كلية العلوم

مقدمة فى نظرية الأحتمالات

إعداد

قسم الرياضيات

الباب الأول

مقدمة فى نظرية الأحتمالات

نظرية الفئات :

يعالج هذا الباب بعض الأفكار والمفاهيم الأساسية فى نظرية الفئات والتى تعتبر ضرورية لأى مدخل معاصر فى نظرية الاحتمالات .

تسمى أى قائمة أو تجمع من الاشياء (بشرط أن تكون القائمة معرفة تعريفاً جيداً) بمجموعة (فئة) وتسمى الاشياء المكونة لهذه الفئة بعناصرها . وتكتب $P\in A$ إذا كانت P عنصر فى الفئة A .

إذا كان كل عنصر فى A ينتمى الى الفئة B أى :

إذا كان $P \in A$ تتضمن أن $P \in B$ فإن A تسمى فئة جزئية من B ويرمز لها بالرمز

$A \subset B$ أو $B \supset A$ (تسمى B محتوى A) .

وتتساوى فئتان إذا كانت كل واحدة تحتوى الأخرى . أى أن :

$$A\subset B\,,\,B\subset A \Leftrightarrow A=B$$

التجارب العشوائية :

نواجه فى معظم الميادين النشاط العلمى وفى حياتنا العملية اليومية تجارب ومشاهدات وظواهر يمكن أن تتكرر عددا كبيرا من المرات تحت ظروف متشابهة . وفى كل مرة نهتم بنتائج هذه التجارب والمشاهدات التى يمكن أن تكون كمية ، فنسجل نتيجة كل مشاهدة علي شكل عدد . أو تأخذ شكلا كيفيا فنسجل صفة معينة كأن نلاحظ لوناً مثلا أو نسجل وقوع أو عدم وقوع حادثة أو ظاهرة بعينها متصلة بكل تجربة من التجارب التى نتابعها . وبصورة عامة يمكن تعريف التجربة على الشكل التالى :

" التجربة هى كل عملية تؤدى الى ملاحظ " مشاهدة " أو قياس " .

مثال :

(١) عند رمى حجر نرد عادى عدة مرات نحصل فى كل مرة على أحد الأوجه أحد الأعداد :

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 .

(٢) عند قياس طول ووزن مجموعة من الأشخاص لكل منهم أو العمر والجنس نفسيهما فأننا نعبر عن كل ملاحظ بزوج من الأعداد (x, y) فسترمز x لقياس الطول ، y لقياس الوزن أو x لقياس العمر ، y لقياس الجنس (ذكر أو أنثى) .

(٣) إذا كنا نتابع جنس كل طفل يولد فى منطقة معينة فإننا سنحصل على نتيجة وصفية : ذكر أو أنثى ، ويمكن أن نصطلح على التعبير عن هاتين النتيجتين الممكنتين بالرقم 1 إذا كان المولود ذكرا ، 0 إذا كان المولود أنثى .

ونلاحظ فى مثل هذه التجارب أن الملاحظات التى نحصل عليها من تكرار للتجربة الى آخر تعانى تذبذبا عشوائيا لا يخضع لأى صيغ أو قوانين معروفة .

فإن النتائج المتعاقبة ستتغير بشكل غير منتظم من ملاحظ لآخرى وبصورة تحجب قدرتنا على التنبؤ بالنتيجة سلفا . ونقول فى مثل هذه الحالات إننا نقوم بسلسلة من التجارب العشوائية .

رأينا إنه لا يمكننا التنبؤ بنتيجة تجربة بمفردها عند القيام بسلسلة من التجارب العشوائية . وأن النتائج المتتابعة لتكرار التجربة تحت الشروط نفسها لتخضع لتذبذبات عشوائية غير منتظمة .

ولإ يضاح الفكرة ، نأخذ تجربة قذف قطعة نقود ، وسنرمز بـ H لوجه الصورة و بـ T لوجه الكتابة . إذا كررنا التجربة 20 مرة ، مثلا ، ورأينا أن وجه الـ T قد ظهر فى 12 منها قلنا إن التكرار النسبي لحادثه ظهور الوجه T هو $12 / 20$.

وبصورة عامه ، وإذا كررنا التجربة N مرة وظهر وجه الـ H في n منها فإن التكرار النسبى لظهور وجه الـ H هو n / N . وإذا أمكن زيادة العدد N إلي ما لانهاية (آى بلا حدود) فإن التكرار النسبى يقترب جدا من النصف . آى أن التكرارات النسبية تسعى إلى الاستقرار عاده بعد سلسله طويلة من المشاهدات العشوائية المتكررة التى تجرى تحت شروط منتظمة .

٢- فضاء العينة والحادثة :

نفرض أننا قادرون على تحديد كل النتائج التى يمكن أن تسفر عنها التجربة العشوائية لو أننا نفذناها مرة واحدة . وسنطلق على مجموعة النتائج الممكنة لتجربة مصطلح فضاء العينة وسنرمز لفضاء عينة بـ S .

أى أن :

" فضاء العينة S هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة " .

تعريف الحادثة :

" الحادثة هى مجموعة جزئية من فضاء عينة " .

مثال (٢) :

التجربة هى قذف حجر نرد وملاحظة عدد النقاط على وجه الظهر .

أكتب فضاء العينة والحوادث التالية :

(i) الحصول على عدد زوجى A .

(ii) الحصول على عدد أكبر من 4 : B .

(iii) ملاحظة العدد 1 ونرمز له E_1 ، العدد 2 ونرمز لها E_2 ، .... ، العدد 6 ونرمز لها بالرمز E_6 .

الحل :

فضاء العينة $S = \{1, 2, 3, 4, , 5, 6\}$

والحوادث هى :

(i) $A = \{2, 4, 6\}$.

(ii) $B = \{5, 6\}$.

(iii) $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$, $E_3 = \{3\}$, $E_4 = \{4\}$.
$E_5 = \{5\}$, $E_6 = \{6\}$.

وتسمى الحوادث $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots, E_6$ حوادث بسيطة (أو حوادث إبتدائية) وحوادث مثل A ، B حوادث مركبة .

وبما أن $S \subseteq S$, $\varnothing \subset S$ فإن تعريف الحادثة ينطبق أيضا على المجموعة الخالية $\varnothing$ وعلى فضاء العينة S . وتسمى $\varnothing$ الحادثة المستحيلة , S الحادثة الأكيدة . ويمكن التعبير عن أى حادثة غير مستحيلة بدلالة حوادث بسيطة .

مثال (٣) :

التجربة هى قذف قطعة نقود مرتين متتاليين وتسجيل النتيجة :

أ - أكتب فضاء العينة .

ب – عبر عن كل من هذه الحوادث التالية :

A : الحصول على وجه الـــ H مرة واحدة ،

B : الحصول على وجه الـــ T فى القذفه الثانية ،

C : الحصول على وجه الـــ H مرة واحدة على الأقل ،

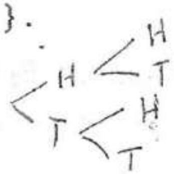
D : الحصول على وجه الـــ H مرة واحدة على الأكثر ،

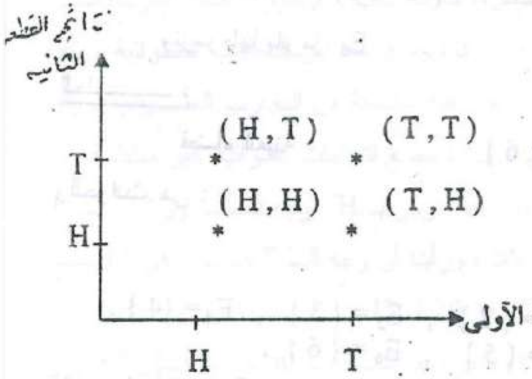
E : الحصول على وجه الـــ H مرة واحدة على الأقل وعلى وجه الـــ T مرتين .

الحل :

ا – فضاء العينة :

$S = \{(H,H), (T,H), (H,T), (T,T)\}.$





تمثل فضاء العينة بيانيا

الحادثة A نجد أنها تتضمن كل زوج مرتب فى S يحوى الرمز H مرة واحدة (لا أكثر ولا أقل) وهكذا تكتب :

$A = \{(H,T), (T,H)\}.$

وبالمثل :

$B = \{(H,T), (T,T)\}.$
$C = \{(H,H), (T,H), (H,T)\}.$
$D = \{(T,H), (H,T), (T,T)\}.$
$E = \{\ \} = \emptyset$

لأنه لا توجد أى نقطة عينة محققة لشروط E فهى حادثة غير ممكنة أو مستحيلة .

مثال (٤) :-

التجربة هى قذف حجر نرد مرتين :

ا – أكتب فضاء العينة .

ب – عبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة .

A : الحصول على مجموع يساوى 7 ،

B : الفرق بين العددين الناتجين يساوى بالقيمة المطلقة 1 ،

C : الحصول على مجموع يساوى 9 على الأقل ،

D : الحصول على 1 فى القذفة الأولى ،

E : الحصول على مجموع أقل من 2 .

ج – عبر بالكلمات عن كل من الحوادث الممثلة بالمجموعات الجزئية التالية من النقاط

$G = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\},$
$H = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3)\},$
$I = \{(5,1),(1,5),(6,2),(2,6)\},$
$J = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\},$
$K = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),$
$(2,6),(6,4),(6,6)\}.$

الحل :

أ – فضاء العينة هو الحاصل الديكارتى للمجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ فى نفسها أى أن :

$S = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

حيث يرمز الزوج المرتب (x,y) الى أن النتيجة كانت x من القذفة الأولـــى , y مـــن القذفة الثانية . وكان يمكن التعبير عن فضاء العينة كما يلى :

$S = \{(x,y) \mid$ y , x عددان صحيحان بين $0 , 7\}$

والجدول كما يلى :

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ب –

$A = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$

$B = \{(2,1),(1,2),(2,3),(3,2)(3,4),(4,3),(5,4),(4,5),(6,5),(5,6)\}$

$C = \{(6,3),(5,4),(4,5),(3,6),(6,4),(5,5),(4,6),(6,5),(6,6),(5,6)\}$

$D = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$

$E = \{\ \ \} = \varnothing$

ج –

G : الحصول على العدد نفسه فى القذفتين ،

H : الحصول على مجموع يساوى 4 على أكثر ، (أى أكثر من أو يساوى 4)

I : الفرق بين العددين الناتجين يساوى بالقيمة المطلقة 4 ،

J : الحصول على 4 فى القذفة الثانية ،

K : الحصول على عددين زوجيين .

تمرين :

فى المثال السابق بين فى أى حدث النتيجة (1 , 1) وقعت أم لا فى كل من الحوادث المذكورة فى ب ، جـ .

٣- جبر الحوادث

عرفنا الحادثة كمجموعه جزئية من فضاء عينة ، أى مجموعة عناصرها نقـاط عينـة أو نتائج ممكنة لتجربة عشوائية .

وفيما يلى بلغة الحوادث ونقاط العينة نتذكر العمليات المختلفة على المجموعات :

ا – **اتحاد حادثـتين :**

أتحاد حادثتين A ، B هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى الى A أو الى B (أو إليهما معا) ونرمز له بـ $A \cup B$.

أى أتحاد حادثتين هو حادثة تتضمن جميع نقاط العينة التى تنتمى الى واحدة منهما على الأقـل أى أن :

$$A \cup B = \{ \chi \mid \chi \in A \text{ or } \chi \in B \}$$

ب – **أتحاد عدة حوادث :**

أتحاد n من الحوادث $A_1 , A_2 , \ldots\ldots , A_n$ هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينـة التـى تنتمى الى واحدة منها على الأقل : ونرمز له بـ

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$$

جـ – **تقاطع حادثتين :**

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى اليها معا . له بـ $B \cap A$.

$$\therefore A \cap B = \{ \chi \mid \chi \in A \text{ and } \chi \in B \}.$$

د – **تقاطع عدة حوادث :**

تقاطع n من الحوادث $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ حادثة تتضمن كافة نقـاط العينـة التـى تتضمن اليها جميعا ونرمز له بـ

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_n$$

هـ – **الفرق بين حادثتين :**

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة تتضمن كل نقاط العينة التى تنتمى الى A ولا تنتمـى الى B وهى :

$$A - B = \{ \chi \mid \chi \in A \ , \chi \notin B \}$$

و – **تكملة حادثة :**

تكملة (تتميه) حادثة A هى حادثة تتضمن كل نقاط فضاء العينة (بدلا من الفئة الشـاملة فى المجموعات) التى لا تنتمى الى A ونرمز لها بـ

A' أو (A^c) . أى : عدم وقوع الحدث A

$$A^c = \{\chi \mid \chi \in S , \chi \notin A\} = S - A$$
$$= S \cap A^c$$

ز – **الحادثتان المنفصلتان** :

يقال أن الحادثتان منفصلتان إذا كان تقاطعهما خاليا ، أى :

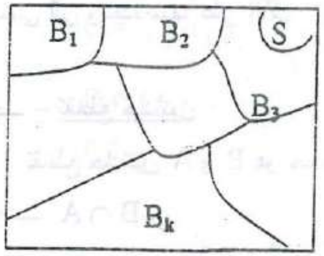
$$\boxed{A \cap B = \emptyset}$$

يسمى الحادثتان فى هذه الحالة متنافيتين .

أى لا يمكن وقوعهما معا .

حـ – **تجزئة فضاء عينة** :

نقول أن الحوادث غير المستحيلة (غير الخالية) $B_1 , B_2 , \ldots\ldots , B_k$ تشكل تجزئة لفضاء عينة S إذا حققت الشرطين التاليين :



١) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad , \quad i \neq j$

أى أن الحوادث $B_1 , B_2 , \ldots , B_k$ متنافية مثنى مثنى .

٢) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S$

أى أن أتحاد الحوادث $B_1 , B_2 , \ldots , B_k$ هو فضاء العينة S .

تمارين (٢)

١ – بقذف حجر نرد وقطعة نقود ، أكتب فضاء العينة S وحدد نقاط العينة فى كل من الحوادث التالية :

A : ظهور عدد زوجى على حجر النرد ،

B : ظهور وجه الـ H على قطعة النقود ،

C : ظهور وجه الـ H على قطعة النقود وعدد أقل من 3 على حجر النرد ،

D : ظهور وجه الـ T على قطعة النقود وعدد لا يقل عن 3 على حجر النرد ،

E : الحصول على A و B ،

F : الحصول على B أو D ،

G : الحصول على واحدة على الأقل من الحوادث A ، C ، D من بين الحوادث A^c , B , C أى الأزواج متنافية .

٢– قذفنا قطعة نقود ثلاث مرات . أكتب فضاء العينة S ، وعبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة :

A : ظهور وجه الـ H فى القذفة الثانية ،

B : ظهور وجه الـ H مرتان على الأقل ،

C : عدد مرات ظهور وجه الـ H أكبر من عدد مرات ظهور وجه الـ T

D : وقوع A أو E^c ،

E : وقوع A أو C .

٣ – فى مثال (٣) لكتب الحوادث التالية :

$$A \cup B , A \cap B , C \cap D , A \cup D , A - B , A^c \cup B^c$$
$$(A \cap B)^c .$$

٤ – فى المثال (٤) أكتب الحوادث الأتية :

$$A \cap B , B \cup D , B - D , A \cap D , A^c , B^c \cup D^c , (B \cup D)^c ,$$
$$A \cup B \cup D , A \cap C \cap D .$$

================

فروض الأحتمالات

لاحظنا فيما سبق لكل تجربة عشوائية لها فضاء عينة ، ويسمى فضاء العينة فضاء منفصلا إذا كانت مجموعة نقاطه قابلة العد أو منتهية كما يسمى فضاء متصلا إذا كانت مجموعة نقاطه لانهائية غير قابلة العد مثل الفترة $[a, b]$ بين قيمتى a ، b عدد لانهائى من القياسات وبالتالى يكون فى هذه الحالة يحوى عددا غير محدود من النقاط للعينة .

__الفضاء الأحتمالى:__

الفضاء الأحتمالى هو ثلاثية $(S, \Im, P)$ حيث S فضاء العينة أو الحادثة الأكيدة ، $\Im$ أسرة من الحوادث فى S (أى الفئة التى تشتمل على جميع الحوادث الممكنة من S) P دالة عددية معرفة على الأسرة $\Im$ وتحدد لكل حادثة A من الأسرة $\Im$ عددا حقيقيا يسمى احتمالها ونرمز له بالرمز :

$$P(A) \quad , \quad \forall \ A \in \Im$$

__مثال :__

القاء عملة مرة واحدة فإن فضاء العينة S هى :

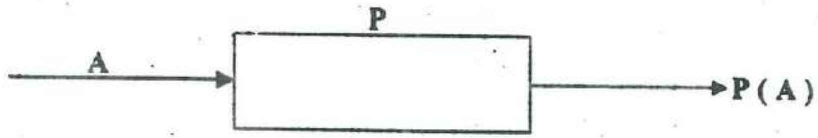
$$S = \{H, T\}.$$

أسرة الحوادث فى S هى :

$$\Im = \{\varnothing, \{H\}, \{T\}, S\}.$$

__ملاحظة :__

يمكن النظر الى الدالة P وكأنها آلة مصممة من أجل عناصر $\Im$ على وجه التحديد وعندما ندخل فى هذه الآلة عنصرا فى $\Im$ (أى حادثة) فإنها تخرج لنا عددا هو الأحتمال الموافق .



فروض الأحتمالات (مسلمات الأحتمالات) Axioms of Probability :

١ - $P(A) \geq 0$ مهما تكن الحادثة A . (1)

(احتمال أى حادثة غير سالب)

٢ - $P(S) = 1$ حيث S فضاء عينة . (2)

(احتمال الحادثة الأكيدة يساوى الواحد)

٣ - إذا كانت A_1 ، A_2 حادثتين منفصلتين فإن : (3)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

تعميم الفرض الثالث فى حالة n من الحوادث فنقول :

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث منفصلة مثنى مثنى فإن : (3)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

أو بصورة أخرى رمزية مختصرة :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad ; \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad ; \quad i \neq j .$$

وتسمى الفرض ٣ اسم الخاصة الجمعية .

والحقيقة أن هذه المسلمات مستوحاة من خواص التكرار النسبى . إذا كررنا تجربة عشوائية N مرة وراقبنا فى كل مرة وقوع أو عدم وقوع حادثة A ، مثلا ، رأينا أن A قد وقعت فى n من المرات قلنا إن التكرار النسبى لوقوع A كان (n/N) . $\left(P(A) \approx \frac{n}{N}\right)$

ومن الواضح تماما أن التكرار النسبى لا يمكن أن يكون سالبا . وعندما نقول أن الحادثة A أكيدة فإنما نقصد أن وقوعها محتم فى كل مرة نكرر فيها التجربة . أى أن تكرارها النسبى هو الواحد .

من هذه الفروض يمكننا برهان النظريات الأتية :

__نظرية (١) :__

$$P(\varnothing) = 0$$

__البرهان :__

لأى حادث A يكون :

$$A = A \cup \varnothing \qquad (1)$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

لأن A ، $\varnothing$ حادثتين متنافيتين ومن العلاقة (١)

ومن العلاقة (١) نجد أن :

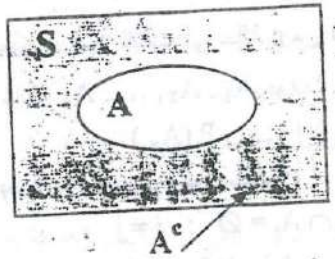
$$P(A)=P(A\cup\varnothing)$$
$$=P(A)+P(\varnothing) \Rightarrow$$
$$\therefore P(\varnothing)=0$$

نظرية (٢) :

لأى حادث $A\subset S$ فإن :

$$P(A^c)=1-P(A)$$

البرهان :



(i) $A\cup A^c = S$
(ii) $A\cap A^c=\varnothing$

ومن هذه العلاقة فإن A , A^c متنافيان

ومن العلاقة الأولى

$$P(A\cup A^c)=P(S)$$

من الفرض فإن $P(S)=1$ ومن الفرض (٣)

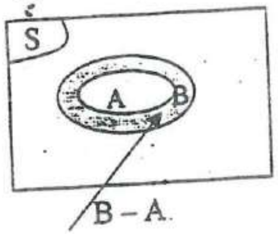
$$\therefore 1=P(A\cup A^c)=P((A)+P(A^c)$$
$$P(A\cup A^c)=P(A)+P(A^c) \Rightarrow$$
$$\therefore P(A^c)=1-P(A)$$

نظرية (٣) :

لأى حادثين A, B إذا كان $A\subset B$ فإن :

$$P(A) \le P(B)$$

البرهان :



$A \subset B$
$B=A\cup(B-A)$ ------- (1)
$A\cap(B-A)=\varnothing$ ------- (2)

لأى حادثين..

وذلك لأن A ، $B-A$ حادثين متنافين .

من العلاقة رقم (١) :

$$P(B)=P(A\cup(B-A))$$
$$=P(A)+P(B-A)$$

وحيث أن $A\subset B$ فإن $B-A$ حادثة فإنه من الفرض (المسلمة) (١) :

$$P(B-A)\ge 0$$

لذلك :

$$P(B)\ge P(A) \quad \text{or} \quad P(A)\le P(B).$$

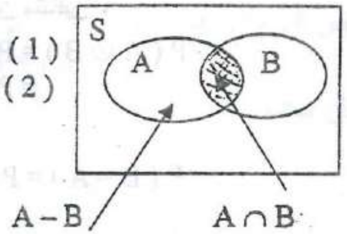
نظرية (٤) :

لأى حادثين A , B

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

البرهان :

$A=(A-B)\cup(A\cap B)$ ------ (1)
$(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$ ------ (2)



أى أن $A-B$, $A\cap B$ حادثين متنافين .

$$\therefore P(A)=P[(A-B)\cup(A\cap B)]$$
$$=P(A-B)+P(A\cap B) \Rightarrow$$

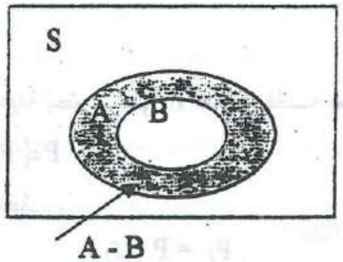
من الفرض ٢ ;

$$\therefore P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ملحوظة :

فى حالة $B\subset A$ يكون :

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$



نظرية (٥) :

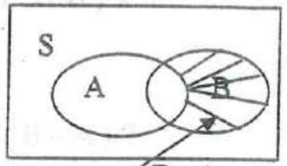
لأى حادثين A , B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

البرهان :

لأى حادثين A , B :

$$A\cup B=A\cup(B-A) \text{ ------- } (1)$$
$$A\cap(B-A)=\varnothing \text{ ------- } (2)$$



B - A

ولأن $A\ ,\ B-A$ حادثين متنافين .

$$\therefore P(A\cup B)=P[A\cup(B-A)]$$
$$=P(A)+P(B-A) \text{ ----- } (3)$$

من النظرية (٤) :

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \text{ ----- } (4)$$

وبالتعويض من (4) فى (3) نحصل على :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

فراغات الأحتمالات المحدودة :

عرفنا فراغ العينة S على أنه مجموع جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية وأن الحادث هو مجموعة جزئية من فراغ العينة كما أن الحادث يرافقها عدد يسمى احتمالها ويمكن تحديد احتمال أى حادث إذا أمكننا تحديد احتمالات العناصر المكونة لفراغ العينة واحتمالات العناصر يمكن تحديدها من التعريف الآتى :

تعريف :

إذا كان $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فراغ عينة يحتوى على n عنصر فإنه يمكن الفراغ الأحتمال المحدود $P=\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. والمرافق لفراغ العينة وذلك بتخصيص أو تعين عدد حقيقى :

$$P_i=P(s_i) \qquad \forall \ s_i\in S$$

على أن يحقق الشرطين :

(i) $P_i\geq 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,n$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} P_i=1$

ويعرف احتمال حادثة بأنه مجموع إحتمالات العناصر المكونة له ،

مثال (١) :

إذا القينا ثلاث قطع من النقود ولاحظنا عدد الصور فى هذه التجربة فيكون S هو :

$$S=\{0,1,2,3\}$$

ونحصل على فضاء الأحتمال بالتخصيص التالى :

$$P(0)=(1/8), P(1)=(3/8), P(2)=(3/8), P(3)=(1/8)$$

حيث أن جميع الأحتمالات غير سالبة وأن مجموع الأحتمالات هو 1 .

نفرض أن A هو حادث ظهور صورة واحدة على الأقل وأن B هو حدث ظهور أوجه من نفس النوع فى هذه التجربة . أى أن :

$$A=\{1,2,3\} \qquad ; \qquad B=\{0,3\}$$

فإن احتمال A ، B هما :

$$P(A)=P(1)+P(2)+P(3)$$
$$=(3/8)+(3/8)+(1/8)=(7/8) \quad ,$$
$$P(B)=P(0)+P(3)=(1/8)+(1/8)=(1/4).$$

مثال (٢) :

واحتمال فوز B

تتسابق ثلاث جياد A , B , C لإذا كان احتمال فوز A ضعف احتمال فوز B وهو ضعف احتمال فوز C . فما هو احتمال فوز كل واحد منهم أى ما هو الأحتمالات $P(A), P(B), P(C)$.

الحل :

نفرض أن $P(C)=P$ حيث أن إحتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C فيكون $P(B)=2P$. وحيث أن احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B فيكون :

$$P(A)=2P(B)=2(2P)=4P$$

ويكون مجموع الأحتمال يجب أن يساوى 1 فيكون :

$$P+2P+4P=7P=1 \Rightarrow P=(1/7)$$

وتبعا لذلك :

$$P(A)=(4/7)\ ,\ P(B)=(2/7)\ ,\ P(C)=(1/7)$$

واحتمال فوز B أو C هو :

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)$$
$$=(2/7)+(1/7)=(3/7)$$

مثال (٣) :

بين وجه الخطأ فى كل من العبارات التالية :

أ – احتمال أن ينجح سعيد فى امتحان الفيزياء هو 0.95 – .

ب – احتمال أن ينجح سعيد فى امتحان الأحصاء هو 0.9 واحتمال الأ ينجح 0.15

جـ – احتمال أن يفوز الفريق الوطنى لكرة القدم فى مباراته القادمة هو 0.75 واحتمال أن يتعادل 0.09 واحتمال أن يفوز أو يتعادل هو 0.95 .

د – احتمال أن ينجح سعيد فى مقرر الأحصاء هو 0.9 واحتمال أن ينجح فى مقررى الأحصاء والرياضيات هو 0.95 .

الحل :

ا – يتناقض الأحتمالات المعطى مع الفرض الأول التى تقول أن احتمال أى حادث لا يجوز أن يكون سلبيا .

ب – تتناقض الأحتمالات المعطاة فى الفرض الثانى إذا لو رمزنا لحادثة نجاح سعيد فى مقرر الأحصاء بـ A فإن عدم نجاحه يمثل الحادثه المتممة A^c و

$$P(A)+P(A^c)=P(S)$$
$$=0.9+0.15>1$$

(كان يجب أن تساوى واحد صحيح) .

جـ – لنرمز بـ A لحادثة الفريق الوطنى لكرة القدم فى مباراته القادمة . ولنرمز بـ B لحادثة تعادل الفريق . فإن المعلومات المعطاة :

$$P(A)=0.75\ ,\ P(B)=0.09\ ,\ P(A\cup B)=0.95$$

والحادثتين A ، B متنافيتان وحسب الفرض الثالث يجب أن يكون :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

وهو غير متحقق لأن :

$$0.95\neq 0.75+0.09$$

د – لنرمز بـ A لحادثة أن ينجح سعيد فى مقرر الأحصاء ،

ولنرمز بـ B لحادثة أن ينجح سعيد فى مقرر الرياضيات .

لدينا :

$$P(AB)=0.95\quad ,\quad P(A)=0.9$$

وبما أن :

$$AB\subseteq A$$

فلابد أن يكون $P(AB)\leq P(A)$ من النظرية (٣) .

وهذا غير متوفر $(0.95 \not\leq 0.9)$.

مثال (٤) :

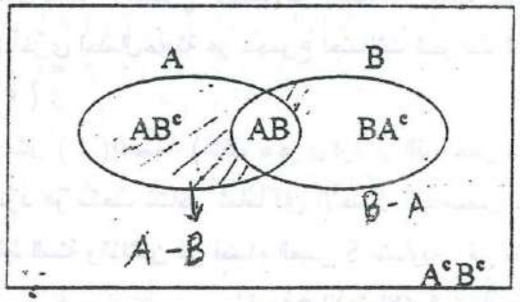
إذا علمت أن $P(A)=0.55\ ,\ P(B)=0.35\ ,\ P(A\cup B)=0.7$.

فاحسب :

$$P(A^c B)\ ,P(AB^c)\ ,P(AB)$$

الحل :

رسم مخطط فن مفيد دائما فى مثل هذه التمارين : إذا يساعدنا على كتابة العلاقات التى نحتاجها لحل التمرين .



نعلم أن :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\qquad (1)$$

وهى العلاقة تربط بين أربعة أحداث . وإذا علمنا أى ثلاثة منهما يمكن أيجاد المقدار الرابع .

بالتعويض فى العلاقة (١) نجد أن :

$$0.7=0.55+0.35-P(AB)$$

ومنه :

$$P(AB)=0.2$$

ولدينا أيضا :

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB) = 0.55 - 0.2 = 0.35$$

$$P(A^cB) = P(B) - P(AB) = 0.35 - 0.20 = 0.15$$

================

لنفرض الآن أن عدد نقاط العينة فى فضاء عينة S هو n حيث n عدد منته ، ولنرمز لـــهذه النقاط ، أو الأحداث الأبتدائية بـــ $E_1 , E_2 , ... , E_n$ ، وهذه الأسرة من الحوادث الأبتدائيـــة تشكل تجزىء لـــ S ، فهى منفصلة كل منهما متنافيتان مثنى مثنى لأن :

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_n$$

إذا خصصنا لكل حادثة إبتدائية E_i عددا حقيقيا P_i وكانت هذه الأعداد تحقق الشرطين :

(i) $P_i \geq 0 \quad , \quad i = 1.2 , ... , n$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} Pi = 1$

نكون قد أقمنا نموذج أحتماليا . إذ نستطيع حساب احتمالات أى حادثة .

احتمال حادثة :

احتمال حادثة هو مجموع الأحتمالات المخصصة لنقاط العينة التى تنتمى الى هذه الحادثة .

وبعبارة آخرى احتمال حادثة هو مجموع احتمالات الحوادث الداخلة فى تشكيل هذه الحادثة .

مثال (٥) :

فى مثال (٤) صفحة (القاء حجرى نرد أو القاء حجر مرتيـــن متتـــاليتين) أفـــترض أن حجر النرد هو مكعب متناظر تماما فإن الأحتمال المخصص لنقطة عينة من نقطة الى آخـــرى من النقاط الستة والثلاثين فى فضاء العينى S متساوية . فى مثل هذه الحالة يسمى النموذج .

" نموذج الأحتمالات المتساوية "

أحسب احتمالات الحوادث المذكورة فى ب ، جـــ من ذلك المثال .

الحلـــــــ :

وفقا للنموذج الأحتمالات المتساوية فتكون احتمال لكل منها (1 / 36) وبذلك يكون الاحتمالات المطلوبة هى :

ب - (i) $A = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$

$\therefore P(A) = 6 \times (1/36) = (1/6)$

(ii) $B = \{(2,1),(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(5,4),(4,5),(6,5),(5,6)\}$

$P(B) = 10 \times (1/36) = (5/18)$

(iii) $C = \{(6,3),(5,4),(4,5),(3,6),(6,4),(5,5),(6,5),(4,6),(6,6),(5,6)\}$

$P(C) = 10 \times (1/36) = (5/18)$

(iv) $D = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$

$P(D) = (6/36) = (1/6)$

(v) $E = \{ \quad \} = \varnothing \quad , \quad P(E) = 0$

جـ - (I) $G = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$P(G) = 6 \times (1/36) = (1/6)$

(ii) $H = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3)\}$

$P(H) = 6 \times (1/36) = (1/6)$

(iii) $I = \{(5,1),(1,5),(6,2),(2,6)\}$

$P(I) = 4 \times (1/36) = (1/9)$

(iv) $J = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\}$

$P(J) = 6 \times (1/36) = (1/6)$

(v) $K = \{(2,2),(2,4),(2,6),(6,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$P(K) = 9 \times (1/36) = (1/4)$

نموذج الاحتمالات المتساوية :

كحالة خاصة لنفرض أن عدد النتائج الممكنة فى التجربة هو N . وأنه ليس هناك ما يـــبرر منح أفضلية من لنتيجة من النتائج الممكنة على نتيجة آخرى . فهى جميعا متساوية الفرص . فى مثل هذه الحالات تخصص لكل نقطة عينة الاحتمال نفسه أى نوزع الواحـــد بالتســـاوى علـــى النقاط الـــ N فتكون حصة كلا منهما (1/N) .

ولنفرض أن حادثة A تتضمن n نقطة عينة فيكون احتمال A حسب التعريف :

$$P(A) = n \times (1/N) = (n/N).$$

التعريف التقليدى لاحتمال حادثة :

إذا أمكن لتجربة أن تظهر فى N من الحالات المتنافية مثنى مثنى والمتســـاوية الأفضليــة وكان m من هذة الحالات يؤدى الى تحقق حادثة A فان احتمال A يساوى m / N .

مثال (٦) :

فى مثال (٣) إذا أفترضنا أن قطعة النقود متوازية تماما فأحسب احتمالات الحوادث D , C , B , A .

الحل :

$A=\{(H,T),(T,H)\}$

$\Rightarrow P(A)=(2/4)=(1/2)$

$B=\{(H,T),(T,T)\}$

$\Rightarrow P(B)=(2/4)=(1/2)$

$C=\{(H,H),(T,H),(H,T)\}$

$\Rightarrow P(C)=(3/4)$

$D=\{(T,H),(H,T),(T,T)\}$

$\Rightarrow P(D)=(3/4)$

$E=\{\ \}=\varnothing$

$\Rightarrow P(E)=0$

فراغ العينة اللانهائى :

نعلم أن فراغ العينة اللانهائى (غير محدود) يتكون من عدد لانــهائى مـن العناصر أو النتائج الأولية وتخصيص أعداد (أى احتمالات) ترافق هذه العناصر عمليــة غـير مناسبة لوصف الفراغ الاحتمالى المرافق لفراغ العينة وذلك لأنه مهما صغرت قيمة هـذه الاحتمـالات فإن مجموعها سوف يساوى واحد لكل فراغ العينة .

إن فراغ العينة اللانهائى S سيكون له بعض القياسات الهندسية مثـل الطـول أو المسـاحة أو الحجم . وغالبا تكون المشكلة هى لختيار عنصر عشوائيا من الفراغ وحساب احتمـال أن يقـع هذا العنصر فى حادث A حيث $A \subset S$ وبالطبع يكون هناك قياس للحادث A وليكن m (A) وبذلك يعرف الاحتمال المطلوب على أنه :

$$P(A)=m(A)/m(S)$$

أى أن :

$$P(A)=(A \text{ طول}/S \text{ طول})$$

أو :

$$P(A)=(A \text{ مساحة}/S \text{ مساحة})$$

أو :

$$P(A)=(A \text{ حجم}/S \text{ حجم})$$

مثال (٧) :

اختارت نقطة داخل دائرة . احسب احتمال أن تكون هذه النقطة أقرب الى مركز الدائــرة مـن محيطها .

الحل :

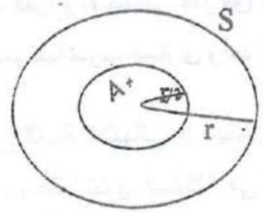
نفرض دائرة نصف قطرها = r .

∴ S = مجموعة النقاط داخل الدائرة التي نصف

قطرها r نرسم دائرة نصف قطرها (r / 2) ولها

نفس مركز S ولتكن A أي نقطة في الدائرة A تكون

أقرب الى المركز من محيط الدائرة S وعلى ذلك فإن



الاحتمال المطلوب هو :

$$P(A) = (\text{مساحة } A \ / \ \text{مساحة } S)$$

$$= [\pi (r/2)^2 / \pi r^2] = (1/4)$$

تمارين (٤)

(١) ما هو وجه الخطأ في كل من العبارات التالية :

ا - احتمال نزول مطر في يوم معين هو 0.6 واحتمال وجود رياح نشطة هو 0.8 واحتمال نزول المطر ووجود رياح نشطة هو 0.85 .

ب - احتمال أن ينجح سالم في مقرر الرياضيات 0.8 واحتمال أن ينجح في مقرر الرياضيات ويرسب في مقرر الفيزياء هو 0.9 .

جـ - احتمال أن تستقبل عيادة طبيب أقل من 5 مراجعين في فترة ماقبل الظهر هو 0.62 واحتمال أن تستقبل 5 مراجعين أو أكثر هو 0.25 .

٢- الحادثتان B,A متنافيتان $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.60$ اوجد :

$P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$, $P(AB)$, $P(A^c \cup B^c)$, $P(A^c B^c)$

٣ - الحادثتان D , C متنافيتان $P(D) = 0.33$, $P(C) = 0.27$ اوجد :

$P(C^c)$, $P(D^c)$, $P(C \cup D)$, $P(C^c D)$, $P(C D^c)$, $P(C^c \cup D^c)$.

٤ - إذا كان :

$P(B) = (2/3)$, $P(AB) = (1/2)$, $P(AB^c) = 0.25$

فأحسب :

$P(A)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c B^c)$.

٥ - ما هو وجه الخطأ في كل مما يلي : -

(i) $P(A) = 0.48$, $P(A^c) = 0.42$

(ii) $P(B) = 1.02$

(iii) $P(A) = 0.45$, $P(AB) = 0.53$

(iv) $P(C) = -0.03$

(v) $P(A) = 0.87$, $P(A \cup B) = 0.79$

٦ – يمكن تعميم النظرية ٥ إلى حاله حوادث أو أكثر . بين أن :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$$
$$-P(BC)+P(ABC)$$

٧ – قذفنا حجرى نرد . لتكن A حادثه الحصول على عدد فردى من القطعة الأولى و B حادثه الحصول على عدد أكبر من 2 من القطعه الثانية . أحسب :

$$P(A)\ ,\ P(B)\ ,\ P(AB)\ ,\ P(A\cup B)$$

٨ – إذا كانت إحتمالات أن تتلقى عيادة طبيب 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 أو أكثر من المكالمات الهاتفية خلال ساعة الظهر هى على الترتيب 0.001 ، 0.006 ، .... كما فى الجدول الأتى :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	.....
P(X)	0.001	0.006	0.022	0.052	0.091	0.128	0.149	0.551	.....

فما هو احتمال أنها ستتلقى :

ا – أقل من 5 مكالمات ؟ ب – ثلاث مكالمات على الأقل ؟

ج – من 2 الى 4 مكالمات ؟

٩ – بالأشارة الى التمرين (٧) السابق لتكن C حادثة الحصول على مجموع زوجى .

أحسب :

$$P(C), P(AC), P(BC), P(A\cup C),$$
$$P(ABC), P(A\cup B\cup C).$$

الاحتمالات المشروطة – المستقلة

١ – **طريقة العد :**

نستعرض الآن عددا من القواعد المفيدة والسهلة التى يمكن استخدامها للوصول بسرعة ويسر الى عدد الحالات الممكنة وعدد الحالات الملائمة التى وردت فى التعريف التقليدى لاحتمال حادثة . إذا أمكن استكمال مرحلة أولى من عمل معين بـ m طريقة ومن أجل هذه الطرق أمكن لمرحلة ثانية أن تتم بـ n طريقة فالعدد الكلى للاشكال المختلفة لاستكمال العمل بمرحلتين هو $n \times m$ طريقة .

مثال (١) :

بكم طريقة يمكن زوج مرتب عنصرة الثانى أحد الاعداد 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 وعنصرة الأول أحد الحروف a , b , c , d , e ؟ الجواب $6\times 5=30$

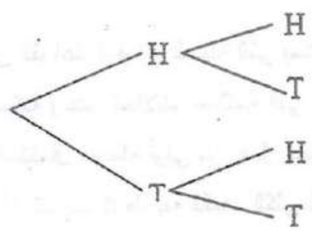
ويبين الجدول التالى الأزواج المرتبة الثلاثين بالتفصيل

الثانى / الأول	1	2	3	4	5	6
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)	(a,4)	(a,5)	(a,6)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)	(b,4)	(b,5)	(b,6)
c	(c,1)	(c,2)	(c,3)	(c,4)	(c,5)	(c,6)
d	(d,1)	(d,2)	(d,3)	(d,4)	(d,5)	(d,6)
e	(e,1)	(e,2)	(e,3)	(e,4)	(e,5)	(e,6).

مثال (٢) :

فى حالة رمى عملة مرتين أو عملتين مختلفتين مرة واحدة فإن عدد النواتج المختلفة تكون $2 \times 2 = 4$

ويمكن توضيح الطرق الأربعة كما فى الشكل :



ويمكن تعميم قاعدة الـ $m \times n$ الى عمل يتضمن k من المراحل المتتالية ولو فرضنا أنه يمكن إتمام المرحلة الأولى بـ n_1 طريقة والمرحلة الثانية بـ n_2 طريقة ، .... ، والمرحلة k بـ n_k طريقة فيكون عدد الطرق المختلفة لاتمام العمل بجميع مراحله هو :

$$n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots \times n_k$$

١ – **نظرية المتبادلات :**

باستخدام القاعدة الـ $n \times m$ المعممة فى إيجاد الطرق المختلفة لشغل r من المواقع المحددة المتتالية من بين الأشياء الـ n المتوفرة .

وذلك شغل الموقع الأول بأى شيء نختاره من بين الأشياء الـ n المتوفرة أى بـ n طريقة مختلفة . ويمكن شغل الموقع الثانى باختيار أى شيء من الأشيا الـ $n - 1$ طريقة مختلفة وهكذا ، .... والموقع الأخير يمكن شغله بـ $n - (r - 1) = n - r + 1$ طريقة مختلفة .

وفقا للقاعدة نجد أن عدد الطرق لاختيار r من جملة الأشياء n المتوفرة هى :

العدد هو :

$$C^{84}_{17,19,27,21} = [\,84!\,/\,(\,17!\;19!\;27!\;21!\,)\,]$$

تمرين :

حيث $C^n_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

تحقق أن :

$$C^n_r + C^n_{r-1} = C^{n+1}_r \quad , \quad C^n_r = C^n_{n-r}$$

٢ – **الأحتمال الشرطى :**

يسمى $P(A/B)$ الاحتمال الشرطى لـ A علما بأن B قد وقعت .

مثال (١) :

إذا قذفنا حجر نرد متوازن ، ولتكن :

A_1 : حادثة الحصول على 2 ،

A_2 : حادثة الحصول على عدد أقل من 4 ،

A_3 : حادثة الحصول على عدد أقل من 5 ،

B : حادثة الحصول على عدد زوجى .

احسب : $P(A_1/B), P(A_2/B), P(A_3/B)$.

$(\frac{1}{3})$ $(\frac{1}{3})$ $(\frac{2}{3})$

الحل :

يتضمن فضاء العينة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$A_1 = \{2\}$ ، $A_2 = \{1,2,3\}$, $A_3 = \{1,2,3,4\}$

$B = \{2,4,6\}$

تعريف الاحتمال الشرطي :

لتكن A ، B حادثتين فى فضاء عينة S فعندئذ :

$$P(A/B) = [P(A \cap B)/P(B)] \quad , \quad P(B) \neq 0$$

أو

$$P(B/A) = [P(A \cap B)/P(A)] \quad , \quad P(A) \neq 0.$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$$

لنعد الى المثال السابق ولنحسب :

$$P(A_1 B) = (1/6)\ ,\ P(A_1/B) = P(A_1 B)/P(B)$$

$$= [(1/6)/(1/2)] = (1/3).$$

وبصورة مماثلة :

$$P(A_2\ B) = (1/6)\ ,$$

$$P(A_2/B) = [P(A_2 B)/P(B)] = [(1/6)/(1/2)]$$

$$= (1/3).$$

$$P(A_3\ B) = (1/3)\ ,\ P(A_3/B) = [P(A_3 B)/P(B)]$$

$$= [(1/3)/(1/2)] = (2/3).$$

وهى النتائج ذاتها التى وصلنا إليها باستخدام الفضاء الشرطى .

مثال (٢) :

صنفنا مئة شخص وفقا لجنس (ذكر ، انثى) وفقا للاصابة بمرض عمى الألوان ،

(مصاب ، غير مصاب) . كانت النتيجة كما فى الجدول التالى :

الجنس \ موقفه	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	2	58	60
أنثى	1	39	40
المجموع	3	97	100

أخترناعشوائيا شخصا ولحدا ولتكن :

A حادثة الشخص مصاب بعمى الألوان ، B حادثة الشخص ذكر .

فإذا علمنا أن الشخص الذى تم اختياره كان ذكرا . فما هو احتمال أن يكون مصابا ؟ أى

$$P(A/B) = (2/60)$$

وبالمثل إذا علمنا أن الشخص مصاب فاحتمال كونه ذكرا هو نسبة الذكور بين المصابين .

$$\therefore P(B/A) = (2/3)$$

ولو حسبنا $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(AB)$ ، وتطبيق التعريف لوجدنا :

$$P(A) = (3/100)\ ,\ P(B) = (60/100)\ ,\ P(AB) = (2/100)$$

ومنه

$$P(A/B) = [(2/100)/(60/100)] = (2/60)\ ,$$

$$P(B/A)=[(2/100)/(3/100)]=(2/3)$$

وهى نفس الأجوبة .

__مثال (٣)__ :

أظهرت تصنيف لطلاب الجامعة أن 10% من الطلاب يدخنون ، 30% يشربون القـــهوة ، وأن 5% من الطلاب يدخنون ويشربون القهوة .

ا – أحسب لنسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة .

ب – من بين الطلاب المدخنين ما هى نسبة الطلاب الذين يشربون القهوة ؟

ج – من بين الطلاب الذين لا يشربون القهوة . ماهى نسبة المدخنين ؟

__الحل__ :

نتصور أن التجربة هى اختيار عشوائى لطالب من طلاب الجامعة بـــ A لحادثة الطالب يدخـــن ، B لحادثة طالب يشرب قهوة .

أ – لحساب النسبة المطلوبة نحسب لحتمال الحادثة AB وبقانون دى مورجان نجد أن :

$(A^c \cap B^c = A \cup B)^c$ وبنظريات الاحتمال نجد أن :

$$P(A^cB^c)=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-0.10-0.30+0.05=0.65$$

أى أن 65% من الطلاب لا يدخنون ولا يشربون القهوة .

ب- لحساب هذه النسبة تبعا للتعريف فإن الاحتمال المشروط $P(B/A)$ يحدد بـ:

$$P(B/A)=[P(AB)/P(A)]=(0.05/0.10)=(1/2)$$

أى أن 50% من الطلاب المدخنين يشربون القهوة .

جـ – لحساب حيث حيث نشترط أن الطالب لا يشرب القهوة تحسب :

$$P(A/B^c)=[P(AB^c)/P(B^c)]$$

$$=[P(A)-P(AB)/(1-P(B))]$$

$$=(0.10-0.05)/(1-0.30)$$

$$=0.071$$

أى أن 7.1% فقط من الطلاب الذين لا يشربون القهوة مدخنون .

٣ – __الأستقلال__ :

لتكن A , B حادثتين من فضاء عينة S . ولنفرض أننا حسبنا الاحتمال المشروط .

إذا كان : $P(A/B)=P(A)$

فإن الحادثتين A , B مستقلان وبالتعويض فى التعريف المشروط .

فنجد أن :

$$P(A/B)=[P(AB)/P(B)]=P(A)$$

وبفرض أن $P(B)\neq 0$ وأن :

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}$$

وهذا هو الشرط الازم والكافى لاستقلال حادثتين A ، B .

نقول أن الحادثتين A و B مستقلتان إذا وفقط إذا كان :

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

مثال (٤) :

لنعد إلى مثال (١) السابق حيث وجدنا أن :

$$P(A_3/B)=P(A_3)=(1/3)$$

فالحادثة A_3 مستقلة عن الحادثة B ونلاحظ تحقق الشرط :

$$P(A_3B)=P(A_3)P(B)$$
$$=(2/3)\times(1/2)=(1/3)$$

ولكن A_2 وكذلك A_1 غير مستقلة عن B لأن :

$$P(A_2B)\neq P(A_2)P(B)$$

$$(1/6)\neq(1/2)\times(1/2)=\frac{1}{4}$$

مثال (٥) :

الحادثتان A , B متنافيتان و $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$. ادرس استقلال الحادثتين؟

الحل :

بما أ ن الحادثتين متنافيتان فان تقاطعهما خال أى ولا يمكن تحقق الأستقلال

$$P(AB)=P(\varnothing)=0$$

لأن حاصل الضرب

$$P(A)P(B)\neq 0$$

وهو حاصل ضرب عددين موجبين بالغرض أى لا يمكن أن يساوى صفرا

قانونان أساسيان فى الاحتمال واستخدامهما .

١- قانون الجمع :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

وهو ما يسمى بقانون الجمع .

٢- قانون الضرب :

من تعريف الاحتمال الشرطى نجد أن :

$$P(AB)=P(A)P(B/A)$$
$$=P(B)P(A/B)$$

فى حالة استقلال الحادثتين A ، B الشرط اللازم والكافى لاستقلالهما إذ يكون عندئذ

$$P(B/A)=P(B) \quad , \quad P(A/B)=P(A)$$

مثال (٦) :

يتضمن صندوق أول كرتين بيضاوين وكرة سوداء واحدة . ويتضمن صندوق ثان كرة بيضاء وكرة سوداء . سحبنا أحد عشوائيا وخلطناها جيدا مع كرات الصندوق الثانى . ثم سحبنا عشوائيا كرة من الصندوق الثانى . ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء ؟

الحل :

نفرض للكرات الرموز W_1 , W_2 , B_1 لكرات الصندوق الأول ، W_3 , B_2 لكرات الصندوق الثانى (W للكرة البيضاء ، B للكرة السوداء) .

ويمكن كتابة فضاء العينة S كما يلى :

$$S = \{ W_1W_1 , W_1W_3 , W_1B_2 , W_2W_2 , W_2W_3 , W_2B_2 , B_1B_1 , B_1W_3 , B_1B_2 \}$$

حيث ترمز نقطة العينة W_2B_2 مثلا الى نتيجة " سحب الكرة W_2 من الصندوق الأول ثم سحبنا الكرة B_2 من الصندوق الثانى " .

حيث أن عدد النقاط S هو تسع نقاط واحتمال كل نقطة عينة هى 1/9 .

والحادثة المطلوبة ولنرمز لها بـ A تتضمن النقاط التالية :

$$A = \{ W_1W_1 , W_1W_3 , B_1W_3 , W_2W_2 , W2W_3 \}$$

ويكون الاحتمال المطلوب :

$$P(A) = (5/9)$$

وذلك بتطبيق التعريف التقليدى للاحتمال .

مثال (٧) :

من المثال السابق (٦) بأستخدام القواعد والقوانين الأساسية أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثانى .

الحل :

لنرمز للحادثة A الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثانى ، فلا يمكن الوصول الى A إلا بإحدى طريقتين :

أن نسحب كرة بيضاء من الصندوق الأول ، وكرة بيضاء من الصندوق الثانى (ولنرمز للحادثة بـ B) أو نسحب كرة سوداء من الصندوق الأول وكرة بيضاء من الصندوق الثانى (ولنرمز لهذه الحادثة بـ C) .

نلاحظ أن B , C متنافيتان وأن :

$$A = B \cup C$$

من العبارة B نلاحظ أن $B = B_1A$ حيث B_1 سحب كرة بيضاء من الصندوق الأول ، كما نلاحظ من عبارة C أن :

$$C = C_1 A$$

حيث C_1 سحب كرة سوداء من الصندوق الأول .

وأعتمادا على القوانين المعروفة

$$P(A) = P(B \cup C)$$

(حيث C ، B متنافيتان)

$$\begin{aligned} &= P(B) + P(C) \\ &= P(B_1 A) + P(C_1 A) \\ &= P(A / B_1) P(B_1) + P(A / C_1) P(C_1) \\ &= (2/3) \times (2/3) + (1/3) \times (1/3) = (5/9) \end{aligned}$$

وهو الجواب نفسه الذى حصلنا عليه فى المثال السابق الذى استخدم فيه فضاء العينة وتعريف احتمال حادثة .

إذا كانت الحوادث $A_1 , A_2 , --- , A_n$ مستقلة فيما بينها فيمكن أن نكتب تعميم لما وجدناه فى حالة استقلال حادثتين :

$$P(A_1 \ A_2 \ --- \ A_n) = P(A_1)P(A_2) --- P(A_n)$$

تكون صحيحة .

مثال (٨) :

قذفنا عملة نقود ثلاث مرات متتالية . أحسب احتمال :

ا – الحصول على HHT ، ب – الحصول على وجه الـ H مرتين .

الحل :

يتضح من طبيعة التجربة أنه لا يمكن أن يكون لنتيجة إحدى القذفات ، أى أثر فى الاحتمالات الموافقة لنتائج قذفة أخرى ، والقذفات الثلاثة هى تكرارات مستقلة للتجربة نفسها . وفى كل تكرار نعلم أن :

$$P(H) = P(T) = (1/2)$$

أ : P (HHT) = P (H فى القذفة الأولى و H فى القذفة الثانية و T فى القذفة الثالثة)

= P(H فى القذفة الأولى) × P (H فى القذفة الثانية) × P (T فى القذفة الثالثة)

$$= (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = (1/8)$$

ب – حادثة الحصول على وجه الـ H مرتين ولنرمز لها بـ A يمكن أن تتحقق بثلاث أشكال مختلفة فهى : HHT ، HTH ، THH وهكذا نكتب :

$$P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$

حسب الفرض الثالث $= (1/8) + (1/8) + (1/8) = (3/8)$

٤ – الأحتمال الكلى :

لنفرض أن الحوادث غير الخالية $B_1 , B_2 , ... , B_k$ تشكل تجزىء لفضاء العينة S . أى أنها متنافية .

$$B_1 \cup B_2 \cup ...... \cup B_k = S \ , \ B_i \cap B_j = \varnothing \ \forall \ i \neq j$$

فيمكن التعبير عن أى حادثة A من S بدلالة تقاطعات هذه الحادثة مع كل من حوادث التجزئة وهذا واضح مما يلى :

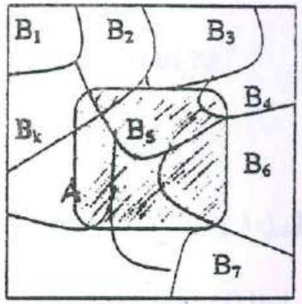
$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...... \cup B_k)$$

$$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ..... \cup (A \cap B_k)$$

ووفقا للفرض الثالث نجد أن :

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + ... + P(AB_k)$$

وبتطبيق قانون الضرب الشرطى للاحتمالات على كل حد من حدود الطرف الأيمن نجد أن :



تجزئ لفضاء العينة S والحادثة A

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + ... + P(A/B_k)P(B_k)$$

وهو قانون الاحتمال الكلى . ويمكن كتابته بأختصار كما يلى :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)P(B_i) \qquad (*)$$

مثال (٩) :

مصنع ثلاجات يتضمن ثلاث آلات . مساهمة كل منها فى الأنتاج الكلى اليومى للمصنع هى على الترتيب 30% ، 36% ، 34% .

آخذنا عشوائيا ثلاجة من الأنتاج الكلى اليومى للمصنع . ماهو احتمال أن يكون معيبا ، علما بأن النسبة المئوية للانتاج المعيب فى الآلات الثلاث هى على الترتيب 1% , 2% , 2% ؟

الحل :

نفرض أن :-

B_1 لحادثة " ثلاجة من أنتاج الآلة الأولى "

B_2 لحادثة " ثلاجة من أنتاج الآلة الثانية " .

B_3 لحادث " ثلاجة من أنتاج الآلة الثالثة "

A لحادثة " ثلاجة معيب "

وبتطبيق قانون الاحتمال الكلى نجد أن :

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)$$

ولكن من معطيات المسالة نلاحظ أن :

$$P(B_1) = 0.30\ ,\ P(B_2) = 0.36\ ,\ P(B_3) = 0.34$$

(لاحظ أن مجموع احتمالات حوادث التجزئة يجب أن يكون مساويا للواحد) .

$$P(A/B_1) = 0.01\ ,\ P(A/B_2) = 0.02\ ,\ P(A/B_3) = 0.02$$

وبالتعويض فى علاقة الاحتمال الكلى (*) نجد أن :

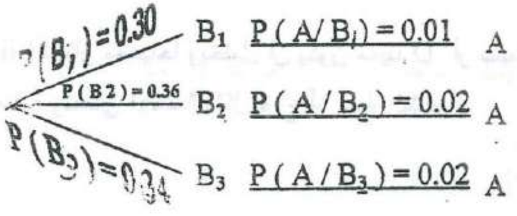
$$P(A) = 0.01 \times 0.30 + 0.02 \times 0.36 + 0.02 \times 0.34 = 0.017$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 0.983$$

احتمال أن يكون غير معيبا

ملاحظة :

يوضح المخطط فى الشكل التالى المسألة في المثال السابق . ويسمى مثل هذا المخطط ، عادة ، مخطط الشجرة .



$0.30 \times 0.01 = 0.0030$

$0.36 \times 0.02 = 0.0072$

$0.34 \times 0.02 = 0.0068$

$\therefore P(A) =$ المجموع $= 0.0170$

مخطط الشجرة لحل المثال .

مثال (١٠) :

لدينا ثلاث صناديق كما يلى :

بالصندوق I 10 صناديق أضاءة من بينها 4 معيبة .

وبالصندوق II مصابيح أضاءة 6 من بينها 1 معيبة .

وبالصندوق III 8 مصابيح إضاءة من بينها 3 معيبة .

أختير صندوق بطريقة عشوائية وبعد ذلك سحب مصباح منه بطريقة عشوائية أيضا . ما هـــو الاحتمال P أن يكون المصباح معيبا .

الحل :

في هذا المثال نكون متتابعة من تجربتين .

(i) اختيار صندوقا من الثلاثة الصناديق I ، II ، III .

(ii) نختار مصباحا ويحتمل أن يكون معيبا D أو سليما G وتمثل الشجرة البيانية التالية هـذه العملية وتعطى الاحتمال لكل فرع أو مسار للشجرة .

1/3 — I — $P(D/I) = 2/5$ — D — $(1/3)\times(2/5) = (2/15)$

1/3 — II — $P(D/II) = 1/6$ — D — $(1/3)\times(1/6) = (1/18)$

1/3 — III — $P(D/III) = 3/8$ — D — $(1/3)\times(3/8) = (1/8)$

، لجمع ينتج الاحتمال الكلى .

$$\therefore\ P(D) = (2/15) + (1/18) + (1/8) = (113/360)$$

ويكون لحتمال أن يكون المصباح جيدا هو :

$$P(G) = 1 - P(D) = (247/360)$$

٥ – قانون بايز : Bayes Law

لنفرض فى المثال (٩) إننا أخترنا بلاطة بصورة عشوائية ، فوجدناه معيبا ونريد حســاب احتمال أن تكون هذه البلاطة من أنتاج الآلة الأولى أى $P(B_1/A)$.

أى احتمال أن تكون A وقعت ما هو احتمال حدوث B_1 :

ومن قانون الاحتمال الشرطى :

$$P(B_1/A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

ومن قانون الاحتمال الكلى (*) يمكن تعويض P (A) بما تساويه نجد أن :

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

وهو قانون بايز فى حالة وجود ثلاثة أسباب أى وجود تجزئ لــ S نقطة الى ثلاثة إجزاء .

وبالتعويض من المثال (٩) نجد أن :

$$P(B_1/A) = \frac{0.01 \times 0.30}{0.01 \times 30 + 0.02 \times 36 + 0.02 \times 0.34}$$

$$= \frac{0.003}{0.017} = \frac{3}{17}$$

وبصورة عامة ، إذا فرضنا k من تجزئ فضاء العينة S أى $B_1 , B_2 , ... B_k$ تجزئــه وكان المطلوب حساب $P(B_j / A)$ أى احتمال أن الحادثة A قد وقعت وكــانت نتيجــة للسبب B_j نكتب من قانون الاحتمال الشرطى :

$$P(B_j / A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{P(A)}$$

وبتعويض $P(A)$ فى المقام بما يساويه ، استنادا الى قانون الاحتمال الكلــى . نجـد أن قانون بايز بصورته العامة .

$$P(B_j / A) = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)P(B_i)} \quad , \; j = 1 , 2 , ... , k$$

مثال (١١) :

فى مجتمع البالغين تبلغ نسبة الأصابة بمرض السكر 8% واحتمال أن يقـرر طبيـب معين أصابة شخص بهذا المرض ، علما أنه مريض بالفعل هو 0.95 واحتمال أن يقـرر أصابته علما أنه غير مصاب هو 0.02 . ماهو احتمال أن يكون شـخص بـالغ مريـض بالسكر علما بأن الطبيب أنبأه بذلك ؟

الحل :

من الواضح أن حوادث التجزئة هنا الأصابة أو عدم الأصابة بمرض السكر .

ولتكن B حادثة الأصابة بالمرض ، B^c حادثة عدم الإصابة فإن :

$$P(B) = 0.08 \quad , \quad P(B^c) = 0.92$$

لتكن A حادثة أن الطبيب شخص الأصابة بالمرض فإن من المسألة نجد أن :

$$P(A/B) = 0.95 \quad , \quad P(A/B^c) = 0.02$$

والمطلوب هو حساب $P(B/A)$.

وفقاً لقانون بايز لدينا :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c)}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.08}{0.95 \times 0.08 + 0.02 \times 0.92}$$

$$= \frac{0.076}{0.0944} = 0.81$$

تمارين (٥)

١ – إذا كانت H حادثة أن يحصل كمال على تقدير ممتاز ، G حادثة أن يكـون متفوقـاً فـى الرياضة .عبر بكلمات عما تعنيه الرموز التالية :

$$P(G/H)\ ,\ P(H/G)\ ,\ P(H/G^c)\ ,\ P(H^c/G)\ ,\ P(H^c/G^c)$$

٢ – تقدم ستون شخصاً لوظيفة . عند تصنيفهم وفقاً للشهادة والخبرة حصلنا على الجدول التالي:

	يحمل شهادة جامعية	لا يحمل شهادة جامعية
له خبرة سابقة	12	6
بدون خبرة سابقة	24	18

اخترنا أحد المتقدمين بصورة عشوائية . ولنرمز بـ G لحادثة أنه يحمل شهادة جامعية وبـ T لحادثة أن له خبرة سابقة .

أ – احسب الاحتمالات الآتية من الجدول مباشرة :

$$P(G)\ ,\ P(T)\ ,\ P(TG)\ ,\ P(G^cT)\ ,\ P(T/G)\ ,$$
$$P(G^c/T^c).$$

ب – تحقق أن :

$$P(T/G)=[P(TG)/P(G)],$$
$$P(G^c/T^c)=[P(G^cT^c)/P(T^c)].$$

٣ – أي الأزواج التالية من الحوادث مستقل وأيهما غير مستقل ؟

أ – أن يكون سائق سيارة مخموراً ، وأن يرتكب حادث اصطدام ،

ب – الحصول على ثلاث ثم ثلاث في قذفتين متتاليتين لحجر نرد ،

جـ – أن يكون شخص مدير مضرب ، وأن يكون أسود الشعر ،

د – حصول عطل لسيارتك ، وتأخرك عن موعد عملك ،

هـ – أن يكون شخص من مواليد يوليو وأن تكون قدماه مسطحتين ،

و – أن يكون لديك رخصة قيادة ، وأن تمتلك سيارة ،

ز – أن تكون ممن يعيشون في أسوان ، ومن هواة جمع الطوابع ،

حـ – أي حادثتين متنافيتين وغير مستحيلتين .

٤ – الحادثتان A , B مستقلتان .

$P(A)=0.3 \quad , \quad P(B)=0.4$ احسب :

أ – احتمال وقوعهما معاً ،

ب – احتمال وقوع واحدة منهما على الأقل ،

جـ – احتمال وقوع واحدة منهم بالضبط ،

د – احتمال عدم وقوع أي منهما .

٥ – تتوزع أبقار مزرعة بين أنواع ثلاث A , B , C وفق النسب التالية 25% من النوع A ، 35% من النوع B ، 40% من النوع C ونعلم أن 2/3 الأبقار من النوع A ، $\frac{1}{2}$ الأبقار من النوع B ، $\frac{1}{4}$ من النوع C ، يعطي أكثر من ١٥ كجم حليب يومياً .

أ – اختيرت بقرة من أبقار المزرعة عشوائياً فوجد أنها تعطى أكثر من ١٥ كجم حليب يومياً ، ما احتمال أن تكون من النوع A ؟

ب – أختيرت بقرة عشوائياً فتبين أنها تعطى ما لا يزيد عن ١٥ كجم حليب يومياً ، ما احتمال أن تكون من النوع B ؟

٦ – إفرض أن A , B حادثتين من حوادث تجربة معينة . إذا كان :

$$P(A)=0.4 \ , \ P(A\cup B)=0.7 \ , \ P(B)=\alpha$$

ا – ما هى قيمة α التى تجعل A , B متنافين ؟

ب – ما هى قيمة α التى تجعل A , B مستقلين ؟

الباب الثانى

دوال الاحتمالات ودوال التوزيع

Probability functions&Distribution functions

المتغير Variable : هو الشئ الذي يمكن أن يأخذ قيم مختلفة في الظروف المختلفة (زمنية-مكانية-سياسية-اقتصادية.........الخ) فمثلا سعر كيلو الدقيق يختلف من سوق إلي أخر ويختلف في نفس السوق من عام إلي عام أخر, ..., كذلك وزن الفرد يمثل متغير يتوقف علي عمر الفرد, وطوله,......الخ وعادة يرمز للمتغير الذي يأخذ عدد n من القيم بالرمز X حيث X تأخذ القيم: $X_r, r=1,2,.......,n$ المتغير يمكن أن يأخذ أى قيم متصلة أو قيم منفصلة. ولكن المتغير X الذى يعرف علي فضاء تجربه S يعرف بالمتغير العشوائى كما يلى:

ا – المتغير العشوائى Random Variable

اذا كانت S فضاء عينه لأحدي التجارب فان نتائج هذه التجربة أو نقط المعاينة في s ليست أعدادا في كل الحالات. وأن كان المطلوب فى كثير من الحالات تخصيص عدد معين لكل ناتج يسمي متغيرا عشوائيا.

فالمتغير العشوائي X علي فضاء العينة S هو دالة من S الي مجموعة الأعداد الحقيقية R بحيث تكون الصورة المعاكسة لأي فترة من R حدثا فى S فاذا كان X متغيرا عشوائيا معرفا على S بحيث يكون النطاق الصاحب image set له نهائيا وقبلا للعد فانه

يكون متغيراً عشوائيًا متقطعًا discrete. أما إذا كان النطاق المصاحب له فترة من الأعداد فإنه يكون متصلاً .

$X : S \to R$

وفيما يلي سنبدأ بالمتغيرات العشوائية المتقطعة حيث ندرس دوال الاحتمال، ودوال التوزيع، ودوال الاحتمال في متغيرين، ودوال الاحتمال الهامشي والشرطيّ . . . إلخ

ثم ننتقل بعد ذلك إلى المتغيرات العشوائية المتصلة لنستعرض الدوال السابقة نفسها.

أولاً - المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables

١ - . دالة الاحتمال

إذا كانت التجربة العشوائية رمي قطعتي نقود، وأردنا أن نعرف عدد القطع التي تظهر عليها الصورة head فإن هذا العدد (عدد مرات ظهور الصورة) إمّا أن يكون صفرًا (أي لاتظهر الصورة)، وإمّا أن يكون ١ وإما ٢ . فإذا رمزنا لعدد مرات ظهور الصورة بالرمز X ، واحتمال كل حالة بالرمز f (x) فإنه يمكن تلخيص نتائج هذه التجربة في الجدول التالي:

x	0	1	2
f(x)	1/4	2/4	1/4

وقد حصلنا على قيم الاحتمالات f (x) التي في الجدول باستخدام مبادىء الاحتمالات (ويمكن استخدام توزيع ذي الحدين) وذلك بالحصول على الحالات الكلية (أو الممكنة) التي عددها أربع حالات كما يلي:

	القطعة الأولى	القطعة الثانية		عدد الصور
	صورة	صورة	←	٢
أو	صورة	كتابة	←	١
أو	كتابة	صورة		
أو	كتابة	كتابة	←	صفر

وكما هو واضح من النتائج الممكنة للتجربة أن عدد الحالات التي ليس فيها أي صورة (أي صفر صورة) هي حالة واحدة (الحالة الأخيرة) من أربع حالات وبذلك فإن احتمال الحصول على صفر صورة (أي X = 0) يساوي $\frac{1}{4}$ وهو الذي يعبر عنه كما يلي:

$$f(0) = \Pr(X = 0) = \frac{1}{4}$$

كذلك فإن عدد الحالات التي تعطي صورة واحدة هما حالتان (الثانية أو الثالثة) مع أربع حالات. ولذا فإن احتمال الحصول على صورة واحدة (أي X = 1) يساوي $\frac{2}{4}$ وهو الذي يعبر عنه كما يلي:

$$f(1) = \Pr(X = 1) = \frac{2}{4}$$

وأخيراً فإن عدد الحالات التي تعطي صورتين هي حالة واحدة (الحالة الأولى) من أربع حالات. لذلك فإن احتمال الحصول على صورتين (أي X = 2) يساوي $\frac{1}{4}$. أي أن:

$$f(2) = \Pr(X = 2) = \frac{1}{4}$$

وبصفة عامة فإن :

$$\boxed{f(x) = \Pr(X = x)} \longrightarrow \quad (1)$$

أي أن $f(x)$ للمتغير المتقطع هي احتمال أن المتغير X يساوي (أو يأخذ) القيمة x .

ويلاحظ أن $f(x)$ للمتغير العشوائي المتقطع تحقق الشرطين التاليين :

أ) $f(x) \geq 0$ لكل قيم x

وهذا الشرط معناه أن الاحتمالات جميعها أكبر من الصفر أو تساوي صفرًا (غير سالبة

ب) $\sum f(x) = 1$

وهذا الشرط معناه أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح .

ويطلق على $f(x)$ طالما أنها تحقق الشرطين السابقين اسم «دالة الاحتم probability function (أو دالة كتلة الاحتمال) . Probability mass Function

أي أن دالة الاحتمال لمتغير عشوائي متقطع X عند أي نقطة x هي :

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

ويفضـل دائمًا ألا تبقى دالة الاحتمال $f(x)$ على شكل جدول، بل يفضل تصاغ على شكل دالة رياضية كلما أمكن ذلك. ففي مثالنا هذا يمكن إعادة ص دالة الاحتمال كما يلي :

$$f(0) = \Pr(X = 0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f(1) = \Pr(X = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$f(2) = \Pr(X = 2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

ومن هذا يمكن صياغة دالة الاحتمال بالشكل التالي :

$$f(x) = \binom{2}{x} p^x q^{2-x}$$

حيث $p = q = \frac{1}{2}$ ، $x = 0, 1, 2$

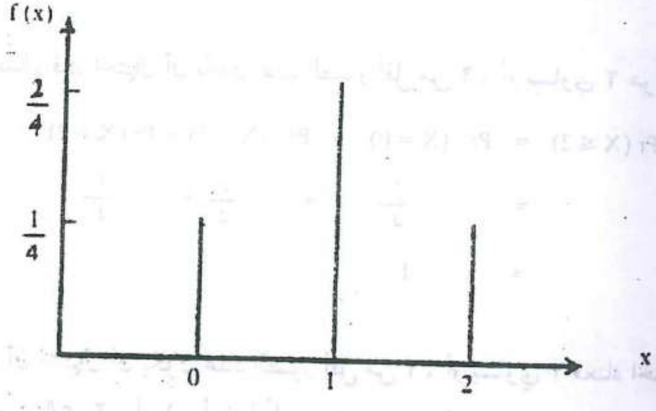
وإذا رمينا عددًا من قطع النقود يساوي n فإن دالة الاحتمال في هذه الحالة تأخذ الشكل :

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث $p + q = 1$; $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

ودالة الاحتمال في شكلها الأخير هي التي تعرف بدالة احتمال ذي الحدين (أو توزيع ذي الحدين) .

يلاحظ كذلك أن دالة الاحتمال يمكن تمثيلها بيانيًا . فلو أخذنا دالة الاحتمال في المثال السابق فإنها تمثل بيانيًا كما في الشكل رقم (١) .



شكل (١): التمثيل البياني لدالة الاحتمال

٢ ـ دالة التوزيع أو دالة الاحتمال التجميعي

Distribution Function or Cumulative Probability Function

أحيانًا يكون المطلوب هو أن تكون X أقل من قيمة معينة أو تساويها (أو تساوي قيمة معينة على الأكثر).

فمثلًا: إذا كان المطلوب هو احتمال أن عدد الصور التي ستظهر ـ في المثال السابق ـ أقل من ١ أو تساويه (أي تساوي ١ على الأكثر) فإن هذا يكتب كما يلي:

$$\Pr(X \leq 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

أي أن احتمال أن عدد الصور أقل من ١ أو يساويه معناه احتمال أن عدد الصور إما أن يساوي ١ وإما أن يساوي صفرًا، وحيث إنهما متنافيان disjoint events فإننا نجمع هذين الاحتمالين.

وأيضًا، فإن احتمال أن يكون عدد الصور أقل من ٢، أو يساوي ٢ هو:

$$\Pr(X \leq 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 1$$

أي أن احتمال أن يكون عدد الصور أقل من ٢، أو يساوي ٢ معناه احتمال أن عدد الصور يساوي ٢، أو ١، أو صفرًا.

وهكذا فإنه يمكن تكوين جدول للاحتمالات التجميعية يعطي قيم $\Pr(X \leq x)$ حيث $x = 0, 1, 2$، ويسمى جدول الاحتمال التجميعي. وسوف نرمز للإحتمال التجميعي بالرمز $F(x)$ حيث:

$$\boxed{F(x) = \Pr(X \leq x)} \longrightarrow \quad (2)$$

وتسمى $F(x)$ دالة الاحتمال التجميعي كما أنه يطلق عليها أيضًا اسم دالة التوزيع.

ويمكن وضع قيم دالة التوزيع (أو دالة الاحتمال التجميعي) في الجدول التالي:

x	0	1	2
$F(x) = \Pr(X \leq x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

ومن الجدول نلاحظ أن:

$$F(0) = \Pr(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = \Pr(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = \Pr(X \leq 1) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

أي أن :

$$\boxed{F(x') = \Pr(X \le x') = \sum_{x=x_0}^{x'} f(x)}$$

حيث x_0 هي أقل قيمة يأخذها المتغير X.

ومن هذا المثال يتضح أننا حصلنا على قيم دالة التوزيع بمعلومية (أو بواسطة) قيم دالة الاحتمال، حيث إن :

$$F(0) = f(0)$$
$$F(1) = f(0) + f(1)$$
$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

والعكس أيضًا، أي يمكن الحصول على دالة الاحتمال بمعلومية دالة التوزيع، وذلك كما يلي :

$$f(0) = F(0) = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$f(2) = F(2) - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

أي أن العلاقة بين دالة الاحتمال ودالة التوزيع للمتغير المتقطع يمكن كتابتها كما يلي :

$$\boxed{F(x_i) = \sum_{x=x_0}^{x_i} f(x)} \qquad (3)$$

$$\boxed{f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})} \qquad (4)$$

والمعادلة رقم (3) تعني أن دالة التوزيع عند أي نقطة (ولتكن x_i) تساوي مجموع الاحتمالات من أول المدى (أي من أول نقطة) إلى النقطة المطلوبة (x_i مثلا). أما المعادلة رقم 4 فتعني أن دالة الاحتمال عند أي نقطة (ولتكن x_i) عبارة عن الفرق بين قيمة دالة التوزيع عند النقطة نفسها (x_i) وقيمة دالة التوزيع عند النقطة السابقة لها مباشرة (x_{i-1}).

من الشرح السابق يمكن استنتاج أن لدالة التوزيع بعض الخصائص نذكر منها مايلي :

أ) تنحصر قيمة دالة التوزيع $F(x)$ بين الصفر والواحد الصحيح. أي أن :

$$0 \le F(x) \le 1$$

ب) دالة التوزيع $F(x)$ دالة متزايدة (أو على الأقل ليست تناقصية). أي إذا كانت $x_i < x_i + 1$ فإن :

$$F(x_i) \le F(x_i + 1)$$

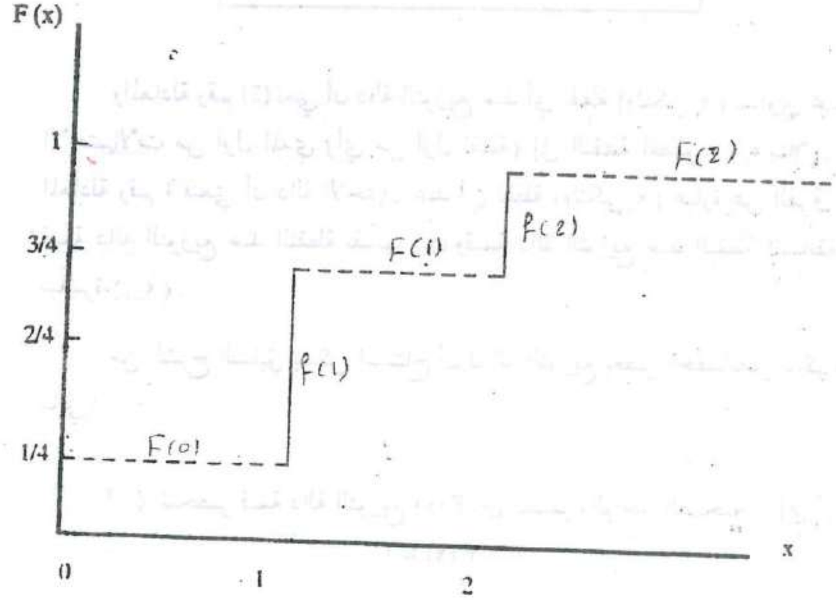
جـ) دالة التوزيع $F(x)$ دالة سلمية step function ويمكن إيضاح هذه الخاصية برسم دالة التوزيع في المثال السابق كما في الشكل رقم (٢).

٣ - دالة الاحتمال في متغيرين* Join Probability Function

إذا فرضنا أن X ، Y متغيران عشوائيان متقطعان.

وأن X يأخذ القيم الممكنة : $X = x_1, x_2, \dots, x_n$.

*** ويمكن التعميم لأكثر من متغيرين بالطريقة نفسها أو بالإسلوب نفسه.**



شكل (٢): دالة توزيع سلمية

وأن Y يأخذ القيم الممكنة: $Y = y_1 , y_2 , \dots , y_m$ ، ونفرض أنه لكل زوج من القيم (x_i , y_j) يوجد احتمال أن X يأخذ القيمة x_i ، Y يأخذ القيمة y_j ويكتب على الصورة $f(x_i , y_j)$ حيث:

$$\boxed{f(x_i , y_j) = Pr(X = x_i ; Y = y_j)} \longrightarrow (5)$$

وتسمى دالة $f(x,y)$ دالة الاحتمال المشترك في المتغيرين X,Y. ويلاحظ أنها تحقق الشرطين التاليين:

أ) $f(x_i , y_j) \geq 0$

وذلك لجميع قيم x,y. أي أن الاحتمالات غير سالبة لكل قيم x,y.

ب) $\sum_i \sum_j f(x_i , y_j) = 1$

أي أن مجموع الاحتمالات لكل قيم x,y تساوي الواحد الصحيح. ويمكن تمثيل هذا الوضع في جدول مزدوج يبين قيم كل من المتغيرين X,Y والاحتمالات المقابلة كما يلي:

X \ Y	y_1	y_2	---	y_j	---	y_m	Sum
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	---	$f(x_1,y_j)$	---	$f(x_1,y_m)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	---	$f(x_2,y_j)$	---	$f(x_2,y_m)$	$f_1(x_2)$
.	.	.	---	.	---	.	.
.	.	.	---	.	---	.	.
.	.	.	---	.	---	.	.
x_i	$f(x_i,y_1)$	$f(x_i,y_2)$	---	$f(x_i,y_j)$	---	$f(x_i,y_m)$	$f_1(x_i)$
.	.	.	---	.	---	.	.
.	.	.	---	.	---	.	.
.	.	.	---	.	---	.	.
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_i,y_2)$	---	$f(x_n,y_j)$	---	$f(x_n,y_m)$	$f_1(x_n)$
Sum	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	---	$f_2(y_j)$	---	$f_2(y_m)$	1

ومن الجدول السابق يتضح أن مجموع الاحتمالات يساوي واحدًا صحيحًا سواء كان الجمع رأسيًا أم أفقيًا أم على الخلايا الصغيرة داخل الجدول.

كما أنه ـ على سبيل المثال:

$$f(x_1 , y_1) = Pr(X = x_1 ; Y = y_1)$$

أي أن $f(x_1 , y_1)$ هي احتمال أن المتغير X يساوي القيمة x_1 وفي الوقت نفسه المتغير Y يساوي القيمة y_1 .

ومثال آخر:

$$f(x_2 ; y_4) = Pr(X = x_2 ; Y = y_4)$$

أي أن $f(x_2 , y_4)$ هي احتمال أن المتغير X يأخذ القيمة x_2 وفي الوقت نفسه يأخذ المتغير Y القيمة y_4 ، . . وهكذا . . أي أنه بصفة عامة:

$$f(x_i , y_j) = Pr(X = x_i ; Y = y_j)$$

أي أن $f(x_i , y_j)$ هي احتمال أن المتغير X القيمة x_i وفي الوقت نفسه يأخذ المتغير Y القيمة y_j .

أما بالنسبة للمجاميع الهامشية أي مجاميع الصفوف والأعمدة فيمكن إيضاحها كما يلي:

$f_1(x_1)$ وهي مجموع الاحتمالات في الصف الأول تمثل احتمال أن المتغير X يأخذ القيمة x_1 أيًا كانت قيمة y (بمعنى أنها احتمال أن X تساوي x_1 وفي الوقت نفسه $Y = y_1$ أو X تساوي x_1 ، $Y = y_2$ أو . . . إلى احتمال أن $X = x_1$ ، $Y = y_m$). وكذلك $f_1(x_i)$ وهي مجموع الاحتمالات في الصف i تمثل احتمال أن المتغير X يأخذ القيمة x_i أيًا كانت قيمة Y . وهكذا بالنسبة لكل الصفوف.

$f_2(y_1)$ وهي مجموع الاحتمالات في العمود الأول تمثل احتمال أن المتغير Y يأخذ القيمة y_1 أيًا كانت قيمة X . وكذلك $f_2(y_j)$ وهي مجموع الاحتمالات في العمود j تمثل احتمال أن المتغير Y يأخذ القيمة y_j أيًا كانت قيمة X . وهكذا بالنسبة لكل الأعمدة.

وهذه الدوال $f_1(x_i)$ ، $f_2(y_j)$ هي التي تسمى دوال الاحتمال الهامشي، والتي سوف نتناولها في الفقرة التالية بالتفصيل. وهي تبين كيف يمكن اشتقاق دوال الاحتمال لكل من x , y على حدة من دالة الاحتمال المشترك بينهما.

٤ . دالة الاحتمال الهامشي Marginal Probability Function

من الجدول السابق - كما ذكرنا - نلاحظ أن:

$$\boxed{f_1(x_i) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i , y_j)} \longrightarrow (6)$$

وتسمى $f_1(x_i)$ دالة الاحتمال الهامشي للمتغير X . ونلاحظ أن التجميع يتم أفقيًا على كل قيم y . ويمكن - باختصار الرموز - كتابة:

$$\boxed{f_1(x) = \sum_{y} f(x , y)} \longrightarrow (6)$$

وهي احتمال أن X = x أيًا كانت قيمة y ، لذلك فإن التجميع يتم على كل قيم y .

أي أنه للحصول على دالة احتمال المتغير X من دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين X , Y يتم التجميع على الدالة المشتركة بالنسبة للمتغير الآخر Y .

وبالطريقة نفسها نلاحظ أن:

$$\boxed{f_2(y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i , y_j)} \longrightarrow (7)$$

وتسمى $f_2(y_j)$ دالة الاحتمال الهامشي للمتغير Y . ونلاحظ أن التجميع يتم رأسيًا على كل قيم x . ويمكن - باختصار الرموز - كتابة :

$$\boxed{f_2.(y) = \sum_x f(x,y)} \longrightarrow \quad (7)$$

وهي احتمال أن Y = y أيًا كانت قيمة x ، لذلك فإن التجميع يتم على كل قيم x .

أي أنه للحصول على دالة احتمال المتغير Y من دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين Y ، X فإن التجميع يتم على الدالة المشتركة بالنسبة للمتغير الآخر X .

تسمى $f_1(x)$, $f_2(y)$ دوال الاحتمال «الهامشية» لأنها مشتقة من الدالة المشتركة بينهما. أما الدليل 1 في $f_1(x)$ والدليل 2 في $f_2(y)$ لتمييز هاتين الدالتين عن الدالة المشتركة التي يرمز لها بالرمز $f(x, y)$ بدون دليل. وفي الواقع فإن $f_1(x)$ هي نفسها $f(x)$ كما أن $f_2(y)$ هي نفسها $f(y)$ واستخدم الدليل 1 ، 2 للتمييز بينهما ولبيان أنهما مشتقتان من الدالة المشتركة.

٥ - دالة الاحتمال الشرطي Conditional Probability Function

رأينا أن دالة الاحتمال المشترك لمتغيرين X ، Y هي $f(x, y)$ حيث :

$$f(x,y) = Pr(X = x \;\text{و}\; Y = y)$$

فإذا كان المتغيران مستقلين فإن :

$$f(x,y) = Pr(X=x) \,.\, Pr(Y=y)$$

أي أنه إذا كان X ، Y مستقلين فإن :

$$\boxed{f(x,y) = f_1(x).\, f_2(y)} \longrightarrow \quad (8)$$

أي أنه في حالة استقلال المتغيرين فإن دالة الاحتمال المشترك لهما تساوي حاصل ضرب دالة الاحتمال الهامشي لكل منهما.

أما في الحالة العامة فإن :

$$f(x,y) = Pr(X=x, Y=y)$$
$$= Pr(X=x)\, Pr(Y=y/X=x)$$

والتي يمكن أن تكتب بالشكل المختصر التالي :

$$\boxed{f(x,y) = f_1(x).\, f(y/x)} \longrightarrow \quad (9)$$

حيث إن $f(y/x)$ هي دالة احتمال المتغير Y بشرط أن قيمة X تساوي x . وهي التي تسمى دالة الاحتمال الشرطي للمتغير Y بشرط أن X=x .

وبالطريقة نفسها يمكن كتابة $f(x, y)$ كما يلي :

$$f(x,y) = Pr(X=x, Y=y)$$
$$= Pr(Y=y).\, Pr(X=x/Y=y)$$

والتي يمكن أن تكتب بالشكل المختصر التالي :

$$\boxed{f(x,y) = f_2(y).\, f(x/y)} \longrightarrow \quad (10)$$

حيث إن $f(x/y)$ هي دالة الاحتمال الشرطي للمتغير X بشرط حدوث Y = y .

من الحالة العامة يمكن استنتاج دوال الاحتمال الشرطي $f(y/x)$, $f(x/y)$ كما يلي :

$$\boxed{f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}} \longrightarrow (11)$$

وبالطريقة نفسها :

$$\boxed{f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}} \longrightarrow (12)$$

ومن هاتين النتيجتين يتضح أن دالة الاحتمال الشرطي لأي متغير بشرط حدوث متغير آخر ماهي إلا خارج قسمة دالة الاحتمال المشترك لهما على دالة الاحتمال الهامشي للمتغير الآخر (الذي اشترطنا حدوثه).

__مثال (١)__

عند سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب فإنه يلاحظ أنها تتصف بصفتين :

الصفة الأولى : أن الورقة قد تكون «اسباتي» spades ، أو «قلب» heart ، أو «ديناري» diamonds ، أو «بستوني» clubs . ويمكن أن نرمز لهذه الصفة بالرمز X حيث يأخذ القيم x=1.2.3.4 ، على الترتيب. حيث يعبر كل رقم عن حالة من هذه الحالات الأربع (بالترتيب السابق). (♣ و ♥ ، ♦ ، ♠)

الصفة الثانية : أن الورقة قد تكون 1 أو 2 أو ....10 أو «ولد» أو «بنت» أو «شايب». ونرمز لهذه الصفة بالمتغير العشوائي Y حيث يأخذ القيم : y=1.2.3,...,13 ، على الترتيب.

واحتمال سحب ورقة - وتتصف بصفتين معينتين - هو $\frac{1}{52}$. أي أن دالة الاحتمال المشترك لهما هي :

$$f(x,y) = \frac{1}{52}$$

$$x = 1,2,3,4 \,;\, y = 1,2,3,\dots,13$$

ويمكن تمثيل ذلك بالجدول التالي :

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Sum $f_1(x)$
1	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$										$\frac{1}{52}$	$\frac{13}{52}$
2	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$											$\frac{13}{52}$
3	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$											$\frac{13}{52}$
4	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$										$\frac{1}{52}$	$\frac{13}{52}$
Sum $f_2(y)$	$\frac{4}{52}$	$\frac{4}{52}$	$\frac{4}{52}$										$\frac{4}{52}$	1

وكما هو واضح من الجدول فإن أي احتمال مشترك بين أي صفتين يساوي $\frac{1}{52}$.

فمثلاً :

$$f(2,1) = \Pr(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{52}$$

هي احتمال أن الورقة تكون «قلباً» وفي الوقت نفسه تحمل الرقم 1 . وتوجد ورقة واحدة فقط في المجموعة تحمل هاتين الصفتين لذلك فإن

الاحتـــال = $\frac{1}{52}$. (الــرقــم 2 للمتـغـيـر X يعـني أن الــورقــة من نوع القلب. والرقم 1 للمتغير Y يعني أن الورقة تحمل الرقم 1).

ومثال آخر $f(1, 11)$ هي:

$$f(1, 11) = Pr(X = 1, Y = 11) = \frac{1}{52}$$

وهي احتمال أن الورقة تكون «سباتي» وفي الوقت نفسه تكون «ولد» (الرقم 1 للمتغير X يعني أنها «سباتي» والرقم 11 للمتغير Y يعني أنها «ولد»). وهذا الاحتمال يساوي $\frac{1}{52}$؛ لأنه توجد ورقة واحدة فقط تحمل هاتين الصفتين.

وهكذا بالنسبة لباقي الحالات.

ومن الجدول أيضًا يمكن استنتاج دوال الاحتمال الهامشي لكل من المتغيرين Y.X . حيث إن $f_1(x)$ هي دالة الاحتمال الهامشي للمتغير X وهي تعني احتمال أن تكون الورقة نوعًا معينًا من الأنواع الأربعة «أسباتي أو قلب أو ديناري أو بستوني» أيًا كان الرقم الذي تحمله الورقة «أيًا كانت قيمة y» وقيمة الدالة كما يتضح من الجدول هي:

$$f_1(x) = \frac{13}{52}$$

ونحصل على هذه القيمة بتجميع الصفوف (أي أن التجميع يتم على كل قيم y ونأخذ المجموع الهامشي في العمود الأخير من الجدول. ونجد أن القيمة ثابتة أيضا وتساوي $\frac{13}{52}$. وهذا معناه أن احتمال أن الورقة «اسباتي» يساوي احتمال أن تكون «قلب» يساوي احتمال أن تكون «ديناري» يساوي احتمال أن تكون «بستوني». لذلك فإن دالة الاحتمال الهامشي للمتغير X هي:

$$f_1(x) = \frac{13}{52}$$

وحيث إن دالة الاحتمال الهامشي للمتغير Y هي $f_2(y)$ وهي تعني احتمال أن الورقة تحمل الرقم 1 أو 2 أو . . . «ولد» أو «بنت» أو «شايب»، أيًا كان نوع الورقة (أيًا كانت قيمة X). وقيمة الدالة كما يتضح من الجدول هي:

$$f_2(y) = \frac{4}{52}$$

ونحصل على هذه القيمة بتجميع الأعمدة (أي أن التجميع يتم على كل قيم x) أي من الصف الأخير من الجدول. ونجد أن القيمة ثابتة أيضًا وتساوي $\frac{4}{52}$. وهذا معناه أن احتمال الحصول على رقم 1 يساوي احتمال الحصول على رقم 2 وهكذا. . . أي أن:

$$f_2(y) = \frac{4}{52}$$

ونلاحظ أن حاصل ضرب دالة الاحتمال الهامشي لكل منها يساوي دالة الاحتمال المشترك لهما. وذلك لأن:

$$f_1(x).\,f_2(y) = \frac{13}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{52} = f(x,y)$$

وحيث إن دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين تساوي حاصل ضرب دالتي الاحتمال الهامشي فإننا نستنتج أن المتغيرين Y.X في هذا المثال مستقلان.

رابعًا: المتغيرات العشوائية المتصلة Continuous Random Variates

١- دالة كثافة الاحتمال* Probability Density Function

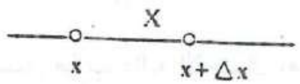
تكلمنا في البنود السابقة عن المتغير العشوائي المتقطع وعن مفهوم دالة الاحتمال في هذه الحالة كما تظهره المعادلة رقم (1) والتي تقول إن $f(x)$ معناها احتمال أن المتغير

* تعرّف دالة كثافة الاحتمال بأنها المشتقة التفاضلية الأولى لدالة التوزيع. وهذا ما نحاول توضيحه هنا.

X يأخذ القيمة x (مع تحقق الشرطين). ولكن هنا في حالة المتغير المتصل لا يوجد احتمال عند نقطة (أو قيمة واحدة محددة).

وكما يعرف الطالب (أو الدارس) من دراسته السابقة عن مبادىء الاحتمالات أننا نحسب الاحتمالات للمتغيرات المتصلة عن طريق المساحات تحت منحنى الدالة. وحيث إنه لاتوجد مساحة عند نقطة فإن الاحتمال في هذه الحالة يساوي صفرًا.

أي أنه لحساب الاحتمالات في حالة المتغيرات المتصلة يجب أن تكون هناك مساحة محصورة بين نقطتين، أو أكثر من نقطة معينة إلى نهاية المدى، أو أقل من نقطة معينة . . . ولذلك فإن مفهوم دالة الاحتمال سوف يتغير في هذه الحالة وإلا فإن قيمته سوف تساوي صفرًا على الدوام.



وإذا رمزنا لدالة كثافة الاحتمال للمتغير المتصل بالرمز السابق نفسه وهو f (x) فإن معنى دالة الكثافة هنا سيكون احتمال أن تقع قيمة المتغير X بين القيمة x والقيمة x + Δ x مقسومًا على Δx حيث Δx مقدار صغير جدًا يؤول إلى الصفر. أي أن:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} Pr\,(x < X \leq x + \Delta x) / \Delta x \longrightarrow (13)$$

والمعادلة السابقة رقم (13) هي التي تعطي معنى أو تعريف دالة كثافة الاحتمال للمتغير X . وهي تقول: إن f (x) معناها احتمال أن تكون قيمة X محصورة بين x, x + Δx مقسومًا على Δx عندما Δx → 0.

(Probability density Function)

ويلاحظ أن دالة كثافة الاحتمال P. D. F. يجب أن تحقق الشرطين:

أ) $f(x) \geq 0$

وهذا الشرط يعني أن الاحتمالات غير سالبة (إما موجبة وإما صفر).

ب) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

والشرط الثاني يعني أنه إذا كان المتغير X محصورًا بين القيمتين a , b (أي a ≤ x ≤ b) فإن التكامل على الدالة من أول المدى إلى آخره يساوي الواحد الصحيح (وهذا الشرط كان يقابله في المتغير المتقطع أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح. وهو الشرط نفسه مع استبدال علامة المجموع بعلامة التكامل التي تناسب المتغيرات المتصلة). أي المساحة تحت المنحنى تساوي 1.

٢ــ دالة التوزيع Distribution Function

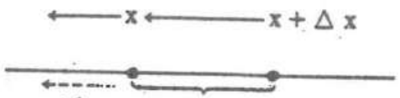
وهنا لن يتغير مفهوم دالة التوزيع. بل سيظل كما هو في حالة المتغيرات المتقطعة. وباستخدام الرمز نفسه F (x) فإن دالة التوزيع هي:

$$F(x) = Pr\,(X \leq x) \longrightarrow (14)$$

ونلاحظ أن المعادلة رقم (14) هي نفس المعادلة رقم (2) حيث إن المعنى لم يتغير كما ذكرنا وهو أن دالة التوزيع عند النقطة x هي احتمال أن X أقل من أو يساوي x .

٣ــ العلاقة بين دالة الكثافة ودالة التوزيع

يمكن الحصول على العلاقة بين دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع للمتغيرات المتصلة كما يلي:



إذا نظرنا إلى الرسم البسيط السابق نجد أن احتمال كَوْن قيمة المتغير X أقل من أو تساوي $x + \Delta x$ يمكن تقسيمه إلى جزئين: إما أن تكون X أقل من x وإما أن تكون محصورة بين x , $x + \Delta x$. ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$\Pr(X \leqslant x + \Delta x) = \Pr(X \leqslant x \text{ or } x < X \leqslant x + \Delta x)$$
$$= \Pr(X \leqslant x) + \Pr(x < X \leqslant x + \Delta x)$$

وبأخذ المقدار $\Pr(x < X \leqslant x + \Delta x)$ إلى الطرف الأيسر بمفرده نحصل على:

$$\Pr(x < X \leqslant x + \Delta x) = \Pr(X \leqslant x + \Delta x) - \Pr(X \leqslant x)$$

ومن مفهوم دالة التوزيع (المعادلة رقم 14) نجد أن:

$$\Pr(X \leqslant x) = F(x)$$
$$\Pr(X \leqslant x + \Delta X) = F(x + \Delta x)$$
$$\Pr(x < X \leqslant x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

وبالقسمة على Δx وأخذ النهايات نحصل على:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr(x < X \leqslant x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right\}$$

وبافتراض أن Δx مقدار صغير جدًا يؤول إلى الصفر، وأن $F(x)$ دالة مستمرة (متصلة) عند x فإن الطرف الأيمن يكون هو المقدار التفاضلي $dF(x)$ أو $F'(x)$. والطرف الأيسر هو دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ (راجع المعادلة 13).

أي أن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها في صورتها النهائية بشكل مبسط كما يلي:

$$\boxed{f(x) = \frac{d}{dx} F(x)}$$

أو

$$\boxed{f(x) = F'(x)} \longrightarrow (15)$$

والمعادلة الأخيرة رقم (15) تقول: إن دالة الكثافة ماهي إلا تفاضل دالة التوزيع. أي أنه إذا كان لدينا دالة التوزيع فإنه يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال بأخذ المشتقة التفاضلية الأولى لدالة التوزيع.

ويمكن كتابة العلاقة بين دالة التوزيع ودالة كثافة الاحتمال للمتغير X بشكل آخر كما يلي:

$$\boxed{F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)\, dx} \longrightarrow (16)$$

إذا كانت بداية مدى المتغير العشوائي X هي a .

والمعادلة (16) تعطي دالة التوزيع بمعلومية دالة كثافة الاحتمال. وهي تقول: إنه للحصول على دالة التوزيع عند النقطة x_0 فإننا نكامل دالة كثافة الاحتمال من أول المدى (للمتغير) إلى النقطة المطلوبة x_0.

وكملاحظة بسيطة، إذا كانت بداية المتغير X هي $-\infty$ فإن المعنى لن يتغير وسيظل كما هو. أي أن:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\, dx$$

وباختصار فإن المعادلة (15) تعطي دالة الكثافة بمعلومية دالة التوزيع، والمعادلة (16) تعطي دالة التوزيع بمعلومية دالة الكثافة. والخلاصة أن دالة كثافة الاحتمال ماهي إلا المشتقة التفاضلية الأولى لدالة التوزيع. وأن دالة التوزيع عند نقطة ماهي إلا تكامل دالة كثافة الاحتمال من بداية مدى المتغير حتى هذه النقطة.

ج - خصائص دالة التوزيع للمتغير المتصل

في حالة المتغير المتصل نجد أن لدالة التوزيع بعض الخصائص المهمة منها:

١ - بافتراض أن قيمة X محصورة بين b,a أي بافتراض أن: $a \le X \le b$ فإن:

أ) $F(x) = 0$ لكل قيم المتغير X التي تقل عن a أو تساويه أي $(X \le a)$. أي أن قيمة دالة التوزيع تساوي صفرًا لكل القيم التي تقل عن الحد الأدنى للمتغير (a) أو تساويه.

ب) $F(x) = 1$ لكل قيم المتغير X التي تكون أكبر من b أو تساويه أي $(x \ge b)$.

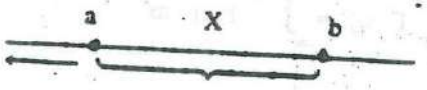
ومنها فإن: $F(b) = 1$

أي أنه بالتعويض عن الحد الأعلى للمتغير (b) في دالة التوزيع فإن قيمة الدالة تساوي الواحد الصحيح. ونفس الشيء لو عوضنا بأي قيمة أخرى أكبر من الحد الأعلى للمتغير. أي أن قيمة دالة التوزيع تساوي الواحد الصحيح لكل القيم التي تكون أكبر من الحد الأعلى للمتغير (b) أو تساويه.

وبصفة عامة: إذا كان $-\infty \le X \le \infty$ فإن:

$$F(-\infty) = 0 \,,\; F(\infty) = 1$$

٢ - إذا كان $a \le X \le b$ فإن:



$$Pr(X \le b) = Pr(X \le a) + Pr(a < X \le b)$$

أي أن احتمال أن تكون X أقل من b أو تساويه وهو يساوي احتمال أن تكون x أقل من أو تساوي a + احتمال أن تكون محصورة بين b,a.

$$\therefore\; Pr(a < X \le b) = Pr(X \le b) - Pr(X \le a)$$

وحيث إن $F(b) = Pr(X \le b)$

$F(a) = Pr(X \le a)$ ،

فـــإن:

$$\boxed{Pr\;(a < X \le b) = F(b) - F(a)} \longrightarrow \quad (17)$$

وهذه الخاصية مهمة جدًا حيث إنها تقول: إن احتمال أن تكون X محصورة بين b,a يساوي قيمة دالة التوزيع عند النقطة b مطروحًا منها قيمة دالة التوزيع عند النقطة a.

فمثلاً:

$$Pr(2 < X \le 5) = F(5) - F(2)$$

٣ - دالة التوزيع $F(x)$ دالة متزايدة أو على الاقل ليست تناقصية فإذا كان $x_1 < x_2$ فإن:

$$F(x_1) \le F(x_2)$$

ملاحظة مهمة: كما ذكرنا - سابقًا - فإن قيمة الاحتمال عند نقطة للمتغير المتصل تساوي صفرًا. أي أن احتمال أن يأخذ المتغير قيمة معينة يساوي صفرًا. وذلك لأن:

$$Pr(X = b) = \lim_{a \to b} Pr(a < X \le b)$$

$$= \lim_{a \to b} \;[F(b) - F(a)]$$

$$= F(b) - \lim_{a \to b} F(a)$$

فإذا كانت $F(x)$ دالة متصلة عند $x = b$

فـإن :

$$Pr(X = b) = F(b) - F(b)$$
$$= 0$$

(لاحظ أننا استخدمنا في البرهان الخاصية رقم (٢) لدالة التوزيع).

مثال (٢)

إذا كان X متغيراً عشوائيًا متصلاً في المدى $0 \leq X \leq 3$ وكانت دالة التوزيع له تأخذ الشكل التالي:

$$F(x) = k\,x^3$$

فأوجد دالة كثافة الاحتمال (مع حساب قيمة k).

الحل :

نعلم من المعادلة رقم (15) أن العلاقة بين دالة الكثافة ودالة التوزيع هي :

$$f(x) = F'(x)$$

أي أنه للحصول على دالة الكثافة تفاضل دالة التوزيع.

$$f(x) = 3\,k\,x^2$$

وهذا لايكفي لحساب دالة كثافة الاحتمال أو استخدامها إذ يجب حساب قيمة k حتى تكون دالة كثافة الاحتمال في صورتها النهائية ولحساب قيمة k نستخدم الخاصية الأولى لدالة التوزيع التي تقول: إنه إذا كانت $a \leq X \leq b$

فـإن : $F(x) = 1$

لكل قيم x التي تكون أكبر من b أو تساويه.

أي أن : $F(b) = 1$

وهـذا معناه أنه بالتعويض في دالة التوزيع عن الحد الأعلى للمتغير فإن قيمة الدالة

تساوي الواحد الصحيح . وحيث إن الحد الأعلى للمتغير في هذا المثال يساوي 3 فإن :

$$F(3) = k\,(3)^3 = 1$$
$$27\,k = 1$$
$$k = 1/27$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال في صورتها النهائية هي :

$$f(x) = 3\,(1/27)\ \ x^2$$

$$f(x) = \frac{x^2}{9} \qquad , \quad 0 \leq x \leq 3$$

ملاحظة :

إذا أراد الطالب أن يتأكد من أن هذه دالة كثافة احتمال يجب أن يتأكد أن الشرطين متحققان وهما:

أ) لكل قيم x $\quad f(x) \geq 0$

ب) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\ dx = 1$

بالنسبة للشرط الأول فواضح أن الدالة موجبة لكل قيم x داخل المدى. وبالنسبة للشرط الثاني فإن :

$$\int_0^3 \frac{x^2}{9}\,dx = \left(\frac{x^3}{27}\right)_0^3 = \frac{27}{27} - \frac{0}{27}$$
$$= 1 - 0 = 1$$

مثال (٣)

إذا كان X متغيراً عشوائيًا متصلاً في المدى $0 \leq X \leq 4$ ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$f(x) = k\,(x^2 + 2x + 2)$$

فأوجـد:

أ) دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$

ب) $F(2)$

جـ) $Pr(1 < X \leq 3)$

الحـل:

قبل الحصول على دالة التوزيع لابد أولاً من الحصول على قيمة الثابت k وذلك كما يلي:

بما أن $f(x)$ دالة كثافة احتمال فإنها تحقق الشرط الثاني الذي يقول: إن تكامل دالة الكثافة من أول المدى إلى آخره يساوي الواحد الصحيح

$$\int_0^4 f(x)\cdot dx = 1$$

$$\int_0^4 k(x^2 + 2x + 2)\,dx = 1$$

$$k\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)_0^4 = 1$$

$$\frac{136}{3}\ k = 1$$

$$k = \frac{3}{136}$$

∴ دالة كثافة الاحتمال هي: $f(x) = \frac{3}{136}(x^2 + 2x + 2)$

أ) المطلوب الأول وهو الحصول على دالة التوزيع $F(x)$:

نعلم من المعادلة رقم (16) أنه إذا كان: $a \leq X \leq b$ فإن:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{136}(x^2 + 2x + 2)\,dx$$

وذلك لأن أول المدى في المثال هو الصفر.

$$F(x) = \frac{3}{136}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)_0^x$$

$$F(x) = \frac{3}{136}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)$$

ب) المطلوب الثاني $F(2)$:

نعوض في دالة التوزيع $F(x)$ عن x بالقيمة 2

$$F(2) = \frac{3}{136}\left(\frac{8}{3} + 4 + 4\right) = \frac{4}{17}$$

جـ) المطلوب الثالث $Pr(1 \leq X \leq 3)$

وهنا نستخدم الخاصية الثانية لدالة التوزيع التي تقول:

$$Pr(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$Pr(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1)$$

ونحصل على $F(3)$ ، $F(1)$ وبالتعويض في دالة التوزيع عن X مرة بالقيمة 3 ومرة أخرى بالقيمة 1 ثم نطرح القيمتين:

$$F(3) = \frac{3}{136}\left(\frac{27}{3} + 9 + 6\right) = \frac{72}{136}$$

$$F(1) = \frac{3}{136}\left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right)$$

$$= \frac{10}{136}$$

$$Pr(1 \leq X \leq 3) = \frac{72}{136} - \frac{10}{136}$$

$$= \frac{62}{136}.$$

مثال (٤)

إذا كان للمتغير العشوائي X له دالة التوزيع الآتية :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :

ا ـ دالة كثافة الاحتمال

ب ـ $Pr(X \leq 0.5)$

جـ ـ $Pr(0.5 \leq X \leq 1)$

الحل :

ا) $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \text{ or } x > 1 \\ 2x & \text{if } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

أي أن دالة كثافة الاحتمال تساوي صفرًا للقيم x التي هي أقل من صفر، أو التي هي اكبر من ١ ، بينما تساوي 2x إذا كانت قيمة المتغير محصورة بين الصفر والواحد.

ب)

$$\begin{aligned} Pr(X \leq 0.5) &= F(0.5) \\ &= (0.5)^2 = 0.25 \end{aligned}$$

جـ)

$$\begin{aligned} Pr(0.5 \leq X \leq 1) &= F(1) - F(0.5) \\ &= (1)^2 - (0.5)^2 \\ &= 1 - 0.25 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

٥ ـ دالة كثافة الاحتمال لمتغيرين

إذا كان Y,X متغيرين عشوائيين متصلين فإن دالة كثافة الاحتمال لهما هي $f(x,y)$ ، حيث يجب أن تحقق $f(x,y)$ الشرطين التاليين :

ا) $f(x,y) \geq 0$ لكل قيم y,x

ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx = 1$

ويمكن التعميم لأكثر من متغيرين. فتكون الدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دالة كثافة احتمال في n متغير عشوائي إذا تحقق الشرطان :

ا) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1$

٦ـ دالة التوزيع لمتغيرين

إذا رمزنا لدالة التوزيع للمتغيرين Y,X بالرمز $F(x,y)$ فإن العلاقة بينها وبين دالة كثافة الاحتمال هي :

$$\boxed{F(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{x_0}\int_{-\infty}^{y_0} f(x,y)\ dxdy} \longrightarrow \quad (18)$$

ومن خصائص دالة التوزيع في هذه الحالة.

ا) $F(\infty, \infty) = 1$

$F(-\infty, \infty) = F(\infty, -\infty) = 0$

ب) دالة متزايدة في مدى معين.

جـ)

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) \longrightarrow (19)$$

ويمكن التعميم لأكثر من متغيرين.

لاحظ أن المعادلتين (18)، (19) تعطيان العلاقة بين دالة الكثافة ودالة التوزيع لمتغيرين. حيث تقول المعادلة (18): إن دالة التوزيع عند x_0, y_0 ماهي إلا التكامل المزدوج لدالة كثافة الاحتمال المشترك من بداية المدى لكل متغير حتى النقطة المطلوبة.

بينما تقول المعادلة (19): إن دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X.Y ماهي إلا التفاضل الجزئي لدالة التوزيع بالنسبة لكل من المتغيرين.

٧ـ دالة كثافة الاحتمال الهامشي

للحصول على دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير x تكامل دالة كثافة الاحتمال المشترك بالنسبة إلى y. أي أن:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \longrightarrow (20)$$

وهذا بفرض أن مدى المتغير Y هو من $-\infty$ إلى $+\infty$. أما إذا كان مدى المتغير Y هو $c \leq Y \leq d$ فإن:

$$f_1(x) = \int_{c}^{d} f(x,y)\, dy \longrightarrow (20)$$

وبالطريقة نفسها للحصول على دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Y تكامل دالة كثافة الاحتمال المشترك بالنسبة إلى x. أي أن:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \longrightarrow (21)$$

وهذا بفرض أن مدى المتغير X هو من $-\infty$ إلى $+\infty$. أما إذا كان مدى المتغير X هو $a \leq X \leq b$ فإن:

$$f_2(y) = \int_{a}^{b} f(x,y)\, dx$$

٨ـ دالة التوزيع الهامشي

إذا رمزنا لدالة التوزيع الهامشي للمتغير X بالرمز $F_1(x)$ فإن:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\, dx \longrightarrow (22)$$

أي أنه للحصول على دالة التوزيع الهامشي للمتغير X تكامل دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير X من بداية المدى إلى النقطة x.

وإذا رمزنا إلى دالة التوزيع الهامشي للمتغير Y بالرمز $F_2(y)$ فإن:

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$\boxed{F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy} \longrightarrow (23)$$

أي أنـه للحصـول على دالة التوزيع الهامشي للمتغير Y تكامل دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Y من بداية المدى إلى النقطة y.

٩ . دالة الاحتمال الشرطي

يمكن التعبير عن دالة كثافة الاحتمال المشترك $f(x,y)$ في الحالة العامة كما يلي:

$$f(x,y) = f_1(x)\,.\,f(y/x)$$

أو:

$$f(x,y) = f_2(y)\,.\,f(x/y)$$

وبالتالي نتوصل إلى النتائج نفسها التي حصلنا عليها في حالة المتغيرات المتقطعة كما يلي:

$$\boxed{f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}} \longrightarrow (24)$$

$$\boxed{f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}} \longrightarrow (25)$$

أما إذا كان Y,X مستقلين فإن:

$$f(x,y) = f_1(x).\,f_2(y)$$

أي أن دالـة كثـافـة الاحتمال المشترك تساوي حاصل ضرب دوال كثافات الاحتمال الهامشي للمتغيرات المستقلة. وذلك لأنه في هذه الحالة:

$$f(x/y) = f_1(x)$$
$$f(y/x) = f_2(y)$$

مثال (٥)

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين Y,X هي:

$$f(x,y) = k(8-x-y)$$

حيث إن k مقدار ثابت، $0 \leq X \leq 4\ ,\ 1 \leq Y \leq 3$

فأوجد:

أ) قيمة الثابت k

ب) $f_1(x)$ ، $f_2(y)$

جـ) $f(x/y)$ ، $f(y/x)$

د) $Pr(X \leq 3)$

هـ) $Pr(X < 3 / Y < 2)$

الحـل:

بما أن $f(x,y)$ دالة كثافة احتمال فإنها يجب أن تحقق الشرطين:

الأول: $f(x,y) \leq 0$ لكل قيم Y,X

الثاني: $\int_x \int_y f(x,y)\,dx\,dy = 1$

وسوف نستخدم الشرط الثاني للحصول على قيمة k.

أ) إيجاد قيمة الثابت k:

$$\int_x \int_y f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

(لأنها دالة كثافة احتمال).

$$\int_0^4 \int_1^3 k(8-x-y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^4 \left(\int_1^3 k(8-x-y)\,dy\right) dx = 1$$

$$k \int_0^4 \left(8y - xy - \frac{y^2}{2}\right)_1^3 \, dx = 1$$

$$k \int_0^4 \left(24 - 3x - \frac{9}{2} - 8 + x + \frac{1}{2}\right) dx = 1$$

$$\int_0^4 (12 - 2x)\, dx = 1$$

$$k\,(12x - x^2)_0^4 = 1$$

$$k\,(48 - 16) = 1$$

$$32\,k = 1$$

$$k = \frac{1}{32}$$

أي أن دالة كثافة الاحتمال المشترك هي :

$$f(x,y) = \frac{1}{32}(8 - x - y)$$

ب) إيجاد $f_1(x)$; $f_2(y)$:

للحصول على $f_1(x)$ وهي دالة الاحتمال الهامشي للمتغير X نكامل دالة كثافة الاحتمال المشترك بالنسبة للمتغير Y:

$$f(x) = \int_1^3 \frac{1}{32}(8 - x - y)\, dy$$

$$f_1(x) = \frac{1}{32}\left(8y - xy - \frac{y^2}{2}\right)_1^3$$

$$= \frac{1}{32}\left(24 - 3x - \frac{9}{2} - 8 + x + \frac{1}{2}\right)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{32}(12 - 2x)$$

وبالطريقة نفسها للحصول على $f_2(y)$ نكامل دالة كثافة الاحتمال المشترك بالنسبة للمتغير X.

$$f_2(y) = \int_0^4 \frac{1}{32}(8 - x - y)\, dx$$

د) حساب $Pr(X \leq 3)$:

لحساب هذا الاحتمال نكامل دالة كثافة الاحتمال الهامشي $f_1(x)$ من بداية مدى المتغير X حتى القيمة 3:

$$Pr(x \leq 3) = \int_0^3 f_1(x)\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{32}(12 - 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{32}(12x - x^2)_0^3$$

$$= \frac{1}{32}(36 - 9)$$

$$= \frac{25}{32}$$

هـ) حساب $Pr(X < 3 / y < 2)$:

باستخدام قانون الاحتمال الشرطي فإن :

$$Pr(X < 3 / y < 2) = \frac{Pr(X < 3 ; Y < 2)}{Pr(Y < 2)}$$

ولحساب البسط وهو $Pr(X < 3 , Y < 2)$ نكامل دالة كثافة الاحتمال المشترك بالنسبة للمتغير X من بداية المدى حتى القيمة 3 وبالنسبة للمتغير Y من بداية المدى حتى القيمة 2 وذلك كما يلي :

$$Pr(X < 3 , y < 2) = \int_0^3 \int_1^2 f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_0^3 \int_1^2 \frac{1}{32}(8 - x - y)\, dxdy$$

$$= \int_0^3 \left(\int_1^2 \frac{1}{32}(8 - x - y)\, dy\right) dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{32}\left(8y - xy - \frac{y^2}{2}\right)_1^2 dx$$

$$= \frac{1}{32}\left(8x - \frac{x^2}{2} - xy\right)_0^4$$

$$= \frac{1}{32}(52 - 8 - 4y)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{32}(24 - 4y)$$

جـ) إيجاد $f(y/x)\,;\,f(x/y)$:

لإيجاد دوال الاحتمال الشرطي نستخدم المعادلتين (24) ، (25):

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

$$f(x/y) = \frac{\frac{1}{32}(8 - x - y)}{\frac{1}{32}(24 - 4y)}$$

$$f(x/y) = \frac{8 - x - y}{24 - 4y}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

$$f(y/x) = \frac{\frac{1}{32}(8 - x - y)}{\frac{1}{32}(12 - 2x)}$$

$$f(y/x) = \frac{8 - x - y}{12 - 2x}$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{32}\left(16 - 2x - 2 - 8 + x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{64}(13 - 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{64}(13x - X^2)_0^3$$

$$= \frac{1}{64}(39 - 9)$$

$$= \frac{39 - 9}{64} = \frac{30}{64}$$

ولحساب المقام وهو $Pr(Y < 2)$ نكامل دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Y من بداية المدى حتى القيمة 2 :

$$Pr(Y < 2) = \int_1^2 f_2(y)\, dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{32}(24 - 4y)\, dy$$

$$= \frac{1}{32}(24y - 2y^2)_1^2$$

$$= \frac{1}{32}(48 - 8 - 24 + 2)$$

$$= \frac{1}{32}(50 - 32)$$

$$= \frac{18}{32}$$

$$Pr(X < 3 / y < 2) = \frac{30/64}{18/32} = \frac{30/32}{64/16}$$

$$= \frac{30}{36}$$

$$= \frac{5}{6}$$

تمارين الفصل الثاني

(١) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً في المدى $0 \le X \le 2$ وكانت دالة كثافة احتمال هي :

$$f(x) = k(x^2 + x + 3)$$

فاوجد :

أ) قيمة الثابت k

ب) دالة التوزيع $F(x)$ ومنها احسب $F(1)$

جـ) $Pr(\frac{1}{2} \le X \le 1\frac{1}{2})$

(٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً في المدى $0 \le X \le 1$ وكانت دالة التوزيع له هي :

$$F(x) = x^2$$

فأوجد دالة كثافة الاحتمال $f(x)$. ثم احسب $Pr(X \le 0.8)$

(٣) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f(y) = k(1 + 2y)$$

حيث $2 \le Y \le 4$ فاوجد : $F(y)$; $Pr(2 < Y < 3)$

(٤) إذا كانت دالة التوزيع للمتغير X هي :

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

حيث $X \ge 0$ فأوجد : $f(x)$; $Pr(X \le 1)$

(٥) إذا كانت دالة التوزيع للمتغير Y هي :

$$F(y) = k\,y$$

حيث $0 \le Y \le 1$ فأوجد قيمة k . $f(x)$.

(٦) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X,Y هي :

$$f(x,y) = k\,x\,y$$

حيث $0 < X < 1 , 0 < Y < 1$ فأثبت أن المتغيرين مستقلان ثم احسب

$Pr(X \le 0.25)$

(٧) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X,Y هي :

$$f(x,y) = k(x + y + 2)$$

حيث $0 \le X \le 2 ; 1 \le Y \le 4$ فأوجد :

أ) قيمة الثابت k

ب) $f_2(y) ; f_1(x)$

جـ) $f(y/x) ; f(x/y)$

د) $Pr(X < 3 / X < 1)$

(٨) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X,Y هي :

$$f(x,y) = k(6 - x - y)$$

حيث $0 \le X \le 2 ; 2 \le Y \le 4$ فاوجد :

أ) $Pr(X \le 1)$ ، $F_1(x)$ ، $f_1(x)$

ب) $f(y/x)$

(٩) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X,Y هي :

$$f(x,y) = (n-1)(n-2)(1 + x + y)^{-n}$$

حيث $X > 0 ; Y > 0$ تحقق من أن $f(x,y)$ دالة كثافة احتمال ثم أوجد :

$f(x/y) , f_2(y) , f_1(x)$.

(١٠) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث :

$$f(x) = k\,\frac{\lambda^x}{x!}$$

حيث $X = 0 , 1 , 2 , \dots$ فأوجد قيمة k التي تجعل $f(x)$ دالة احتمال.

(١١) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X , Y هي :

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}$$

حيث $X > 0 , Y > 0$

فاوجد :

أ) $Pr(X > 1)$

ب) $f(X/y)$

(١٢) صندوق به 8 كرات زرقاء، و 7 صفراء، و 10 بيضاء سحبت 5 كرات من الصندوق بدون إرجاع، فإذا رمزنا لعدد الكرات الزرقاء المسحوبة بالرمز X ولعدد الكرات الصفراء المسحوبة بالرمز Y . فأوجد:

ا) دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين Y,X .

ب) $f_1(x), f_2(y)$

جـ) $f(x/y); f(y/x)$

د) $f(x/y=2); f(y/x=3)$

لاحظ أن: $(0 \le x+y \le 5)$

وأن القاعدة التالية تساعد في الحل:

$$\sum_{i=0}^{e}\binom{m}{i}\binom{n}{e-i}=\binom{m+n}{e}$$

فمثلاً:

$$\sum_{y=0}^{5-x}\binom{7}{y}\binom{10}{(5-x)-y}=\binom{17}{5-x}$$

الفصل الثالث

التوقع

Expectation

● مقدمة ● بعض قوانين التوقع ● التباين بدلالة التوقع ● بعض قوانين التباين ● التوقع في حالة متغيرين ● الارتباط بدلالة التوقع ● التغاير ● تباين مجموع أي عدد من الحدود

١- مقدمة

لقد سبق للطالب دراسة بعض قوانين التوقع في المستوى الثاني. ونعود هنا لموضوع التوقع حيث نمر بسرعة على تلك القوانين التي درسها الطالب ثم نركز على تلك القوانين التي لم تسبق دراستها. فإذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً فإن القيمة المتوقعة للمتغير X التي يرمز لها بالرمز E(x) هي:

$$E(X)=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+..+x_nf(x_n)$$

حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ هي القيم المختلفة للمتغير X بالاحتمالات $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

وبالتالي فإن التوقع يمكن أن يكتب بالصورة المختصرة التالية:

$$\boxed{E(X) = \sum_{x} x\,f(x)} \longrightarrow \quad (1)$$

أما إذا كان X متغيراً متصلاً في المدى $a \leqslant X \leqslant b$ فإن التوقع يأخذ الشكل التالي:

$$\boxed{E(X) = \int_{a}^{b} x\,f(x)\,dx} \longrightarrow \quad (2)$$

أما إذا كان X متصلاً في المدى $-\infty \leqslant X \leqslant \infty$ فإن:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx}$$

فالتوقع ما هو إلا القيمة المتوسطة μ أي أن:

$$\boxed{E(X) = \mu} \longrightarrow \quad (3)$$

وعموماً، إذا كانت $\phi(x)$ دالة في x فإن القيمة المتوقعة للدالة $\phi(x)$ هي:

$$\boxed{E\left[\phi(x)\right] = \sum_{x} \phi(x).\,f(x)} \longrightarrow \quad (4)$$

إذا كان X متقطعاً،

$$\boxed{E\left[\phi(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x).\,f(x)\,dx} \longrightarrow \quad (5)$$

إذا كان X متصلاً.

٢ ـ بعض قوانين التوقع (تأثير الثابت على التوقع).

(١) إذا كان a مقداراً ثابتاً فإن توقع المقدار الثابت يساوي المقدار الثابت نفسه.

أي أن:

$$\boxed{E(a) = a} \longrightarrow \quad (6)$$

البرهـان:

$$\because E(a) = \sum a\,f(x)$$
$$= a \sum f(x)$$

وحيث إن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح أي أن $\sum f(x) = 1$ وبالتالي فإن:

$$E(a) = a$$

ويمكن اتباع الخطوات نفسها باستخدام التكامل.

(٢) إذا كان a مقداراً ثابتاً فإن:

$$\boxed{E(aX) = a.\,E(X)} \longrightarrow \quad (7)$$

البرهـان:

$$E(aX) = \sum a\,x\,f(x)$$
$$= a \sum x\,f(x)$$
$$= a.\,E(X)$$

(٣) إذا كان b,a مقدارين ثابتين فإن :

$$\boxed{E\,(aX \pm b) = a\,E\,(X) \pm b} \longrightarrow (8)$$

البرهـان:

$$E\,(aX \pm b) = \sum (ax \pm b)\, f(x)$$
$$= \sum ax\, f(x) \pm \sum b\, f(x)$$
$$= a \sum x\, f(x) \pm b \sum f(x)$$
$$= a\,.\,E\,(X) \pm b\,.\,1$$
$$= a\,.\,E\,(X) \pm b$$

مثـال (١)

إذا رمينا حجر نرد (سليم ومتوازن) ورمزنا لعدد النقط التي تظهر على الو
العلويُ بالرمز X فاحسب القيمة المتوقعة للمتغير X .

الحـل:

x	1	2	3	4	5	6		
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	=	1
x. f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	=	$\frac{21}{6}$

$$\therefore\ E\,(X) = \sum_{x=1}^{6} x\, f(x)$$
$$= 1x\frac{1}{6} + 2x\frac{1}{6} + 3x\frac{1}{6} + 4x\frac{1}{6} + 5x\frac{1}{6} + 6x\frac{1}{6}$$
$$= \frac{21}{6} = 3.5$$

مثال (٢)

في مثال حجر النرد رقم (١) احسب:

$$E\,\frac{(4X+3)}{5}\ ،\ E\,(10X+3)\ ،\ E\,(10X)$$

الحـل:

قيمة E (X) من المثال السابق هي :

$$E\,(X) = 3.5$$

المطلوب الأول:

$$E\,(10X) = 10\,E\,(X)$$
$$= 10\,(3.5)$$
$$= 35$$

المطلوب الثاني:

$$E\,(10X+3) = 10\,E\,(x) + 3$$
$$= 10\,(3.5) + 3$$
$$= 35 + 3$$
$$= 38$$

المطلوب الثالث:

$$E\,\frac{(4X+3)}{5} = E\,(\frac{4X}{5} + \frac{3}{5})$$
$$= \frac{4}{5}E\,(X) + \frac{3}{5}$$
$$= \frac{4}{5}(3.5) + \frac{3}{5}$$
$$= 2.8 + 0.6$$
$$= 3.4$$

٣ ـ التباين بدلالة التوقع

إذا رمزنا للتباين Variance بالرمز σ^2 أو Var [وبالتالي فإن تباين المتغير X هو σ_x^2 أو Var (X)] فإنه يعرّف كما يلي :

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

إذا كان X متقطعًا، أو

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

إذا كان X متصلاً .

وبالتالي فإن التباين يمكن أن يكتب بدلالة التوقع كما يلي :

$$\boxed{Var(X) = \sigma_X^2 = E(X - \mu)^2} \longrightarrow \quad (9)$$

وحيث إن $E(X) = \mu$ فإن :

$$\boxed{Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[X - E(X)\right]^2} \longrightarrow \quad (10)$$

وكما يمكن أن يكتب في الصورة النهائية التالية :

$$\boxed{Var(X) = \sigma_x^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2} \longrightarrow \quad (11)$$

or $$\boxed{\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu^2} \longrightarrow \quad (12)$$

والمعـادلات (9)، (10)، (11)، (12) تعطي التباين بأشكاله المختلفة بدلالة التوقع (والانحراف المعياري ماهو إلا الجذر التربيعيُّ الموجب للتباين).

٤ ـ بعض قوانين التباين (تأثير الثابت على التباين)

(١) تباين المقدار الثابت يساوي صفرًا . فإذا كان a مقدارًا ثابتًا فإن :

$$\boxed{Var(a) = 0} \longrightarrow \quad (13)$$

البرهـان :

$$\because \; Var(a) = E(a^2) - \left[E(a)\right]^2$$

وذلك طبقًا للمعادلة رقم (11). وحيث إن a مقدار ثابت فإن :

$$E(a^2) = a^2$$
$$\left[E(a)\right]^2 = \left[a\right]^2 = a^2$$
$$\therefore \; Var(a) = a^2 - a^2$$
$$= 0$$

(٢) إذا كان a مقدارًا ثابتًا فإن :

$$\boxed{Var(aX) = a^2 . Var(X)} \longrightarrow \quad (14)$$

البرهـــان :

$$\because \ Var(ax) = E(aX)^2 - \left[E(aX)\right]^2$$
$$= E(a^2X^2) - a^2\left[E(X)\right]^2$$
$$= a^2E(X^2) - a^2\left[E(X)\right]^2$$
$$= a^2\left\{E(X^2) - \left[E(X)\right]^2\right\}$$
$$= a^2 . \ Var(X)$$

(٣) إذا كان a , b مقدارين ثابتين فإن :

$$\boxed{Var(aX \pm b) = a^2 . \ Var(X)} \longrightarrow \quad (15)$$

ويمكن للطالب برهنة هذه الحالة بالطريقة السابقة نفسها.

مثـــال (٣)

في مثال حجر النرد رقم (١) أوجد $Var(X)$

ثم احسب : $Var(3X+4)$, $Var(5X)$

الحـــل :

x	1	2	3	4	5	6		
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		
xf(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	=	$\frac{21}{6}$
$x^2.f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{36}{6}$	=	$\frac{91}{6}$

لحساب تباين X أي $Var(X)$ نطبق المعادلة رقم (11)

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

٥ - ٢ - توقع مجموع متغيرين

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين فإن :

$$\boxed{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)} \longrightarrow \quad (18)$$

وبصفة عامة فإن :

$$\boxed{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)} \longrightarrow \quad (19)$$

أي أن المعادلة (19) ماهي إلا الحالة العامة للمعادلة أو القانون رقم (18) ، وخلاصتها أن توقع مجموع المتغيرات ماهو إلا مجموع توقعاتها (أي أن توقع المجموع يساوي مجموع التوقع) .

البرهـــان :

إذا فرضنا أن المتغيرين متقطعان فإن :

$$E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y) \ f(x,y)$$
$$= \sum_x \sum_y x f(x,y) + \sum_x \sum_y y f(x,y)$$
$$= \sum_x x\left[\sum_y f(x,y)\right] + \sum_y y\left[\sum_x f(x,y)\right]$$

وحيث إن :

$$f_1(x) = \sum_y f(x,y)$$
$$، \ f_2(y) = \sum_x f(x,y)$$

وذلك حسب المعادلتين (6) , (7) بالفصل الأول

$$\therefore\ E(X+Y) = \sum_x x\, f_1(x) + \sum_y y\, f_2(y)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

وبالطريقة نفسها يمكن برهنة الحالة العامة . كما يمكن البرهنة في حالة المتغيرات المتصلة حيث يتم استخدام علامات التكامل بدلاً من علامات المجموع .

٥ - ٣ - توقع حاصل ضرب متغيرين مستقلين

أما بالنسبة لتوقع حاصل ضرب المتغيرات فإنه لا يساوي حاصل ضرب توقعات المتغيرات إلا إذا كانت المتغيرات مستقلة .

فإذا كان X , Y متغيرين مستقلين فإن توقع حاصل ضربهما يساوي حاصل ضرب توقعاتهما. أي أن توقع حاصل الضرب للمتغيرات المستقلة يساوي حاصل ضرب التوقعات . ويمكن تعميم هذه النظرية لأكثر من متغيرين مستقلين.

$$\boxed{E(XY) = E(X).\ E(Y)} \longrightarrow \quad (20)$$

البرهـان :

$$\because\ E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y)$$

وحيث إن المتغيرين مستقلان فإن :

$$f(x,y) = f_1(x).\, f_2(y)$$

$$\therefore\ E(XY) = \sum_x \sum_y x\, y\, f_1(x)\, f_2(y)$$

$$= \sum_x x\, f_1(x).\ \sum_y y\, f_2(y)$$

$$= E(X).\ E(Y)$$

٥ - ٤ . التوقع الشرطي Conditional Expectation

إذا رمزنا للتوقع الشرطي بالرمز E (X/Y) أو بالرمز E (Y/X) فإنه يمكن أن يعرف كما يلي :

$$\boxed{\begin{aligned} E(X/Y) &= \sum_x x\, f(x/y) \\ &\text{or} \int_x x\, f(x/y)\, dx \end{aligned}} \longrightarrow \quad (21)$$

أو:

$$\boxed{\begin{aligned} E(Y/X) &= \sum_y y\, f(y/x) \\ &\text{or} \int_y y\, f(y/x)\, dy \end{aligned}} \longrightarrow \quad (22)$$

ويمكن أن يكتب التوقع الشرطي بصورة مفصلة ، وذلك بالتعويض عن دالة الاحتمال الشرطي ، كما يلي :

$$\boxed{\begin{aligned} E(X/Y) &= \sum_x x\, \frac{f(x,y)}{f_2\ (y)} \\ &\text{or} \int_x x\, \frac{f(x,y)}{f_2\ (y)}\, dx \end{aligned}} \longrightarrow \quad (23)$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X/Y) &= \sum_y y\, \frac{f(x,y)}{f_1\ (x)} \\ &\text{or} \int_x y\, \frac{f(x,y)}{f_1\ (x)}\, dy \end{aligned}} \longrightarrow \quad (24)$$

٥ ـ ٥ . توقع حاصل الضرب في الحالة العامة

أما في الحالة العامة (المتغيرات غير المستقلة) فإن توقع حاصل ضرب المتغيرين Y , X يأخذ الشكل التالي:

$$\boxed{E(XY) = E\left[X.E(Y/X=x)\right]} \longrightarrow \quad (25)$$

أو:

$$\boxed{E(XY) = E\left[Y.E(X/Y=y)\right]} \longrightarrow \quad (26)$$

حالة خاصة:

إذا كان $E(Y/X=x)$ مقدارًا ثابتًا: فإن توقع حاصل الضرب يمكن أن يكتب بالصورة المختصرة التالية:

$$\boxed{E(XY) = E(X).\,E(Y/X)} \longrightarrow \quad (27)$$

أو بالشكل التالي إذا كان $E(X/Y=y)$ مقدارًا ثابتًا

$$\boxed{E(XY) = E(Y).\,E(X/Y)} \longrightarrow \quad (28)$$

البرهـان (في الحالة العامة):

بافتراض أن المتغيرات متقطعة فإن الطرف الأيمن للمعادلة (25) يمكن أن يجا

كما يلي:

$$E\left[X.E(Y/X)\right] = \sum_x x f_1(x).\sum_y y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

[حيث تم التعويض عن $E(X)$ بالقيمة $\sum_x x f_1(x)$ وعن $E(Y/X)$ بالقيمة: $E(Y/X) = \sum_y y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ حسب المعادلة (24)].

$$\therefore\ E\left[X.E(Y/X)\right] = \sum_x x\sum_y y\, f(x,y)$$

(وذلك باختصار $f_1(x)$ من البسط والمقام).

$$\therefore\ E\left[X.E(Y/X)\right] = \sum_x \sum_y x\,y\, f(x,y)$$

$$= E(XY)$$

وهو المطلوب [لأن الطرف الأيمن ماهو إلا $E(XY)$]

وبالطريقة نفسها يمكن برهنة الحالة الأخرى. كما يمكن البرهنة في حالة المتغيرات المتصلة، وذلك باستخدام علامات التكامل بدلاً من علامات المجموع $\sum$.

٦ ـ الارتباط بدلالة التوقع

إذا رمزنا للارتباط (معامل الارتباط) بين المتغيرين بالرمز $\rho_{X.Y}$ فإنه يعرّف بالشكل التالي:

$$\boxed{\rho_{X.Y} = \frac{E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}}{\sqrt{E\left[X-E(X)\right]^2.\,E\left[Y-E(Y)\right]^2}}} \longrightarrow \quad (29)$$

والمعادلة رقم (29) تعطي الصورة الأولى لمعامل الارتباط بين Y , X.

ويلاحظ أن البسط في الصورة الأولى لمعامل الارتباط هو الذي يسمى التغاير Covariance بين Y , X ويرمز له اختصارًا بالرمز Cov. (X,Y).

أما مقام الصورة الأولى لمعامل الارتباط فما هو إلا حاصل ضرب الانحراف المعياري للمتغير X في الانحراف المعياري للمتغير Y.

أي أن:

$$E\left\{[X-E(X)]\,[Y-E(Y)]\right\} = Cov(X,Y)$$

$$\sqrt{E\left\{X-E(X)\right\}^2} = \sigma_X \quad ؛$$

$$\sqrt{E\left\{Y-E(Y)\right\}^2} = \sigma_Y \quad ؛$$

وبالتالي فإن معامل الارتباط يمكن أن يكتب بصورة مبسطة ثانية كما في المعادلة التالية رقم (30):

$$\boxed{\rho_{X.Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}} \longrightarrow \quad (30)$$

والمعادلة رقم (30) تقول: إن معامل الارتباط بين Y,X ماهو إلا خارج قسمة التغاير بينهما على حاصل ضرب الانحراف المعياري لكل منهما. لاحظ هنا أن إشارة التغاير هي التي تحدد إشارة معامل الارتباط. والتغاير - الذي سنفرد له بندًا مستقلاً بمشيئة الله - يمكن أن يكتب بالصورة المبسطة التالية:

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).\,E(Y)}$$

وذلك لأن:

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E\left\{[X-E(X)]\,[Y-E(Y)]\right\} \\
&= E\left\{XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right\} \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - \cancel{E(X)E(Y)} + \cancel{E(X)E(Y)} \\
&= E(XY) - E(X).\,E(Y)
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن معامل الارتباط يمكن أن يكتب بالصورة الثالثة التالية:

$$\boxed{\rho_{X.Y} = \frac{E(XY)-E(X).\,E(Y)}{\sigma_X.\,\sigma_Y}} \longrightarrow \quad (31)$$

أي أنه يمكن التعبير عن معامل الارتباط بأحد الصور الثلاث السابقة (29) أو (30) أو (31).

ويمكن هنا أن نسترجع بسرعة مع الطالب بعض خواص معامل الارتباط التي سبق له معرفتها من دراسته لمبادىء الإحصاء.

بعض خواص معامل الارتباط

١ - معامل الارتباط بين Y ، X هو نفسه بين Y ، X. أي أن:

$$\boxed{\rho_{X.Y} = \rho_{Y.X}}$$

٢ - معامل الارتباط لا يتأثر بجمع مقدار ثابت أو طرحه لأي من المتغيرين. فإذا فرضنا أن b،a ثابتان فإن:

$$\boxed{\rho_{X\pm a.\,Y\pm b} = \rho_{X.Y}}$$

٣ - معامل الارتباط لا يتأثر بالضرب أو القسمة. أي أن:

$$\boxed{\rho_{aX.\,bY} = \rho_{X.Y}}$$

٤ ـ الارتباط بين المتغير مع نفسه يساوي الواحد الصحيح . أي أن :

$$\rho_{X.X} = 1$$

٥ ـ تتراوح قيمة معامل الارتباط بين - ١ ، + ١ . أي أن :

$$-1 \le \rho_{X.Y} \le +1$$

٦ ـ إذا كان X ، Y مستقلين فإن $Cov(X,Y) = 0$ ، وهذا يعني أن قيمة معامل الارتباط تساوي صفرًا. ولكن العكس غير صحيح . بمعنى أنه إذا كان معامل الارتباط يساوي صفرًا فإن هذا لا يعتبر شرطًا كافيًا للاستقلال .

٧ ـ التغاير

كما ذكرنا في البند السابق فإن البسط الموجود في الصورة الأولى لمعامل الارتباط (رقم 29) يسمى التغاير Covariance.

أي أن تغاير المتغيرين X ، Y يعرّف كما يلي:

$$Cov(X, Y) = E\left\{\left[X - E(X)\right]\left[Y - E(Y)\right]\right\} \longrightarrow (32)$$

أي أن تغاير المتغيرين هو عبارة عن توقع حاصل ضرب انحرافي المتغيرين عن مركزيهما (أو متوسطهما) . حيث إن:

$$E(X) = \mu_X , E(Y) = \mu_Y$$

فالمعادلة رقم (32) تعطي تعريف التغاير أوالصورة الأولى للتغاير.

ومن المعادلة رقم (30) لمعامل الارتباط يمكن أن نتوصل إلى صورة ثانية للتغاير كما يلي:

$$Cov(X, Y) = \rho_{X.Y} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \longrightarrow (33)$$

أي أن التغاير ماهو إلا حاصل ضرب الانحرافات المعيارية في معامل الارتباط.

ذكرنا أيضًا في البند السابق عند الحديث عن معامل الارتباط أن التغاير يمكن أن يكتب بصورة مبسطة جدًا. وهي في الواقع التي تستخدم غالبًا في حساب التغاير بدلالة التوقع.

أي أن الصورة التالية تعتبر أبسط صورة للتغاير. وهي تقول إن:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \longrightarrow (34)$$

والصورة السابقة هي الصورة الثالثة للتغاير، وقد ذكرنا البرهان بالتفصيل في البند السابق عند اشتقاق المعادلة رقم (31) التي سميناها الصورة الثالثة لمعامل الارتباط.

والصورة الثالثة للتغاير (المعادلة رقم 34) تقول: إن التغاير لمتغيرين Y.X يساوي توقع حاصل ضربهما مطروحًا منه حاصل ضرب توقع كل منهما.

بعض خواص دليل التغاير

١ ـ التغاير بين Y.X هو نفسه بين X.Y.   أي أن:

$$\boxed{Cov\,(X\,,Y) = Cov\,(Y\,,X)} \quad \longrightarrow \quad (35)$$

٢ - إذا وضعنا X = Y فإن التغاير بين المتغير ونفسه ماهو إلا التباين للمتغير.

أي أن :

$$\boxed{Cov\,(X\,,X) = Var\,(X)} \quad \longrightarrow \quad (36)$$

البرهـــان :

يمكن برهنة ذلك بالتعويض في أي شكل أو صورة من صور التغاير الثلاث السابقة بوضع X بدلاً من Y (أو Y بدلاً من X) .

باستخدام الصورة الثانية :

$$\begin{aligned} Cov\,(X\,.\,X) &= \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \rho_{X.Y} \\ &= \sigma_X^2 \,.\, 1 \\ &= \sigma_X^2 = Var\,(X) \end{aligned}$$

أو باستخدام الصورة الثالثة :

$$\begin{aligned} Cov\,(X\,.\,X) &= E\,(X\,X) - E\,(X)\,E\,(X) \\ &= E\,(X^2) - \left\{E\,(X)\right\}^2 \\ &= Var\,(X). \end{aligned}$$

٣ - التغاير بين متغير ومقدار ثابت يساوي صفرًا . فإذا كان a مقدارًا ثابتًا فإن :

$$\boxed{Cov\,(X\,,a) = 0} \quad \longrightarrow \quad (37)$$

البرهـــان :

باستخدام الصورة الثالثة :

$$\begin{aligned} Cov\,(X\,,a) &= E\,(X\,a) - E\,(X)\,E\,(a) \\ &= a\,E\,(X) - a\,E\,(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

٤ - إذا كان b , a ثابتين فإن :

$$\boxed{Cov\,(aX\,,bY) = ab.\,Cov\,(X\,,Y)} \quad \longrightarrow \quad (38)$$

البرهـــان :

نعوض في أي شكل من أشكال التغاير الثلاثة عن X بالقيمة aX وعن Y بالقيمة bY . فإذا استخدمنا الصورة الثالثة مثلاً فإن :

$$\begin{aligned} Cov\,(aX\,.\,bY) &= E\,(aX\,.\,bY) - E\,(aX).\,E\,(bY) \\ &= abE\,(X\,Y) - aE\,(X).\,bE\,(Y) \\ &= abE\,(X\,Y) - abE\,(X).\,E\,(Y) \\ &= ab\left\{E\,(X\,Y) - E\,(X).\,E\,(Y)\right\} \\ &= ab.\,Cov\,(X\,,Y). \end{aligned}$$

٥ - إذا كانت $Y\,.\,X_2\,.\,X_1$ متغيرات عشوائية فإن :

$$\boxed{Cov\,(X_1 + X_2\,,Y) = Cov\,(X_1\,,Y) + Cov\,(X_2\,,Y)} \quad \longrightarrow \quad (39)$$

البرهـــان :

باستخدام الصورة الثالثة وبالتعويض عن $X = X_1 + X_2$ فإن :

$$\begin{aligned}
Cov(X_1 + X_2, Y) &= E\left[(X_1 + X_2)\,Y\right] - E(X_1 + X_2).\,E(Y) \\
&= E(X_1 Y + X_2 Y) - \left[E(X_1) + E(X_2)\right] E(Y) \\
&= E(X_1 Y) + E(X_2 Y) - E(X_1)\,E(Y) - E(X_2)\,E(Y) \\
&= \left[E(X_1 Y) - E(X_1)\,E(Y)\right] + \left[E(X_2 Y) - E(X_2)\,E(Y)\right] \\
&= Cov(X_1 , Y) + Cov(X_2 . Y)
\end{aligned}$$

وعمومًا فإن القاعدة السابقة ذات الرقم (39) يمكن أن تكتب في صورتها العامة كما يلي :

$$\boxed{Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i . \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov(X_i . y_j)} \longrightarrow (40)$$

أي أن المعادلة رقم (40) ماهي إلا الحالة العامة للمعادلة (39) عندما يكون لدينا مجموع متغيرات عددها n هو

$$X_1 + X_2 + .. + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ومجموع متغيرات أخرى عددها m هو

$$Y_1 + Y_2 + .. + Y_m = \sum_{j=1}^{m} Y_j$$

ويكون المطلوب هو التغاير بين هذا المجموع وذاك .

<u>فمثلاً</u> : إذا كان المطلوب هو

$$Cov(X_1 + X_2 + X_3 , Y_1 + Y_2)$$

فإن هذا التغاير يكتب بالتفصيل حسب المعادلة (40) كما يلي :

$$\begin{aligned}
&Cov(X_1 + X_2 + X_3 . Y_1 + Y_2) \\
&= Cov(X_1 . Y_1) + Cov(X_1 . Y_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ Cov(X_2 , Y_1) + Cov(X_2 , Y_2) \\
&+ Cov(X_3 , Y_1) + Cov(X_3 , Y_2).
\end{aligned}$$

وهكذا . . فإنه يمكن كتابتها بالتفصيل . كما يمكن كتابتها باختصار كما يلي :

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{3} X_i , \sum_{j=1}^{2} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} Cov(X_i , y_j)$$

٦ ـ لأي متغيرين X_1 , X_2 فإن :

$$\boxed{Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(x_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)} \longrightarrow (41)$$

وهذه القاعدة مهمة جدًا حيث إنها تعطي تباين مجموع متغيرين وعلاقته بتباين كل متغير على حدة والتغاير بينهما.

وهذه القاعدة تقول إن تباين مجموع متغيرين يساوي تباين المتغير الأول + تباين المتغير الثاني + ضعف التغاير بينهما.

البرهـــان :

باستخدام المعادلة رقم (11) الخاصة بالتباين فإن :

$$\begin{aligned}
Var(X_1 + X_2) &= E(X_1 + X_2)^2 - \left[E(X_1 + X_2)\right]^2 \\
&= E(X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2) - \left[E(X_1) + E(X_2)\right]^2 \\
&= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2\,E(X_1 X_2) - \left[E(X_1) + E(X_2)\right]^2 \\
&= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2\,E(X_1 X_2 - \left[E(X_1)\right]^2 \\
&\quad - \left[E(X_2)\right]^2 - 2\,E(X_1)\,E(X_2) \\
&= E(X_1^2) - \left[E(X_1)\right]^2 + E(X_2^2) - \left[E(X_2)\right]^2 \\
&\quad + 2\left[E(X_1 X_2) - E(X_1)\,E(X_2)\right] \\
&= Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1 . X_2)
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. (وسوف نذكر الحالة العامة لهذه النظرية في بند لاحق).

وهذه القاعدة يمكن أن تكتب بشكل آخر كما يلي:

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Var}(X_1 + X_2) - \mathrm{Var}(X_1) - \mathrm{Var}(X_2)\Big] \longrightarrow \quad (42)$$

٧ ـ لأي متغيرين X_1 , X_2 فإن تباين حاصل الطرح هو:

$$\mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) - 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \longrightarrow \quad (43)$$

أي أن تباين حاصل الطرح يساوي مجموع التباين لكل من المتغيرين على حدة مطروحًا من هذا المجموع ضعف التغاير. ويمكن برهان هذه القاعدة بالطريقة السابقة نفسها.

والمعادلة رقم (43) يمكن أن تكتب بشكل آخر كما يلي:

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) - \mathrm{Var}(X_1 - X_2)\Big] \longrightarrow \quad (44)$$

٨ ـ إذا كان X_1 , X_2 متغيرين مستقلين فإن التغاير بينهما يساوي صفرًا.

أي أن:

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0 \longrightarrow \quad (45)$$

البرهـان:

$$\because \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1).E(X_2)$$

وحيث إن المتغيرين مستقلان، وباستخدام المعادلة (20) فإن:

$$E(X_1 X_2) = E(X_1).E(X_2)$$

$$\therefore \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1).E(X_2) - E(X_1).E(X_2)$$
$$= 0$$

نتيجة مهمة جدًا:

في حالة استقلال المتغيرين فإن التغاير بينهما يساوي صفرًا، وفي هذه الحالة فإنه يمكن كتابة المعادلتين (41)، (43) بالشكل التالي:

$$\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) \\ \hline \mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) \\ \hline \end{array} \longrightarrow \quad (45)$$

أي أنه في حالة استقلال المتغيرين فإن تباين المجموع يساوي تباين حاصل الطرح يساوي تباين المتغير الأول + تباين المتغير الثاني.

أي أن النتيجة باختصار هي:

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) \longrightarrow \quad (45)$$

في حالة الاستقلال.

مثال (٤)

الجدول التالي يبين قيم المتغيرين X ، Y بالاحتمالات المقابلة:

x \ y	1	2	Sum
1	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{6}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
Sum	$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{12}$	1

احسب:

أ) $Var(X), E(X)$ ب) $Var(Y), E(Y)$

جـ) $E(X+Y)$ د) $E(XY)$

هـ) $Cov(3X,2Y), Cov(X,Y)$ و) $Var(X-Y), Var(X+Y)$

ز) $\rho_{x,y}$.

الحـل:

أ) نكوّن أولاً جدولاً للمتغير X نحسب منه التوقع والتباين. حيث نأخذ قيم X مع مجموع الاحتمالات (الهامشية) في العمود الأخير:

x	$f_1(x)$	$x.f_1(x)$	$x^2 f_1(x)$
1	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{20}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$
	1	$\frac{19}{12}$	$\frac{35}{12}$

$$E(X) = \sum x f_1(x) = \frac{19}{12}$$

$$E(X^2) = \sum x^2 f_1(x) = \frac{35}{12}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{35}{12} - \left(\frac{19}{12}\right)^2$$

$$= \frac{59}{144} = 0.4097$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.4097} = 0.64$$

ب) نكوّن جدولاً للمتغير Y نحسب منه التوقع والتباين. وذلك بأخذ قيم Y مع مجموع الاحتمالات (الهامشية) في الصف الأخير:

y	$f_2(y)$	$y f_2(y)$	$y^2 f_2(y)$
1	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$
2	$\frac{8}{12}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{32}{12}$
	1	$\frac{20}{12}$	$\frac{36}{12}$

$$E(Y) = \sum y f_2(y) = \frac{20}{12}$$

$$E(Y^2) = \sum y^2 f_2(y) = \frac{36}{12}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - \left[E(Y)\right]^2$$

$$= \frac{36}{12} - \left(\frac{20}{12}\right)^2 = \frac{32}{144} = 0.2222$$

$$\sigma_Y = \sqrt{0.2222} = 0.471$$

جـ)

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X+Y) = \frac{19}{12} + \frac{20}{12}$$

$$= \frac{39}{12}$$

د) لحساب $E(XY)$ نكوّن جدولاً لحاصل ضرب xy الممكنة بالاحتمالات المختلفة. وذلك كما يلي:

(حاصل الضرب) x y	(الاحتمال المشترك) f(x,y)	(xy) f(x,y)
1	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{10}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
4	$\frac{4}{12}$	$\frac{16}{12}$
6	0	0
	1	$\frac{31}{12}$

$$E(XY) = \sum . \sum XY f(x_i y)$$
$$= \frac{31}{12}$$

ولشرح الجدول السابق نقول: إن حاصل الضرب يساوي 1 إذا كان $x = 1$ ، $y = 1$ ، وهذا باحتمال = $\frac{2}{12}$ (من الجدول الأصلي للمثال).

وحاصل الضرب قد يساوي 2 وهذا يحدث إذا كان $x = 1$ ، $y = 2$ ، وهذا باحتمال $\frac{4}{12}$ ، أو $x = 2$ ، $y = 1$ ، وهذا باحتمال $\frac{1}{12}$ ، وبالتالي نجمع هذين الاحتمالين. أي أن احتمال كون حاصل الضرب $x y = 2$ هذا الاحتمال يساوي $\frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ وهكذا.. بالطريقة نفسها مع باقي القيم.

هـ) لحساب (X , Y) ، Cov ، $Cov(3X , 2Y)$ نطبق القواعد المعروفة :

$$\because \; Cov(X , Y) = E(XY) - E(X) . E(Y)$$
$$= \frac{31}{12} - \frac{19}{12} \times \frac{20}{12}$$
$$= \frac{31}{12} - \frac{380}{144}$$
$$= \frac{372 - 380}{144}$$
$$= -0.0556$$

لاحظ أن إشارة التغاير بالسالب، ومن هذا نستنتج مباشرة أن إشارة معامل الارتباط ستكون هي أيضًا بالسالب (أي أن الارتباط عكسي).

$$\because \; Cov(3X , 2Y) = 6\, Cov(X , Y)$$
$$= 6(-0.0556)$$
$$= -0.3336$$

و) ولحساب تباين المجموع والطرح نطبق القاعدة كما يلي:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\, Cov(X , Y)$$
$$= 0.4097 + 0.2222 + 2(-0.0556)$$
$$= 0.6319 - 0.1112$$
$$= 0.5207$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\, Cov(X , Y)$$
$$= 0.4097 + 0.2222 - 2(-0.556)$$
$$= 0.6319 + 0.1112$$
$$= 0.7431$$

ز) ولحساب معامل الارتباط نطبق المعادلة التالية:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X , Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$= \frac{-0.0556}{(0.64)\,(0.471)}$$

$$= \frac{-0.0556}{0.30144}$$

$$= -0.184$$

وهـو ارتبـاط عكسي ضعيف وواضح أن إشارة معامل الارتباط بالسـالب مثل إشارة التغاير (وذلك لأن المقام ـ وهو الانحرافات المعيارية ـ لا يمكن أن يكون بالسـالب إذ إن أقل قيمة للتباين أو الانحراف المعياري هي الصفر، وذلك عندما تتساوى جميع القيم، أي لا يوجد تشتت أو تباين أو اختلاف بينها).

مثـال (٥)

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين Y ، X هي :

$$f(x,y) = \frac{1}{39}\;(6 + x - y)$$

حيث $0 \leq X \leq 3 \; ; \; 0 \leq Y \leq 2$

احسب :

أ) $E(X) \; ; \; Var(X)$ ب) $E(Y) \; ; \; Var(Y)$

جـ) $Cov(X , Y)$ د) $\rho_{X,Y}$

الحـل:

أ) للحصـول على $E(X)$ ، $Var(X)$ نحصـل أولاً على دالـة كثافة الاحتما
الهامشي للمتغير X كما يلي:

$$f_1(x) = \int_0^2 f(x , y)\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{39}(6 + x - y)\, dy$$

$$= \frac{1}{39}\left(6y + xy - \frac{y^2}{2}\right)_0^2$$

$$= \frac{1}{39}(12 + 2x - 2)$$

$$= \frac{1}{39}(10 + 2x)$$

$$E(X) = \int_0^3 x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{39}(10x + 2x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{39}\left(\frac{10}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)_0^3$$

$$= \frac{1}{39}(45 + 18)$$

$$= \frac{63}{39} = 1.615$$

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{39}(10x^2 + 2x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{39}\left(\frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{4}x^4\right)_0^3$$

$$= \frac{1}{39}\left(90 + \frac{81}{2}\right)$$

$$= \frac{261}{78} = 3.346$$

$$Var(x) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= 3.346 - (1.615)^2$$

$$= 3.346 - 2.608$$
$$= 0.738$$
$$\sigma_X = \sqrt{0.738} = 0.859$$

ب) وللحصول على $E(Y)$ ، $Var(Y)$ نحصل أولاً على دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Y وهي $f_2(y)$ كما يلي :

$$f_2(y) = \int_0^3 f(x\,y)\,dx$$
$$= \int_0^3 \frac{1}{39}\,(6 + x - y)\,dx$$
$$= \frac{1}{39}\,\left(6x + \frac{x^2}{2} - x\,y\right)_0^3$$
$$= \frac{1}{39}\,\left(\frac{45 - 6y}{2}\right)$$
$$E(Y) = \int_0^2 y\,f_2(y)\,dy$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{78}\,(45\,y - 6\,y^2)\,dy$$
$$= \frac{1}{78}\,\left(\frac{45}{2}y^2 - \frac{6}{3}y^3\right)_0^2$$
$$= \frac{1}{78}\,(90 - 16)$$
$$= \frac{74}{78} = 0.9487$$
$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2\,f_2(y)\,dy$$
$$= \frac{1}{78}\int_0^2 (45\,y^2 - 6\,y^3)\,dy$$
$$= \frac{1}{78}\,\left(\frac{45}{3}y^3 - \frac{6}{4}y^4\right)_0^2$$
$$= \frac{1}{78}\,(120 - 24)$$

$$E(Y^2) = \frac{96}{78} = 1.2307$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2$$
$$= 1.2307 - (0.9487)^2$$
$$= 1.2307 - 0.9000$$
$$= 0.3307$$
$$\sigma_Y = \sqrt{0.3307} = 0.575$$

جـ) حساب $Cov(X, Y)$:

نستخدم القاعدة التالية :

$$Cov(X, Y) = E(X\,Y) - E(X)\,.\,E(Y)$$

وبالتالي فإنه يجب حساب $E(X\,Y)$ كما يلي :

$$E(X\,Y) = \int_0^3\int_0^2 x\,y\,f(x, y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^3\int_0^2 \frac{xy}{39}\,(6 + x - y)\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{39}\int_0^3\int_0^2 (6\,x\,y + x^2y - x\,y^2)\,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{39}\int_0^3 \left(3\,x\,y^2 + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x}{3}\,y^3\right)_0^2 dx$$
$$= \frac{1}{39}\int_0^3 \left(12\,x + 2\,x^2 - \frac{8}{3}x\right)dx$$
$$= \frac{1}{39}\,\left(6\,x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{6}x^2\right)_0^3$$
$$= \frac{1}{39}\,(54 + 18 - 12)$$
$$= \frac{60}{39} = 1.53846$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$$
$$= 1.53846 - (1.615)(0.9487)$$
$$= 1.53846 - 1.53215$$
$$= 0.00631$$

د) حساب معامل الارتباط $\rho_{X.Y}$:

$$\rho_{X.Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$
$$\rho_{X.Y} = \frac{(0.00631)}{(0.859)(0.575)}$$
$$= \frac{0.00631}{0.49392}$$
$$= 0.01277$$

وهو ارتباط طردي ضعيف

٨٠ ـ تباين مجموع أي عدد من الحدود (تباين دالة خطية في المتغيرات)

النظرية التي يتناولها هذا البند مهمة جدًا والنتائج المترتبة عليها مهمة جدًا أيضا. فهذه النظرية تعطي تباين مجموع أي عدد من الحدود، أي في الحالة العامة. أو بمعنى آخر فهي تعطي تباين أي دالة خطية في المتغيرات. فهي الحالة العامة للمعادلتين (41) ، (43).

والنظرية تقول:

إذا كان X_i (حيث $i = 1.2 .. n$) هي n من المتغيرات العشوائية وكانت توقعات هذه المتغيرات وتبايناتها معروفة وتأخذ الشكل:

$$E(X_i) = Z_i$$
$$Var(X_i) = \sigma_i^2 = E\left\{X_i - Z_i\right\}^2$$

وإذا فرضنا أن Y دالة خطية في المتغيرات X_i حيث

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i} \qquad = a_1 X_1 + a_2 X_2 + .. + a_n X_n$$

حيث a_i ثوابت. فإن تباين Y (أي تباين هذه الدالة الخطية) يأخذ الشكل:

$$\boxed{\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \longrightarrow (46)$$

ويمكن أن تكتب بالشكل:

$$\boxed{\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(a_i X_i, a_j X_j)} \longrightarrow (47)$$

البرهـان:

$$\because \quad \sigma_Y^2 = E\left[Y - E(Y)\right]^2$$

حيث إن:

$$Y = \sum_{i+1}^{n} a_i X_i$$
$$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i+1}^{n} a_i Z_i$$
$$\therefore \quad \sigma_Y^2 = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i Z_i\right]^2$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - Z_i)\right]^2$$

$$\sigma_r^2 = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 E(X_i - Z_i)^2\right] + 2E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j (x_i - Z_i)(x_j - Z_j)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E(X_i - Z_i)^2 + 2\sum\sum a_i a_j\, E\left[(x_i - Z_i)(x_j - Z_j)\right]$$

وحيث إن :

$$E(X_i - Z_i)^2 = \sigma_i^2$$

$$E\left[X_i - E(X_i)\right]\left[X_j - E(X_j)\right] = Cov(X_i, X_j) = \sigma_i \sigma_j \varrho_{ij};$$

$$\therefore\ E(X_i - Z_i)(X_j - Z_j) = Cov(X_i, X_j) = \sigma_i \sigma_j \varrho_{ij}$$

وبالتعويض نحصل على :

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \sigma_i \sigma_j \varrho_{ij}$$

وهو المطلوب .

فمثلاً : إذا كانت $Y = X_1 + X_2 + X_3$ فإن : (حيث $a_1 = a_2 = a_3 = 1$)

$$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \varrho_{1,2} + 2\sigma_1 \sigma_3 \varrho_{1,3} + 2\sigma_2 \sigma_3 \varrho_{2,3}$$

أو تكتب بالشكل :

$$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\,Cov(X_1, X_2) + 2\,Cov(X_1, X_3) + (X_2, X_3)$$

ويمكن التركيز من هذه النظرية على بعض الحالات الخاصة التالية :

(١) إذا كان : $Y = X_1 + X_2$

أي أن $a_1 = a_2 = 1$ فإن :

$$E(Y) = Z_1 + Z_2$$

$$, \sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \varrho_{1,2}$$

or $$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)$$

$$\therefore\ Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)$$

لأن $\left[Cov(X_1, X_2) = \sigma_1 \sigma_2 \varrho_{1,2}\right]$

ولقد حصلنا على النتيجة نفسها سابقاً (المعادلة 41) .

(٢) إذا كان : $Y = X_1 - X_2$

أي أن $a_1 = 1, a_2 = -1$ فإن :

$$E(Y) = Z_1 - Z_2$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \varrho_{12}$$

or $$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2\,Cov(X_1, X_2)$$

$$\therefore\ Var(X_1 - X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) - 2\,Cov(X_1, X_2)$$

ولقد حصلنا على النتيجة نفسها سابقًا (المعادلة 43)

(٣) إذا كان المتغيران X_1 ، X_2 مستقلين فإن التغاير يساوي صفرًا ،

وفي هذه الحالة فإن تباين المجموع يساوي تباين الفرق يساوي مجموع التباينات .

أي أن :

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1 - X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$$

ولقد حصلنا على النتيجة نفسها سابقًا (المعادلة 45) .

(٤) يمكن استنتاج توقع الوسط الحسابي وتباينه في الحالة العامة ،

فإذا كان :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

أي أن $a_i = \frac{1}{n}$ فإن :

$$\boxed{E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = Z} \longrightarrow (48)$$

أي أن توقع الوسط يساوي متوسط المتوسطات.

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}}^2 = Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \longrightarrow \quad (49)$$

وهو تباين الوسط الحسابي في الحالة العامة.

(ه) إذا كانت المتغيرات X_i مستقلة ولها التوزيع نفسه

أي أن:

$$E(X_1) = E(X_2) = \ldots\ldots = E(X_n) = Z$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots\ldots = \sigma_n = \sigma \text{ ؛}$$

فإن توقع الوسط الحسابي وتباينه في حالة المتغيرات المستقلة التي لها التوزيع نفسه (أي التوقع والتباين) هو:

$$\boxed{E(\bar{X}) = Z} \longrightarrow \quad (50)$$

أي أن توقع الوسط الحسابي للعينة يساوي متوسط المجتمع.

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}}^2 = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}} \longrightarrow \quad (51)$$

وتباين الوسط الحسابي للعينة يساوي تباين المجتمع مقسومًا على حجم العينة. ومنها الخطأ المعياري للوسط هو $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(وهذه النتيجة مهمة جدًا في توزيعات المعاينة والتقدير واختبارات الفروض).

متباينة تشيبيتشيف

نفرض أن X متغير عشوائي توقعه μ وانحرافه المعياري σ.

إذا لكل $\epsilon > 0$

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

(قانون الأعداد الكبيرة)

نفرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة وأن لها نفس التوزيع وأن توقعها μ وتباينها σ^2

نفرض أن

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$ وهي تسمى بمتوسط العينة

إذن لأي $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| \geq \epsilon) = 0$$

أو بطريقة مكافئة

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| < \epsilon) = 1$$

أي أن $\bar{X} \to \mu$ عندما $n \to \infty$

بما أن $E\bar{X} = \mu$ ، $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

وباستخدام متباينة تشيبيتشيف

$$P(|\bar{X}-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

الطرف الأيمن يؤول إلى 0 عندما تؤول n إلى ما لا نهاية.

تمارين الفصل الثالث

(١) إذا رمينا حجري نرد مرة واحدة. ورمزنا لمجموع النقط على الوجهين العلويين بالرمز X فاحسب:

أ) $E(X)$ ، $E(10X+4)$

ب) $Var(X)$ ، $Var(\frac{X}{10})$

(٢) أثبت أن: $Var(a X \pm b) = a^2 . Var(X)$

إذا كان a ، b ثابتين.

(٣) أثبت أن: $Cov(X_1 + X_2 , Y_1 + Y_2) = Cov(X_1 , Y_1)$

$+ Cov(X_1 , Y_2) + Cov(X_2 , Y_1) + Cov(X_2 , Y_2)$.

(٤) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً في المدى $0 \leq X \leq 3$ وكانت دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = k(x^2 + x + 2)$$

فأوجد قيمة الثابت k ثم احسب:

أ) $E(\frac{X-2}{3})^2$ ، ب) $Var(2X + 5)$

(٥) الجدول التالي يبين قيم X ، Y بالاحتمالات المقابلة.

x \ y	1	2	3	4	Sum
0	0.1	0	0.2	0.1	0.4
2	0	0.2	0.1	0.1	0.4
5	0.1	0.1	0	0	0.2
Sum	0.2	0.3	0.3	0.2	1

احسب:

أ) $Cov(\frac{1}{2}X , 6Y)$ ، ب) $E(Y/X) , E(X/Y)$

جـ) $Var(2X - Y)$ ، د) $\rho_{X,Y}$

(٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً في المدى $-a \leq X \leq a$ وكانت دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{2a}$$

فأوجد:

أ) $E(3X - 4)$ ، ب) $Var(3X + 5)$

(٧) إذا كانت دالة كثافة احتمال المتغير X هي:

$$f(x) = k(1 - x)$$

حيث $0 \leq X \leq 1$ فأثبت أن:

$$Var(x) = \frac{1}{18}$$

(٨) إذا كانت دالة التوزيع للمتغير X هي:

$$F(x) = k x$$

حيث $0 \leq X \leq 1$ فأوجد:

$E(X)$ ، $Var(X)$

(٩) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X ، Y هي:

$$f(x, y) = k(x + y + 2)$$

حيث: $0 \leq X \leq 2$ ، $1 \leq Y \leq 4$

فاحسب:

أ) $E(X)$ ، $Var(X)$ ب) $E(X)$ ، $Var(Y)$

جـ) $E(XY)$ ، $Cov(X, Y)$ د) $\rho_{X,Y}$ ، $\rho_{2X,3Y}$

(١٠) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X ، Y هي:

$$f(x, y) = k x y$$

حيث: $0 \leq X \leq 1$ ، $0 \leq Y \leq 1$ فاحسب:

أ) $E(2X + 3Y)$ ، ب) $Cov(X, Y)$

جـ) $Var(2X + 3Y)$ ، د) $Var(2X - 3Y)$

(١١) إذا كان:

$E(X) = a$ ؛ $E(X^2) = a^2 + \sigma^2$

وكانت: $Y = \frac{X - a}{\sigma}$

فأوجـد :

أ) $E(\frac{Y-2}{3})^2$ ، ب) $Var(3Y-2)$

ص ١٠٥

(١٢) في التمرين رقم (٩) من تمارين الفصل الثاني احسب:

أ) $E(X)$ ، ب) $E(3X+4Y)$

جـ) $Cov(2X, 4Y)$ ، د) $\rho_{2X+3, 4Y+5}$

(١٣) إذا كانت دالة كثافة احتمال المتغير X هي :

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث : $P + q = 1 ، X = 0, 1, 2, \ldots, n$

فاحسب :

أ) $E(\frac{X}{n})$ ، $E(X)$

ب) $Var(\frac{X}{n})$ ، $Var(X)$

(١٤) إذا كان X متغيراً عشوائيًا وكانت :

$$f(x) = k \frac{\mu^x}{x!}$$

حيث $X = 0, 1, 2, \ldots$

فاوجد قيمة k التي تجعل f(x) دالة احتمال ثم احسب :

أ) $E(2X+3)$ ، ب) $Var(\frac{3X-4}{5})$

(١٥) الجدول التالي يمثل قيم المتغيرين Y ، X والاحتمالات المقابلة :

x \ y	0	1	2	Sum
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{6}{12}$
4	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{6}{12}$
Sum	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	1

احسـب :

أ) $E(X+Y)^2$ ، ب) $Cov(\frac{1}{2}X, 4Y)$

جـ) $Var(2X+Y)$ ، د) $E(X/Y)$

(١٦) إذا كانت دالة كثافة احتمال المتغير X هي :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1}$$

حيث $0 \leq X \leq \infty$ فاثبت أن :

$$E(X) = Var(X)$$

إذا علمت أن :

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n)$$

؛ $\Gamma(n) = (n-1)!$

الفصل الرابع

التوزيعات الاحتمالية

Statistical Distributions

● مقدمة ● توزيع ذي الحدين ● توزيع ذي الحدين السالب ● توزيع بواسون ● التوزيع الهيبرجيوتدك (التوافقي) ● التوزيع المنتظم (المستطيل) ● توزيع لابلاس (الأسي) ● توزيع جاما ● توزيع بيتا ● التوزيع الطبيعي.

١ • مقدمة

التوزيعات الاحتمالية أو الإحصائية ماهي إلا دوال الاحتمال (أو دوال كثافات الاحتمال) التي لها صورة عامة معروفة، والتي يمكن تطبيقها في مجالات مختلفة إذا ما تحققت شروط الدالة.

وتوجد عشرات التوزيعات، بعضها مهم، وبعضها أقل أهمية سواء من الناحية النظرية أو من الناحية التطبيقية.

ولسنا هنا بصدد دراسة تطبيقية لهذه التوزيعات على اختلافها. بل سنتناول بعض التوزيعات المهمة (أي التي لها أهمية كبيرة في النظرية والتطبيق) من حيث: ماهي

شروط التوزيع؟ وماهي الصورة العامة له؟ كيفية اشتقاقه، عزومه والدوال المولدة للعزوم، والمميزة، والتراكمية، وبعض النظريات التي تتعلق بالتوزيع، وتخدم أغراض هذا المقرر.

وتقسم التوزيعات إلى مجموعتين أساسيتين:

الأولى: هي التوزيعات المتقطعة (أو غير المتصلة).

والثانية: هي التوزيعات المتصلة (أو المستمرة).

والمعيار الذي يتم على أساسه معرفة ما إذا كان التوزيع متقطعًا أو متصلاً هو المتغير العشوائي محل الدراسة. فإذا كان المتغير العشوائي متقطعًا كان التوزيع متقطعًا، وإذا كان المتغير متصلاً كان التوزيع متصلاً، وسيتم التركيز في هذا الفصل على التوزيعات المتقطعة (غير المتصلة) التالية:

١ - توزيع ذي الحدين.

٢ - توزيع ذي الحدين السالب.

٣ - توزيع بواسون.

٤ - التوزيع الهيبرجيومترك (أو التوزيع التوافقي).

وعلى التوزيعات المتصلة التالية:

١ - التوزيع المنتظم (أو المستطيل).

٢ - التوزيع الأسي (توزيع لا بلاس).

٣ - توزيع جاما.

٤ - توزيع بيتا.

٥ - التوزيع الطبيعي.

٦ - توزيع مربع كاي

ثم نعرض نظريتين مهمتين، هما نظرية الأعداد الكبيرة ونظرية النزعة المركزية.

أما توزيعات F, t, X^2 فسوف يتم دراستها - بمشيئة الله - بعد دراسة التحويل بين المتغيرات

٢ . ٢ - توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

يعتبر توزيع ذي الحدين أحد التوزيعات المتقطعة المهمة . وقد سبق للطالب دراسة التوزيع، ومعرفة شروطه، والصورة العامة له، وكيفية استخدامها في حساب الاحتمالات .

وقد يكون من المفيد مراجعة هذه الأشياء بسرعة لتذكير الطالب، ولاستكمال دراسة التوزيع .

كما هو معروف فإن توزيع ذي الحدين يستخدم في التجارب العشوائية التي ينتج عنها إحدى نتيجتين: اسم الأولى - وهي المطلوبة - «نجاح»، والأخرى غير المطلوبة اسمها «فشل» .

فإذا كنا بصدد رمي قطعة نقود، وكنا نبحث عن الصورة فإن النجاح في هذه التجربة هو الحصول على الصورة، بينما الفشل هو عدم الحصول على الصورة، أي الحصول على الكتابة .

وإذا كنا بصدد اختيار عينة عشوائية من إنتاج أحد المصانع، وكنا نبحث عن الإنتاج المعيب، فإن النجاح هو الحصول على وحدة معيبة . بينما الفشل هو الحصول على وحدة غير معيبة، أي سليمة . وهكذا .

وكما هو معروف - أيضًا - فإن توزيع ذي الحدين . سمي بهذا الأسم لأن الصورة العامة للتوزيع (أو لدالة الاحتمال) تأخذ شكل «الحد العام» في مفكوك ذات الحدين binomial expansion .

ويعرف الطالب كذلك ماهي شروط توزيع ذي الحدين التي سنذكرها فيما يلي مع ملاحظة أن الشرطين الأول والثاني هما الشرطان الأساسيان بينما الشرطان الثالث والرابع شرطان مكملان، أو يمكن عدهما شرطين بديهيين .

١ - شروط التوزيع

أ) عدد مرات إجراء التجربة (أو عدد المحاولات) التي سنرمز لها بالرمز n كلها مستقلة .

ب) احتمال النجاح الذي نرمز له بالرمز p (وكذلك احتمال الفشل q أو $1-p$) ثابت من محاولة لأخرى .

جـ) مجموع احتمالي النجاح والفشل يساوي واحدًا صحيحًا أي أن :

$$p + q = 1$$

د) عدد مرات النجاح الذي نرمز له بالرمز X (وهو المتغير المتقطع) يتراوح بين الصفر (أي لا يوجد نجاح أي المحاولات كلها فشل)، n (أي المحاولات كلها نجاح) أي أن مدى المتغير X هو:

$$X = 0 , 1 , \dots , n$$

٢ - الصورة العامة للتوزيع

سنحاول هنا أن نصل معًا إلى الصورة العامة لتوزيع ذي الحدين بالتدريج :

إذا فرضنا أن عدد المحاولات هو $n = 2$:

وكان المطلوب هو النجاح مرة واحدة، والفشل مرة واحدة فإن هذا يحدث بالشكل التالي:

إما أن تكون: المحاولة الأولى هي النجاح والثانية هي الفشل .

وإما أن تكون: المحاولة الأولى هي الفشل والثانية هي النجاح .

وترجمة هذا بالاحتمالات هو:

$$Pr\,(X = 1) = p \, . \, q + q \, . \, p$$

$$\therefore Pr\,(X = 1) = 2\, p^1 \, . \, q^1$$

أي نجاح واحد وفشل واحد وهذا يتم بطرق عددها 2 أو $\binom{2}{1}$ أي أنه يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$f(1) = Pr\,(X = 1) = \binom{2}{1} p^1 q^1$$

وإذا فرضنا أن عدد المحاولات هو $n = 3$:

وكان المطلوب النجاح مرتين، والفشل مرة واحدة فإن هذا يحدث بالشكل التالي:

إما أن تكون: الأولى نجاحًا والثانية نجاحًا والثالثة فشلاً. p, p, q

وإما أن تكون: نجاحًا، فشلاً، نجاحًا. p, q, p

وإما أن تكون: فشلاً، نجاحًا، نجاحًا. q, p, p

وترجمة هذا بالاحتمالات هو:

$$Pr(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 q^1$$

أي نجاحين وفشل واحد، وهذا يتم بطرق عددها 3 أو $\binom{3}{2}$ أي أنه يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$f(2) = Pr(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 q^1$$

وهكذا.. فإذا فرضنا أن $n = 5$:

وكان المطلوب هو النجاح ثلاث مرات فإن احتمال ذلك هو:

$$f(3) = Pr(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^2$$

وعمومًا: فإن الصورة العامة لتوزيع ذي الحدين التي تعطي احتمال الحصول على عدد مرات نجاح يساوي x (وعدد مرات فشل يساوي $n - x$) من بين محاولات عددها n هي:

$$\boxed{f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}}$$

حيث:

$$p + q = 1$$

$$X = 0, 1, 2, \ldots, n$$

وكما يلاحظ فإن التوزيع يعتمد على عدد المحاولات n ، وعلى احتمال النجاح في كل محاولة p. لذلك يقال: إن معلمتي التوزيع هما p, n.

ويمكن التحقق من أن $f(x)$ دالة احتمال إذا كانت تحقق الشرطين:

أ) $f(x) \geq 0$ لكل قيم x

ب) $\sum_x f(x) = 1$

- بالنسبة للشرط الأول فواضح أنه بالتعويض عن أي قيمة للمتغير X داخل المدى $X = 0, 1, 2, \ldots, n$ ستكون $f(x)$ موجبة.

أما بالنسبة للشرط الثاني فيمكن بسهولة إثبات أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح كما يلي:

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$
$$= (p + q)^n$$
$$= 1$$

٣- عزوم التوزيع

ويمكن الحصول على عزوم توزيع ذي الحدين بالتفصيل. ويمكن تلخيص هذه النتائج فيما يلي:

العزوم حول الصفر:

$$\boxed{\mu'_1 = n p}$$ (الوسط الحسابي)

$$\mu'_2 = n(n-1)p^2 + np$$

$$\mu'_3 = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$

$$\mu'_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np.$$

العزوم حول الوسط:

(التباين)

$$\boxed{\mu_2 = npq}$$

$$\mu_3 = npq(1-2p)$$

$$\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$$

معامل الالتواء:

$$\boxed{\beta_1 = \frac{(1-2p)^2}{npq}}$$

معامل التفرطح:

$$\boxed{\beta_2 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}}$$

ملاحظة مهمة:

إذا كانت $n \longrightarrow \infty$ فإن:

$$\beta_1 \longrightarrow 0 \; ; \; \beta_2 \longrightarrow 3$$

وهما معاملا الالتواء والتفرطح للتوزيع الطبيعي.

• **نظرية**

إذا كان X_1 ، X_2 متغيرين مستقلين لكل منهما توزيع ذي الحدين. وكانت معلمتا X_1 هما n_1 ، p ومعلمتا X_2 هما n_2 ، p . فإن توزيع مجموع المتغيرين $X_1 + X_2$ سيكون أيضًا ذا الحدين بمعلمتين $n_1 + n_2$ و p .

يمكن برهنة هذه النظرية بسهولة باستخدام الدالة المولدة للعزوم: فتحققا بصر.

ويمكن تعميم هذه النظرية لأكثر من متغيرين مستقلين.

التوقع والتباين للنسبة $\frac{X}{n}$

في كثير من المشكلات العملية يكون الاهتمام بالنسبة $\frac{X}{n}$ أكثر من الاهتمام بالعدد X . وفي هذه الحالات يمكن حساب التوقع والتباين للنسبة (بفرض أن x تتبع ذا الحدين) كما يلي:

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot np$$

$$\boxed{\therefore E\left(\frac{X}{n}\right) = p}$$

أي أن توقع النسبة في العينة يساوي النسبة الحقيقية (في المجتمع).

$$\text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot npq$$

$$\boxed{\text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{pq}{n}}$$

٢ - توزيع بواسون Poisson Distribution

يصلح هذا التوزيع للحوادث النادرة الوقوع (أي عندما تكون n كبيرة بينما يكون احتمال الحدث صغيرًا) أو للتغيرات التي تحدث في أزمنة عشوائية معلومة مثل عدد السيارات التي تمر من مكان معين في فترة زمنية معينة، أو عدد المكالمات التليفونية في فترة زمنية محددة، أو عدد وحدات الإنتاج التي تتعطل في فترة زمنية معينة، أو عدد الأخطاء المطبعية في صفحة ما من كتاب . . . إلخ .

١ - الصورة العامة للتوزيع والشروط :

تكتب الصورة العامة لتوزيع بواسون على الشكل التالي :

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}}$$

حيث X هي عدد مرات النجاح (وهي المتغير المتقطع) وتأخذ القيم :

$$X = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

بينما λ هي معلمة التوزيع، وهي مقدار ثابت وقيمتها تساوي $n\,p$ أي أن :

$$\lambda = n\,p$$

حيث n عدد المحاولات (وهي مستقلة)، p احتمال النجاح في المرة الواحدة (وهو ثابت).

أي أن شروط التوزيع هي نفسها شروط ذي الحدين من حيث إن المحاولات مستقلة، والاحتمال ثابت من محاولة لأخرى ومجموع احتمالي النجاح والفشل في كل محاولة يساوي واحدًا صحيحًا. الفرق هو أن x تتغير من صفر إلى ما لا نهاية له .

٢ - استنتاج توزيع بواسون من توزيع ذي الحدين

إذا فرضنا أن عدد المحاولات n يكبر (ويؤول إلى ما لا نهاية له) p احتمال النجاح يصغر، بحيث إن حاصل ضربهما $n\,p$ يصبح مقدارًا ثابتًا، وليكن λ . أي أن :

$$\lambda = n\,p \quad \therefore \quad p = \frac{\lambda}{n}$$

وحيث إن الصورة العامة لتوزيع ذي الحدين هي :

$$f(x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} \qquad , x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\therefore f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x} (1-p)^{n-x}$$

وبالتعويض عن $p = \frac{\lambda}{n}$ واختصار المضروبات نحصل على :

$$f(x) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{n^{x}} \cdot \frac{\lambda^{x}}{x!} \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

ويلاحظ أن عدد حدود المقدار الأول هو x فنأخذ كل حد منها وتقسمه على n (التي في المقام حيث إن عددها أيضًا x).

$$\therefore f(x) = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \ldots \left[\frac{n-(x-1)}{n}\right] \frac{\lambda^{x}}{x!} \quad \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}}$$

$$= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) \frac{\lambda^{x}}{x!} \quad \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}}$$

وعندما $n \longrightarrow \infty$ فإن المقدار الأول كله يؤول إلى ١ حيث إن المقدار سيصبح :

$$\left(1-\frac{1}{\infty}\right)\left(1-\frac{2}{\infty}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{\infty}\right)$$

$$= 1\,(1-0)\;(1-0)\ldots(1-0)$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \ldots \times 1 = 1$$

كذلك عندما $n \to \infty$ فإن المقدار $(1-\frac{\lambda}{n})^x$ الذي في المقام يؤول أيضًا إلى ١ حيث إن المقدار سيصبح :

$$(1-\frac{\lambda}{n})^x = (1-0)^x = 1$$

بينما المقدار $(1-\frac{\lambda}{n})^n$ الذي في البسط يؤول إلى $e^{-\lambda}$ وذلك حسب تعريف الدالة الأسية الذي يقول إن :

$$e^{\lambda} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{\lambda}{n})^n$$

$$; e^{-\lambda} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n$$

وخلاصة القول : إنه عندما تؤول n إلى ما لا نهاية له فإن $f(x)$ ستأخذ الشكل التالي :

$$f(x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$$

وهو الصورة النهائية لتوزيع بواسون .

فيلاحظ أن $f(x)$ تحقق شرطي دالة الاحتمال وهما :

أ) $f(x) \geq 0$ لكل قيم x .

ب) $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$.

- أما بالنسبة للشرط الأول فإنه بالتعويض عن أي قيمة x في الدالة $f(x)$ ستكون موجبة (أو على الأقل ليست سالبة).

- وبالنسبة للشرط الثاني فإنه يمكن التحقق منه كما يلي :

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}.e^{\lambda}$$

$$= 1$$

٣ - عزوم التوزيع

يمكن الحصول على عزوم توزيع بواسون (؟) ويمكن تلخيصها فيما يلي :

العزوم حول الصفر :

(الوسط الحسابي) $\boxed{\mu'_1 = \lambda}$

$$\mu'_2 = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mu'_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu'_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

العزوم حول الوسط :

(التباين) $\boxed{\mu_2 = \lambda}$

$$\mu_3 = \lambda$$

$$\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$$

معامل الالتواء :

$$\boxed{\beta_1 = \frac{1}{\lambda}}$$

معامل التفرطح :

$$\boxed{\beta_2 = 3 + \frac{1}{\lambda}}$$

٤ - نظرية

إذا كان X_1 ، X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين لكل منهما توزيع بواسون فإن توزيع مجموعهما أيضًا بواسون.

ويمكن التعميم لأي عدد m من المتغيرات المستقلة. وتكون معلمة التوزيع هي $\lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_m$ وذلك بدالة توليد العزم $\Phi_X(\theta)$

ب) بافتراض أن لكل منها المعلمة نفسها:

$$\therefore \Phi_{x_1 + x_2}(\theta) = e^{2\lambda(e^{\theta}-1)}$$

أي أن توزيع المجموع هو بواسون بمعلمة تساوي 2λ وفي حالة m متغير مستقل يكون التوزيع هو بواسون أيضا بمعلمة $m\lambda$.

٤ - التوزيع الهيبرجيومترك (التوافيقي) Hypergeometric Distribution

لاحظنا في التوزيعات الثلاثة السابقة أن المحاولات كانت مستقلة. ولعل التساؤل الذي يفرض نفسه الآن هو: كيف يكون الحال إذا كانت المحاولات غير مستقلة؟ والإجابة هي استخدام هذا التوزيع الجديد الذي يسمى الهيبرجيومترك أو ما يمكن تسميته التوزيع التوافيقي.

أي أن التوزيع الهيبرجيومترك يستخدم إذا كانت المحاولات غير مستقلة. ولكي نفهم التوزيع، ونصل إلى الصورة العامة له دعنا نسوق هذا المثال البسيط أولاً.

وهذا يعني أنه عندما تؤول N إلى ما لا نهاية له فإن التوزيع الهيبرجيومترك يؤول إلى توزيع ذي الحدين.

٥ - التوزيع المنتظم (المستطيل) Uniform (Rectangular) Distribution

التوزيع المنتظم الذي يسمى أحيانًا التوزيع المستطيل هو أول التوزيعات المتصلة التي سنتناولها في هذا الفصل وربما يكون أسهلها أيضًا.

١ - الصورة العامة للتوزيع

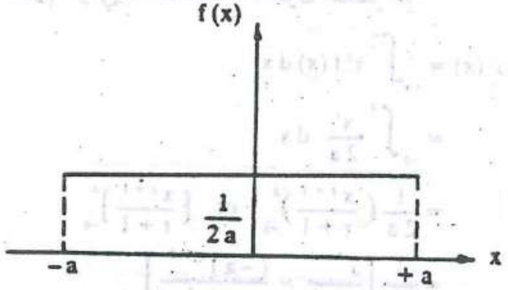
الصورة العامة للتوزيع المنتظم للمتغير X هي :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2a}}$$

حيث $-a \leq X \leq +a$

لاحظ أن دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ للتوزيع المنتظم مقدار ثابت ولذا سمي التوزيع المنتظم، حيث لا تتغير قيمة دالة الكثافة بتغير X . كما أن مدى المتغير المتصل X يبدأ من $-a$ وينتهي إلى القيمة $+a$:

يمكن رسم دالة كثافة الاحتمال بيانيًا كما في الشكل رقم (٣).



شكل (٣) : دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتظم

يتضح من الرسم أيضًا لماذا تسمى أحيانًا التوزيع المستطيل.

تكتب أحياناً دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتظم على الشكل التالي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a}}$$

حيث: $a \leq X \leq b$

وهذا بديهي فإنها الصورة السابقة نفسها (فالمقام مقدار ثابت عبارة عن الحد الأعلى للمتغير مطروحًا منه الحد الأدنى له).

الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمال فهي تحقق الشرطين:

أ) $f(x) \geq 0$

ب) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 1$

- والدالة $f(x)$ تحقق الشرط الأول فهي دائمًا أكبر من الصفر.
- كذلك فإنها تحقق الشرط الثاني، حيث:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a}\,dx$$
$$= \left(\frac{x}{2a}\right)_{-a}^{a}$$
$$= \left(\frac{2a}{2a}\right) = 1.$$

٢ ـ عزوم التوزيع المنتظم

بما أن العزم الرائي r-th moment حول الصفر هو:

$$\mu'_r(x) = \int_{-a}^{a} x^r f(x)\,dx$$
$$= \int_{-a}^{a} \frac{x^r}{2a}\,dx$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)_{-a}^{a} \quad \text{or} \quad \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_{-a}^{a}$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^{r+1}}{r+1} - \frac{(-a)^{r+1}}{r+1}\right]$$

وهنا نلاحظ أن العزوم الفردية تساوي صفرًا. أما العزوم الزوجية ولتكن $r = 2m$ فإنها تساوي:

$$\mu'_{2m} = \frac{a^{2m}}{2m+1}$$

ملاحظة مهمة:

نلاحظ أنه طالما كانت العزوم الفردية تساوي الصفر فإن العزوم الزوجية حول الوسط ستكون هي نفسها العزوم الزوجية حول الصفر.

أما العزوم الفردية (سواء حول الصفر أو حول الوسط) فهي تساوي صفرًا. ومنها نستنتج نتيجة ثانية، وهي أن معامل الالتواء في هذه الحالة يساوي صفرًا.

وبالتعويض عن m مرة تساوي 1 ومرة أخرى تساوي 2 نحصل على:

$$\mu'_2 = \frac{a^2}{3}$$

(التبايـن) $\boxed{\therefore \mu_2 = \frac{a^2}{3}}$

$$\mu'_4 = \frac{a^4}{5} \qquad \therefore \mu_4 = \frac{a^4}{5}$$

لاحظ أن:

الوسط الحسابي $\boxed{\mu'_1 = 0}$

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu'_3 = 0$$
$$\therefore \mu_3 = 0$$

معامل الالتواء:

$$\boxed{\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3 = 0}$$

وإذا فرضنا أن $y = kx$ فإن :

$$dy = k\,dx \qquad \therefore \qquad dx = \frac{dy}{k}$$

$$\therefore \mu'_r = \frac{1}{k^r}\int_0^\infty y^r e^{-y}\,dy$$

ومن تعريف دالة جاما (في الرياضيات) نجد أن :

$$\int_0^\infty y^r . e^{-y}\,dy = \Gamma(r+1)$$

وحيث إن r عدد صحيح موجب فإن :

$$\Gamma(r+1) = r!$$

نعود الآن للعزم الرائي حيث نجد أن :

$$\boxed{\mu'_r = \frac{\Gamma(r+1)}{k^r} = \frac{r!}{k^r}}$$

ومنها نجد أن :

العزوم حول الصفر :

الوسط الحسابي $\boxed{\mu'_1 = \frac{1}{k}}$

$$\mu'_2 = \frac{2}{k^2}$$

$$;\mu'_3 = \frac{6}{k^3}$$

$$;\mu'_4 = \frac{24}{k^4}$$

العزوم حول الوسط :

(التباين) $\boxed{\therefore \mu_2 = \frac{1}{k^2}}$

$$\mu_3 = \frac{2}{k^3}$$

$$;\mu_4 = \frac{9}{k^4}$$

معامل الالتواء :

$$\boxed{\beta_1 = 4 = \left(\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}\right)^2}$$

معامل التفرطح :

$$\boxed{\beta_2 = 9 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}}$$

٧ - توزيع جاما Gamma Distribution

قبل الدخول في توزيع جاما «كدالة كثافة احتمال» أو كتوزيع إحصائي «احتمالي» قد يكون من المفيد أن نشير أولاً إلى ما يسمى دالة جاما gamma function وإلى تعريفها الرياضي :

- تعرف دالة جاما التي يرمز لها بالرمز $\Gamma(n)$ كما يلي :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx$$

- وإذا كانت n موجبة فيكون التكامل تقاربيًا. وتكون :

$$\Gamma(1) = 1$$

$$;\ \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$$

- وإذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن :

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-z) \times .. \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore \Gamma(n) = (n-1)!$$

or $$\Gamma(n+1) = n!$$

والآن ننتقل إلى توزيع جاما .

١ - الصورة العامة لتوزيع جاما .

بعد تعريف دالة جاما فإنه يمكن بسهولة الآن كتابة توزيع جاما كما يلي :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1}}$$

حيث $0 \leqslant X \leqslant \infty$

ويقال : إن المتغير (المتصل) X له توزيع جاما بمعلمة n (حيث n ثابت موجب) .

وبديهي فإن f (x) دالة كثافة احتمال حيث إنها موجبة في مدى المتغير كما أن :

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx$$

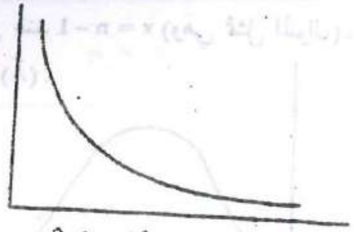
$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = 1.$$

شكل المنحنى :

شكل المنحنى لتوزيع جاما يعتمد بطبيعة الحال على قيمة n . وعموماً فإن شكل المنحنى لا يخرج عن واحد من الأشكال الأربعة التالية :

١ - إذا كانت n كسرًا ثابتًا موجبًا أقل من ١ :

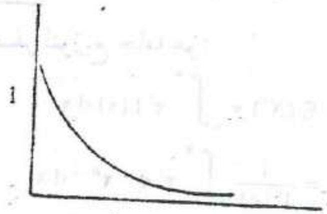
في هذه الحالة يكون منحنى الدالة تناقصيًا ويكون المحور الرأسي خطًا تقاربيًا للمنحنى كما في شكل(٥).



$0 < n < 1$ شكل (٥)

٢ - إذا كانت n = 1 :

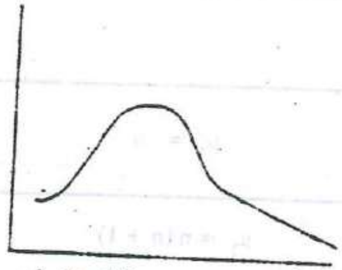
يصبح المنحنى في هذه الحالة هو الدالة الأسية حيث يبدأ من ١ ويتناقص تدريجيًا كما في شكل (٦) .



$n = 1$ شكل (٦)

٣ - إذا كانت $1 < n \leqslant 2$:

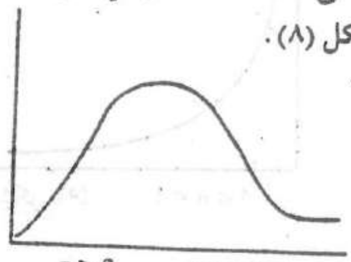
يكون للمنحنى نهاية عظمى عند $x = n - 1$ (وهي تمثل المنوال)، ونهاية صغرى عند $x \to \infty$ كما في شكل (٧) .



$1 < n \leqslant 2$ شكل (٧)

٤ - إذا كانت $n > 2$:

يكون للمنحنى نهاية عظمى عند $x = n - 1$ (وهي تمثل المنوال)، ونهاية صغرى عند $x = 0$ ، $x \to \infty$ كما في شكل (٨).



$n > 2$ شكل (٨)

٢ – عزوم توزيع جاما

العزم الرائي حول الصفر لتوزيع جاما هو:

$$\mu_r' = E(X^r) = \int_0^\infty x^r f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^r e^{-x} x^{n-1}\, dx$$

$$\therefore \mu_r' = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-x} x^{n+r-1}\, dx$$

$$\boxed{\therefore \mu_r' = \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}}$$

العزوم حول الصفر:

الوسط الحسابي $\boxed{\mu_1' = n}$

$$\mu_2' = n(n+1)$$

$$\mu_3' = n(n+1)(n+2)$$

$$\mu_4' = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

العزوم حول الوسط:

(التبايـن) $\boxed{\mu_2 = n}$

$$\mu_3 = 2n$$

$$\mu_4 = 3n(n+2)$$

معامل الالتواء:

$$\boxed{\beta_1 = \frac{4}{n}}$$

معامل التفرطح:

$$\boxed{\beta_2 = 3 + \frac{6}{n}}$$

ـ لاحظ أن الوسط الحسابي يساوي التباين يساوي n

$$\boxed{\therefore \mu_1' = \mu_2 = n}$$

ملاحظة مهمة:

عندما تؤول n إلى ما لا نهاية له فإن:

$$\beta_1 \longrightarrow 0 \;;\; \beta_2 \longrightarrow 3$$

أي أنه عندما تؤول n إلى ما لا نهاية له فإن معاملي الالتواء والتفرطح يؤولان إلى معاملي الالتواء والتفرطح للتوزيع الطبيعي.

والخلاصة أنه عندما تؤول n إلى ما لا نهاية له فإن توزيع جاما يؤول إلى التوزيع الطبيعي.

القانون العام لقانون جاما للاحتمالات بالبارامترين

α , β إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X على الصورة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta} , & x>0\\[2mm] 0 , & \text{elsewhere}\end{cases}$$

حيث α , β عددان حقيقيان موجبان .

حالات خاصة :

(i) قانون الدالة الأسية للاحتمالات وهي $\alpha = 1$

نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}\, e^{-x/\beta} , & x>0\\[2mm] 0 , & x\le 0\end{cases} \quad , \ \beta>0$$

(ii) قانون $\chi^2(n)$ (مربع كاي) للاحتمالات وهي

نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = 2$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})\, 2^{n/2}}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-x/2} , & x>0\\[2mm] 0 , & x\le 0\end{cases}$$

ونقول في هذه الحالة أن المتغير العشوائي X يخضع لقانون $\chi^2(n)$ بدرجات حرية هي n .

نظرية

إذا كان X_1 متغيراً عشوائياً له توزيع جاما بمعلمة n_1 ، X_2 متغيراً آخر له توزيع جاما بمعلمة n_2. وكان المتغيران مستقلين فإن توزيع مجموعهما $X_1 + X_2$ يكون أيضاً جاما بمعلمة $n_1 + n_2$.

ويمكن تعميم هذه النظرية لأي عدد من المتغيرات المستقلة.

٨ - توزيع بيتا Beta Distribution

قبل الدخول في توزيع «بيتا» كتوزيع إحصائي «احتمالي» قد يكون من المفيد أن نشير أولاً إلى ما يسمى دالة بيتا beta function وإلى تعريفها الرياضي :

تعرف دالة بيتا ذات المعلمتين m , n كما يلي :

$$\boxed{\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx} \longrightarrow (1)$$

حيث يلاحظ أن :

$$\boxed{\beta(m,n)=\beta(n,m)} \longrightarrow (2)$$

وإذا عوضنا عن x بالقيمة $x=\sin^2\theta$ نحصل على شكل جديد لدالة بيتا كما يلي :

$$\boxed{\beta(m,n)=\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \,.\, \cos^{2n-1}\theta \, d\theta} \longrightarrow (3)$$

أمـا إذا عوضنا عن x بالقيمة $x = \frac{1}{1+y}$ فإننا نحصل على شكل ثالث لدالة بيتا كما يلي:

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy \qquad \longrightarrow \quad (4)$$

وأخيراً فإنه يمكن التعبير عن دالة بيتا بدلالة أو بمعلومية دالة جاما كما يلي:

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad \longrightarrow \quad (5)$$

والأشكال السابقة هي صور مختلفة لدالة بيتا.

١ ـ الصورة العامة لتوزيع بيتا

يمكن أن تكتب الصورة العامة لتوزيع بيتا بشكلين مختلفين هما:

ـ توزيع بيتا من النوع الأول:

$$f(x) = \frac{1}{\beta(m,n)}\, x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

حيث $0 \leq X \leq 1$

والدالة $f(x)$ تسمى توزيع بيتا من النوع الأول، وهي تحقق شرطي دالة الكثافة. ويقال إن التوزيع له معلمتان هما n . m.
كما نلاحظ أن m , n ثابتان موجبان.

ـ توزيع بيتا من النوع الثاني:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m,n)}\, \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}$$

حيث $0 \leq X \leq \infty$

والدالة $f(x)$ تسمى توزيع بيتا من النوع الثاني، وهي تحقق شرطي دالة الكثافة. ويقال: إن التوزيع له معلمتان هما n,m حيث إنهما ثابتان موجبان.

٢ ـ عزوم توزيع بيتا من النوع الأول

$$\because \mu'_r(x) = E(X^r) = \int_0^1 x^r f(x)\, dx$$

$$\therefore \mu'_r = \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^1 x^r x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

$$\therefore \mu'_r = \frac{\beta(m+r,n)}{\beta(m,n)}$$

وهذا هو العزم الرائي حول الصفر لتوزيع بيتا من النوع الأول.

وبالتعويض عن r بالقيم 4.3.2.1 نحصل على العزوم حول الصفر كما يلي:

$$\mu'_1 = \frac{\beta(m+1,n)}{\beta(m,n)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(m+n+1)}$$

الوسط الحسابي للنوع الأول

$$\boxed{\therefore \mu'_1 = \frac{m}{m+n}}$$

وبالطريقة نفسها نجد أن:

$$\mu'_2 = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)}$$

$$\mu'_3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{(m+n)(m+n+1)(m+n+2)}$$

$$\mu'_4 = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{(m+n)(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)}$$

ومنها نجد أن العزم الثاني حول الوسط أو التباين هو:

$$\boxed{\mu_2 = \frac{m\,n}{(m+n)^2(m+n+1)}}$$

ومنها أيضًا يمكن إيجاد μ_3، μ_4، β_1، β_2.

٢- عزوم توزيع بيتا من النوع الثاني

$$\therefore \mu'_r(x) = E(X^r)$$

$$= \int_0^\infty x^r f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^\infty x^r \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^\infty \frac{x^{m+r-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

وبوضع $y = \frac{x}{1+x}$

نجد أن: $x = \frac{y}{(1-y)}$; $1 + x = \frac{1}{1-y}$

وتصبح حدود المتغير $0 \leq y \leq 1$

$$\therefore \mu'_r = \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^1 y^{m+r-1}(1-y)^{n-r-1}\,dy = \frac{\beta(m+r, n-r)}{\beta(m,n)}$$

وبالتعويض عن قيم r بالقيم ١، ٢، ٣، ٤، نحصل على العزوم حول الصفر كما يلي:

$$\mu'_1 = \frac{\beta(m+1, n-1)}{\beta(m,n)}$$

الوسط الحسابي للنوع الثاني

$$\boxed{\therefore \mu'_1 = \frac{m}{n-1}}$$

$$\mu'_2 = \frac{\beta(m+2, n-2)}{\beta(m,n)}$$

$$\therefore \mu'_2 = \frac{m(m+1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$; \mu'_3 = \frac{\beta(m+3, n-3)}{\beta(m,n)}$$

$$\therefore \mu'_3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$, \mu'_4 = \frac{\beta(m+4, n-4)}{\beta(m,n)}$$

$$\therefore \mu'_4 = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

ويكون تباين النوع الثاني هو:

$$\boxed{\mu_2 = \frac{m(m+n-1)}{(n-1)^2(n-2)}}$$

ويمكن الحصول على μ_3، μ_4، β_1، β_2.

٦- التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من الأعمدة الأساسية لعلم الإحصاء. وقد لا نبالغ كثيراً إذا قلنا: إنه أهمها جميعًا.

فالتوزيع الطبيعي مهم في حد ذاته كتوزيع إحصائي له تطبيقات كثيرة ومتنوعة في مختلف المجالات.. وهو مهم جدًا كأساس لمعظم الاختبارات الإحصائية المعروفة..

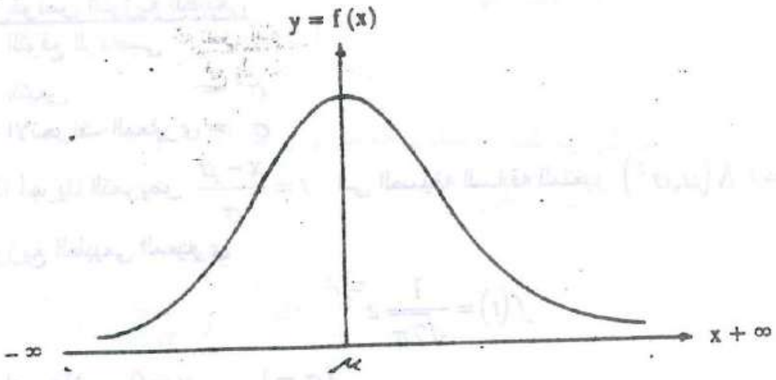
وهو مهم أيضًا، لأن منه يشتق الكثير من التوزيعات الإحصائية المهمة الأخرى.. ونستطيع أن نسترسل ونسوق أدلة أخرى تبين أهمية هذا التوزيع، ومكانته في الإحصاء. وإن كان أي سبب من الأسباب السابقة كافٍ بمفرده لبيان أهمية التوزيع.

لذلك، فإننا في الفقرة التالية نبين بالتفصيل كيفية اشتقاق معادلة التوزيع الطبيعي التي تأخذ الشكل التالي:

أ- معادلة التوزيع الطبيعي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

حيث $-\infty \leq X \leq \infty$ ، μ هي الوسط الحسابي، σ هي الانحراف المعياري.



شكل (٩): منحنى التوزيع الطبيعي

ونلاحظ من الشكل أن التوزيع متماثل عند الوسط أي عند $x = \mu$ ، ويصل إلى نهايته العظمى عند النقطة نفسها. أي أن المشتقة التفاضلية الأولى تساوي صفرًا عند هذه

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ at } x = \mu, \textit{i.e. } x - \mu = 0 \longrightarrow \quad (1)$$

كذلك يلاحظ من الشكل أن طرفي التوزيع يمتدان إلى ما لا نهاية له. أي أن:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ at } y = 0 \longrightarrow \quad (2)$$

حالة خاصة:

إذا كانت $\mu = 0$ وفي الوقت نفسه $\sigma^2 = 1$ فإن التوزيع يسمى في هذه الحالة التوزيع الطبيعي المعياري، وتأخذ المعادلة الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

حيث $-\infty \leq X \leq \infty$

٢- خواص التوزيع الطبيعى

١- التوقع الرياضى = μ

٢- التباين = σ^2

٣- الانحراف المعيارى = σ

وإذا أجرينا التعويض $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$ فى الصيغه السابقه للمتغير $N(\mu,\sigma^2)$ نحصل على التوزيع الطبيعى المعيارى

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}t^2}$$

(اى عند $\mu=0 \quad \sigma=1,$)

ويمكن اثبات أن المساحه الواقعه تحت المنحنى تساوى واحد صحيح

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

(باخذ $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$)

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

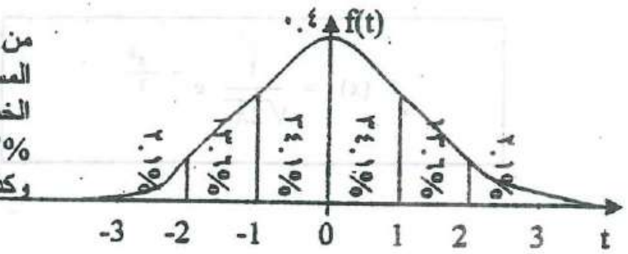
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

(باخذ $\omega=\frac{z^2}{2}$)

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\omega^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1$$

من الشكل المقابل نجد أن المساحه التى تقع بين الخطين t=1,t=-1 تمثل ٦٨.٢%
وكذلك تمثل باقى المساحات



داله التوزيع F(x) المقابله لداله الكثافه هى

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}dy$$

واذا اردنا العلاقه بين داله التوزيع المقابله للقانون المعيارى وداله التوزيع السابقه فأننا نطبق التحويل $z=\frac{\chi-\mu}{\sigma}$ لنحصل على

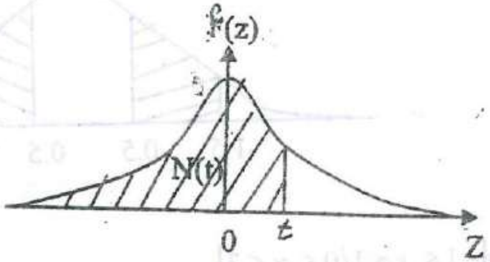
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\chi-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{\chi-\mu}{\sigma}}f(z)dz=N\left(\frac{\chi-\mu}{\sigma}\right)$$

$$N(t)=\int_{-\infty}^{t}f(z)dz$$

$i)\ f(-z)=f(z)$

$ii)\ N(-x)=1-N(x)$



وتوجد جدول لحساب N(x) لقيم x الموجبه

ولاى عددين حقيقيين a,b وإذا كان $\chi\sim N(\mu,\sigma^2)$ فأن

$$p[a<\chi<b]=N\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-N\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

مثال: إذا كان $\chi\sim N(2,4)$ أى x يخضع للقانون الطبيعى بالبارامتريه $\mu=2,\sigma^2=4$ فأن:

$$i)\ p[0\le\chi\le3]=N\left(\frac{3-2}{2}\right)-N\left(\frac{0-2}{2}\right)$$

$$=N(0.5)-N(-1)$$

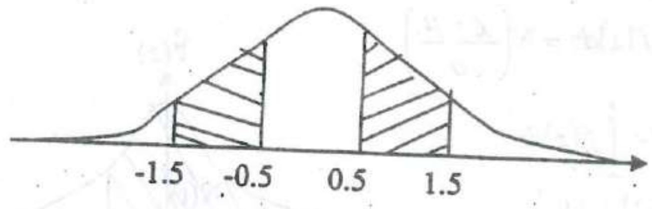
$$=N(0.5)-1+N(1)=0.533$$

$$ii)\ p\left[|\chi|\le 1\right] = p\left[-1\le \chi \le 1\right]$$

$$= N\left(\frac{1-2}{2}\right) - N\left(\frac{-1-2}{2}\right) = N\left(\frac{-1}{2}\right) - N\left(\frac{-3}{2}\right)$$

$$= N\left(\frac{3}{2}\right) - N\left(\frac{1}{2}\right) = 0.242$$

من خاصيه التماثل فى التوزيع

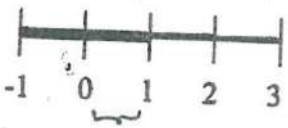


$$iii)\ p\left[-1\le \chi \le 1 / 0\le \chi \le 3\right]$$

$$= \frac{p\left[0\le \chi \le 1\right]}{p\left[0\le \chi \le 3\right]}$$

$$= \frac{N\left(\frac{1-2}{2}\right) - N\left(\frac{0-2}{2}\right)}{0.533}$$

$$= \frac{0.15}{0.533} = 0.281$$



١٠ - قانون كوش للاحتمالات

سنقول أن المتغير العشوائى x يخضع لقانون كوش للاحتمالات بالبارامتريه α, β إذا كانت داله الكثافه الاحتماليه للمتغير x على الصوره

$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}, \qquad (1)$$

$$-\infty < \chi < \infty, \quad -\infty < \alpha < \infty, \quad \beta > 0$$

بوضع $z = \frac{x-\alpha}{\beta}$ بأخذ قانون كوش (١) الى قانون كوش المعيارى بالبارامتريه ١, ٠ $(\alpha = 0, \beta = 1)$ داله كثافه احتماليه هى

$$f(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$$

ولأثبات ذلك:

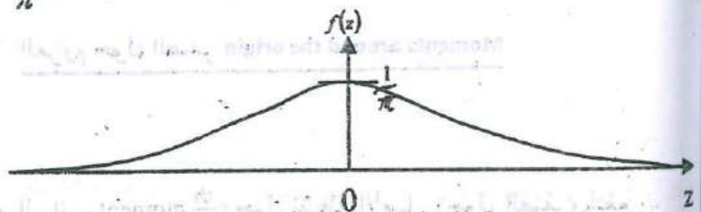
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$$

(حيث $z = \frac{x-\alpha}{\beta}$)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1} z\right]_0^{\infty}$$

$$= 1$$



منحنى داله الكثافه الاحتماليه لقانون كوش المعيارى

الفصل الخامس

العزوم والدوال المولدة لها

Moments and Moments Generating Functions

- العزوم حول الصفر ● العزوم حول الوسط
- العلاقة بين العزوم حول الوسط والعزوم حول الصفر ● معامل الالتواء ● معامل التفرطح
- الدالة المولدة للعزوم ● الدالة المميزة
- الدالة التراكمية

تستخدم العزوم Moments لقياس التشتت والالتواء Skewness والتفرطح Kurtoses ، كما أنها تعتبر من أدلة توصيف التوزيعات أو الدوال الاحتمالية .

ويمكن النظر إلى العزوم على أنها تطبيقات على التوقع حيث يمكن تعريف كل العزوم بدلالة التوقع .

١ . العزوم حول الصفر Moments around the origin

تعريف (١)

يعرف العزم الرائي r *th* moment حول نقطة الأصل (حول الصفر) لمتغير عشوائي X الذي يرمز له بالرمز $\mu'_r(x)$ كما يلي:

$$\boxed{\mu'_r(x) = \sum x^r f(x) = E(X^r)}$$

or

$$\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx = E(X^r)} \qquad (1)$$

فإذا كانت $r = 0$ فإن :

$$\mu'_0(x) = \sum f(x) = 1$$

$$= \int f(x)\,dx = 1$$

$$\therefore \boxed{\mu'_0(x) = E(X^0) = 1} \longrightarrow (2)$$

أي أن العزم الصفري حول الصفر يساوي واحدًا صحيحًا .

أما إذا كان $r = 1$ فإن :

$$\left.\begin{aligned} \mu'_1(x) &= \sum x f(x) \\ &= \int x f(x)\,dx \end{aligned}\right\} = E(X) =$$

or

$$\therefore \boxed{\mu'_1(x) = E(X) = \mu} \longrightarrow (3)$$

أي أن العزم الأول حول الصفر ماهو إلا القيمة المتوقعة أو ماهو إلا الوسط الحسابي (القيمة المتوسطة) . وهذه نتيجة مهمة .

وعموماً فإن العزم الرائي حول الصفر (أو نقطة الأصل) بدلالة التوقع هو:

$$\boxed{\mu'_r(x) = E(X^r)} \longrightarrow (4)$$

٢ ـ العزوم حول الوسط Moments around the mean

تعريف (٢)

يعرّف العزم الرائي r th moment حول الوسط الحسابي لمتغير عشوائي X الذي يرمز له بالرمز $\mu_r(x)$ كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} \mu_r(x) &= \sum (x-\mu_1')^r f(x) \\ \text{or} \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1')^r f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

أي أن العزوم حول الوسط الحسابي بدلالة التوقع هي:

$$\boxed{\mu_r = E\left[X-\mu_1'\right]^r} \longrightarrow (6)$$

ويمكن أن يكتب كما يلي:

$$\boxed{\mu_r(x) = E\left[X-E(X)\right]^r} \longrightarrow (7)$$

كما يمكن أن يكتب بصورة ثالثة كما يلي:

$$\boxed{\mu_r(x) = E(X-\mu)^r} \longrightarrow (8)$$

وذلك لأن: $\mu_1'(x) = E(X) = \mu$

فإذا كانت $r = 0$ فإن:

$$\boxed{\mu_0(x) = 1} \longrightarrow (9)$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\boxed{\mu_0(x) = \mu_0'(x) = 1} \longrightarrow (10)$$

أي أن العزم الصفري حول الصفر يساوي العزم الصفرى حول الوسط يساوي واحدًا صحيحًا:

وإذا كانت $r = 1$ فإن:

$$\boxed{\mu_1(x) = 0} \longrightarrow (11)$$

وهذه نتيجة مهمة، وهي تقول: إن العزم الأول حول الوسط يساوي صفرًا. (وهذه النتيجة تتفق تمامًا مع ما درسه الطالب في مبادىء الإحصاء من أن مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفرًا).

ويمكن توضيحها ببساطة كما يلي:

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= E(X-\mu)^1 \\ &= E(X) - E(\mu) \\ &= E(X) - \mu \\ &= \mu - \mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

وإذا كانت $r = 2$ فإن :

$$\boxed{\mu_2(x) = E\left[X - E(X)\right]^2 = \overset{2}{\sigma} x} \longrightarrow \quad (12)$$

أي أن العزم الثاني حول الوسط ماهو إلا التباين . وهذه نتيجة مهمة أيضًا .

ويمكن كتابة $\mu_2(x)$ بدلالة العزوم حول الصفر كما يلي :

$$\mu_2(x) = E(X - \mu_1')^2$$
$$= E(X^2 - 2\mu_1' X + \mu_1'^2)$$
$$= E(X^2) - 2\mu_1' E(X) + \mu_1'^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu_1'^2 + \mu_1'^2$$
$$= E(X^2) - \mu_1'^2$$

$$\therefore \boxed{\mu_2(x) = \mu_2'(x) - \mu_1'^2(x)} \longrightarrow \quad (13)$$

وبصفة عامة يمكن التوصل إلى العلاقة بين العزوم حول الوسط الحسابي، والعزوم حول نقطة الأصل (أي الصفر) كما في الفقرة التالية .

٣ ـ العلاقة بين العزوم حول الوسط والعزوم حول الصفر

بافتراض أن المتغير العشوائي غير متصل نجد أن :

$$\mu_r(x) = \sum (x - \mu_1')^r \cdot f(x)$$

ويمكن فك القوس $(x - \mu_1')^r$ كما يلي :

$$(x - \mu_1')^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \mu_1'^{\,i} x^{r-i}$$

$$\therefore \mu_r(x) = \sum \left[\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \mu_1'^{\,i} x^{r-i} \right] f(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \mu_1'^{\,i} \left[\sum x^{r-i} f(x) \right]$$

$$\boxed{\therefore \mu_r(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \mu_1'^{\,i} \mu_{r-i}'} \longrightarrow \quad (14)$$

وبوضع $r = 0$ فإن :

$$\boxed{\mu_0(x) = \mu_0'(x) = 1}$$

وهي المعادلة نفسها رقم (10)

وبوضع $r = 1$ فإن* :

$$\boxed{\mu_1 = \mu_1 - \mu_1' = 0} \longrightarrow \quad (15)$$

وبوضع $r = 2$ فإن :

$$\boxed{\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2} \longrightarrow \quad (16)$$

وبوضع $r = 3$ فإن :

* سنكتب العزم بدون الرمز X للاختصار.

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2 \, \mu'_1 + 2\mu'^3_1 \quad \longrightarrow \quad (17)$$

وبوضع $r = 4$ فإن:

$$\mu_4 = \mu_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2 \, \mu'^2_1 - 3\mu'^4_1 \quad \longrightarrow \quad (18)$$

ويمكن التوصل إلى النتائج نفسها بصورة أسهل باستخدام العلاقة:

$$\mu_r(x) = E(X - \mu'_1)^r$$

ثم بالتعويض عن r بالقيم صفر، ١، ٢، ٣، ٤.

وغالبًا ما يكتفي بالعزوم الأربعة الأولى سواء حول الوسط أو حول الصفر، حيث يمكن تعريف المقاييس المختلفة الشائعة الاستخدام بدلالة هذه العزوم الأربعة الأولى. والمقاييس التي نقصدها هي الوسط الحسابي والتباين (التشتت) والالتواء والتفرطح.

٤ ـ معامل الالتواء Skewness Coefficient

يعرّف معامل الالتواء الذي يرمز له بالرمز β_1 كما يلي:

$$\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3 \quad \longrightarrow \quad (19)$$

أي أن معامل الالتواء يساوي خارج قسمة مربع العزم الثالث حول الوسط على مكعب العزم الثاني حول الوسط (مكعب التباين).

ويلاحظ أن معامل الالتواء حسب التعريف السابق يكون موجب الإشارة دائمًا، أي أنه لن يميز بين الالتواء الموجب والالتواء السالب. وذلك لأن البسط هو «مربع» العزم الثالث حول الوسط سيكون موجبًا دائمًا. والمقام هو مكعب التباين الذي لا يكون سالبًا أبدًا حيث إن أقل قيمة للتباين هي الصفر عندما لا يوجد اختلاف بين القيم (أي لا يوجد تباين بينها).

لذلك يعدل هذا المعامل حتى يظهر ما إذا كان الالتواء موجبًا أو سالبًا، وذلك بأخذ الجذر التربيعي لـ β_1. ويصبح معامل الالتواء المعدل الذي يرمز له بالرمز γ_1 كما يلي:

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \mu_3 / \mu_2^{3/2} \quad \longrightarrow \quad (20)$$

ومن هذا يتضح أن إشارة γ_1 تتوقف على إشارة μ_3 (العزم الثالث حول الوسط). فإذا كانت μ_3 موجبة كان الالتواء موجبًا وإذا كانت سالبة كان الالتواء سالبًا. (لاحظ أن معامل الالتواء للتوزيع الطبيعي يساوي صفرًا).

٥ . معامل التفرطح Kurtosis Coefficient

يعرف معامل التفرطح الذي يرمز له بالرمز β_2 كما يلي:

$$\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2 \quad \longrightarrow \quad (21)$$

أي أن معامل التفرطح هو خارج قسمة العزم الرابع حول الوسط على مربع العزم الثاني حول الوسط (أي مربع التباين).

ويعدّل هذا المقياس أيضًا ليأخذ في الاعتبار مدى تفرطح (أو تدبب) التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي. وحيث إن معامل التفرطح للتوزيع الطبيعي يساوي ٣ فيكون معامل التفرطح المعدل الذي يرمز له بالرمز γ_2 هو:

$$\boxed{\gamma_2 = \beta_2 - 3} \longrightarrow (22)$$

فإذا كانت $\beta_2 > 3$ كانت γ_2 موجبة، وكان التوزيع مفرطحًا. وإذا كانت $\beta_2 < 3$ كانت γ_2 سالبة، وكان التوزيع مدببًا.

مثـال (١)

أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الصفر ثم حول الوسط الحسابي للمتغير X، ثم أوجد معاملي الالتواء والتفرطح له إذا كانت دالة الاحتمال للمتغير تأخذ الشكل التالي (توزيع ذي الحدين):

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيـث:

$$X = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$p + q = 1.$$

الحـل:

$$\because \mu_1' = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

$$= n p (p+q)^{n-1}$$

وحيث إن $p + q = 1$

$$\therefore \mu_1' = np$$

(وهذا يؤكد للطالب أن الوسط الحسابي لتوزيع ذي الحدين أو توقعه يساوي np كما يعرف من دراسته السابقة).

$$\because \mu_2' = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x)$$

$$\therefore \mu_2' = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

ويمكن التعبير عن x^2 كما يلي:

$$x^2 = x(x-1) + x$$

$$\therefore \mu_2' = \sum_{x=0}^{n} \left[x(x-1) + x \right] \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= p \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} + np$$

$$= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} + np$$

$$\therefore \mu_1' = n(n-1)p^2 + np.$$

$$\because \mu_3' = \sum_{x=0}^{n} x^3 f(x)$$

$$\therefore \mu_3' = \sum_{x=0}^{n} x^3 \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

ويمكن التعبير عن x^3 كما يلي:

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$

$$\therefore \mu_3' = \sum \left[x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x \right] f(x)$$

وتكون النتيجة :

$$\therefore \mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$

$$\because \mu_4' = \sum_{x=0}^{n} x^4 f(x)$$

ويمكن التعبير عن x^4 كما يلي:

$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x$$

$$\therefore \mu_4' = \sum_{x=0}^{n} \left[x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x \right] f(x)$$

وتكون النتيجة :

$$\therefore \mu_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np.$$

$$\because \mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\therefore \mu_2 = npq$$

(وهذا هو تباين توزيع ذي الحدين)

$$\because \mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2' \mu_1' + 2\mu_1'^3$$

$$\therefore \mu_3 = npq(q-p) = npq(1-2p)$$

$$\because \mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3' \mu_1' + 6\mu_2' \mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$$

$$\therefore \mu_4' = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$$

$$\because \beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$$

$$\therefore \beta_1 = \frac{(1-2p)^2}{npq}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$$

$$\because \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$$

$$\therefore \beta_2 = 3 + \frac{1-6pq^2}{npq}$$

$$\gamma_2 = \frac{(1-2pq)^2}{npq}$$

ملاحظة مهمة :

نلاحظ أنه عندما تؤول n إلى ما لا نهاية فإن معامل الالتواء β_1 يؤول إلى الصفر، ومعامل التفرطح β_2 يؤول إلى ٣ .

أي أن معاملي الالتواء والتفرطح لتوزيع ذي الحدين يؤولان إلى معاملي الالتواء والتفرطح للتوزيع الطبيعي عندما تؤول n إلى ما لا نهاية .

$$(n \longrightarrow \infty : \beta_1 \longrightarrow 0 , \beta_2 \longrightarrow 3)$$

مثال (٢)

أوجد العزوم الأربعة حول الوسط الحسابي، وكذلك معاملي الالتواء والتفرطح للمتغير X إذا كانت دالة احتماله تأخذ الشكل التالي (توزيع بواسون) :

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$X = 0, 1, \ldots ,$$

الحل :

نحصل أولاً على العزوم الأربعة حول الصفر ثم على العزوم حول الوسط :

$$\mu_1' = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$\therefore \mu_1' = \lambda$$

(وهو الوسط الحسابي لتوزيع بواسون) .

$$\because \mu_2' = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left\{ x(x-1) + x \right\} \frac{\lambda^x \; e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\therefore \mu_2' = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$\therefore \mu_2' = \lambda^2 + \lambda$$

$$\because \mu_3' = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left\{ x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x \right\} f(x)$$

$$\therefore \mu_3' = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\because \mu_4' = \sum_{x=0}^{\infty} x^4 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left\{ x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x \right\} f(x)$$

$$\therefore \mu_4' = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

ومن العلاقات بين العزوم حول الوسط والعزوم حول الصفر نحصل على :

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\therefore \mu_2 = \lambda$$

أي أن الوسط الحسابي يساوي التباين يساوي λ لتوزيع بواسون .

$$\because \mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$$

$$\therefore \mu_3 = \lambda$$

(والعزم الثالث حول الوسط يساوي أيضاً λ) .

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$$

$$\therefore \mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$$

$$\because \beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$$

$$\therefore \beta_1 = \frac{1}{\lambda} \; ; \; \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\because \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$$

$$\therefore \beta_2 = 3 + \frac{1}{\lambda} \; ; \; \gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$$

٦ ـ الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function

الدالة المولدة للعزوم ـ كما هو واضح من الاسم ـ دالة تعطي العزوم كلها مرة واحدة . فكأنَّ الدالة المولدة للعزوم تعتبر طريقة ثانية وربما أسهل في كثير من الحالات للحصول على عزوم التوزيع .

تعريـف :

تعرّف الدالة المولدة للعزوم حول الصفر التي سنرمز لها بالرمز $\phi_x(\theta)$ كما يلي :

$$\boxed{\phi_x(\theta) = E(e^{\theta x})} \longrightarrow \quad (23)$$

أي أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير X ماهي إلا القيمة المتوقعة للدالة $e^{\theta x}$. حيث تعرف الدالة كما هو ملاحظ بوساطة θ (حيث θ هذه أي رمز يمكن اختياره) وسوف يتضح أهمية هذا الرمز θ في الخطوات التالية :

من معلوماتنا عن التوقع يمكن كتابة المعادلة السابقة رقم (23) كما يلي :

$$\phi_x(\theta) = E(e^{\theta x})$$

فإذا كان X متقطعًا فإن:

$$\boxed{\phi_x(\theta) = \sum_x e^{\theta x} f(x)} \longrightarrow (24)$$

وإذا كان X متصلاً فإن:

$$\boxed{\phi_x(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)\ dx} \longrightarrow (25)$$

والدالة $e^{\theta x}$ هي الدالة الأسية مرفوعة للأس θx ويمكن كتابتها بالتفصيل (كما نعلم من مبادىء الرياضة البحتة) كما يلي:

$$e^{\theta x} = 1 + \frac{(\theta x)}{1!} + \frac{(\theta x)^2}{2!} + .. + \frac{(\theta x)^r}{r!} + .. \infty$$

فالطرف الأيمن هو مفكوك الدالة الأسية ويمكن كتابته كما سبق ويمكن كتابته بصورة مختصرة كما يلي:

$$e^{\theta x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\theta x)^r}{r!}$$

نعود الآن للدالة المولدة للعزوم حيث يمكن كتابتها كما يلي (للمتغير المتقطع):

$$\begin{aligned}\phi_x(\theta) &= \sum_x e^{\theta x} f(x)\\ &= \sum_x \left\{ 1 + \frac{(\theta x)}{1!} + \frac{(\theta x)^2}{2!} + .. + \frac{(\theta x)^r}{r!} + .. \infty \right\} f(x)\\ &= \sum_x f(x) + \frac{\theta}{1!} \sum_x x f(x) + \frac{\theta^2}{2!} \sum_x x^2 f(x) + \dots\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_x(\theta) = \mu'_0 + \frac{\theta}{1!}\mu'_1 + \frac{\theta^2}{2!}\mu'_2 + .. + \frac{\theta^r}{r!}\mu'_r + ..} \longrightarrow (26)$$

وذلك لأن

$$\mu'_0 = \sum_x x^0 f(x) = 1$$

$$, \mu'_1 = \sum_x x f(x)$$

$$, \mu'_2 = \sum_x x^2 f(x)$$

$$, \mu'_r = \sum_x x^r f(x)$$

وهكذا..

والمعادلة رقم (26) مهمة جدًا إذ إنها تعطي الدالة المولدة للعزوم بالتفصيل، أو بمعنى آخر تعطي العزوم كلها مرة واحدة. كما أنها تظهر أهمية θ . فهي تقول:

- إن العزم الأول حول الصفر هو معامل $\frac{\theta}{1!}$ في الدالة المولدة للعزم.
- وإن العزم الثاني حول الصفر هو معامل $\frac{\theta^2}{2!}$ في الدالة
- وإن العزم الثالث حول الصفر هو معامل $\frac{\theta^3}{3!}$ في الدالة
- وإن العزم الرائي حول الصفر هو معامل $\frac{\theta^r}{r!}$ في الدالة

وباختصار، فإن المعادلة تقول: إن العزم الرائي r th mement حول الصفر ماهو إلا معامل $\frac{\theta^r}{r!}$ في الدالة المولدة للعزوم. وبالتالي فإنه يمكننا الحصول على أي عزم نريده وذلك بالحصول على الدالة المولدة للعزوم ثم تطبيق القاعدة السابقة.

والمعادلة رقم (26) يمكن كتابتها كما يلي:

$$\boxed{\phi_x(\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta^r}{r!}\mu'_r} \longrightarrow (27)$$

أو:

$$\boxed{\phi_x(\theta) = 1 + \frac{\theta}{1!}\mu'_1 + \frac{\theta^2}{2!}\mu'_2 + .. + \frac{\theta^r}{r!}\mu'_r + \dots}$$

(انظر صفحة ـ الفصل الرابع ـ حيث حصلنا على العزوم كلها مرة واحدة من الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المنتظم).

وإذا أمعنا النظر في الدالة المولدة للعزوم نجد أنها تتمتع بعدة خصائص نذكرها في الفقرة التالية، وبعضها مهم جدًا كما سوف نرى. حيث إننا سنصل إلى طريقة أخرى للحصول على العزوم عن طريق الدالة المولدة للعزوم.

خصائص الدالة المولدة للعزوم

(١) إذا وضعنا $\theta = 0$ في الدالة المولدة للعزوم نجد أن قيمة الدالة تساوي الواحد الصحيح. أي أن:

$$\boxed{\phi_x(0) = 1}$$

(٢) للحصول على العزم الرائي حول الصفر نفاضل الدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ θ عدد r من المرات ثم نعوض عن $\theta = 0$ (وهذه طريقة أخرى للحصول على العزوم).

أي أن:

$$\boxed{\left[\frac{d^{(r)}}{d\theta^r}\phi_x(\theta)\right]_{\theta=0} = \phi^{(r)}(0) = \mu_r' = E(X^r)}$$

أي أنه في حالة عدم استطاعتنا فك الدالة المولدة للعزوم بالتفصيل والحصول على العزوم كلها مرة واحدة فإنه يمكن بتفاضل الدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ θ عدد مرات يساوي رتبة العزم المطلوب، ثم وضع θ تساوي صفر يمكن الحصول على العزوم المختلفة.

(٣) وهذه الخاصية مهمة أيضا، لأنه يمكن منها استنتاج الدالة المولدة للعزوم المركزية (حول الوسط)، والخاصية تقول:

إذا كان a , b ثابتين فإنه حسب تعريف الدالة المولدة للعزوم يمكن كتابة:

$$\phi_{ax+b}(\theta) = E\left[e^{(ax+b)\theta}\right] = e^{\theta b}.E(e^{\theta ax})$$

$$\therefore \phi_{ax+b}(\theta) = e^{\theta b}.\phi_{ax}(\theta)$$

$$\therefore \phi_{ax+b}(\theta) = e^{\theta b}.\phi_x(a\theta)$$

فإذا كانت:

$$b = -\mu_1' \; ; \; a = 1$$

فإن:

$$\boxed{\phi_{x-\mu_1'}(\theta) = e^{-\theta\mu_1'}\phi_X(\theta)} \longrightarrow (28)$$

والصورة الأخيرة ما هي إلا الدالة المولدة للعزوم حول الوسط الحسابي. وهي تساوي الدالة المولدة للعزوم حول الصفر مضروبة في المقدار $e^{-\theta\mu_1'}$ ويرمز لها أحيانًا بالرمز $\phi_{cx}(\theta)$.

أي أنه للحصول على الدالة المولدة للعزوم حول الوسط نحصل أولاً على الدالة المولدة للعزوم حول الصفر، ثم نضربها في المقدار $e^{-\theta\mu_1'}$ حيث إن μ_1' كما نعلم هي الوسط الحسابي أو التوقع (أو العزم الأول حول الصفر).

(٤) الدالة المولدة للعزوم لمجموع متغيرين مستقلين:

إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين وكانت الدوال المولدة للعزوم حول الصفر لهما هي: $\phi_{x_1}(\theta)$, $\phi_{x_2}(\theta)$

فإن:

$$\phi_{x_1+x_2}(\theta) = E\left\{e^{\theta(x_1+x_2)}\right\}$$

$$\therefore \phi_{x_1+x_2}(\theta) = E\left(e^{\theta x_1+\theta x_2}\right)$$

$$= E\left(e^{\theta x_1} . e^{\theta x_2}\right)$$

وحيث إن المتغيرين مستقلان، فإن:

$$\phi_{x_1+x_2}(\theta) = E\left(e^{\theta x_1}\right) . E\left(e^{\theta x_2}\right)$$

$$\boxed{\therefore \phi_{x_1+x_2}(\theta) = \phi_{x_1}(\theta) . \phi_{x_2}(\theta)} \longrightarrow (29)$$

فكأن الدالة المولدة للعزوم لمجموع متغيرين مستقلين تساوي حاصل ضرب الدالة المولدة للعزوم لكل منهما.

ويمكن التعميم لأي عدد (n) من المتغيرات المستقلة كما يلي:

$$\boxed{\phi_{\Sigma x}(\theta) = E\left(e^{\theta \Sigma x}\right) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{x_i}(\theta)} \longrightarrow (30)$$

أي أن الدالة المولدة للعزوم لمجموع أي عدد من المتغيرات المستقلة تساوي حاصل ضرب الدوال المولدة للعزوم لكل منها.

فإذا كانت المتغيرات لها الدالة المولدة للعزوم نفسها (أي دالة الاحتمال نفسها) فإن الدالة المولدة للعزوم لمجموع هذه المتغيرات المستقلة هي:

$$\boxed{\phi_{\Sigma x}(\theta) = E\left(e^{\theta \Sigma x}\right) = \left[\phi_x(\theta)\right]^n} \longrightarrow (31)$$

والمعادلة الأخيرة رقم (31) هي الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لمجموع متغيرات مستقلة لها دالة الاحتمال نفسها أو الدالة المولدة للعزوم نفسها. وهي عبارة عن الدالة المولدة للعزوم لأي منها مرفوعة لأس n . (أو هي الدالة المولدة للعزوم مضروبة في نفسها عدد n من المرات).

(٥) الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للوسط الحسابي:

من الخاصية السابقة يمكن استنتاج الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للوسط الحسابي كما يلي:

$$\phi_{\frac{1}{n}\Sigma x_i}(\theta) = E\left(e^{\frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{\theta}{n} x_i}\right)$$

$$\boxed{\therefore \phi_{\bar{x}}(\theta) = \left[\phi_x\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]^n} \longrightarrow (32)$$

أي أن الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للوسط الحسابي لمجموعة من المتغيرات المستقلة التي لها دالة التوزيع نفسها ماهي إلا الدالة المولدة للعزوم لأي منها (مع وضع $\frac{\theta}{n}$ بدلاً من θ) مضروبة في نفسها عدد n من المرات (أو مرفوعة لأس n).

مثال (٣)

أوجد الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للمتغير X إذا كان يتبع توزيع ذي الحدين. أي أن:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث:

$$X = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$; p + q = 1$$

الحـــل:

من تعريف الدالة المولدة للعزوم حول الصفر نجد أن:

$$\phi_x(\theta) = E(e^{\theta x})$$
$$= \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} f(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^{\theta})^x q^{n-x}$$

$$\therefore \boxed{\phi_x(\theta) = (p e^{\theta} + q)^n}$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لتوزيع ذي الحدين.

مثال (٤)

في المثال السابق رقم (٣) اوجد:

ا ـ العزمين الأول والثاني حول الصفر

ب ـ الدالة المولدة للعزوم حول الوسط

الحـــل:

ا ـ من الخاصية الثانية من خواص الدالة المولدة للعزوم حول الصفر نفاضل الدالة المولدة للعزوم مرة، ثم نضع $\theta=0$ فنحصل على العزم الأول حول الصفر. ونفاضل مرة ثانية، ثم نضع $\theta=0$ فنحصل على العزم الثاني حول الصفر. وهكذا... (لاحظ أن التفاضل يتم بالنسبة لـ θ).

$$\therefore \phi_x(\theta) = (pe^{\theta} + q)^n$$

وتكون المشتقة التفاضلية الأولى كما يلي:

$$\phi'_x(\theta) = npe^{\theta}\left[pe^{\theta} + q\right]^{n-1}$$

ونحصل على العزم الأول حول الصفر لتوزيع ذي الحدين بوضع $\theta=0$ في المشتقة الأولى كما يلي:

$$\mu'_1 = \phi'_x(\theta) = np$$

وهو الوسط الحسابي أو توقع ذي الحدين. (وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها من المثال رقم ١)

وتكون المشتقة التفاضلية الثانية كما يلي:

$$\phi''_x(\theta) = n\,p\left[e^{\theta}(p e^{\theta} + q)^{n-1} + e^{\theta}(n-1)\,pe^{\theta}(pe^{\theta} + q)^{n-2}\right]$$

ونحصل على العزم الثاني حول الصفر بوضع $\theta = 0$

$$\therefore \mu'_2 = \phi''_x(\theta) = n\,p\left[1 + (n-1)\,p\right]$$

$$\therefore \mu'_2 = np + n(n-1)\,p^2$$

(وهي بطبيعة الحال النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في المثال رقم ١).

ب ـ الدالة المولدة للعزوم حول الوسط لذي الحدين:

ومن المعادلة رقم (28) نجد أن العلاقة بين الدالة المولدة للعزوم حول الوسط والدالة المولدة للعزوم حول الصفر هي:

$$\phi_{x-\mu'_1}(\theta) = e^{-\mu'_1\theta}\,\phi_x(\theta)$$

وحيث إن:

$$\mu'_1 = np$$

$$\phi_x(\theta) = (pe^{\theta} + q)^n$$

$$\therefore \phi_{cx}(\theta) = \phi_{x-\mu'_1}(\theta) = e^{-np\theta}(pe^{\theta} + q)^n$$
$$= (p\,e^{\theta}\,e^{-\theta p} + q\,e^{-\theta p})^n$$

$$\therefore \boxed{\phi_{cx} = \phi_{x-\mu_1'}(\theta) = (pe^{\theta q} + qe^{-\theta p})^n}$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم حول الوسط الحسابي لتوزيع ذي الحدين.

مثـال (٥)

أوجد الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لمتغير X يتبع توزيع بواسون. أي أن:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \; e^{-\lambda}}{x\,!}$$

حيث $x = 0, 1, 2, \ldots$ ، ثم أوجد الوسط الحسابي (العزم الأول حول الصفر) والتباين (العزم الثاني حول الوسط).

الحـل:

أ ـ الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لتوزيع بواسون:

$$\because \phi_x(\theta) = E(e^{\theta x})$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} f(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} \frac{\lambda^x \; e^{-\lambda}}{x\,!}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{\theta})^x}{x\,!}$$
$$= e^{-\lambda} . e^{\lambda e^{\theta}}$$

ذلك لأن:

$$e^{\lambda e^{\theta}} = 1 + \frac{\lambda e^{\theta}}{1\,!} + \frac{(\lambda e^{\theta})^2}{2\,!} + .. + \frac{(\lambda e^{\theta})^x}{x\,!} + ..$$

$$\therefore e^{\lambda e^{\theta}} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{\theta})^x}{x\,!}$$

$$\therefore \boxed{\phi_x(\theta) = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}}$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم (حول الصفر) لتوزيع بواسون.

ب ـ الحصول على μ_1', μ_2 لتوزيع بواسون:

وتكـون المشتقـة التفـاضلية الأولى للدالـة المـولـدة للعزوم حول الصفر هي (التفاضل بالنسبة لـ θ):

$$\phi_x'(\theta) = \lambda e^{\theta} . e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

ونحصل على μ_1' بوضع $\theta = 0$ كما يلي:

$$\mu_1' = \phi_x'(0) = \lambda$$

(أي أن الوسط الحسابي لتوزيع بواسون يساوي λ ، وهي النتيجة السابقة نفسها التي حصلنا عليها في المثال رقم ٢).

وتكون المشتقة التفاضلية الثانية للدالة المولدة للعزوم حول الصفر بالنسبة لـ θ هي:

$$\phi_x''(\theta) = \lambda e^{\theta} . \lambda e^{\theta} . e^{\lambda(e^{\theta}-1)} + \lambda e^{\theta} . e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

ونحصل على μ_2' بوضع $\theta = 0$ كما يلي:

$$\mu_2' = \phi_x''(0) = \lambda^2 + \lambda$$

وحيث إن العزم الثاني حول الوسط (أي التباين) هو:

$$\mu_2 = Var(x) = \mu_2' - \mu_1'^2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$
$$\therefore \mu_2 = Var(x) = \lambda$$

أي أن الوسط الحسابي لتوزيع بواسون يساوي التباين يساوي λ . (وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في المثال رقم ٢).

مثـــال (٦)

أوجد الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لمتغير عشوائي X دالة كثافة احتماله هي (التوزيع الطبيعي):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\mu}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

حيث $-\infty \leqslant X \leqslant \infty$

ثم أوجد العزم الأول حول الصفر، وكذلك الدالة المولدة للعزوم حول الوسط.

الحـــل:

أ ـ الدالة المولدة للعزوم حول الصفر:

$$\because \phi_x(\theta) = E(e^{\theta x})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2\theta x]} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2-2x(\mu+\theta\sigma^2)+\mu^2]} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2-2x(\mu+\theta\sigma^2)+(\mu+\theta\sigma^2)^2+\mu^2-(\mu+\theta\sigma^2)^2]} dx$$

$$= e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(\mu+\theta\sigma^2)]^2} dx$$

$$\boxed{\therefore \phi_x(\theta) = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}}$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للتوزيع الطبيعي.

ب ـ العزم الأول حول الصفر (الوسط الحسابي):

نفاضل $\phi_x(\theta)$ بالنسبة لـ θ ثم نضع $\theta = 0$:

$$\phi'_x(\theta) = (\mu + \sigma^2\theta)\, e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$$

$$\therefore \mu'_1 = \phi'_x(0) = \mu$$

أي أن الوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي يساوي μ.

جـ ـ الدالة المولدة للعزوم حول الوسط:

$$\because \phi_{cx}(\theta) = e^{-\mu'_1\theta} \cdot \phi_x(\theta)$$

وحيث إن:

$$\mu'_1 = \mu$$

$$, \phi_x(\theta) = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$$

$$\therefore \phi_{cx}(\theta) = e^{-\mu\theta} \cdot e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$$

$$\boxed{\therefore \phi_{cx}(\theta) = \phi_{x-\mu'_1}(\theta) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}}$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم حول الوسط للتوزيع الطبيعي.

ويمكن الحصول على μ_2 أي العزم الثاني حول الوسط (أو التباين) بمفاضلة الدالة المولدة للعزوم حول الوسط مرتين بالنسبة لـ θ ثم بوضع $\theta = 0$ فنحصل على:

$$\mu_2 = Var(X) = \sigma^2$$

٧ ـ الدالة المميزة Characteristic Function

ويمكن أيضًا الحصول على كل عزوم المتغير العشوائي بواسطة الدالة المميزة. وتمتاز هذه الدالة المميزة على الدالة المولدة للعزوم في أنه يمكن الحصول عليها دائمًا (من الناحية الرياضية).

تعريف

إذا وضعنا $i\theta$ بدلاً من θ في الدالة المولدة للعزوم، حيث $i = \sqrt{-1}$ فإن الدالة الجديدة هي التي تسمى الدالة المميزة. ويرمز لها بنفس رمز الدالة المولدة للعزوم. أي أن:

$$\boxed{\phi_x(\theta) = E(e^{i\theta x})} \longrightarrow (33)$$

$$\therefore \phi_x(\theta) = \sum_x e^{i\theta x} f(x)$$

or

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(x)\, dx$$

$$= 1 + \frac{i\theta}{1!}\mu'_1 + \frac{(i\theta)^2}{2}\mu'_2 + \dots + \frac{(i\theta)^r}{r!}\mu'_r + \dots$$

ونلاحظ أن الدالة المميزة لها نفس خواص الدالة المولدة للعزوم. ولذا فإنه يرمز لها بالرمز نفسه.

وعلى سبيل المثال فإن العزم الرائي μ'_r هو معامل $\frac{(i\theta)^r}{r!}$ في مفكوك الدالة المميزة.

وكل ما تتميز به الدالة هو أنه يمكن إيجادها دائمًا من الناحية الرياضية* كما ذكرنا بينما الدالة المولدة للعزوم قد يصعب الحصول عليها في بعض الأحيان.

وهكذا! إذا عدنا إلى الأمثلة السابقة عن الدالة المولدة للعزوم ـ مثلاً ـ نجد أن الدالة المميزة يمكن الحصول عليها بسهولة، وذلك بوضع $i\theta$ بدلاً من θ.

وبالتالي فإن الدوال المميزة للتوزيعات التي ذكرت هي:

توزيع ذي الحدين $\longleftarrow$ $\phi_x(\theta) = (pe^{i\theta} + q)^n$

توزيع بواسون $\longleftarrow$ $\phi_x(\theta) = e^{\lambda(e^{i\theta}-1)}$

التوزيع الطبيعي $\longleftarrow$ $\phi_x(\theta) = e^{\mu(i\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2(i\theta)^2}$

وبالطريقة نفسها مع أي توزيع آخر.

٨ ـ الدالة التراكمية Cumulative Function

تعتبر الدالة التراكمية طريقة أخرى للحصول على العزوم بل إنها تفيد في إعطاء العزوم حول الوسط μ_2 و μ_3 و μ_4 بالإضافة إلى μ'_1 (العزم الأول حول الصفر).

تعريف

الدالة التراكمية هي لوغاريتم الدالة المميزة. (واللوغاريتم للأساس الطبيعي).
فإذا رمزنا للدالة التراكمية بالرمز $\psi_x(\theta)$ فإن:

* وهذه لها برهان رياضي ليس من الضروري ذكره هنا.

$$\psi_x \theta = \ln\left[\phi_x(\theta)\right] \longrightarrow \quad (34)$$

$$\therefore \psi_x(\theta) = \ln\left[1 + \frac{i\theta}{1!}\mu_1' + \frac{(i\theta)^2}{2!}\mu_2' + \dots\right]$$

وحيث إن مفكوك الدالة اللوغاريتيمة يأخذ الشكل:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\therefore \psi_x(\theta) = \left[\frac{i\theta}{1!}\mu_1' + \frac{(i\theta)^2}{2!}\mu_2' + \dots\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{i\theta}{1!}1 + \frac{(i\theta)^2}{2}2 + \dots\right]^2 + \frac{1}{3}\left[\dots\right]^3 - \frac{1}{4}\left[\dots\right]^4 + \dots \quad (35)$$

وبإعادة كتابة $\psi_x(\theta)$ على الصورة التالية:

$$\psi_x(\theta) = \frac{i\theta}{1!}k_1 + \frac{(i\theta)^2}{2!}k_2 + \frac{(i\theta)^3}{3!}k_3 + \frac{(i\theta)^4}{4!}k_4 + \dots \longrightarrow \quad (36)$$

وبمساواة معاملات $\frac{(i\theta)^r}{r!}$ في المعادلتين (35)، (36) نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \mu_1' \\ k_2 &= \mu_2' - \mu_1'^2 = \mu_2 \\ k_3 &= \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3 = \mu_3 \\ k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

أي أنه للحصول على الدالة التراكمية نحصل أولاً على الدالة المميزة، ثم نأخذ لوغاريتم هذه الدالة المميزة ونأخذ معاملات $\frac{(i\theta)^r}{r!}$ فنجد أن k_1 وهي معامل $\frac{i\theta}{1!}$ هي μ_1' (الوسط الحسابي).

k_2 وهي معامل $\frac{(i\theta)^2}{2!}$ هي μ_2 (التباين).

k_3 وهي معامل $\frac{(i\theta)^3}{3!}$ هي μ_3 (العزم الثالث حول الوسط).

k_4 وهي معامل $\frac{(i\theta)^4}{4!}$ هي $\mu_4 - 3\mu_2^2$.

ومنها نحصل على μ_4.

أي أن الدالة التراكمية طريقة سهلة ومباشرة للحصول على العزوم حول الوسط الحسابي بالإضافة إلى العزم الأول حول الصفر.

الدالة التراكمية لمجموع متغيرات مستقلة

النظرية تقول: إن الدالة التراكمية لمجموع متغيرات مستقلة يساوي مجموع الدوال التراكمية لهذه المتغيرات.

البرهان:

من خواص الدوال المولدة للعزوم أو المميزة يمكن أن تكتب:

$$\phi_{\Sigma x}(\theta) = \phi_{x_1}(\theta)\cdot\phi_{x_2}(\theta)\dots\phi_{x_n}(\theta)$$

وحيث إن الدالة التراكمية هي لوغاريتم الدالة المميزة:

$$\therefore \psi_{\Sigma x}(\theta) = \ln \phi_{\Sigma x}(\theta)$$

$$= \ln\left[\phi_{x_1}(\theta)\cdot\phi_{x_2}(\theta)\dots\phi_{x_n}(\theta)\right]$$

$$= \ln \phi_{x_1}(\theta) + \ln \phi_{x_2}(\theta) + \dots + \ln \phi_{x_n}(\theta)$$

$$\boxed{\therefore \psi_{\Sigma x}(\theta) = \psi_{x_1}(\theta) + \psi_{x_2}(\theta) + .. + \psi_{x_n}(\theta)} \longrightarrow (38)$$

مثـال (٧)

في المثال السابق رقم (٦) الخاص بالتوزيع الطبيعي اوجد:

ا) الدالة التراكمية.

ب) ومنها أوجد العزوم الأربعة حول الوسط.

جـ) معاملي الالتواء والتفرطح.

الحـل:

ا) الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي

لقد توصلنا في المثال السابق إلى أن الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للتوزيع الطبيعي هي:

$$\phi_x(\theta) = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$$

وبذلك تكون الدالة المميزة هي:

$$\phi_x(\theta) = e^{\mu(i\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2(i\theta)^2}$$

وحيث إن الدالة التراكمية هي لوغاريتم الدالة المميزة فإنها تأخذ الشكل التالي:

$$\boxed{\psi_x(\theta) = \mu(i\theta) + \frac{1}{2}(i\theta)^2\,\sigma^2}$$

ب) العزوم الأربعة حول الوسط للتوزيع الطبيعي

نعلم من مبادىء العزوم أن العزم الأول حول الوسط يساوي صفرًا دائمًا (أيًا كان التوزيع).

أي أن:

$$\boxed{\mu_1 = 0}$$

ولكن من مجموعة المعادلات (37) نجد أن:

μ_1' هي معامل $\frac{i\theta}{1!}$ في الدالة التراكمية التي رمزنا لها بالرمز k_1. وبالنظر إلى الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي نجد أن:

$$\boxed{k_1 = \mu_1' = \mu} \quad \text{(الوسط الحسابي)}$$

μ_2 هي معامل $\frac{(i\theta)^2}{2!}$ في الدالة التراكمية التي رمزنا لها بالرمز k_2. ومن الدالة نجد أن:

$$\boxed{k_2 = \mu_2 = \sigma^2}$$

(التبايـن)
أو العزم الثاني حول الوسط

μ_3 هي معامل $\frac{(i\theta)^3}{3!}$ في الدالة التراكمية التي رمزنا لها بالرمز k_3. ومنها نجد أن:

$$\boxed{k_3 = \mu_3 = 0} \quad \text{(العزم الثالث حول الوسط)}$$

$\mu_4 - 3\mu_2^2$ هي معامل $\frac{(i\theta)^4}{4!}$ في الدالة التراكمية التي رمزنا لها بالرمز k_4. ومنها:

$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = 0$$

وحيث إن
$$\mu_2 = \sigma^2$$
$$\therefore \mu_4 - 3\sigma^4 = 0$$

$$\boxed{\therefore \mu_4 = 3\sigma^4}$$ (العزم الرابع حول الوسط)

جـ) معاملات الالتواء والتفرطح للتوزيع الطبيعي

وحيث إن معامل الالتواء β_1 هو:
$$\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$$

وحيث إن :
$$\mu_3 = 0 ; \mu_2 = \sigma^2$$

$$\boxed{\therefore \beta_1 = 0}$$

أي أن معامل الالتواء للتوزيع الطبيعي يساوي صفرًا.

وحيث إن معامل التفرطح β_2 هو:
$$\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$$

وحيث إن :
$$\mu_4 = 3\sigma^4 ; \mu_2 = \sigma^2$$

$$\boxed{\therefore \beta_2 = 3}$$

أي أن معامل التفرطح للتوزيع الطبيعي يساوي ٣ .

مثـال (٨)

أوجد الدالة التراكمية لتوزيع بواسون، ومنها أوجد معاملي الالتواء والتفرطح .

الحـل:

من المثال رقم (٥) نجد أن الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون هي :
$$\phi_x(\theta) = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

وتكون الدالة المميزة هي :
$$\phi_x(\theta) = e^{\lambda(e^{i\theta}-1)}$$

ومنها تكون الدالة التراكمية لتوزيع بواسون هي :
$$\psi_x(\theta) = \ln \phi_x(\theta)$$

$$\boxed{\therefore \psi_x(\theta) = \lambda(e^{i\theta}-1)}$$

أو:

$$\boxed{\therefore \psi_x(\theta) = \lambda\left(\frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + ..\right)}$$

وهذه هي الدالة التراكمية لتوزيع بواسون. ومنها :

$$k_1 = \mu_1' = \lambda$$
$$; k_2 = \mu_2 = \lambda$$
$$; k_3 = \mu_3 = \lambda$$
$$; k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = \lambda$$
$$\therefore \mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$$

وحيث إن معامل الالتواء β_1 هو:
$$\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$$

$$\boxed{\therefore \beta_1 = \frac{1}{\lambda}}$$

وحيث إن معامل التفرطح β_2 هو:

$$\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$$

$$\boxed{\therefore \beta_2 = 3 + \frac{1}{\lambda}}$$

ويمكن الحصول على المعاملين المعدّلين كما يلي:

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$; \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{1}{\lambda}$$

وبديهي أنها النتائج نفسها التي حصلنا عليها سابقًا.

تمارين الفصل الخامس

(١) إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي تأخذ الشكل:

$$\phi_x(\theta) = e^{a\theta + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$$

فاوجد معاملي الالتواء والتفرطح للتوزيع:

(٢) إذا كان X متغيراً عشوائيًا متصلاً في المدى $-a \le X \le a$ حيث دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{2a}$$

فاوجـد:

ا) الدالة المولدة للعزوم للمتغير X ، ب) العزوم الأربعة حول الوسط، جـ) معاملي الالتواء والتفرطح.

(٣) إذا كان X متغيراً عشوائيًا يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين p , n فاوجد باستخدام الدالة المولدة للعزوم العزمين الثاني والثالث حول الوسط.

(٤) إذا كانت دالة كثافة احتمال المتغير X هي:

$$f(x) = k(1-x)$$

حيث $0 < X < 1$ فاوجد:

ا) الوسط الحسابي والتباين للمتغير X ، ب) العزمين الثالث والرابع حول الوسط، جـ) معاملي الالتواء والتفرطح.

(٥) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X، Y هي:

$$f(x, y) = k(x + y + 4)$$

حيث: $0 < Y < 2 , 0 < X < 4$

فاوجد:

ا) دالة كثافة الاحتمال الهامشي $f_1(x)$

ب) $\mu_1'(x) ; \mu_2(x)$.

جـ) دالة كثافة الاحتمال الهامشي $f_2(y)$

د) $\mu_1'(y) ; \mu_2(y)$.

(٦) إذا كان X متغيراً عشوائيًا متصلاً في المدى $0 \le X \le \infty$ وكانت دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} X^{n-1}$$

فاوجـد:

ا) الدالة المولدة للعزوم للمتغير X

ب) الدالة التراكمية.

جـ) $\mu_1', \mu_2, \mu_3, \mu_4$

د) معاملي الالتواء والتفرطح.

مع أطيب أمنياتي