه إذا كان $e = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه في حالة تصادم كرة غير مرنة فإنها لا ترتد وإنما تتحرك على المستوى وبسرعة مقدارها $u \sin\alpha$.
أما إذا كان $e = 1$ فإنه يكون $u' \cos\theta = u \cos\alpha$ ومن هذه المعادلة والمعادلة (1) نحصل على

$$\tan\theta = \tan\alpha, \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

أي أن زاوية السقوط تساوي زاوية الأرتداد ونستنتج ايضاً أن $u = u'$ أي ان سرعة الكرة بعد التصادم تساوي في المقدار سرعتها قبل التصادم



■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

كرة تتحرك بسرعة u اصطدمت تصادماً مباشراً بكرة أخرى مساوية لها في الكتلة تتحـــرك بسرعة u' في الاتجاه المعاكس إذا توقفت الكرة ذات السرعة u بعد التصـــادم فاثبـــت أن $\frac{u}{u'} = \frac{1+e}{1-e}$ حيث e هو معامل الارتداد.

الحـــــــل

نفترض أن سرعة الكرة التي تتحرك بسرعة u' بعد التصادم هي V وأن m هي كتلة كل من الكرتين و حيث أن الكرة ذات السرعة u توقفت بعد التصادم فإنه من مبدأ ثبوت كمية الحركة

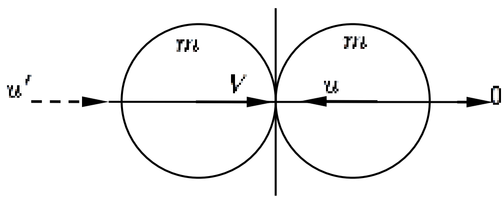
$$m \times 0 + m \times V = mu + m(-u') \quad \text{Or} \quad V = u - u'$$

ومن قانون نيوتن التجريبي

$$0 - V = -e(u - (-u')) \qquad \text{Or} \quad V = e(u + u')$$

$$\therefore u - u' = V = e(u + v) \quad \text{Or} \quad (1-e)u = (1+e)u'$$

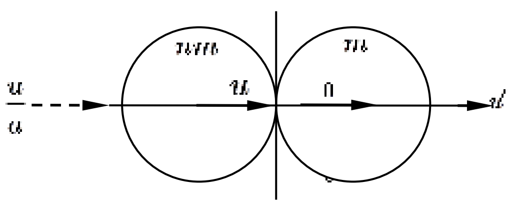
ولهذا فإن $\frac{u}{u'} = \frac{1+e}{1-e}$



مثـــ ٢ ـــال

اصطدمت كرة كتلتها nm وسرعتها $\frac{u}{a}$ تصادماً مباشراً بكرة أخرى كتلتها m وسرعتها u وكانت السرعتان في نفس الاتجاه. إذا وقفت الكرة ذات الكتلة m بعد التصادم فاوجد معامل الارتداد.

الحـــــــل



نفرض أن الكرة ذات الكتلة nm تحركت بعد التصادم بسرعة V (في اتجاه خط التصادم حيث أن التصادم مباشر) و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$m(0) + nmV = mu + nm\left(\frac{u}{a}\right) \quad \Rightarrow nV = \left(1 + \frac{n}{a}\right)u \tag{1}$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - 0 = -e\left(\frac{u}{a} - u\right) \quad \Rightarrow V = eu\left(1 - \frac{1}{a}\right) \tag{2}$$

ومن المعادلتين (1) ، (2)

$$ne\cancel{u}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left(1 + \frac{n}{a}\right)\cancel{u} \quad \Rightarrow e = \frac{a+n}{n(a-1)}$$

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك كرة ملساء بسرعة 20 ft sec^{-1} اصطدمت بمستوى افقي أملس ثابت و في اتجاه يصنع زاوية 60^0 مع المستوى فإذا كان معامل الارتداد يساوي $e = 0.5$ فإوجد سرعة الكـــرة و اتجاهها بعد التصادم ثم أوجد مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة في اتجاه المستوى لا تتغير (في الاتجاه العمودي على خط التصـــادم) أي أن

$$u\sin\theta = 20\sin 30 \quad \Rightarrow u\sin\theta = 10$$

من قانون نيوتن التجريبي

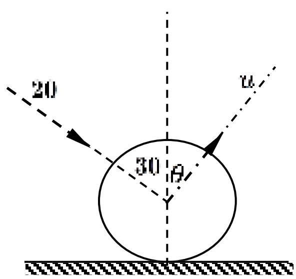
$$u\cos\theta = -e(-20\cos 30) \quad \text{Or} \quad u\cos\theta = 10\sqrt{3}(0.5) = 5\sqrt{3}$$

من المعادلتين بالتربيع والجمع نحصل على

$$u^2 = 100 + 75 = 175 \quad \Rightarrow u = \sqrt{175}$$

وبقسمة المعادلتين

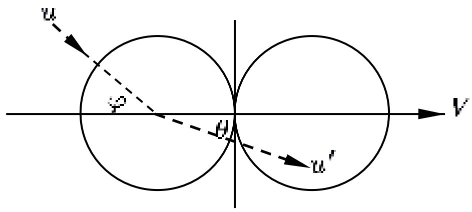
$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



مثـــ ٤ ـــال

اصطدمت كرة بأخرى ساكنة مساويةً لها في الكتلة تصادماً مائلاً. إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع مع خط التصادم زاوية φ. و كان e هومعامل الارتداد فاثبت ان اتجاه هذه الكرة بعد التصادم يصنع مع خط التصادم زاوية تتعين من $\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$.

الحـــــــــل



من الشكل و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos\theta + mV = mu\cos\varphi + 0 \quad \Rightarrow u'\cos\theta + V = u\cos\varphi \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$u'\cos\theta - V = -e(u\cos\varphi - 0) \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore\ 2u'\cos\theta = (1-e)u\cos\varphi \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u\sin\varphi \qquad (4)$$

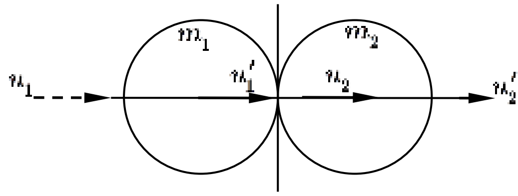
و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4)

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\tan\varphi}{1-e} \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\tan\varphi}{1-e} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$$

مثـــ ٥ ـــال

اثبـــت أنـــه في حالـــة التصـــادم المباشـــر يكـــون الفقـــد في طاقـــة الحركـــة مســـاوياً $\dfrac{(1-e^2)m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2$ حيث m_1, m_2 تمثل كتلتا الكرتين ، u_1, u_2 سرعتيهما قبل التصادم ، e معامل الارتداد.

الحـــــــل



من الشكل ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط التصادم

$$m_1u_1' + m_2u_2' = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (1)$$

و ذلك بفرض أن سرعتي الكرتان بعد التصادم هما u_1', u_2' و من قانون نيوتن التجريبي

$$u_1' - u_2' = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

الآن بتربيع المعادلة (1) ، (2) وضرب المعادلة (2) في m_1m_2 ثم الجمع نحصل على

$$m_1u_1' + m_2u_2' \;^2 + m_1m_2 \;\; u_1' - u_2' \;^2 = \;\; m_1u_1 + m_2u_2 \;^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

باضافة وطرح المقدار $m_1m_2(u_1 - u_2)^2$ إلى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة نجد أن

$$(m_1 + m_2) \;\; m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2 \;\; = \;\; m_1u_1 + m_2u_2 \;^2$$
$$\pm\, m_1m_2(u_1 - u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

أي أن

$$(m_1 + m_2) \;\; m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2 \;\; =$$
$$(m_1 + m_2) \;\; m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \;\; - m_1m_2 \;\; 1 - e^2 \;\; (u_1 - u_2)^2$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على $\frac{1}{2} \;\; m_1 + m_2$ نحصل على

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{m_1m_2 \;\; 1 - e^2 \;\; (u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

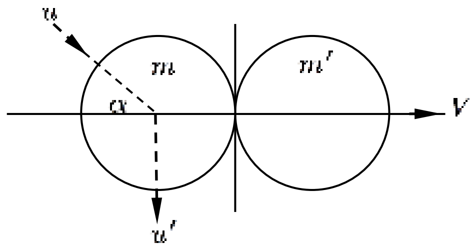
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2\right) = \frac{m_1m_2 \;\; 1 - e^2 \;\; (u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

من هذه العلاقة يتضح أن مجموع طاقتي الحركة بعد التصادم أقل من مجموع طاقتي حركة الكرتين قبل التصادم بمقدار $\frac{m_1 m_2 \ 1-e^2 \ (u_1-u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$ وهو ما يمثل مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

مثـــ ٦ ـــال

اصطدمت كرة ملساء بأخرى ساكنة. إذا كان اتجاها الحركة بعد التصادم متعامدين وكانـــت الكرتان تامتي المرونة فاثبت أن كتلتيهما متساويتان.

الحـــــــل



بفرض أن الكرة الساكنة كتلتها m' وحيث أن هذه الكرة كانت ساكنة فإن حركتها بعد التصادم يكون في اتجاه خط التصادم بسرعة ولتكن V وحيث أن اتجاها الحركة بعد التصادم متعامد فتكون السرعة u' عمودية على خط التصادم من الشكل وباعتبار أن كتلة الكرة الثانية m وسرعتها u في اتجاه يصنع زاوية α مع خط التصادم وأن سرعتها بعد التصادم u' و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu' \cos 90 + m'V = mu\cos\alpha + 0 \quad \Rightarrow m'V = mu\cos\alpha \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

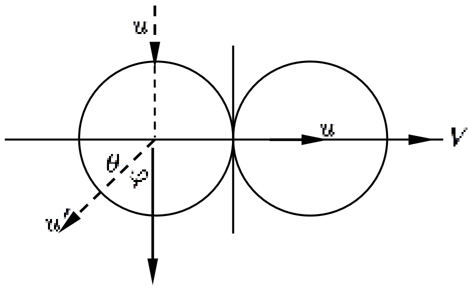
$$u'\cos 90 - V = -e(u\cos\alpha - 0) \quad \Rightarrow V = u\cos\alpha \quad (e=1) \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (2) يكون $\therefore m = m'$

مثـــ ٧ ـــال

تصطدم كرتان متساويتان وتتحركان بنفس السرعة و في اتجاهين متعامدين. إذا كـــان خـــط المركزين لحظة التصادم عمودياً على اتجاه الكرة الثانية وكان معامل الارتـــداد e فاثبـــت أن الكرة الثانية تنحرف بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ عن اتجاهها الأصلي.

الحـــــــل



من الشكل – مع مراعاة اتجاه السرعات – و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mV - mu'\cos\theta = mu\cos 90 + mu \qquad \Rightarrow V - u'\cos\theta = u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - (-u'\cos\theta) = -e(u - u\cos 90) \qquad \Rightarrow V + u'\cos\theta = -eu \qquad (2)$$

بطرح المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore 2u'\cos\theta = (1+e)u \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u \qquad (4)$$

و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4) $\tan\theta = \frac{2}{1+e}$ ولحساب انحراف السرعة عن اتجاهها الأصلي حيث الانحراف عن الاتجاه الأصلي هو $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ و من ثم

$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1+e}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{1+e}{2} \text{ Or } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

■ مســــائل Problems ■

١- تتحرك كرة كتلتها الوحدة بسرعة $8\ \text{ft sec}^{-1}$ عندما صدمت مستوى أفقي أملس ثابت في اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الرأسي. اثبت أنه إذا كان معامل الارتداد يســـاوي 0.5 فـــإن مقدار الفقد في طاقة الحركة يساوي 12 وحدة طاقة.

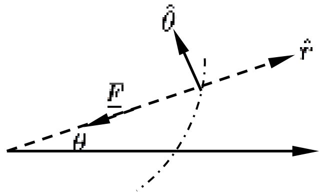
٢- عيّن معامل الارتداد بين الكرتين المتساويتين الكتلة ١ ، ٢ حيث وضّحت السرعات قبل وبعد التصادم على الرسم.

Before collision After collision

الحركة المداريــة

Orbital Motion

سنعالج في هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى. كثيراً ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين O يسمى بمركز القوة. كما تُسمى القوة في هذه الحالة بالقوة المركزية – حيث تنعدم المركبة العمودية لقوة المجال (طاردة أو جاذبة) ومن ثم تنعـــدم العجلة العمودية لحركة الجسيم دائماً و بتطبيق هذا الشرط نجد أنه من الاحداثيات القطبية



$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0$$

$$\therefore r^2\dot{\theta} = h \ \ (\text{const.})$$

ويسمى المسار الذي ترسمه القوة بالمسار المركزي.

■ المعادلة التفاضلية للمسار المركزي Differential Equation of Orbital Path

معادلة الحركة في الاتجاهين r,θ هما

$$m\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ = -F \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تُعطي $r^2\dot{\theta} = h \ \ (\text{const.})$

حيث h مقدار ثابت. المعادلتان (1) و (2) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب ومـــن هاتين المعادلتين بحذف $\dot{\theta}$ نحصل على

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{F}{m} \qquad (3)$$

ويمكن اجراء تكامل للمعادلة (3) باستخدام التعويض $\left(r=\frac{1}{u}\right)$ وبحذف t منها

$$\because r=\frac{1}{u} \qquad \therefore \frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{dr/du}\frac{du}{d\theta}\underbrace{\frac{h}{r^2}}_{d\theta/dt}=-h\frac{du}{d\theta},$$

$$\therefore \ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$
$$=-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2},$$

وبتعويض عن هذه النتائج في المعادلة نحصل على

$$-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{F}{mh^2u^2} \tag{4}$$

هذه المعادلة تُسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي وهي تُستخدم لمعرفة قانون القوة المركزي إذا عُلمت معادلة المسار و أيضاً إذا عُلمت القوة المركزية F فإنه يمكن حل المعادلة التفاضلية وايجاد معادلة المسار.

و كحالة خاصة حينما تكون الحركة في مجال قوة تتبع قانون التربيع العكسي $F=\frac{\mu}{r^2}$ فمن المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu\cancel{u^2}}{mh^2\cancel{u^2}}=\frac{1}{\mu^\star}, \qquad \mu^\star=\frac{mh^2}{\mu}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها العام على الصورة

$$u=\frac{1}{\mu^\star}\ \ 1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)$$

حيث ϵ,α ثابتي التكامل والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها

$$r=\frac{\mu^\star}{1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)}$$

وهذه المعادلة تُمثل قطع مخروط ويكون قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً حسبما تكون $1>\epsilon$ أو $\epsilon=1$ أو $1<\epsilon$ على الترتيب.

■ **قانون السرعة Velocity Law**

كما نعلم أن مركبتي السرعة في الاتجاهين r,θ هما $\dot{r},\ r\dot{\theta}$ ومن ثم فإن مقدار سرعة الجسيم v تتعين من $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ولكن $\dot{r} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ ومنها

$$v^2 = \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2h^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \qquad (5)$$

وهذه المعادلة تُعطي مقدار سرعة الجسيم عند أي موضع θ على المسار المركزي.

■ **قوانين كبلر Kepler's Laws**

من أهم تطبيقات الحركة بالاحداثيات القطبية هو دراسة حركة الكواكب. و لقد قام العالم يوهان كبلر (١٥٧١–١٦٣٠) و هو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية والمعرفة باسمه:

القانون الأول: تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

القانون الثاني: يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما أقترب من الشمس.

القانون الثالث: يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدوري ومعامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية.

هذه هي نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالي ٦٠ عاماً ليثبت على أساسها قانون الجذب العام والذي يُعتبر من أكبر كشوف الانسان

■ **مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية**

كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب (الطرد) O هي عزم كمية الحركة الخطية حول O وتساوي -تذكر أن $v \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$ -

$$m\dot{r}(0) + mr\dot{\theta}(r) = mr^2\dot{\theta} = mh = \text{constant}$$

أي أن كمية الحركة الزاوية للجسيم حول المركز تظل ثابتة أثناء الحركة وهو ما يُسمى بمبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية.

■ السرعة المساحية Area Velocity

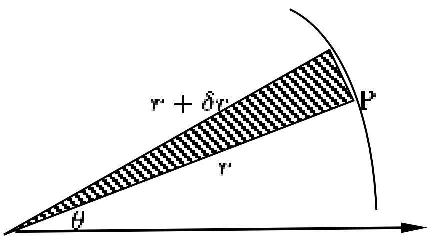
بفرض أن $P(r,\theta)$ هو موضع الكوكب عند اللحظة الزمنية t وأنه بعد زمن صغير δt يكون عند الموضع $Q(r+\delta r,\theta+\delta\theta)$. المساحة δA المقطوعة بمتجه الموضع خلال الفترة الزمنية δt تساوي تقريباً مساحة المثلث OPQ – كما بالشكل – أي أن

$$\delta A = \frac{1}{2} r(r+\delta r)\sin\delta\theta \cong \frac{1}{2} r^2 \delta\theta$$

السرعة المساحية $\dot{A}$ هي المساحة التي يرسمها OP في وحدة الزمن و تتعين من

$$\begin{aligned}
\dot{A} = \frac{dA}{dt} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta A}{\delta t} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2} r^2 \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{1}{2} r^2 \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t} \\
&= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{h} = \frac{1}{2}h, \qquad \dot{A} = \frac{1}{2}h
\end{aligned}$$

أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة في حالة المسار المركزي.



■ القُبا Apse

وتُعرف بأنها نقاط المسار المركزي والتي عندها يكون البعد عن مركز القوة نهاية عظمى أو صغرى. هذه الأبعاد تُسمى أبعاد القُبا أي عند نقط القُبا يكون $\dot{r}$ أو $\frac{du}{d\theta}$ أو $\frac{dr}{d\theta}$ وهذا يعني أنه عند القُبا تكون حركة الكوكب عمودية على متجه الموضع.

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثـــ ١ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. اثبـــت أن الســـرعة تتناسب عكسياً مع r^3 وأن القوة تتناسب عكسياً مع r^7 .

الحـــــــل

باختيار $r = \dfrac{1}{u}$ فيكون

$$\frac{1}{u^2} = a^2 \cos 2\theta$$

بالتفاضل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$-\cancel{2}\frac{1}{u^3}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{2}a^2 \sin 2\theta \;\; \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^2u^3 \sin 2\theta$$

ولحساب قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = h^2\left(\;\; a^2u^3 \sin 2\theta \;\;^2 + u^2\right)$$

$$= h^2 \;\; a^4u^6 \sin^2 2\theta + u^2$$

$$= h^2 \;\; a^4(1-\cos^2 2\theta)u^6 + u^2 \;\; = h^2 \;\; a^4u^6 - u^2 \; + u^2 \;\; = h^2a^4u^6$$

$$\therefore v^2 = h^2a^4u^6 \;\Rightarrow v = ha^2u^3 = \frac{ha^2}{r^3} \qquad \text{that is } \; v \propto \frac{1}{r^3}$$

بالتفاضل مرةً ثانية لـــ $\dfrac{du}{d\theta}$ يكون

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2a^2u^3\cos 2\theta + 3a^2u^2\frac{du}{d\theta}\sin 2\theta = 2u^3\underbrace{a^2\cos 2\theta}_{1/u^2} + 3a^2u^2 \;\; \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^2u^3\sin 2\theta} \;\; \sin 2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2u + 3a^4u^5\sin^2 2\theta = 2u + 3a^4u^5 \;\; 1-\cos^2 2\theta$$

$$= 2u + 3a^4u^5 \; - 3a^4u^5\cos^2 2\theta$$

$$= 2u + 3a^4u^5 \; - 3u = 3a^4u^5 \; - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^5$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \;\; 3a^4u^5 \;\; = 3ma^4h^2u^7 = \frac{3ma^4h^2}{r^7} \qquad \text{that is } \; F \propto \frac{1}{r^7}$$

مثـــ ٢ ـــال

إذا كان المسار المركزي لجسيم هو قطع مخروطي فاثبت أن القوة تخضـــع لقـــانون التربيـــع العكسي.

الحـــــــل

معادلة المسار هي $r = \dfrac{\ell}{1 + e\cos\theta}$ حيث e هو الاختلاف المركزي ، ℓ هو نصـــف وتره البؤري العمودي

$$\because u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow u = \frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta$$
$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\ell}\sin\theta, \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{\ell}\cos\theta = \frac{1}{\ell} - u$$

ومن ثم فإن قانون القوة يتعين من

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$
$$= mh^2u^2\left(\frac{1}{\ell} - u + u\right) = \frac{mh^2}{\ell r^2} \qquad \text{i.e.} \quad F \propto \frac{1}{r^2}$$

مثـــ ٣ ـــال

اوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو القطب حتى يتحرك جسيم كتلته الوحدة على المسار $r = a(1 - \cos\theta)$. وإذا كان مقدار كل من سرعة الجسيم والقوة عند القُبا همـــا P, V فاثبت أن $3V^2 = 4aP$.

الحـــــــل

حيث أن $r = a(1 - \cos\theta)$ وباستخدام الفرضية $r = \dfrac{1}{u}$ نحصل على

$$\frac{1}{u} = a(1 - \cos\theta)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = a\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -au^2\sin\theta$$

بالتفاضل مرةً أخرى بالنسبة إلى θ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -2au\frac{du}{d\theta}\sin\theta - au^2\cos\theta = 2a^2u^3\sin^2\theta - au^2\cos\theta$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\sin^2\theta\ \ = -au^2\ \ \cos\theta - 2au\ \ 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2\ \ \cos\theta + 2au\ \ 1 - \cos^2\theta$$

$$= -au^2\left(\cos\theta - 2u\underbrace{a\ \ 1 - \cos\theta}_{1/u}\ (1 + \cos\theta)\right)$$

$$= -au^2\ \ \cos\theta - 2(1 + \cos\theta)$$

$$= -au^2(-2 - \cos\theta) = -au^2(-3 + \underbrace{1 - \cos\theta}_{1/au})$$

$$= 3au^2 - u$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3au^2$$

$$\because\ F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore\ F = mh^2u^2\ \ 3au^2\ \ = 3mah^2u^4\ = \frac{3mah^2}{r^4}$$

عند نقاط القُبا يكون

$$\dot{r} = 0\ \text{ Or }\ \frac{du}{d\theta} = 0 \qquad \Rightarrow -au^2\sin\theta = 0 \qquad \therefore\ \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\because\ h = r^2\dot{\theta} = \underbrace{(r\dot{\theta})}_{V}r = 2aV \quad \text{Note}\ \ r\Big|_{\theta=\pi} = a(1 - \cos\pi) = 2a$$

ومن قانون القوة التى حصلنا عليها

$$\because\ F = \frac{3ah^2}{r^4} \quad \Rightarrow F\Big|_{\theta=\pi} = P = \frac{3a(2aV)^2}{(2a)^4} \quad \Rightarrow \quad 3V^2\ = 4aP$$

مثـــ ٤ ـــال

جسيم كتلته واحد جرام يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية تتناسب عكسياً مع مكعب r بحيث أن القوة تساوي واحد داين عند $r = 1$ cm . أوجد معادلة المسار علماً بأنـــه عنـــد $\theta = 0$ فإن $r = 2$ cm والسرعة تساوي $\frac{1}{2}$ cm sec^{-1} واتجاهها يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الثابت.

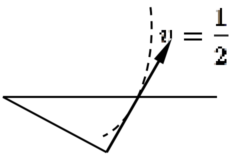
الحـــــــل

حيث أن قوة الجذب تتناسب مع مكعب r فإن $F=\dfrac{\mu}{r^3}$ حيث μ ثابت التناسب ويمكن حساب قيمته من الشـــرط $F=1$ عنـــدما $r=1$ ويكـــون ثابـــت التناســـب $\mu=1$ أي أن $F=\dfrac{1}{r^3}$ ومن المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=u^3 \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=u \quad \text{Or} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1-\frac{1}{h^2}\right)u=0 \quad (1)$$

نوجد الثابت h باستخدام مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب ويكون

$$\Rightarrow h=\frac{1}{2}(2\sin\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}-u=0$

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\theta}\right)-u=0 \quad \text{Or} \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)d\left(\frac{du}{d\theta}\right)-udu=0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2+c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل ولحساب c_1 يلزمنا حساب $\dfrac{du}{d\theta}$ عندما $r=2$ والتي يمكن حسابها من قانون السرعة

$$v^2=h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)$$

وحيث أن $v=\dfrac{1}{2}$ عندما $u=\dfrac{1}{2}$ فإن

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \left.\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right|_{r=2}=\frac{1}{4}$$

أي أن عند $u=\dfrac{1}{2}$ فإن $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ وبالتالي قيمة ثابت التكامل $c_1=0$ من المعادلة (2)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta}=-u \qquad \text{Or} \qquad \frac{du}{u}=-d\theta$$

وبعد اجراء فصل المتغيرات ، الآن بالتكامل

$$\ln u = -\theta + c_2$$

ومن الشرط $u = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 0$ نجد أن $c_2 = -\ln 2$ Or $c_2 = \ln\frac{1}{2}$

$$\ln u = -\theta - \ln 2 \quad \Rightarrow \ln r = \theta + \ln 2 \quad \text{Or} \quad r = 2e^{\theta}$$

وهي معادلة المسار.

مثـــال ٥

تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مركزية جاذبة F وكانت سرعة النقطة المادية $v = \frac{\ell}{r}$ حيث ℓ ثابت. فاثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r وأن معادلة المســـار الذي تتحرك عليه النقطة المادية هي $r = e^{a\theta}$ حيـــث $a = \frac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2 - h^2}$ إذا علمـــت أن $r = 1$ عندما $\theta = 0$.

الحـــــــل

من قانون السرعة حيث $v^2 = \frac{\ell^2}{r^2} = \ell^2 u^2$

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = \ell^2 u^2 \qquad (1)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$2h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\cancel{\frac{du}{d\theta}} = 2\ell^2 u\cancel{\frac{du}{d\theta}} \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \ell^2 u$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \qquad \Rightarrow F = mh^2\ell^2u^3 = \frac{mh^2\ell^2}{r^3}$$

ولايجاد معادلة المسار من المعادلة (1)

$$h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = \ell^2u^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{h^2}u^2$$

$$\text{Or} \quad \frac{du}{d\theta} = -\underbrace{\frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{h}}_{a}u = -au$$

واعتبرنا الاشارة سالبة لأن القوة جاذبة أى نحو المركز. بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{du}{u} = -ad\theta \quad \Rightarrow \ln u = -a\theta + c$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $r=1$ عندما $\theta=0$ ومنها $c=0$

$$\ln u=-a\theta \qquad \Rightarrow \ln\frac{1}{r}=-a\theta \quad \text{Or} \quad \ln r=a\theta \quad \text{Or} \quad r=e^{a\theta}$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت النسبة بين اكبر سرعة زاوية يدور بها كوكب حول الشمس واقل ســـرعة زاويـــة تساوي γ^2 فاثبت أن الاختلاف المركزي لمسار هذا الكوكب هو $\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

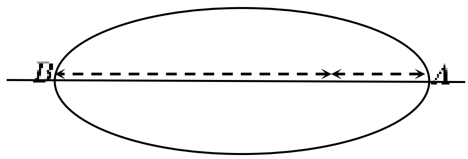
الحـــــــــل

حسب قوانين كبلر فإن الكوكب يتحرك حول الشمس في مسار على شكل قطع نـــاقص و حيث أن $r^2\dot{\theta}=h \quad \therefore \dot{\theta}=\dfrac{h}{r^2}$

واضح أن السرعة الزاوية تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن الشمس r ومن ثم فإن اكـــبر سرعة زاوية تحدث عندما تكـــون r اصـــغر مـــا يمكـــن ، اي عنـــدما $r=r_1$ حيـــث $r_1=OA=a-ae$ واصـــغر ســـرعة زاويـــة تحـــدث عنـــدما $r=r_2$ حيـــث $r_2=OB=a+ae$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B}=\gamma^2=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1+e}{1-e} \qquad \text{Or} \qquad e=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$



مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^n=a^n\cos n\theta$. اثبـــت أن القـــوة تتناسب عكسياً مع r^{2n+3}.

الحـــــل

حيث أن $r^n = a^n \cos n\theta$ وباستخدام $r = \dfrac{1}{u}$ نجد أن

$$\frac{1}{u^n} = a^n \cos n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى المتغير θ

$$-\cancel{n}\,\frac{1}{u^{n+1}}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{n}a^n \sin n\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^n u^{n+1} \sin n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ مرة أخرى

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= na^n u^{n+1} \cos n\theta + (n+1)a^n u^n \frac{du}{d\theta} \sin n\theta \\ &= nu^{n+1} \underbrace{a^n \cos n\theta}_{1/u^n} + (n+1)a^n u^n \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^n u^{n+1} \sin n\theta} \sin n\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \sin^2 n\theta = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}(1 - \cos^2 n\theta) \\ &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u^{2n+1} \underbrace{a^{2n} \cos^2 n\theta}_{1/u^{2n}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1}$$

$$\because F = mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \ \ (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \ = (n+1)ma^{2n}h^2u^{2n+3} \ = \frac{3ma^{2n}h^2}{r^{2n+3}}$$

وهذا يعني أن $F \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$ (على الدراس استنتاج قانون السرعة)

■ Problems مســـــائل ■