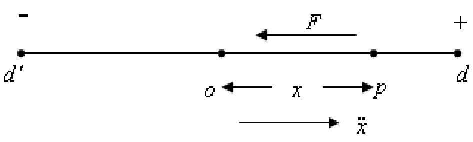
الباب الأول
ديناميكا الحركة التذبذبية
الحركة التوافقية البسيطة

سوف ندرس في هذا الباب الديناميكا الخاصة بالجسيمات التي تتحرك بما يسمى بالحركة التذبذبية أو الإهتزازية وسوف نكتفي في هذه المرحلة بدراسة أبسط أنواع هذه الحركة وهي الحركة التوافقية البسيطة والذبذبات الناتجة عنها والتي تعرف بالذبذبات الحرة أو الطبيعية تمييزاً لها عن أنواع أخرى من الذبذبات سوف نتناول دراستها بالتفصيل في الجزء الثاني من المذكرات وذلك في العام القادم إن شاء الله.

تعريف الحركة التوافقية البسيطة (ح.ت.ب):-

إذا تحركت نقطة مادية في خط مستقيم تحت تأثير قوة جذب متجهة دائماً نحو نقطة ثابتة على الخط المستقيم وتتناسب مع بعدها عن هذه النقطة فإن حركتها تسمى بالحركة التوافقية البسيطة (ح.ت.ب).



نفرض أن o هي النقطة الثابتة (أو المركز) وأن النقطة المادية تتحرك على الخط المستقيم dd' وليكن P موضع النقطة المتحركة عند أي لحظة t وأن بعد P عن o هو x فإن معادلة حركته تصبح:

$$F \alpha x$$

$$F = (\text{const.}) \cdot x = kx$$

حيث k مقدار ثابت.

$$F = -m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad (1)$$

حيث $\frac{k}{m} = \omega^2$ والمعادلة (1) هي المعادلة الأساسية التي تميز الحركة التوافقية البسيطة.

ملاحظات:

(١) تكون العجلة أكبر عند طرفي الحركة d, d' وتساوي الصفر وتغير إشارتها عند مركز الحركة أو الموضع المتوسط o.

(٢) تبدأ النقطة P من السكون عند d أي أن سرعتها عند d تساوي صفر، وتزداد سرعتها حتى تصل إلى أكبر ما يمكن عند o ثم تقل ثانية حتى تسكن عند d' ثم تبدأ في العودة متخذة نفس مسارها حتى تصل إلى d مرة ثانية ويقال إنها عملت ذبذبة كاملة.

(٣) تسمى المسافة do أو $d'o$ أي بين طرفي الحركة ومركزها **بسعة الحركة** ويرمز لها بالرمز a.

(٤) يسمى الزمن من d إلى d' والعودة ثانية إلى d **بالزمن الدوري** أو زمن الذبذبة ويرمز لها بالرمز τ.

(٥) يسمى مقلوب الزمن الدوري **بالتردد** وهو عبارة عن عدد الذبذبات الكاملة في الثانية الواحدة ويرمز لها بالرمز γ أي

$$\gamma = \frac{1}{\tau}$$

(٦) تعرف **السرعة الزاوية** أو **التردد الزاوي** (ω) للنقطة المتحركة بأنه عدد الذبذبات الحادثة في فترة زمنية قدرها 2π أي أن

$$\omega = 2\pi\gamma$$

أو

$$\gamma = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\tau}$$

$$\therefore \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة:

أولاً: العلاقة بين السرعة والمسافة:

$$\because \ddot{x} = -\omega^2 x = V\frac{dV}{dx}$$

فباجراء التكامل

$$\int V dV = -\omega^2 \int x dx$$

$$\therefore \frac{1}{2}V^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + c_1$$

ولإيجاد c_1:

السرعة عند $d\,, d'$ تكون منعدمة أي أن

$$V = 0 \qquad \text{at} \qquad x = a$$

$$\therefore c_1 = \frac{1}{2}\omega^2 a^2$$

$$\therefore V^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

$$\therefore V = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (2)$$

وهذه هي العلاقة بين $V\,, x$ في الحركة التوافقية البسيطة ونأخذ الإشارة الموجبة إذا كان الجسيم متحركاً في إتجاه تزايد x ونأخذ الإشارة السالبة إذا كان الجسيم متحركاً في الإتجاه المضاد.

لإيجاد أكبر سرعة:

تكون السرعة أكبر ما يمكن عند o أي عند $x = 0$.

فمن العلاقة (2):

$$\therefore V_{\max} = \pm \omega a$$

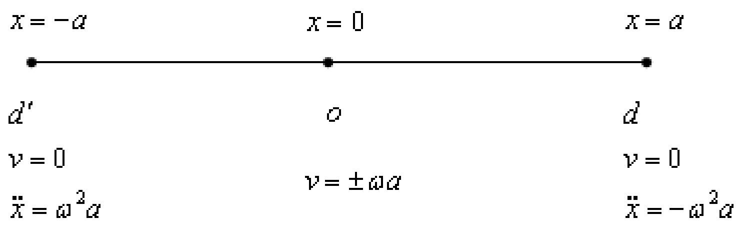
لإيجاد أكبر عجلة:

تكون العجلة أكبر ما يمكن عند d, d' أي عند $x = \pm a$.

فمن العلاقة (1):

$$\ddot{x}_{\max} = \pm \omega^2 a$$

$$\therefore \ddot{x}_{\max} = \omega \cdot V_{\max} \qquad (3)$$



ثانياً العلاقة بين المسافة والزمن:

من العلاقة (2) بأخذ الإشارة السالبة لأن السرعة تتزايد كلما اتجهنا نحو o أي كلما تناقصت المسافة x

$$\therefore V = -\omega\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\cos^{-1}\frac{x}{a} = \omega t + \varepsilon$$

حيث ε مقدار ثابت (ثابت التكامل)

$$\therefore x = a\cos(\omega t + \varepsilon) \qquad (4)$$

وهو الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (1) حيث a, ε هما ثابتان يحددان من الشروط الإبتدائية للحركة ويمثل الثابت a **سعة الحركة** كما يعرف الثابت ε **بالطور الابتدائي** أو زاوية الطور عند بداية الحركة أي عند بداية الحركة $t = 0$.

وتسمى الزاوية $(\omega t + \varepsilon)$ **بزاوية الطور** Φ.

$$\therefore x = a\cos\Phi$$

***حالات خاصة:**

(١) إذا بدء الجسيم الحركة على بعد $x = a$ من المركز o

أي $x=a$ عندما $t=0$.
بالتعويض في (4)

$$\therefore a=a\cos(0+\varepsilon) \qquad \therefore \cos\varepsilon=1$$

$$\therefore \varepsilon=0$$

$$\therefore x=a\cos\omega t$$

(٢) إذا بدء الجسيم الحركة من المركز o:
أي عند $x=0$ عندما $t=0$.

$$\therefore 0=a\cos(0+\varepsilon)$$

$$\therefore \cos\varepsilon=0$$

$$\varepsilon=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x=a\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\omega t$$

$$\therefore x=a\sin\omega t$$

ملاحظات:

(١) إذا كان الجسيم متحركاً في إتجاه تزايد x فنأخذ الإشارة الموجبة للسرعة أي

$$V=\omega\sqrt{a^2-x^2}$$

والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$x=a\sin(\omega t+\varepsilon) \quad \text{أو} \quad x=a\sin\Phi \qquad (5)$$

وإذا بدء القياس من المركز $(x=0)$ فإن

$$0=a\sin\varepsilon$$

أي أن $\varepsilon=0$

$$\therefore x=a\sin\omega t$$

وإذا بدء القياس عندما كان الجسيم على بعد $x=a$ من المركز فإن

$$a=a\sin\varepsilon$$

أي أن $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore x=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore x=a\cos\omega t$$

(٢) يمكن كتابة المعادلة (4)

$$x = a\cos\omega t\cos\varepsilon - a\sin\omega t\sin\varepsilon$$
$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (6)$$

حيث:

$$A = a\cos\varepsilon$$
$$B = -a\sin\varepsilon$$
$$a = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan\varepsilon = -\frac{B}{A}$$

يمثل الحل (6) صورة أخرى للحل العام للمعادلة التفاضلية (1) الممثلة للحركة التوافقية البسيطة بدلالة الثابتين A, B اللذان يتعينان من الشروط الإبتدائية للحركة.

(٣) لإيجاد الزمن الدورى:

حيث أن :

$$x = a\cos\omega t = a\cos(\omega t + 2\pi)$$
$$= a\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$$
$$= a\cos\omega t'$$

أي أن x عند الزمن t هي نفسها عند الزمن $t' = t + \frac{2\pi}{\omega}$ أي أن النقطة تعود لوضعها الأول بعد زمن $\frac{2\pi}{\omega}$ وهو زمن الذبذبة الكاملة أو الزمن الدوري للحركة

أي أن

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

ويكون التردد

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

أمثلة محلولة

مثال (١):

إذا كانت إزاحة نقطة مادية عند زمن t تعطى بالمعادلة

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

فأثبت أن الحركة توافقية بسيطة. وأوجد سعة الذبذبة وزاوية الطور. وإذا كانت $\omega = 2,\ B = 4,\ A = 3$ فأوجد الزمن الدوري والسعة وأكبر سرعة وأكبر عجلة للحركة.

الحل:-

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

بالتفاضل بالنسبة للزمن:

$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

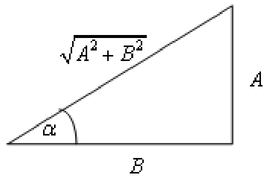
$$= -\omega^2\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x$$

وهي تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة (ح.ت.ب).

$\therefore$ الحركة توافقية بسيطة ولإيجاد سعتها:

نجعل المعادلة الأصلية ذات نسبة مثلثية واحدة وذلك بضرب الطرف الأيمن في المقدار $\sqrt{A^2+B^2}$ وقسمته على نفس المقدار فنحصل على



$$x = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right]$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left[\sin\alpha\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t\right]$$

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\alpha+\omega t) = a\sin(\omega t+\alpha)$$

وتكون سعة الذبذبة هي $a = \sqrt{A^2+B^2}$

وزاوية الطور هي $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{A}{B}$

وإذا كان $B = 4,\ A = 3$ **فإن سعة الذبذبة:**

$$a = \sqrt{16+9} = 5 \text{ cm.}$$

وزاوية الطور هي:

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

الزمن الدوري:

$$\tau = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3.14 \text{ sec.}$$

أكبر سرعة هي:

$$V_{\max} = \pm\omega a = \pm 2\times 5 = 10 \text{ cm./sec}$$

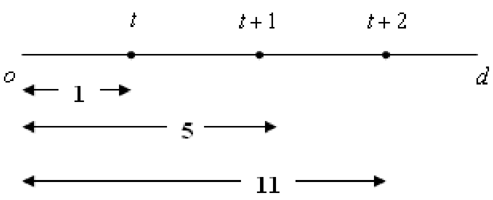
أكبر عجلة هي:

$$\ddot{x}_{\max} = \mp\omega^2 a = \mp 4\times 5 = 20 \text{ cm./sec}^2$$

مثال(٢):
عند نهايات ٣ أزمنة متتالية كانت المسافات التي قطعتها نقطة تتحرك حركة توافقية بسيطة هي $1,5,11$ والتي قيست في نفس الإتجاه من مركز الحركة.
أثبت أن زمن الذبذبة الكاملة هو

$$\left(\frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{6}{5}}\right)\text{sec}$$

الحل:-



إذا بدأنا قياس الزمن من مركز الحركة o فإن

$$t = 0,\quad x = 0$$

ولكن:

$$x = a\cos(\omega t + \varepsilon)$$
$$0 = a\cos\varepsilon$$
$$\cos\varepsilon = 0 \qquad \therefore \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$
$$\therefore x = a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\therefore x = a\sin\omega t$$

بالتعويض عن قيم x الثلاث السابقة ينتج أن:

$$1 = a\sin\omega t \qquad (1)$$

$$5 = a\sin\left(\omega(t+1)\right)$$
$$= a\sin\omega t\,\cos\omega + a\cos\omega t\,\sin\omega \qquad (2)$$
$$11 = a\sin\left(\omega(t+2)\right)$$
$$= a\sin\omega t\,\cos 2\omega + a\cos\omega t\,\sin 2\omega \qquad (3)$$

بالتعويض من (1) في $(2),(3)$ نحصل على:

$$5 = \cos\omega + a\cos\omega t\,\sin\omega \qquad (4)$$
$$11 = \cos 2\omega + a\cos\omega t\,\sin 2\omega \qquad (5)$$

بضرب (4) في $\sin 2\omega$ و (5) في $\sin\omega$ والطرح ينتج أن

$$5\sin 2\omega - 11\sin\omega = \sin 2\omega\cos\omega - \cos 2\omega\sin\omega$$
$$= \sin(2\omega - \omega) = \sin\omega$$
$$5\times 2\sin\omega\cos\omega = 12\sin\omega$$
$$10\sin\omega\cos\omega = 12\sin\omega$$
$$\frac{5}{6}\cos\omega = 1$$
$$\omega = \cos^{-1}\left(\frac{6}{5}\right)$$

الزمن الدوري هو:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\tau = \frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{6}{5}\right)}$$

مثال (٣):تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بعجلة مقدارها $-\frac{\pi^2}{64}x$ حركة توافقية بسيطة. إذا علم أنه عندما $t = 2\ \text{sec}$ كانت النقطة المتحركة مارة بنقطة الأصل وإنه عندما $t = 4\ \text{sec}$ كانت سرعتها $-4\ \text{ft/sec}$. فعين حركتها.

الحل:-

$$\because \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{64}x$$

وهذه معادلة ح.ت.ب فيها

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{64} \qquad \therefore \omega = \frac{\pi}{8}$$

وحلها العام هو

$$x = a\cos(\omega t + \varepsilon)$$
$$= a\cos\left(\frac{\pi}{8}t + \varepsilon\right) \qquad (1)$$
$$\dot{x} = -a\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \varepsilon\right) \qquad (2)$$

ولكن عندما $x = 0$ كانت $t = 2$ فمن معادلة (1):

$$0 = a\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{\pi}{4}$$

السرعة $\dot{x} = -4$ عندما $t = 4$ فمن (2):

$$\therefore -4 = -a\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \varepsilon\right)$$

$$= -a\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$-4 = -a\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وتكون سعة الحركة هي:

$$a = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}$$

وعلى ذلك فإن حركة النقطة المادية تتعين بالعلاقة:

$$x = a\cos\left(\frac{\pi}{8}t + \varepsilon\right)$$

$$x = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

والزمن الدوري للحركة هو:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{8}{\pi}\right) = 16$$

وزاوية الطور الابتدائية:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4}$$

والتردد:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{16}$$

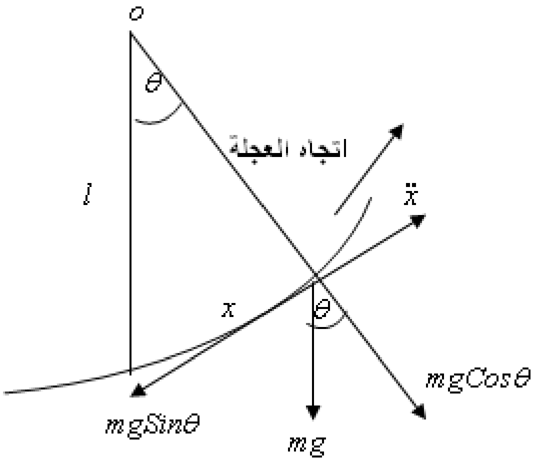
وبذلك تكون حركة النقطة المادية قد تحددت تماماً. وهو المطلوب.

البندول البسيط:

هو عبارة عن كتلة m معلقة في خيط طوله ℓ نهايته الأخرى مثبتة في نقطة o وتتحرك الكتلة m على قوس من دائرة مركزها o ونصف قطرها ℓ.

لدراسة حركة البندول:

تكون الحركة في إتجاه المماس ولنفرض أن الكتلة تحركت خلال قوس x فتكون **معادلة الحركة:**



$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta$$

$$\ddot{x} = -g\sin\theta$$

وبأخذ θ صغيرة بحيث أن

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}} = \frac{x}{\ell}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x$$

أي أن حركة البندول هي ح.ت.ب. فيها

$$\omega^2 = g/\ell$$

$$\therefore \omega = \sqrt{g/\ell}$$

وزمنها الدوري

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

بندول الثوانى:

هو بندول بسيط يتذبذب بين موضعي سكونه (أي يعمل $\frac{1}{2}$ ذبذبة في الثانية الواحدة) ويكون زمن الذبذبة الكاملة هو

$$\tau = 2\ \text{sec}$$

$$\therefore 2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

$$\therefore \ell = \frac{g}{\pi^2} = \frac{32}{10} = 3.2\ \text{ft}$$

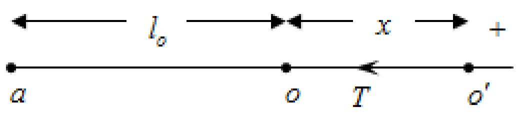
وهو طول بندول الثواني.

الحركة التوافقية البسيطة في الخيوط المرنة واللوالب الحلزونية (الزنبركات):

سوف ندرس الآن بعض التطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة وهي عبارة عن بعض الحالات الخاصة بحركة جسيم متصل بخيط مرن أو لولب حلزوني (زنبرك) أفقياً ورأسياً.

أولاً: حركة جسيم كتلته m مثبت في طرف خيط مرن أو زنبرك خفيف موضوع على منضدة أفقية ملساء، والطرف الآخر مثبت في نقطة على المنضدة.

نفرض أن a هي الطرف الثابت للخيط أو الزنبرك وأن الطول الطبيعي للخيط هو $ao = \ell_0$ أي أن الجسيم في البداية عند النقطة o (وضع الاتزان) إذا أزيح الجسيم من o مسافة oo' قدرها x وتكون معادلة الحركة للجسيم:



$$m\ddot{x} = -T \qquad (1)$$

حيث يعطى الشد في الخيط المرن من قانون هوك الذي ينص على أن " الشد في الخيط المرن يتناسب مع الإستطالة الحادثة أي مع النسبة بين الزيادة في الطول إلى الطول الأصلي أو الطبيعي ."

$$\therefore T \propto \frac{x}{\ell_0} \qquad\qquad \therefore T = \lambda \frac{x}{\ell_0}$$

حيث λ هو معامل المرونة ويمكن كتابة هذا القانون في الصورة

$$T = kx$$

حيث

$$k = \frac{\lambda}{\ell_0}$$

ويسمى k ثابت الخيط المرن أو الزنبرك أو الكزازة أو معامل هوك.
وبالتعويض في معادلة (1):

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{\ell_0}x = -kx$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad (2)$$

وهي معادلة ح.ت.ب. فيها:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{\lambda}{m\ell_0}$$

وزمنها الدوري

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell_0}{\lambda}}$$

الحل العام للمعادلة (2) هو:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (3)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \qquad (4)$$

عند بدء الحركة كان الجسيم عند o أي كانت

$$\dot{x} = V_0$$

وهي السرعة الإبتدائية للجسيم والتي تسببت في إزاحته المسافة x.
فمن المعادلة (4) نحصل على

$$B = \frac{V_0}{\omega}$$

$$\therefore x = \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t$$

وهي المعادلة التي تحدد موضع الجسيم عند أي لحظة.

ملاحظات:

(١) في حالة الزنبرك فإن الحركة تظل توافقية بسيطة طوال الوقت بينما في حالة الخيط المرن فإن الحركة تكون توافقية بسيطة طالما كان الخيط مشدوداً أما إذا أصبح الخيط غير مشدود أي يصبح الجسيم عند a أقل من الطول الطبيعي ℓ_0 ففي هذه الحالة يتحرك الجسيم بسرعة منتظمة.

(٢) يلاحظ أنه من قانون هوك للمرونة: إذا كانت الإستطالة في الخيط أو الزنبرك هي d فإن الشد في الخيط هو:

$$T = \lambda d$$

ويكون الشد اللازم لإحداث الإستطالة قدرها الوحدة هو λ أي

$$T = \lambda$$

عندما $d = 1$ ولما كانت الإستطالة $=$ الزيادة في الطول/ الطول الطبيعي $= \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$

$$\therefore \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = 1$$

أي أن

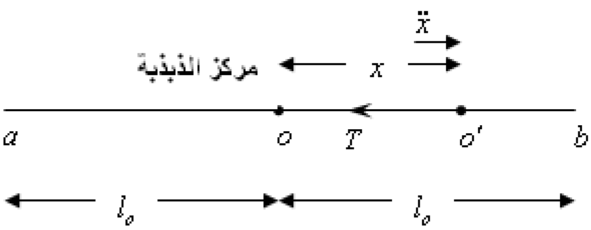
$$\ell - \ell_0 = \ell_0$$
$$\ell = 2\ell_0$$

أي أن الشد اللازم لإحداث إستطالة قدرها الوحدة يساوي معامل المرونة عندما يزداد طول الخيط ويصبح ضعف طوله الطبيعي.
فإذا طلب الشد عندما يزداد طول الخيط (أو الزنبرك) إلى ضعف طول الطبيعي فمعنى هذا أن المطلوب هو معامل المرونة λ حيث $T = \lambda$ عندما $\ell = 2\ell_0$ أي أن $d = 1$ أي عندما تكون الزيادة في الطول تساوي الطول الأصلي.

مثال(١):
خيط مرن طوله الطبيعي $2\ell_0$ مثبت من طرفيه a,b على منضدة أفقية ملساء ربطت نقطة مادية كتلتها m في منتصف الخيط فإذا تحركت النقطة المادية في إتجاه الخيط أو في الإتجاه العمودي على الخيط فأثبت أن الحركة في الحالتين هي ح.ت.ب. وأوجد الزمن الدوري في كل حالة.

الحل:-

أولاً: إذا أعطيت النقطة المادية إزاحة في إتجاه الخيط مقدارها x من المركز o الجزء من الخيط $o'b$ من الخيط ليس فيه شد، وتكون معادلة الحركة هي:



$$m\ddot{x} = -T = -\lambda \frac{x}{\ell_0}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\lambda}{m\ell_0} x = -\omega^2 x$$

وهي ح.ت.ب. فيها

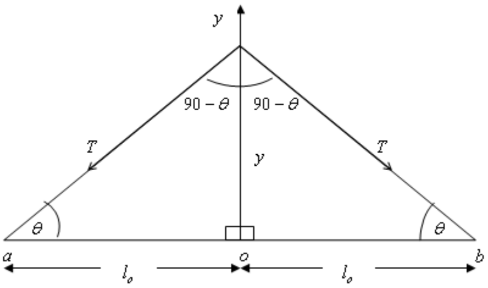
$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m\ell_0}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m\ell_0}}$$

وزمنها الدوري هو:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell_0}{\lambda}}$$

ثانياً: إذا أزيح الجسيم في الإتجاه العمودي على الخيط وكان مقدار الإزاحة y صغيراً جداً بحيث يمكن إهمال مربعاتها وإذا كان 2ℓ هي المسافة بين نقطتي التثبيت فإن معادلة الحركة هي:



$$m\ddot{y} = -2T\sin\theta$$

$$\therefore \ddot{y} = -2\frac{T}{m}\sin\theta$$

$$= -\frac{2T}{m}\frac{y}{\sqrt{\ell_0^2 + y^2}} = -\frac{2T}{m}\left(\frac{y}{\ell}\right)$$

ولكن من قانون هوك:

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\left(\sqrt{\ell_0^2 + y^2} - \ell_0\right) = \frac{\lambda}{\ell_0}\left(\ell - \ell_0\right)$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{2}{m}\frac{y\lambda}{\ell\ell_0}\left(\ell - \ell_0\right)$$

$$\ddot{y} = \frac{-2\lambda\left(\ell - \ell_0\right)}{m\ell\ell_0}y$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y$$

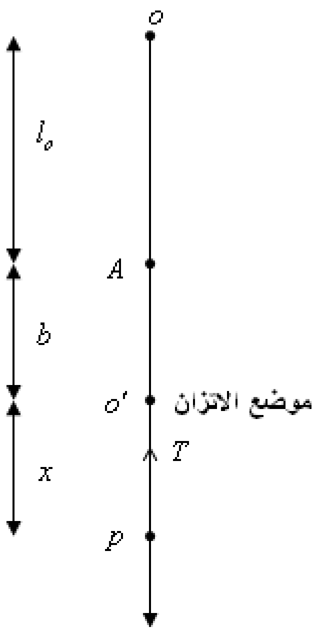
وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها

$$\omega^2 = \frac{2\lambda\left(\ell - \ell_0\right)}{m\ell\ell_0}$$

وزمنها الدوري

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell\ell_0}{2\lambda\left(\ell - \ell_0\right)}}$$

ثانياً: حركة جسيم كتلته m معلق رأسياً بواسطة لولب حلزوني أو زنبرك خفيف مثبت طرفه العلوى في نقطة o.



نفرض أن الطول الطبيعي للزنبرك هو ℓ_0 ومعامل مرونته λ فإذا كان $oA = \ell_0$ وكانت o' هي موضع الجسيم في حالة الإتزان حيث $Ao' = b$ **ويكون في وضع الاتزان:**

$$T_0 = mg = \lambda\frac{b}{\ell_0}$$

$$\therefore b = mg\frac{\ell_0}{\lambda}$$

إذا أزيح الجسيم عن هذا الموضع بحيث كان بعد زمن t عند النقطة P التي تبعد x عن موضع الاتزان ويكون الشد في الزنبرك في هذه الحلة T رأسياً إلى أعلى حيث

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}(b + x)$$

وتكون معادلة حركة الجسيم هي:

$$m\ddot{x} = mg - T$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(b + x)$$

ولكن عند وضع الإتزان o':

$$\ddot{x} = 0 \quad , \quad x = 0$$

$$\therefore b = \frac{mg\ell_0}{\lambda}$$

وتكون معادلة الحركة هي:

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{\lambda}{m\ell_0}x = -\omega^2 x$$

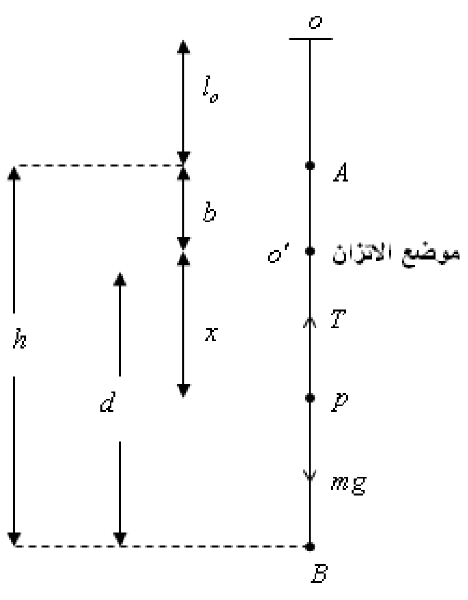
أي أن الجسيم يتحرك ح.ت.ب زمنها الدوري:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell_0}{\lambda}}$$

وتستمر الحركة توافقية بسيطة طول الوقت.
أما إذا كان الجسيم معلق بواسطة خيط مرن فسوف ندرسها فيما يلي.

<u>ثالثاً: حركة جسيم كتلته m معلق رأسياً بواسطة خيط مرن مثبت طرفه العلوي في نقطة o' وبدء الجسيم حركته من السكون من وضع يبعد مسافة h أسفل نهاية الطول الطبيعي للخيط وليس من نهاية الطول نفسه.</u>

هذه الحالة تشبه الحالة السابقة طالما كان الخيط مشدوداً أي طالما كان الجسيم أسفل A.
نفرض أنه عند اللحظة t كان الجسيم عند P حيث $o'P = x$ ويكون الشد في الخيط:



$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}(b + x)$$

وتكون معادلة الحركة هي:-

$$m\ddot{x} = mg - T$$

$$= mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(b + x)$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{\lambda}{\ell_0 m}x$$

وهي معادلة ح.ت.ب. مادام

$$d = h - b < b$$

أي طالما كان الجسيم أسفل A (أي طالما كان الخيط مشدوداً) أما إذا أرتفع الجسيم فوق A (أي كانت $d > b$) فإن حركته تكون تحت تأثير الجاذبية فقط وذلك حيث يرتخي الخيط فتتحرك الكتلة رأسياً إلى أعلى تحت تأثير الجاذبية الأرضية بسرعة ابتدائية V_A:

$$V_A = \omega\overrightarrow{AD}$$

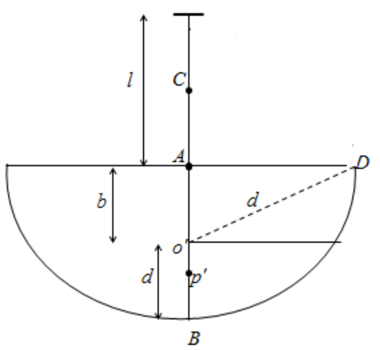
$$\therefore V_A = \omega\sqrt{d^2 - b^2} \qquad (1)$$

وتتلاشى السرعة عند النقطة C وتعود الكتلة إلى A تحت تأثير الجاذبية فقط فتصل إلى A بنفس السرعة V_A ثم تتحرك ح.ت.ب.
في الجزء $Ao'B$ إلى أسفل وتتكرر العملية ويكون زمن الحركة من A إلى C هو

$$\tau_{AC} = \frac{V_A}{g} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}\left(d^2 - b^2\right)}$$

$$= \frac{\omega}{g}\sqrt{d^2 - b^2}$$

ولإيجاد زمن الحركة من B إلى A:



نرسم دائرة مركزها o' ونصف قطرها $o'B = d$ ونفرض أن الأفقي المار بالنقطة A يقطع الدائرة في النقطة D ويكون الزمن الذي يأخذه الجسيم في الحركة من B حتى يصل إلى A يساوي

$$\tau_{BA} = \frac{Bo'D}{\omega}$$

$$\tau_{BA} = \frac{1}{\omega}\left[\pi - Do'A\right] = \frac{1}{\omega}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{b}{d}\right)\right]$$

ويكون الزمن الدوري (الزمن الكلي للحركة) من A إلى C ثم من C إلى A إلى B ثم إلى A مرة أخرى هو

$$T = 2\cdot\left(\tau_{AC} + \tau_{BA}\right)$$
$$= \frac{2}{g\,\omega}\left[\omega^2\sqrt{d^2 - b^2} + g\left(\pi - \cos^{-1}\frac{b}{d}\right)\right]$$

أما أعلى مسافة يصل إليها A فوق (أقصى إرتفاع) فهي:

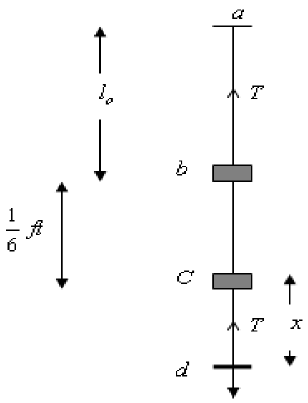
$$= AC = \frac{V_A^2}{2g} = \frac{\omega^2}{2g}\left(d^2 - b^2\right)$$

أمثلة محلولة

مثال (١):

لولب حلزوني خفيف يزداد طوله مسافة $\frac{1}{2}$ inch عند إضافة $1\ Ib$ إلى الوزن المعلق به – فإذا علق هذا اللولب (الزنبرك) وهو يحمل كتلة $4\ Ib$ في حالة سكون ثم جذبت هذه الكتلة إلى أسفل مسافة 3 inch ثم تركت لتتذبذب – فأوجد زمن الذبذبة وكذلك سرعة الكتلة وعجلتها عندما كانت تبعد 1 inch عن وضع الإتزان.

الحل:-



نفرض أن ab هو الطول الطبيعي للولب ℓ_0 وأن λ معامل مرونته، عند تعليق الكتلة $4\ Ib$ فإن اللولب يستطيل مسافة 2 inch أي $\frac{1}{6}$ ft إلى النقطة C مثلاً.

$$\therefore bc = \frac{1}{6}\ \text{ft}$$

وفي هذا الوضع تكون معادلة الإتزان:-

$$4g = \lambda\frac{\frac{1}{6}}{\ell_0}$$

$$\therefore 24g = \frac{\lambda}{\ell_0}$$

إذا كانت d تمثل موضع الكتلة في أي لحظة أثناء حركتها حيث

$$x = cd$$

فإن الشد في هذه الحالة يعطى بالعلاقة:

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\left(\frac{1}{6} + x\right)$$
$$= 24g\left(\frac{1}{6} + x\right)$$

وتكون معادلة الحركة هي:

$$4\ddot{x} = 4g - T$$

$$\ddot{x} = g - \frac{T}{4} = g - 6g\left(\frac{1}{6} + x\right)$$

$$\ddot{x} = -6gx \qquad (1)$$

وهي تمثل حركة توافقية بسيطة فيها $\omega^2 = 6g$

وزمنها الدوري

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{6g}}$$

كذلك فإن سرعة الكتلة في أي موضع هي:

$$V^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

حيث $\omega^2 = 6g$ وسعة الذبذبة هي:

$$a = 3\ \text{inch} = \frac{1}{4}\ \text{ft}$$

$$V^2 = 6g\left(\frac{1}{16} - x^2\right)$$

$$\therefore V = \sqrt{6g\left(\frac{1}{16} - x^2\right)} \qquad (2)$$

عندما $x = 1\ \text{inch}$ أي $x = \frac{1}{12}\ \text{ft}$ فإنه من $(1),(2)$ نجد أن العجلة والسرعة يعطيان كالآتي:

$$\ddot{x} = -6gx = -\frac{6g}{12}$$

$$\ddot{x} = -16\ \text{ft/sec}^2$$

$$V = \sqrt{6g\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{144}\right)} = \sqrt{\frac{32}{3}}\ \text{ft/sec}$$

مثال (٢):-

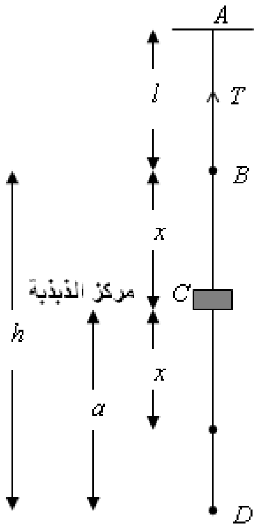
علق جسيم كتلته m من أحد طرفي خيط مرن طوله الطبيعي ℓ ومعامل مرونته $\frac{1}{2}mg\tan^2\theta$ حيث θ زاوية حادة موجبة وثبت الطرف الآخر في نقطة ثابتة o. إذا ترك الجسيم ليسقط من السكون من o برهن على أن أقصى عمق يصل إليه أسفل o يساوي

$$\ell\cot^2\frac{\theta}{2}$$

وأن الجسيم يصل إلى هذا العمق بعد زمن قدره

$$t=\sqrt{\frac{2\ell}{g}}\left[1+\cot\left(\pi-\theta\right)\right]$$

الحل:-



بكتابة معادلة الحركة:

$$m\ddot{x}=mg-T \qquad (1)$$

$$T=\frac{mg\tan^2\theta}{2\ell}x$$

$$\therefore \ddot{x}=\frac{-g}{2\ell}\tan^2\theta\left[x-\frac{2\ell}{\tan^2\theta}\right]$$

وبفرض أن

$$x-\frac{2\ell}{\tan^2\theta}=y$$

وبالتفاضل مرتين نحصل على:

$$\ddot{x}=\ddot{y}$$

$$\therefore \ddot{y}=\frac{-g}{2\ell}\tan^2\theta y \qquad (2)$$

وهذه هي معادلة حركة توافقية بسيطة حول $y=0$ وترددها ω يساوي

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{2\ell}}\tan\theta$$

$$x=\frac{2\ell}{\tan^2\theta}$$

نحصل على المسافة التي يسقطها الجسيم وذلك بتطبيق معادلة طاقة الوضع وطاقة الوضع لأسفل نقطة يصل إليها الجسيم.

$$w\left(\ell+h\right)=\frac{1}{4\ell}w\tan^2\theta h^2$$

$$\tan^2\theta h^2-2\ell h-4\ell^2=0$$

$$\therefore h=\frac{2\ell}{\tan^2\theta}\pm\frac{4\ell\sec\theta}{2\tan^2\theta}$$

$$\therefore a=\frac{2\ell\sec\theta}{\tan^2\theta}$$

أقصى عمق يصل إليه الجسيم

$$d=\ell+h$$

$$=\ell+\frac{2\ell}{\tan^2\theta}+\frac{2\ell\sec\theta}{\tan^2\theta}$$

$$d = \ell\left[\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right]$$

$$d = \ell\left[\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right]^2 = \ell\cot^2\frac{\theta}{2}$$

الجزء AB يسقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية

$$\ell = \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \qquad\qquad \therefore t_{AB}^2 = \frac{2\ell}{g}$$

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

$$\omega t_{BC} = \sin^{-1}\frac{x}{A}$$

$$t_{BC} = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}\cot\theta\sin^{-1}\theta\cos\theta$$

$$\omega t_{CD} = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$t_{CD} = \left[\sqrt{\frac{2\ell}{g}}\cot\theta\right]\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore t = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}\left[1+\cot\theta\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\cos\theta\right)\right]$$

الزمن الذي يأخذه الجسيم ليصل إلى أقصى عمق هو

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}\left[1+\cot(\pi-\theta)\right]$$

مسائل على الحركة التوافقية البسيطة

(١) يتحرك جسيم في خط مستقيم فإذا كانت سرعته V في أي لحظة تعطى بالعلاقة $V = k\sqrt{a^2 - x^2}$ حيث a, k ثابتان، x بعد الجسيم عن نقطة ثابتة على المستقيم.
أثبت أن الحركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن الدوري للحركة.

(٢) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت V_2, V_1 سرعتي الجسيم على بعدين x_2, x_1 من مركز الجذب على الترتيب.
أثبت أن الزمن الدوري يكون مساوياً

$$2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{V_1^2 - V_2^2}}$$

(٣) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة في مستقيم oAB فإذا كانت سرعة الجسيم عند كل من A, B تساوي صفراً، وكانت سرعته في منتصف المسافة بين B, A تساوي V'.
أثبت أن الزمن الدوري يكون مساوياً $\dfrac{\pi(b' - a')}{V'}$
حيث b', a' هما بعدا B, A من النقطة o على الترتيب.

(٤) تتحرك نقطة مادية حركة توافقية بسيطة متسع الحركة لها هو a والزمن الدوري τ. أثبت أن النقطة سوف تكون على مسافة x من المركز الجاذب الذي بدأ منه بعد زمن قدره $\dfrac{\theta\tau}{2\pi}$

وتكون سرعتها عندئذ $\dfrac{2\pi\sqrt{a^2 - x^2}}{\tau}$ حيث $x = a\sin\theta$.

(٥) نقطة مادية كتلتها m تتحرك على محور x عند تأثير قوة مركزية umx متجهة ناحية نقطة الأصل، عندما كانت $t = 4\ \text{sec}$ فإن النقطة المادية تمر بنقطة الأصل، عندما كانت $t = 8\ \text{sec}$ فإن النقطة المادية كانت سرعتها =8 ft/sec. عين الحركة. وإذا كان الزمن الدوري للحركة هو 16 sec فأثبت أن السعة هي $\dfrac{32\sqrt{2}}{\pi}$.

(٦) يستطيل زنبرك بمقدار بوصة واحدة إذا علقت به كتلة مقدارها رطل واحد، فإذا علقت به كتلة مقدارها ٣ رطل وسحبت حتى استطال الزنبرك ٥ بوصات ثم تركت. فأوجد عدد الذبذبات في الدقيقة وسرعة الكتلة وهي على إرتفاع نصف بوصة من أسفل وضع لها للمرة الأولى.

(٧) إذا أزيح الجسيم من موضع الإتزان مسافة قدرها $\dfrac{\ell_0}{4}$ إلى أسفل ثم ترك ليتحرك. فبرهن أن حركته هي حركة توافقية بسيطة وأوجد زمنها الدوري وسعتها.

(٨) جسيم معلق من نقطة ثابتة بواسطة خيط خفيف مرن طوله الطبيعي ℓ، ومعامل مرونته يساوى وزن الجسيم – فإذا أزيح الجسيم إزاحة صغيرة من موضع إتزانه وكانت سعة الحركة التذبذبية الناتجة هي a، فأثبت أنه إذا إلتقط الجسيم جسيماً آخر مساوٍ له عند مروره بنقطة الإتزان فإن سعة الذبذبة الجديدة هي $\left(\ell^2+\frac{1}{2}a^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(٩) يعمل بندول بسيط 21 ذبذبة كاملة كل 44 ثانية وإذا قصر طوله بمقدار 47.6875 سم فإنه يعمل 21 ذبذبة كاملة كل 33 ثانية.
أوجد مقدار عجلة الجاذبية الأرضية.
(١٠) إذا وضع بندول ثوان عند قمة جبل إرتفاعه نصف ميل. أوجد عدد الثوانى التي يؤخرها في اليوم على فرض أن مركز الأرض يبعد ٤٠٠٠ ميل عن قاعدة الجبل، كم يجب تقصير البندول حتى يكون مضبوطاً عند قمة الجبل.

(١١) علق جسيم كتلته 10 باوند من طرف زنبرك مثبت طرفه الآخر فسبب له إستطالة قدرها 10 inch. في وضع الإتزان. فإذا سحب الجسيم إلى أسفل مسافة قدرها بوصة واحدة وترك من السكون فأوجد زمن الذبذبة وسرعة الجسيم عند نقطة تبعد نصف بوصة فوق أسفل نقطة والشد في الزنبرك عند أعلى نقطة على مسار الجسيم.

(١٢) علق جسيم كتلته m من طرف خيط مثبت طرفه الآخر – أزيح الجسيم من موضع الإتزان مسافة رأسية صغيرة – فوجد أنه يعمل n ذبذبة في الثانية في حركته التوافقية البسيطة. إذا كان ℓ هو طول الخيط عند موضع الإتزان. أوجد الطول الطبيعي للخيط. وأثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الإستطالة مساوية الطول الطبيعي هي

$$m\left(2\pi^2 n^2\ell-g\right)$$

(١٣) يتحرك رف أفقى رأسياً ح.ت.ب. زمنها الدوري ثانية واحدة، أوجد أكبر سعة بالسم يمكن أن يعملها الرف بحيث تظل الأشياء الموجودة عليه ملامسة له.

(١٤) علق بندول بسيط من سقف عربة قطار يسير بسرعة V في قوس دائرة نصف قطرها a فوجد أنه يعمل n ذبذبة في الثانية. أثبت أنه في حالة سكون العربة سوف يعمل البندول n_1 ذبذبة في الثانية حيث $V^2=ag\sqrt{\frac{n^4}{n_1^4}-1}$

ملحوظة: المسألة الأخيرة تحل بعد أخذ الإحداثيات القطبية.

تعتبر حركة المقذوفات من أهم التطبيقات على الحركة المستوية للنقطة المادية، وهي أحد أنواع هذه الحركة. وسوف ندرس في هذا الباب حركة نقطة مادية مقذوفة في مستوى رأسي تحت تأثير الجاذبية الأرضية. وتعتبر الحالة التي فيها عجلة الجاذبية ثابتة وتهمل مقاومة الوسط الذي يتحرك فيه المقذوف على أن نعود لدراسة المقذوفات مع إعتبار المقاومة (مقاومة الوسط) في موضوع آخر إن شاء الله.

الباب الثانى
الحركة في خط مستقيم عندما تتغير الكتلة

من دراستنا السابقة نعلم أن إذا تحرك جسيم كتلته ثابتة في خط مستقيم تحت تأثير قوة F في نفس إتجاه الحركة فإنه يمكن كتابة معادلة الحركة للجسيم في صورة قانون نيوتن الثاني الذي ينص على أن "**معدل التغير في كمية الحركة يتناسب مع القوة المؤثرة في الجسيم ويكون في اتجاهها**" ويمكن كتابة ذلك رياضياً كالآتي:

$$F \propto \frac{dP}{dt}$$

$$\therefore F \propto \frac{d}{dt}(mV)$$

$$\therefore F = \text{const.}\left[\frac{d}{dt}(mV)\right]$$

ويمكن اختيار الوحدات في المعادلة الأخيرة بحيث يكون الثابت يساوي الوحدة.

$$\therefore F = \frac{d(mV)}{dt} \qquad (1)$$

حيث m كتلة الجسيم، V هي سرعته.

إذا كانت كتلة الجسيم (m) ثابتة فيمكن إخراج m خارج علامة التفاضل لنحصل على الصيغة السائدة لقانون نيوتن الثاني (أي معادلة الحركة) فيكون:

$$m\frac{dV}{dt} = F \qquad (2)$$

أي الكتلة × العجلة = القوة المؤثرة في إتجاه العجلة.

أما إذا كانت الكتلة m متغيرة فإن المعادلة (2) لا تصلح أن تكون معادلة الحركة وعلى ذلك يجب أن تكون معادلة الحركة هي المعادلة (1) التي يمكن تطبيق نظرية تفاضل حاصل ضرب دالتين عليها لتصبح:

$$m\frac{dV}{dt}+V\frac{dm}{dt}=F \qquad (3)$$

ملحوظة:

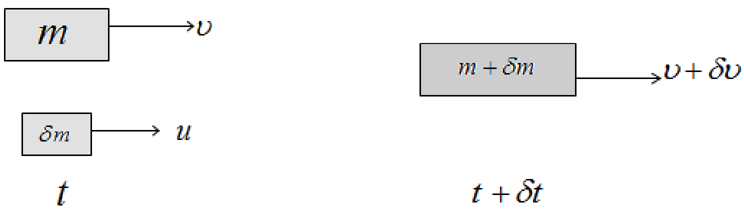
١- يجب أن نلاحظ أن $\frac{dm}{dt}$ هي معدل تغير الكتلة بالنسبة للزمن. فإذا كانت الكتلة تتزايد باستمرار فإن $\frac{dm}{dt}$ توضع بإشارة موجبة. أما إذا كانت الكتلة تتناقص باستمرار فتوضع بإشارة سالبة.

٢- المعادلة (3) تكون صحيحة فقط في حالة ما إذا كان الجسيم المضاف إلى الكتلة المتحركة أو الجزء المفقود منها في حالة سكون قبل الإنضمام أو الإنفصال.

أما في حالة إذا كانت الكتلة المضافة تتحرك بسرعة u قبل الانضمام وفي نفس إتجاه الحركة الأصلية ففي هذه الحالة يجب إستنتاج قانون للحركة.

و هو طبعاً مختلف تماماً عما سبق إستخدامه في حالة سكون الكتلة الزائدة قبل الإنضمام.

نفرض أن V هي سرعة الكتلة الأصلية m. وبفرض أن بعد مضي زمن قدره δt انضمت للكتلة m كتلة مقدارها δm فأصبحت الكتلة الجديدة هي $m+\delta m$ وتتغير سرعتها إلى $V+\delta V$. وفي هذه الحالة فإن الكتلة δm في الزمن δt والتي تتحرك بسرعة u قبل الانضمام أصبحت سرعتها بعد الإنضمام $V+\delta V$.



وبناءاً على ذلك فإنه يكون هناك تغيير في كمية الحركة خلال الفترة الزمنية δt يساوي

$$=(m+\delta m)(V+\delta V)-[mV+\delta m u]$$

$$=m\delta V+\delta m(V-u)$$

وذلك بإهمال الكمية الصغيرة $\delta m\delta V$.

$\because$ الدفع = التغير في كمية الحركة في زمن قدره δt.

$$F\delta t=m\delta V+\delta m(V-u)$$

وبالقسمة على δt وأخذ النهاية عندما $\delta t\to 0$ نحصل على

$$F=\lim_{\delta t\to 0}\frac{m\delta V+\delta m(V-u)}{\delta t}$$

$$\therefore F=m\frac{dV}{dt}+(V-u)\frac{dm}{dt} \qquad (4)$$

و هي المعادلة المطلوبة.

حيث u سرعة الكتلة الزائدة قبل الإنضمام في نفس إتجاه الحركة الأصلية.

وحيث أن $U = u - V$ هي السرعة النسبية للكتلة δm بالنسبة للكتلة m فإن المعادلة (4) تكتب في الصورة:

$$F = m\frac{dV}{dt} - U\frac{dm}{dt} \qquad (5)$$

ملحوظات:

(١) $\dfrac{dm}{dt}$ هي معدل الزيادة في الكتلة. فإذا كانت الكتلة متناقصة وضعت بإشارة سالبة وبذلك فإن الإشارة $(+),(-)$ في $(4),(5)$ تستبدل إلى $(-),(+)$.

(٢) إذا كانت الكتلة الزائدة تسير عكس إتجاه الحركة الأصلية للكتلة m فتوضع سرعة الكتلة الزائدة u بإشارة سالبة.

(٣) إذا كانت u ثابتة فإن المعادلة (4) يمكن وضعها على الصورة:

$$F = \frac{d}{dt}\left[m\left(V - u\right)\right] \qquad (6)$$

(٤) إذا كانت $u = 0$ (أي الكتلة δm كانت ساكنة) فإن المعادلة (6) تؤدي إلى المعادلة (3) السابقة.

ومن أمثلة تغير الكتلة أثناء الحركة يمكن أن نذكر منها:

(١) سقوط قطرة مطر تحت تأثير الجاذبية الأرضية فإن كتلتها تزداد وذلك لتكثيف البخار عليها وتكون الكتلة الزائدة ساكنة قبل الإنضمام.

(٢) وجود ثقب في عربة محملة بالرمال مثلاً فتفقد العربة بعض الرمل بالتدريج وتتغير كتلتها.

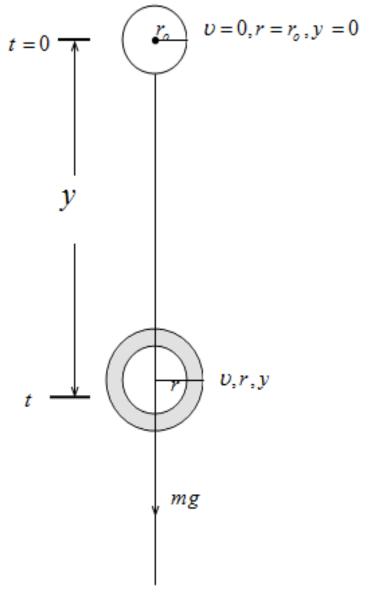
(٣) عند سير عربة فارغة في الطريق أثناء سقوط المطر فإنها سوف تمتلئ تدريجياً بالماء وتتغير كتلتها.

(٤) عند إنطلاق صاروخ فإن كتلته تقل نتيجة خروج كميات كبيرة من الغازات من مؤخرته نتيجة لإحتراق الوقود.

(٥) حركة السلاسل على البكرات وعند سقوطها من إرتفاعات معينة.

أمثـلـــــة

مثال (١):- قطرة مطر كروية تسقط من السكون تحت تأثير الجاذبية الأرضية. فإذا زاد حجمها بمعدل λ من المرات مساحة سطحها.
أوجد سرعتها عند أي لحظة وكذلك المسافة المقطوعة.



الحل:-

بفرض أن r نصف قطر القطرة الكروية عند أي لحظة t وأن V هي سرعتها وأن m كتلة القطرة الكروية عند أي لحظة t والمسافة المقطوعة خلال الزمن t هي y.

نلاحظ هنا أن الكتلة متغيرة فتكون معادلة الحركة هي:

$$\frac{d}{dt}\left(mV\right) = mg \qquad (1)$$

حيث أن الكتلة الزائدة كانت ساكنة قبل الانضمام. أي أن معادلة الحركة تأخذ الصورة:

$$m\frac{dV}{dt}+V\frac{dm}{dt}=mg \qquad (2)$$

حجم قطر المطر الكروية هي يساوي $\frac{4}{3}\pi r^3$ حيث r نصف القطر عند أي لحظة.

وبما أن معدل التغير في الحجم = $\lambda \times$ مساحة السطح.

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\lambda(4\pi r^2) \qquad (2)$$

$$\therefore \lambda=\frac{dr}{dt} \qquad (3)$$

بالتكامل

$$r=\lambda t+c$$

عندما $t=0$ كانت $r=r_0$ وبذلك تكون $c=r_0$

$$\therefore r=r_0+\lambda t \qquad (4)$$

كتلة القطرة الكروية عند اللحظة t هي m وحيث أن الكتلة = الحجم ×الكثافة

$$\therefore m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho=\frac{4}{3}\pi\left(\lambda t+r_0\right)^3$$

حيث ρ كثافة قطرة المطر. وبالتعويض في معادلة (1) نحصل على

$$\frac{4}{3}\pi\rho\frac{d}{dt}\left(\lambda t+r_0\right)^3 V=\frac{4}{3}\pi\rho\left(\lambda t+r_0\right)^3 g$$

بالتكامل نحصل على

$$\left(\lambda t+r_0\right)^3 V=\frac{\left(\lambda t+r_0\right)^4}{4\lambda}g+c_1$$

عند البداية $t=0,\ V=0$ فيكون $c_1=-\frac{r_0^4 g}{4\lambda}$

بالتعويض عن قيمة الثابت c_1 يمكن إيجاد السرعة V

$$\therefore V=\frac{g}{4\lambda}\left(r_0+\lambda t\right)-\frac{r_0^4 g}{4\lambda\left(\lambda t+r_0\right)^3} \qquad (5)$$

ولإيجاد المسافة المقطوعة عند أي لحظة نضع $\frac{dy}{dt}=V$ ثم نجري تكامل المعادلة (5)

$$\therefore y=\frac{g}{8\lambda^2}\left(\lambda t+r_0\right)^2+\frac{r_0^4 g}{8\lambda^2\left(\lambda t+r_0\right)^2}+c_2$$

ومرة أخرى نعين الثابت c_2 من الشروط الإبتدائية في المسألة عند $t=0,\ y=0$ فيكون c_2 مساوياً

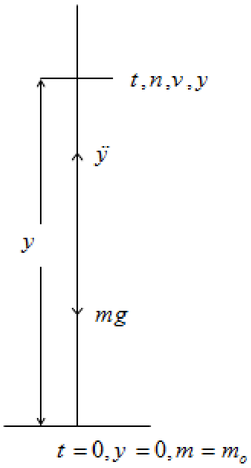
$$c_2=\frac{-g}{8\lambda^2}r_0^2-\frac{gr_0^2}{8\lambda^2}=-\frac{g}{4\lambda^2}r_0^2$$

وبالتعويض يمكن إيجاد المسافة المقطوعة عند أي لحظة t على الصورة

$$y=\frac{g}{8\lambda^2}(\lambda t+r_0)^2+\frac{r_0^4 g}{8\lambda^2}\frac{1}{(\lambda t+r_0)^2}-\frac{g}{4\lambda^2}r_0^2 \qquad (6)$$

مثال (٢):- انطلق صاروخ كتلته الإبتدائية m_0 من السكون إلى أعلى. فإذا كان وقوده يحترق بأكمله في زمن قدره T، وعند مرور زمن t من بداية الإحتراق تصبح كتلة الصاروخ m_0-bt، وإذا كانت سرعة الغاز المنبعث من مؤخرته تساوي U بالنسبة له.
فأوجد سرعته وإرتفاعه عند الزمن t حيث $(t<T)$.

الحل:-



نفرض أنه بعد مرور زمن قدره t سرعة الصاروخ هي V وكتلته m وقطع مسافة y من نقطة انطلاقه.
واضح أن

$$m=m_0-bt$$

بالتفاضل بالنسبة للزمن

$$\frac{dm}{dt}=-b \qquad (1)$$

معادلة حركة الصاروخ

$$m\frac{dV}{dt}+U(-b)=-mg$$

أي أن

$$(m_0-bt)\frac{dV}{dt}-Ub=-(m_0-bt)g$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=-g+\frac{Ub}{m_0-bt} \qquad (2)$$

بالتكامل نحصل على

$$V=-gt-U\ln(m_0-bt)+c_1$$

وحيث أن $V=0$ عندما $t=0$ فإن الثابت c_1 يكون على الصورة $c_1=U\ln m_0$

$$\therefore V=-gt-U\ln\left(1-\frac{b}{m_0}t\right) \qquad (3)$$

وبالتكامل مرة أخرى نحصل على الإرتفاع

$$y=-\frac{1}{2}gt^2-U\int\ln\left(1-\frac{b}{m_0}t\right)dt+c_2$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}gt^2-Ut\ln\left(1-\frac{b}{m_0}t\right)+Ut+\frac{m_0U}{b}\ln\left(1-\frac{b}{m_0}t\right)+c_2$$

عندما $t=0$ يكون $y=0$ ويكون الثابت $c_2=0$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}gt^2-U\left(t-\frac{m_0}{b}\right)\ln\left(1-\frac{b}{m_0}t\right)+Ut \qquad (4)$$

مثال (٣):- يسقط على قطار يتحرك بسرعة ٣٠ ميل/ساعة، ١٠٠٠٠ باوند من الماء كل ربع ميل.
أوجد القوة الناشئة عن القطار والقدرة بالحصان اللازم إضافتها حتى يسير القطار بنفس السرعة.

الحل:-
معادلة الحركة عندما تتغير الكتلة

$$m\frac{dV}{dt}+(V-u)\frac{dm}{dt}=F \qquad (1)$$

حيث m كتلة القطار عند أي لحظة t، V هي سرعته، u هي سرعة الماء الذي يسقط على القطار.
بما أن سرعة الماء الذي يسقط على القطار في إتجاه عمودي على الإتجاه الأفقي (إتجاه سير القطار) فتكون مركبته في إتجاه حركة القطار تساوي الصفر. أي أن $u=0$ في المعادلة (1).
$\because$ القطار يتحرك بسرعة ٣٠ ميل/ساعة.
$\therefore \frac{dV}{dt}=0$ وبالتعويض في معادلة الحركة (1) نحصل على

$$V\frac{dm}{dt}=F$$

حيث F هي القدرة الناشئة على القطار.
$\because \frac{dm}{dt}$ هي معدل الزيادة في الكتلة بالنسبة للزمن

$$\frac{dm}{dt}=\frac{dm}{dx}\frac{dx}{dt}=V\frac{dm}{dx}$$

٣٠ ميل/ساعة =٣٠×(٢٢/١٥)=٤٤ قدم/ث

$$\frac{dm}{dt}=44\times\frac{10000}{\frac{1}{4}\times3\times1760}=\frac{1000}{3}$$ باوند/ث

$$\therefore F=\frac{1000}{3}\times44$$ $Poundal=$ باوند.قدم/ث٢

$$F=\frac{1000\times44}{3\times32}=\frac{1375}{3}$$ وزن باوند

القدرة = ق × ع

$$P=F\cdot V=\frac{1375}{3}\times44$$ ثقل باوند . قدم / ث

القدرة بالحصان

$$P_1=\frac{1375}{3}\times44\times\frac{1}{550}=36\tfrac{2}{3}$$

ملحوظة:
الحصان = ٥٥٠ ثقل باوند.قدم/ث.

مثال (٤):- يقذف رجل موجود على عربة تتحرك بدون مقاومة كتلة m من الرمل في الثانية وبذلك يعمل شغلاً $d =$ كل ثانية.
أثبت أن سرعة الرمل بالنسبة إلى العربة تساوي $\sqrt{\frac{2d}{m}}$.

الحل:-
نفرض أن M كتلة العربة عند اللحظة t و V سرعتها
بكتابة معادلة الحركة عندما تتغير الكتلة

$$M\,\frac{dV}{dt}+\left(V-u\right)\frac{dM}{dt}=F$$

وحيث أن العربة تتحرك بدون مقاومة إذن

$$M\,\frac{dV}{dt}-\left(u-V\right)\frac{dM}{dt}=0 \qquad (1)$$

حيث $u=V$ هي سرعة الرمل بالنسبة للعربة وترمز لها بالرمز U

$$M\,\frac{dV}{dt}=U\,\frac{dM}{dt}$$

$$\because \frac{dM}{dt}=-m$$

$$\therefore M\,\frac{dV}{dt}=-Um \qquad (2)$$

بفرض أن سرعة العربة هي $V+\Delta V$ عند اللحظة $t+\Delta t$.
وبفرض أن خلال الفترة الزمنية Δt يقذف الرجل كمية من الرمل كتلتها $m\Delta t$ وبسرعة $u-V$ بالنسبة للعربة.
حيث أن الشغل المبذول خلال الفترة الزمنية $d\,\Delta t=\Delta t$ وهو يكون مساوياً التغير في طاقة الحركة

$$\therefore d\,\Delta t=\frac{1}{2}\left(M-m\Delta t\right)\left(V+\Delta V\right)^2+\frac{1}{2}\left(m\Delta t\right)u^2-\frac{1}{2}MV^2 \qquad (3)$$

حيث u سرعة الرمل يتعين من العلاقة

$$u=U+V \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في معادلة (3) وإهمال الكمية الصغيرة التي من الرتبة الثانية نحصل على

$$d\,\Delta t=MV\,\Delta V+\frac{1}{2}mU^2\Delta t+mVU\,\Delta t \qquad (5)$$

بقسمة معادلة (5) على Δt وأخذ النهاية عندما Δt تؤول إلى الصفر

$$\therefore d=MV\,\frac{dV}{dt}+\frac{1}{2}mU^2+mVU \qquad (6)$$

بالتعويض من (2) في (6) نحصل على

$$d = \frac{1}{2} m U^2$$

$$\therefore U = \sqrt{\frac{2d}{m}}$$

أي أن سرعة الرمل بالنسبة للعربة هي $\left(\frac{2d}{m}\right)^{1/2}$.

مثال (٥):- صاروخ كتلته $3m$ منها $2m$ من الوقود تكفي للإشتعال لمدة دقيقة واحدة. فأثبت أن الصاروخ لا ينطلق إلا بعد 15 ثانية من إشتعاله وأن أقصى سرعة يكتسبها هي $15g\left[5\log\frac{5}{2}-3\right]$. حيث g عجلة الجاذبية الأرضية وسرعة خروج المعادلة النسبية $75g$ في الثانية.

الحل:-

نفرض أن كتلة الصاروخ بعد زمن t هي M وسرعته V.

القوة المؤثرة على الصاروخ هي وزنه فقط وتكون في إتجاه مضاد لإتجاه حركته ولذلك تأخذ إشارة سالبة

$$F = -Mg \qquad (1)$$

معدل تغير الكتلة بالنسبة للزمن يساوي

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2m}{60} = -\frac{m}{30} \qquad (2)$$

بالتكامل نحصل على

$$M = -\frac{m}{30}t + c_1 \qquad (3)$$

حيث c_1 ثابت التكامل. في بداية الحركة $t = 0$ كانت كتلة الصاروخ $M = 3m$. بالتعويض في معادلة (3) نحصل على $c_1 = 3m$

$$\therefore M = \frac{m}{30}(90-t) \qquad (4)$$

معادلة الحركة عندما تتغير الكتلة

$$M\frac{dV}{dt} + (V-u)\frac{dM}{dt} = F$$

حيث u هي سرعة الغاز.

$$M\frac{dV}{dt} - U\frac{dM}{dt} = F \qquad (5)$$

حيث $U = u - V$ هي سرعة الغاز بالنسبة للصاروخ.

وحيث أنها في إتجاه مضاد لحركة الصاروخ فنضعها بإشارة سالبة في المعادلة (5)

$$\therefore M\,\frac{dV}{dt}-(-U)\left(-\frac{m}{30}\right)=-Mg$$

$$\therefore M\,\frac{dV}{dt}-75g\,\frac{m}{30}=-Mg$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{75g}{30M}-g \qquad (6)$$

بالتعويض من (4) في (6) نحصل على

$$\frac{dV}{dt}=\frac{75g}{90-t}-g$$

لكي ينطلق الصاروخ لابد أن تكون

$$\frac{dV}{dt}\geq 0$$

$$\therefore \frac{75g}{90-t}-g\geq 0$$

$$\therefore t\geq 15 \qquad (7)$$

إذن لا ينطلق الصاروخ إلا بعد ١٥ ثانية.

بتكامل المعادلة (6) نحصل على

$$V=-75g\log(90-t)-gt+c_2$$

$$\text{at } V=0 \quad , \quad t=15$$

$$\therefore c_2=15g+75g\log 75$$

بالتعويض في المعادلة (8) عن قيمة c_2 نحصل على

$$V=75g\log\frac{75}{(90-t)}+15g-gt$$

يبلغ الصاروخ أقصى سرعة له عندما $t=60\text{ sec}$

$$\therefore V_{\max}=75g\log\frac{75}{30}-45g$$

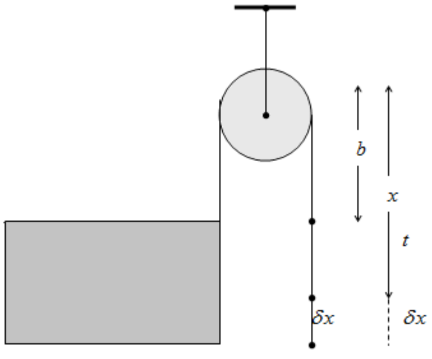
$$V_{\max}=15g\left[5\log\frac{5}{2}-3\right] \qquad (9)$$

مثال (٦):- سلسلة مكومة عند حافة منضدة ويمر جزء منها على بكرة ملساء ترتفع مسافة قدرها a من المنضدة وجزء منها طوله b يتدلى من الناحية الأخرى للبكرة، حيث $b>a$.
ادرس الحركة.

الحل:-

نأخذ البكرة نقطة الأصل ونفرض أنه عند اللحظة t كانت سرعة السلسلة V عندما كان الجزء المعلق x. ونفرض أن الطول ازداد بمقدار Δx في زمن قدره Δt والسرعة أصبحت $V+\Delta V$ وكذلك نفرض أن الكثافة النوعية للسلسلة هي ρ.

التغير في كمية الحركة = الدفع



$$\rho\left(x+a+\Delta x\right)\left(V+\Delta V\right)-\rho\left(x+a\right)V=\rho\left(x-a\right)g\,\Delta t$$

$$\rho\left(x+a\right)\Delta V+\rho\Delta x\left(V+\Delta V\right)=\rho\left(x-a\right)g\,\Delta t$$

بالقسمة على $\rho\Delta t$ وأخذ النهاية عندما $\Delta t\to 0$ نحصل على

$$\left(x-a\right)g=\left(x+a\right)\frac{dV}{dt}+V\,\frac{dx}{dt}$$

وذلك بإهمال المقدار الصغير $\Delta x\,\Delta V$ من الدرجة الثانية

$$\left(x-a\right)g=\left(x+a\right)\frac{dV}{dt}+V^{2}$$

وهذه معادلة تفاضلية المطلوب حلها والتي يمكن كتابتها في الصورة

$$\frac{dV^{2}}{dx}+\frac{2}{\left(x+a\right)}V^{2}=2\frac{\left(x-a\right)}{x+a}g$$

أي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى في V^{2}

العامل المكامل

$$\mu=e^{\int\frac{2}{x+a}dx}=e^{2\ln\left(x+a\right)}=e^{\ln\left(x+a\right)^{2}}=\left(x+a\right)^{2}$$

$$\therefore V^{2}\left(x+a\right)^{2}=\int 2g\left(x+a\right)\left(x-a\right)dx$$

$$V^{2}\left(x+a\right)^{2}=2g\left(\frac{x^{3}}{3}-a^{3}x\right)+c$$

$$\text{at } V=0\qquad x=b\qquad \therefore c=-2g\left(\frac{b^{3}}{3}-a^{2}b\right)$$

$$\therefore V^{2}\left(x+a\right)=2g\left(\frac{x^{3}}{3}-a^{2}x\right)-2g\left(\frac{b^{3}}{3}-a^{2}b\right)$$

$$V^{2}\left(x+a\right)=\frac{2}{3}g\left(x-b\right)\left[x^{2}+xb+b^{2}-3a^{2}\right]$$

تمـــارين

(١) كتلة على شكل إسطوانة مساحة مقطعها σ تتحرك في إتجاه محورها تحت تأثير قوة ثابتة F خلال غبار كثافته ρ يتحرك في إتجاه مضاد لحركة الإسطوانة سرعته V. إذا كان كل الغبار يصطدم بالإسطوانة يعلق بها اوجد السرعة والمسافة المقطوعة عند أى لحظة زمنية t، بفرض أن السرعة الإبتدائية تساوى صفر والكتلة الإبتدائية m_0.

(٢) بدأ جسيم يتحرك من السكون تحت تأثير قوة f ثابتة من حيث المقدار والإتجاه ويقابل الجسيم تيار من الغبار الداخلى يتحرك في الإتجاه المضاد بسرعة ثابتة u ويتراكم على الجسيم بمعدل ثابت هو k - اثبت أن الجسيم تزداد كتلته من M إلى M' بعد أن يكون على بعد

$$x = \frac{f - ku}{k^2}\left[M' - M - M \ln \frac{M'}{M}\right]$$

(٣) وضعت سلسلة منتظمة كتلة وحدة الأطوال منها $= \lambda$ عند نقطة o من نضد أفقى أملس ثم جذب أحد طرفيها بقوة أفقية ثابتة f اثبت أن طول الجزء المتدلي منها على النضد بعد مضى زمن t هو $x = \sqrt{f/\lambda}$.

(٤) كتلة على شكل إسطوانة مصمتة مساحة مقطعها σ لا تؤثر عليها أى قوة وتتحرك في إتجاه محورها خلال غبار ساكن كثافته ρ.
أوجد السرعة والمسافة المقطوعة عند أى لحظة زمنية t بفرض أن سرعة الإسطوانة الإبتدائية V_0 وكتلتها الإبتدائية m_0.

(٥) وضعت سلسلة على نضد أفقى أملس عند نقطة من سطحه قريبة من حافته، إذا تحرك أحد طرفيها ليسقط رأسياً من سكون برهن إنه بعد مضى زمن t وقبل أن تسقط السلسلة بأكملها يصبح طول الجزء الرأسى المتدلي $x = \frac{1}{6} g t^2$ وسرعته تساوي $\frac{1}{3} g t$.

(٦) تنزلق عربة سكة حديد مفتوحة كتلتها m_0 على قضبان ملساء أفقية بسرعة منتظمة V_0 فإذا بدأ المطر يسقط عليها بسرعة ثابتة مقدارها u داخل العربة بمعدل زمني ثابت k برهن أن المسافة التى تقطعها العربة بعد مضى زمن t من سقوط المطر تساوي

$$\frac{m_0 V_0}{k} \ln\left(1 + \frac{kt}{m_0}\right)$$

وأوجد رد الفعل العمودى.

(٧) قطرة مطر كروية قطرها a cm تسقط من سكون من إرتفاع h فوق سطح الأرض، فإن كان بخار الماء يتجمع عليها بمعدل $k\ \mathrm{gm/cm^2/sec}$ ولا تؤثر عليها أية قوى سوى وزنها.
أثبت أنها عندما تصل إلى الأرض يكون نصف قطرها

$$k\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g a^2}{2 h k^2}}\right)$$

(٨) صاروخ كتلته الإبتدائية M تنبعث منه في وحدة الزمن eM من الغازات بسرعة V بالنسبة إلى الصاروخ إذا كانت M' كتلة غلاف الصاروخ. فأثبت أن الصاروخ لا يمكن أن يرتفع مباشرة إلا إذا كانت $eV > g$، ولا يمكن أن يرتفع كلياً إلا إذا كانت $\frac{eMV}{M'} > g$ وإذا إنطلق الصاروخ رأسياً مباشرة فأثبت أن أقصى سرعة

$$\left[V \log\frac{M'}{M} + \frac{g}{e}\left(1 - \frac{M'}{M}\right)\right]$$

وأقصى إرتفاع يصل إليه الصاروخ هو

$$\frac{V^2}{2g}\left(\log\frac{M'}{M}\right) + \frac{V}{e}\left[1 - \frac{M'}{M} - \log\frac{M'}{M}\right]$$

(٩) سلسلة طولها ℓ معلقة من طرفها العلوى بحيث يصبح طرفها السفلى على إرتفاع ℓ من سطح المستوى الأفقي، إذا ترك طرفها العلوى – فأثبت أن رد فعل المستوى على السلسلة عندما يكون نصفها على المستوى هو $\frac{7}{2}$ من وزن السلسلة.

(١٠) وضعت سلسلة ثقيلة منتظمة كتلة وحدة الأطوال منها m عند نقطة o فوق نضد أفقى أملس وربط باحد طرفيها جسيم كتلته M إذا قذف الجسيم M بسرعة أفقية V.

أثبت أن سرعة السلسلة عندما ينفرد طول x منها هو $\frac{MV}{M + mx}$ وأن الكتلة M تتحرك كما لو كانت تقع تحت تأثير قوة تتناسب عكسياً مع نصف المسافة من نقطة ثابتة في خط حركتها – أثبت أيضاً أن معدل فقدان طاقة الحركة تتناسب مع مكعب سرعة M.

(١١) سلسلة كتلتها $2m$ وطولها 2ℓ معلقة في حالة توازن على بكرة أخذت حشرة كتلتها M في الصعود فوق السلسلة مبتدأة حركتها من أحد طرفيها بسرعة منتظمة V بالنسبة للسلسلة – أثبت أن سرعة السلسلة عندما تترك البكرة هو

$$\left[\left(\frac{M^2}{(M+m)^2}V^2 + \frac{2M+m}{M+m}\right)g\ell\right]^{\frac{1}{2}}$$

(١٢) مدفع رشاش كتلته M موضوع فوق مستوى خشن ويحتوى على قذائف كتلتها M' فإذا كانت القذائف تخرج بمعدل كتلة m في وحدة الزمن وبسرعة u بالنسبة للأرض وإذا كانت μ هو معامل الإحتكاك بين المدفع والأرض.

أاثبت أن سرعة المدفع للخلف عندما تكون جميع القذائف قد أطلقت هو

$$\frac{M'}{M}u - \left[\frac{(M+M')^2 - M^2}{2mM}\right]\mu g$$

الباب الثالث

" المســــارات المــــركزيــــة "

☼ المســار المركـزي وبعـض خواصــه :

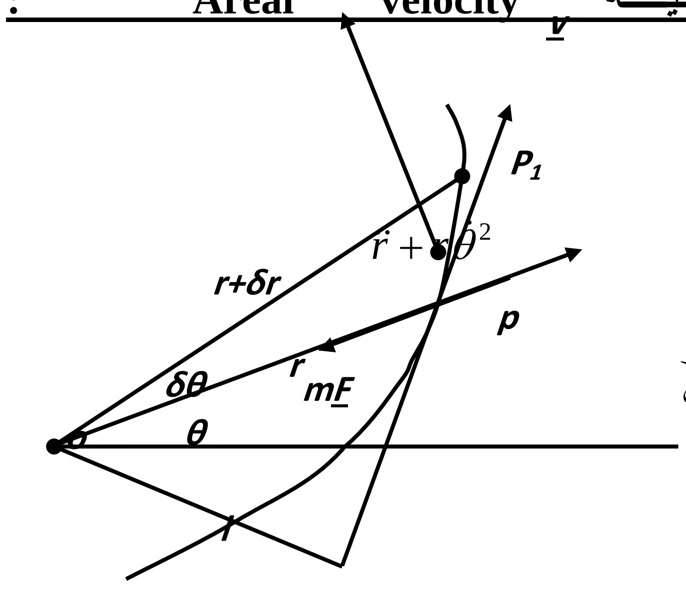
المسار المركزي هو المنحني الذي ترسمه نقطة تتحرك تحت تأثير قوة متجهه دائما نحو نقطة ثابتة تسمي بالمركز الجاذب والقوة تسمي بالقوة المركزية .
والمسار المركزي يكون مستويا وذلك لأنه عند أي لحظة تتحرك النقطة في المستوي المحتوي علي المماس للمسار والنقطة الثابتة .
وحيث أن القوة الوحيدة المؤثرة علي النقطة موجودة في هذا المستوي فإنه لا توجد قوة تعمل علي إخراجها من هذا المستوي .
ومن أمثلة المسارات المركزية حركة الأرض حول الشمس تحت تأثير قوة الجذب المتبادل بين كتلتيهما كذلك حركة الأقمار الصناعية حول الأرض تحت تأثير قوة الجذب المتبادل بينهما إلي أخره.
والطريقة الملائمة لدراسة مثل هذه الحركة المركزيــة هي باستخــدام الإحداثيــات القطبيــة (r , θ)
حيث نأخذ نقطة الأصل (القطـب) هي المركز الجــاذب ، بذلك تكون القـوة دائما في الاتجاه دائما من
النقطة إلي القطب أي عكس اتجاه تزايد r . ثم بكتابة معادلتي الحركة في اتجاه r والاتجاه العمودي عليه . وفي دراستنا لهذا الباب سنجد أن المطلوب هو :

(١) إما إيجاد معادلة المسار المركزي الذي يتحرك فيه الجسم إذا علمت القوة المركزية .

(٢) إيجاد قانون القوة المركزية إذا علم المسار المركزي .

☼ الســرعة المساحيـــة Areal velocity :

$\frac{1}{r.} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$



نفرض أن نقطـة ماديـة متحـركة تحت تأثير قوة مركزية جاذبة $\underline{F}$ لوحدة الكتـل نحو نقطـة ثابتــة o في المستــوي ونفرض p نقطـة عامــة للجسيـم علـــي المســـــار المركــزي ونستخــــدم إحداثيات قطبية حيث o هي نقطـة الأصـل فيكـــون op هو r يصنع زاوية θ مـع مستقيم ثابت في المستوي

وبكتابة معادلة الحركة في اتجاه والعمودي عليه فيكون :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mF \qquad (1)$$

$$(2) \quad \frac{m}{r}.\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

وبتكامـــل المعادلـــة (2) نحصـــل علـــي :

$$r^2\dot{\theta} = const = h \qquad (3)$$

وبفرض أنه بعد زمن δt أصبحت النقطة p عند النقطة p عند p_1 حيث $op_1 = r + \delta r$ وبفرض أن الطول pp_1 صغيرا جدا بحيث يمكن اعتباره خط مستقيم وتكون الزاوية يبن op والخط المستقيم

op_1 هي $\delta\theta$. بذلك نحصل علي مساحة المثلث opp_1 تساوي :

$$\delta S = \tfrac{1}{2} r.(r + \delta r).\sin \delta\theta$$

$$\therefore \delta S \approx \tfrac{1}{2} r^2 \delta\theta$$

وذلك باستخدام التقريب $\sin \delta\theta = \delta\theta$ وبإهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية وبالقسمة علي δt وبأخذ النهاية عندما تؤول δt الي الصفر نحصل علي :

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\delta t \to 0} \frac{r^2 \delta\theta}{\delta t} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

هذه المشتقة تكـــون هي معدل تغير المساحـــة بالنسبة للزمن وتسمي بالسرعة المساحية وعلي ذلك

تكون السرعة المساحية هي : $\dot{S} = \dfrac{h}{2}$

<u>أي أن : نصف القطر يكتسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية .أو بمعني أخر أن السرعة المساحية مقدار ثابت .</u>

☼عــزم السرعـــة الخطيـــة :

بما أن مركبتي سرعة النقطة p هي $\dot{r}$ في اتجاه r ، $r\dot{\theta}$ في إتجاه عمودي علي r (في إتجاه زيادة θ) فإذا أخذنا عزم السرعة للنقطة p حول النقطة o نجد ان :

$$\dot{r}.0 + r\dot{\theta} = r^2\dot{\theta} = h$$

أي أن عزم السرعة حول النقطة o هي مقدار ثابت h *وذلك من المعادلة (3)* وإذا كان l هو طول العمود النازل من المركز الجاذب o علي إتجاه المماس الذي هو نفسه إتجاه السرعة الكلية للنقطة p

فيكون من جهه أخري عزم السرعة v حول o هو vl وعلي ذلك يكون :

$$vl = r^2\dot{\theta} = h \qquad (5)$$

$$\therefore v = h/l \qquad (6)$$

أي ان السرعة في المسار المركزي تتناسب عكسيا مع طول العمود الساقط من مركز القوة علي المماس للمسار .

☼ نظــريــــة:

" مسـار أي نقطـة تتحـرك تحـت تأثيـر قـوة مركزيـة عبـارة عـن منحنـي مسـتوي "

لإثبات ذلك نكتب معادلة الحركة : $m\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{F}$

حيث $\underline{F}$ قـوة مـركزيــة وخــط عملهــا r (متجـــه الموضع للنقطة) بالضــرب إتجاهيـــــا في $\underline{r}$:

$$m.\left(\underline{r} \wedge \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

ولكن $\underline{r}$ هو خـط عمـل القــوة المركزيـــة $\underline{F}$ فيكـــون حاصــل ضربهمــا الإتجاهــي يســاوي صفر

$$\underline{r} \wedge \frac{d\underline{v}}{dt} = 0 \qquad (7)$$

$$\because \frac{d}{dt}(\underline{r} \wedge \underline{v}) = \underline{r} \wedge \frac{d\underline{v}}{dt} + \frac{d\underline{r}}{dt} \wedge \underline{v}$$

$$= \underline{r} \wedge \frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{v} \wedge \underline{v}$$

$$= \underline{r} \wedge \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\underline{r} \wedge \underline{v}) = 0 \qquad (8)$$

وبتكامل المعادلة (8) نحصل علي :

$$\underline{r} \wedge \underline{v} = h \qquad (9)$$

حيث h متجه ثابت . أي أن عزم السرعة هو متجه ثابت ، وبضرب طرفي المعادلة (9) قياسيا في r نجد أن : $\underline{r}.(\underline{r} \wedge \underline{v}) = \underline{r}.\underline{h}$

وحيث أن : $\underline{r}.(\underline{r} \wedge \underline{v}) = 0$ فـــــــــإن :

$$\underline{r}.\underline{h} = 0 \qquad (10)$$

من المعادلة (10) نستنتج أن متجه الجسيــم r يكــون دائمــا عموديــا علــي المتجه الثابت h ومارا بالنقطـــة الثابتـــة o ، أي أن المســـــار يقــع في المستـــوي .

☼ إيجاد قانــون القــوة المركزيــة إذا علــم معادلة المسار :

(أ) اذا كانت معادلة المسار معطاة بدلالة (l , r) :

نفرض v سرعة النقطة p عند الوضع العام وهي في اتجاه المماس للمسار وعلي ذلك عجلة النقطة في اتجاه عمودي علي المماس إلي داخل المنحني هي v^2/ρ وبكتابة معادلات الحركة في الاتجاه العمودي علي المماس نجد أن :

$$m\frac{v^2}{\rho} = mF\cos\alpha$$

$$= mF\,\frac{l}{r}$$

ومن خواص المنحنيات المستوية نعلم أن $\rho = r(dr/dl)$ فيكون :

$$\frac{v^2}{r}\cdot\frac{dl}{dr} = F\cdot\frac{l}{r} \qquad (11)$$

ولكن من المعادلة (6) نجد أن $v = \dfrac{h}{l}$ فيكون :

$$\boxed{F = \frac{h^2}{l^3}\cdot\frac{dl}{dr}} \qquad (12)$$

أي أن إذا علم معادلة المسار بدلالة l , r فإنه يمكن إيجاد القوة F وبالعكس إذا علمت القوة
F بدلالة l , r أيضا فإنه يمكن عمل تكامل للمعادلة (12) وإيجاد معالة المسار .

(ب) إذا كانــت معادلــة المســار معطــاه بدلالــة r,θ :

نكتب معادلة الحركة في اتجاه r علي الصورة :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -F$$

وبوضع $r = \dfrac{1}{u}$ فيكون :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\cdot\dot{\theta}\cdot\frac{du}{d\theta} = -r^2\cdot\dot{\theta}\cdot\frac{du}{d\theta}$$

$$= -h\cdot\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$
$$= -h\cdot\dot{\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

فيكون :

$$\boxed{h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) = F} \qquad (13)$$

هو قانون القوة إذا علمت معادلة المسار بدلالة $r\ ,\ \theta$ ، العكس إذا علم قانون القوة بدلالة $r\ ,\ \theta$
فإنه بالتكامل يمكن معرفة المعادلة القطبية للمسار .

☼ <u>قانـــون السرعـــة الخطيـــة :</u>

حيث ان مركبتي السرعة في اتجاهي $r\ ,\ \theta$ هما علي الترتيب $\dot{r}, r\dot{\theta}$ مقدار سرعة الجسيم v
تتعين من :

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

وبوضع $r = \dfrac{1}{u}$ ينتـــج ان :

$$\dot{r} = -h\cdot\frac{du}{d\theta} \qquad , \qquad \dot{\theta} = hu^2$$

$$\boxed{v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)} \qquad (14)$$

المعادلـــة (14) تعطـــــي مقـــدار ســـــرعة الجسيـــــم عنـــــد أي موضــــع .

$$\therefore v^2 = \frac{h^2}{l^2}$$
$$\therefore \frac{1}{l^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \qquad (15)$$

☼ ألقبـــــــــــا :

هي النقـــاط علـــي المســـار المركـزي الذي عندهـا يكون نصف قطـــر المتجه أكبر أو أصغر
ما يمكن تسمي بنقط ألقبـــــا . عند ألقبـــا تتلاشي مركبـة السرعــــة في الاتجـــاه المركـــزي

$$\dot{r} = 0$$

ومنها : $$\frac{dr}{d\theta} = 0 \qquad , \qquad \frac{du}{d\theta} = 0$$

ومن المعادلـــة (15) السابقـــة نستنتـــج أن :

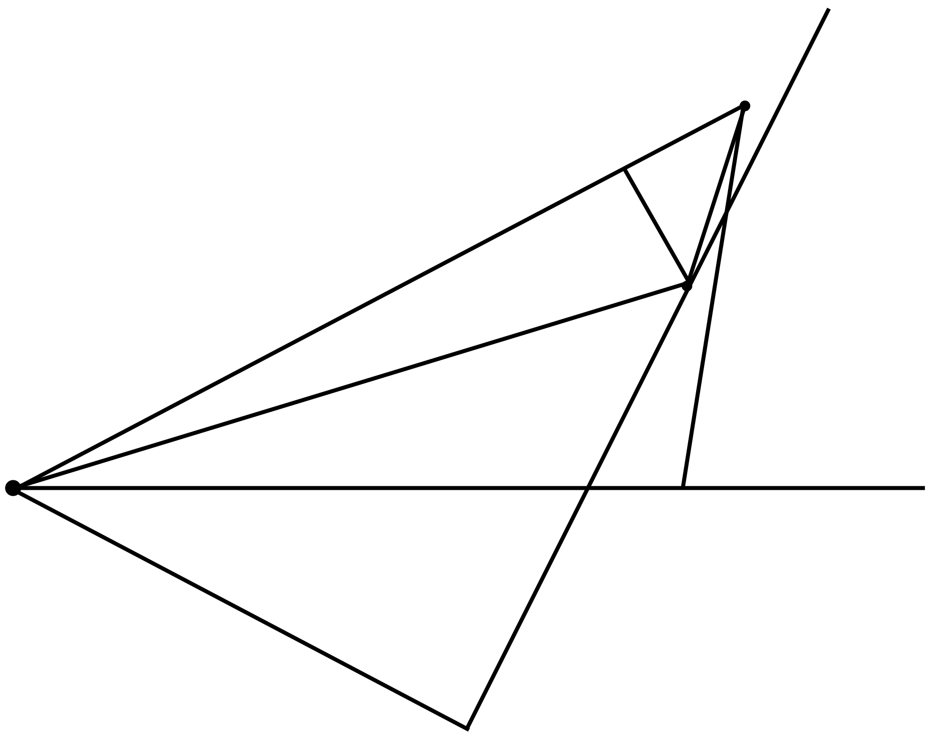
$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad l = r$$

بذلك عند ألقبا يكون نصف قطر المتجه r عمودي علي المماس أي تصبح السرعة عند القبا
عمودية علي نصف قطر المتجه وتعطي من العلاقة :

$$v = \frac{h}{l} = \frac{h}{r} \qquad (16)$$

☼ إيجـاد العلاقــة التــي تربــط بيـــن (l, r, θ) :

المعادلة التي تربط بين l , r تسمي بالمعادلة القطبية المماسية للمسار المركزي للمسار وهذه
المعادلة تعطي العلاقة بين نصف قطر المتجه r والعمود الساقط l من نقطة الأصل علي المماس
للمنحني عند أي نقطة :



نفرض نقطة p علي المنحني زاوية ميل المماس لها ψ والمماس يصنع زاوية φ مع r وأن l هو طول العمود oA الساقط من النقطة o علي المماس . نأخذ نقطة قريبة جدا p' فيكون نصف قطر المتجه لها هو $r + \Delta r$ ويصنع زاوية $\theta + \Delta\theta$ مع الأفقي وكذلك نجد أن المماس يصنع زاوية $\varphi + \Delta\varphi$ مع op' ويصنع زاوية $\psi + \Delta\psi$ مع الأفقي . ويكون الجزء pp' من المنحني هو Δs .
عند إسقاط العمود pq علي المستقيم op' ، حيث أن الأطوال كلها صغيرة يمكن اعتبار المثلث opq مثلث متساوي الساقين ونجد أن الطول $qp' = \Delta r$ وكذلك $pq = r\Delta\theta$ وذلك باعتباره قوس من الدائرة نصف قطرها r يحصر زاوية $\Delta\theta$ عند مركزها .

في المثلث pqp' نجد أن :

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{\Delta r}{\sqrt{(r\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2}}$$

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{r\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{r\Delta\theta}{\sqrt{(r\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2}}$$

وبأخذ النهاية عندما $p' \to p$ و $\Delta\varphi \to 0$ و $\Delta r \to 0$ نجد أن :

$$\cos\varphi = \frac{dr}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}},$$

$$\sin\varphi = \frac{l}{r} = r\,\frac{d\theta}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

$$\therefore \frac{l^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \Rightarrow \frac{r^4}{l^2} = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

وبقسمة الطرفين علي r^4 نجد أن :

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

وهذه هي العلاقة التي تربط بين l, r, θ للمسار المركزي .

☼ نصف قطر الانحناء لأي منحني :

عندما نأخذ p قريبة جدا من نقطة p' فإن الزاوية المحصورة بين النقطتين $p\,,\,p'$ هي $\Delta\psi$ وهي تقيس مقدار الدوران في pp' ويكون الانحناء مساويا $\Delta\psi/\Delta s$ ويكون نصف قطر الانحناء مساويا

$$\rho = \frac{\Delta s}{\Delta\psi}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}\cdot\frac{dl}{dl}\cdot\frac{dr}{dr}\cdot\frac{d\alpha}{d\alpha}$$

$$\therefore \rho = \frac{ds}{dr}\cdot\frac{dl}{d\alpha}\cdot\frac{dr}{dl}\cdot\frac{d\alpha}{d\psi}$$

$$\because \sin\varphi = \frac{l}{r} \,.....(i) \qquad , \qquad \therefore l = r\sin\varphi$$

$$\because \cos\varphi = \frac{dr}{ds}$$

$$\therefore \frac{dl}{d\alpha} = r\cos\varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} + \sin\varphi \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\alpha} \,..........(ii)$$

$$1 = 0 - \frac{d\alpha}{d\psi} \,.........(iii) \qquad \Rightarrow \qquad \because \psi = \pi/2 - \alpha$$

$$\because \frac{1}{l^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2\left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right) = r^2 \cot^2\varphi$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = r\cot\varphi \,...........(iv)$$

وكذلك نفترض لدينا $\alpha + \theta + \varphi$ فيكون :

$$\frac{d\theta}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha} = -1 \,.............(v)$$

بالتعويض عن $(v),(iv)$ في المعادلة (ii) نجد أن :

$$\frac{dl}{d\alpha} = -r\cos\varphi \,.............(vi)$$

ومما تقدم نجد أن نصف قطر الانحناء :

$$\boxed{\rho = r \cdot \frac{dr}{dl}}$$

☼ السرعة من مالا نهاية عند نقطة علي مسار مركزي :

تعرف السرعة من مالا نهاية v عند نقطة ما علي بعد r من مركز القوة بإنها السرعة التي يكتسبها الجسيم إذا تحرك من حالة السكون في مالا نهاية إلي هذه النقطة تحت تأثير القوة الجاذبة وفي حالتنا

μ/r^2 لوحدة الكتل . وباعتبار أن التغير في طاقة حركة الجسيم تساوي الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة عليه لنقل ه من مالا نهاية إلي النقطة ، أي أن :

$$\frac{m}{2}v^2 = -\int_{\infty}^{r}\frac{m\mu}{r^2}dr = \frac{m\mu}{r}$$

$$\therefore v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

وهذا يعني أن المسار المركزي يكون :

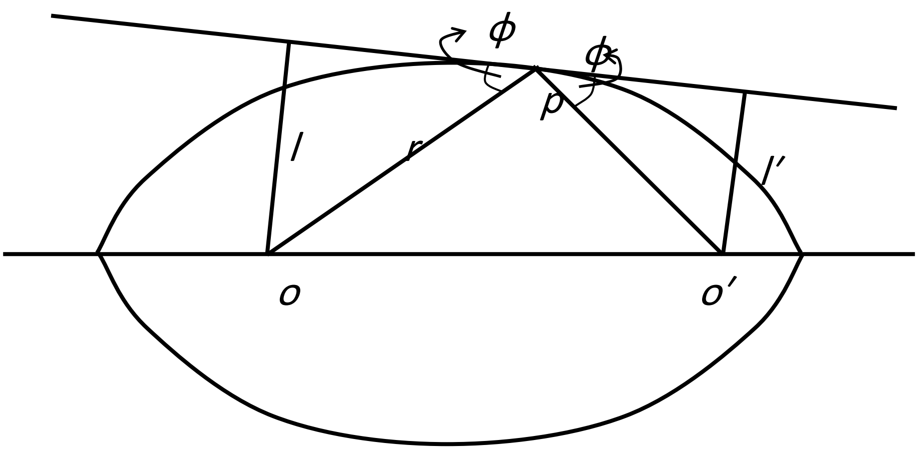
(١) قطع مكافئ إذا كانت السرعة عند أي نقطة علي المسار تساوي السرعة من مالا نهاية عند هذه النقطة .

(٢) قطع ناقص إذا كانت السرعة عند أي نقطة علي المسار أقل من السرعة من مالا نهاية عند هذه النقطة.

(٣) قطع زائد إذا كانت السرعة عند أي نقطة علي المسار أكبر من السرعة من مالا نهاية عند هذه النقطة .

☼ **<u>دراسة حالات خاصة عندما يكون المسار ونقطة الجذب معروفة :</u>**

(أ) **<u>إذا كان المسار قطع ناقص :</u>**



<u>من خواص القطع الناقص :</u>

١- مجموع البعدين عند البؤرتين = ضعف نصف المحور الأكبر .

$$r + r' = 2a \qquad (1)$$

٢- حاصل ضرب العمودين علي المماس من البؤرتين = مربع نصف قطر المحور الأصغر .

$$l'l = b^2 \qquad (2)$$

٣- المماس متساوي الميل علي البعدين البؤريين .

$$\varphi = \varphi' \qquad (3)$$

وبذلك نحصل من (3) علي :

$$\sin\varphi = \sin\varphi'$$

$$\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'} = \sqrt{\frac{ll'}{rr'}} = \sqrt{\frac{b^2}{r(2a-r)}}$$

وذلك بإستخدام (2) , (1) وبالتربيع للطرفين نحصل علي :

$$\frac{l^2}{r^2} = \frac{b^2}{r(2a-r)}$$

ومن ذلك نحصل علي :

$$\frac{b^2}{l^2} = \frac{2a}{r} - 1 \qquad (4)$$

وهي معادلة القطع الناقص بدلالة $l\ ,\ r$.

بالتعويض في قانون القوة يمكننا معرفة القوة في الصورة :

$$F = \frac{h^2}{l^3}\cdot\frac{dl}{dr} = \frac{ah^2}{b^2}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2} \qquad (5)$$

حيث أن :

$$\mu = \frac{h^2}{l^3} \qquad , \qquad h = b\sqrt{\frac{\mu}{a}} \qquad (6)$$

سرعة النقطة عند أي موضع عام :

$$v^2 = \frac{h^2}{l^2} = \frac{b^2\mu}{a}\cdot\frac{1}{b^2}\left(\frac{2a}{r} - 1\right) = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \qquad (7)$$

وكذلك يمكننا في هذه الحالة معرفة الزمن الدوري τ لقطع المسار (المسار هنا قطع ناقص يكون مقفل) .