محاضرات

في

الجبر الخطي

(الجزء الثاني)

إعداد

دكتور/ سعد شرقاوي

قسم الرياضيات – كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

✓ **رؤية كلية العلوم بقنا**

التميز في تعليم العلوم الأساسية والبحث العلمي للمساهمة في التنمية المستدامة.

✓ **رسالة كلية العلوم بقنا**

تقديم تعليم مميز في مجالات العلوم الأساسية وإنتاج بحوث علمية تطبيقية للمساهمة في التنمية المستدامة من خلال خريجين متميزين طبقا للمعايير الأكاديمية القومية، وتطوير مهارات وقدرات الموارد البشرية، وتوفير خدمات مجتمعية وبيئية تلبي طموحات مجتمع جنوب الوادي، وبناء الشراكات المجتمعية الفاعلة.

الباب الثالث

التحويلات الخطية Linear Transformations

في هذا الباب سنتناول دراسة دوال المتجهات ذات القيم الاتجاهية لمتغير متجه أي الدوال التي يكون فيها كلا من المتغير المستقل والمتغير التابع عبارة عن متجه ، وهي ما يُسمى بالتحويلات الخطية ، ولها تطبيقات هامة كثيرة في أفرع العلوم الطبيعية.

تعريف(١):(مفهوم التحويل الخطي)

ليكن V,W فضاءين متجهين ولتكن $T:V\to W$ دالة (أو راسم) فإن T تُسمى تحويل خطي إذا تحقق الشرطان:

$$\begin{array}{l}(1)\ T(u+v)=T(u)+T(v)\ ,\\(2)\ T(ku)=kT(u).\end{array}\quad \forall u,v\in V, k\ scalar.$$

وإذا كان $V=W$ فإن التحويل التحويل الخطي T يُسمى مؤثر خطي فوق V
Linear Operator over V .

أمثلة:

١ – الدالة $T:R^2\to R^3; T(x,y)=(x,x+y,x-y)$ تكون تحويل خطي (وضح ذلك؟).

الحل: $let\ u,v\in R^2, k\ scalar\ ; u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)$

$$\begin{aligned}\therefore T(u+v)&=T(x_1+x_2,y_1+y_2)\\&=(x_1+x_2,(x_1+x_2)+(y_1+y_2),(x_1+x_2)-(y_1+y_2))\\&=(x_1,x_1+y_1,x_1-y_1)+(x_2,x_2+y_2,x_2-y_2)\\&=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)\\&=T(u)+T(v)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(ku)&=T(kx_1,ky_1)\\&=(kx_1,kx_1+ky_1,kx_1-ky_1)\\&=k(x_1,x_1+y_1,x_1-y_1)\\&=kT(x_1,y_1)\\&=kT(u).\end{aligned}$$

وإذاً T تحويل خطي.

٢– تحقق من أن الدالة $T: R^2 \to R^2 ; T(x,y) = (2x+3y, -x)$ تكون مؤثر خطي

الحل: $let\ u, v \in R^2, k\ scalar\ ; u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned}
\therefore T(u+v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2), -(x_1 + x_2)) \\
&= (2x_1 + 3y_1, -x_1) + (2x_2 + 3y_2, -x_2) \\
&= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&= T(u) + T(v) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(ku) &= T(kx_1, ky_1) \\
&= (2kx_1 + 3ky_1, -kx_1) \\
&= k(2x_1 + 3y_1, -x_1) \\
&= kT(x_1, y_1) \\
&= kT(u).
\end{aligned}$$

وإذاً T مؤثر خطي فوق R^2.

٣– حدد ما إذا كانت الدالة $T: R^2 \to R^2 ; T(x,y) = (xy, y)$ تحويل خطي أم لا؟

الحل: $let\ u, v \in R^2, k\ scalar\ ; u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), y_1 + y_2) \\
&= (x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2, y_1 + y_2) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(u) + T(v) &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&= (x_1 y_1, y_1) + (x_2 y_2, y_2) \\
&= (x_1 y_1 + x_2 y_2, y_1 + y_2).
\end{aligned}$$

$$\therefore T(u+v) \neq T(u) + T(v)$$

وإذاً T لا تكون تحويل خطي.

تمرين: حدد أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي وأيها لا تكون(مع ذِكر السبب)؟

(1) $T: R^2 \to R^2 ; T(x,y) = (x+2y, 3x)$.

(2) $T: R^2 \to R^2 ; T(x,y) = (x+y+1, x-y+1)$.

(3) $T: R^2 \to R^2 ; T(x,y) = (x+y, x-y)$.

(4) $T: R^3 \to R^2 ; T(x,y,z) = (x,y)$.

(5) $T: R^3 \to R^3 ; T(x,y,z) = (x+1, 2y, z)$.

نتيجة: إذا كان $T:V\to W$ تحويل خطي فإن:

$$T(c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n)=c_1T(v_1)+c_2T(v_2)+\ldots+c_nT(v_n).$$
$$\forall\, v_1,v_2,\ldots,v_n\in V,\ c_1,c_2,\ldots,c_n\ \ scalars.$$

تعريف(٢):(مفهوم المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي)

The Standard Matrix of Linear Transformation:

ليكن $T:R^n\to R^m$ تحويل خطي وليكن $e_1,e_2,\ldots,e_n$ هو الأساس المعتاد للفضاء R^n (مجال التحويل T). فإن المصفوفة من النوع $m\times n$ والتي عمودها j هو المتجه $T(e_j)$ حيث $j=1,2,\ldots,n$ تُسمى المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T .

(وعموما فإن المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:V\to W$ هي المصفوفة التي أعمدهّا عبارة عن صور متجهات الأساس المعتاد للفضاء المتجه V).

أمثلة:

١– أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي:

$$T:R^3\to R\ \ ;T(x,y,z)=x-y+3z$$

الحل: الأساس المعتاد للفضاء R^3 هو $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$ ويكون:

$$T(e_1)=T(1,0,0)=1\ ,$$
$$T(e_2)=T(0,1,0)=-1\ ,$$
$$T(e_3)=T(0,0,1)=3$$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

٢– أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي:

$$T:R^2\to R^3\ \ ;T(x,y)=(x+y,3y,2x-y)$$

الحل: الأساس المعتاد للفضاء R^2 هو $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ ويكون:

$$T(e_1)=T(1,0)=(1,0,2)\ ,$$
$$T(e_2)=T(0,1)=(1,3,-1)$$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

٣- أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي:

$T : R^3 \to R^4 \ ;T(x,y,z) = (x+y, x-y, z, x)$

الحل: الأساس المعتاد للفضاء R^3 هو $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ ويكون:

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,1,0,1)$,

$T(e_2) = T(0,1,0) = (1,-1,0,0)$,

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,1,0)$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

تعريف(٣):(**التحويل الخطي الأحادي** 1-1 Linear Transformation)

التحويل الخطي $T : V \to W$ يُسمى تحويل خطي أحادي إذا تحقق الشرط:

$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v \ \ \forall u,v \in V.$

(بمعنى أن كل متجهين مختلفين في المجال يكون لهما صورتين مختلفتين في المجال المقابل).

أمثلة:

١- التحويل الخطي $T : R^2 \to R^2 \ ;T(x,y) = (x+y, x-y)$ يكون أحادي (وضح ذلك؟).

الحل:

$$\begin{aligned}
&\text{Let } u,v \in R^2 \ ;u = (x_1,y_1), v = (x_2,y_2)\ , \\
&T(u) = T(v) \Rightarrow T(x_1,y_1) = T(x_2,y_2) \\
&\qquad \Rightarrow (x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2) \\
&\qquad \Rightarrow x_1+y_1 = x_2+y_2\ ,\ x_1-y_1 = x_2-y_2 \\
&\qquad \Rightarrow 2x_1 = 2x_2\ ,\ 2y_1 = 2y_2 \\
&\qquad \Rightarrow x_1 = x_2\ ,\ y_1 = y_2 \\
&\qquad \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \\
&\qquad \Rightarrow u = v
\end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

٢- حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T:R^3 \to R^2 \;\; ;T(x,y,z)=(x,y)$ أحادي أم لا (مع ذِكر السبب؟).

الحل:

$$(1,2,3),(1,2,4)\in R^3 \;\; ,T(1,2,3)=T(1,2,4)=(1,2)$$

أي أنه ليس لكل متجهين مختلفين في المجال R^3 صورتين مختلفتين في المجال المقابل R^2

وإذاً T ليس أحادي.

٣- حدد ما إذا كان التحويل الخطي:

$$T:R^2 \to R^3 \;\; ;T(x,y)=(x+y,x-y,x+2y)$$

أحادي أم لا (مع ذِكر السبب؟).

الحل:

Let $u,v\in R^2 \;\; ;u=(x_1,y_1),v=(x_2,y_2)$,

$$\begin{aligned}
T(u)=T(v) &\Rightarrow T(x_1,y_1)=T(x_2,y_2)\\
&\Rightarrow (x_1+y_1,\, x_1-y_1,\, x_1+2y_1)=(x_2+y_2,\, x_2-y_2,\, x_2+2y_2)\\
&\Rightarrow x_1+y_1=x_2+y_2 \;,\; x_1-y_1=x_2-y_2 \;,\; x_1+2y_1=x_2+2y_2\\
&\Rightarrow x_1=x_2 \;,\; y_1=y_2\\
&\Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)\\
&\Rightarrow u=v
\end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

تعريف(٤):(نواة التحويل الخطي Kernel of Linear Transformation)

نواة التحويل الخطي $T: V \to W$ هي عبارة عن المجموعة الجزئية من الفضاء المتجه V والتي تتكون من كل المتجهات $u \in V$ بحيث يكون $T(u) = 0$ ويُرمز لنواة التحويل الخطي T بالرمز $\ker T$ (أي $\ker T = \{u \in V : T(u) = 0_W\} \subset V$).

وإذا كانت A هي المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T فإن نواة التحويل T تكون هي الفضاء الصفري للمصفوفة المعتادة A (أي $\ker T = N(A)$).

أمثلة:

١- أوجد $\ker T$ للتحويل الخطي $T: R^2 \to R^2 \ ; T(x,y) = (x+y, x-y)$

الحل:

$$\ker T = \{(x,y) \in R^2 : T(x,y) = 0\}$$
$$\therefore T(x,y) = (x+y, x-y) = (0,0)$$
$$\Rightarrow x+y=0, x-y=0$$
$$\Rightarrow x=0, y=0$$
$$\therefore \ker T = \{(0,0)\} = \{0\}.$$

٢- أوجد $\ker T$ للتحويل الخطي $T: R^3 \to R^2 \ ; T(x,y,z) = (x,y)$

الحل:

$$\ker T = \{(x,y,z) \in R^3 : T(x,y,z) = 0\}$$
$$\therefore T(x,y,z) = (x,y) = (0,0)$$
$$\Rightarrow x=0, y=0, z=s \ ; s \in R$$
$$\therefore \ker T = \{(0,0,s) : s \in R\}.$$

٣- أوجد $\ker T$ للتحويل الخطي $T: R^4 \to R^2 \ ; T(x,y,z,w) = (x+y, z+w)$

الحل:

$$\ker T = \{(x,y,z,w) \in R^4 : T(x,y,z,w) = 0\}$$
$$\therefore T(x,y,z,w) = (x+y, z+w) = (0,0)$$
$$\Rightarrow x+y=0, z+w=0$$
$$\Rightarrow x=-y, z=-w$$
$$put \ \ y=s, w=t \ ; s,t \in R$$
$$\therefore \ker T = \{(-s,s,-t,t) : s,t \in R\}.$$

نظرية(١): نواة التحويل الخطي $T:V\to W$ تكون فضاء جزئي من الفضاء V .

البرهان: $\ker T=\{u\in V:T(u)=0_W\}\subset V$ يتبقى التحقق من شرطي الفضاء الجزئي:

(1) Let $u,v\in\ker T\Rightarrow T(u)=T(v)=0$,

$T(u+v)=T(u)+T(v)=0+0=0.$

$\therefore u+v\in\ker T.$

(2) Let $u\in\ker T, k\ scalar\Rightarrow T(u)=0$,

$T(ku)=kT(u)=k0=0.$

$\therefore ku\in\ker T.$

وإذاً $\ker T$ تكون فضاء جزئي من الفضاء V .

نظرية(٢): التحويل الخطي $T:V\to W$ يكون أحادياً إذا وإذا فقط كان $\ker T=\{0\}$

البرهان:

(أولاً) نفرض أن $\ker T=\{0\}$ وسنثبت أن T أحادي:

Let $u,v\in V, T(u)=T(v)$

$\therefore T(u)-T(v)=0$

$\Rightarrow T(u-v)=0$

$\Rightarrow u-v\in\ker T=\{0\}$

$\Rightarrow u-v=0$

$\Rightarrow u=v.$

وإذاً T أحادي.

(ثانياً) نفرض أن T أحادي وسنثبت أن $\ker T=\{0\}$:

Let $u\in\ker T$,

$\therefore T(u)=0, T(0)=0$

$\Rightarrow T(u)=T(0)$

$\Rightarrow u=0\ ;\ T\ is\ 1-1$

$\therefore \ker T=\{0\}.$

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

نظرية(٣): ليكن $T:V\to W$ تحويل خطي بحيث $\ker T=\{0\}$

فإذا كانت $v_1,v_2,...,v_n$ متجهات مستقلة خطياً في الفضاء المتجه V

فإن المتجهات $T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)$ تكون أيضاً مستقلة خطياً في الفضاء المتجه W.

البرهان: Let $c_1,c_2,...,c_n$ *scalars* ,

$$c_1T(v_1)+c_2T(v_2)+...+c_nT(v_n)=0$$
$$\Rightarrow T(c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n)=0$$
$$\Rightarrow (c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n)\in\ker T=\{0\}$$
$$\Rightarrow c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=0$$
$$\Rightarrow c_1=c_2=...=c_n=0.$$

(حيث $v_1,v_2,...,v_n$ مستقلة خطياً).

وإذاً $T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)$ تكون مستقلة خطياً في W .

تمرين: لكل من الدوال الآتية:

(1) $T:R^2\to R^2\ ;T(x,y)=(x+y,y).$

(2) $T:R^2\to R^3\ ;T(x,y)=(x+y,y,x-y).$

(3) $T:R^3\to R^2\ ;T(x,y,z)=(x,y).$

(أ) تحقق من أن T تكون تحويل خطي.

(ب) تحقق من أن $\ker T=N(A)$ حيث A هي المصفوفة المعتادة للتحويل T.

(ج) هل T أحادي (واذكر السبب)؟.

تعريف(٥):(التحويل الخطي الفوقي Onto Linear Transformation)

ليكن $T: V \to W$ تحويل خطي فإن مجموعة كل المتجهات من الفضاء W والتي تكون صوراً – بتأثير التحويل T – لمتجه واحد على الأقل من متجهات الفضاء V تُسمى مدى أو صورة التحويل T (Range or Image of T) ويُرمز لها $\operatorname{Im}T$ (أي $\operatorname{Im}T = \{w \in W : \exists v \in V , T(v) = w\} \subset W$).

وإذا كان لكل متجه w في المجال المقابل W يوجد أصل v في المجال V بحيث $T(v) = w$ (أي أن $\operatorname{Im}T = W$ مدى التحويل يساوي المجال المقابل للتحويل)

فإن التحويل الخطي T يُسمى تحويل خطي فوقي.

أمثلة:

١– تحقق من أن التحويل الخطي $T: R^2 \to R^2 \;\; ; T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ يكون فوقي.

الحل:

نفرض المتجه (y_1, y_2) في الفضاء R^2 (المجال المقابل) ونبحث إيجاد المتجه (x_1, x_2) في الفضاء R^2 (المجال) بحيث يكون $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ أي أن:

$$(x_1 + x_2, x_1 - x_2) = (y_1, y_2)$$

$$\therefore \begin{array}{l} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{array}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -2 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & (-1/2)(y_2 - y_1) \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & (1/2)(y_2 + y_1) \\ 0 & 1 & (-1/2)(y_2 - y_1) \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{array}{l} x_1 = (1/2)(y_2 + y_1), \\ x_2 = (-1/2)(y_2 - y_1). \end{array}$$

ومن ثم يكون لكل متجه في المجال المقابل أصل في المجال ،

وعلى ذلك يكون T تحويل فوقي.

٢- هل التحويل الخطي $T: R^2 \to R^3 \ ; T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2)$ فوقي (اذكر السبب)؟.

<u>الحل:</u>

نفرض المتجه (y_1, y_2, y_3) في الفضاء R^3 (المجال المقابل للتحويل) ،

ونبحث إيجاد المتجه (x_1, x_2) في الفضاء R^2 (مجال التحويل)

بحيث يكون $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$ أي أن:

$$(x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 = y_1 \\ \therefore\ & 2x_1 + x_2 = y_2 \\ & 3x_1 + 3x_2 = y_3 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 2 & 1 & y_2 \\ 3 & 3 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 0 & -3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & -3 & y_3 - 3y_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 0 & -3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & y_3 - y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

ومن ثم يكون لمجموعة المعادلات الخطية حل فقط إذا كان $y_3 - y_2 - y_1 = 0$

أي يوجد فقط للمتجهات (y_1, y_2, y_3) التي لها $y_3 = y_2 + y_1$ في المجال المقابل أصل (x_1, x_2) في المجال ، وعلى ذلك T لا يكون تحويل فوقي.

٣- تحقق من أن التحويل الخطي

$T : R^3 \to R^3 \ ; T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_3)$.

يكون فوقي.

الحل: لإثبات أن T تحويل فوقي:

نفرض المتجه (y_1, y_2, y_3) في الفضاء R^3 (المجال المقابل للتحويل)

ونبحث إيجاد المتجه (x_1, x_2, x_3) في R^3 (مجال التحويل)

بحيث يكون $T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ أي أن:

$$(x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 = y_1 \\ \therefore\ & x_2 + x_3 = y_2 \\ & x_3 = y_3 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_3 + r_1]{-r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y_1 + y_2 - y_3 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & x_1 = y_1 + y_2 - y_3 , \\ \therefore\ & x_2 = y_2 - y_3 , \\ & x_3 = y_3 . \end{aligned}$$

ومن ثم يكون لكل متجه في المجال المقابل أصل في المجال ،

وعلى ذلك يكون T تحويل فوقي.

٤– حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T:R^3 \to R^3$ المُعرف بالعلاقة:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

فوقي أم لا (مع ذِكر السبب)؟.

الحل:

✓ لتحديد ما إذا كان T تحويل فوقي أم لا:

نفرض المتجه (y_1, y_2, y_3) في الفضاء R^3 (المجال المقابل للتحويل)

ونبحث إيجاد المتجه (x_1, x_2, x_3) في R^3 (مجال التحويل)

بحيث يكون $T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ أي أن:

$$(x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad x_3 &= y_1 \\ \therefore \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &= y_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & 2 & y_2 \\ 2 & 1 & 3 & y_3 \end{pmatrix} \overset{?}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

ومن ثم يكون لمجموعة المعادلات الخطية حل فقط إذا كان $y_3 - y_2 - y_1 = 0$

أي يوجد فقط للمتجهات (y_1, y_2, y_3) في المجال المقابل التي لها $y_3 = y_2 + y_1$

أصل (x_1, x_2, x_3) في المجال ، وعلى ذلك T لا يكون تحويل فوقي.

نظرية(١): مدي التحويل الخطي $T:V\to W$ يكون فضاءاً جزئياَ من الفضاء W

البرهان:

$$\operatorname{Im}T=\{w\in W:\exists\, v\in V\,,T(v)=w\}\subset W$$

يتبقى التحقق من شرطي الفضاء الجزئي:

(1) Let $w_1,w_2\in \operatorname{Im}T\Rightarrow \exists\; v_1,v_2\in V\,,T(v_1)=w_1\,,T(v_2)=w_2$,
$\therefore w_1+w_2=T(v_1)+T(v_2)=T(v_1+v_2)\in \operatorname{Im}T.$
(2) Let $w\in \operatorname{Im}T\,,k\ scalar\Rightarrow \exists\; v\in V\,,T(v)=w$,
$\therefore kw=kT(v)=T(kv)\in \operatorname{Im}T.$

وإذاً $\operatorname{Im}T$ تكون فضاء جزئي من الفضاء W .

نظرية(٢): للتحويل الخطي $T:V\to W$ يتحقق:

$$\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)=\dim V.$$

بُعد نواة التحويل $\dim(\ker T)$ يُسمى صفرية التحويل $Nullity\ of\ T$

وبُعد مدى التحويل $\dim(\operatorname{Im}T)$ يُسمى رتبة التحويل $Rank\ of\ T$.

البرهان:

إذا كان $T=0$ (التحويل الصفري) فإن $0(v)=0_W\ \forall\, v\in V$

ويكون $\operatorname{Im}T=\{0\},\ker T=V$ ومن ثم يكون:

$$\dim(\ker T)=\dim V\Rightarrow \dim(\ker T)+0=\dim V$$
$$\Rightarrow \dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)=\dim V.$$

وهو المطلوب.

أما إذا كان $T\neq 0$ (تحويل غير الصفري) وليكن $\dim V=n,\dim(\ker T)=k$

فيوجد حالتان:

(الحالة الأولى) إذا كان $n=k$ فيتحقق المطلوب عندما يكون $\dim(\operatorname{Im}T)=0$:

$$\dim V=\dim(\ker T)\Rightarrow V=\ker T\Rightarrow \operatorname{Im}T=\{0\}\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}T)=0.$$

(الحالة الثانية) إذا كان $n>k$ فيتحقق المطلوب عندما يكون $\dim(\operatorname{Im}T)=n-k$:

بمعنى أنه يوجد عدد $n-k$ من المتجهات في الفضاء W تكون أساس لـــ $\operatorname{Im}T$.

لذلك نفرض أن مجموعة المتجهات $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ تكون أساس لـــ $\ker T$

وأن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ تكون أساس للفضاء V

وسنثبت أن مجموعة المتجهات $S = \{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), \ldots, T(v_n)\}$ تكون أساس لـــ $\operatorname{Im} T$ كما يلي:

أولاً: نثبت أن S تنشئ $\operatorname{Im} T$:

Let $w = T(v) \in \operatorname{Im} T \,; v \in V$,

$\therefore v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + \ldots + c_n v_n$

$\therefore w = T(v) = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + \ldots + c_n v_n)$

$\quad = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \ldots + c_k T(v_k) + c_{k+1} T(v_{k+1}) + \ldots + c_n T(v_n)$

وحيث إن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ أساس لنواة التحويل فهي تقع فيها فيكون:

$T(v_1) = T(v_2) = \ldots = T(v_k) = 0$

$\therefore w = c_{k+1} T(v_{k+1}) + c_{k+2} T(v_{k+2}) + \ldots + c_n T(v_n).$

وإذاً S تنشئ $\operatorname{Im} T$.

ثانياً: نثبت أن S مستقلة خطياً :

Let $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ *scalars* , $c_{k+1} T(v_{k+1}) + c_{k+2} T(v_{k+2}) + \ldots + c_n T(v_n) = 0$

$\therefore T(c_{k+1} v_{k+1} + c_{k+2} v_{k+2} + \ldots + c_n v_n) = 0$

$\Rightarrow (c_{k+1} v_{k+1} + c_{k+2} v_{k+2} + \ldots + c_n v_n) \in \ker T.$

وبالتالي يمكن كتابة هذا المتجه الذي ينتمي إلى $\ker T$ كتركيبة خطية من متجهات أساس $\ker T$ كما يلي:

$c_{k+1} v_{k+1} + c_{k+2} v_{k+2} + \ldots + c_n v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \;; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *scalars.*

$\therefore \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k + (-c_{k+1}) v_{k+1} + (-c_{k+2}) v_{k+2} + \ldots + (-c_n) v_n = 0$

وحيث إن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ أساس للفضاء V فيكون:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = c_{k+1} = c_{k+2} = \ldots = c_n = 0.$

وإذاً S مستقلة خطياً.

من أولاً وثانياً يكون $\dim(\operatorname{Im} T) = n - k$ وهو المطلوب.

تمرين(١): حقق النظرية السابقة للتحويل الخطي $T:R^3 \to R^3$ المُعرف بالعلاقة:

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

الحل: نوجد $\dim(\ker T), \dim(\operatorname{Im} T)$:

✓ لإيجاد $\dim(\ker T)$ فإننا نبحث إيجاد كل المتجهات (x_1, x_2, x_3) في المجال R^3 بحيث يكون $T(x_1, x_2, x_3) = 0$ وهذا يعني إيجاد حل مجموعة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\;\; x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore x_1 = -x_3 \,,\; x_2 = -x_3 \;\;,$$
$$\therefore \ker T = \{x_3(-1,-1,1) : x_3 \in R\}.$$

ومن ثم يكون المتجه $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو الأساس لنواة التحويل T ويكون $\dim(\ker T) = 1$.

✓ ولإيجاد $\dim(\operatorname{Im} T)$:

نختزل المصفوفة التي صفوفها هي صور متجهات الأساس المعتاد لمجال التحويل T كما يلي:

$$T(1,0,0) = (1,1,2),\;\; T(0,1,0) = (0,1,1),\;\; T(0,0,1) = (1,2,3).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

فتكون مجموعة متجهات الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة الأخيرة

وهي $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ أساس لمدى التحويل T ومن ثم يكون $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$.

$$\therefore \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 1 + 2 = 3 = \dim R^3.$$

تمرين(٢): حقق النظرية السابقة للتحويل الخطي:

$$T : R^2 \to R^2 \ ; T(x, y) = (3x - y, 4x + 2y).$$

الحل: يُترك للطالب.

✓ (**ملاحظات ونتائج**) إذا كان $T : V \to W$ تحويل خطي فإن:

(١) نواة التحويل T تكون هي الفضاء الصفري للمصفوفة المعتادة للتحويل T أي $\ker T = N(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T.

(٢) مدى التحويل T يكون هو فضاء العمود للمصفوفة المعتادة للتحويل T أي $\operatorname{Im} T = C(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T.

(٣) إذا كانت مجموعة المتجهات $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس للفضاء V وعلمنا صور متجهات الأساس S وهي $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ فإن صورة أي متجه $u \in V$ تُعطى بدلالة هذه الصور بالعلاقة:

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i) \ ; u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

(٤) مجموع كلا من صفرية التحويل T ورتبة التحويل T يكون مساوياً لبُعد مجال التحويل T (أي $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$).

(٥) إذا كان التحويل T أحادي التناظر (أي أحادي وفوقي في نفس الوقت) فيُقال أن التحويل T قابل للانعكاس *invertable* ويُسمى T تشاكل خطي.

أمثلة:

١- إذا كان $T:R^3 \to R^2$ تحويل خطي وكانت مجموعة المتجهات $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ أساس للفضاء R^3 حيث $v_1=(1,1,1), v_2=(1,1,0), v_3=(1,0,0)$ وكان:

$$T(v_1)=(1,0),\ T(v_2)=(2,-1),\ T(v_3)=(4,3).$$

فاوجد $T(2,-3,5)$ ؟.

الحل: حيث إن S أساس للفضاء R^3 فيمكن كتابة المتجه $(2,-3,5)$ كتركيبة خطية من متجهات S كما يلي:

$$(2,-3,5)=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3\ \ ;c_1,c_2,c_3\ \ scalars.$$

$$\therefore (2,-3,5)=c_1(1,1,1)+c_2(1,1,0)+c_3(1,0,0)$$

$$\begin{array}{lcl} 2=c_1+c_2+c_3\ , & & c_1=5\ , \\ \therefore -3=c_1+c_2\ \ , & \Rightarrow & c_2=-8\ , \\ 5=c_1 & & c_3=5 \end{array}$$

$$\therefore (2,-3,5)=5v_1-8v_2+5v_3$$

$$\begin{aligned} \therefore T(2,-3,5) &= 5T(v_1)-8T(v_2)+5T(v_3) \\ &= 5(1,0)-8(2,-1)+5(4,3) \\ &= (9,23). \end{aligned}$$

٢- إذا كان $T:R^2 \to R^2\ ;T(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)$ تحويل خطي.

فتحقق من أن $\ker T = N(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T

وحدد ما إذا كان T تشاكل خطي أم لا (مع ذِكر السبب)؟.

الحل:

(أولاً) نوجد $\ker T$:

$$T(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)=0 \Rightarrow x_1+x_2=0, x_2=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=0$$

$$\therefore \ker T=\{0\}.$$

(ثانياً) نوجد المصفوفة المعتادة للتحويل:

الأساس المعتاد للفضاء R^2 هو $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ويكون:

$$T(e_1)=T(1,0)=(1+0,0)=(1,0)\ ,$$

$$T(e_2)=T(0,1)=(0+1,1)=(1,1).$$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ثالثاً) نوجد $N(A)$ وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام $AX = 0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore x_1 = x_2 = 0$$

$$\therefore N(A) = \{0\}.$$

وإذاً $\ker T = N(A) = \{0\}$ وهو المطلوب.

ولكي يكون التحويل T تشاكل خطي يجب أن يكون أحادي التناظر:

(**١**) بفرض $u, v \in R^2 \; ; u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) &\Rightarrow T(u_1, u_2) = T(v_1, v_2) \\ &\Rightarrow (u_1 + u_2, u_2) = (v_1 + v_2, v_2) \\ &\Rightarrow u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \, , \, u_2 = v_2 \\ &\Rightarrow u_1 = v_1 \, , \, u_2 = v_2 \\ &\Rightarrow (u_1, u_2) = (v_1, v_2) \\ &\Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

(٢) ولتحديد ما إذا كان التحويل فوقي أم لا:

نفرض المتجه (y_1, y_2) في الفضاء R^2 (المجال المقابل) ونبحث إيجاد المتجه (x_1, x_2) في الفضاء R^2 (المجال) بحيث يكون $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ أي أن:

$$(x_1 + x_2, x_2) = (y_1, y_2)$$

$$\therefore \begin{matrix} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$$

وباختزال المصفوفة الممتدة المناظرة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = y_1 - y_2 \, , \, x_2 = y_2 .$$

ومن ثم يكون لكل متجه في المجال المقابل أصل في المجال، وعلى ذلك يكون T تحويل فوقي. من (١) ، (٢) يكون T تشاكل خطي.

✓ طريقة أخرى لتحديد ما إذا كان التحويل فوقي أم لا:

$\because \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim R^2$

$\therefore \quad 0 \quad + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim R^2 \Rightarrow \operatorname{Im} T = R^2.$

أي أن مدى التحويل T يساوي المجال المقابل للتحويل T وإذاً T فوقي.

٣– إذا كان $T: R^2 \to R^3 \; ; T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$ تحويل خطي.

فتحقق من أن $\ker T = N(A)$ حيث A المصفوفة المعتادة للتحويل T

وهل T تشاكل خطي (اذكر السبب)؟.

الحل:

(أولاً) نوجد $\ker T$:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$$

$\therefore \ker T = \{0\}.$

(ثانياً) نوجد المصفوفة المعتادة للتحويل:

الأساس المعتاد للفضاء R^2 هو $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ ويكون:

$$T(e_1) = T(1,0) = (1+0, 1-0, 1+2(0)) = (1,1,1) \; ,$$
$$T(e_2) = T(0,1) = (0+1, 0-1, 0+2(1)) = (1,-1,2).$$

وإذاً المصفوفة المعتادة للتحويل تكون $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(ثالثاً) نوجد $N(A)$ وذلك باختزال المصفوفة الممتدة المناظرة للنظام $AX = 0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{-r_1+r_3}{\xrightarrow{-r_1+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{-r_2+r_1}{\xrightarrow{-r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore x_1 = x_2 = 0 \quad \therefore N(A) = \{0\}.$

وإذاً $\ker T = N(A) = \{0\}$ وهو المطلوب.

ولكي يكون التحويل T تشاكل خطي يجب أن يكون أحادي التناظر:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \text{let } u,v\in R^2\ ;u=(u_1,u_2),v=(v_1,v_2)\ ,\\
&T(u)=T(v)\Rightarrow T(u_1,u_2)=T(v_1,v_2)\\
&\qquad\Rightarrow (u_1+u_2,u_1-u_2,u_1+2u_2)=(v_1+v_2,v_1-v_2,v_1+2v_2)\\
&\qquad\Rightarrow u_1+u_2=v_1+v_2\ ,\ u_1-u_2=v_1-v_2\ ,\ u_1+2u_2=v_1+2v_2\\
&\qquad\Rightarrow u_1=v_1\ ,\ u_2=v_2\\
&\qquad\Rightarrow (u_1,u_2)=(v_1,v_2)\\
&\qquad\Rightarrow u=v.
\end{aligned}$$

وإذاً T أحادي.

$$\begin{aligned}
&(2)\ \because \dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im} T)=\dim R^2\\
&\quad\therefore\qquad 0\qquad +\dim(\operatorname{Im} T)=\dim R^2\Rightarrow \operatorname{Im} T=R^2\neq R^3.
\end{aligned}$$

أي أن مدى التحويل T لا يساوي المجال المقابل للتحويل T وإذاً T ليس فوقي.

ومن ثم لا يكون T تشاكل خطي.

تعريف(٦):(المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي)

إذا كان $T:V\to W$ تحويل خطي وكانت مجموعة المتجهات $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أساس للفضاء V ومجموعة المتجهات $\{w_1,w_2,...,w_m\}$ أساس للفضاء W. فإن صورة كلا من متجهات أساس الفضاء V تكون تركيبة خطية من متجهات أساس الفضاء W أي أن:

$$\begin{aligned}
&T(v_1)=c_{11}w_1+c_{12}w_2+...+c_{1m}w_m\\
&T(v_2)=c_{21}w_1+c_{22}w_2+...+c_{2m}w_m\\
&.....\ \ .....\ \ .....\ \ .....\ \ .....\\
&T(v_n)=c_{n1}w_1+c_{n2}w_2+...+c_{nm}w_m
\end{aligned}$$

ومصفوفة المعاملات المناظرة لمجموعة المعادلات السابقة تكون:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & c_{1m}\\ c_{21} & c_{22} & ..... & c_{2m}\\ ..... & ..... & ..... & .....\\ c_{n1} & c_{n2} & ..... & n_{nm}\end{pmatrix}$$

مدور هذه المصفوفة يُسمى **المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي** T بالنسبة للأساسين $\{v_1,v_2,...,v_n\},\{w_1,w_2,...,w_m\}$ للفضاءين V,W على الترتيب.

مثال: إذا كانت المجموعتان $\{(1,1),(0,2)\}$, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ أساسين للفضاءين R^3, R^2 على الترتيب. فاوجد المصفوفة المساعدة بالنسبة لهذين الأساسين لكل من التحويلات الخطية الآتية:

$$(1)\ T: R^3 \to R^2 ; T(x,y,z) = (x+y, 3z).$$
$$(2)\ T: R^3 \to R^2 ; T(x,y,z) = (x-y, y-z).$$

الحل:

$$(1)\ T: R^3 \to R^2 ; T(x,y,z) = (x+y, 3z).$$
$$\therefore T(1,0,0) = (1+0, 3(0)) = (1,0) = c_{11}(1,1) + c_{12}(0,2)\ ,$$
$$\therefore 1 = c_{11}\ , 0 = c_{11} + 2c_{12} \Rightarrow c_{11} = 1,\ c_{12} = -1/2.$$
$$\therefore T(0,1,0) = (0+1, 3(0)) = (1,0) = c_{21}(1,1) + c_{22}(0,2)\ ,$$
$$\therefore 1 = c_{21}\ , 0 = c_{21} + 2c_{22} \Rightarrow c_{21} = 1,\ c_{22} = -1/2.$$
$$\therefore T(0,0,1) = (0+0, 3(1)) = (0,3) = c_{31}(1,1) + c_{32}(0,2)\ ,$$
$$\therefore 0 = c_{31}\ , 3 = c_{31} + 2c_{32} \Rightarrow c_{31} = 0,\ c_{32} = 3/2.$$

وإذاً المصفوفة المساعدة للتحويل تكون:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

- بالمثل نوجد المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي:

$$(2)\ T: R^3 \to R^2 ; T(x,y,z) = (x-y, y-z).$$

فتكون $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ (تحقق من ذلك؟).

تمارين

١- إذا كانت $T : R^2 \to R^2$ فوضح أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي وأيها لا تكون؟.

(1) $T(x,y) = (2x,y)$.
(2) $T(x,y) = (x^2,y)$.
(3) $T(x,y) = (0,y)$.
(4) $T(x,y) = (x,y+1)$.
(5) $T(x,y) = (2x+y,x-y)$.
(6) $T(x,y) = (y,y)$.

٢- ليكن $T : R^3 \to R^2$ فحدد أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي؟.

(1) $T(x,y,z) = (0,0)$.
(2) $T(x,y,z) = (x,x+y+z)$.
(3) $T(x,y,z) = (3x+y,3y-4z)$.
(4) $T(x,y,z) = (1,1)$.

٣- إذا كانت $T : R^2 \to R^3$ حيث $T(x,y) = (x+y,3y,2x-y)$ فتحقق من أن T يكون تحويل خطي.

٤- إذا كانت $T : R^2 \to R^3$ فحدد أي من الدوال الآتية تكون تحويل خطي؟.

(1) $T(x,y) = (x,y,2x)$.
(2) $T(x,y) = (x,0,y)$.
(3) $T(x,y) = (x,y^2,y)$.
(4) $T(x,y) = (x,0,0)$.
(5) $T(x,y) = (xy,0,0)$.
(6) $T(x,y) = (0,x,y)$.

٥- أي مما يأتي يكون تحويلاً خطياً وأيها لا يكون (مع ذِكر السبب):

(1) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$. (2) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x-z \end{pmatrix}$.

(3) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2+x \\ y-y^2 \end{pmatrix}$. (4) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x^2 \\ 2z \end{pmatrix}$.

(5) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+z \end{pmatrix}$. (6) $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ 2x+3 \end{pmatrix}$.

٦- أي مما يأتي يكون تحويلاً خطياً ، ومن ثم أوجد المصفوفة المعتادة له

(1) $T: R^3 \to R^2$; $T(x,y,z)= (y,x)$.
(2) $T: R^2 \to R^2$; $T(x,y)= (y,xy)$.
(3) $T: R \to R^3$; $T(x)= (x,0,1)$.
(4) $T: R^2 \to R$; $T(x,y)= 2x+3y$.

٧- أوجد المصفوفة المعتادة لكل التحويلات الخطية الآتية:

(1) $T: R^3 \to R^2$; $T(x,y,z) = (2x+y,y-z)$.
(2) $T: R^4 \to R$; $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+2x_2-x_3+5x_4$.
(3) $T: R^2 \to R^4$; $T(x_1,x_2) = (0,x_2,x_1,x_1+x_2)$.

٨- أوجد المصفوفة المعتادة لكل من التحويلات الآتية:

(1) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$.

(2) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+2x_2+x_3 \\ x_1+5x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(3) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7x_1+2x_2-x_3+x_4 \\ x_2+x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}$.

٩- لتكن $v_1,v_2,..,v_n$ متجهات في الفضاء المتجه V

فتحقق من أن الراسم $T : R^n \to V$ المعرف بالعلاقة:

$$T(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1v_1+x_2v_2+\dots+x_nv_n$$

يكون تحويلاً خطياً.

١٠- إذا كان $T : R^3 \to R^2$ تحويلاً خطياً وكان:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

أوجد $T\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$.

١١- إذا كان $T : R^2 \to R^2$ تحويلاً خطياً وكان:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

أوجد $T\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$.

١٢- إذا كانت $T: R^2 \to R^3$ معرف بالعلاقة: $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\x+y\\y\end{pmatrix}$.

(أ) أوجد ker T.

(ب) هل T تحويل أحادي ؟ .

(ج) هل T تحويل فوقي ؟ .

١٣- إذا كانت $T : R^4 \to R^3$ معرف بالعلاقة: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z+w \\ x+z \end{pmatrix}$.

(أ) أوجد أساس نواة T.

(ب) أوجد أساس مدى T.

(ج) هل T تحويل فوقي ؟ .

١٤- أوجد أساس نواة التحويل وكذلك مدى التحويل ، لكل من التحويلات الخطية الآتية:

(أ) $T : R^5 \to R^4$ المعرف بالعلاقة:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

(ب) $T : R^3 \to R^3$ المعرف بالعلاقة:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}.$$

(ج) $T : R^4 \to R^4$ المعرف بالعلاقة:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

١٥- إذا كانت $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\{(1,1),(0,2)\}$ أساسين للفضاءين R^3 , R^2 على الترتيب . فأوجد المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي $T : R^3 \to R^2$ بالنسبة لهذين الأساسين على الترتيب حيث:

(1) $T(x,y,z) = (x+y, 3z)$.

(2) $T(x,y,z) = (x-y, y-z)$.

١٦- إذا كان $T : R^3 \to R^2$ تحويل خطي معرف بالعلاقة:

$$T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1+2x_2 , x_2-2x_3) .$$

وكانت $\{(1,0,1),(1,2,1),(0,1,2)\}$ أساس للفضاء R^3

وكانت $\{(1,2),(4,0)\}$ أساس للفضاء R^2

فأوجد المصفوفة المساعدة للتحويل الخطي بالنسبة لهذين الأساسين.

الباب الرابع

تطبيقات الجبر الخطي

فيما يلي سنعرض بعض التطبيقات للجبر الخطي في أفرع الرياضيات المختلفة مثل التحليل الرياضي ، والمعادلات التفاضلية ، والهندسة.

١- الدالة الأسية في حالة المصفوفات:

(**١-١)مقدمة**: لدراسة الدالة الأسية $y=e^x$ في حالة المصفوفات والتي تلعب دوراً هاماً في التحليل الرياضي توجد عدة طرق لتعريف الدالة الأسية من ضمن هذه الطرق وأسهلها الطريقة المباشرة لتعريف الدالة الأسية باستخدام متسلسلات القوى ، أي أن

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad ; |x| \prec \infty .$$

متسلسلة القوى في الطرف الأيمن تتقارب لأي قيمة حقيقية (أو مركبة) للمتغير x ويكون المجموع لهذه المتسلسلة مساوياً e^x وفي دراستنا هذه سنبحث امتداد هذا التعريف في حالة المصفوفات التي عناصرها الداخلية أعداد حقيقية أو مركبة ، ونعرف تقارب متسلسلة المصفوفات:

$A_0+A_1+A_2+\ldots$; $A_n = (a_{ij}^{(n)})$.

لبحث هذا التقارب سوف نستخدم صور متسلسلات مركباتها كما يلي:

$a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots$; $(1\le i \le n , 1\le j \le n)$.

وفي هذه الحالة يكون $\sum_{n=0}^{\infty} A = (\sum_{n}^{\infty} a_{ij}^{n})$.

ويُقال أنه مجموع متسلسلة لانهائية (من المصفوفات) ، وبنفس الأسـلوب لمفهوم التقارب والتباعد والنهايات ، وما إلى ذلك للمتتابعات من المتجهات يمكن تعريفه للمصفوفات .

(**١–٢**)**تعريف**: لتكن ... , $A = (a_{ij}^{(0)}), A_1= (a_{ij}^{(1)}), A_2 = (a_{ij}^{(2)})$, متتابعة مصفوفات من النوع m×n فإن لأي زوج من الأعداد الصحيحة i,j تكون المتسلسلة $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{ij}^{(n)})$ تقاربية ، والمجموع اللانهائي من المصفوفات...A_0,A_1,A_2 يُعرف بالمصفوفة $C = (c_{ij})$ حيث C مصفوفة من النوع m×n ولأي زوج من الأعداد الصحيحة i,j يكون $c_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ij}^{(n)}$.

(**١–٣**)**مثال**:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} & \frac{1}{1!} \\ 0 & \frac{1}{3^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2!} \\ 0 & \frac{-1}{3^3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^4} & \frac{1}{3!} \\ 0 & \frac{1}{3^4} \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

(**١–٤**)**تعريف**: إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n فإن exp (A) تُعرف بالمصفوفة:

$$E + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$$

حيث E مصفوفة الوحدة ، وإذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A , \ \lim_{n\to\infty} B_n = B .$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B , \ \lim_{n\to\infty} A_n B_n = AB .$$

(١–٥)**نتيجة**: الدالة الأسية للمصفوفات تحقق قانون الدالة الأسية العادية وهذا يعني أنه إذا كانت A,B تبادليتين أي أن $AB = BA$ فإن

$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$.

وإثبات هذا القانون يشبه تماماً إثبات القانون $e^{a+b} = e^a.e^b$ في حالة الدالة الأسية للأعداد .

(١–٦)**نظرية**: إذا كانت $F(t) = \exp(tA)$ فإن $(d/dt) F(t) = F'(t) = A.F(t)$.

حيث t قيمة حقيقية ، وأن المشتقة $F'(t)$ لمصفوفة عناصرها دوال من المتغيرات الحقيقية المعرفة .

(١–٧)**مثال**: احسب قيمة $\exp(tA)$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>الحل</u>:

$$\exp(tA) = E + t A + (t^2/2!) A^2 + (t^3/3!) A^3 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(t^n/n!) A^n] .$$

وبوضع المصفوفة A على الصورة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E+K.$$

$$\therefore k^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3K ,$$

$$K^3 = K^2.K = 3K.K = 3K^2 = 3.3K = 9K ,$$
$$K^4 = K^3.K = 9K.K = 9K^2 = 9.3K = 27K ,$$

وهكذا يمكن حساب $K^5, K^6, \ldots$ ، نحسب بعد ذلك قيم $A^2, A^3, \ldots, A^n$ فيكون

$$A^2 = (E+K)^2 = E + 2K + K^2 = E + 2K + 3K = E + 5K,$$
$$\therefore\ A^2 = E + (1+4)\,K$$
$$A^3 = (E+K)^3 = (E+K)(E+K)^2 = (E+K)(E+5K)$$
$$= E + 6K + 5K^2 = E + 6K + 15K = E + 21K,$$
$$\therefore A^3 = E + (1+4+4^2)\,K.$$

وباستخدام الاستنتاج الرياضي ينتج أن

$$A^n = E + (1+4+\ldots+4^{n-1})\,K.$$

والمتسلسلة التي بين القوسين هندسية حدها الأول1 وأساسها 4

$$\therefore A^n = E + ((4^n-1)/3)\,K.$$

ومن ثم يكون:

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\left[E + \left(\frac{4^n-1}{3}\right)K\right] \\ &= E\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4t)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\frac{K}{3}\right) \\ &= E\,e^t + \frac{1}{3}(e^{4t} - e^t)K.\end{aligned}$$

وبالتعويض عن

$$E = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

تنتج قيمة $\exp(tA)$.

٢- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

Eigenvalues and Eigenvectors:

(٢-١)**تعريف**: إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن المعادلة $|A-\lambda I|=0$ تُسمى **المعادلة الذاتية للمصفوفة** A ، وجذور هذه المعادلة تُسمى **القيم الذاتية للمصفوفة** A .

(٢-٢)**مثال**: أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$

الحل:

نوجد أولا المعادلة الذاتية للمصفوفة A :

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\therefore \left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1-\lambda)(4-\lambda)-10=0$$

$$4-5\lambda+\lambda^2-10=0$$

$$\lambda^2-5\lambda-6=0$$

والمعادلة الأخيرة هذه هي المعادلة الذاتية للمصفوفة ، وبحل هذه المعادلة:

$$(\lambda-6)(\lambda+1)=0$$

$$\therefore \lambda=6\,,\lambda=-1$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة A .

(٢–٣)مثال: أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

<u>الحل:</u>

المعادلة الذاتية للمصفوفة A تُعطى من:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1-\lambda)^3=0$$

وبالتالي تكون القيم الذاتية للمصفوفة هي:

$$\lambda=1,1,1$$

(٢–٤)تعريف: إذا كانت λ هي إحدى القيم الذاتية للمصفوفة المربعة A فإن متجه العمود غير الصفري X والذي يحقق العلاقة $AX=\lambda X$ أو ($(A-\lambda I)X=0$) يُسمى **المتجه الذاتي** للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ.

وإذا كانت A مصفوفة مربعة على النظام $n\times n$ فإن X تكون مصفوفة عمود من النوع $n\times 1$ وإذا كانت $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A وكانت المتجهات $X_1,X_2,...,X_n$ هي المتجهات الذاتية المناظرة فإن هذه المتجهات تُسمى المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

(٢–٥)مثال: أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}$

<u>الحل:</u> في المثال(٢–٢) رأينا أن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي $\lambda=6,\lambda=-1$

لذلك نفرض أن $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هو المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 6$

$$\therefore (A-\lambda I)X = 0$$
$$\therefore \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\5 & 4\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix}-5 & 2\\5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5x+2y\\5x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\therefore -5x+2y=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}y$$

وبوضع $y=5$ نحصل على $x=2$ وإذاً المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=6$ يكون هو $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

وفي حالة $\lambda=-1$ يكون:

$$(A-\lambda I)X=0$$
$$\therefore \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\5 & 4\end{pmatrix}-(-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix}2 & 2\\5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+2y\\5x+5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\therefore 2x+2y=0 \Rightarrow x=-y$$

وبوضع $y=1$ نحصل على $x=-1$

وإذاً المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=-1$ يكون هو $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

ملاحظة: نلاحظ أن المتجهات الذاتية إذا وُضعت في مصفوفة على الصورة $Z=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ وبحساب المعكوس الضربي لهذه المصفوفة يكون $Z^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$ ونجد أن:

$$Z^{-1}AZ=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

نلاحظ أن المصفوفة $Z^{-1}AZ$ تكون مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

(٢–٦)مثال: أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

الحل:

المعادلة الذاتية للمصفوفة A تُعطى من:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (3-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda)-2]-[2(3-\lambda)-2]+[2-(4-\lambda)]=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda-2)=0$$

ومن ثم تكون القيم الذاتية هي $\lambda=6,2,2$.

في حالة $\lambda=2$ يكون:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow z=-x-y$$

وبوضع $x=r, y=s$ فإن $z=-r-s$ وبالتالي فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=2$ يكون:

$$X=\begin{pmatrix} r \\ s \\ -r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي نحصل على متجهين مناظرين للقيمة $\lambda = 2$ هما $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

مع ملاحظة أن $\lambda = 2$ قيمة مكررة مرتين.

وفي حالة $\lambda = 6$ يكون:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x=-y+3z \ , \ y=2z$$

وبوضع $z=1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 6$ يكون $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

وبالتالي تكون مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي:

$$Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ويمكننا التحقق من أن:

$$Z^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z^{-1}AZ=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(**٢–٧**)**تعريف**: يُقال أن المصـــفوفتان المربعتان A, B واللاتان من نفس النظام أنهما متشابهتان إذا وُجدت مصفوفة Z غير مفردة (أي مربعة ومحددها لا يساوي الصفر) بحيث يتحقق:

$$A = ZBZ^{-1} \quad \vee \quad B = Z^{-1}AZ \, .$$

(**٢–٨**)**مثال**: إذا كانت $Z = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة المشابهة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

الحل: واضح أن المصفوفة Z غير مفردة (تحقق من ذلك؟) ومعكوسها الضربي يكون:

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبفرض أن المصفوفة B تشابه المصفوفة A فإن $B = Z^{-1}AZ$ وإذاً يكون:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(**٢-٩)نظرية:** يكون للمصفوفتين المتشابهتين نفس القيم الذاتية.

البرهان:

نفرض أن المصفوفتان A, B متشابهتان فإنهما يحققان العلاقة:

$$\begin{aligned}
&B = Z^{-1} AZ \\
&\therefore B - \lambda I = Z^{-1} AZ - \lambda I \\
&\qquad = Z^{-1} AZ - \lambda Z^{-1} Z \\
&\qquad = Z^{-1}(A - \lambda I)Z \\
&\therefore |B - \lambda I| = |Z^{-1}(A - \lambda I)Z| \\
&\qquad = |Z^{-1}||A - \lambda I||Z| \\
&\qquad = |Z^{-1}||Z||A - \lambda I| \\
&\qquad = |Z^{-1}Z||A - \lambda I| \\
&\qquad = |I||A - \lambda I| \\
&\qquad = |A - \lambda I|
\end{aligned}$$

ومن ثم يكون للمصفوفتين A, B المتشابهتين نفس المعادلة الذاتية ، وعليه يكون لهما نفس القيم الذاتية.

(**٢-١٠)نظرية:** إذا كانت A,B مصفوفتان متشابهتان أي أن $B=Z^{-1}AZ$ وكانت X_i هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ_i فإن $Y_i=Z^{-1}X_i$ يكون هو المتجه الذاتي للمصفوفة B المناظر للقيمة الذاتية λ_i .

البرهان:

نفرض أن X_i هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ_i وإذاً يكون $AX_i=\lambda_i X_i$ وحيث إن $B=Z^{-1}AZ \vee A=ZBZ^{-1}$ فيكون:

$$(ZBZ^{-1})X_i=\lambda_i X_i \Rightarrow BZ^{-1}X_i=\lambda_i Z^{-1}X_i$$

وبوضع $Y_i=Z^{-1}X_i$ نجد أن $BY_i=\lambda_i X_i$

ومن ثم يكون $Y_i=Z^{-1}X_i$ متجه مميز للمصفوفة B مناظر للقيمة الذاتية λ_i .

(**٢-١١)مثال:** هذا المثال تطبيق للنظريتين السابقتين . ففي المثال السابق (٢-٨) المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

وبالتالي تكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda=1,1,5$.

والمعادلة الذاتية للمصفوفة B تكون:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 14 & 13 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)^2=0$$

وبالتالي تكون القيم الذاتية للمصفوفة B هي $\lambda=5,1,1$

وهي نفس القيم الذاتية للمصفوفة A .

ونوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A كما يلي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

في حالة $\lambda=1$ يكون:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Rightarrow x+2y+z=0 \Rightarrow z=-x-2y$$

وبوضع $x=r, y=s$ نحصل على $z=-r-2s$ وعلى ذلك يكون :

$$X=\begin{pmatrix} r \\ s \\ -r-2s \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

وبالتالي نحصل على متجهين مناظرين للقيمة الذاتية $\lambda=1$ هما:

$$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

وفي حالة $\lambda=5$ يكون:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Rightarrow x=2y-z,\ y=z$$

بوضع $z=1$ نحصل على $y=x=1$ وبالتالي نحصل على متجه مميز مناظر للقيمة الذاتية $\lambda=5$ هو:

$$X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

وعلى ذلك تكون المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبوضع $Y_1 = Z^{-1}X_1$ يكون:

$$\therefore Y_1 = Z^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

كذلك بوضع $Y_2 = Z^{-1}X_2, Y_3 = Z^{-1}X_3$ فيكون:

$$\therefore Y_2 = Z^{-1}X_2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\therefore Y_3 = Z^{-1}X_3 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

وهذه المتجهات الثلاث Y_1, Y_2, Y_3 تكون هي نفس المتجهات الذاتية للمصفوفة B حيث إنها تحقق العلاقة $BY_i = \lambda Y_i \ , i = 1,2,3$

ونتحقق من ذلك كما يلي:

في حالة $\lambda = 1$ يكون:

$$BY_1 = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \ \lambda Y_1 = 1\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ ,$$

$$BY_2 = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \ \lambda Y_2 = 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

وفي حالة $\lambda = 5$ يكون:

$$BY_3 = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \lambda Y_3 = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

وإذاً تتحقق النظريتين السابقتين بالنسبة للمصفوفتين المتشابهتين A, B .

(**٢-١٢**)**مثال**: أوجد مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>الحل</u>:

المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-5) = 0\,.$$

ومن ثم تكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 1,1,5$.

وكما سبق تكون المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\; X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نكوّن المصفوفة Z من المتجهات الذاتية للمصفوفة A كما يلي:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن هذه المصفوفة غير مفردة ومعكوسها الضربي يكون:

$$Z^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

وحيث وُجدت مصفوفة غير مفردة Z

فالمصفوفة A تشابه المصفوفة $B = Z^{-1}AZ$

$$\therefore B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

وواضح أن المصفوفة B مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية للمصفوفة A فتكون مشابهة لها.

٣- إيجاد الحل العام لمجموعة المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبة الأولى:

(٣-١)**تعريف**: مما سبق علمنا كيفية تعيين المتجهات الذاتية لأي مصفوفة مربعة A المناظرة لقيمة ذاتية λ وعرفنا أنها هي المتجهات غير الصفرية التي تحقق المعادلة $Ax = \lambda x$ (وبطريقة أخرى المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية λ هي المتجهات غير الصفرية في فضاء الحل للمعادلة $(\lambda I-A)x = 0$) ويُسمى فضاء الحل هذا **الفضاء الذاتي** للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ .

ويمكن تعريف القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمؤثرات الخطية بالمثل للمصفوفات.

يُسمى العدد القياسي λ **قيمة ذاتية** للمؤثر الخطي$T:V\to V$ إذا وُجد متجه غير صفري x في V بحيث يكون $T x = \lambda x$ ويُسمى المتجه x **متجهاً ذاتياً** للمؤثر T مناظرا للقيمة λ . والمتجهات الذاتية للمؤثر الخطي T المناظرة للقيمة λ تكون هي المتجهات غير الصفرية في نواة $(\lambda I - T)$ تُسمى هذه النواة **الفضاء الذاتي** للمؤثر T المناظر للقيمة λ .

(٣-٢)**مثال**: أوجد أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون $(\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$

(تحقق من ذلك ؟)

وإذاً القيم الذاتية للمصفوفة A تكون $\lambda=1$,$\lambda=5$ مكرر

والمتجه $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ يكون متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظرا للقيمة λ

إذا وإذا فقط كانت X حلا غير تافه للمعادلة $(\lambda I-A)X = 0$ أي أن:

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1).$$

وإذا كانت $\lambda = 5$ فإن المعادلة (1) تصبح كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ويكون الحل هو $x_1 = -s$,$x_2 = s$, $x_3 = t$ (تحقق من ذلك ؟).

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة $\lambda = 5$ هي

المتجهات غير الصفرية والتي تكون على الصورة:

$$X = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

وحيث إن المجموعة $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ تُنشئ الفضاء الذاتي للمصفوفة A

وأن متجهات S مستقلة خطياً (تحقق من ذلك؟)

فتكون S أساساً للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda = 5$.

وإذا كانت $\lambda = 1$ فإن (1) تصبح:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ويكون الحل هو $x_1 = t\ , x_2 = t\ , x_3 = 0$ (تحقق من ذلك ؟).

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة $\lambda=1$ هي المتجهات غير الصفرية والتي على الصورة:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

وإذاً يكون المتجه $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ أساس للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda=1$.

(٣-٣)تعريف: سنوضح فيما يلي إحدى الطرق التي يُطبق فيها الجبر الخطي لحل مجموعة معينة من المعادلات التفاضلية .

نفرض أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى على الصورة:

$$y' = ay \qquad (1).$$

حيث a ثابت ، والدالة $y = f(x)$ دالة مجهولة يُراد تعيينها ، وأن $y' = (dy/dx)$ مشتقتها وأن لهذه المعادلة حلول لا نهائية في الصورة:

$$y = c\, e^{ax} \qquad (2) .$$

حيث c ثابت اختياري .

كل دالة على هذه الصورة تكون حل للمعادلة $y'= ay$ حيث

$$y' = c\, ae^{ax} = ay .$$

وبالعكس كل حل للمعادلة $y' = ay$ يجب أن يكون دالة على الصورة $c\, e^{ax}$

وتُسمى المعادلة (2) **الحل العام** للمعادلة التفاضلية $y' = ay$.

وأحيانا تنص المسألة على بعض الشروط الابتدائية التي تسمح بتعيين حل خاص من الحل العام ، وذلك بالتعويض بهذه الشروط الابتدائية .

ولدراسة حلول مجموعة المعادلات التفاضلية التي على الصورة:

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad (3) \\ y'_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n . \end{aligned}$$

حيث $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots , y_n = f(x_n)$ دوال يُراد تعيينها ، والمعاملات a_{ij} ثوابت وباستخدام المصفوفات يمكن كتابة (3) على الصورة:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

أو في الصورة المصفوفية المختصرة:

$$y' = A\,y.$$

(**٣-٤**)**مثال**: اكتب مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$y'_1 = 3y_1, \quad y'_2 = 2y_2, \quad y'_3 = 5y_3.$$

في صورة مصفوفات. ثم أوجد الحل العام لها ، والحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية الآتية:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 4, \quad y_3(0) = -2.$$

الحل:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

أي أن $y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ويمكننا حل المعادلات بحل كل معادلة على حده لأن كل معادلة تتضمن دالة مجهولة واحدة فقط وباستخدام (2) نحصل على:

$$y_1 = c_1\,e^{3x}, \quad y_2 = c_2\,e^{-2x}, \quad y_3 = c_3\,e^{5x}.$$

وبصيغة المصفوفات يكون:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{pmatrix}.$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائية المعطاة نحصل على:

$$1 = y_1(0)=c_1e^0 = c_1 .$$
$$4 = y_2(0)=c_2e^0 = c_2 .$$
$$-2 = y_3(0)=c_3e^0 = c_3 .$$

لهذا يكون الحل المستوفي للشروط الابتدائية لمجموعة المعادلات كما يلي:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{pmatrix} .$$

(٣–٥)ملاحظة: مجموعة المعادلات التفاضلية في المثال السابق كانت سهلة الحل لأن كل معادلة تضمنت دالة مجهولة واحدة فقط ، وذلك لأن مصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات التفاضلية كانت مصفوفة قطرية والسؤال الآن كيف نبحث حل مجموعة المعادلات التفاضلية $Y' = AY$ والتي لها المصفوفة A ليست قطرية ؟.

الإجابة على هذا السؤال في الطريقة الآتية:

(٣–٦)حل مجموعة المعادلات التفاضلية $Y'= AY$ إذا كانت A مصفوفة غير قطرية:

الفكرة تتلخص في تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية ، ولذلك سنجرى تعويضاً عن المصفوفة Y يؤدى إلى مجموعة معادلات تفاضلية بمصفوفة معاملات قطرية ، وبذلك نستطيع حل هذه المجموعة الجديدة بالطريقة السابقة ، ومن ثم نستخدم هذا الحل لتعيين حل المجموعة الأصلية ،

كما سيتضح فيما يلي:

نفرض لدينا مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \ldots + p_{1n}u_n \\
y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \ldots + p_{2n}u_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5) \\
y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \ldots + p_{nn}u_n .
\end{aligned}
$$

ويمكن كتابة (5) بصيغة المصفوفات على الصورة:

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} .
$$

أي أن

$$Y = P\,U \qquad (6).$$

والمعاملات P_{ij} ثوابت يُراد تعيينها بحيث يكون لمجموعة المعادلات الجديدة المتضمنة للدوال المجهولة $u_1, u_2, \ldots, u_n$ مصفوفة معاملات قطرية .

وبإجراء عملية التفاضل على كل معادلة من (5) ينتج أن:

$$Y' = P\,U' \qquad (7) .$$

وبالتعويض بالمعادلتين (7) , (6) في المعادلة $Y' = AY$ نحصل على:

$$PU' = A\,(P\,U) .$$

وإذا اعتبرنا أن المصفوفة P قابلة للانعكاس فإننا نحصل على:

$$U' = (P^{-1} A\,P)\,U = D\,U .$$

حيث $D = P^{-1} A\,P$ ويكون الآن اختيار P واضحاً ، فإذا أردنا لمصفوفة المعاملات D أن تكون قطرية ،فيجب أن نختار P لتكون مصفوفة تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية .

مما سبق نستنتج أنه لحل مجموعة المعادلات التفاضلية $Y' = AY$ والتي لها مصفوفة معاملات A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية نتبع ما يلي:

(١) نوجد المصفوفة P التي تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية .

(٢) نستخدم التعويض $Y = PU, Y' = PU'$ لنحصل على مجموعة معادلات جديدة على الصورة $U' = D U$ حيث $D = P^{-1}A P$.

(٣) نحل مجموعة المعادلات التفاضلية $U' = D U$.

(٤) نعين قيمة Y من المعادلة $Y = P U$.

(**٣–٧**)**مثال**: أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$y'_1 = y_1 + y_2 \ , \quad y'_2 = 4y_1 - 2y_2 .$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$$y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 6 .$$

الحل: مصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات المعطاة تكون هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ووفقاً للمفهوم السابق للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات فإن المصفوفة A تكون قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية بواسطة أي مصفوفة أعمدها متجهات مميزة مستقلة خطياً للمصفوفة A وحيث إن:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2) .$$

فتكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 2, \lambda = -3$

ومن تعريف المتجهات الذاتية يكون $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ متجهاً مميزاً للمصفوفة A مناظراً للقيمة الذاتية λ إذا وإذا فقط كان x حلاً غير صفرياً للمعادلة $(\lambda I - A)\,x = 0$ أي أن:

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -4 & \lambda+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

فإذا كانت $\lambda=2$ فإن

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ويكون الحل هو $x_1 = t\,,\ x_2 = t$ ، ولهذا فإن

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

وإذاً يكون المتجه $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ أساساً للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda = 2$.

وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن المتجه $p_2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ يكون أساساً للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda = -3$.

وإذاً المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية ويكون:

$$D = P^{-1} A\, P = (4/5)\begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

وبذلك يؤدى التعويض $Y = P\,U\,,\ Y' = P\,U'$ إلى مجموعة المعادلات القطرية الجديدة الآتية:

$$U' = D\,U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow u'_1 = 2u_1 \,,\; u'_1 = 2u_1 \,.$$

ويكون حل مجموعة المعادلات هذه هو $u_1 = c_1\, e^{2x} \,,\; u_2 = c_2\, e^{-3x}$.

$$\therefore U = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

ومن ثم تعطى المعادلة $Y = P\,U$ الحل بالنسبة إلى Y كما يلي:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} - (1/4) c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

أي أن الحل العام لمجموعة المعادلات يكون:

$$y_1 = c_1\, e^{2x} - (1/4)\, c_2\, e^{-3x} \quad , \quad y_2 = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-3x} \,.$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائية نحصل على:

$$c_1 - (1/4)\, c_2 = 1 \,,\; c_1 + c_2 = 6 \,.$$

$$\therefore\; c_1 = 2 \;,\; c_2 = 4 \,.$$

ويكون الحل الخاص المطلوب لمجموعة المعادلات التفاضلية هو:

$$y_1 = 2e^{2x} - e^{-3x} \,,$$
$$y_2 = 2e^{2x} + 4e^{-3x} \,.$$

ملاحظة: لقد افترضنا في دراستنا هذه أن مصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات التفاضلية $Y' = AY$ تكون قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ، فإذا لم تكن الحالة كذلك ، فيجب أن نستخدم طرق أخرى للحل . سنبحث هذه الطرق في دراسات عليا عن مجال دراستنا هذه.

٤- الصيغة التربيعية – تطبيق في القطوع المخروطية:

(٤-١) **تعريف**: تُسمى المعادلة:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \qquad (1).$$

بمعادلة الدرجة الثانية في x, y حيث a, b, c, f, g, h أعداد حقيقية.

ويُشترط أن يكون أحد الأعداد a, h, b على الأقل لا يساوى الصفر .

التعبير $ax^2 + 2hxy + y^2$ يُسمى **الصيغة التربيعية المرافقة** .

سندرس الآن كيفية تدوير المحاور لحذف معامل xy ، ثم كيفية التعرف على القطوع المخروطية التي تم تدويرها ، وذلك بوضعها في الصورة القياسية .

هذا ويمكن كتابة المعادلة (1) بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0.$$

أو في الصورة المختصرة:

$$X^T A X + K X + c = 0 \qquad (2).$$

حيث

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}.$$

وبهذا الاصطلاح تكون الصيغة التربيعية المرافقة للمعادلة (2) هي $X^T A X$

تُسمى المصفوفة المتماثلة A **مصفوفة الصيغة التربيعية** $X^T A X$.

(٤–٢) إيجاد المحاور الأساسية (الرئيسية) للقطع المخروطي:

إذا اعتبرنا قطعاً مخروطياً ممثلاً بالمعادلة:

$$X^{T}\ A\,X + K\,X + c = 0.$$

يمكن تدوير محاور الإحداثيات X,Y بحيث ينعدم معامل $x'y'$ في الإحداثيات الجديدة وذلك باتباع الخطوات التالي:

(١) نوجد مصفوفة $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ تحول المصفوفة A عمودياً إلى الصورة القطرية.

(٢) نبدل أعمدة P إذا لزم الأمر لجعل $|P| = 1$ ويؤكد هذا أن تحويل الإحداثيات العمودي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (3).$$

أي أن $X = P\,X'$ يكون دوراناً .

(٣) للحصول على معادلة القطع المخروطي في الإحداثيات الجديدة $X'Y'$ نعوض من (3) في (2) فنحصل على:

$$(PX')^{T}\ A\,(PX') + K(PX') + c = 0\ .$$

أو على الصورة:

$$X'^{T}\,(P^{T}A\,P)X' + (KP)X' + c = 0 \qquad (4).$$

حيث P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية:

$$P^{T}\,A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

حيث λ_1, λ_2 هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A .

ولذلك يمكن كتابة المعادلة (4) في الصورة:

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+(f \quad g)\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+c=0 .$$

أو في الصورة:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' x' + g' y' + c = 0 .$$

حيث $f' = f p_{11} + g p_{21}$, $g' = f p_{12} + g p_{22}$.

وهذه معادلة من الدرجة الثانية خالية من معامل $x'y'$ وباستخدام إكمال المربع يمكن تعيين نوع القطع وأطوال المحاور الأساسية له .

ونخلص مما سبق بالنتيجة الآتية:

(**٤–٣**)**نتيجة**: لتكن $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ معادلة قطع مخروطي ، ولتكن $X^T A X = ax^2 + 2hxy + by^2$ الصيغة التربيعية المرافقة. فإنه يمكن دوران المحاور بحيث يكون لمعادلة القطع المخروطي الإحداثيات الجديدة $x'y'$ في الصورة:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' x' + g' y' + c = 0.$$

حيث λ_1, λ_2 هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A

وذلك باستخدام التعويض $X = PX'$ حيث P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية بحيث يكون $|P| = 1$.

(٤–٤)أمثلة:

١– صف القطع المخروطي $5x^2 -4xy + 8y^2 - 36 = 0$

<u>الحل</u>: الصورة المصفوفية لهذه المعادلة تكون $X^T A X - 36 = 0$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

والمعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون

$$|\lambda I - A| = \begin{pmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-8 \end{pmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0 .$$

وإذاً القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A هما $\lambda = 9$, $\lambda = 4$.

المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda = 4$ هي الحلول الغير صفرية للمعادلة:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

وبحل هذا النظام نحصل على:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

وإذاً المتجه $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ يكون أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 4$.

نجعل هذا المتجه متجه قياسي فنحصل على $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

وبالمثل يكون المتجه القياسي $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ أساس للفضاء الذاتي المناظر

للقيمة $\lambda = 9$.

وإذاً فالمصفوفة $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ تحول المصفوفة A عمودياً إلى الصورة القطرية ، بالإضافة إلى ذلك فإن $|P| = 1$ وعليه فإن التحويل العمودي للإحداثيات $X = PX'$ يكون دورانياً ، وبالتعويض في الصورة المصفوفية لمعادلة القطع نحصل على:

$$(PX')^T A\,(PX') - 36 = 0.$$

أو

$$(X')^T (P^T A P) X' - 36 = 0.$$

وحيث إن $P^T A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ فهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة:

$$(x' \;\; y') \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0.$$

$$\therefore\; 4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0.$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها أيضاً في الصورة $x'^2/9 + y'^2/4 = 1$

وهي تمثل قطع ناقص.

٢- صف القطع المخروطي:

$5x^2 - 4xy + 8y^2 + (20/\sqrt{5})x - (80/\sqrt{5})y + 4 = 0$.

الحل: الصورة المصفوفية لهذه المعادلة تكون $X^T A X + K X + 4 = 0$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad , \ K = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

ومن المثال السابق وجدنا أن المصفوفة:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

تحول المصفوفة A عمودياً إلى الصورة القطرية ، وبوضع $X = PX'$

في الصورة المصفوفية لمعادلة القطع نحصل على:

$$(P X')^T A (P X') + K (P X') + 4 = 0 .$$

أو المعادلة

$$X'^T (P^T A P) X' + (K P) X' + 4 = 0 . \qquad (*)$$

حيث إن

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, K P = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -36 \end{pmatrix}.$$

إذاً يمكن كتابة (*) على الصورة:

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 .$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة في الصورة:

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = 4$$

$$\therefore 4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36.$$

$\therefore 4(x'-1)^2 + 9(y'-2) = 36.$

ولتحويل معادلة القطع المخروطي هذه إلى الصورة القياسية

ننقل المحاور $X'Y'$ وذلك بوضع

$x'' = x'-1\ ,\ \ y'' = y'-2\ .$

فتصبح المعادلة السابقة في الصورة:

$4x''^2 + 9y''^2 = 36$

$\therefore\ x''^2/9 + y''^2/4 = 1.$

وهذه المعادلة تمثل قطع ناقص .

تمارين

١- تحقق من أن exp (tA) للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ يكون هو:

$$\exp(tA) = (1/3)e^{3t}(E+K).$$

حيث $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

٢- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكل من المصفوفات الآتية:

$$\text{(i)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}\begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

٣- تحقق من أن المصفوفتين $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ يكون لهما نفس القيم الذاتية ولكنهما غير متشابهتين.

٤- أوجد المصفوفة Z بحيث يكون $Z^{-1}AZ$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي القيم الذاتية للمصفوفة A في كل من الحالات الآتية:

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

٥- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل المعادلتين التفاضليتين:

$y'_1 = y_1 + 3y_2,$
$y'_2 = 4y_1 + 5y_2.$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$y_1(0) = 2 , y_2 (0) =1.$

٦- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$y'_1 =4 y_1 + y_3 ,$
$y'_2 = -2y_1 + y_2 ,$
$y'_3 = -2y_1 .$

ثم أوجد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$y_1(0)=-1, y_2 (0)=1, y_3 (0)= 0.$

٧- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$y'_1 = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$
$y'_2 = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3$
$y'_3 = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 .$

٨- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل المعادلة التفاضلية

$y''- y' - 6y = 0.$

(**إرشاد**): افرض أن $y_1= y , y_2 = y'$

ثم اثبت أن $y'_1 = y_2 , y'_2 = y''= y'+6y = 6y_1+ y_2$

٩- بتطبيقات الجبر الخطي أوجد حل المعادلة التفاضلية

$y''' -6 y'' +11 y' -6y = 0 .$

(**إرشاد**): افرض أن $y_1= y , y_2 =y', y_3 = y''$

ثم اثبت أن $y'_1 = y_2 , y'_2 = y_3 , y'_3 = 6y_1-11y_2 +6y_3$

١٠- بتطبيقات الجبر الخطي صف كلا من القطوع المخروطية الآتية:

(1) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0.$

(2) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0.$

(3) $5x^2 - 4xy - 5y^2 = 9.$

(4) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0.$

(5) $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 2y = 5.$

********************** **تم بحمد الله** ************************

✓ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية Eigenvalues and Eigenvectors :

تعريف(١): إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن المعادلة $|A-\lambda I| = 0$ تُسمى **المعادلة الذاتية** للمصفوفة A ، وجذور هذه المعادلة تُسمى **القيم الذاتية** للمصفوفة A .

مثال(١): أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون $|A-\lambda I| = 0$

$$\therefore \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0.$$

وجذور هذه المعادلة تكون:

$$(\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda = 6 , \lambda = -1$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة A .

مثال(٢): أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة تُعطى من:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-\lambda)^3 = 0$$

ومن ثم القيم الذاتية للمصفوفة تكون:

$$\lambda = 1,1,1$$

تعريف(٢): إذا كانت λ هي إحدى القيم الذاتية للمصفوفة المربعة A فإن متجه العمود غير الصفري X والذي يحقق العلاقة $AX = \lambda X$ أو ($(A-\lambda I)X = 0$) يُسمى **المتجه الذاتي** للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ .

وإذا كانت A مصفوفة مربعة على النظام $n \times n$ فإن X تكون مصفوفة عمود على النظام $n \times 1$ وإذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A وكانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متجهات مستقلة غير صفرية مناظرة لهذه القيم الذاتية فإن هذه المتجهات تُسمى المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

مثال(٣): أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

الحل: في مثال(١) رأينا أن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي $\lambda = 6, \lambda = -1$

لذلك نفرض أن $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ هو المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 6$

$$\therefore (A-\lambda I)X = 0$$
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x+2y \\ 5x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore -5x+2y = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}y$$

وبوضع $y = 5$ نحصل على $x = 2$

وإذاً المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 6$ يكون هو $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

وفي حالة $\lambda = -1$ يكون: $(A-\lambda I)X = 0$

$$\therefore \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 5x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore 2x+2y=0 \Rightarrow x=-y$

وبوضع $y=1$ نحصل على $x=-1$

وإذاً المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=-1$ يكون هو $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

ملاحظة: إذا كانت المصفوفة P هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية للمصفوفة A أي أن:

$$P=\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}$$

✓ تُسمى المصفوفة P مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

وبحساب المعكوس الضربي لهذه المصفوفة يكون $P^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 2\end{pmatrix}$ فنجد أن:

$$P^{-1}AP=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

نلاحظ أن المصفوفة $P^{-1}AP$ تكون مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

مثال(٤): أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة A تُعطى من:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-2]-[2-2(2-\lambda)]=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)[6-5\lambda+\lambda^2-2+2]\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$$

وإذاً القيم الذاتية للمصفوفة A تكون $\lambda=1,2,3$

✓ ونوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A من العلاقة $(A-\lambda I)X=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

في حالة $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow -z=0\ ,\ x+y+z=0\Rightarrow z=0\ ,\ x=-y$$

وبوضع $y=1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=1$ يكون $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

وفي حالة $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x=-z\ ,\ 2y=z$$

وبوضع $y=1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=2$ يكون $\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

وفي حالة $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = y - z \ , \ 2y = z$$

وبوضع $y = 1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 3$ يكون $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

وإذاً مصفوفة المتجهات الذاتية تكون $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

مثال(٥): أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة A تُعطى من:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\2&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (3-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda)-2]-[2(3-\lambda)-2]+[2-(4-\lambda)]=0$$
$$\Rightarrow (\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda-2)=0$$

ومن ثم تكون القيم الذاتية هي $\lambda=6,2,2$

✓ ونوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A من العلاقة $(A-\lambda I)X=0$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix}3-\lambda&1&1\\2&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

في حالة $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow z=-x-y$$

وبوضع $x=r, y=s$ فإن $z=-r-s$ وبالتالي فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=2$ يكون:

$$X=\begin{pmatrix}r\\s\\-r-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\0\\-r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\s\\-s\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

وبالتالي نحصل على متجهين مستقلين مناظرين للقيمة $\lambda=2$ هما $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

مع ملاحظة أن $\lambda=2$ قيمة مكررة مرتين.

وفي حالة $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = -y + 3z \ , \ y = 2z$$

وبوضع $z = 1$ فإن المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 6$ يكون $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

وإذاً مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A تكون:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ويمكننا التحقق من أن:

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

تمرين فصلي: إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ وكانت P مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A. فاحسب P^{-1} بطريقة الاختزال، ثم تحقق من أن $P^{-1}AP$ تكون مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي القيم الذاتية للمصفوفة A.

تعريف(٣): يُقال أن المصفوفتان المربعتان A, B واللتان من نفس النظام أنهما متشابهتان إذا وُجدت مصفوفة P غير مفردة (أي مربعة ومحددها لا يساوي الصفر) بحيث يتحقق $B = P^{-1}AP \vee A = PBP^{-1}$.

مثال(٦): إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة المشابهة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

الحل: واضح أن المصفوفة P غير مفردة(تحقق من ذلك؟) ومعكوسها الضربي:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبفرض أن المصفوفة B تشابه المصفوفة A فإن $B = P^{-1}AP$ وإذاً:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

نظرية(١): يكون للمصفوفتين المتشابهتين نفس القيم الذاتية.

البرهان: نفرض أن المصفوفتان A, B متشابهتان فإنهما يحققان العلاقة:

$$B = P^{-1}AP$$
$$\therefore B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I$$
$$= P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P$$
$$= P^{-1}(A - \lambda I)P$$
$$\therefore |B - \lambda I| = |P^{-1}(A - \lambda I)P|$$
$$= |P^{-1}||A - \lambda I||P|$$
$$= |P^{-1}||P||A - \lambda I|$$
$$= |P^{-1}P||A - \lambda I|$$
$$= |I||A - \lambda I|$$
$$= |A - \lambda I|.$$

ومن ثم يكون للمصفوفتين A, B المتشابهتين نفس المعادلة الذاتية ، وعليه يكون لهما نفس القيم الذاتية.

نظرية(٢): إذا كانت A, B مصفوفتان متشابهتان أي أن $B = P^{-1}AP$ وكانت X_i هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ_i فإن $Y_i = P^{-1}X_i$ يكون هو المتجه الذاتي للمصفوفة B المناظر للقيمة الذاتية λ_i .

البرهان: نفرض أن X_i هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ_i وإذاً يتحقق: $AX_i = \lambda_i X_i$ وحيث إن $B = P^{-1}AP \vee A = PBP^{-1}$ فيكون:

$$(PBP^{-1})X_i = \lambda_i X_i \Rightarrow BP^{-1}X_i = \lambda_i P^{-1}X_i$$

وبوضع $Y_i = P^{-1}X_i$ نجد أن $BY_i = \lambda_i X_i$ ومن ثم فإن $Y_i = P^{-1}X_i$ يكون متجه ذاتي للمصفوفة B مناظر للقيمة الذاتية λ_i .

مثال(٧): في مثال(٦) السابق المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-2]-2[(2-\lambda)-1]+[2-(3-\lambda)]$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0.$$

وبالتالي تكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 1,1,5$.

والمعادلة الذاتية للمصفوفة B تكون:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 14 & 13 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

وبالتالي تكون القيم الذاتية للمصفوفة B هي $\lambda = 5,1,1$ وهي نفس القيم الذاتية للمصفوفة A .

ونوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A كما يلي:

$$(A-\lambda I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

في حالة $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x+2y+z=0 \Rightarrow z=-x-2y$$

بوضع $x=r, y=s$ نحصل على $z=-r-2s$ وعلى ذلك يكون:

$$X = \begin{pmatrix} r \\ s \\ -r-2s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

وبالتالي نحصل على متجهين مستقلين مناظرين للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ هما:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

وفي حالة $\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = 2y - z,\ y = z$$

بوضع $z = 1$ نحصل على $y = x = 1$ وبالتالي نحصل على متجه مميز مناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ هو:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

وعلى ذلك تكون المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبفرض أن $Y_1 = P^{-1}X_1$:

$$\therefore Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

كذلك بفرض $Y_2 = P^{-1}X_2, Y_3 = P^{-1}X_3$:

$$\therefore Y_2 = P^{-1}X_2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\therefore Y_3 = P^{-1}X_3 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

وهذه المتجهات الثلاثة Y_1, Y_2, Y_3 هي نفس المتجهات الذاتية للمصفوفة B

حيث إنها تحقق العلاقة $BY_i = \lambda Y_i \ , i = 1,2,3$ ونثبت ذلك كما يلي:

في حالة $\lambda = 1$:

$$BY_1 = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \ \lambda Y_1 = 1\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ ,$$

$$BY_2 = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \ \lambda Y_2 = 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

وفي حالة $\lambda = 5$:

$$BY_3 = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda Y_3 = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

وإذاً تتحقق النظريتين السابقتين بالنسبة للمصفوفتين المتشابهتين A, B .

مثال(٨): أوجد مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 5) = 0$$

ومن ثم تكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 1,1,5$.

وكما سبق تكون المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نكون المصفوفة P من المتجهات الذاتية كما يلي:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة غير مفردة ومعكوسها الضربي يكون:

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

وحيث وُجدت مصفوفة غير مفردة P فالمصفوفة A تشابه المصفوفة $B = P^{-1}AP$:

$$\therefore B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

وواضح أن المصفوفة B مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية للمصفوفة A فتكون مشابهة لها.

✓ **أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفة:**

مما سبق علمنا كيفية تعيين المتجهات الذاتية لأي مصفوفة مربعة A المناظرة للقيمة الذاتية λ وعرفنا أنها هي المتجهات غير الصفرية التي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$ وبطريقة أخرى المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية λ هي المتجهات غير الصفرية في فضاء الحل للمعادلة $(\lambda I - A)X = 0$

يُسمى فضاء الحل هذا الفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظرة للقيمة الذاتية λ .

مثال(٩): أوجد أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

الحل: المعادلة الذاتية للمصفوفة A تكون $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$

وإذاً القيم الذاتية للمصفوفة A تكون $\lambda = 5,5,1$

والمتجه $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ يكون متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظرا للقيمة λ إذا وإذا فقط كانت X حلا غير تافه للمعادلة $(\lambda I - A)X = 0$ أي أن:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1).$$

وإذا كانت $\lambda = 5$ فإن المعادلة (1) تصبح كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ويكون الحل هو $x_1 = -s \, , \, x_2 = s \, , \, x_3 = t$

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة $\lambda = 5$ هي المتجهات غير الصفرية والتي تكون على الصورة:

$$X=\begin{pmatrix}-s\\ s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s\\ s\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

وحيث إن مجموعة المتجهات $\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ تُنشئ الفضاء الذاتي للمصفوفة A وأن مجموعة المتجهات هذه مستقلة خطياً فتكون أساساً للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda=5$.

وإذا كانت $\lambda=1$ فإن (1) تصبح:

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

ويكون الحل هو $x_1=s\ ,\ x_2=s\ ,\ x_3=0$

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda=1$ هي المتجهات غير الصفرية والتي على الصورة:

$$X=\begin{pmatrix}s\\ s\\ 0\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

وإذاً المتجه $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ يكون أساس للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda=1$.

تمارين:

١- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكل من المصفوفات الآتية:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

٢- تحقق من أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

يكون لهما نفس القيم الذاتية ولكن غير متشابهتين.

٣- أوجد المصفوفة P بحيث يكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي القيم الذاتية للمصفوفة A في كل من الحالات الآتية:

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

٤- أوجد أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

✓ إجابة السؤال الأول:

(i) 1(-1,1,0) , 2(-2,1,2) , 3(-1,1,2)
(ii) -1(1,0,1) , 2(1,3,1) , 1(3,2,1)
(iii) 2(2,-1,0) , 0(4,-1,0) , 1(4,0,-1)

✓ إجابة السؤال الثاني:

القيم الذاتية 1,1,5 ومصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A تكون $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

ولكن $P^{-1}AP \neq B$

✓ إجابة السؤال الثالث:

(i) 5(-1,1,0) , 5(0,0,1) , 1(1,1,0)
(ii) 0(0,1,-1) , -2(2,-1,0) , -3(1,0,-1)
(iii) -2(11,1,-14) , 1(1,-1,-1) , 3(1,1,1)

✓ إجابة السؤال الرابع: (انظر بنك الأسئلة).

المراجع:

(١) موسوعة علماء العرب على الإنترنت.

(٢) موقع الرياضيات على الإنترنت.

http://www.math.com

(٣) موسوعة ويكيبيديا الحرة على الإنترنت.

http://en.wikipedia.org/wiki/mathematics

(4) S.Lipschutz : “Linear Algebra” ,Schaum’s outline Series McGraw-Hill Book Company (1974).

(5) H.Anton : “Elementary linear algebra”4^{th} edition, John Wiley and Sons, New York (1984).

(6) S.Lang : “Introduction to Linear algebra”2^{nd} edition, Springer-verlag (1986).

(7) B.Kolman : “Introductory Linear Algebra with Applications” , Macmilian Inc., New York 1976).

(8) W.Brown : “Matrices and Vector Spaces”, Marcel Deklar Inc., New York (1991).

$$\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dz}{dx}+x\frac{d^2z}{dx^2}$$

ولكن

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt},$$
$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$
$$(2)\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dt},$$
$$x\frac{d^2y}{dx^2}=2x\frac{dz}{dx}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$=2\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$
$$(3)x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}$$

وبالتعويض عن (2) ، (3) تتحول المعادلة (1) الى الصورة

$$\phi(z,\frac{dz}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},.....)=0$$

وهى معادلة خالية من t ويمكن حلها كما سبق

<u>مثال(2) :-</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الأتية

$$(x^2+y^2)(y-xy')+x^2y^2y''=0$$

<u>الحل :-</u> بالقسمة على x^3 نجد أن

$$(1+\frac{y^2}{x^2})(\frac{y}{x}-y')\frac{y^2}{x^2}-xy''=0$$

بوضع

$$y=zx,\ x=e^t$$

تتحول المعادلة التفاضلية الى الصورة

$$(1+z^{2})(z-z-\frac{dz}{dt})+z^{2}(\frac{d^{2}z}{dt^{2}}+\frac{dz}{dt})=0$$

$$-\frac{dz}{dt}-z^{2}\frac{dz}{dt}+z^{2}\frac{d^{2}z}{dt^{2}}+z^{2}\frac{dz}{dt}=0$$

$$z^{2}\frac{d^{2}z}{dt^{2}}=\frac{dz}{dt}$$

بوضع

$$\frac{dz}{dt}=p\quad,\ \frac{d^{2}z}{dt^{2}}=p\,\frac{dp}{dz}$$

$$z^{2}p\,\frac{dp}{dt}=p$$

$$\int dp=\int\frac{dz}{z^{2}}$$

$$p=\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{a}=\frac{z-a}{az}$$

$$\int\frac{az\,dz}{z-a}=\int dt$$

$$t.\ln b=a\int[1+\frac{a}{z-a}]dz$$

$$=az+a^{2}\ln(z-a)$$

$$\mathrm{t}=\mathrm{az}+\mathrm{a}^{2}\ln(\mathrm{z}-\mathrm{a})+\ln\mathrm{b}$$

$$\ln\mathrm{x}=\mathrm{a}\,\frac{y}{x}+a^{2}\ln(\frac{y}{x}-a)+\ln b$$

$$x=b\,(\frac{y}{x}-a)^{a^{2}}e^{a\frac{y}{x}}$$

وهو الحل العام

<u>رابعاً: الطرف الأيسر للمعادلة</u>

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',\mathrm{y}'',\ldots\ldots,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هو عبارة عن مشتقة لمقدار تفاضلي ما من الرتبة $(n-1)$ وليكن مثلاً:

$$\phi=\phi(\mathrm{c},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',\ldots\ldots,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هنا يمكن كتابة المعادلة $\frac{d\phi}{dx}=0$ ومنها $\phi=c$

<u>مثال(1) :</u> حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' + y'^2 = 0$$

<u>الحل :</u> هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$d(yy') = 0$$

ومنها يكون

$$yy' = c$$

$$y^2 = c_1 x + c_2$$

<u>ملحوظة :</u> أحيانا للحصول على دالة مشتقتها تساوى الطرف الأيسر للمعادلة فإن ذلك لا يتحقق إلا بعد ضرب طرفي المعادلة في دالة ما .

<u>مثال(2) :</u> حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' = y'^2$$

<u>الحل :</u> بالقسمة على yy' نحصل على

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$$

$$\{\frac{y''}{y'} = \{\frac{y'}{y}$$

$$\ln y' = \ln y + \ln c$$

$$y' = yc$$

$$\frac{dy}{dx} = yc$$

$$\frac{dy}{y} = c\,dx$$

$$\ln y = cx + c_1$$

$$y = e^{cx + c_1} = c_1 e^{cx}$$

وهو الحل العام

<u>مثال (3) :-</u> حل المعادلة التفاضلية

$$y y' y''' = 2y''^2$$

<u>الحل :</u> بالقسمة على $y y' y''$ نحصل على

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}$$

$$\int\frac{y'''}{y''} = 2\int\frac{y''}{y'}$$

$$\ln y'' = 2\ln y' + \ln c$$

$$y'' = cy'^2$$

وبوضع $y' = p$

$$\frac{dp}{dx} = cp^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = cdx \Rightarrow -\frac{1}{p} = cx + c_1$$

$$p = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$y = \frac{1}{c}\ln(cx + c_1) + c_2$$

وهو الحل العام

<u>تمارين (2)</u>

1- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية بحلها بالنسبة إلى p , $p = \frac{dy}{dx}$

$$(i)\, y^2p^2 - 3xyp + 2x^2 = 0$$

$$(ii)\, p^2 - (xy + 2x)p + 2x^2y = 0$$

$$(iii)\, p^2 - p - 6 = 0$$

$$(iv)\, p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$$

$$(v)\, p^2 - 2\cos x - 1 = 0$$

$$(vi)\, x + yp^2 = p(1 + xy)$$

2- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في x:

$$(i)\ x=4p+4p^3$$
$$(ii)\ p^2-2xp+1=0$$
$$(iii)\ 2y+p^2+2p=2x(p+1)$$
$$(iv)\ p=\tan(x-\frac{p}{1+p^2})$$
$$(v)\ p^3-p(y+3)+x=0$$

3- أوجد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في y :

$$(i)\ \mathrm{y}=\mathrm{xp}^2+\mathrm{p}$$
$$(ii)\ \mathrm{y}=\mathrm{x}+\mathrm{p}^3$$
$$(iii)\ \mathrm{p}^2+\mathrm{p}=\mathrm{e}$$
$$(iv)\ \mathrm{y}=\mathrm{p}\sin\mathrm{p}+\cos\mathrm{p}$$
$$(v)\ \mathrm{y}=\mathrm{p}\tan\mathrm{p}+\log\cos\mathrm{p}$$
$$(\mathrm{vi})\ \mathrm{e}^{p-y}=\mathrm{p}^2-1$$

4- أوجد الحل العام والحل المفرد لمعادلة كليروت التفاضلية لكل من المعادلات الآتية :

$$(i)\ \mathrm{y}=\mathrm{xp}+\mathrm{p}^2$$
$$(ii)\ \mathrm{y}=\mathrm{xp}+\mathrm{p}^3$$
$$(iii)\ y=xp+\cos p$$
$$(iv)\ \mathrm{y}=x\ \mathrm{p}+\sqrt{a^2p^2+b^2}$$
$$(v)\ \mathrm{p}=\log(\mathrm{xp}-\mathrm{y})$$
$$(\mathrm{vi})\ \cosh\mathrm{xp}\cosh\mathrm{y}=\sinh\mathrm{px}\sinh\mathrm{y}+\mathrm{p}$$
$$(\mathrm{vii})\ \mathrm{y}=\mathrm{xp}+\frac{p}{p+1}$$
$$(viii)\ y=xp+\sqrt{p^2-1}$$
$$(ix)\ y=xp+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$
$$(x)\ y=xp+\sqrt{p^2+1}-p\log(p+\sqrt{p^2+1})$$

5- أوجد المميز c للمعادلات التفاضلية الأتية وبين المنحنيات التي يمثلها الحل الشاذ (أن وجد)

$$(i)\ (x^2-1)p^2-2xyp-x^2=0$$
$$(ii)\ 2y^2p^2+2xyp+x^2+y^2-1=0$$
$$(iii)\ p^2(x^2-1)-(y^2-1)=0$$

6- أوجد المميز p للمعادلات التفاضلية الأتيـة وبـين المنحنيـات التـي يمثلهـا مبينـا الحل الشاذ (أن وجد) ثم أوجد الحل العام

$$(i)\ yp^2-2xp+y=0$$
$$(ii)\ 3xp^2-6yp+x+2y=0$$
$$(iii)\ 4xp^2-(3x-1)^2=0$$
$$(iv)\ p^2+2px^2-4x^2y=0$$

7- حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من y

$$(i)\ 2xy'y''=y'^2-1$$
$$(ii)\ x^2y''=y'^2$$
$$(iii)\ y''^2+y'=xy''$$
$$(iv)\ y''\operatorname{cosec}x=1$$
$$(v)\ x(a-x)y''+2(1-x)y'=1$$
$$(vi)\ y^{(n)}-2y^{(n-1)}=e^x$$

8- حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من x

$$(i)\ yy''=y'^2$$
$$(ii)\ y'^2-(3y-2y')y''=0$$
$$(iii)\ yy''+1=y'^2$$
$$(iv)\ y''+y'^2=1$$
$$(v)\ 2yy''=y'^2$$
$$(vi)\ yy''=y'^2-y'^3$$
$$(vii)\ yy''+y'^2+2ay^2=0$$

9- حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الأتية :

$$(i)\ xy''-xy'+y=0$$
$$(ii)\ x^2y''-xy'+5y=0$$
$$(iii)\ 2x^2yy''+y^2=x^2y'^2$$
$$(iv)\ (2yy''-y'^2)x^2+y^2=0$$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا

درسنا في الباب الأول كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي وفي هذا الباب سوف ندرس كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات الأعلى و المعادلات التي سوف ندرسها هي

(i) معادلات قابلة للحل في p (ii) معادلات قابلة للحل في x

(iii) معادلات قابلة للحل في y

1- المعادلات القابلة للحل في p

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا هي :-

$$(1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + L_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots.. + L_{n-1}\frac{dy}{dx} + L_n = 0$$

حيث أن $L_0, L_1, \ldots\ldots., L_n$ دوال في x, y

نفرض أن $p = \frac{dy}{dx}$ بالتالى المعادلة (1) تصبح علي الصورة .

$$L_0P^n + L_1P^{n-1} + L_2P^{n-2} + \ldots + L_{n-1}P + L_n = 0$$

الطرف الأيسر لهذه المعادلة عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n

فاذا أمكن حلها بالنسبة إلي p علي الصورة .

$$(p - m_1)(p - m_2)\ldots\ldots(p - m_n) = 0$$

حيث $m_1, m_2, \ldots\ldots., m_n$ دوال في x, y

وهذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي .

$$p = m_1, \mathrm{p} = m_2, \ldots\ldots., \mathrm{p} = m_n$$

$i.e.$

$$\frac{dy}{dx} = m_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \frac{dy}{dx} = m_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \ldots.., \frac{dy}{dx} = m_n(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

حلول هذه المعادلات يمكن فرضها علي الصورة

$$f(x,y,c_1)=0 \quad , \quad f_2(x,y,c_2)=0,\dots,f_n(x,y,c_n)=0$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$(3) f_1(x,y,c_1)f_2(x,y,c_2)\dots f_n(x,y,c_n)=0$$

المعادلة (3) تمثل مجموعات من المنحنيات

$$f_1(x,y,c_1)=0, f_2(x,y,c_2)=0,\dots,f_n(x,y,c_n)=0$$

إذا استبدلنا $c_1,c_2,\dots,c_n$ بالثابت الاختياري c ورسمنا المنحنيات

$$f_1(x,y,c)=0, f_2(x,y,c)=0,\dots,f_n(x,y,c)=0$$

وجعلنا c تتغير من $-\infty$ إلي $+\infty$ فإننا نحصل علي نفس المنحنيات .

الحل العام للمعادلة (1) هو :-

$$f_1(x,y,c)f_2(x,y,c)\dots f_n(x,y,c)=0$$

وهو يحتوي علي ثابت اختياري واحد لأن المعادلة من الرتبة الأولي .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}\cosh x+1=0$$

الحل :- بوضع $\frac{dy}{dx}=p$

$$p^2-p(e^x+e^{-x})+e^x e^{-x}=0$$

$$(p-e^x)(p-e^{-x})=0$$

$$\frac{dy}{dx}=e^x , \frac{dy}{dx}=e^{-x}$$

$$y=e^x+c \quad , \quad y=e^{-x}+c$$

الأصل التام للمعادلة هو

$$(y-e^x-c)(y+e^{-x}-c)=0$$

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$p^2-(x+y)p+xy=0 \qquad \left(p=\frac{dy}{dx} \text{ حيث}\right)$$

الحل :- بالتحليل

$$(p-x)(p-y)=0$$

$$p=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x$$

$$y=\frac{1}{2}x^2+c_1$$

$$p=y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y$$

$$y=c_2e^x$$

∴ الحل العام هو :

$$(y-\frac{1}{2}x^2-c)(y-ce^x)=0$$

2-2 المعادلات القابلة للحل في x

المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x تأخذ الصورة

$$(1)x=f(y,p) \qquad \left(p=\frac{dy}{dx} \text{ حيث}\right)$$

وبمفاضلة المعادلة (1) بالنسبة إلي y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية في المتغيرين y , p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2)y=\psi(p,c)$$

فإنه بالتعويض عن y في المعادلة (1) نحصل علي

$$x=f(p,c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3),(2) وإذا لم يمكن حذف p من المعادلتين فإن المعادلتين(3),(2) تسمي بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1):- حل المعادلة التفاضلية

$$x - y = 2ap - ap^2$$

الحل :

$$(1)x = y + 2ap - ap^2$$

بالتفاضل بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{1}{p} = 1 + (2a - 2ap)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p}(1 - p) = 2a(1 - p)\frac{dp}{dy}$$

$$dy = 2ap\,dp$$

$$(2)y = ap^2 + c$$

وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3)x = 2ap + c$$

فلاخظ أنه يمكن حذف p من المعادلتين (2) ، (3) وذلك كما يلي

$$p^2 = \frac{y - c}{a} \quad , \quad p = \frac{x - c}{2a}$$

$$\frac{(x - a)}{4a^2} = \frac{y - c}{a}$$

$$(x - c)^2 = 4a(y - c)$$

وهي مجموعة من القطاعات المكافئة

مثال (2):- حل المعادلة التفاضلية

$$x = yp - p^2$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$

الحل :- بالتفاضل بالنسبة إلي y

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy}(y - 2p) = \frac{1}{p} - p$$

$$(y - 2p) = (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp}$$

$$(\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} - y = -2p$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1 - p^2}y = \frac{2p^2}{1 - p^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي . العامل المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{p}{p^2-1}dp} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2-1}dp}$$

$$= e^{\ln\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$

$$\frac{d}{dp}(y\sqrt{p^2-1}) = \frac{-2p}{1-p^2}\sqrt{p^2-1} = \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp + c$$

ولإيجاد هذا التكامل نستخدم التعويض

$$p = \cosh\theta \qquad dp = \sinh\theta d\theta$$

$$\int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp = \int \frac{2\cosh\theta}{\sinh\theta} \;.\; \sinh\theta d\theta = \int 2\cosh^2\theta d\theta$$

$$= \int (1+\cosh 2\theta)d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$$

$$= \theta + \sinh\theta\cosh\theta$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \theta + \sinh\theta\cosh\theta + c$$

$$= \cosh^{-1}p + p\sqrt{p^2-1} + c$$

$$(1)\, y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1}p + c)$$

بالتعويض عن y في المعادلة الأصلية نحصل على التالى

$$x = yp - p^2$$

$$= p^2 + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1}p + c) - p^2$$

$$(2) = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1}p + c)$$

المعادلتان (2)،(1) تمثلان الحل البارا متري للمعادلة التفاضلية .

2-3 المعادلات التفاضلية القابلة للحل في y

المعادلات القابلة للحل في y يمكن كتابتها علي الصورة .

$$(1) y' = f(x, p)$$

بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل على

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\ \frac{\partial p}{\partial x}$$

وهذه معادلة تفاضلية في x, p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2) x = \phi(p, c)$$

فأنه بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3) y = \psi(p, c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3)،(2) و إذا تغدر الحذف تسمي المعادلتين (3)،(2) بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$(1) y = p + p^3$$

الحل :-

بالتفاضل بالنسبة إلي x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} + 3p^2 \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}(1 + 3p^2)$$

$$\int dx = \int \frac{1 + 3p^2}{p} dp + c$$

$$(2) x = \ln p + \frac{3}{2} p^2 + c$$

المعادلتين (2)،(1) تمثل المعادلات البارا مترية للحل .

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) y = xp^2 + p$$

الحل : بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$p(1 - p) = (2xp + 1)\frac{dp}{dx}$$

الحد الأوسط حلها عند الضرب بالتعويض عنها

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1 - p} x = \frac{1}{p(1 - p)}$$

وهذه معادلة خطية .

العامل المكامل لها

$$\mu = e^{\int -\frac{2dp}{1-p}} = e^{2\ln(1-p)} = (1-p)^2$$

$$\frac{d}{dp}[x(1-p)^2] = \frac{1-p}{p}$$

وبالتكامل نحصل علي

$$x(1-p)^2 = \int \frac{1-p}{p} dp + c$$

$$x(1-p)^2 = \ln p - p + c$$

$$(2)x = \frac{\ln p - p + c}{(1-p)^2} + p$$

بالتعويض من (2) عن قيم x في (1) نحصل علي

$$y = \frac{p^2 \ln p - p^3 + p^2 c}{(1-p)^2} + p$$

$$(3)y = \frac{p^2 \ln p - p^3 + p^2 c + p(1-p)^2}{(1-p)^2}$$

و المعادلتين (2) ، (3) تمثلان الحل العام في الصورة البارا مترية .

4-2 معادلة كليروت

معادلة كليروت تكون على الصورة

$$(1)\quad y = px + f(p)$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ بالتفاضل بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

اما $\frac{dp}{dx}=0$ ومنها $p=c$ وبالتعويض فى (1) عن p نحصل على

$$(2)\; y=cx+f(c)$$

وهى مجموعة معادلة مجموعة من المستويات

واما $x+f'(p)=0$ ومنها

$$(3)\; x=-f'(p)$$

وبالتعويض في (1) عن x نحصل على

$$(4)\; y=-f'(p)\,p+f(p)$$

بحذف p من (4) ، (3) نحصل على علاقة بين (x,y) على الصورة

$$(5)\quad \phi(x,y)=0$$

المعادلة (5) تمثل حل أخر للمعادلة (1) وتكون المعادلتين (4) ، (3) هما المعادلتان البارامتريتان لهذا الحل .

العلاقة (5) لا تحتوى على ثابت اختياري فهى حل خاص وعلى العموم لا يستنتج هذا الحل من الحل العام بوضع قيمة خاصة للثابتان .

الحل الخاص (5) هو "حل شاذ " أو حل "مفرد" والمعادلة (2) تمثل الحل العام وهى معادلة مجموعة من المستقيمات ذات البارامتر c.

لإيجاد معادلة "الغلاف" لهذه المجموعة نفاضل (2) جزئيا بالنسبة إلى c

$$y=cx+f(c)$$

$$o=x+f'(c)$$

$$x=-f'(c)$$

أي أن طريقة إيجاد الحل المفرد هي نفس طريقة إيجاد الغلاف .

مثال(1) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية الأتية :

$$(1)\ y = xp + ap(1-p)$$

الحل : -

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (a-2ap)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + a - 2ap) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام للمعادلة هو

$$y = cx + ac - ac^2$$

أو

$$(2) x + a - 2ap = 0$$

بحذف (p) من المعادلتين (1) ، (2) نجد أن

$$y = \frac{(x+a)^2}{4a}$$

أي أن

$$(x-a)^2 = 4ay$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف مجموعة المستقيمات الممثلة بالحل العام .

مثال (2) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

الحل : بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{dp}{dx}$$

بذلك يكون

$$[x + \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}]\frac{dp}{dx} = 0$$

منها يكون اما $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$

بالتالى الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$(2)\ y = xc + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

وهى تمثل مجموعة من المستقيمات.

أو

$$(3) x = -\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}$$

بالتعويض من (3) في (1) عن قيمة x نجد أن

$$(4) y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}$$

المعادلتين (3) ، (4) هما المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد وبحذف p بين (3) ، (4) نحصل علي المعادلة الكارتيزية للحل المفرد من (3) نجد أن

$$p^2 = (-\frac{a}{x})^{2/3}$$

$$y = -xp^3$$

$$y^{2/3} = (-x)^{2/3} p^2 = (-x)^{2/3}[(-\frac{a}{x})^{2/3} - 1]$$

$$y^{2/3} = a^{2/3} - (-x)^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

وهو الحل المفرد للمعادلة التفاضلية وهو غلاف مجموعة المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

<u>مثال (3) :-</u> أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$$

<u>الحل :</u> نكتب المعادلة على الصورة

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y = p$$

$$\sin(px - y) = p$$

$$px - y = \sin^{-1} p$$

$$(1) y = xp - \sin^{-1} p$$

وهذه صورة معادلة كليروت .

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}] = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام هو

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$p = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$y = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2-1} - sx^{-1}x$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف المستقيمات .

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

معادلة أويلر الخطية هي معادلة من الشكل

$$(a_0x^nD^n+a_1x^{n-1}D^{n-1}+......+a_{n-1}xD+a_n)y=\varphi$$

حيث $a_0,a_1,.....,an$ ثوابت حقيقية φ دالة في المتغير x ، $D\equiv\frac{d}{dx}$

أما معادلة لجندر الخطية فهي من الشكل

$$\{a_0(\mathrm{a}x+b)^nD^n+a_1(ax+b)^{n-1}D^{n-1}+......+a_{n-1}(ax+b)D+a_n\}y=\varphi$$

يمكـن اختـزال هـاتين المعـادلتين إلـى معـادلتين خطيتـين بمعاملات ثابتة عن طريق تحويلات مناسبة للمتغير المستقل

لحل معادلة اويلر الخطية نستخدم التعويض التالى

$$x=e^t,\ \ \frac{dx}{dt}=e^t,\ \ \frac{dt}{dx}=e^{-t}=\frac{1}{x}$$

فإذا أستخدمنا المؤثر D_1 ليدل على $\frac{d}{dt}$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\Rightarrow xDy=D_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\Rightarrow x^2D^2y=(D_1^2-D_1)y=D_1(D_1-1)y$$

وبالمثل يمكن أثبات أن

$$x^3D^3y = D_1(D_1-1)(D_1-2)y \quad ,$$

......

$$x^rD^ry = D_1(D_1-1)(D_1-2).........(D_1-r+1)y$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نرى أنها تتحول إلى معادلة خطية ذوات معاملات ثابتة فيها المتغير المستقل لهو

t

<u>مثال(١) :</u>

حل المعادلة

$$(x^3D^3+3x^2D^2+xD+8)y = 32x^2$$

<u>الحل :</u>

نضع

$$x = e^t \quad , \quad t = \ln x \quad , \quad D_1 \equiv \frac{d}{dt}$$

$$x^3D^3 = D_1(D_1-1)(D_1-2) \quad , \; x^2D^2 = D_1(D_1-1) \quad , \quad xD = D_1$$

$$\{D_1(D_1-1)(D_1-2)+3D_1(D_1-1)+D_1+8\}y = 32e^{2t}$$

$$(D_1^3+8)\, y = 32e^{2t}$$

المعادلة المساعدة هي

$$m^3+8=0, \quad (m+2)(m^2-2m+4)=0$$

$$m_1 = -2 \quad , \; m_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

$$m_1 = -2 \quad , \; m_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}\; i$$

الحل المكمل هو

$$y_c = c_1^{-2t} + e^t(c_2\cos\sqrt{3}\ t + c_3\sin\sqrt{3}\ t)$$

الحل الخاص :

$$y_p = \frac{1}{D^3+8}\{32e^{2t}\} = \frac{32}{8+8}e^{2t} = 2e^{2t}$$

اذا الحل العام لمعادلة اويلر هو

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-2t} + e^t(c_2\cos\sqrt{3}t + c_3\sin\sqrt{3}t) + 2e^{2t}$$

$$y = \frac{c_1}{x^2} + x\{c_2\cos(\sqrt{3}\ln x) + c_3\sin(\sqrt{3}\ln x)\} + 2x^2$$

<u>مثال (٢) :</u>

حل المعادلة

$$(x^2D^2 - xD + 4)\,y = \cos\ln x + x\sin\ln x$$

<u>الحل :</u>

نفرض أن

$$x = e^t,\ D_1 \equiv \frac{d}{dt},\ xD = D_1\ ,\ x^2D^2 = D_1(D_1 - 1)$$

المعادلة تصبح

$$\{D_1(D_1-1) - D_1 + 4\}y = \cos t + e^t\sin t$$

$$(D_1^2 - 2D_1 + 4)y = \cos t + e^t\sin t$$

المعادلة المساعدة هي

$$m^2 - 2m + 4 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{3 + \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\ i$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$1 \pm \sqrt{3}\ i$$

الحل المكمل هو

$$y_c = e^t(c_1\cos\sqrt{3}\ t + c_2\sin\sqrt{3}\ t)$$

التكامل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{D_1^2 - 2D_1 + 4}\{\cos t\} + \frac{1}{D_1^2 - 2D_1 + 4}\{e^t \sin t\}$$

$$= \frac{1}{3 - 2D_1}\{\cos t\} + e^t \frac{1}{D_1^2 + 3}\{\sin t\} = \frac{3 + 2D_1}{9 - 4D_1^2}\{\cos t\} + e^t \frac{1}{-1+3}\sin t$$

$$= \frac{1}{13}(3\cos t - 2\sin \mathrm{t})\, \mathrm{t}\, \frac{1}{2} c^t \sin t$$

الحل العام هو

$$y = y_c + y_p$$

$$= e^t (c_1 \cos\sqrt{3}\, t + c_2 \sin\sqrt{3}\, t) + \frac{1}{13}(3\cos t - 2\sin t) + \frac{1}{2} e^t \sin t$$

$$y = x\,\{c_1 \cos(\sqrt{3}\ \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{3}\ \ln x)\} + \frac{1}{13}\{3\cos(\ln x) - 2\sin(\ln x)\}$$

$$+ \frac{1}{2} x \sin(\ln x)$$

نفرض ان $ax + b = e^t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt} \Rightarrow (ax+b)Dy = aD_1 y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$(ax+b)^2 D^2 y = a^2 (D_1^2 - D_1)\,\mathrm{y} = \mathrm{a}^2 \mathrm{D}_1(\mathrm{D}_1 - 1)\,\mathrm{y}$$

......

$$(\mathrm{ax+b})^r D^r y = a^r D_1 (D_1 - 1)(D_1 - 2).....(D_1 - r + 1) y$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نرى انها تتحول إلى معادلة خطية ذات معاملات ثابتة.

<u>مثال(٣)</u>

حل المعادلة

$$\{(3x+2)^2 D^2 + 3(3x+2)D - 36\} y = 3x^2 + 4x + 1$$

<u>الحل :</u>

نفرض أن

$$D_1 \equiv \frac{d}{dt} \quad , 3x + 2 = e^t$$

$$(3x+2)^2 D^2 = 9D_1(D_1 - 1), (3\mathrm{x}+2)\,\mathrm{D} = 3\,\mathrm{D}_1$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن

$$\{9D_1(D_1-1)+9D_1-36\}y = \frac{1}{3}(9x^2+12+3) = \frac{1}{3}(e^{2t}-1)$$

$$(D_1^2-4)\,y = \frac{1}{27}(e^{2t}-1)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة :

المعادلة المساعدة هي

$$m^2-4=0 \Rightarrow (m-2)(m+2)=0 \Rightarrow m_1=2, m_2=-2$$

الحل المكمل هو

$$y_c = c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$$

الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{27}\left[\frac{1}{D_1^2-4}\{e^{2t}\} - \frac{1}{D_1^2-4}\{e^{(0)t}\}\right]$$

$$F(D)=D_1^2-4\ ,\ F(2)=0\ ,\ F'(D)=2D_1\ ,\ F'(2)=4$$

$$y_p = \frac{1}{27}\left(\frac{t}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{108}(te^{2t}+1)$$

الحل العام هو

$$y = y_c+y_p = c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+\frac{1}{108}(te^{2t}+1)$$

$$y = c_1(3x+2)^2+c_2(3x+2)^{-2}+\frac{1}{108}[(3x+2)^2\ln(3x+2)+1]$$

هذه الطريقة تمكننا من أيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$L_0 y^{(n)} + L_1 y^{(n-1)} + ... + L_{n-1} y^1 + L_n y = \varphi ....(1)$$

حيث $L_0, L_1, ..., L_n, \varphi$ دوال للمتغير x

إذا علم حلول المعادلة المختزلة

$$L_0 y^{(n)} + L_1 y^{(n-1)} + ... + L_{n-1} y' + L_n y = 0$$

نفرض أن الحل العام للمعادلة المختزلة هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت اختيارية $y_1, y_2, ..., y_n$ حلول مستقلة خطية للمعادلة المختزلة .

نفرض أن الحل العام للمعادلة الأصلية (١) هو

$$y = z_1 y_1 + z_2 y_2 + ... + z_n y_n$$

حيث $z_1, z_2, ..., z_n$ دوال للمتغير x مطلوب أيجادها .

$$y' = z_1 y_1' + z_2 y_2' + ... + z_n y_n' + (z_1' y_1 + z_2' y_2 + ... + z_n' y_n)$$

نضع

$$z_1' y_1 + z_2' y_2 + ... + z_n' y_n = 0.................(1)$$

$$y'' = z_1 y_1'' + z_2 y_2'' + ... + z_n y_n'' + (z_1' y_1' + z_2' y_2' + ... + z_n' y_n')$$

نضع

$$z_1' y_1' + z_2' y_2' + ... + z_n' y_n' = 0................(2)$$

$$y^{(3)} = z_1 y_1^{(3)} + z_2 y_2^{(3)} + ... + z_n y_n^{(3)} + (z_1' y_1'' + z_2' y_2'' + ... + z_n' y_n'')$$

نضع

$$z_1'y_1+z_2'y_2+......+z_n'y_n=0.................(1)$$

$$y''=z_1y_1''+z_2y_2''+......+z_ny_n''+(z_1'y_1'+z_2'y_2'+......+z_n'y_n')$$

نضع

$$z_1'y_1'+z_2'y_2'+......+z_n'y_n'=0................(2)$$

$$y^{(3)}=z_1y_1^{(3)}+z_2y_2^{(3)}+......+z_ny_n^{(3)}+(z_1'y_1''+z_2'y_2''+......+z_n'y_n'')$$

نضع

$$z_1'y_1''+z_2'y_2''+......+z_n'y_n''=0.................(3)$$

اذا

$$y^{(n-1)}=z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+......+z_ny_n^{(n-1)}$$
$$+(z_1'y_1^{(n-2)}+z_2'y_2^{(n-2)}+......+z_n'y_n^{(n-2)})$$

نضع

$$z_1'y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+......+z_n'y_n^{(n-2)}=0....................(n-1)$$

$$y^{(n)}=z_1y_1^{(n)}+z_2y_2^{(n)}+......+z_ny_n^{(n)}+z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+......+z_n'y_n^{(n-1)}$$

بالتعويض عن قيم $y,y',y'',......,y^{(n-1)},y^{(n)}$ في المعادلة الأصلية

$$L_0(z_1y_1^{(n)}+z_2y_2^{(n)}+...+z_ny_n^{(n)})+L_0(z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+...+z_n'y_n^{(n-1)})$$
$$+L_1(z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+...+z_ny_n^{(n-1)})+L_2(z_1y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+...+z_ny_n^{(n-2)})$$
$$+....$$
$$+L_{n-1}(z_1y_1'+z_2y_2'+...+z_ny_n')+L_n(z_1y_1+z_2y_2+...+z_ny_n)=\varphi$$
$$L_0(z_1'y_1^{(n-1)}+z_2'y_2^{(n-1)}+...+z_n'y_n^{(n-1)})+z_1F(D)y_1$$
$$+z_2F(D)y_2+......+z_nF(D)y_n=\varphi$$

ولكن $y_1, y_2, ..., y_n$ حلول للمعادلة المختزلة

$$F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_1 = 0 \ , \quad F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_2 = 0 \ , ..., F(\mathrm{D})\,\mathrm{y}_n = 0$$

$$z'_1 y_1^{(n-1)} + z'_2 y_2^{(n-1)} + ... + z'_n y_n^{(n-1)} = \frac{1}{L_0}\varphi(x) ....(n)$$

للمعـادلات $(1), (2), ..., (n-1), (n)$ تكـون مجموعـه مـن المعـادلات الجبريـة الآنيـة الخطيـة غيـر البسـيطة التـي تـربط n مـن الـدوال $z'_1, z'_2, ..., z'_n$ بحـل هـذه المجموعـة مـن المعـادلات والتكامل نحصل على الدوال $z_1, z_2, ..., z_n$

<u>مثال (١) :</u>

حل المعادلة التفاضلية

$$y'' + y = \tan x \ ....(1)$$

<u>الحل :</u>

الحلان المستقلان خطياً للمعادلة المختزلة المناظرة هما

$$y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \sin x$$

ويكون الحل العام للمعادلة المختزلة هو

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان

نكتب الحل العام للمعادلة (١) في الصورة

$$y = z_1(x)y_1 + z_2(x)y_2 = z_1(x)\cos x + z_2(x)\sin x \ ....(2)$$

وبما أن

$$y' = z_1 \sin x + z_2 \cos x + (z'_1 \cos x + z'_2 \sin x)$$

إذن نضع الشرط

$$z_1'\cos x + z_2'\sin x = 0 ....(3)$$

وعلى ذلك يكون

$$y' = -z_1\sin x + z_2\cos x$$

ومنها ينتج أن

$$y'' = -z_1\cos x + z_2\sin x - z_1^1\sin x + z_2'\cos x$$

وبالتعويض عن y, y'' في المعادلة الأصلية (١) نجد أن

$$-z_1'\sin x + z_2'\cos x = \tan x ....(4)$$

وبحل المعادلتين (٣) (٤) ينتج أن

$$z_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$z_2' = \sin x$$

ومنها يكون

$$z_1 = \int(\cos x - \sec x)dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x| + b_1$$

$$z_2 = -\cos x + b_2$$

حيث b_1, b_2 ثابتان اختياريان .

وإذن من (٢) ينتج أن الحل العام للمعادلة (١) هو

$$y = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x| + b_1)\cos x + (-\cos x + b_2)\sin x$$

$$= b_1\cos x + b_2\sin x - \cos x\ \ln|\sec x + \tan x|$$

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية

$$(L_0D^n+L_1D^{n-1}+...+L_{n-1}D+L_n)y=\varphi............(1)$$

حيث $L_0,L_1,....,L_n,\varphi$ دوال للمتغير x

المعادلة السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y=\varphi$$

حيث $F(D)$ كثيرة حدود في D ذات معاملات متغيرة .

نفرض أن $y=y_1$ حل خاص للمعادلة المختزلة $F(D)y=0$

لإيجاد الحل العام للمعادلة (١)

نفرض أنه $y=zy_1$ حيث z دالة للمتغير x

باستخدام صيغة ليبنز

$$y^{(r)}=\sum_{k=0}^{r}{}^{r}c_k z^{(k)}y_1^{(r-k)}$$

وبالتعويض عن $y^{(r)}$ حيث $r=0,1,2,.....,n$ في المعادلة (١)

ولكن y_1 حل خاص للمعادلة المختزلة

$$L_0y_1^{(n)}+L_1y_1^{(n-1)}+...+L_ny_1=0$$

المعادلة (1) تصبح

$$L_0\sum_{k=1}^{n}{}^{n}c_k z^{(k)}y_1^{(n-k)}+L_1\sum_{k=1}^{n-1}{}^{n-1}c_k z^{(k)}y_1^{(n-1-k)}+......=\varphi............(3)$$

نفرض أنه $z'=u$

المعادلة (٣) تكون

$$L_0\sum_{k=1}^{n}{}^{n}c_k u^{(k-1)}y_1^{(n-k)}+L_1\sum_{k=1}^{n-1}{}^{n-1}c_k u^{(k-1)}y_1^{(n-k-1)}+.....=\varphi$$

ويمكن وضع المعادلة الاخيرة على الصورة:

$$(\bar{L}_0 D^{n-1} + \bar{L}_1 D^{n-2} + ... + \bar{L}_n)u = \bar{\varphi}$$

حيث $\bar{L}_0, \bar{L}_1, ..., \bar{L}_n, \bar{\varphi}$ دوال للمتغير x

وهذه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة من الرتبة $(n-1)$ في المتغير u حيث $u = z'$

أي أن التعويض $y = zy_1$ أوجد معادلة تفاضلية من رتبة تقل بمقدار الواحد عن المعادلة الأصلية .

مثال (١):

حل المعادلة

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = (x-2)e^{2x}$$

الحل :

واضح أن $y = e^x$ حل للمعادلة المختزلة لأن

$$L.H.S = xe^x - 2(x+1)e^x + (x+2)e^x = e^x(x - 2x - 2 + x + 2) = 0$$
$$= R.H.S$$

نفرض أن الحل العام على الصورة

$$y = e^x z$$

حيث z دالة في المتغير x

$$y' = e^x(z' + z)$$
$$y'' = e^x(z'' + 2z' + z)$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية

$$xe^{x}(z''+2z'+z)-2(x+1)e^{x}(z'+z)+(x+2)e^{x}z=(x-2)e^{2x}$$
$$xz''+(2x-2x+2)z'+(x-2x-2+x-2)z=(x-2)e^{x}$$
$$xz''-2z'=(x-2)e^{x}$$

بوضع $z'=u$ نجد ان المعادلة السابقة تتحول الي

$$u'-\frac{2}{x}u=(1-\frac{2}{x})e^{x}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في u عاملها المكامل

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^{2}}$$

يكون حلها

$$z'=e^{x}+c_1x^{2}$$
$$z=\int e^{x}dx+c_1\int x^{2}dx+c_2$$
$$=e^{x}+\frac{c_1x^{3}}{3}+c_2$$

ويكون الحل العام هو

$$y=e^{x}z=e^{x}(e^{x}+c_1^1x^{3}+c_2)$$
$$=e^{2x}+e^{x}(c_1^1x^{3}+c_2)$$