محاضرات في "هندسة الفضاء"

لطلاب الفرقة الثانية – تعليم أساسي– شعبة الرياضيات

بكلية التربية

العام الجامعي ٢٠٢١ – ٢٠٢٢م

محاضرات

في

الـهـنـدسـة الـتـحـلـيـلـيـة

(المستوى الثاني)

إعداد

قسم الرياضيات – كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

■ المحتويات:

■ الباب الأول (الهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد):

طرق تعيين النقطة في الفضاء الثلاثي (الإحداثيات الكرتيزيةوالإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الكرية) — المساقط – البعد بين نقطتين–نقطة التقسيم – زوايا الاتجاه – الزاوية بين مستقيمين – نسب اتجاه العمودي على مستقيمين معلومين.

■ الباب الثاني (المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي):

المستوى في الفضاء الثلاثي –الزاوية بين مستويين – معادلة المستوى المار بثلاث نقاط معلومة – معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من المحاور – معادلة المستوى في الصورة العمودية – طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة – المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين – معادلة
أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين – وضع ثلاث مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي – الصورة العامة لمعادلات الخط المستقيم – معادلات الخط المستقيم بدلالة نسب اتجاهه ونقطة عليه – معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين – طول العمود النازل من نقطة على مستقيم– تقاطع مستقيمين –معادلة الكرة – العمودي على سطح الكرة–المستوى المماس للكرة – طول المماس المرسوم للكرة – المستوى الأساسي لكرتين–تقاطع كرتين.

■ الباب الثالث(نظرية السطوح في الفضاء الثلاثي):

السطوح الجبرية — السطوح الأسطوانية والمخروطية والدورانية.

المراجع:

1- د.برهامي حشيش – " الوسيط في الجبر والهندسة التحليلية "– سلسلة الرياضيات الهندسية – دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

2- د.مصطفى الجندي – " تقليدات الجبر والهندسة التحليلية "– دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

3- د.رمضان جهينة – " مبادئ الرياضيات "– منشورات ELGA – الطبعة الثانية (2000م).

4- Crowell, R. and Slesnick, W.E. (1989). *Calculus and Analytic Geometry.* Norton.

5- Thomas, J.G.R. and Finney, R. (1992). *Calculus and Analytic Geometry.* Addison .

6- Selby,P.H. (1986). *Analytic Geometry.* San Diego,Calefornia. College outline series.

7- Yefimov, N.V. (1964). *A Brief course in Analytic Geometry.* Mir publishers.

الباب الأول

الهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد

1 – طرق تعيين النقطة في الفضاء الثلاثي:

رأينا في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد تماماً بواسطة كميتين عدديتين وهذا هو السبب في أن الهندسة التحليلية المستوية تُسمى بالهندسة التحليلية في بعدين.

ولتحديد موضع النقطة في الفضاء الثلاثي يلزمنا ثلاث كميات عددية، ولذلك فإن الهندسة التحليلية الفراغية تسمى أيضاً بالهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد.

رأينا أيضاً في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد بطريقتين إحداهما طريقة الإحداثيات الكرتيزية (x, y) حيث $-\infty < x < \infty\ ,\ -\infty < y < \infty$

والثانية طريقة الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث $o \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

والعلاقة بين (x, y) ، (r, θ) تكون كما يلي:

$$x = r\cos\theta.$$
$$y = r\sin\theta.$$

أو تكون:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

أما في الفضاء الثلاثي فتوجد ثلاث طرق مختلفة – ولكنها أيضا مرتبطة– سنوضحها فيما يلي:

- **الطريقة الأولى: الإحداثيات الكرتيزية (x, y, z)**

من نقطة الأصل O في الفضاء الثلاثي نرسم ثلاث مستقيمات OX, OY, OZ بحيث يكون كل اثنان منهما متعامدان.

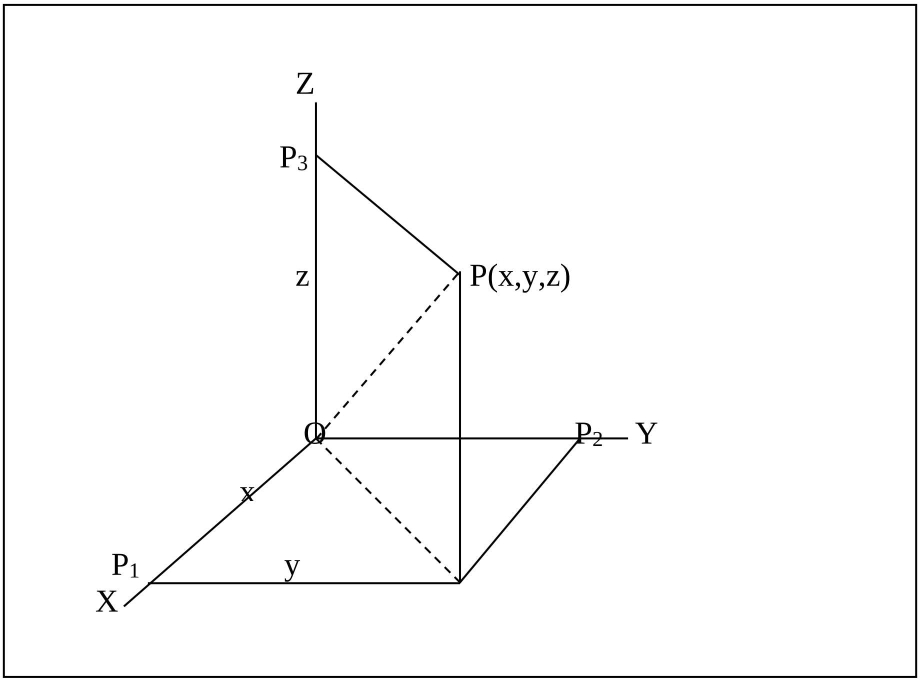
تُسمى المستقيمات OX, OY, OZ محاور الإحداثيات فإذا تخيلنا الرسم فإن محاور الإحداثيات الثلاث تقسّم الفضاء الثلاثي إلى ثمانية مناطق كما يلي:

المنطقة الأولى	$X > 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة الثانية	$X > 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة الثالثة	$X > 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الرابعة	$X > 0, Y < 0, Z < 0$
المنطقة الخامسة	$X < 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة السادسة	$X < 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة السابعة	$X < 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الثامنة	$X < 0, Y < 0, Z < 0$

وعلى ذلك فإن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط.

وبفرض P نقطة في الفضاء الثلاثي ، نوجد مساقطها على المحاور OX, OY, OZ ولتكن على الترتيب P_1, P_2, P_3 واضح أن النقط P_1, P_2, P_3 تتحدد تماما بالنقطة P وبالتالى فإن $x = OP_1, y = OP_2, z = OP_3$ وتُسمى الكميات x, y, z بإحداثيات النقطة P في الفضاء الثلاثي ويُرمز لها بالرمز P(x,y, z) ، وكذلك العكس صحيح أي أنه إذا عرفنا الإحداثيات (x, y, z) فإنه يمكن تحديد النقطة P التي لها هذه الإحداثيات تحديداً تاماً بمعنى أنه توجد نقطة واحدة فقط P إحداثياتها x, y, z .

انظر الشكل التالي:



ملاحظة: واضح أن محاور الإحداثيات OX, OY, OZ تكوّن في الفضاء ثلاث مستويات XOY, YOZ, ZOX تُسمى هذه المستويات بمستويات الإحداثيات ويُطلق على المستوى XOY بالمستوى $z = 0$ والمستوى YOZ بالمستوى $x = 0$ والمستوى ZOX بالمستوى $y = 0$.

بينما على المحور OX تكون $y = 0, z = 0$ وعلى المحور OY تكون $x = 0, z = 0$ وعلى المحور OZ تكون $x = 0, y = 0$.

وكما ذكرنا سابقا أن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط:

- ثلاث نقاط بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ
- وثلاث نقاط بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY, YOZ, ZOX
- ونقطة واحدة بالنسبة لنقطة الأصل (القطب) O .

مثال(1): أوجد النقط المتماثلة الوضع مع النقطة (a, b, c) بالنسبة:

1 – لمحاور الإحداثيات.

2– لمستويات الإحداثيات.

3 – لنقطة الأصل (القطب) O .

الحل:

1– النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ تكون (a, -b, -c) , (-a, b, -c) , (-a, -b, c) على الترتيب.

2– النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY,YOZ,ZOX

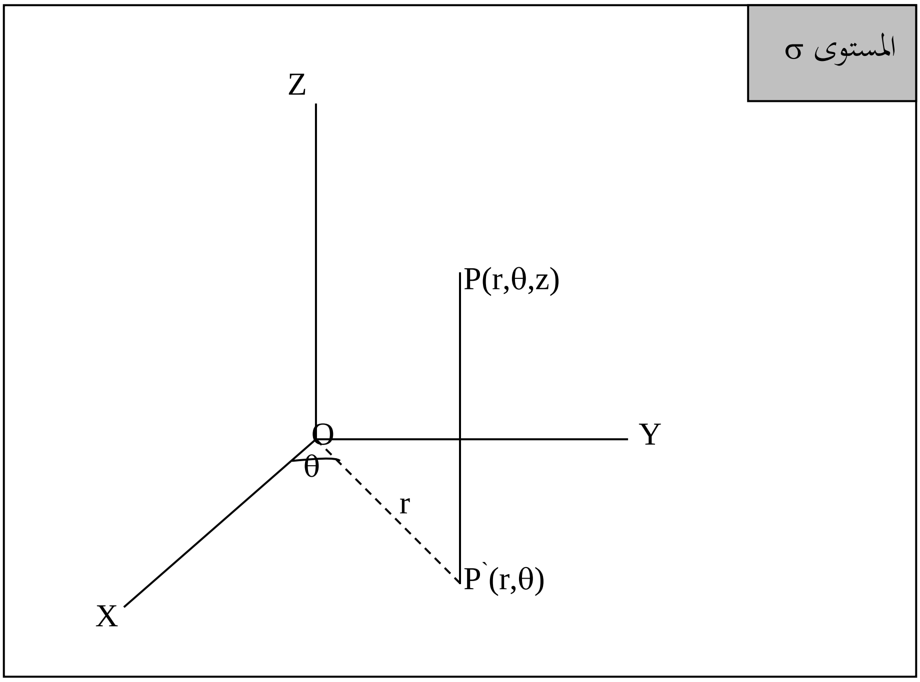
تكون (a, b, -c) , (-a, b, c) , (a, -b, c) على الترتيب.

3– النقطة المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة للقطب O تكون (-a, -b, -c) .

▪ الطريقة الثانية: الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z)

نفرض أن لدينا مستوى ما وليكن σ محدد به مجموعة إحداثيات قطبية

(قطب O وخط ابتدائي OX) وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي نحسب الكميات r, θ, z حيث r, θ الإحداثيات القطبية لمسقط P على المستوى σ والمقدار z هو بعد النقطة P عن المستوى σ

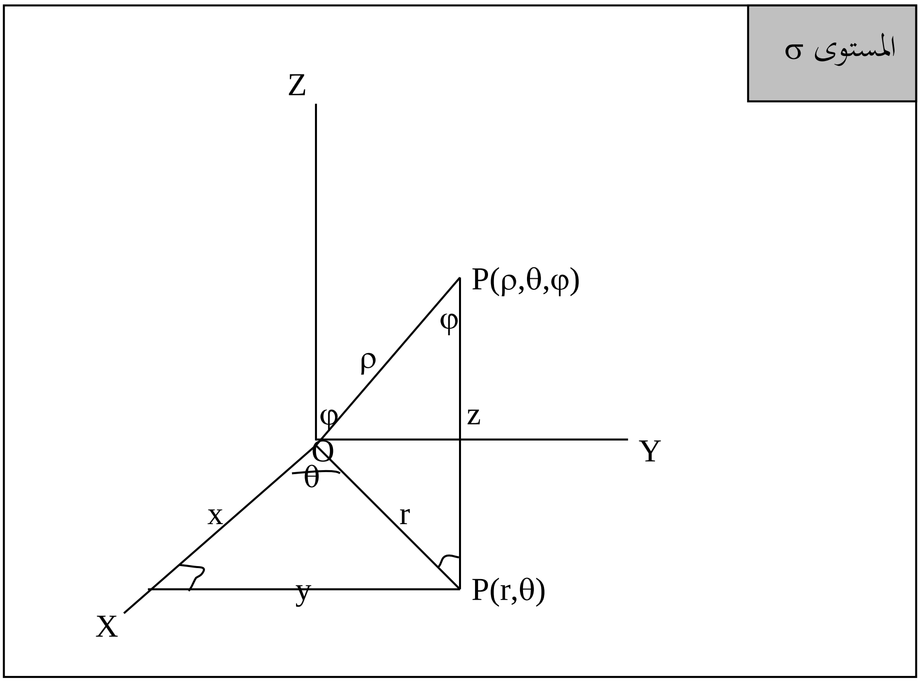
حيث $0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ , -\infty < z < \infty$

وتُسمى الكميات الثلاثة r, θ, z بالإحداثيات الأسطوانية للنقطة P ويُرمز لها بالرمز $P(r, \theta, z)$.

تُفضل الإحداثيات الأسطوانية لدراسة السطوح في الفضاء الثلاثي وذلك عندما تكون مقاطع هذه السطوح بمستويات توازي المستوى σ عبارة عن منحنيات معادلاتها معطاة بالإحداثيات القطبية أنسب للدراسة عما لو كانت هذه المعادلات معطاة بالإحداثيات الكارتيزية.

- **الطريقة الثالثة: الإحداثيات الكريه** (ρ, θ, φ)

تتحدد هذه الإحداثيات أيضاً كما في حالة الإحداثيات الأسطوانية فإذا كان لدينا مستوى ما σ محدد عليه مجموعة إحداثيات قطبية (قطب O وخط ابتدائى OX) وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي يمكن أن تحدد تحديداً تاماً الكميات ρ, θ, φ

حيث $0 \le \rho < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

وتُسمى الكميات ρ,θ,φ بالإحداثيات الكريه للنقطة P ويرمز لها بالرمز $P(\rho, \theta, \varphi)$

والعكس صحيح أي أن الكميات ρ,θ,φ تحدد نقطة وحيدة في الفضاء الثلاثي.

- **العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية والأسطوانية والكريه:**

لتكن P نقطة ما في الفضاء الثلاثي فإن إحداثياتها الكارتيزية (x,y,z) وإحداثياتها الأسطوانية هي (r, θ, z) وإحداثياتها الكريه هي (ρ,θ,φ) ومن الرسم السابق يتضح أن:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (1).$$

$$r = \rho\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi \qquad (2).$$

العلاقة (1) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كرتيزية.

والعلاقة (2) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (1) نستنتج أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (3).$$

العلاقة (3) تحول الإحداثيات الكرتيزية إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (2) نستنتج أن:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{r}{z} \qquad (4).$$

العلاقة (4) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كريه.

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi. \qquad (5).$$

العلاقة (5) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات كرتيزيه.

وبالتعويض من (3) في (4) نحصل على:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad (6).$$

العلاقة (6) تحول الإحداثيات الكرتيزيه إلى إحداثيات كريه.

مثال(2): إذا كانت $(1,-\sqrt{3},2)$ هي الإحداثيات الكرتيزية لنقطة في الفضاء الثلاثي. فأوجد إحداثياتها الأسطوانية والكريه.

الحل:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

(حيث θ تقع في الربع الرابع من المستوىXOY).

$\therefore$ الإحداثيات الأسطوانية للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2,-\frac{\pi}{3},2)$.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+3+4}=2\sqrt{2},$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan^{-1}\frac{2}{2}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

$\therefore$ الإحداثيات الكريه للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

مثال(3): أوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

الحل:

نوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة $(\rho,\theta,\varphi)\equiv(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta=(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2})=1$$

$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta=(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$$

$$z=\rho\cos\varphi=(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})=2$$

$\therefore$ الإحداثيات الكرتيزيه للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$ تكون $(1,-\sqrt{3},2)$.

مثال(4): حول المعادلة $\rho^2(1+3\sin^2\varphi\cos^2\theta)=4$ إلى الصورة الكارتيزية.

الحل:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[1+3\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]=4$$

$$\therefore\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1.$$

تمارين

1 – أوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة المتماثلة بالنسبة للقطب مع كل من النقط الآتية:

$$P_1(2, \frac{-\pi}{2}, 0), P_2(1, \frac{-\pi}{3}, 1), P_3(3, \frac{\pi}{4}, 1)$$

2 – أوجد الإحداثيات الكريه للنقطة المتماثلة بالنسبة للمحور OX مع كل من النقط الآتية:

$P_1(-1, \sqrt{3}, -2)$, $P_2(\sqrt{3}, 1, 2)$.

3 – حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الأسطوانية ثم إلى الصورة الكريه

(i) $x^2 + y^2 = 6$. (ii) $xy = z$.
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. (iv) $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4$.
(v) $x^2 + y^2 = 8\,xy$. (vi) $x^2 + y^2 - \frac{1}{2} z^2 = 0$.
(vii) $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$.

4 – حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية.

(i) $z \sin\theta = r$. (ii) $z^2 \cos\theta = r^2$.
(iii) $r = a(1 - \cos\theta)$. (iv) $y = z(1 + \cos\theta)$.
(v) $\rho = a \cot\varphi / \cos\varphi$. (vi) $\rho = z\, a \sin\theta \sin\varphi$.

---

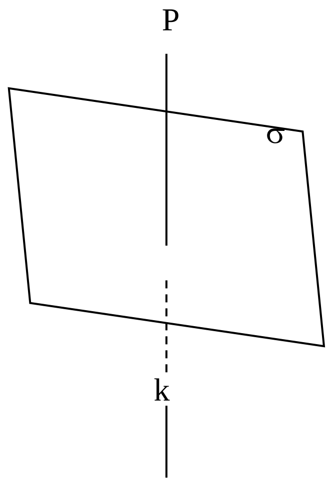
2 – المساقط:

أ – مسقط نقطة في الفضاء الثلاثي:

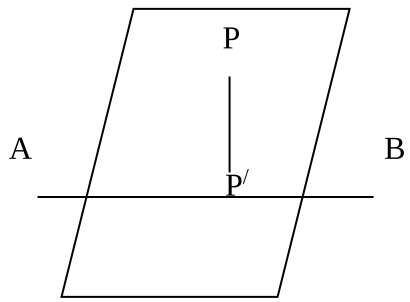
1 – لإيجاد مسقط نقطة ما P في الفضاء الثلاثي على المستقيم AB نرسم المستوى σ المار بالنقطة P وعموديا على AB انظر (شكل1).

فتكون $P^{/}$ نقطة تقاطع المستوى σ مع AB هى مسقط P على AB.

2 – ولإيجاد مسقط نقطة P على المستوى σ نرسم من P مستقيم PK عمودياً على المستوى σ فتكون نقطة تقاطع العمود PK مع المستوى σ هى مسقط P على المستوى σ انظر (شكل2).



(شكل2)

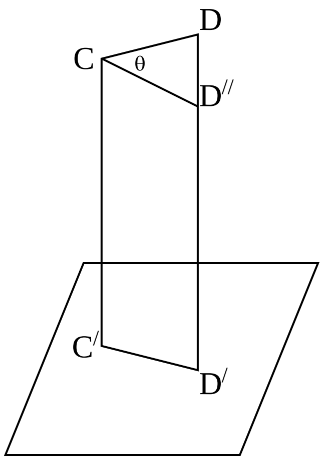


(شكل1)

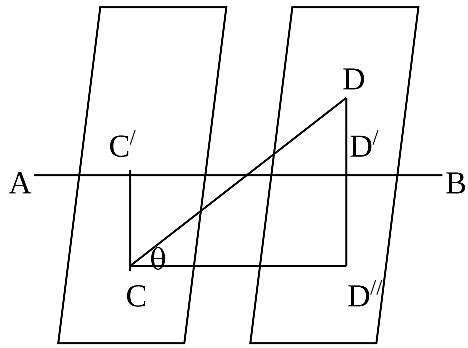
ب – مسقط مستقيم في الفضاء الثلاثي:

1- مسقط المستقيم CD على المستقيم AB هو الجزء $C'D'$ من المستقيم AB حيث C', D' هما مسقط C, D على المستقيم AB على الترتيب انظر (شكل3).

2- وبالمثل مسقط المستقيم CD على المستوى σ هو المستقيم $C'D'$ حيث C',D' هما مسقط كل من C, D على المستوى σ على الترتيب انظر (شكل4).



(شكل4)



(شكل3)

في (شكل3) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيمين الغير مستوين AB, CD فإن θ تقاس بالزاوية بين مستقيمين مرسومين من أي نقطة موازيين لـ AB, CD ولذلك نرسم من C مستقيم $CD'' \,//\, AB$ كما بالرسم.

$$\therefore\ CD'' = C'D' = CD\ \cos\theta. \qquad (1)$$

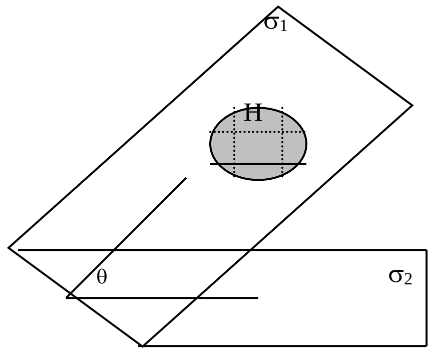
وفي (شكل4) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيم CD والمستوى σ أي بين المستقيم CD ومسقطه $C'D'$ ثم رسمنا $CD'' \,//\, C'D'$ ويقطع CD' في C''

$$\therefore\ C'D' = CD'' = CD\cos\theta. \qquad (2)$$

من (1),(2) يتضح أن طول مسقط المستقيم CD على المستقيم AB (على المستوى σ) يكون مساوياً لحاصل ضرب CD في جيب تمام الزاوية بين CD والمستقيم AB (أو المستوى σ).

ج – مسقط مساحة مستوية على مستوى في الفضاء الثلاثي:

نفرض في المستوى σ_1 مساحة مستوية H يراد إيجاد مسقطها على المستوى σ_2 ونفرض أن الزاوية بين المستويين σ_1, σ_2 هي θ تقسم المساحة H إلى عدد كبير من المستطيلات انظر (شكل5)



(شكل5)

وحيث إن مساحة المستطيل = حاصل ضرب طولى ضلعيه.

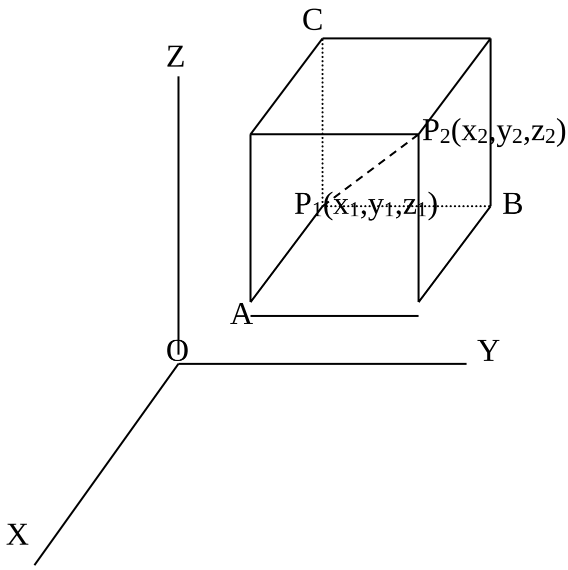
فإن مسقط مساحة كل مستطيل يكون مساوياً مساحة هذا المستطيل مضروبة في جيب تمام الزاوية θ ومن ثم يكون مسقط المساحة الكلية H مساوياً حاصل ضرب H في جيب تمام الزاوية θ أي أن:

$$H_{\sigma 2} = H \cos \theta.$$

حيث $H_{\sigma 2}$ هى مساحة مسقط H على المستوى σ_2.

3 – البعد بين نقطتين في الفضاء الثلاثي:

لتكن $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين في الفضاء الثلاثي والمطلوب إيجاد الطول P_1P_2 لذلك نرسم من P_1 ثلاث مستويات توازي مستويات الإحداثيات ،ثم نرسم أيضاً من P_2 ثلاثة مستويات توازي مستويات الإحداثيات فتكوّن هذه المستويات الست متوازي مستطيلات فيه P_1P_2 قطراً كما يتضح من الرسم التالي:



$$\therefore P_1A = x_2 - x_1 \;,\; P_1B = y_2 - y_1 \;,\; P_1C = z_2 - z_1 \;,$$

$$\therefore \overline{P_1P_2}^{\,2} = \overline{P_1A}^{\,2} + \overline{P_1B}^{\,2} + \overline{P_1C}^{\,2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\therefore P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

1- بُعد النقطة $P(x, y, z)$ عن نقطة الأصل O يكون $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2- وإذا كان P_1P_2 يوازي أحد المستويات فلن نتمكن من رسم متوازي المستطيلات المشار إليه ورغم ذلك يظل القانون صحيحاً كما يلي: نفرض مثلا أن P_1P_2 يوازي المستوى XOY عندئذ يكون $z_1=z_2$ وبالتالي يكون طول P_1P_2 هو:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \ .$$

3- إذا كان P_1P_2 يوازي أحد المحاور مثلا P_1P_2 // OX فإن $y_1=y_2, z_1=z_2$ وبالتالي يكون طول P_1P_2 يساوي $x_2- x_1$

4 – نقطة التقسيم:

لتكن $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتان معلومتان في الفضاء الثلاثي.

فإن إحداثيات النقطة P التى تقسم المسافة بين النقطتين P_1,P_2 من الداخل بحيث:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$ (نسبة التقسيم)

تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

- **ملاحظات ونتائج:**

1 – نقطة منتصف المسافة بين P_1,P_2 تكون $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

2 – إذا كانت نقطة التقسيم P بين P_1,P_2 تقسم من الخارج كامتداد للمسافة بين P_1,P_2 سواء من ناحيةP_2 أو من ناحيةP_1 بحيث (نسبة التقسيم) $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

فإن إحداثيات النقطة P تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right).$$

- **أمثلة:**

مثال(1): تحقق من أن المثلث الذى رؤوسه $P_1(1, -2, 1), P_2(3, -3, -1), P_3(4, 0, 3)$ يكون قائم الزاوية وأوجد مساحته.

الحل:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 4 + 1 + 4 = 9.$$
$$\overline{P_2P_3}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 1 + 9 + 16 = 26.$$
$$\overline{P_1P_3}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 9 + 4 + 4 = 17.$$
$$\therefore \overline{P_2P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_3}^2$$

أي أن المثلث $P_1P_2P_3$ يكون قائم الزاوية في P_1 .

$$\Delta P_1P_2P_3 = ½ (P_1P_2)(P_3P_1) = \frac{1}{2}(3)\left(\sqrt{17}\right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

مثال(2): أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تظل دائماً على بعدين متساويين من النقطتين $P_1(2, -1, 3), P_2(1, 0, 2)$.

الحل:

نفرض أن النقطة هي $P(x, y, z)$

$$\therefore \overline{PP_1} = \overline{PP_2} \Rightarrow \overline{PP_1}^2 = \overline{PP_2}^2.$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2.$$
$$2x - 2y + 2z - 9 = 0.$$

وهذه تمثل معادلة مستوى في الفضاء الثلاثي.

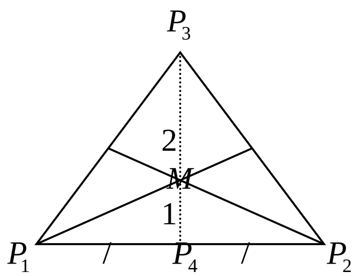
مثال(3): تحقق من أن احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:
$P_1(-1,0,1)\,,P_2(-3,-2,-1)\,,P_3(7,8,9)\,.$

تكون $(1,2,3)$

الحل:

نقطة تلاقي منصفات أضلاع المثلث (منصفات زوايا رؤوس المثلث) تكون هي المركز المتوسط للمثلث ، (وتُسمى أيضاً مركز ثقل المثلث) وهذه النقطة تقسم المستقيم الذي يصل بين أي رأس من رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل بنسبة تقسيم 2:1

انظر الشكل:



واضح أن النقطة M تكون هي المركز المتوسط للمثلث وهذه النقطة تقسم P_3P_4 من الداخل بنسبة تقسيم $\frac{2}{1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\overline{P_3M}}{\overline{P_4M}}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1 y_2+\lambda_2 y_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1 z_2+\lambda_2 z_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right).$$

واحداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_1,P_2 تكون:

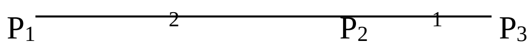
$$\left(\frac{(-1)+(-3)}{2},\frac{(0)+(-2)}{2},\frac{(1)+(-1)}{2}\right)=(-2,-1,0)\ ,$$

$$\therefore M\left(\frac{(2)(-2)+(1)(7)}{1+2},\frac{(2)(-1)+(1)(8)}{1+2},\frac{(2)(0)+(1)(9)}{1+2}\right)\equiv(1,2,3)$$

وهو المطلوب.

مثال(4): إذا قُسم المستقيم P_1P_2 من ناحية P_2 بالنقطة P_3 بحيث $\overline{P_1P_2} = 2\overline{P_2P_3}$ علماً بأن $P_1(-1,0,1), P_2(1,2,3)$ فأوجد إحداثيات P_3

الحل:



واضح من المعطيات أن النقطة $P_3(x,y,z)$ تقسم P_1P_2 من الخارج بنسبة $\dfrac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}} = \dfrac{3}{1}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الخارج تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)$$

$$\therefore x = \frac{3(1) - 1(-1)}{3-1} = 2,\ \ y = \frac{3(2) - 1(0)}{3-1} = 3,\ \ z = \frac{3(3) - 1(1)}{3-1} = 4$$

وإذاً إحداثيات نقطة التقسيم تكون $P_3(2,3,4)$

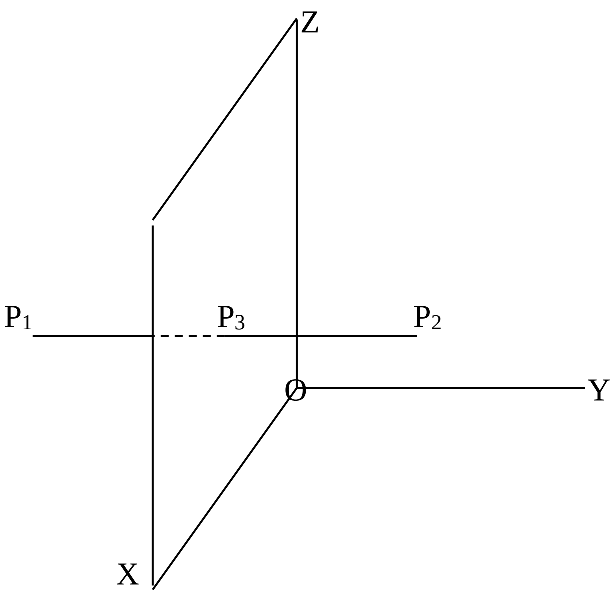
مثال(5): أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم P_1P_2 مع المستوى XOZ حيث:
$P_1(3,-1,5), P_2(-1,3,-3)$.

الحل:

لتكن نقطة التقاطع P_3 وهي نقطة تقسيم من الداخل تقع على المستوى XOZ
ومن ثم تكون $P_3(x,0,z)$.

ونفرض أن P_3 تقسم المسافة بين P_1,P_2 من الداخل بنسبة $\lambda_1:\lambda_2$ أي أن $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

كما يضح من الرسم التالي:



$$\therefore x=\frac{\lambda_1x_2+\lambda_2x_1}{\lambda_1+\lambda_2},\ 0=\frac{\lambda_1y_2+\lambda_2y_1}{\lambda_1+\lambda_2},\ z=\frac{\lambda_1z_2+\lambda_2z_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\therefore 0=\frac{\lambda_1(3)+\lambda_2(-1)}{\lambda_1+\lambda_2}\Rightarrow 3\lambda_1-\lambda_2=0\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x=\frac{1(-1)+3(3)}{4}=2,\ \ z=\frac{1(-3)+3(5)}{4}=3.$$

وإذاً احداثيات نقطة التقاطع تكون $P_3(2,0,3)$.

مثال(6): أوجد احداثيات النقطتين P_3, P_4 اللتين تقسمان المسافة بين النقطتين:
$P_1(1,5,3), P_2(7,2,9)$.
إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

الحل:

P_1 ———— P_3 ———— P_4 ———— P_2

واضح أن النقطة P_3 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\frac{1}{2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}}$.

وأن النقطة P_4 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\frac{2}{1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_2P_4}}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

$$\therefore P_3\left(\frac{(1)(7)+(2)(1)}{1+2}, \frac{(1)(2)+(2)(5)}{1+2}, \frac{(1)(9)+(2)(3)}{1+2}\right) = (3,4,5) \quad ,$$

$$\therefore P_4\left(\frac{(2)(7)+(1)(1)}{2+1}, \frac{(2)(2)+(1)(5)}{2+1}, \frac{(2)(9)+(1)(3)}{2+1}\right) = (5,3,7)$$

(**ملاحظة**: بعد حساب احداثيات P_3 يمكن حساب احداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_2, P_3).

تمارين

1 – تحقق من أن أبعاد النقطة P(x, y, z) عن محاور الاحداثيات OX, OY, OZ تكون هي $\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, \sqrt{x^2+y^2}$ على الترتيب.

2 – تحقق من أن (0 ,2 ,2), (0 ,6 ,6), (1 ,2 ,6) تكون رؤوس مثلث متساوي الساقين وأوجد مساحته.

3 – إذا كان $P_1P_2P_3$ مثلث متساوي الأضلاع وكانت $P_1(1, 2, 6), P_2(1, 6, 2)$ فأوجد نقطة P_3 علما بأن الإحداثي y لها يساوي 2 ثم احسب مساحة المثلث.

4 – أوجد نقطة على محور السينات تكون متساوية البعد عن النقطتين (1 ,3 ,4), (2 ,6- ,2-).

5 – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تكون متساوية البعد عن النقطتين (6 ,1 ,8), (1 ,5 ,2).

6 – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة(3 ,2- ,1) مساوياً بعدها عن المحور OY.

7 – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة(2 ,1- ,1) دائماً مساوياً 3 وماذا يكون هذا المحل الهندسي؟ .

8– استنتج احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذى رؤوسه:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$.

9– احسب احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:

(0,7,-5), (-1,5,-6), (4,0,3).

10 – أوجد احداثيات النقطتين اللتين تقسمان المسافة بين النقطتين:

$P_1(3, -5, -2), P_2(7, 1, -6)$

إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

---

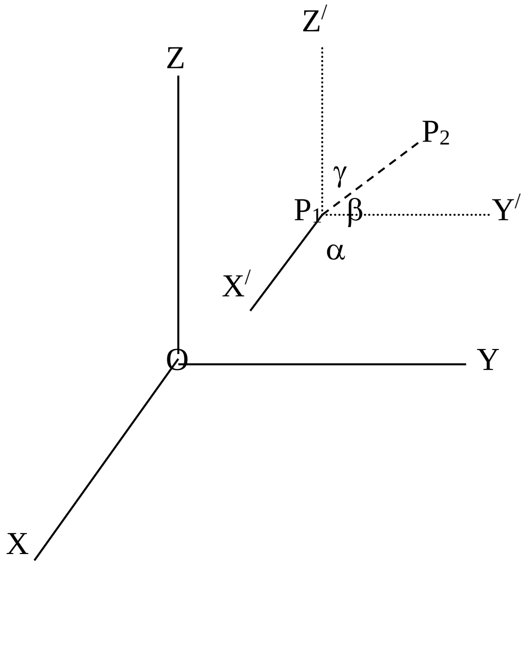
5 – زوايا الاتجاه:

اتفقنا على أن الزاوية بين مستقيمين فى الفضاء الثلاثي تُقاس بالزاوية بين أى مستقيمين فى نفس المستوى ومرسومان من أى نقطة ويوازيان المستقيمان المعطيان فى الفضاء الثلاثي.

ولذلك لإيجاد الزوايا التى يصنعها المستقيم P_1P_2 مع الاتجاهات الموجبة للمحاور OX, OY, OZ نرسم من P_1 المستقيمات P_1X', P_1Y', P_1Z' توازي محاور الإحداثيات فتكون الزوايا α,β,γ الموضحة بالرسم هى الزوايا التى يصنعها المستقيم P_1P_2 مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

تُسمى الزوايا α,β,γ بزوايا الاتجاه للمستقيم P_1P_2 وتُسمى جيوب تمام هذه الزوايا $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ بجيوب تمام الاتجاه للمستقيم P_1P_2.

انظر الشكل:



ومن المهم جداً عند حساب زوايا اتجاه المستقيم P_1P_2 أن نعتبر P_1P_2 متجهاً بدايته P_1 ونهايته P_2 ثم نحسب الزوايا α,β,γ بين الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات والاتجاه الموجب للمستقيم P_1P_2 باعتبار هذا الاتجاه من P_1 إلى P_2

ولذلك إذا كانت α,β,γ زوايا اتجاه المستقيم P_1P_2 فإن زوايا الاتجاه للمستقيم P_2P_1 تكون هي $\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$ على الترتيب ، وتكون جيوب تمام اتجاه P_2P_1 هي

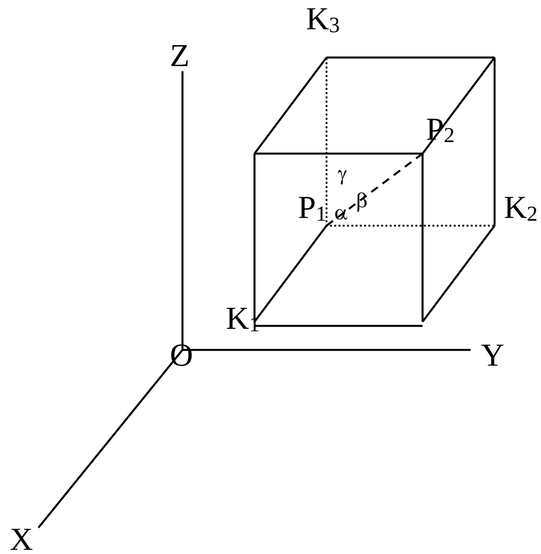
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha\ ,\ \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta\ ,\ \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma.$$

وواضح أن زوايا اتجاه المحور OX تكون هي $0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ وجيب تمام اتجاه المحور OX تكون (1, 0, 0) وبالمثل تكون جيوب تمام اتجاه المحور OY هي (0, 1, 0) وجيوب تمام اتجاه المحور OZ هي (0, 0, 1)

ومجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي من محاور الإحداثيات يكون مساوياً الواحد الصحيح.

<u>نتيجة(1)</u>: مجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي مستقيم فى الفضاء الثلاثي يكون مساوياً الواحد الصحيح.

<u>البرهان</u>: ليكن P_1P_2 مستقيما زوايا اتجاهه هي α,β,γ نرسم متوازي مستطيلات بحيث يكون P_1P_2 قطراً فيه:



من الرسم يتضح ما يلي:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{P_1K_1}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\beta=\frac{\overline{P_1K_2}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\gamma=\frac{\overline{P_1K_3}}{\overline{P_1P_2}}.$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{\overline{P_1K_1}^2+\overline{P_1K_2}^2+\overline{P_1K_3}^2}{\overline{P_1P_2}^2}=\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\overline{P_1P_2}^2}=1.$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

وسوف نرمز اختصاراً لجيوب تمام اتجاه المستقيم فى الفضاء الثلاثي بالرموز L, M, N أي أن :

$L=\cos\alpha$, $M=\cos\beta$, $N=\cos\gamma$.

وسوف نقول أن الكميات الثلاثة a, b, c هي نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه L, M, N عندما وعندما فقط يتحقق الشرط:

$L : M : N = a : b : c$

نتيجة(2): إذا كانت a, b, c هى نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه هي L, M, N فإن:

$$L=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

البرهان: حيث إن $L : M : N = a : b : c$ فيكون:

$$L=\lambda a,\quad M=\lambda b,\quad N=\lambda c \qquad (*)$$

وبالتالي يكون:

$$L^2+M^2+N^2=\lambda^2a^2+\lambda^2b^2+\lambda^2c^2=\lambda^2(a^2+b^2+c^2).$$

$$\therefore 1=\lambda^2(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow \lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

وبالتعويض عن λ فى العلاقات (*) نحصل على

$$L=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

- **ملاحظات**:

1 – واضح أن قيم λ تُعطينا مجموعتين من جيوب تمام الاتجاه أحداهما L_1, M_1, N_1 والأخرى $-L_1, -M_1, -N_1$ وهذا أمر طبيعي حيث إنه إذا كانت a, b, c نسب اتجاه المستقيم P_1P_2 الذي جيوب تمام اتجاهه L_1, M_1, N_1

فإن نفس الكميات a, b, c تكون أيضاً نسب اتجاه المستقيم P_2P_1 الذي جيوب تمام اتجاهه $-L_1, -M_1, -N_1$.

2 – إذا كانت $P_2(x_2, y_2, z_2), P_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطتان فى الفضاء الثلاثي فإن نسب اتجاه OP_1 تكون هي x_1, y_1, z_1 ونسب اتجاه P_1P_2 هي $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$.

3 – إذا كانت المستقيمات متوازية فإنها تشترك فى زوايا الاتجاه وبالتالي يكون لها نفس نسب الاتجاه (جيوب تمام الاتجاه).

4 – لا يمكن أن تنعدم في آن واحد جميع جيوب تمام الاتجاه للمستقيم في الفضاء الثلاثي حيث $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

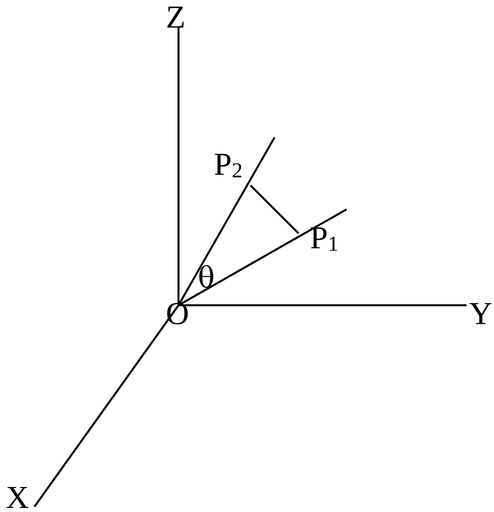
5 – إذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ فإن جيوب تمام اتجاه P_1P_2 تكون هي:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\overline{P_1P_2}}.$$

وكذلك جيوب تمام اتجاه P_2P_1 تكون هي $\frac{x_1 - x_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{y_1 - y_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{z_1 - z_2}{\overline{P_1P_2}}$.

6 – الزاوية بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي:

نفرض مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L_1, M_2, N_2 وجيوب تمام اتجاه الآخر L_2, M_2, N_2 نرسم من القطب O مستقيمين OP_1, OP_2 يوازيان المستقيمان المعلومان كما بالرسم:



فإن الزاوية θ بين المستقيمين تُعطى من النتيجة الآتية:

نتيجة(3): $\cos\theta = L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2$

البرهان: باعتبار أن $P_2(x_2, y_2, z_2), P_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطتان من المثلث OP_1P_2 فيكون:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta .$$

وحيث إن:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 .$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta.$$

$$\therefore -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 = -2(OP_1)(OP_2)\cos\theta \quad ,$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{(OP_1)(OP_2)} = (\frac{x_1}{OP_1})(\frac{x_2}{OP_2}) + (\frac{y_1}{OP_1})(\frac{y_2}{OP_2}) + (\frac{z_1}{OP_1})(\frac{z_2}{OP_2})$$

$$= L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2 .$$

▪ **ملاحظات**:

1 – شرط تعامد مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L_1, M_1, N_1 وجيوب تمام اتجاه الآخر L_2, M_2, N_2 هو:

$$L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2 = 0.$$

2 – إذا كانت a_1, b_1, c_1 نسب اتجاه مستقيم ما وكانت a_2, b_2, c_2 نسب اتجاه مستقيم آخر فإن الزاوية بينهما θ تُعطى بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

7 – نسب اتجاه العمودي على مستقيمين معلومين:

نفرض مستقيمين معلومين نسب اتجاه أحدهما a_1, b_1, c_1 ونسب اتجاه الأخر a_2, b_2, c_2

ويُراد إيجاد نسب اتجاه العمودي عليهما ولتكن a, b, c

واضح أنه يجب أن نشترط عدم توازي المستقيمين المعلومين أى أن:

$$a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$$

ومن شرط التعامد يكون:

$$a_1a + b_1b + c_1c = 0,$$
$$a_2a + b_2 b + c_2c = 0.$$

وهاتان العلاقتان كافيتان لإيجاد النسبة بين الكميات a, b, c .

ومن شرط عدم التوازي نستنتج أنه على الأقل أحد المحددات:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

يكون مختلفاً عن الصفر وليكن المحدد الأول هو المختلف عن الصفر فبالتالي يكون:

$$a_1a + b_1b = - c_1c.$$
$$a_2a + b_2b = - c_2c.$$

$$\therefore a = \frac{\begin{vmatrix} -c_1c & b_1 \\ -c_2c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -c\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

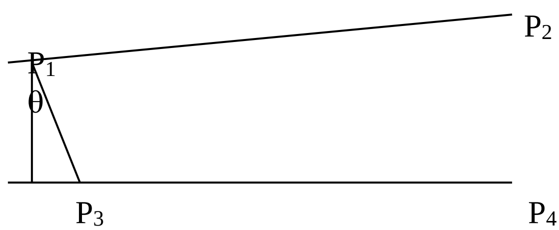
وبالمثل يمكن إثبات أن $b = c\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ وباعتبار $c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ينتج:

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

وهذه هي نسب الاتجاه العمودي على المستقيمين المعلومين.

8 – طول أقصر بُعد بين مستقيمين معلومين غير متقاطعين في الفضاء الثلاثي:

طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين P_1P_2, P_3P_4 يساوي طول مسقط المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين على العمودي عليهما ، ومن ثم يساوي حاصل ضرب طول المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين في جيب تمام الزاوية بين هذا المستقيم الواصل وبين المستقيم العمودي على المستقيمين(انظر الشكل):



وإذا كان K هو طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين P_1P_2, P_3P_4 فإن:

$$K = \left|\overline{P_1P}_3 \cos\theta\right| = \left|\overline{P_1P_3}(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2)\right|$$

حيث L_1, M_1, N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_3 (أو جيوب تمام اتجاه P_2P_4) ،

وحيث L_2, M_2, N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

- **أمثلة:**

مثال(1): في أى الحالات الآتية يوجد مستقيم في الفضاء الثلاثي زوايا اتجاهه α,β,γ ؟

(i) $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

(ii) $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

الحل:

الشرط اللازم لكي تكون α,β,γ عبارة عن زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي هو:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(i) $\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2=1$

وإذاً α,β,γ تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{4}\neq1$

وإذاً α,β,γ لا تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

مثال(2): أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم المار بالنقطتين $P_1(1,-2,3)$, $P_2(2,-3,5)$

الحل:

لتكن نسب اتجاه المستقيم P_1P_2 هي a,b,c

$\therefore a=2-1=1\ ,\ b=-3-(-2)=-1\ ,\ c=5-3=2$

وبالتالي تكون جيوب تمام اتجاه المستقيم P_1P_2 هي:

$$L=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

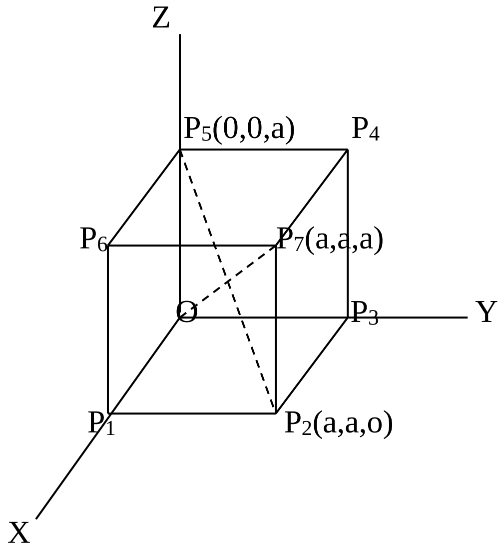
$$M=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$N=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

مثال(3): أوجد الزاوية بين قطرين من أقطار المكعب.

الحل:

نفرض أن طول ضلع المكعب a وبأخذ ثلاثة أوجه متعامدة من المكعب منطبقة على مستويات الإحداثيات كما بالرسم:



وبالتالي تكون أقطار المكعب هي كالتالي $P_1P_4, P_3P_6, P_2P_5, OP_7$

ونوجد الزاوية بين القطرين OP_7, P_2P_5 كما يلي:

نسب اتجاه OP_7 هي a, a, a ،ونسب اتجاه P_2P_5 هي $-a, -a, a$

وبالتالي الزاوية بين قطري المكعب تُعطى من:

$$\theta = \cos^{-1}[\pm\frac{a(-a)+a(-a)+a(a)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\ \sqrt{a^2+a^2+a^2}}] = \cos^{-1}[\pm\frac{-a^2}{3a^2}] = \cos^{-1}[\mp\frac{1}{3}].$$

وواضح أنه نحصل على قيمتين(موجبة وسالبة)إحداهما للزاوية الحادة والثانية للمنفرجة.

مثال(4): أوجد جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقط:

$P_1(2, 3, -2), P_2(1, -1, -1), P_3(0, 1, 2)$

الحل:

المستقيم العمودي على المستوى المار بالنقط المعطاه يكون هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_1P_3 حيث أنهما يقعا في نفس المستوى المار بالنقط P_1,P_2,P_3

ولتكن نسب اتجاه هذا العمودي هي a,b,c ونسب اتجاه P_1P_2 هي a_1,b_1,c_1

ونسب اتجاه P_1P_3 هي a_2,b_2,c_2

$$\therefore a_1 = 1-2 = -1\,,\ b_1 = -1-3 = -4\,,\ c_1 = -1-(-2) = 1 \quad ,$$

$$a_2 = 0-2 = -2\,,\ b_2 = 1-3 = -2\,,\ c_2 = 2-(-2) = 4 \quad ,$$

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

$$b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى تكون:

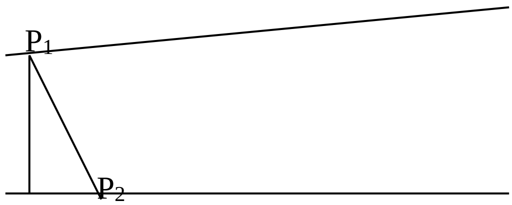
$$L = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-14}{\sqrt{196+4+36}} = \frac{-14}{\sqrt{236}}\ ,$$

$$M = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{236}}\ ,$$

$$N = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-6}{\sqrt{236}}.$$

مثال(5): أوجد طول أقصر بُعد بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي نسب اتجاه أحدهما $3,2,1$ ويمر بالنقطة $(3,4,5)$ ونسب اتجاه الأخر $3,6,-2$ ويمر بالنقطة $(4,6,3)$

الحل: لتكن $P_1(3,4,5)\ ,\ P_2(4,6,3)$



طول أقصر بُعد K بين المستقيمين المعلومين يُعطى من العلاقة:

$$K = \left|\overline{P_1P_2}(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2)\right|.$$

حيث L_1, M_1, N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_2 ، وحيث L_2, M_2, N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(4-3)^2 + (6-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3\ ,$$

$$\therefore L_1 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}\ ,\ M_1 = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}\ ,\ N_1 = \frac{3-5}{3} = \frac{-2}{3}\ ,$$

ولتكن نسب اتجاه العمودي على المستقيمين هي a,b,c

ولتكن $a_1,b_1,c_1 \equiv 3,2,1\ ,\ a_2,b_2,c_2 \equiv 3,6,-2$ وإذاً:

$$a=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-10\ ,\ b=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=9\ ,$$

$$c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=12\,,$$

$$L_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{-10}{\sqrt{100+81+144}}=\frac{-10}{\sqrt{325}}=\frac{-10}{\sqrt{(13)(25)}}=\frac{-10}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$M_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9}{\sqrt{325}}=\frac{9}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$N_2=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{12}{\sqrt{325}}=\frac{12}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$\therefore K=\left|\overline{P_1P_2}\left(L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2\right)\right|$$

$$=\left|3\left[(\frac{1}{3})(\frac{-10}{5\sqrt{13}})+(\frac{2}{3})(\frac{9}{5\sqrt{13}})+(\frac{-2}{3})(\frac{12}{5\sqrt{13}})\right]\right|.$$

$$=\left|\frac{-16}{5\sqrt{13}}\right|=\frac{16}{5\sqrt{13}}.$$

مثال(6): أوجد طول أقصر بعد بين المستقيمين $P_1P_2\,,P_3P_4$ حيث:

$P_1(-4,-1,2)\ ,\ P_2(2,-3,5)\ ,\ P_3(0,3,-5)\ ,\ P_4(2,4,-4)$.

الحل:

لتكن نسب اتجاه P_1P_2 هي a_1,b_1,c_1 ونسب اتجاه P_3P_4 هي a_2,b_2,c_2

ونسب اتجاه العمودي على $P_1P_2\,,P_3P_4$ هي a,b,c

$$\therefore a_1=2-(-4)=6\ ,\ b_1=-3-(-1)=-2\ ,\ c_1=5-2=3\ ,$$
$$a_2=2-0=2\ ,\ b_2=4-3=1\ ,\ c_2=-4-(-5)=1\ ,$$

$$a=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

$$b=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=10$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين تكون:

$$L_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{-5}{\sqrt{25+0+100}}=\frac{-5}{5\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}\ ,$$

$$M_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{0}{5\sqrt{5}}=0\ ,$$

$$N_2=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,$$

$$\overline{P_1P_3}=\sqrt{16+16+49}=\sqrt{81}=9\ ,$$

وجيوب تمام اتجاه P_1P_3 تكون:

$$L_1=\frac{0-(-4)}{9}=\frac{4}{9}\ ,\ M_1=\frac{3-(-1)}{9}=\frac{4}{9}\ ,\ N_1=\frac{-5-2}{9}=\frac{-7}{9}\ ,$$

وإذاً طول أقصر بُعد بين المستقيمين يُعطى من العلاقة:

$$\left|\overline{P_1P_3}\left(L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2\right)\right|=\left|9\left[(\frac{4}{9})(\frac{-1}{\sqrt{5}})+(\frac{4}{9})(0)+(\frac{-7}{9})(\frac{2}{\sqrt{5}})\right]\right|$$

$$=\left|\frac{-18}{\sqrt{5}}\right|=\frac{18}{\sqrt{5}}.$$

تمارين

1- إذا كانت $P_1(3, 4, 5)$, $P_2(4, 6, 3)$, $P_3(-1, 2, 4)$, $P_4(1, 0, 5)$

فأوجد طول مسقط المستقيم P_1P_2 على المستقيم P_3P_4.

2- أوجد زوايا المثلث الذي رؤوسه $(-1, 5, -1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 3, -2)$.

3- بدون حساب أطوال أضلاع المثلث الذي رؤوسه النقط:

$(1, 2, 6)$, $(1, 6, 2)$, $(4, 4, 0)$.

تحقق من أنه قائم الزاوية.

4- إذا كانت نسب اتجاه أضلاع مثلث هي $\{-4,0,4\}$, $\{-4,4,0\}$, $\{0,4,-4\}$.

فتحقق من أن المثلث يكون متساوي الأضلاع.

5- عيّن قيمة λ التي تجعل المستقيم P_1P_2 عمودياً على المستقيم P_3P_4 علما بأن:

$P_1(-\lambda,-1,2)$, $P_2(0,2,4)$, $P_3(1,\lambda,1)$, $P_4(\lambda + 1,0,2)$.

6- مستقيم نسب اتجاهه 1 ,2- ,2 ويمر بالنقطة $(1, 6, -4)$

أوجد نقطة تقاطعه مع مستويات الإحداثيات.

7- أوجد طول أقصر بعد بين مستقيمين أحدهما نسب اتجاهه 1 ,2- ,2 ويمر بالنقطة $(1, 5, 2)$ والآخر نسب اتجاهه 2- ,3 ,6 ويمر بالنقطة $(6, 2, -2)$.

8- أوجد طول أقصر بعد بين المستقيمين P_1P_2, P_3P_4 حيث:

$P_1(0, 2, 4)$, $P_2(3, 4, 5)$, $P_3(1, 0, 5)$, $P_4(4, 6, 3)$.

الباب الثانى

المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي

أولاً – المستوى في الفضاء الثلاثي:

1- تعريف المستوى:

المستوى هو السطح الذى إذا أُخذت عليه نقطتان P_1, P_2 فإن جميع نقط المستقيم P_1P_2 تكون واقعة على السطح أيضاً.

نظرية: أي معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z تدل على مستوى ، والعكس صحيح بمعنى أن معادلة أي مستوى تكون من الدرجة الأولى في x, y, z.

البرهان: نفرض أن معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z بالصورة العامة:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

ولتكن $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين على المحل الهندسي للمعادلة (1) إذاً:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

ولتكن P نقطة ما على المستقيم P_1P_2 بحيث $\dfrac{P_1P}{P_2P} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P(x, y, z) \equiv \left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right).$$

وباستخدام العلاقة (2) نجد أن النقطة P تحقق المعادلة (1) وعلى ذلك وطبقا للتعريف فإن المعادلة (1) تمثل مستوى.

ولإثبات العكس نفرض مستوى يمر بنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ونفرض أن P_0K عمودي على المستوى وأن نسب اتجاه العمودي هي a,b,c

ولإيجاد معادلة المستوى نفرض $P(x, y, z)$ أي نقطة عليه.واضح أن المستوى يكون هو المحل الهندسي للنقطة P التى تحقق الشرط $P_0P \perp P_0K$.

وحيث إن نسب اتجاه P_0P تكون $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$.

$$\therefore a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \ . \qquad (3)$$

$$\therefore ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

وواضح أن (3) معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتتحقق فقط بجميع نقط المستوى وبالتالي فهي معادلة المستوى.

- **ملاحظات ونتائج:**

1- المعادلة (1) تشتمل على أربعة ثوابت يمكن اختزالها إلى ثلاثة ثوابت مستقلة ، وهذا يعني أن المستوى في الفضاء الثلاثي يتحدد بثلاث شروط مستقلة.

2- معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

3- شرط توازي المستقيم الذي نسب اتجاهه a_1, b_1, c_1 (جيوب تمام اتجاهه L,M,N) للمستوى $ax+by+cz+d=0$ هو: $aa_1+bb_1+cc_1=0$ ($aL+bM+cN=0$).

4- الزاوية θ بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تكون:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right).$$

5- شرط توازي المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$

والمسافة بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تساوي:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

6- شرط تعامد المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

7- إذا كانت $\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}$ نسب اتجاه مستقيمين معلومين ، وكانت $\{a, b, c\}$ نسب اتجاه العمودي عليهما ومن شرط التعامد يكون:

$a_1a + b_1b + c_1c = 0$,
$a_2a + b_2b + c_2c = 0$.

ويكون: $a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

- **أمثلة:**

مثال(1): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1- ,1 ,0) ويكون عمودياً على المستقيم P_1P_2 حيث $P_1(1, -1, 2), P_2(3, -4, 1)$.

الحل:

معادلة المستوى يمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

ونسب اتجاه العمودي P_1P_2 تكون:

$$a = 3 - 1 = 2, \ \ b = -4 + 1 = -3, \ \ c = 1 - 2 = -1.$$

فتكون معادلة المستوى المطلوبة:

$$2(x-0)+(-3)(y-1)+(-1)(z-(-1)) = 0.$$
$$\therefore 2x-3y-z+2=0.$$

مثال(2): أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 حيث:
$P_1(0, 1, 0), P_2(2, 0, 1), P_3(3, 0, 0), P_4(0, 2, 2)$.

الحل:

حيث إن المستوى يمر بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 فيكون العمودي على المستوى هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_3P_4

ونسب اتجاه P_1P_2 تكون 2,-1,1

ونسب اتجاه P_3P_4 تكون 2 ,2 ,3–

وبالتالي تكون نسب اتجاه العمودي عليهما (العمودي على المستوى) هي:

$$a = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \ b = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7, \ c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب بمعلومية نسب اتجاه العمودي عليه 1 ,7- , 4 – ويمر بالنقطة $P_1(0, 1, 0)$ هي:

$$-4(x - 0) - 7(y - 1) + 1(z - 0) = 0.$$
$$\therefore 4x + 7y - z - 7 = 0.$$

مثال(3): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ويكون عمودياً على المستويين $x + 2y + z = 0$, $2x - y + 3z - 1 = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ونسب اتجاه العمودي عليه a,b,c تكون:

$a(x-1) + b(y+1) + c(z-5) = 0.$

وحيث إن المستوى عمودي على كل من المستويين المعطيين فيكون العمودي على المستوى المطلوب موازياً لكل من المستويين المعطيين وشرط ذلك هو:

$2a - b + 3c = 0.$

$a + 2b + c = 0.$

$$\therefore a = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \;\; b = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \;\; c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

وعلى ذلك تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$-7(x-1) + (y+1) + 5(z-5) = 0.$

$\therefore -7x + y + 5z - 17 = 0.$

2 – صور خاصة لمعادلة المستوى:

أ – معادلة المستوى المار بثلاث نقط معلومة:

نفرض النقط الثلاث $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$

معادلة أي مستوى يمر بالنقطة P_1 تكون بالصورة :

$$a(x- x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطتين P_2, P_3 فنحصل على:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$
$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0.$$

وبحذف المعاملات الثلاثة a, b, c بين المعادلات نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

وهذه هي معادلة المستوى المار بالنقط P_1, P_2, P_3 (حيث إنها معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتحققها النقط P_1, P_2, P_3).

نتيجة: شرط وقوع النقط:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$

في مستوى واحد هو:

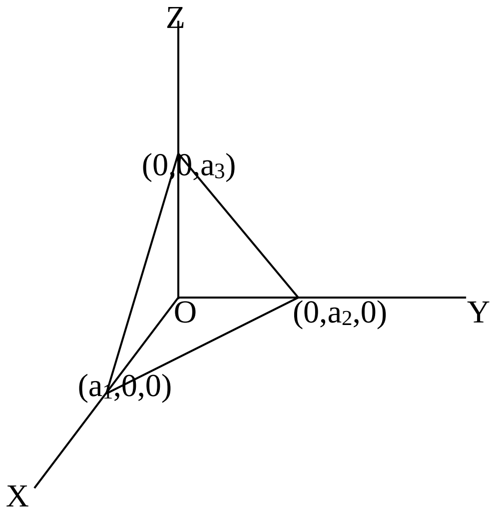
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

ب – معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من محاور الإحداثيات:

نفرض أن الأجزاء المقطوعة من المحاور هي a_1, a_2, a_3 أي أن المستوى يمر بالنقط:

$$(a_1,0,0),(0,a_2,0),(0,0,a_3)$$

كما بالرسم:



وبذلك تكون معادلة المستوى هي:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-0 & z-0 \\ 0-a_1 & a_2-0 & 0-0 \\ 0-a_1 & 0-0 & a_3-0 \end{vmatrix} = 0.$$

أي أن:

$$a_2a_3x + a_1a_3y + a_1a_2z = a_1a_2a_3 .$$

فإذا كانت $a_1a_2a_3 \neq 0$ فإن المعادلة السابقة تصبح على الصورة:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

1- إذا كان أحد الأجزاء a_1,a_2,a_3 لا يساوى الصفر ، وكان الجزءان الآخران مساويان للصفر ، وبالتالي يمر المستوى بنقطة الأصل ومعادلة المستويات التي تمر بنقطة الأصل تكون على الصورة:

$$ax+by+cz=0.$$

2- إذا وازى المستوى أحد المحاور وليكن المحور OX فإن $a_1\to\infty$ وعندئذ $\dfrac{x}{a_1}\to 0$ لجميع قيم x المحدودة ، ومن ثم تصبح المعادلة السابقة على الصورة:

$$\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1.$$

وهذه المعادلة تمثل مستوى يوازي المحورOX ويقطع المحاور OY,OZ بأجزاء a_2,a_3 على الترتيب ، وبالمثل تكون المعادلتين:

$$\frac{x}{a_1}+\frac{z}{a_3}=1,\qquad \frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}=1.$$

تمثلان معادلة مستوى يوازي المحور OY ويقطع المحاور OX,OZ بأجزاء a_1,a_3 على الترتيب ، ومعادلة مستوى يوازي المحور OZ ويقطع المحاور OX,OY بأجزاء a_1,a_2 على الترتيب.

3- المعادلة $x=a_1$ تمثل في الفضاء الثلاثي مستوى يوازي المستوى YOZ ويقطع المحور OX في جزء طوله a_1 .

ج – معادلة المستوى في الصورة العمودية:

نفرض أن R طول العمود النازل من نقطة الأصل على المستوى وأن L, M, N جيوب تمام اتجاه هذا العمود ، وبفرض أن a_1, a_2, a_3 هي الأجزاء التى يقطعها المستوى من المحاور OX,OY,OZ (انظر الرسم السابق) نجد أن:

$$L = \frac{R}{a_1},\ M = \frac{R}{a_2},\ N = \frac{R}{a_3}.$$

وبالتعويض في المعادلة $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1$ عن قيم a_1, a_2, a_3 نحصل على:

$$\frac{\mathrm{Lx}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{My}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{Nz}}{\mathrm{R}} = 1.$$

أي أن:

$$\mathrm{Lx} + \mathrm{My} + \mathrm{Nz} = \mathrm{R}.$$

وهذه هي معادلة المستوى في الصورة العمودية حيث $R > 0$.

- **ملاحظات ونتائج:**

1- إذا وقعت نقطة الأصل في منتصف البعد بين مستويين متوازيين وكانت معادلة أحدهما في الصورة العمودية $\mathrm{Lx} + \mathrm{My} + \mathrm{Nz} = \mathrm{R}$ فإن المستوى الأخر يُعطى بالمعادلة $\mathrm{Lx} - \mathrm{My} - \mathrm{Nz} = \mathrm{R}$

2- الصورة العمودية لمعادلة المستوى $ax + by + cz + d = 0$ تكون :

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

ويكون طول العمود النازل من نقطة الأصل على هذا المستوى مساوياً:

$$\left|\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

مثال(4): أوجد أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور بمستوى يمر بالنقطة (1, -1, 1) ، ويوازي المستوى $3x - 4y + 5z + 2 = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يوازي المستوى المعطى تكون بالصورة:

$3x - 4y - 5z + d = 0.$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطة (1, -1, 1) فإن $d = -12$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$3x - 4y + 5z - 12 = 0.$$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{\frac{12}{5}} = 1.$$

وبالتالي تكون أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور هي $4, -3, \frac{12}{5}$.

مثال(5): أوجد الصورة العمودية للمستوى الذى يقطع محاور الاحداثيات بأجزاء أطوالها على الترتيب هي 1- ,1 ,2-

الحل:

معادلة المستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة تكون:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-1} = 1.$$

$$\therefore x - 2y + 2z = -2.$$

وبذلك تكون الصورة العمودية للمستوى هي:

$$\frac{x - 2y + 2z}{\pm\sqrt{1+4+4}} = \frac{-2}{\pm\sqrt{1+4+4}}.$$

وباختيار الإشارة السالبة ليكون الطرف الأيمن موجب:

$$\therefore -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}.$$

أي أن جيوب تمام اتجاه وطول العمود النازل على المستوى من نقطة الأصل تكون هي على الترتيب: $L = -\frac{1}{3}, M = \frac{2}{3}, N = \frac{2}{3}, R = \frac{2}{3}$.

3 ـ طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة:

نفرض أن المستوى $Lx + My + Nz = R$ حيث $R > 0$ مُعطى بالصورة العمودية ،

ونفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ النقطة المعلومة.

فإذا كانت $P_0(x_0, y_0, z_0)$ إحدى نقط المستوى فإن طول العمود النازل من النقطة P على المستوى وليكن R_1 يكون مساوياً للقيمة العددية لمسقط P_0P_1 على العمود على المستوى أي أن:

$$R_1 = \pm[L(x_1 - x_0) + M(y_1 - y_0) + N(z_1 - z_0)] = \pm(Lx_1 + My_1 + Nz_1 - R).$$

نظرية: الدالة $ax + by + cz + d$ تكون موجبة لجميع النقط الواقعة على أحد جانبي المستوى $ax + by + cz + d = 0$ وتكون سالبة لجميع النقط في الجانب الآخر.

البرهان: نفرض النقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ تقعان على جانبي المستوى: $ax + by + cz + d = 0$.

ونفرض أن P_1P_2 يقطع المستوى في نقطة P بحيث $\dfrac{P_1P}{P_2P} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)..$$

وحيث إن P تقع على المستوى فإنها تحقق معادلته أي أن:

$$a(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) + b(\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1) + c(\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1) + d(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

$$\therefore \lambda_1(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) + \lambda_2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = 0.$$

$$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}\right).$$

ولكي تكون النسبة $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ موجبة ، لابد أن تكون الكميتان:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d \;,\; ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

مختلفان في الإشارة.

مثال(6): أوجد طولي العمودين النازلين من النقطتين (1,0,2) ,(0,0,0) على المستوى x–2y+2z– 4=0 ووضح أن هاتين النقطتين تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى.

الحل:

نفرض أن R_0, R_1 هما أطوال العمودين من النقطتين (1, 0, 2) ,(0, 0, 0) على المستوى

$$\therefore R_o = \mp \frac{1(0)-2(0)+2(0)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp \frac{-4}{3} = \frac{4}{3},$$

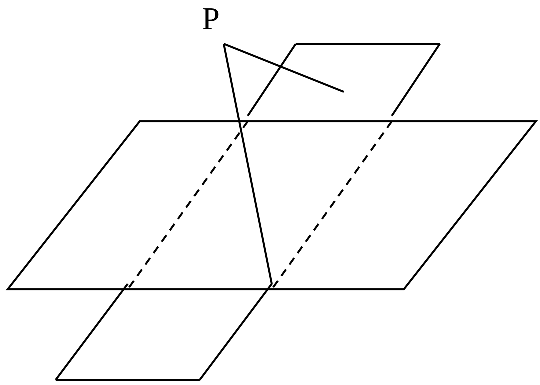
$$R_1 = \mp \frac{1(1)-2(0)+2(2)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

وواضح أن R_o, R_1 مختلفتين في الإشارة أي أن النقطتين (1, 0, 2) ,(0, 0, 0) تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى المُعطى.

4 – المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين.

المستوى المنصف للزاوية الزوجية بين هذين المستويين يكون هو المحل الهندسي لنقطة في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى الأول يساوي بعدها عن المستوى الثاني. (انظر الشكل):



أي أنه إذا كانت $P(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة على المستوى المنصف فإن:

$$\frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

أي أن النقطة $P(\alpha,\beta,\gamma)$ دائماً تحقق إحدى المعادلتين:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2x+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

وهما معادلتى المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعلومين.

وواضح أن هذين المستويين يكونا متعامدان لأن نسب اتجاه أحدهما هي:

$$a_1k_2-a_2k_1\ ,\ b_1k_2-b_2k_1\ ,\ c_1k_2-c_2k_1.$$

ونسب اتجاه الآخر هي:

$$a_1k_2+a_2k_1\ ,\ b_1k_2+b_2k_1\ ,\ c_1k_2+c_2k_1.$$

حيث $k_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2},\ \ k_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

مثال(7): أوجد معادلتى المستويين المنصفين للزاوية الزوجية بين المستويين:

$x + 2y - 2z + 3 = 0 , \quad 2x - y + 2z = 4.$

الحل:

معادلتى المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعطيين تُعطيان من:

$$\frac{x+2y-2z+3}{\sqrt{1+4+4}} = \pm \frac{2x-y+2z-4}{\sqrt{4+1+4}} .$$

وإذاً المعادلتين تكونا $x-3y+4z-7=0$, $3x+y-1=0$

5 – معادلة أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين وغير متوازيين.

معادلة المستوى المار بخط تقاطعهما تكون على الصورة:

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

حيث λ_1,λ_2 ثابتان لا يساويان الصفر في آن واحد.

مثال(8): أوجد المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$x + y + z - 3 = 0\ ,\quad x - 2y + 3z + 4 = 0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الثاني.

الحل:

معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين تكون على الصورة:

$$\lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0. \qquad (*)$$
$$\therefore (\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (\lambda_1 - 2\,\lambda_2)\, y + (\lambda_1 + 3\,\lambda_2)\, z + (-3\lambda_1 + 4\lambda_2) = 0.$$

ولكي يكون هذا المستوى عمودياً على المستوى $x - 2y + 3z + 4 = 0$

يجب أن يتحقق الشرط:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) -2\,(\lambda_1 - 2\lambda_2) + 3\,(\lambda_1 + 3\lambda_2) = 0.$$

وبالتالي نحصل على $\lambda_1 = -7\lambda_2$ ، وبالتعويض في المعادلة (*) نحصل على:

$$-7\lambda_2(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0.$$

وبوضع $\lambda_2 = 1$ تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$6x + 9y + 4z - 25 = 0.$$

مثال(9): أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$3x + 2y - 5z + 1 = 0 , \quad x - 5y - z - 3 = 0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الأول.

الحل:

معادلة المستوى المطلوب تكون على الصورة:

$$\lambda_1(3x + 2y - 5z + 1) + \lambda_2(x - 5y - z- 3) = 0.$$
$$\therefore (3\lambda_1 + \lambda_2)\ x + (2\lambda_1 - 5\lambda_2)\ y + (-5\lambda_1 - \lambda_2)\ z + (\lambda_1 - 3\lambda_2) = 0.$$

ومن شرط التعامد نحصل على:

$$3(3\lambda_1 + \lambda_2) + 2(2\lambda_1 - 5\lambda_2) -5\ (-5\lambda_1 -\lambda_2) = 0.$$
$$\therefore\ 38\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 19\lambda_1.$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\lambda_1[(3 + 18)\ x + (2 - 72)\ y + (-5 - 18)\ z + (1 - 54)] = 0.$$

وباختيار $\lambda_1 = 1$ تكون المعادلة المطلوبة هي:

$$21\ x - 70\ y - 23\ z - 53 = 0.$$

6 – وضع ثلاثة مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي:

نفرض أن لدينا ثلاثة مستويات:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

تُوجد خمس حالات مختلفة ممكنة لوضع هذه المستويات لبعضهما في الفضاء الثلاثي:

أ – انطباق المستويات الثلاثة على بعضها إذا تحقق الشرط:

$$a_1:b_1:c_1:d_1= a_2:b_2:c_2:d_2 = a_3:b_3:c_3:d_3.$$

ب – تتوازى المستويات الثلاثة إذا تحقق الشرط:

$$a_1:b_1:c_1= a_2:b_2:c_2 = a_3:b_3:c_3 .$$

ج – تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم في الجزء المحدد من الفضاء الثلاثي ويكون شرط التقاطع هو وجود قيمة عددية λ تجعل المستوى:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

ينطبق مع المستوى الثالث أي أن:

$$\frac{a_1 + \lambda a_2}{a_3} = \frac{b_1 + \lambda b_2}{b_3} = \frac{c_1 + \lambda c_2}{c_3} = \frac{d_1 + \lambda d_2}{d_3} .$$

د – تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة إذا تحقق الشرط:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

هـ – ليس للمستويات الثلاثة أي نقطة مشتركة ويحدث ذلك إذا كان خط تقاطع مستويان من المستويات الثلاثة يوازي المستوى الثالث.

مثال(10): تحقق من أن المستويات الثلاثة:

$2x - y + 5z - 1 = 0,$
$x + 3y + z - 4 = 0,$
$6x + 11y + 9z - 17 = 0.$

تتقاطع في خط مستقيم.

الحل:

معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين الأول والثاني تكون:

$$2x - y + 5z - 1 + \lambda(x + 3y + z - 4) = 0$$
$$\therefore (2 - \lambda)\, x + (-1 + 3\lambda)\, y + (5 + \lambda)\, z + (-1 - 4\lambda) = 0. \qquad (*)$$

ولكى تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم يجب أن تنطبق المعادلة (*) مع معادلة المستوى الثالث أي يتحقق:

$$\frac{2+\lambda}{6} = \frac{-3+3\lambda}{11} = \frac{5+\lambda}{9} = \frac{1+4\lambda}{17}. \qquad (**)$$

وواضح أن القيمة العددية $\lambda = 4$ تحقق العلاقة (**)

وبالتالي تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم.

تمارين

1- أوجد معادلة المستوى العمودي على P_1P_2 من منتصفه علماً بأن

$P_1(-3, -1, 4), P_2(1, 5, 6)$.

2- إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ زاويتين من زوايا اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقطة $(3, 1, 2)$ فاوجد معادلة المستوى.

3- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $2x - y + z = 0$ ويقطع من المحور OY جزء طوله 3 وحدات.

4- تحقق من أن النقط $(0, 2, -4), (-1, 1, -2), (-2, 3, 3), (-3, -2, 1)$ تقع في مستوى واحد ، وأوجد معادلته.

5- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $4x + y + 8z + 39 = 0$ ويبعد عنه 7 وحدات.

6- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى $x + 2y + 2z - 6 = 0$ ضعف بعدها عن المستوى $4x - 8y + z - 9 = 0$.

7- أوجد الزاوية الحادة بين كل من المستويين فيما يلي:

(i) $2x - y + 2z - 10 = 0, \quad 4x + y + z - 7 = 0$.
(ii) $5x + 3y - 4z + 14 = 0, \quad x - 4y - z + 12 = 0$.
(iii) $3x + 4y - 16 = 0, \quad 4y - 2z - 5 = 0$.

8- أوجد معادلات المستويات التى تمر بالنقطتين $(8, 0, 1), (0, 4, 2)$ وتصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المستوى $2x - y + 2z - 7 = 0$.

9- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (1 ,2- ,3) والمار بخط تقاطع المستويين:

$3y - 2z - 4 = 0, \quad x + y + 4z + 6 = 0.$

10- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (2 ,2- ,1) وعمودي على كل من المستويين:

$3x - 3y + z = 0, \quad 2x + 4y - 5z + 1 = 0.$

11- أوجد معادلة المستوى العمودي على المستوى $x - y + z = 0$ ويمر بالنقطة (1 ,1- ,2) ويوازي المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (1- ,3 ,2).

ثانياً – الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي

أ– الصورة العامة لمعادلات الخط المستقيم:

الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي ينتج من تقاطع مستويين غير متوازيين في الفضاء الثلاثي ، وبالتالى فإن الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي يُمثل بمعادلتين من الدرجة الأولى في x, y, z أي أن:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

حيث $a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$ والعكس صحيح كل نقط (*) تكون واقعة في آن واحد على خط تقاطعهما ، وحيث إنه يوجد عدد لا نهائي من المستويات التى تمر بالمستقيم (*) فإنه يمكن اختيار أي مستويين منهما ليدلان على المستقيم مثلاً المعادلة:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0. \qquad (1)$$

تمثل مستوى يمر بخط تقاطع المستويين (*)

ويكفي أن نُعطى الكمية العددية λ قيمتين مختلفتين لنحصل على مستويين يمران بالمستقيم (*).

مثال(1): أوجد معادلة الخط المستقيم الناتج من تقاطع المستويين:

$$4x - 2y + z + 1 = 0, \quad 2x + 3y - z - 5 = 0.$$

الحل:

المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين يُعطى من:

$$4x - 2y + z + 1 + \lambda (2x + 3y - z - 5) = 0. \qquad (**)$$

وبوضع معامل x بالصفر في (**) فنحصل على:

$$4 + 2\lambda = 0, \qquad \therefore \lambda = -2.$$

وبالتعويض عن λ في المعادلة (**) نحصل على $8y - 3z - 11 = 0$

وبوضع معامل y بالصفر في (**) نحصل على:

$$-2 + 3\lambda = 0 \qquad \therefore \lambda = 2/3.$$

وبالتعويض عن λ في المعادلة (**) نحصل على $15x + z - 7 = 0$

وبذلك يمكن التعبير عن المستقيم الناتج من تقاطع المستويين المعطيين بالمعادلتين:

$8y - 3z - 11 = 0 \quad , \quad 15x + z - 7 = 0.$

ب– معادلات الخط المستقيم بدلالة نسب اتجاهه ونقطة عليه:

نفرض أن a, b, c هى نسب اتجاه المستقيم ويمر بالنقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$

ولإيجاد معادلة هذا الخط نفرض أن $P(z, y, z)$ أي نقطة عليه فيكون:

$$a : b : c = x - x_1 : y - y_1 : z - z_1.$$

أي أن:

$$\lambda a = x - x_1, \quad \lambda b = y - y_1, \quad \lambda c = z - z_1.$$

$$x = \lambda a + x_1, \quad y = \lambda b + y_1, \quad z = \lambda c + z_1. \qquad (2)$$

حيث λ كمية عددية.

من العلاقة (2) نحصل على إحداثيات أي نقطة تقع على المستقيم بدلالة البارامتر λ والقيم المعطاة a, b, c, x_1, y_1, z_1 وتُسمى (2) بالمعادلات البارامترية للخط المستقيم.

وحيث إنه لا يمكن أن تنعدم a, b, c في آن واحد

فبحذف البارامتر λ من (2) نحصل على:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \qquad (3)$$

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلات الخط المستقيم.

وإذا أُعطيت نسب اتجاه المستقيم ونقطة عليه فإن معادلاته تُكتب مباشرة بالصورة (3)

وإذا كان $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ فإن المعادلة (3) تؤول إلى المستويين:

$$x = x_1 \ , \ \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

وإذا كان $a = 0, b = 0, c \neq 0$ فإن المعادلة (3) تؤول إلى المستويين:

$$x = x_1 \ , \ y - y_1.$$

ج– معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين:

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ وكانت نسب اتجاهه هي a, b, c فيكون:

$$a : b : c = x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1$$

وبذلك تصبح الصورة القياسية (3) في الصورة:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

وهذه تمثل معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$.

مثال(2): أوجد الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم:

$$2x - 3y + z + 5 = 0, \quad x + 2y - 3z - 8 = 0.$$

الحل:

نعين نقطتين P_1, P_2 على المستقيم وذلك بوضع معامل x بالصفر في المعادلتين المعطيتين فنحصل على:

$$-3y + z + 5 = 0, \quad 2y - 3z - 8 = 0.$$

وبحل هاتين المعادلتين في y, z نحصل على $y = 1, \ z = -2$.

وبالتالي تكون $P_1(0, 1, -2)$.

ثم بوضع معامل y بالصفر نحصل على:

$$2x + z + 5 = 0, \quad x - 3z - 8 = 0.$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $x = -1, z = -3$.

وبالتالي تكون $P_2(-1, 0, -3)$.

وبالتالي تكون معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(0,1,-2), P_2(-1,0,-3)$ هي:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z+2}{-3+2} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow x = y - 1 = z + 2.$$

مثال(3): أوجد نقط تقاطع المستقيم $\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+4}{2}$ مع المستوى 3x + 4y + 12z + 19 = 0 وأوجد أيضا الزاوية بين المستقيم والمستوى.

الحل:

Put $\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+4}{2}=\lambda.$

$\therefore x = \lambda - 2,\ y = -2\lambda + 4,\ z = 2\lambda - 4 \quad (*).$

وبالتعويض في معادلة المستوى نحصل على:

$3(\lambda - 2) + 4(-2\lambda + 4) + 12(2\lambda - 4) + 19 = 0.$

$\therefore \lambda = 1.$

وبالتعويض في العلاقة (*) تكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى هي (2- ,2 ,1-) .

وحيث إن نسب اتجاه المستقيم هي 2 ,2- ,1 ونسب اتجاه العمودي على المستوى هي ,3 12 ,4 فإذاً الزاوية θ بين المستقيم والعمودي على المستوى تُعطى من العلاقة:

$$\cos\theta=\frac{(1)(3)+(-2)(4)+(2)(12)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+16+144}}=\frac{19}{(3)(13)}.$$

وبذلك تكون الزاوية التى يصنعها المستقيم مع المستوى هي $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

د- طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم:

طول العمود R النازل من النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على المستقيم:

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}.$$

حيث L, M, N هي جيوب تمام الاتجاه الفعلية للمستقيم ، ويمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1)

يُعطى من العلاقة:

$$\overline{R}^2 = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-[L(x_1-x_0)+M(y_1-y_0)+N(z_1-z_0)].$$

مثال(4): أوجد طول العمود النازل من النقطة $P(1, -1, 2)$ على المستقيم المار بالنقطة $P_1(-1, 2, -1)$ وعمودي على المستوى $2x + y - 2z + 3 = 0$.

الحل:

نسب اتجاه العمودي على المستوى هي 2- ,1 ,2 وتكون هي نفس نسب اتجاه المستقيم (حيث إنه عمودي على المستوى)

وعلى ذلك تكون معادلة المستقيم القياسية هي:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}.$$

ومن ثم فإن طول العمود R النازل من النقطة $P(1, -1, 2)$ على المستقيم يُعطى من:

$$\overline{R}^2=(1+1)^2+(-1-2)^2+(2+1)^2-\left[\frac{2}{3}(1+1)+\frac{1}{3}(-1-2)-\frac{2}{3}(2+1)\right]^2$$

$$=4+9+9-\left(\frac{-5}{3}\right)^2=\frac{173}{9}.$$

$$\therefore \overline{R}=\left|\frac{173}{9}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

هـ- تقاطع مستقيمين في الفضاء الثلاثي:

شرط تقاطع المستقيمين (وهو شرط وقوعهما في مستوى واحد):

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}\ ,\ \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}\ .$$

يكون:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0\ .$$

ومعادلة المستوى الذي يقعان فيه تكون:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0\ \vee\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0\ .$$

مثال(5): تحقق من أن المستقيمين:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-1},\quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{3}\ .$$

يقعان في مستوى واحد .ثم أوجد معادلة هذا المستوى.

الحل:

شرط تقاطع مستقيمين (وقوعهما في مستوى واحد) هو:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1 & \mathrm{z}_2-\mathrm{z}_1 \\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{c}_2 \end{vmatrix}=0\ .$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 4-1 & 3-2 & -2-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0\ .$$

أي أن المستقيمين متقاطعان.

وتكون معادلة المستوى الواقعان فيه هي:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

أي تكون:

$10x + 3y + 11z - 27 = 0.$

مثال(6): تحقق من أن المستقيمين:

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

يكونا غير متقاطعتين .ثم أوجد معادلتى العمود المشترك بينهما.

الحل:

شرط تقاطع المستقيمين يكون:

$$\begin{vmatrix} 2+3 & 4+1 & -1-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46 \neq 0.$$

وإذاً المستقيمان غير متقاطعين.

وبفرض أن PQ هو العمود المشترك بينهما وأن a, b, c هي نسب اتجاهه فإن:

$-a + 2b + c = 0, \quad 3a + b + c = 0.$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على (تحقق من ذلك؟):

$a= 1, b = 4, c = -7.$

والمستقيم PQ يُعطى بالمستويين P_1PQ, P_2PQ

وحيث إن المستوى P_1PQ معادلته يمكن كتابتها بالصورة:

$L(x+3) +M(y+1) + N(z-2) = 0.$

لأنه يمر بالنقطة $P_1(-3, -1, 2)$

والمستقيمان P_1P, PQ واقعان في هذا المستوى فيكون:

$-L + 2M + N = 0, \quad L + 4M - 7N = 0.$

وبحذف L, M, N من المعادلتين السابقتين نحصل على معادلة المستوى P_1PQ بالصورة:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 3x = y + z + 8 = 0 .$$

وبنفس الطريقة نجد أن معادلة المستوى P_2PQ تكون على الصورة:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = x - 2y - z + 5 = 0 .$$

تمارين

1 – أوجد قيمة d التي تجعل المستقيم $3x - y + 2z - 6 = 0,\ x + 4y - z + d = 0$ يقطع المحور OX.

2 – أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z-1}{3}$.

3 – أوجد الزاوية بين المستقيمين (i), (ii) حيث:

(i) $2x - 2y - z + 8 = 0,\quad x + 2y - 2z + 1 = 0.$
(ii) $4x + y + 3z - 21 = 0,\quad 2x + 2y - 3z + 15 = 0.$

4 – هل يقع المستقيمان (i), (ii) في مستوى واحد؟

(i) $4x + y + 3z = 0,\quad 2x + 3y + 2z - 9 = 0.$
(ii) $3x - 2y + z + 5 = 0,\quad x - 3y - 2z - 3 = 0.$

5 – أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ مع المستوى:

$2x + 3y + 3z - 8 = 0.$

6 – أوجد الزاوية بين المستقيم $3x - 2y = 24,\ 3x - y = -4$ والمستوى:

$6x + 15y - 10z + 31 = 0.$

7 – أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (3, -2, 1) وعمودي على المستقيم:

$\frac{2x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

8– تحقق من أن المستقيم $x + y - z = 1,\ 2x + z = 3$ والمستقيم $x = y = z - 1$ يكونا غير واقعان في مستوى واحد ، وأوجد معادلات العمود المشترك عليهما ، وأوجد أيضاً طول أقصر بُعد بينهما.

9 – أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (3 ,-2 ,-1) ويوازي المستقيمان:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6},\quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}.$$

10– أوجد معادلة المستوى المار بالمستقيم $x + y = 0,\ x - y + z - 2 = 0$ ويكون موازياً للمستقيم $x = y = z$.