الفصل الثاني

التكامل الثنائي

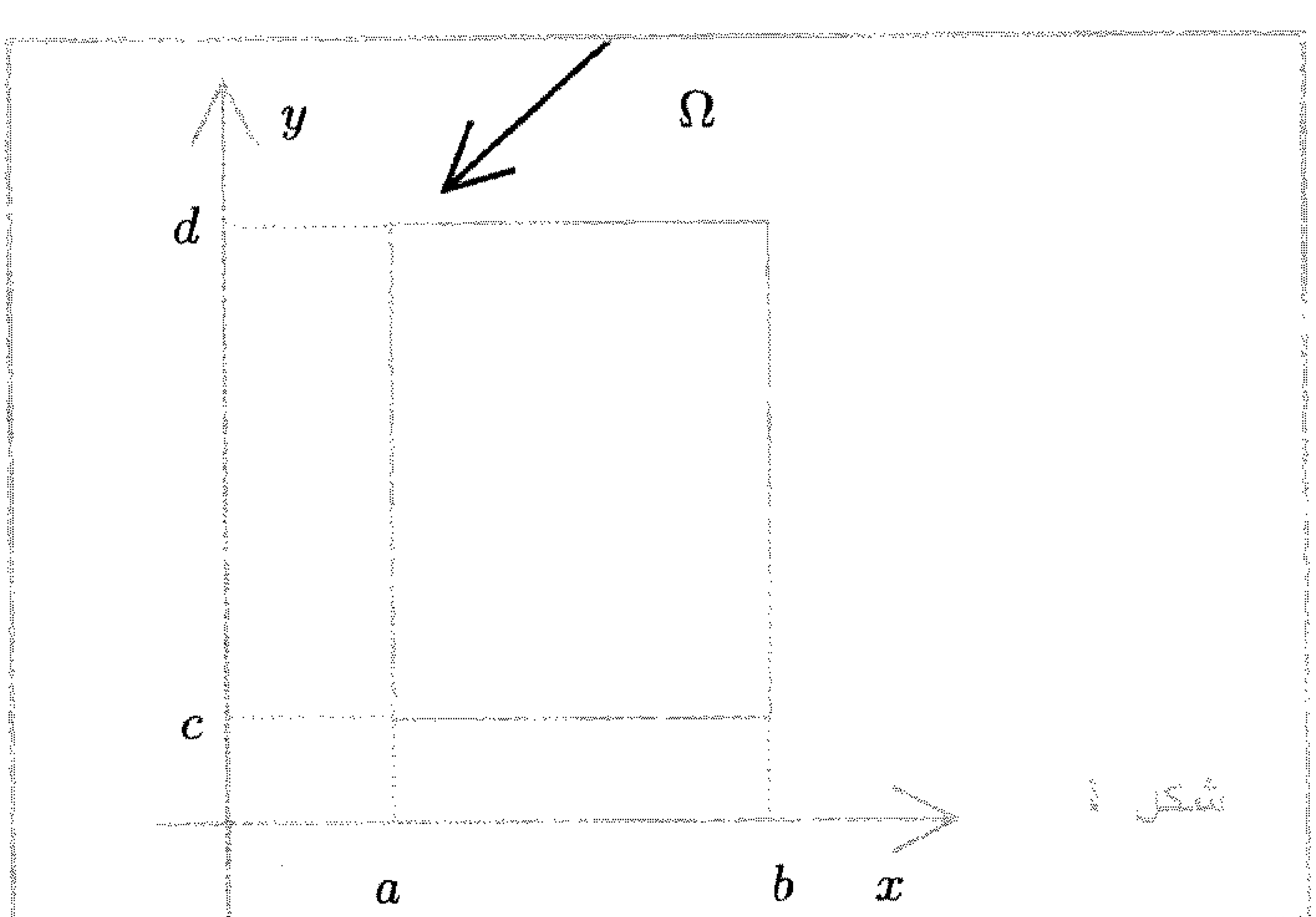
2 . 1 الحجم تحت سطح والتكامل الثنائي

التكامل المفرد $\int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحنى $y=f(x)$ وفوق محور x في الفترة $[a,b]$ حيث أن $f(x)\geq 0$، والتكامل الثنائي يعتبر تعميماً للتكامل المفرد أي يمثل الحجم تحت سطح في R^3.

ونعتبر حالة بسيطة. نفرض أن Ω تمثل مستطيلاً في R^2:

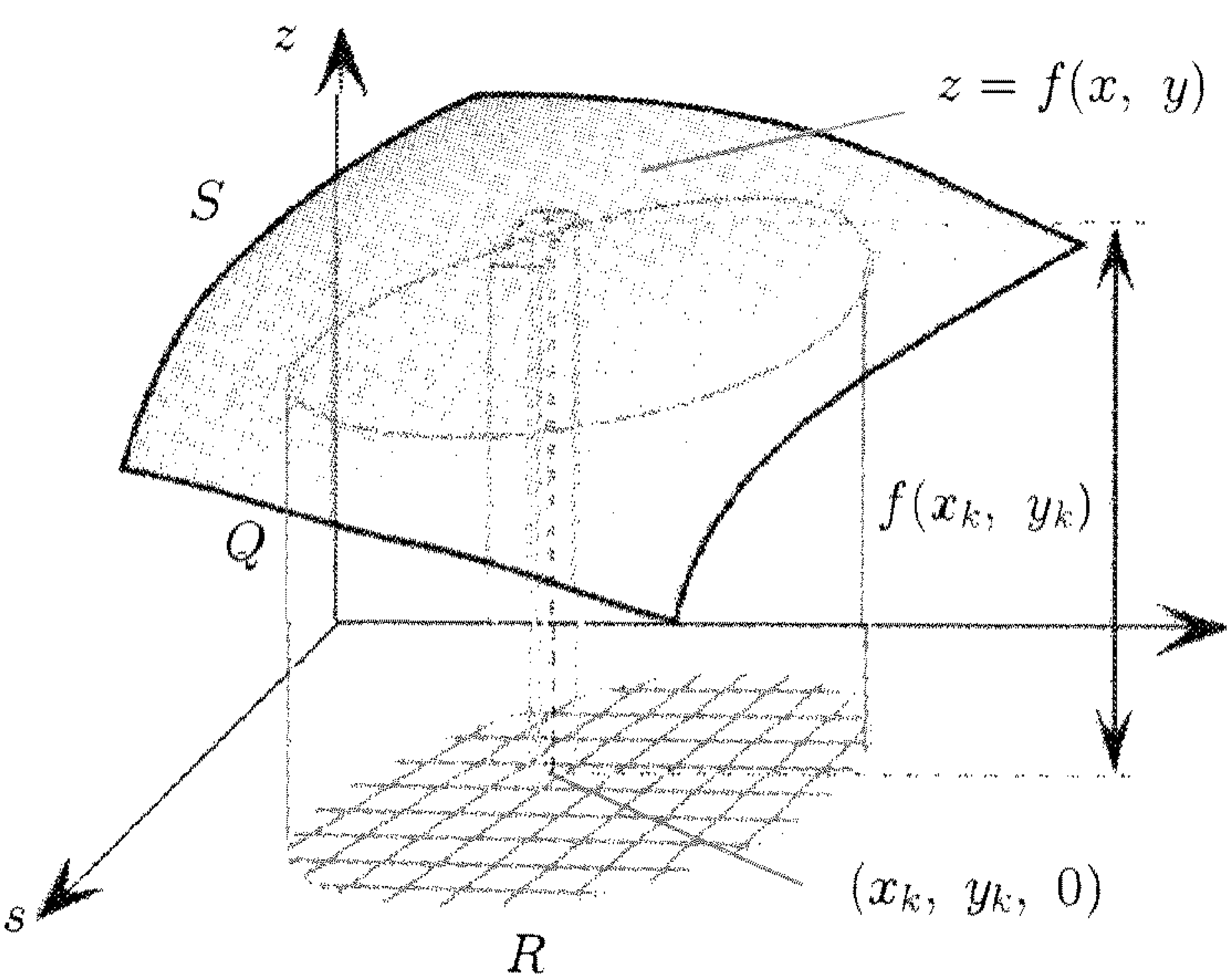
$$\Omega=\{(x,y): a\leq x\leq b\ ,\ c\leq y\leq d\}$$

أنظر الشكل (1).



ونفرض أن $z = f(x, y)$ دالة متصلة وغير سالبة على المنطقة Ω، أي أن $f(x, y) \geq 0$ لكل $(x, y) \in \Omega$. والسؤال الآن ما هو الحجم تحت السطح $z = f(x, y)$ وفوق المستطيل Ω؟

وللإجابة عن السؤال نتبع الخطوات التالية:



شكل (2)

(1) نقسم المستطيل Ω إلى مستطيلات فرعية بمستقيمات موازية للمحورين حيث أن:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

و

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

ويمكن تعريف Δx و Δy كما يلي:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

و

$$\Delta y = y_i - y_{i-1} = \frac{b-a}{m}$$

وهكذا يمكن تعريف المستطيلات الفرعية كما يلي:

$$\Omega_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1} \le x \le x_i \ , \ y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

حيث أن $i = 1, 2, ..., n$ و $j = 1, 2, ..., m$

أي أنه توجد $n\,m$ من المستطيلات الفرعية.

(2) نقدر الحجم تحت السطح وفوق كل مستطيل فرعي:

إذا كانت (x_i^*, y_j^*) نقطة في Ω_{ij}، فإن الحجم تحت السطح وفوق المستطيل Ω_{ij} تكون قيمته التقريبية كما يلي:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A \qquad (*)$$

حيث أن $\Delta A = \Delta x \Delta y$ تمثل مساحة المستطيل Ω_{ij}.

(3) وبجمع الحجوم التقريبية نحصل على الحجم الكلي:

$$V = V_{11} + V_{12} + ... + V_{1m} + V_{21} + V_{22} + ... + V_{2m} + ... + V_{n1} + V_{n2} + ... + V_{nm}$$

أو بصورة مختصرة

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} \qquad (**)$$

من المعادلتين $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij}$$

(4) وبأخذ النهاية عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ نجد أن:

$$V = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

ملاحظة

عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$، فإن قطر المستطيل يؤول إلى الصفر، وإذا عرفنا $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)}$، فإن $\Delta s \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to \bar{o}$ ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$V = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A$$

حيث أن ΔA تساوي قطر المستطيل $\Delta x \Delta y$.

مثـال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z = x + 2y$ وفوق المستطيل:

$$\Omega = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 5\}$$

الحـل

للسهولة نقسم الفترتين $[1,2]$ و$[3,5]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية (أي أن $n = m$).

$$1 = x_0 < x_1 < \ ...\ x_n = 2$$

و

$$3 = y_0 < y_1 < \ ...\ < y_n = 5$$

كذلك $\Delta x = \dfrac{b-a}{b} = \dfrac{1}{n}$ و $\Delta y = \dfrac{d-c}{n} = \dfrac{2}{n}$

وهكذا $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$ و $y_j = 3 + \dfrac{2j}{n}$

وباختيار $x_i^* = x_i$ و $y_j^* = y_j$ نجد أن:

$$V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A = (x_i + 2y_j)\, \Delta x \Delta y$$

وبالتعويض عن x_i و y_j و Δx و Δy نجد أن:

$$V_{ij} = \left[\left(1+\frac{i}{n}\right)+2\left(3+\frac{2j}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)\ \left(\frac{2}{n}\right) = \left(7+\frac{i}{n}+\frac{4j}{n}\right)\ \ \frac{2}{n^2}$$

وهكذا:

$$V = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{14}{n^2}+\frac{2i}{n^3}+\frac{8j}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{14}{n^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2i}{n^3}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{8j}{n^3}\right)$$

ولحسن الحظ يمكن إيجاد مجموع المتسلسلات الثنائية السابقة حيث أن:

$$,\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \frac{14}{n^2} = \frac{14}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ = \frac{14}{n^2}(n)(n) = 14$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \frac{2i}{n^3} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ i = \frac{2}{n^3}(1+2+3+\ldots+n)(n)$$

$$.= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \frac{8j}{n^3} = \frac{8}{n^3}\ \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ j = \frac{8}{n^3}(n)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{4(n+1)}{n}$$

ملاحظة

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

وهكذا

$$V = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ V_{ij} \approx 14 + \frac{n+1}{n} + \frac{4(n+1)}{n}$$

وبذلك

$$V = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*, x_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[14 + \frac{n+1}{n} + \frac{4(n+1)}{n}\right] = 19$$

والآن يمكننا تعريف التكامل الثنائي كما يلي:

تعريف 1 (التكامل الثنائي)

إذا كانت $z = f(x,y)$ والمنطقة Ω معرّفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

وإذا كانت $\lim_{\Delta s\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$ موجودة ومستقلة عن كيفية اختيار النقاط (x_i^*, y_j^*)، فإن التكامل الثنائي للدالة f على Ω يعرّف كما يلي:

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dA = \lim_{\Delta s\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

نظرية 1

إذا كانت الدالة f متصلة على المنطقة المستطيلة Ω، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

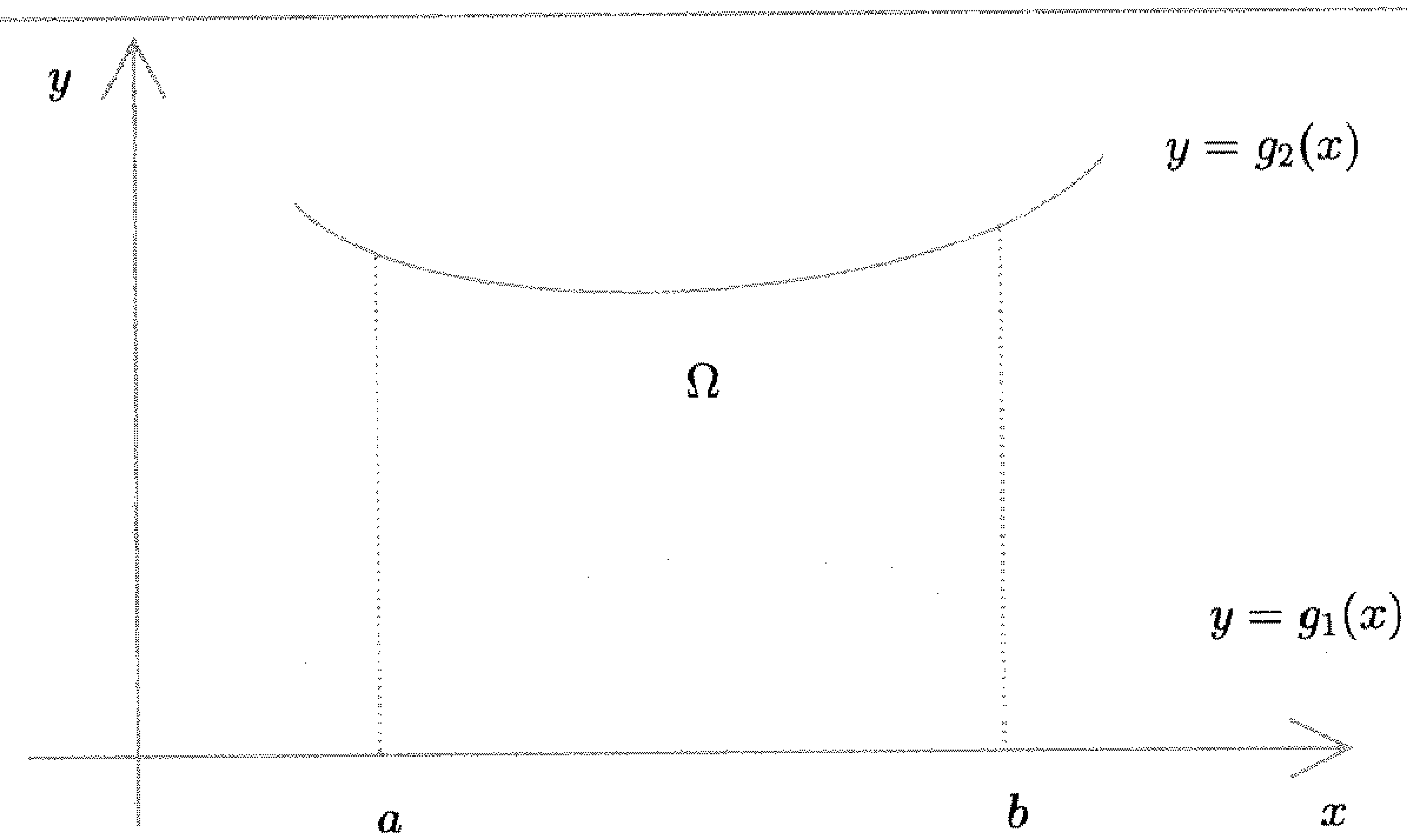
يمكن تعريف التكامل الثنائي على مناطق غير مستطيلة ومن أهمها المناطق الأفقية والرأسية البسيطة والتي سنقدمها فيما يلي:

المناطق الأفقية والرأسية البسيطة

حساب قيمة التكامل الثنائي باستخدام التعريف ليس بالأمر السهل، وتوجد كذلك بعض المناطق التي تكون عليها الدوال المتصلة غير قابلة للتكامل. وسنقتصر على نوعين من المناطق التي تكوّن عليها الدوال المتصلة قابلة للتكامل، ويمكن عليها حساب قيمة التكامل الثنائي.

تعريف 2

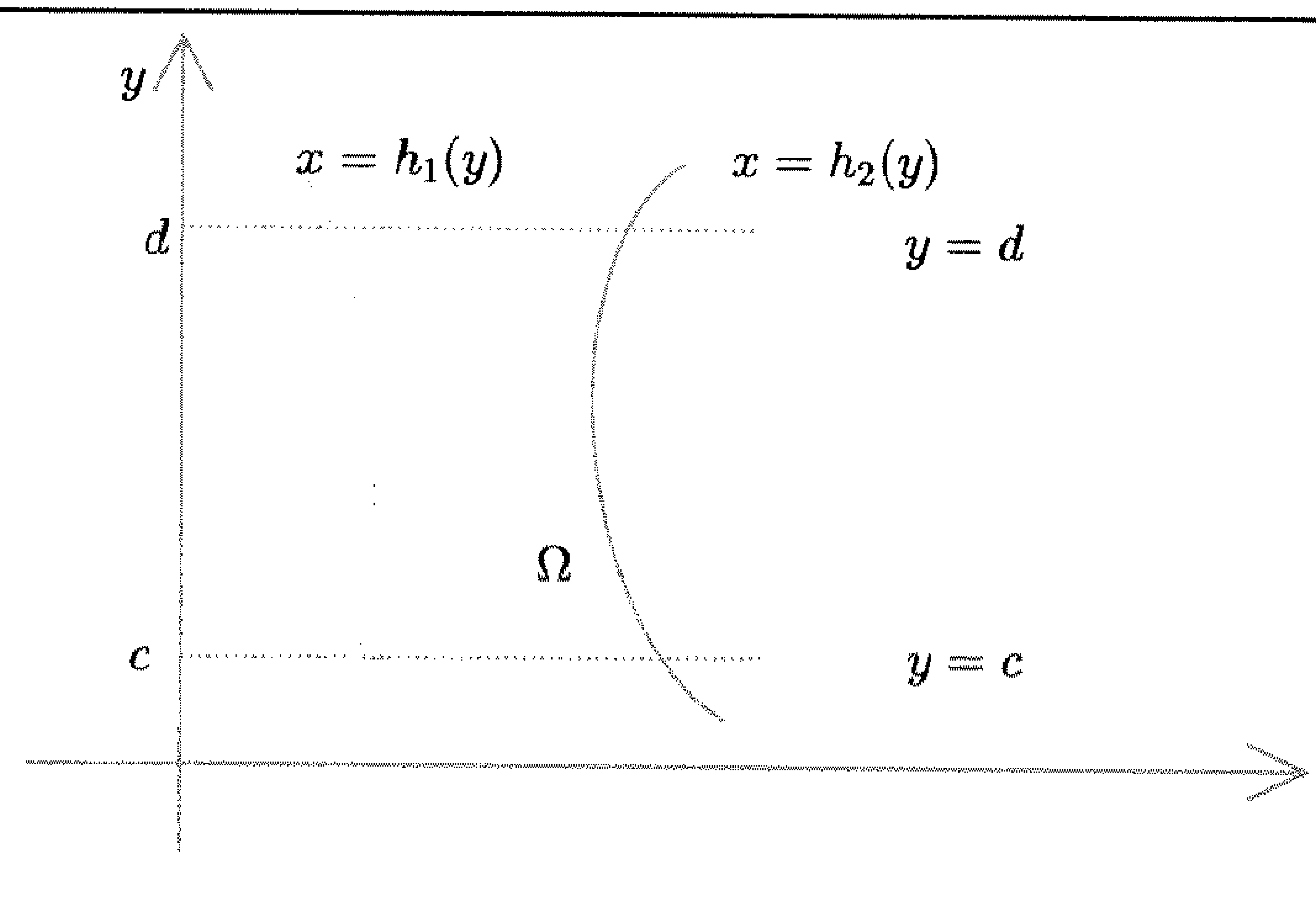
(1) إذا كانت الدالتان g_1 وg_2 متصلتين على الفترة $[a,b]$ حيث أن $g_1(x) \leq g_2(x)$ لكل $x \in [a,b]$، وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين g_1 وg_2 على الفترة $[a,b]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة رأسية، انظر الشكل (3).



شكل (3)

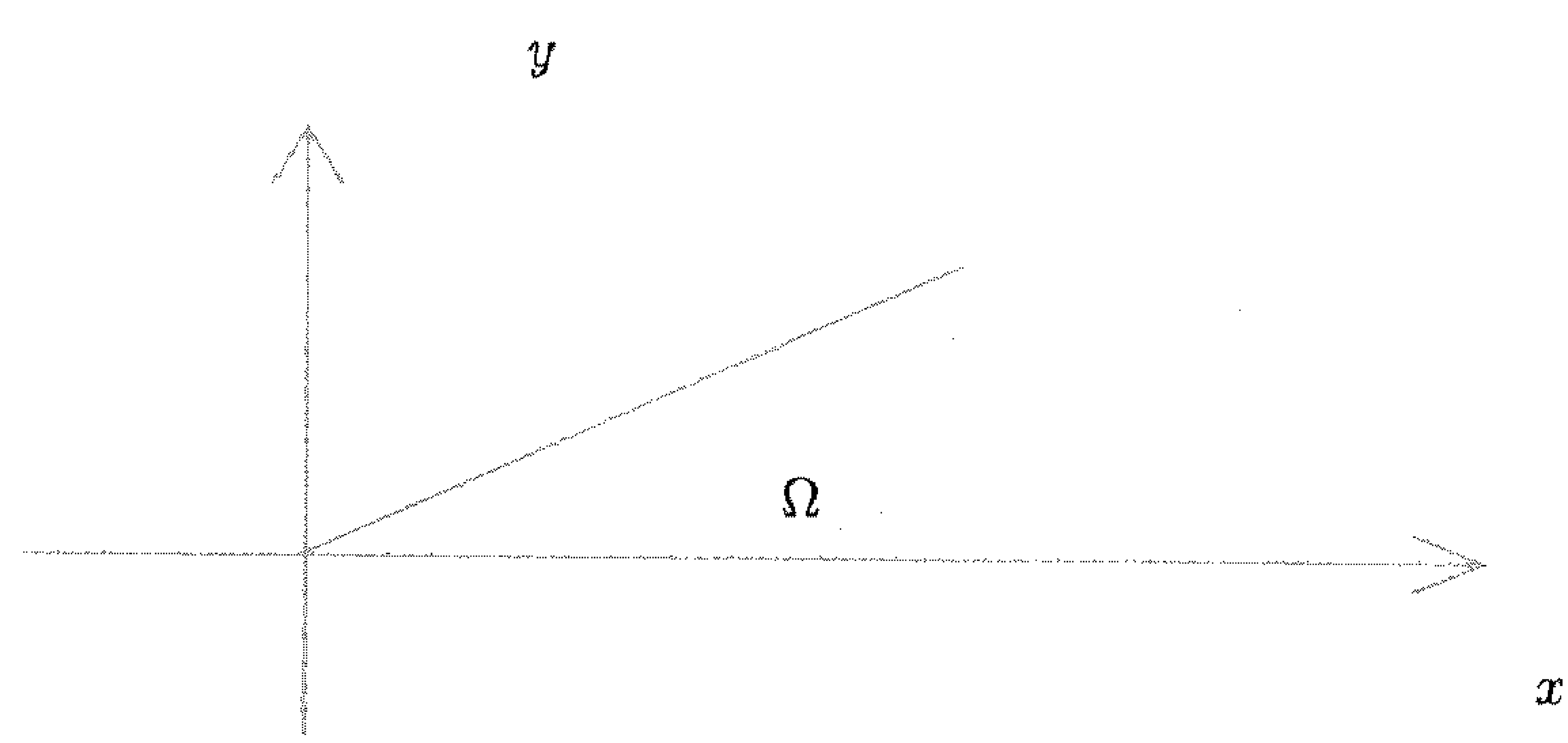
منطقة رأسية بسيطة

(2) إذا كانت الدالتان h_1 وh_2 متصلتين على الفترة $[c,d]$ حيث أن $h_1(y) \le h_2(y)$ لكل $y \in [c,d]$. وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين h_1 و h_2 على الفترة $[c,d]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة أفقية بسيطة، انظر الشكل (4).



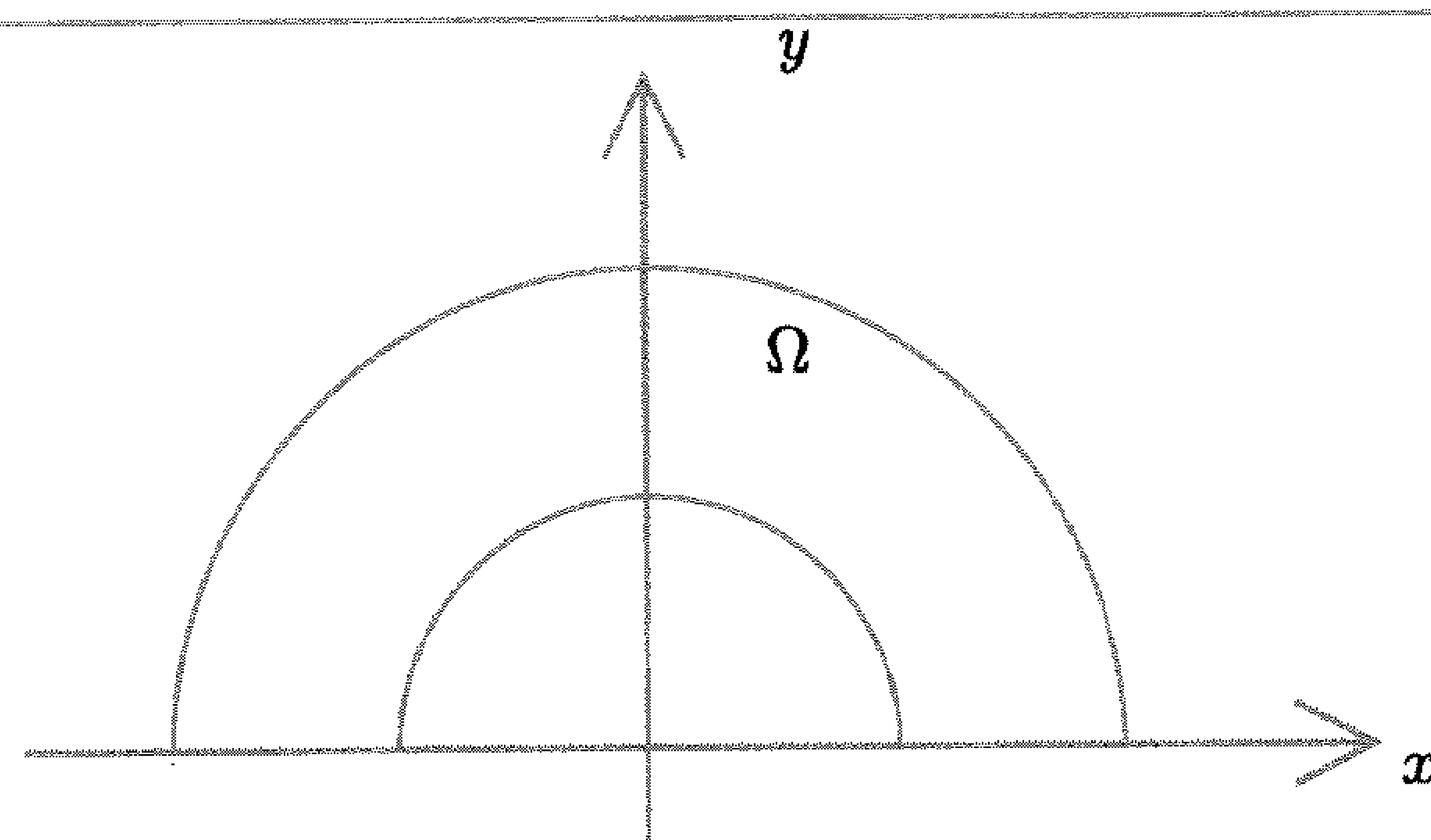
شكل (4)
منطقة أفقية بسيطة

(3) إذا كانت المنطقة Ω منطقة رأسية بسيطة، وأفقية بسيطة، فإن Ω تكون منطقة بسيطة، انظر الشكل (5).



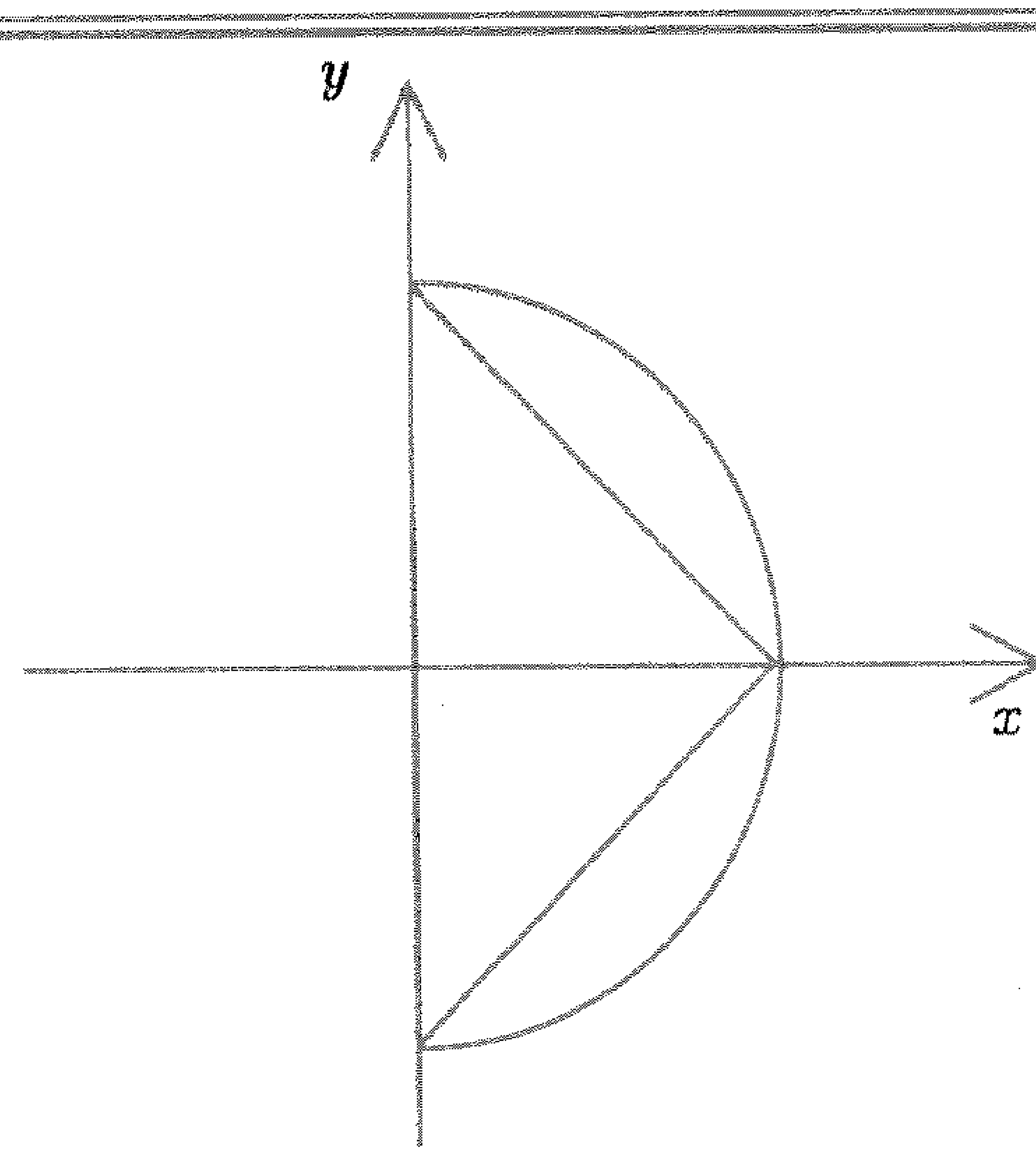
شكل (5)
منطقة بسيطة

وللتعرّف إلى مناطق مختلفة، انظر الأشكال من (6 ـ 8).



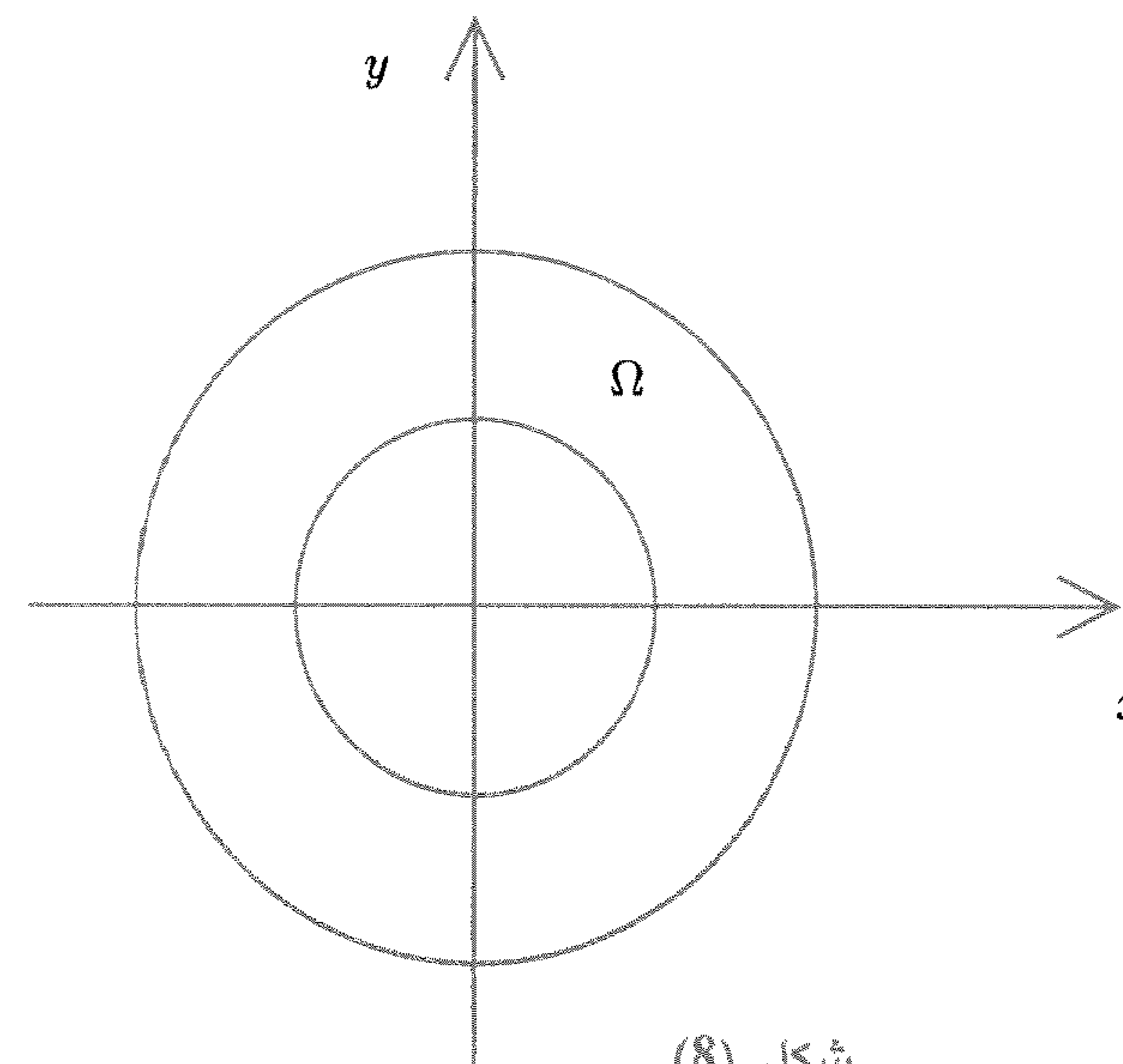
شكل 6

منطقة رأسية بسيطة ولكنها غير منطقة أفقية بسيطة



شكل (7)

منطقة أفقية بسيطة ولكنها غير منطقة رأسية بسيطة



شكل (8)

منطقة غير رأسية بسيطة وغير أفقية بسيطة

ويمكن تعريف التكامل الثنائي على منطقة عامة Ω، انظر الشكل (9)، ونفرض أن المنطقة محددة (Bounded)، أي أنه يوجد عدد M حيث أن لكل $(x,y) \in \Omega$ يكون $|f(x,y)| \leq M$، وبما أن Ω محددة، فإنه يمكن تعريف دالة جديدة $F(x,y)$ كما يلي:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; \quad (x,y) \in \Omega \\ 0 & ; \quad (x,y) \neq R, (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

تعريف 3

إذا كانت f معرّفة على Ω، والدالة F معرّفة كما سبق، فإن:

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dA = \int\int_{R} F(x,y)dA$$

وإذا كان التكامل على المنطقة R موجوداً، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

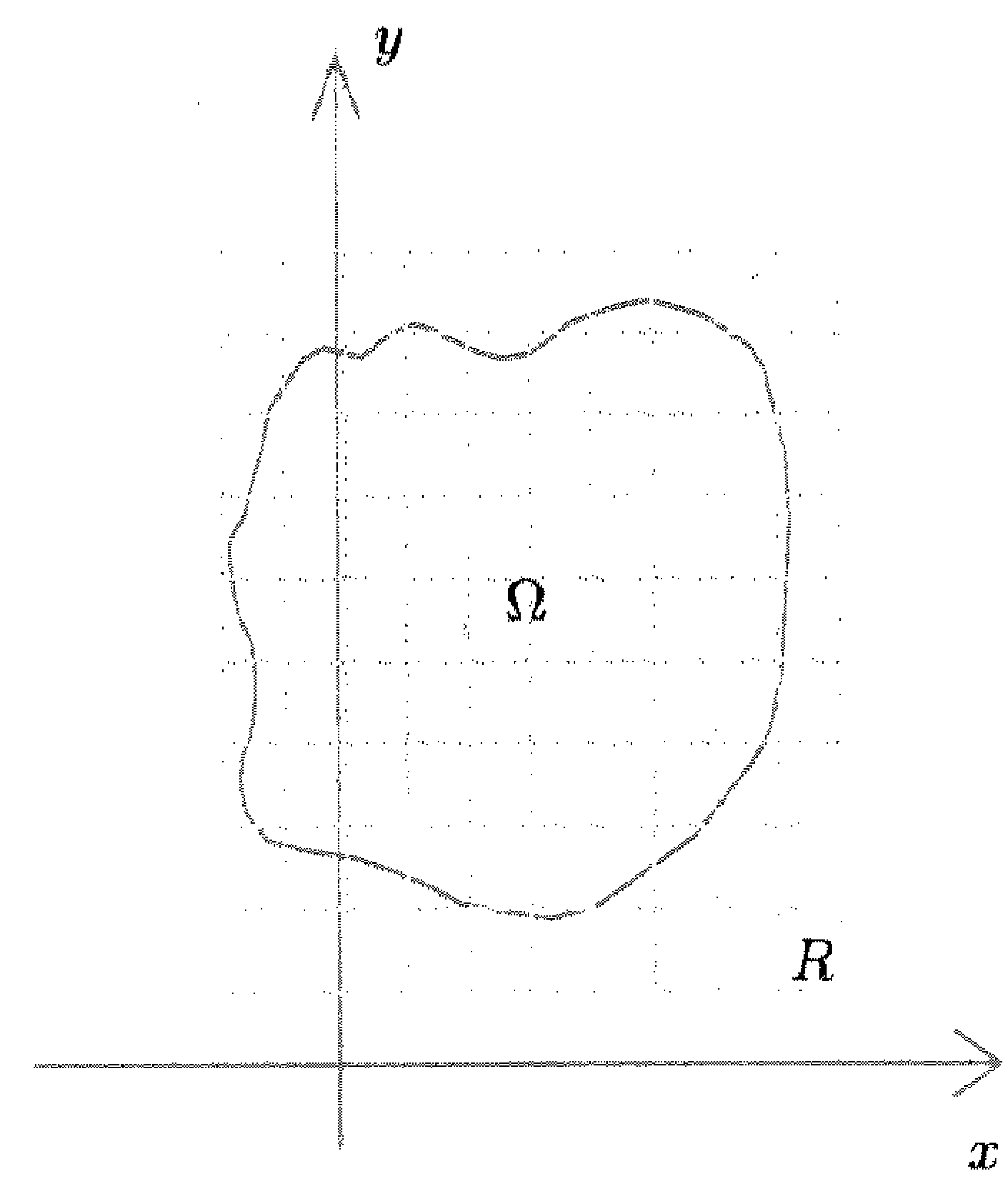
وسنوضح ذلك كما يلي:

إذا تم تقسيم المستطيل R إلى $n\,m$ من المستطيلات الفرعية، انظر الشكل (9). فإنه في كل مستطيل فرعي R_{ij} يقع بالكامل في Ω تكون $F = f$. وهكذا الحجم الذي يقع تحت السطح $Z = f(x, y)$ وفوق المستطيل R_{ij} يعطى بالمعادلة التالية:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y$$
$$= F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y$$

وإذا كان R_{ij} في R وليس في Ω، فإن $F = 0$، وهذا يعني أن

$$V_{ij} = F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = 0$$



شكل 9

وأخيراً إذا كان R_{ij} لا يوجد بالكامل داخل Ω أي أن جزءاً منه يقع خارج Ω، فإن هذا لا يعتبر مشكلة حقيقية، لأنه عندما $\Delta s \to 0$ يؤول مجموع الحجوم فوق هذه المستطيلات (على حدود Ω إلى الصفر إذا كانت حدود Ω معقدة جداً، وهكذا يكون مجموع الحجوم فوق R يساوي مجموع الحجوم فوق Ω وهذا يفسر التعريف 3.

2.2 خواص التكامل الثنائي

الخواص الأساسية للتكامل الثنائي مشابهة تماماً لخواص التكامل للدالة في متغير واحد. وفيما يلي سنذكر أهم الخواص الأساسية للتكامل الثنائي:

إذا كانت الدالتان g, f قابلتين للتكامل في المنطقة المغلقة R، فإن:

(1
$$\iint_R Cf(x,y)dA = C\iint_R f(x,y)dA$$

حيث أن C مقدار ثابت.

(2
$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$$

(3 إذا كان لكل (x,y) في R يكون $m \leq f(x,y) \leq M$ وإذا كان $A\ (R)$ ترمز إلى مساحة R، فإن:

$$mA(R) \leq \iint_R f(x,y)dA \leq MA(R)$$

(4 إذا كانت $f(x,y) \leq g(x,y)$، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

(5 إذا كانت R مكونة من عدة مناطق $(R_1, R_2, ...)$ و f متصلة في R، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + ...$$

نظرية 2

إذا كانت $f(x,y)$ متصلة في المنطقة المغلقة R حيث أن:

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \quad ; \quad a \leq x \leq b$$

و $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

وبصورة مشابهة تماماً إذا كانت R على الصورة

$$g_1(y) \leq y \leq g_2(y) \quad ; \quad c \leq y \leq d$$

$g_1(y)$ و $g_2(y)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\ dy$$

مثـــال 1

أوجد أصغر قيمة وأكبر قيمة للتكامل الثنائي: $\iint_R f(x,y)dA$

حيث أن: $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \ ;\ c \leq y \leq d\}$ و $f(x,y) = sin(x-3y)$

الحـــل

بـــمـــا أن $-1 \leq sin(x-3y) \leq 1$ ومـــســـاحـــة الـــمـــنـــطـــقـــة R تـــكـــون $A(R) = (b-a)\ (d-c)$ إذن حسب الخاصية (3) نجد أن:

$$-(b-a)(d-c) \leq \iint_R sin(x-3y)dA \leq (b-a)(d-c)$$

2.3 طرق إيجاد التكامل الثنائي (التكامل الجزئي)

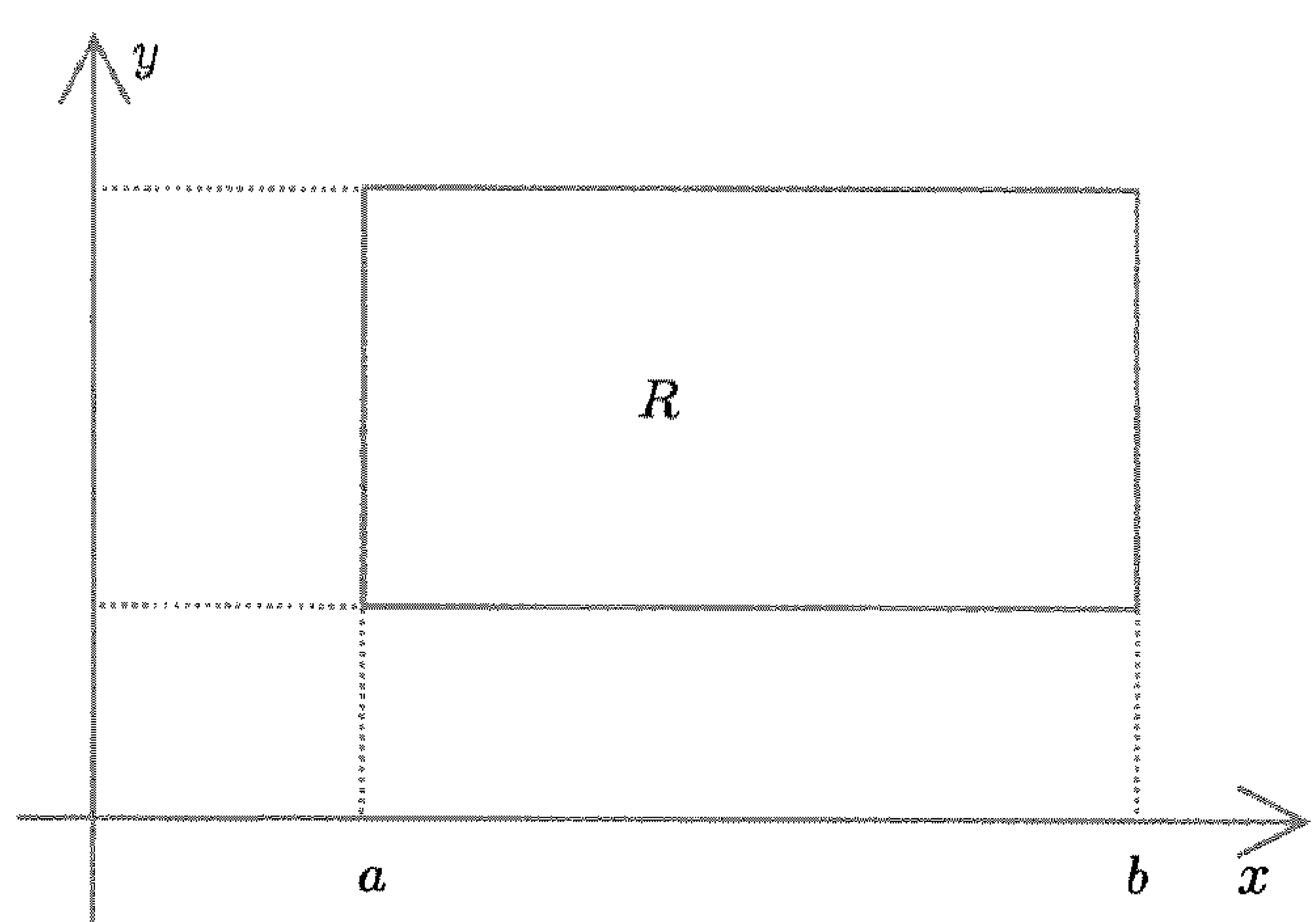
إذا كانت المنطقة R على شكل مستطيل في المستوى xy حيث أن $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R، فإن التكامل المعتاد بالنسبة للمتغير x هو

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

ويكون الناتج دالة في y فقط ولذلك $A(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ معرّفة في الفترة $c \le y \le d$.

وتكامل الدالة $A(y)$ يمكن أن يحسب كما يأتي:

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$



شكل 10

ويمكن البداية من الناحية الأخرى

$$B(x) = \int_c^d f(x,y)dx$$

وهكذا

$$\int_a^b B(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

تعريف 4

التكامل

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \quad \text{أو} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

يسمى التكامل الجزئي أو التكامل المتكرر للدالة f.

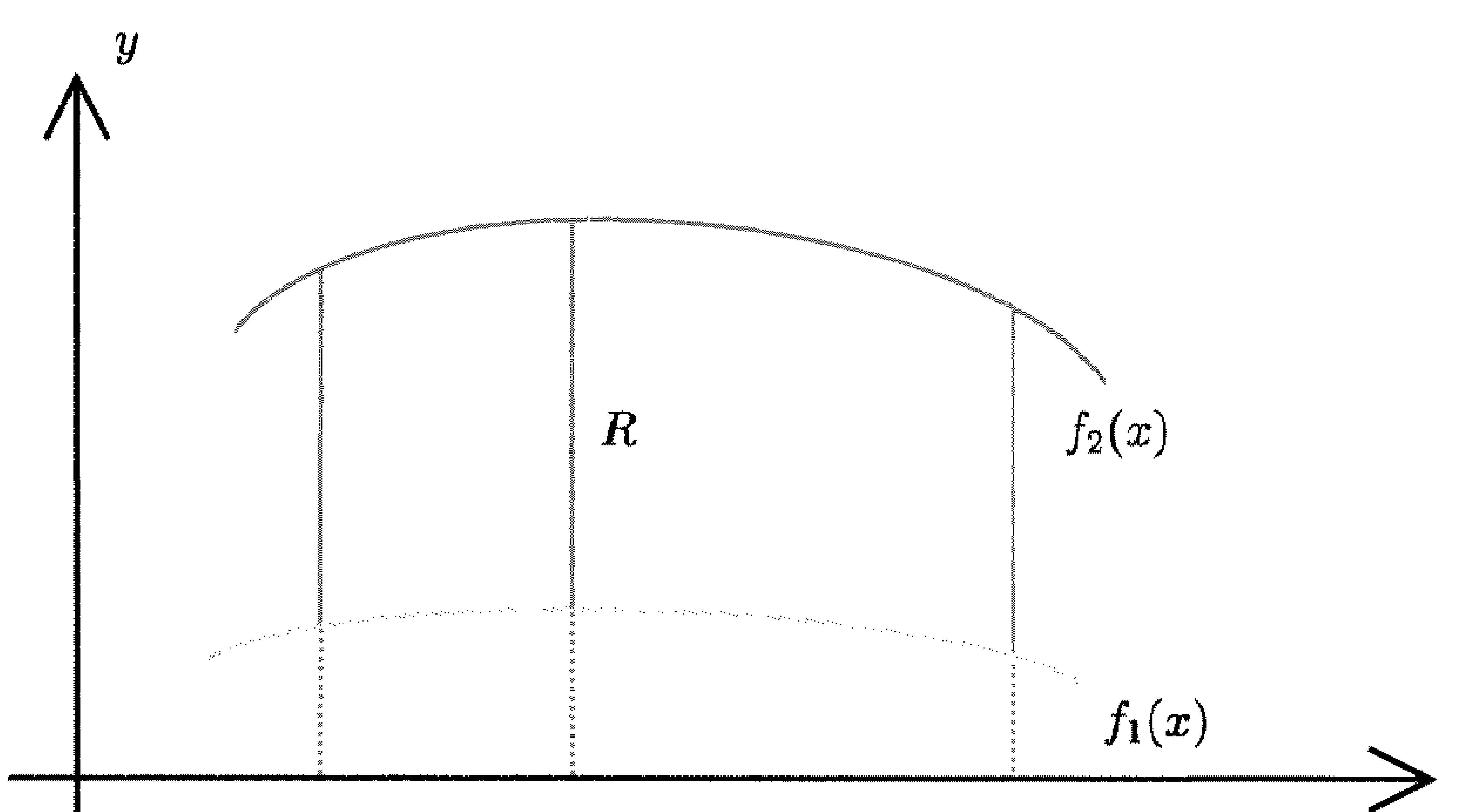
ملاحظة

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$

أو

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx$$

والتكامل الثنائي (الجزئي) يمكن أن يعرف في المنطقة R التي حدودها منحنيان كما هو موضح في الشكل (11).



شكل 11

$$R = \{(x,y)/a \le x \le b \ ; \ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

وبذلك يمكن تعريف التكامل الثنائي في R كما يلي:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

حيث حدود y تكون من أسفل $\big(y = f_1(x)\big)$ إلى أعلى $\big(y = f_2(x)\big)$ وحدود x من اليسار $(x = a)$ إلى اليمين $(x = b)$.

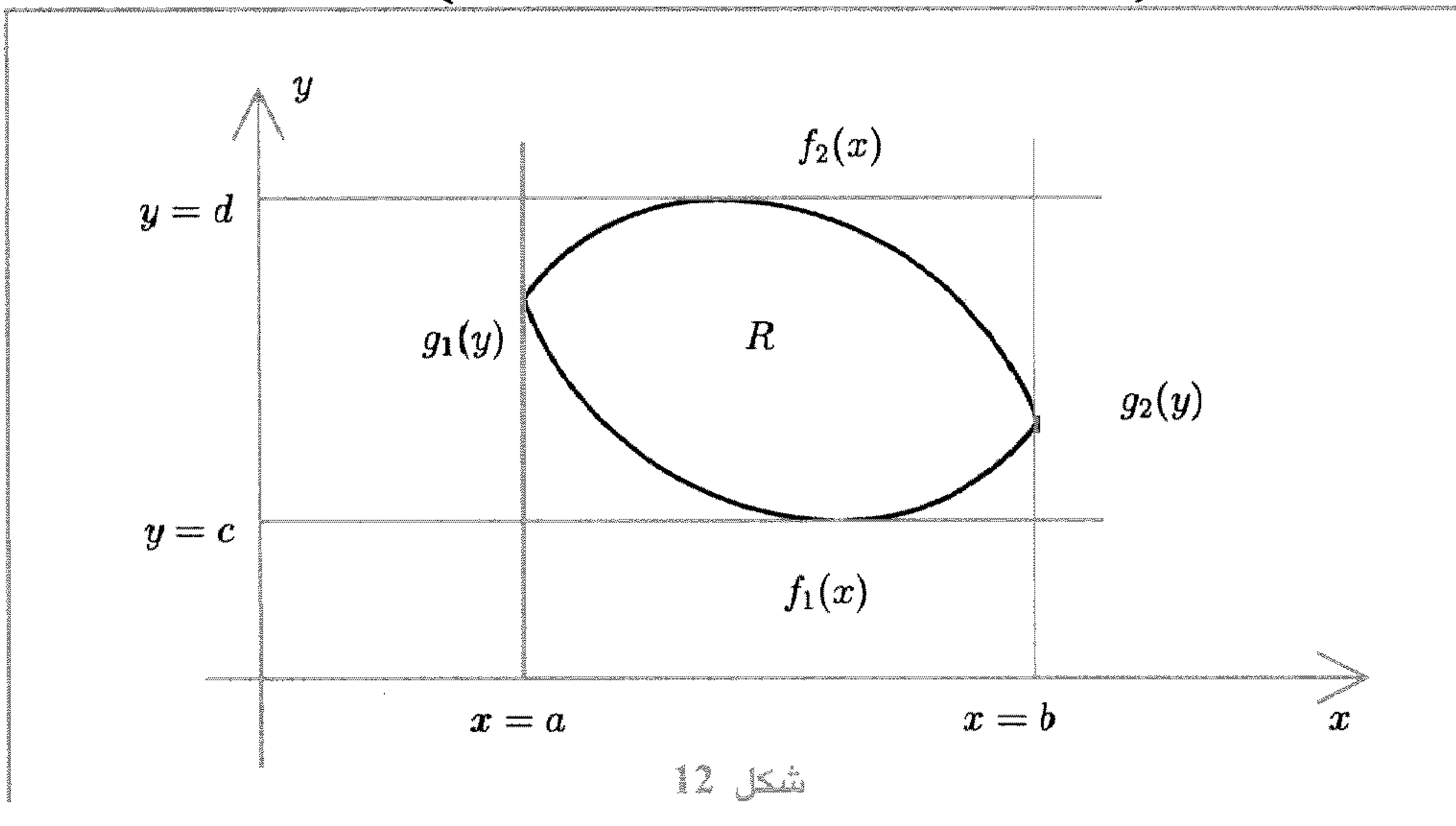
وبصورة عامة يمكن تعريف التكامل الثنائي في المنطقة R كما هو موضح في الشكل (12).

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

حيث أن: $R = \Big\{(x,y)/a \le x \le b \ ; \ f_1(x) \le y \le f_2(x)\Big\}$

و $$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\ dy$$

حيث أن: $R = \Big\{(x,y)/c \le y \le d \ ; \ g_1(y) \le y \le g_2(x)\Big\}$



شكل 12

ملاحظة

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\, dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\, dy$$

مثـــال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z = y + 2y$ وفوق المستطيل R حيث أن:

$$R = \left\{(x,y) : 1 \le x \le 2; 3 \le y \le 5\right\}$$

الحـــل

$$V = \iint_R (x+2y)dA = \int_1^2 \int_3^5 (x+2y)dy\, dx = \int_1^2 (xy+y^2)\Big|_3^5 dx$$

$$= \int_1^2 (2x+16)dx = (x^2+16x)\Big|_1^2 = 19$$

وكذلك يمكن حساب الحجم كما يلي:

$$V = \iint_R (x+2y)dA = \int_3^5 \int_1^2 (x+2y)dx\, dy$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Big|_1^2 dy$$

$$= \int_3^5 \left(2y+\frac{3}{2}\right)dy$$

$$= \left(y^2+\frac{3}{2}y\right)\Big|_3^5 = 19$$

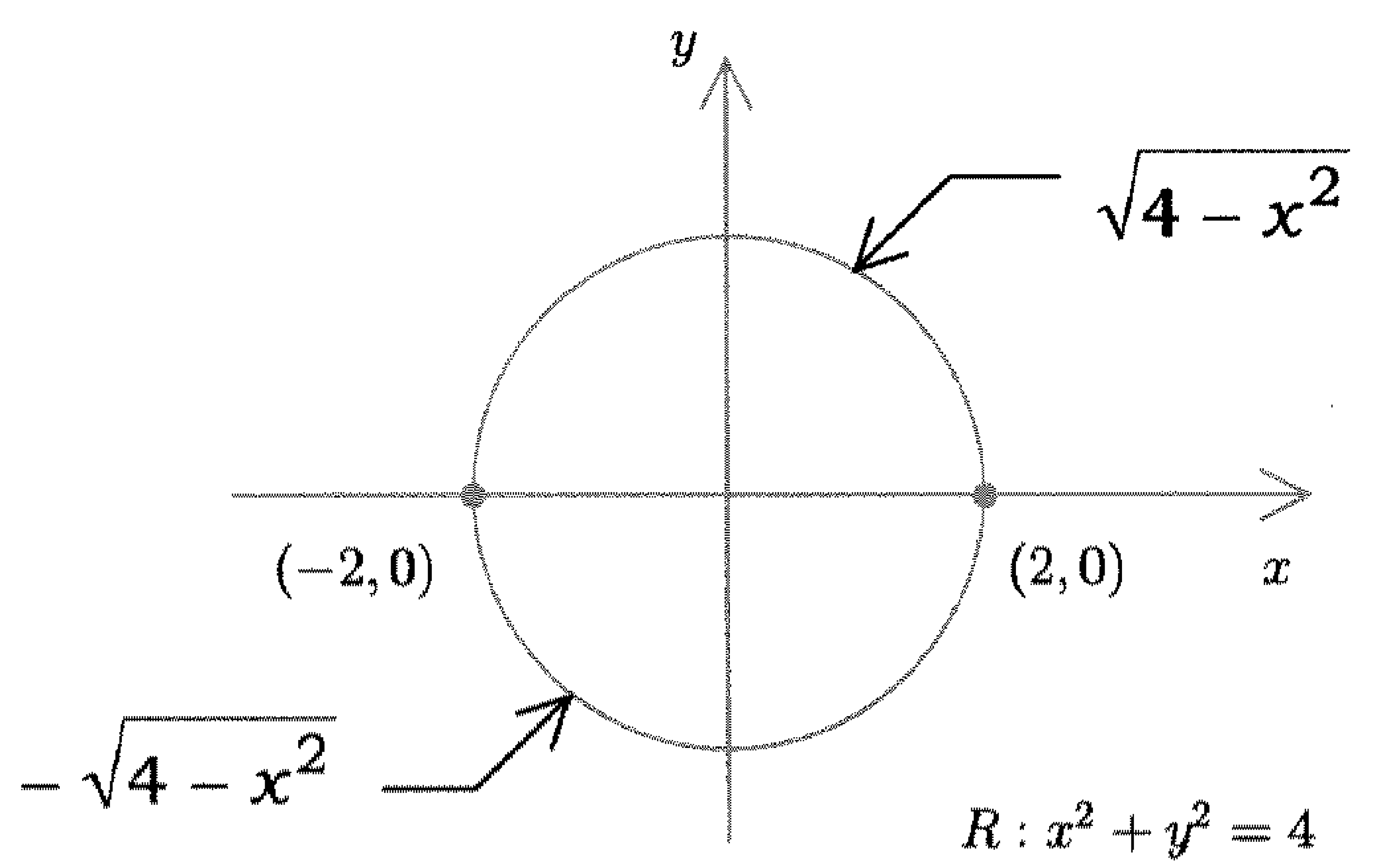
ملاحظة: يمكنك الآن المقارنة مع طريقة الحل المتبعة في البند الأول.

مثال 2

أوجد قيمة التكامل الثنائي

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx$$

وارسم المنطقة R.



شكل 13

الحل

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}\,y^2\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\Big(4-x^2-(4-x^2)\Big)dx$$

$$=0$$

حيث أن R دائرة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

مثال 3

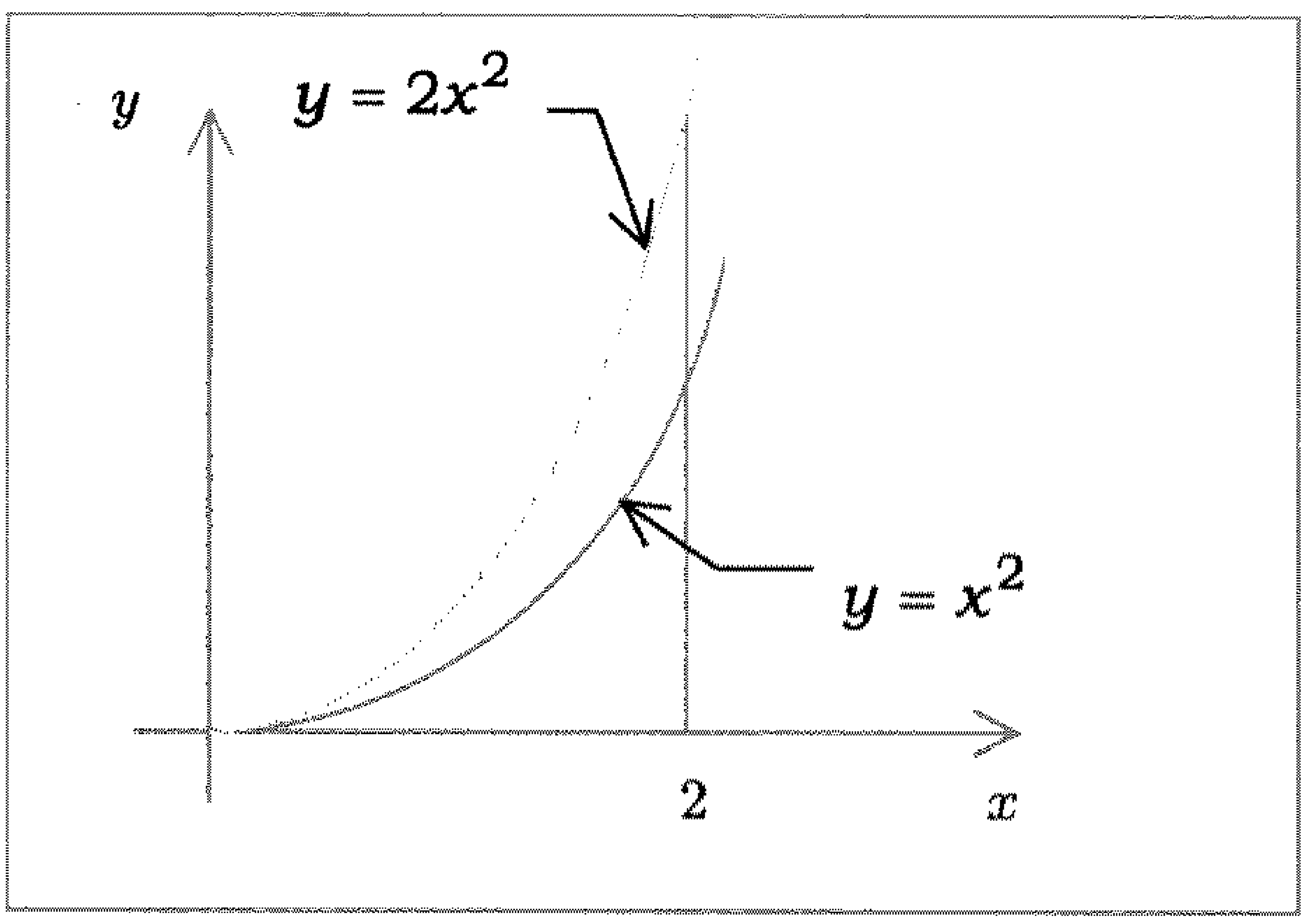
أوجد $\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\,dy\,dx$

وارسم المنطقة R.

الحــل

$$R = \{(x,y)/x^2 \leq y \leq 2x^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2$$

كما هو موضح بالرسم:



شكل 14

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x \cos y \, dy \, dx = \int_0^2 x \sin y \Big|_{x^2}^{2x^2} dx \quad ; \quad (x \text{ ثابت})$$

وبالتعويض عن y نجد أن:

$$= \int_0^2 \left(x \sin(2x^2) - x \sin x^2\right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\cos(2x^2) + \frac{1}{2}\cos x^2\right)\Big|_0^2$$

وهكذا

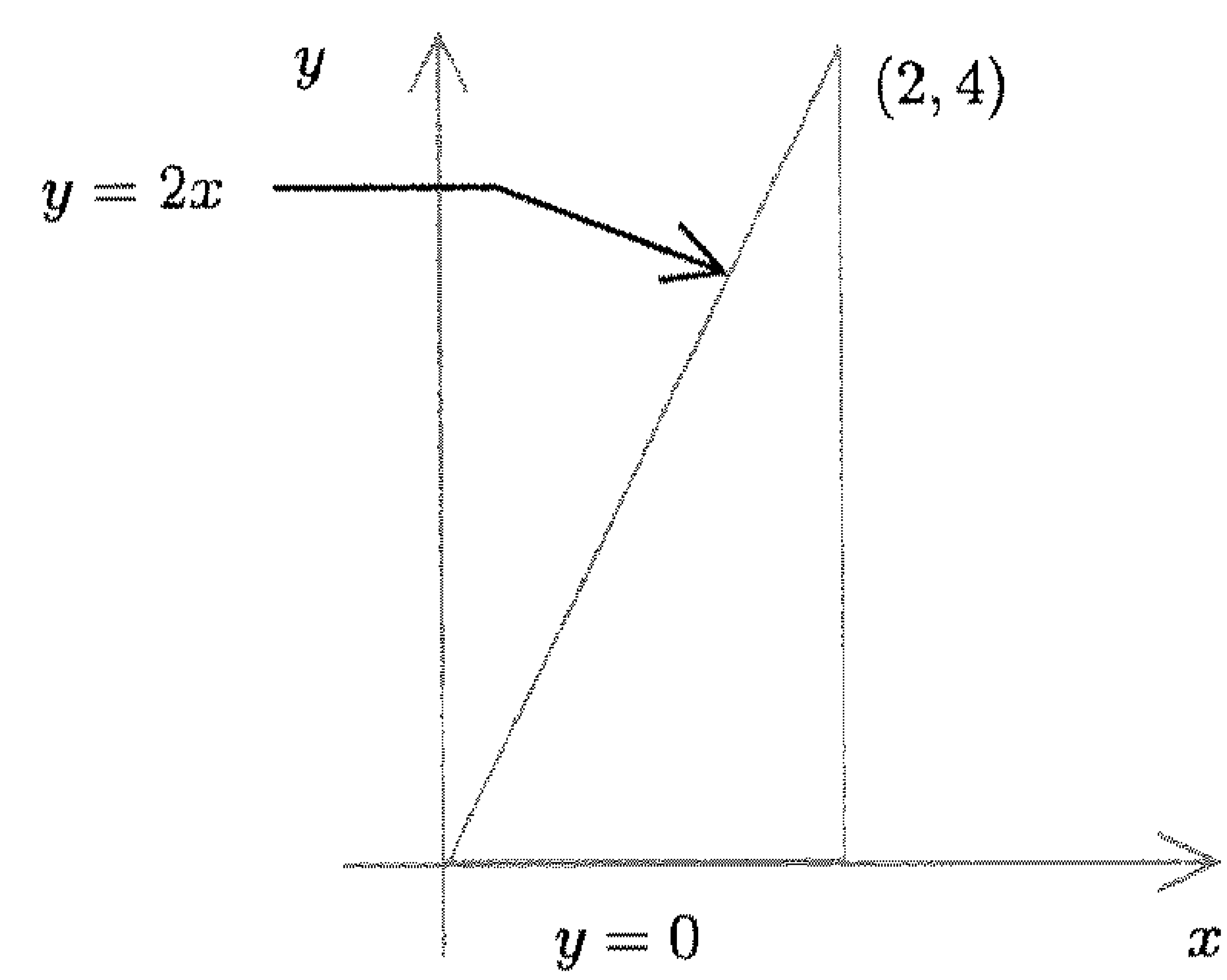
$$= -\frac{1}{4}[\cos(8) - 2\cos(4) + 1]$$

مثـــال 4

أوجد $\iint\limits_R x\,y\,dA$ حيث R المنطقة المغلقة الواقعة بين $y=0$ ، $y=2x$ ، $x=2$

الحــل

يفضل دائماً رسم المنطقة R قبل وضع حدود التكامل.



شكل 15

واضح من الشكل أنه يمكن إجراء عملية التكامل حسب الترتيب $dydx$ أو $dxdy$.

أولاً إذا اخترنا الترتيب dydx:

$$\iint\limits_R x\ y\ dA=\int_0^2\int_0^{2x} x\ y\ dy\ dx$$

$$=\int_0^2 \frac{x}{2}y^2\bigg|_0^{2x} dx=\int_0^2\frac{x}{2}(4x^2)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^4\right)\bigg|_0^2=8$$

وإذا اخترنا الترتيب dx dy:

$$\iint_R x\ y\ dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{2} x\ y\ dx\ dy = \int_0^4 \left(2y - \frac{1}{8}y^3\right) dy = 8$$

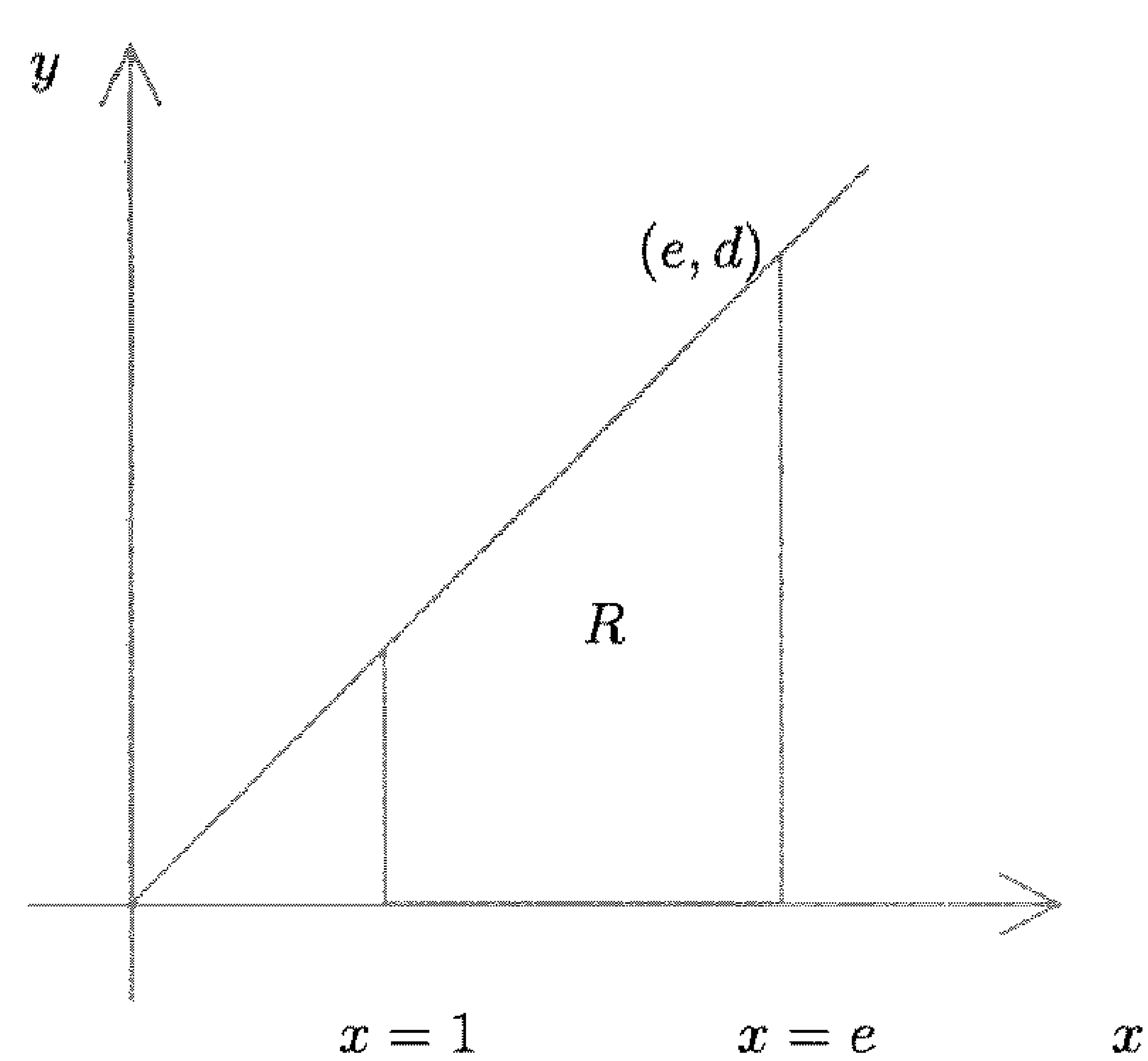
لاحظ تساوي القيمتين.

مثـــال 5

أوجد $\int_1^e \int_0^x ln\ x\ dy\ dx$

الحـــل

$$\int_1^e [y\ ln\ x]_0^x dx = \int_1^e x\ ln\ x\ dx$$



شكل 16

ويمكن إيجاد التكامل الأخير كما يأتي:

$$\int_1^2 x\ ln\ x\ dx = \frac{1}{2}\int_1^e ln\ x\ dx^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 ln\ x\Big|_1^e - \int_1^e x^2 d\ ln\ x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \int_1^e x\ dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{2}x^2\bigg|_1^e\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

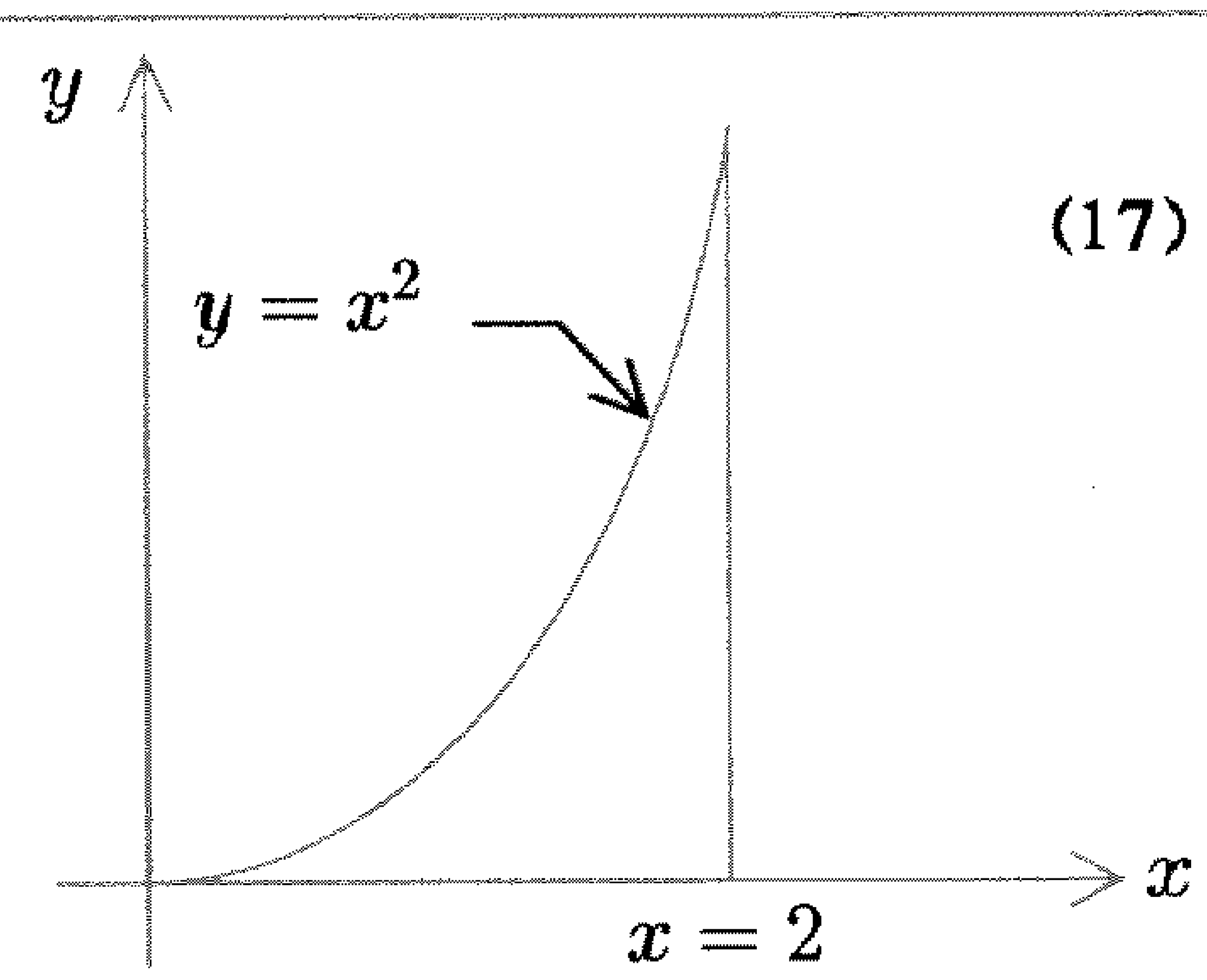
مثال 6

أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\ cosx^5\ dx\ dy$$

الحل

لا يمكن إيجاد قيمة التكامل على هذه الصورة ولذلك سنحاول تغيير حدود التكامل، ويفضل دائماً رسم المنطقة R. أنظر الشكل (17).



شكل (17)

من الشكل يتضح أن:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\ cosx^5\ dx\ dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} y\ cosx^5\ dy\ dx$$

واضح أنه يمكن إيجاد التكامل في الجانب الأيمن، أي أن:

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} y\ cosx^5\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4\ cosx^5\ dx$$

$$= \frac{1}{10} sinx^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{sin\ 32}{10}$$

تمارين

أوجد التكاملات الآتية وارسم المنطقة R في المستوى $x\ y$ في كل حالة:

1) $\displaystyle\int_2^3 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x^2 - 2xy - 3y^2)dy\ dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 - xy)dy\ dx$

3) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x\ cos\ y\ dy\ dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^{x} \frac{x^2}{y^2} dy\ dx$

5) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\ dy\ dx$

6) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy\ dx$

7) $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 sinx^3\ dx\ dy$

8) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y} siny\ cos\frac{x}{y} dy\ dx$

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{(y^2)} dy\, dx$$ (9

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^8}} dx\, dy$$ (10

عبّر عن كل تكامل ثنائي كتكامل جزئي ثم أوجد قيمة التكامل:

11) $\iint_R x\, y^2\, dA$ حيث أن R مثلث رؤوسه $(0,0)$, $(3,1)$, $(-2,1)$.

12) $\iint_R e^{\frac{x}{y}}\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $y=4$, $y=-x$, $y=2$.

13) $\iint_R x^3 \cos xy\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $x=2$ ، $y=0$ ، $y=x^2$.

14) بيّن أن:

أ) $$\iint_R dA = \frac{1}{2}$$

حيث أن R المنطقة الواقعة بين رسمي المعادلتين:

$$x = y \quad \text{و} \quad x = y^{\frac{1}{3}}$$

ب) $$\int_{-\infty}^{\infty} Exp(-x^2-y^2) dx\, dy = \pi$$

جـ) $$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \cos\left(\frac{x^2}{3} - x\right) dx\, dy = 2\sin\left(\frac{2}{3}\right)$$

4.2 الحجم والمساحة والكتلة والعزم

التكامل الثنائي له تطبيقات متعددة وسنذكر منها ما يلي:

1) الحجم (Volume)

إذا كانت $z = f(x,y)$ تمثل معادلة السطح، فإن:

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

تعطي حجم المجسم الواقع بين السطح والمستوى $x\,y$

2) المساحة (Area)

إذا كانت $f(x,y) \equiv 1$، فإن

$$A(R) = \iint_R dA$$

حيث أن $A(R)$ تمثل مساحة المنطقة المغلقة R.

3) الكتلة (Mass)

إذا كانت $f(x,y)$ تمثل الكثافة $\left(\frac{\Delta m}{\Delta V}\right)$، فإن:

$$M(R) = \iint_R f(x,y)dA$$

حيث أن $M(R)$ كتلة الصفيحة التي على شكل المنطقة R.

4) مركز الكتلة (Center of Mass)

إذا كانت الدالة تمثل الكثافة، فإن مركز الكتلة (x,y) للصفيحة الممثلة بالمنطقة R يعطى بالمعادلتين:

$$M_x = \iint_R y\ f(x,y)dA \quad , \quad M_y = \iint_R x\ f(x,y)dA$$

5) عزم القصور الذاتي (Moment of Inertia)

عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور x ومحور y

$$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dA \quad , \quad I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dA$$

وكذلك عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل:

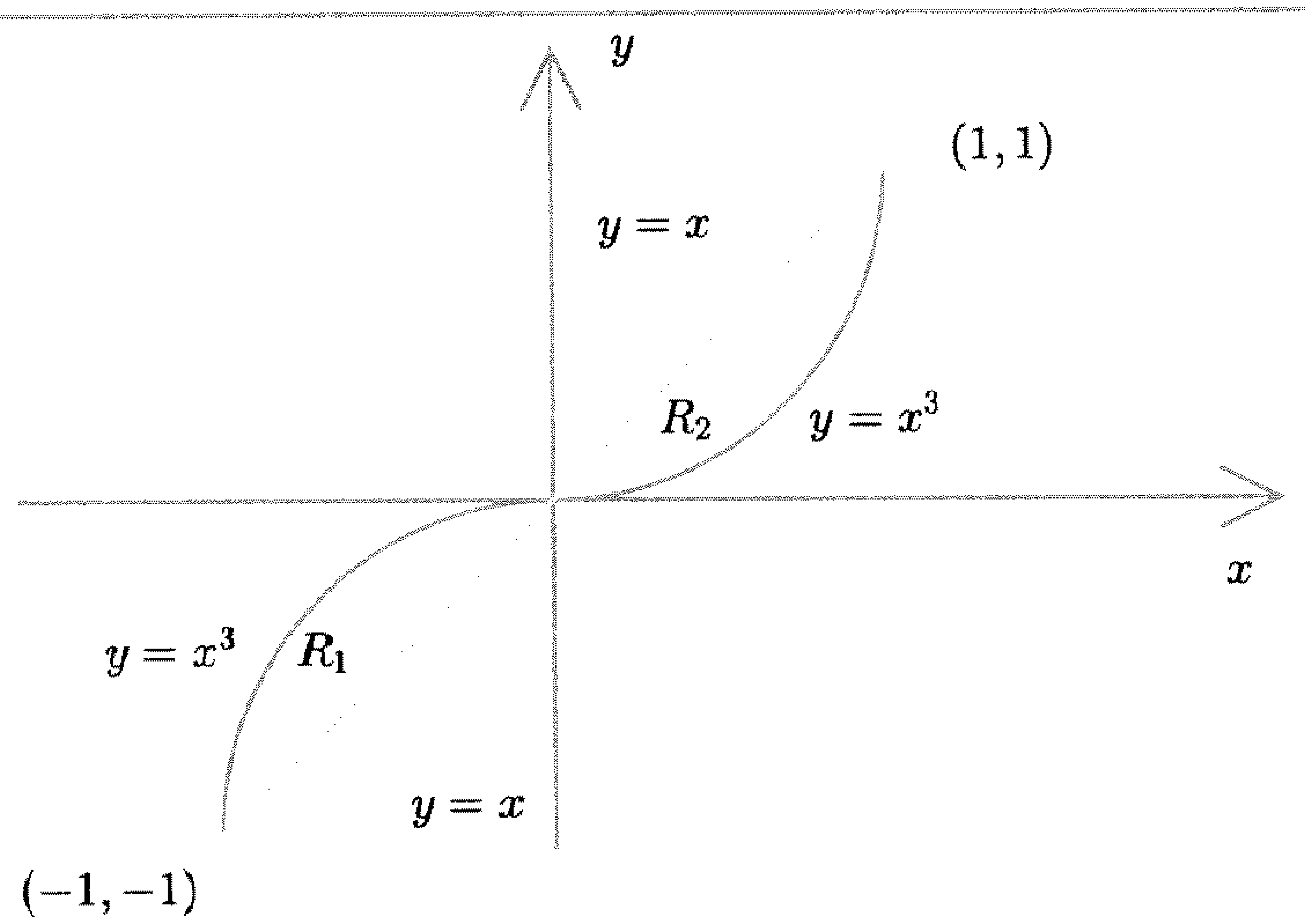
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2+y^2) f(x,y)dA$$

مثـــال 1

أوجد المساحة الواقعة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$.

الحـــل

المعادلتان تتقاطعان عند النقاط التالية $(0,0)$، $(1,1)$، $(-1,-1)$ كما هو موضح بالشكل (18).



شكل 18

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

ولذلك
$$A(R)\int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dy\ dx+\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dy\ dx=\frac{1}{2}$$

ونترك تفاصيل إجراء عملية التكامل للقارئ.

مثال 2

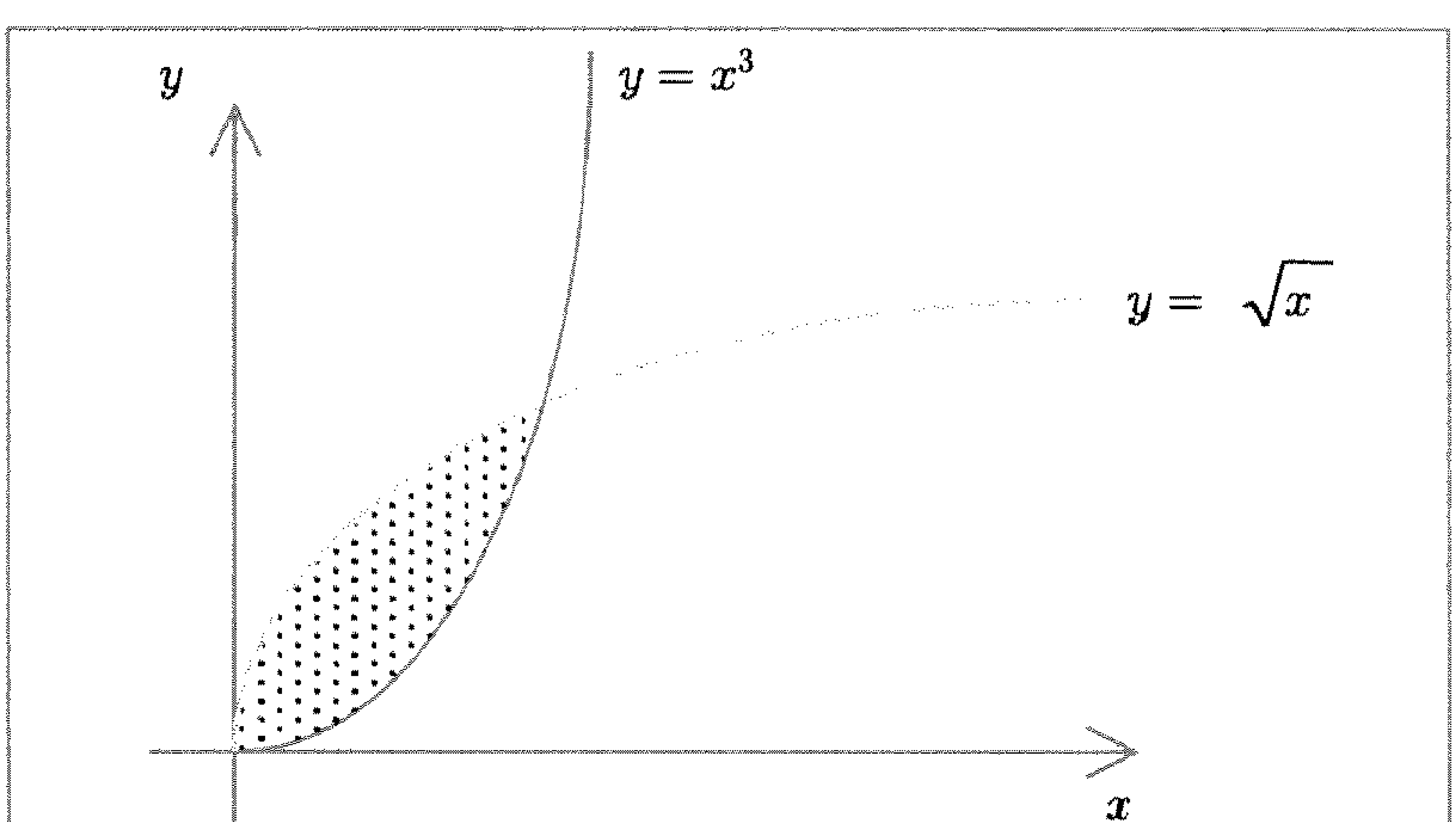
أوجد المساحة المحصورة بين المعادلتين $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$

الحل

المنحنيان يتقاطعان عند النقطتين $(0,0)$, $(1,1)$.

المساحة:

$$A(R)=\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{\sqrt{2}} dy\ dx$$
$$=\int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx$$
$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{12}$$



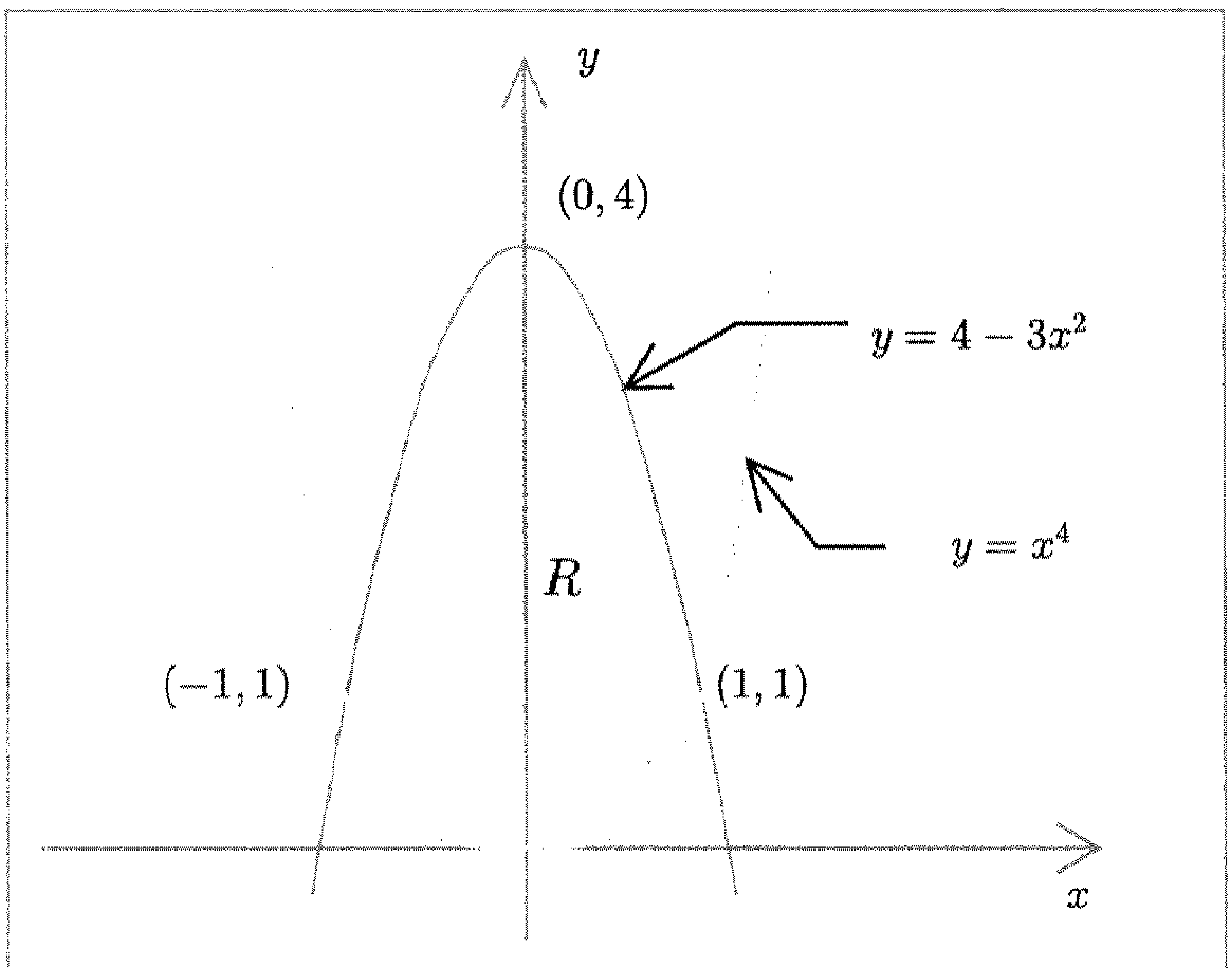
شكل 19

مثـــال 3

أوجد مساحة المنطقة R الواقعة بين المنحنيين $y = x^4$ و $y = 4 - 3x^2$

الحــل

يتقاطع المنحنيان عند النقطتين $(1,1)$, $(-1,1)$.



شكل 20

مساحة المنطقة R

$$A(R) = \int_{-1}^{1} \int_{x^4}^{4-3x^2} dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (4 - 3x^2 - x^4) dx$$

$$= \left(4x - x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left[\left(4 - 1 - \frac{1}{5}\right) - \left(-4 + 1 + \frac{1}{5}\right)\right] = 6 - \frac{2}{3} = \frac{28}{5}$$

مثــال 4

أوجد حجم المجسم المحدد بالسطوح التالية:

$$x = 2 \ , \ z = 0 \ , \ y = 0 \ , \ x^2 = y + z$$

الحــل

$$V = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy \, dx = \int_0^2 (x^2 y - \frac{1}{2} y^2) \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^4}{2} \, dx = \frac{16}{5}$$

ملاحظة: سنتناول إيجاد حجوم المجسمات بالتفصيل في الفصل الثالث عند دراسة التكامل الثلاثي.

مثــال 5

صفيحة معدنية لها شكل المنطقة R في المستوى $x \, y$ محددة برسم المعادلتين $x = y^2$ و $x = 4$. أوجد مركز الكتلة إذا كانت الكثافة عند $P(x, y)$ تتناسب طرداً مع المسافة من محور y إلى النقطة P.

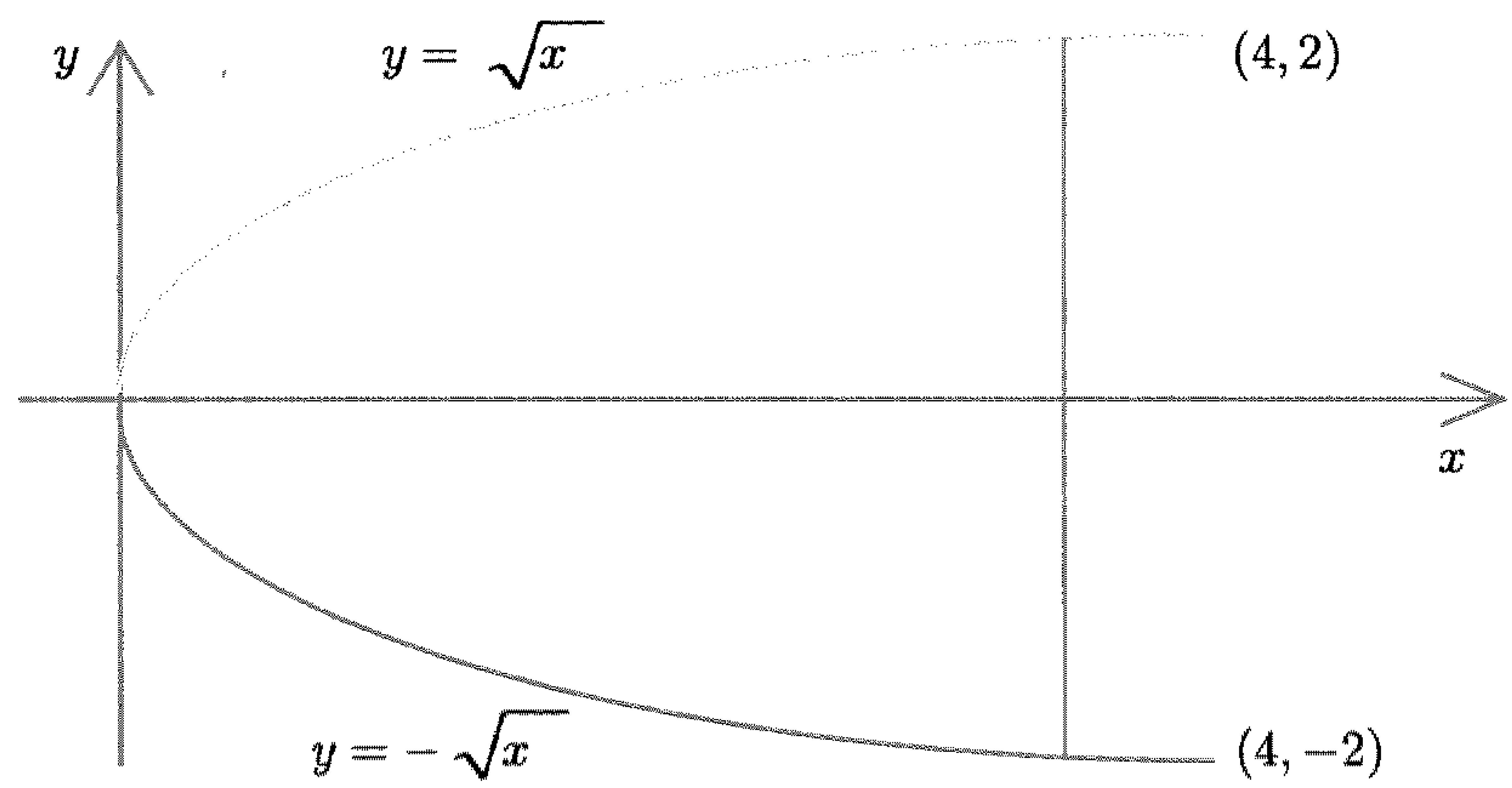
الحــل

من المعطيات $P(x, y) = k \, x$ حيث أن k مقدار ثابت، وحسب التعريف السابق كتلة الصفيحة:

$$M = \iint_R k \, x \, dA$$

$$= k\int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x\ dy\ dx$$

$$= 2k\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4k}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = \frac{128}{5}k$$



شكل 21

عزم الصفيحة بالنسبة للمحور y:

$$M_y = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x(kx)\ dy\ dx$$

$$= 2k\int_0^4 x^{\frac{5}{2}}dx$$

$$= \frac{4k}{7}(128) = \frac{512k}{7}$$

ومركز الكتلة

$$x = \frac{M_y}{M} = \frac{512k}{7} \cdot \frac{5}{128k} = \frac{20}{7}$$

يترك تمرين للقارئ أن يبين $y = 0$، وهكذا

$$(x,y) = \left(\frac{20}{7}, 0\right)$$

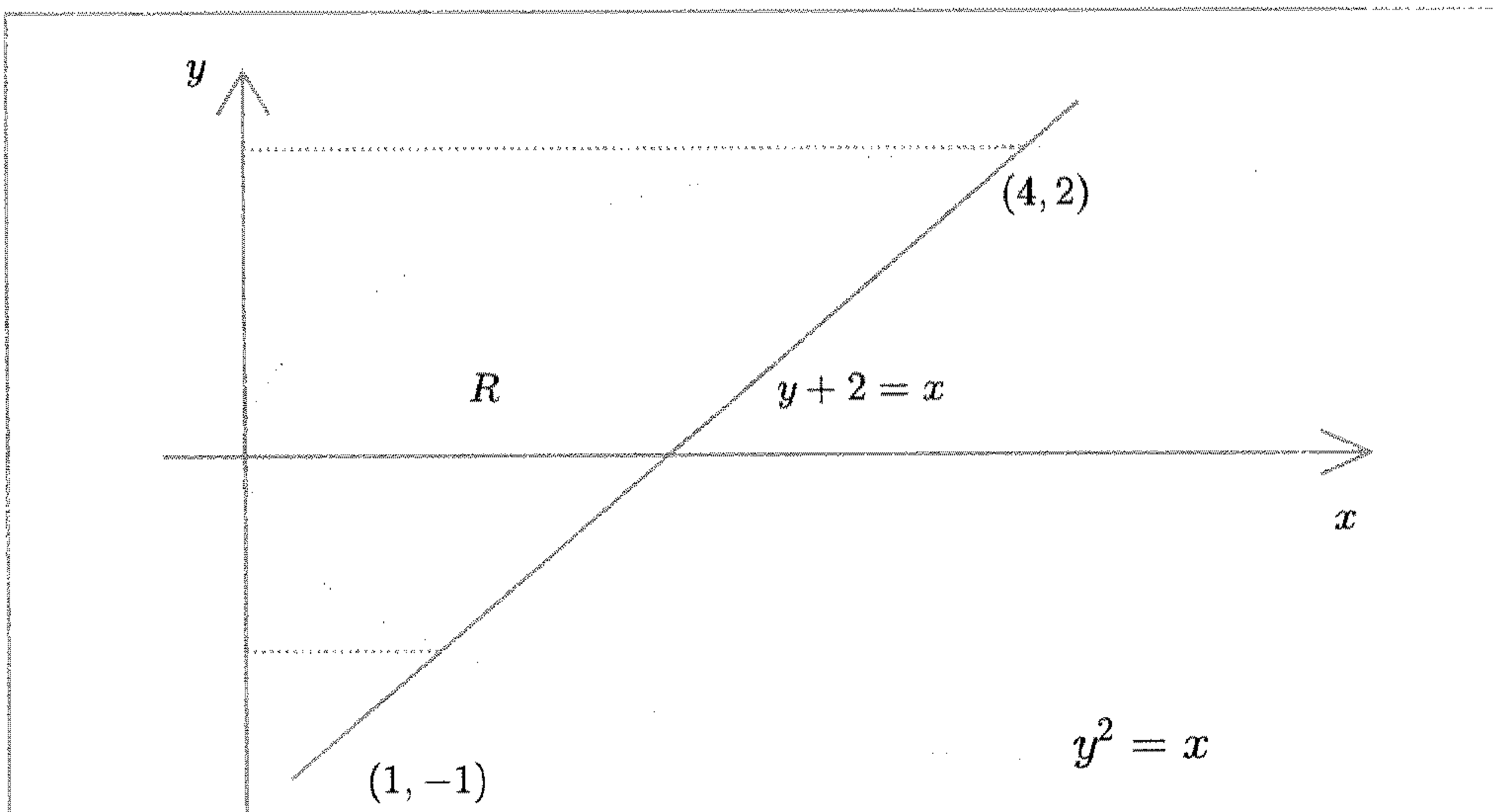
مثـــال 6

أوجد كتلة المنطقة R المحددة بـ $y^2 = x$ و $x = y + 2$ حيث أن الكثافة تعطى بالمعادلة التالية: $P = x^2\ y^2$

الحـــل

من السهل أن نوضح أن المنحنيين يتقاطعان عند النقطتين $(1,-1)$, $(2,4)$.

الكتلة: $$M(R) = \iint\limits_R P(x,y)\ dA$$



شكل 22

واضح من الشكل أن:

$$M(R) = \int_1^2 \int_{y^2}^{y+2} x^2\ y^2\ dx\ dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} y^2\ x^3 \Big|_{y^2}^{y+2} dx$$

وبالتعويض عن y وتجميع الحدود المتشابهة:

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{6} y^6 - \frac{1}{9} y^9 + \frac{6}{5} y^5 + 3y^4 + \frac{8}{3} y^3 \right] \Big|_{-1}^{2} = 20.7$$

مثال 7

صفيحة معدنية مستوية على شكل مثلث محددة بالمستقيمين $y = x$ و $y = 2 - x$، ومحور x، كثافتها تعطى بالمعادلة التالية:

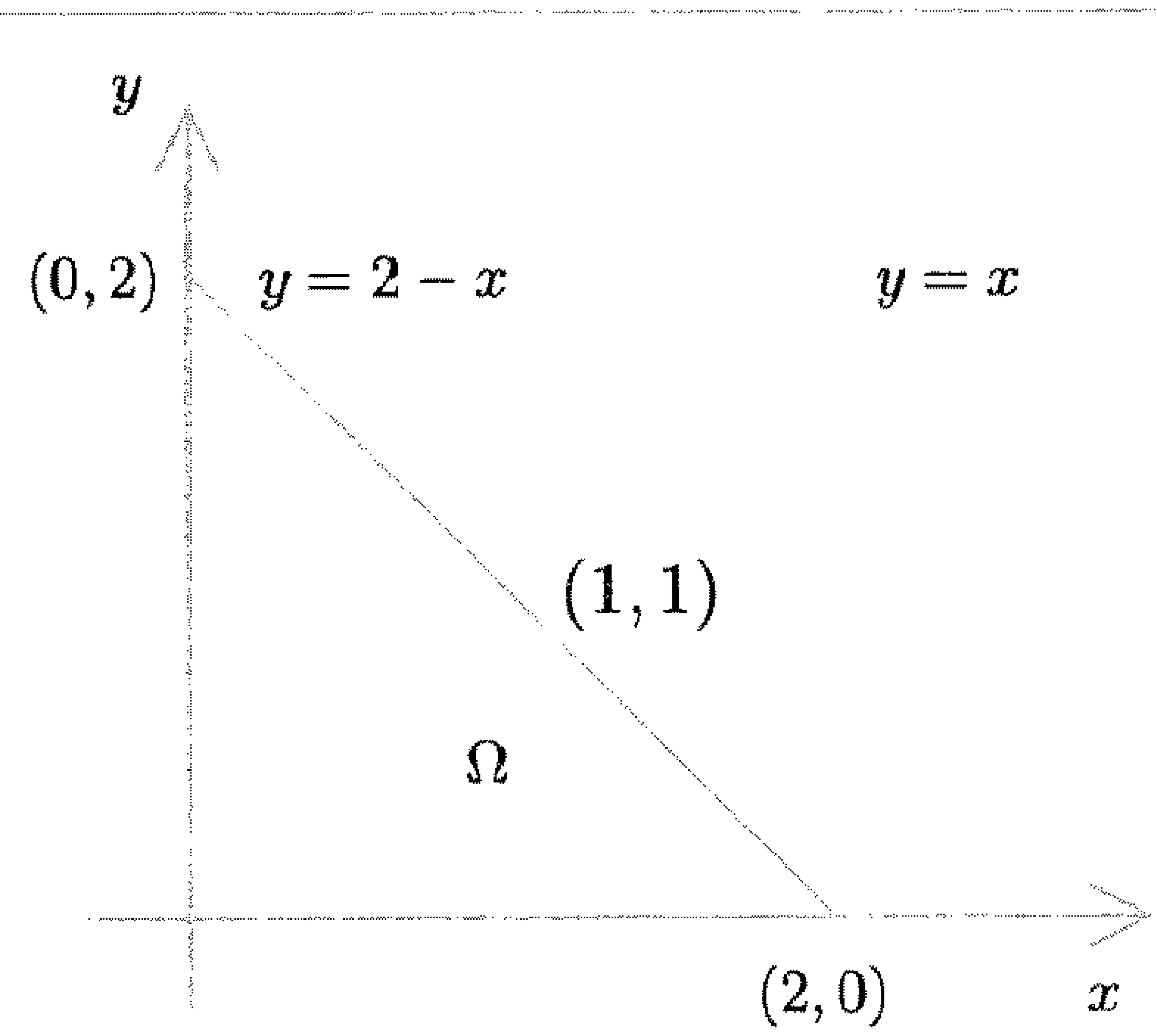
$$P(x,y) = 1 + 2x + y$$

المسافة مقيسة بالأمتار، والكتلة بالكيلوجرام، أوجد الكتلة، ومركز الكتلة للصفيحة.

الحل

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} P(x,y)dA \\ &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (1+2x+y)dx\,dy \\ &= \int_0^1 (x+x^2+xy)\Big|_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 (6-4y-2y^2)dy = \frac{10}{3}\,kg \end{aligned}$$

ويترك للقارئ أن يبين: $(x,y) = (1.1, 0.35)$



شكل 23

تمارين

أوجد المساحة المحددة بالمعادلات أو المتباينات المذكورة وارسم المنطقة R في كل حالة:

1) $y = x$ ، $y = 3x$ ، $x + 4 = 4$

2) $y = 1$, $y = 0$, $y = ln|x|$

3) $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$

4) $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$, $y^2 = -x$

5) $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$

6) $x - y + 1 = 0$, $7x - y - 17 = 0$, $2x + y + 2 = 0$

7) $y = e^x$, $y = sin\ x$, $x = -\pi$, $x = \pi$

8) $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

9) $x = y^2$, $x = 32 - y^2$

10) $x = 2$, $x = y^2$, $x = 4y^2 - 3$

11) $y = cosh\ x$, $y = sinh\ x$ في الفترة $[-1,1]$.

أوجد كتلة المنطقة R في الحالات الآتية

12) المنطقة R داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 46$ حيث أن $P(x,y) = x^2 + y^2$

13) المنطقة R محددة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y^2 = x$ حيث أن $P = 3y$

14) المنطقة R محددة بالمستطيل الذي رؤوسه $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$ حيث أن:

$$P = \frac{3x}{1 + x^2y^2}$$

أوجد حجم المجسمات $V(S)$ المذكور في الحالات التالية:

15) المجسم S محدد بالمعادلة التالية:

$$x + y + z = 3\ ,\ y = 0\ ,\ x^2 + z^2 = 4$$

16) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$y = x - \frac{3}{2}\ ,\ y^2 + z^2 = 2x$$

17) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$z^2 = 4 - y\ ,\ y = x^2$$

5.2 تغيير المتغيرات في التكامل

نظرية 3

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الأقل في $x_1 \leq x \leq x_2$ و $x = x(u)$ معرفة في $u_1 \leq u \leq u_2$ ومشتقتها الأولى متصلة مع $x_1 = x(u_1)$ و $x_2 = x(u_2)$ و $f[x(u)]$ متصلة في $u_1 \leq u \leq u_2$ فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)] \frac{dx}{du} du \qquad (1)$$

البرهان

إذا كانت $F(x)$ تكاملاً غير محدد أو لانهائياً للدالة $f(x)$، فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1) \qquad (1)$$

ولكن $F[x\,(u)]$ تكون تكاملاً لانهائياً للدالة $f[x(u)]\dfrac{dx}{du}$

وبتطبيق قاعدة السلسلة:

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}\,\frac{dx}{du} = f(x)\frac{dx}{du} = f[x(u)]\frac{dx}{du} \qquad (2)$$

وبتكامل طرفي المعادلة (2) نجد أن:

$$F[x(u_2)] - F[x(u_1)] = F(x_2) - F(x_1) = \int_{u_1}^{u_2} f[x, u]\frac{dx}{du} \qquad (3)$$

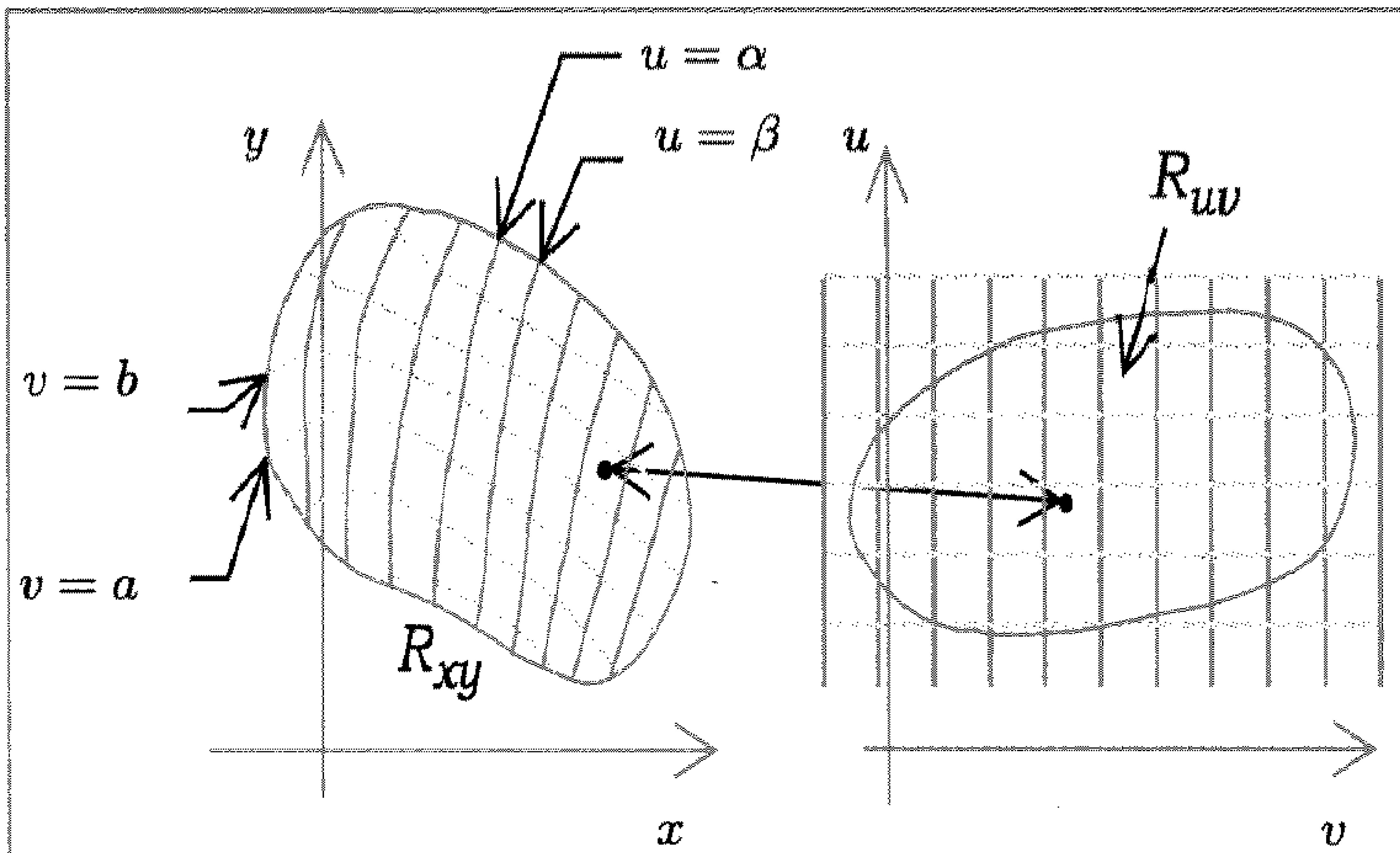
من (1) و(3) يكتمل البرهان.

نظرية 4

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R_{xy}، وإذا كانت الدالتان $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ معرفتين ولهما مشتقات أولية متصلة في R_{uv}، وإذا كانت الدالتان العكسيتان $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ معرفتين ومتصلتين في R_{xy} حيث أن $f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]$ متصلة في R_{uv}، فإن:

$$\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dx\ dy = \iint\limits_{R_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\ dv$$

المعادلتان $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ يمكن اعتبارهما كمقدمة للإحداثيات الخطية المنحنية في المستوى $x\,y$ كما هو موضح في الشكل (24a).



شكل (24a) شكل (24b)

المستقيمات (مقدار ثابت = u) و(مقدار ثابت = v) تكون نظام منحنيات موازية للمحورين ومن الطبيعي استخدامهما لتقسيم المنطقة R_{uv} إلى عناصر أو جزيئات من المساحة ΔA لتكوين التكامل الثنائي، وعند اعتبار العناصر الخطية

المنحنية، الحجم (تحت السطح $z = f(x,y)$) يقدر بـ $f(x,y)\Delta A$ حيث ΔA ترمز إلى أحد العناصر الخطية المنحنية.

إذا أمكن التعبير عن ΔA بـ $J\Delta u\, \Delta v$ والدالة $f(x,y)$ بـ $f((x(u)\ ,\ y(v))$ فإن:

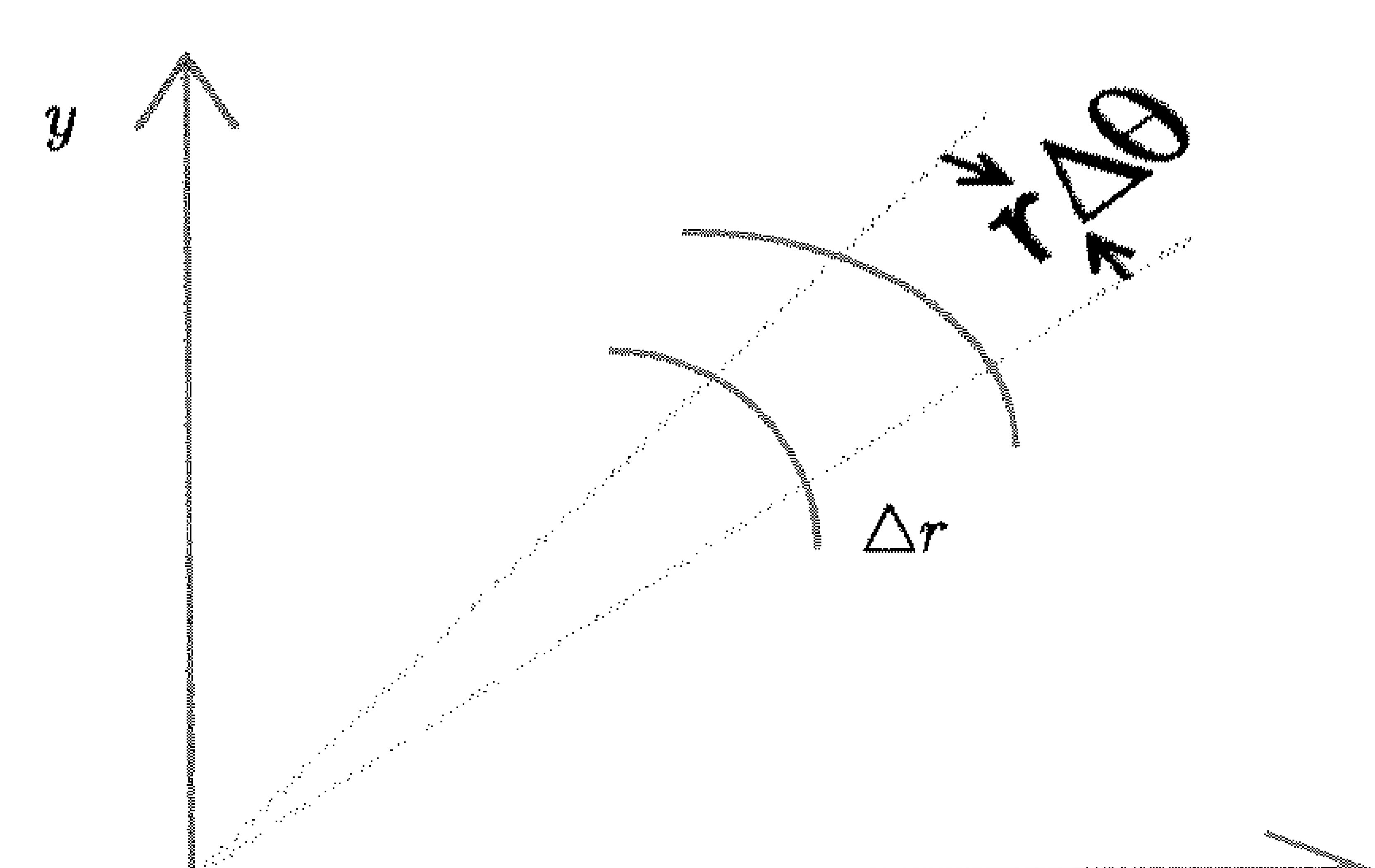
$$\sum_i f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]J\Delta u\ \Delta v = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]Jdu\ dv$$

حيث أن $J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

العدد J (الجاكوبي) يمكن تفسيره بـ $\dfrac{\Delta\ A_{xy}}{\Delta\ A_{uv}}$ حيث أن $\Delta\ A_{xy}$ و $\Delta\ A_{uv}$ عنصرا المساحة في المستويين $x\ y$ و $u\ v$ على التوالي.

والإحداثيات القطبية تعتبر مثالاً للإحداثيات الخطية المنحنية.

$$y = r\ sin\ \theta\ \ ,\ \ x = r\ cos\ \theta$$



شكل 25

عنصر المساحة بالإحداثيات القطبية

عنصر المساحة تقريباً مستطيل جوانبه Δr و$r\Delta\theta$ كما هو موضح في الشكل (25)، ولذلك يمكن التعبير عن التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dx\,dy = \iint_{R_{r\theta}} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rd\theta dr$$

لاحظ أن الجاكوبي في هذه الحالة:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} cos\theta & -r\ sin\theta \\ sin\ \theta & r\ cos\ \theta \end{vmatrix} = r$$

وإذا كانت المنطقة $R_{r\theta}$ محددة بـ $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\ ,\ \alpha \le \theta \le \beta$، فإن:

$$\iint_{R_r} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rd\ \theta\ d\theta\ = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ \sin\ \theta)rd\ rd\theta$$

وفي بعض المسائل يكون من السهل إيجاد التكامل حسب الترتيب $d\theta\ dr$ فإذا كانت R محددة بـ $\theta_1(r) \le \theta \le \theta_2(r)\ ,\ a \le r \le b$، فإن:

$$\iint_{R_{r\theta}} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rdrd\theta = \int_{a}^{b}\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\ cos\ \theta\ ,\ r\ sin\ \theta)rd\theta dr$$

مثال 1

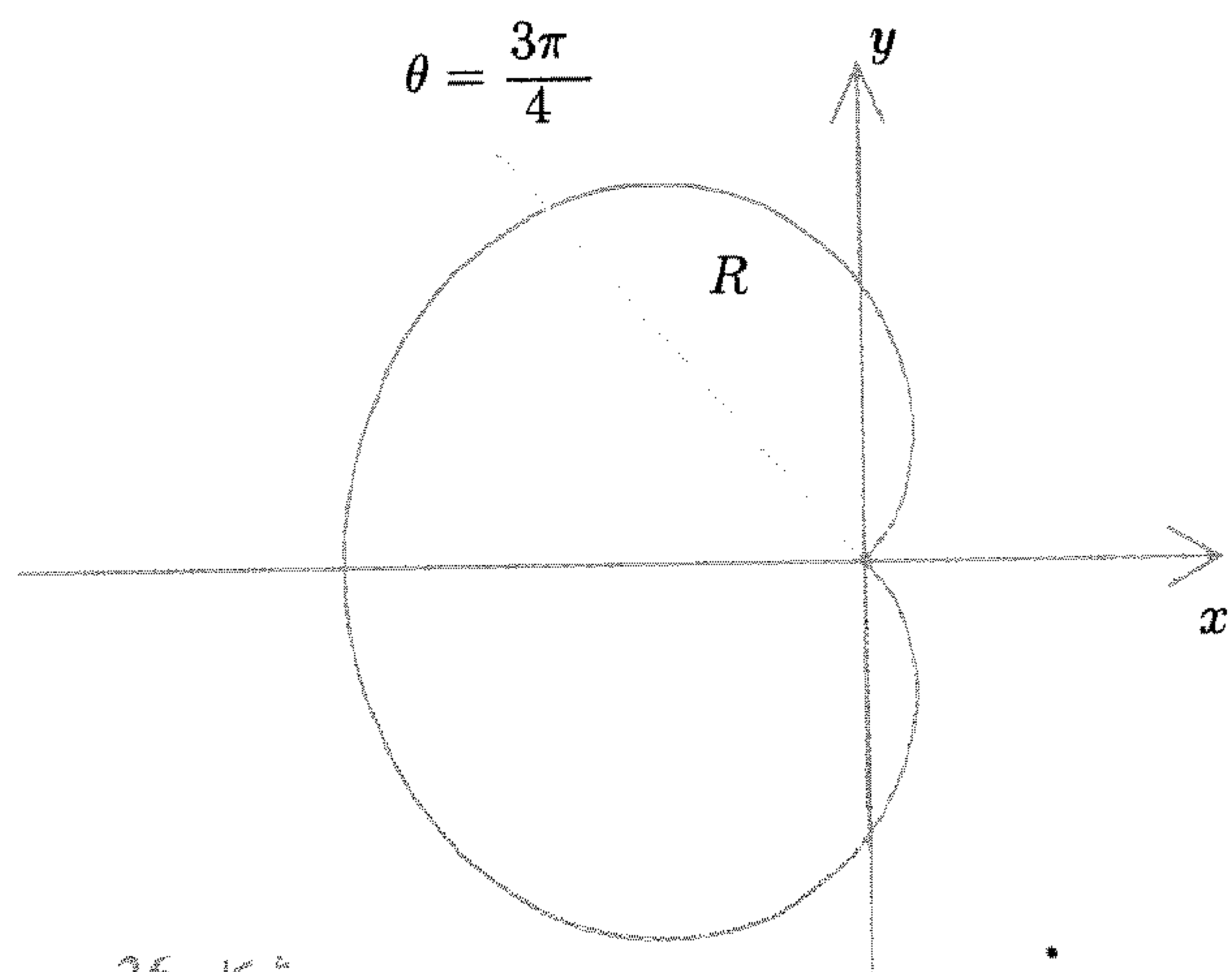
أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمستقيم $y = -x$ والمنحنى

$$x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2} - 3x$$

الحل

نستخدم الإحداثيات القطبية لوصف المنطقة R.

المنحنى $r^2 = 3r - 3rcos\ \theta$ أو $r = 3(1 - cos\ \theta)$، وهي تمثل معادلة قلب، والمعادلة القطبية للمستقيم $y = -x$ هي $\theta = \frac{3\pi}{4}$



شكل 26

من الرسم نلاحظ أن المنطقة محددة بـ

$$0 \le r \le 3(1-\cos\,\theta) \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$$

مساحة المنطقة R:

$$A(R) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{3(1-\cos\theta)} r\ dr\ d\theta$$

$$= 4.5 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1-\cos\,\theta)^2 d\theta$$

$$= 4.5 \left[\frac{3\theta}{2} - 2\ \sin\,\theta + \frac{1}{4} \sin\,2\theta\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 4.5 \left[\frac{9\pi}{8} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right] = 8.4153516$$

مثال 2

إذا كانت R المنطقة المحددة: $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$ فأوجد:

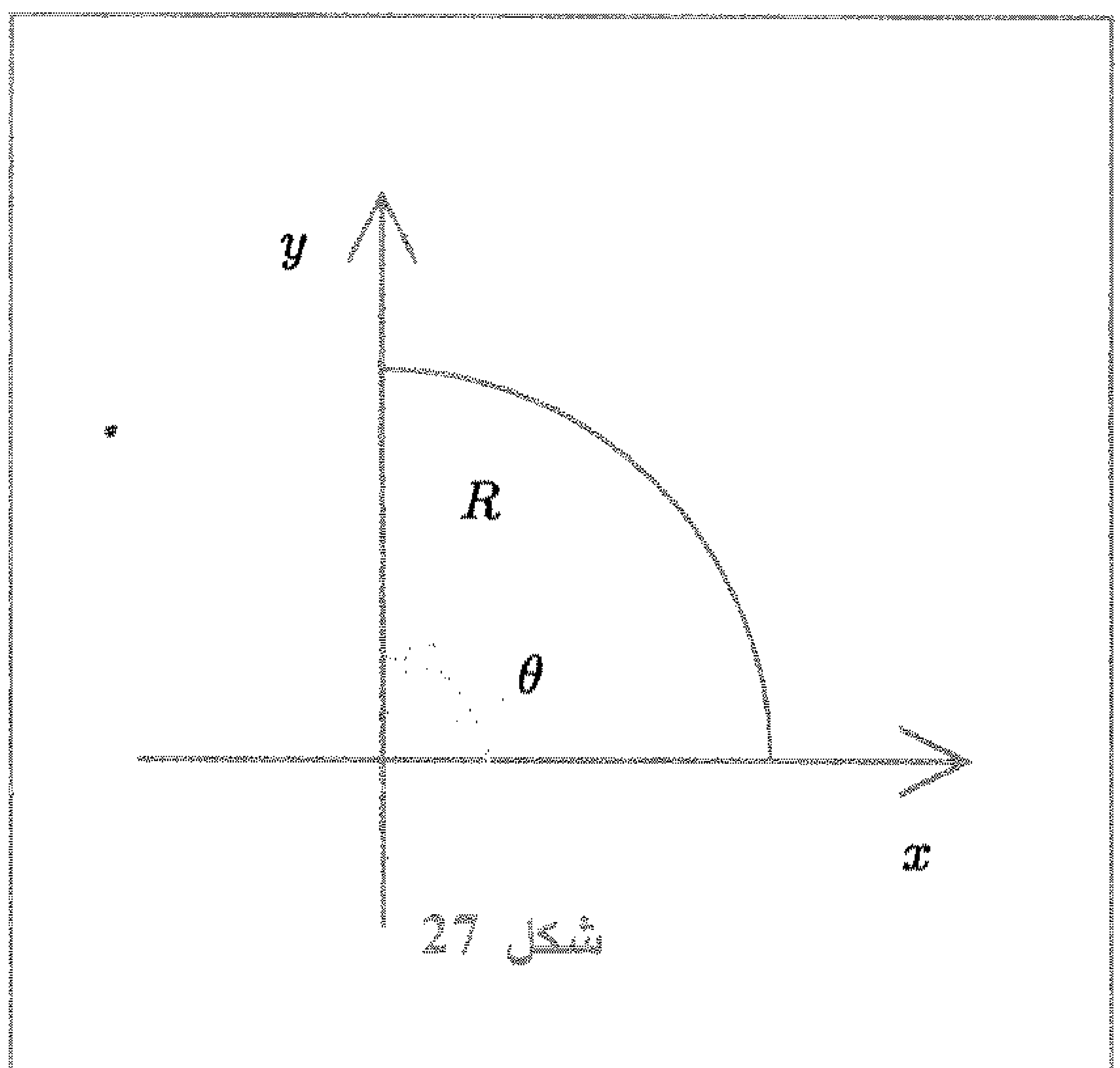
1 ـ مساحة المنطقة R

2 ـ قيمة التكامل $\iint\limits_R sin(x^2+y^2)dA$

الحـل

المنطقة R عبارة عن ربع دائرة نصف قطرها 1 كما هو موضح بالرسم.

إذن مساحة المنطقة R هي $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$



شكل 27

من الرسم نلاحظ أن النقطة R محددة كما يلي:

$$0 \le r \le 1 \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

ومن الممكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل الثنائي:

$$A(R) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\theta \, dr = \int_0^1 \frac{\pi}{2} r \, dr$$

$$= \left. \frac{\pi r^2}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

هل يمكن إيجاد المساحة باستخدام الإحداثيات الديكارتية؟

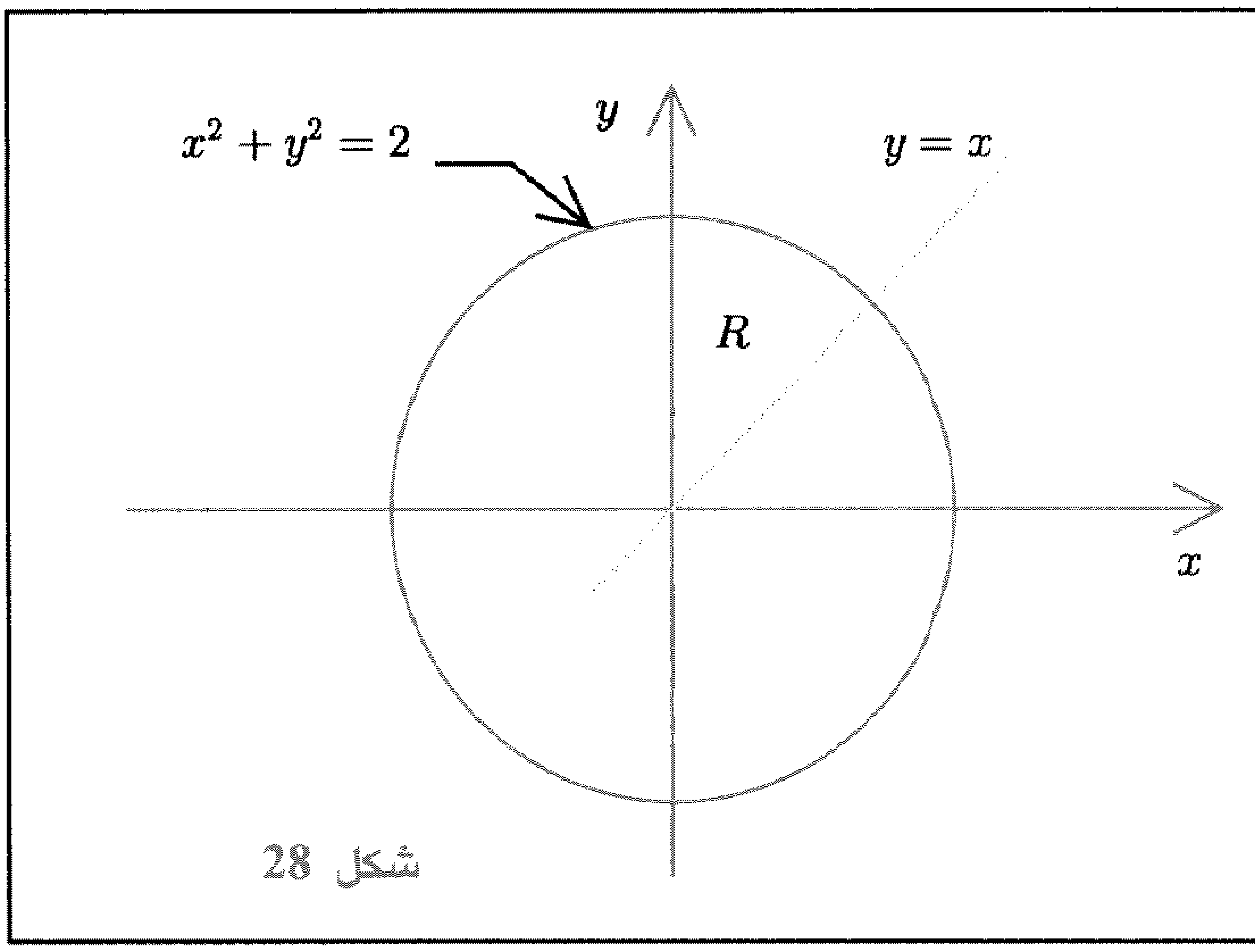
لاحظ أن:
$$\iint\limits_R sin(x^2+y^2)dA = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} sin(x^2+y^2)dx\,dy$$

التكامل لا يمكن إيجاده على الصورة السابقة حتى لو تم تغيير ترتيب التكامل، أي $(dy\,dx)$، ولذلك سنستخدم الإحداثيات القطبية (تغيير المتغيرات).

ومن الرسم أيضاً:
$$\begin{aligned}\iint\limits_R sin(x^2+y^2)dA &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{1} sin(r^2)r\,dr\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(r^2)\Big|_0^1\right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2}(cos(1)-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}(1-cos(1)) = 0.361045724\end{aligned}$$

مثـــال 3

أوجد قيمة التكامل $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\,dy$



شكل 28

ويتضح من الرسم أن مساحة المنطقة R

$$=\frac{1}{8}\pi\, r^2=\frac{\pi}{4}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\, dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\, d\theta$$

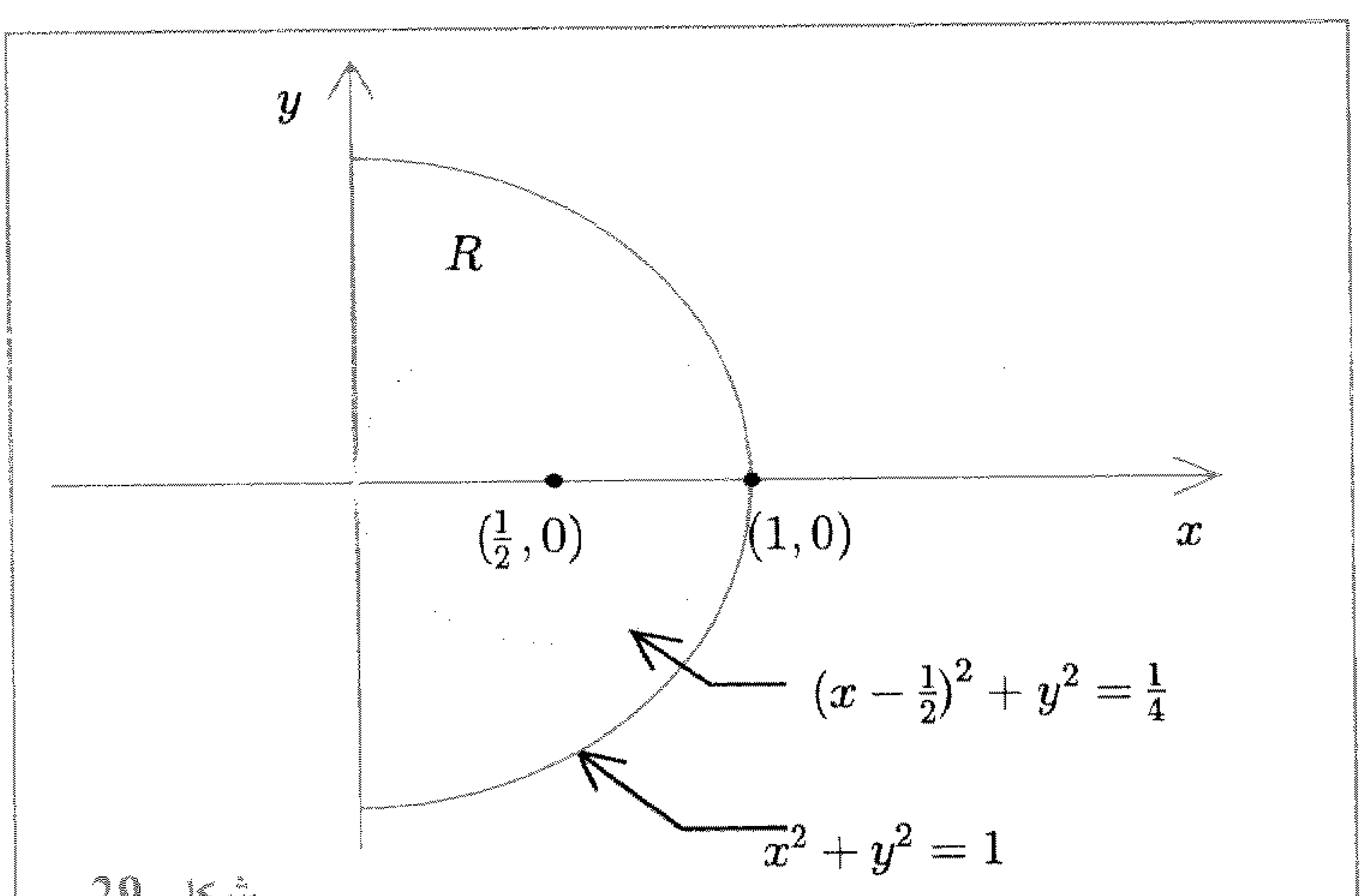
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

مثـــال 4

أوجد قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$

الحـــل

المنطقة R محددة بما يلي $\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$ ، $0\le x\le 1$



شكل 29

ولذلك $y=\sqrt{x-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=x$ أو $y^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

وكذلك $y=\sqrt{1-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=1$

لاحظ أن نصف قطر الدائرة الصغيرة $r_1=\frac{1}{2}$ ونصف قطر الدائرة الكبيرة $r_2=1$ ولذلك فإن مساحة المنطقة R هي:

$$A(R)=\frac{1}{4}\pi r_2^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2$$

$$=\frac{1}{4}\pi(r_2^2-2r_1^2)=\frac{\pi}{8}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$A(R)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos\theta}^{1} 6\ dr\ d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\theta$$

ولكن

$$1-\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

إذن

$$A(R)=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}$$

مثال 5

أوجد مساحة المنطقة R حيث R تقع داخل المنحنى $r=1+\cos\theta$

الحل

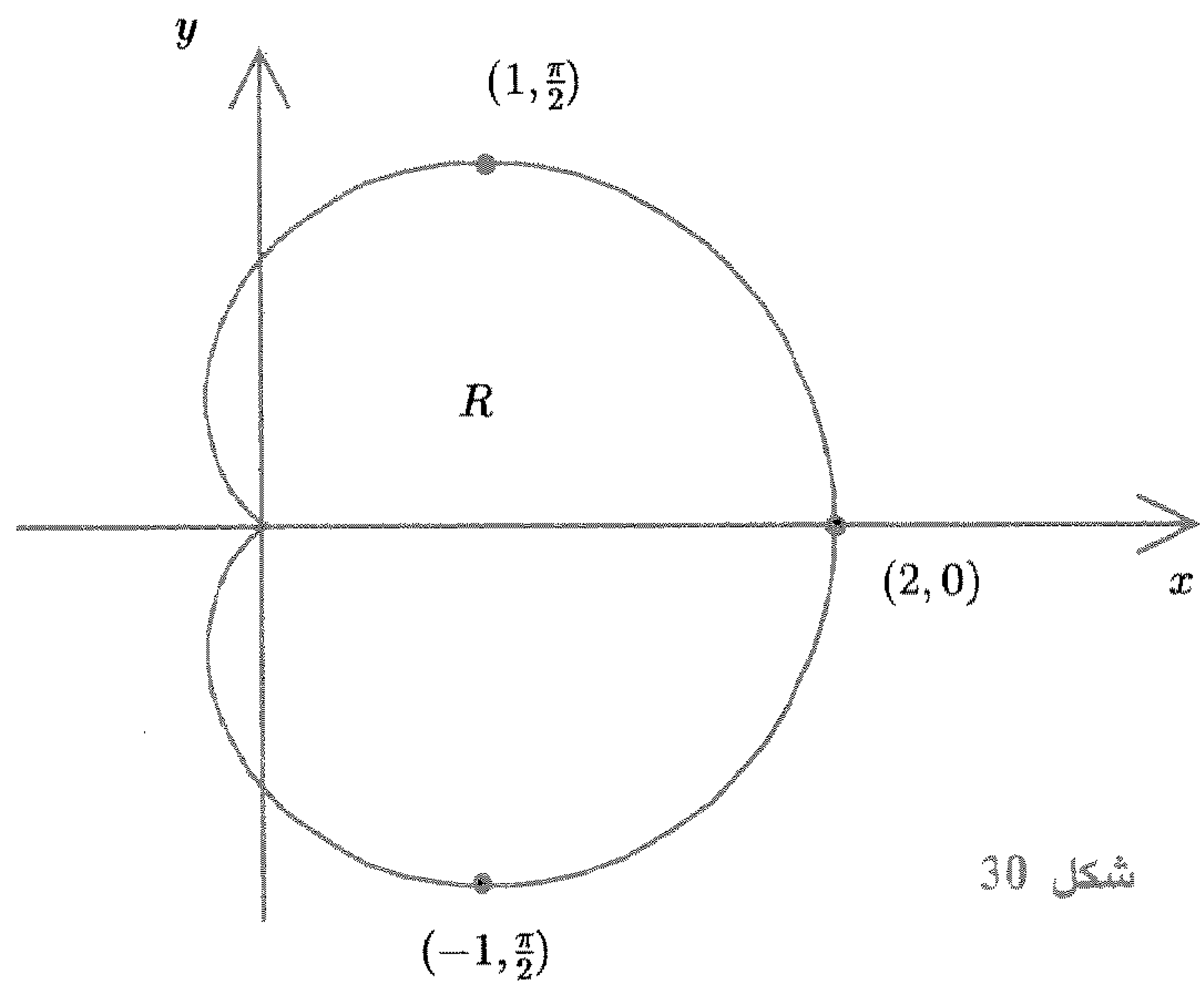
$$A(R)=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r dr d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \Big(1 + 2cos\theta + 12(1 + cos2\theta)\Big) d\theta$$

وبعد إجراء عملية التكامل والتعويض عن θ نجد أن $A(R) = \frac{3\pi}{2}$

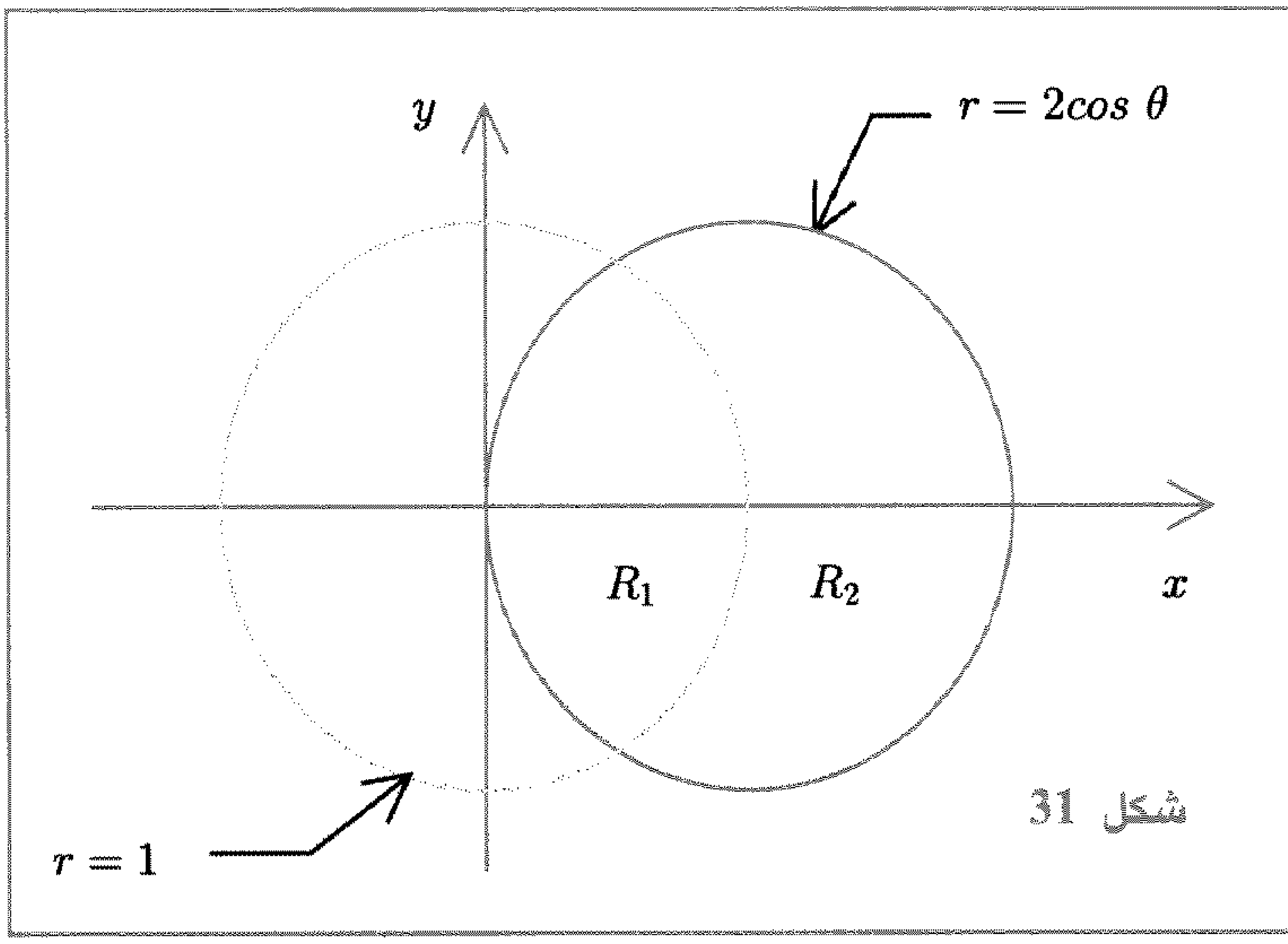


شكل 30

مثـــال 6

أ) أوجد مساحة المنطقة الواقعة داخل الدائرة $r = 2cos\ \theta$ وخارج الدائرة $r = 1$.

ب) أوجد مساحة تقاطع الدائرتين.



شكل 31

الحـل

أ) تتقاطع الدائرتان عند $1 = 2cos\ \theta$ أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

ولذلك

$$A(R_2) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2\ cos\ \theta} r\ dr\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(r^2 \Big|_1^{2cos\ \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4cos^2\theta - 1) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\ cos\theta + 1) d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.91322955$$

ب) مساحة الدائرة $r = 2cos\theta$ تساوي π

مساحة منطقة التقاطع تكون:

$$A(R_1) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.228369699$$

مثـال 7

أوجد حجم الكرة التي مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها a.

الحـل

معادلة سطح الكرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ومنها $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

إذن المطلوب إيجاد الحجم تحت السطح $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$، وفوق القرص $x^2 + y^2 \le a^2$ وهو يمثل نصف حجم الكرة.

وباستخدام التكامل الثنائي نجد أن:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$$

(واضح أنه يجب استخدام الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكامل الثنائي).

وباستخدام الإحداثيات القطبية يكون حجم نصف الكرة:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{0}^{a} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2}\;\; r\, d\theta\, dr \\
&= 2\pi \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - r^2}\;\; r\, dr \\
&= -\frac{3}{2}\pi (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{a} \\
&= -\frac{2}{3}\pi(0 - a^3) \\
&= \frac{2}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

وهكذا حجم الكرة يكون $\frac{4}{3}\pi\, a^3$

مثـــال 8

أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالسطح $z = 3 + r$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالمعادلة $r = 1 + sin\ \theta$.

الحـــل

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+sin\theta} (3 + r) r dr\ d\theta$$

ويترك للقارئ أن يبين أن

$$V = \frac{37}{6}\pi$$

مثـــال 9

أوجد $\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} dx\ dy$

مستخدماً التعويض $v = \frac{y}{2}$ ، $u = \frac{2x - y}{2}$

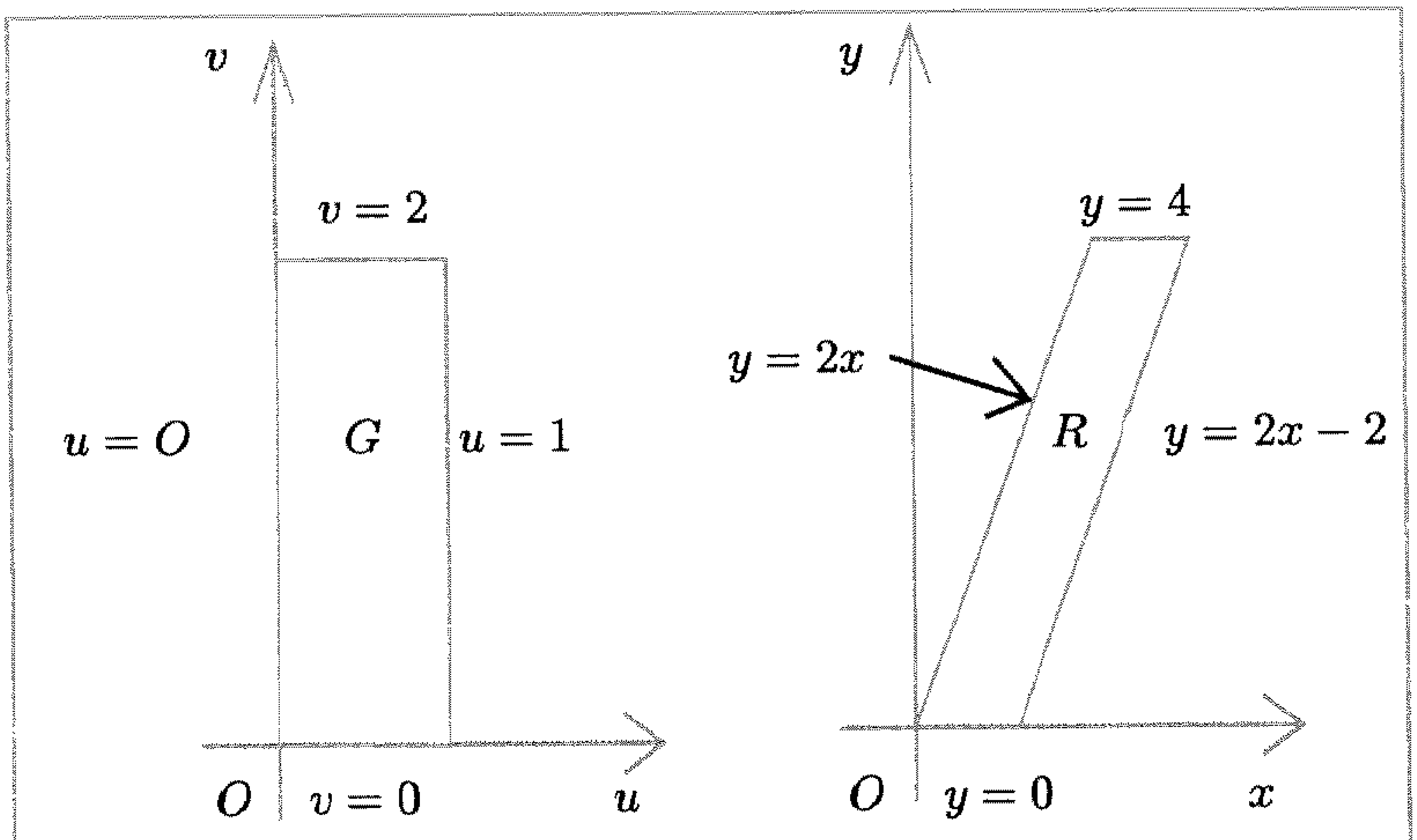
الحـــل

أولاً نرسم المنطقة R في المستوى $x\ y$ ونعين حدود المنطقة، أنظر الشكل (32).

ولتطبيق النظرية (4) يتطلب إيجاد المنطقة المناظرة G في المستوى $u\ v$ ومحدد جاكوبي للتحويل. ويمكن ذلك بإيجاد x وy بدلالة u، v من معادلتي التحويل، أي أن:

$$y = 2x$$

$$x = u + \frac{1}{2} y = u + v$$



شكل 32

ويمكن إيجاد حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$ بالتعويض عن x و y في حدود المنطقة R كما هو موضح في الجدول التالي:

حدود R في المستوى $x\,y$	التعويض عن x، y في حدود R	حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$
$x = y/2$	$u + v = v$	$u = 0$
$x = (y/2) + 1$	$u + v = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

محدد جاكوبي يكون:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

والآن يوجد لدينا كل شيء لتطبيق النظرية (4):

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 uJdudv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 2ududv = \int_0^2 dv = 2$$

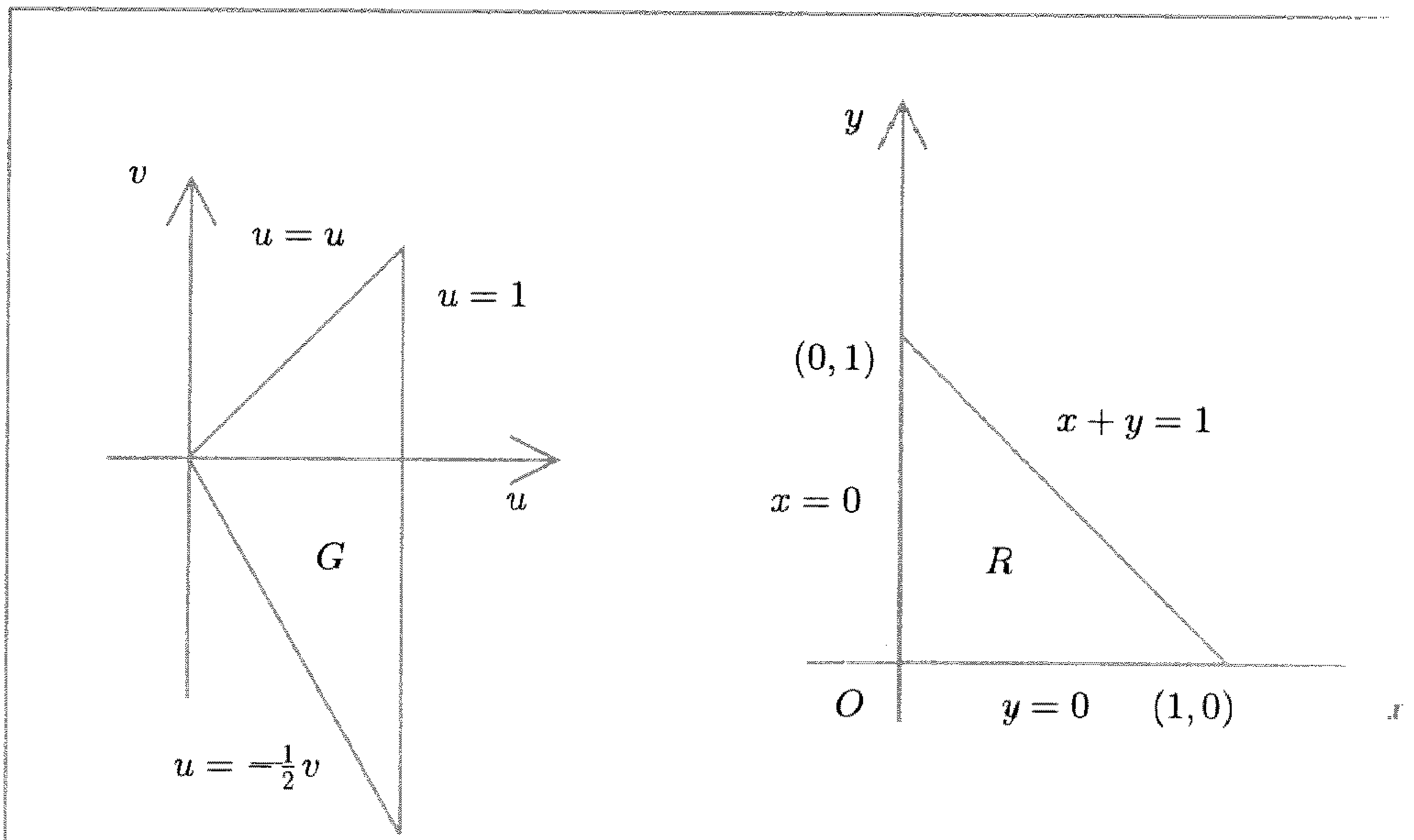
مثـال 10

أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$

الحـل

أولاً ترسم المنطقة R في المستوى $x\,y$ وتعين حدود المنطقة R كما هو موضح بالشكل (33). وبعد فحص الدالة المكاملة (Integrand) يمكن استخدام التحويل:

$u = x + y$ و $v = y - 2x$



شكل 33

وبعد حل المعادلتين السابقتين معاً نحصل على:

$$y = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{3}(u - v)$$

وتوجد حدود المنطقة G في المستوى $u\ v$ كما في المثال السابق

$$R_{xy} \Longrightarrow G_{uv}$$

$$x + y = 1 \Longrightarrow u = 1$$

$$x = 0 \Longrightarrow u = v$$

$$y = 0 \Longrightarrow u = -\frac{1}{2}v$$

ويحسب محدد جاكوبي كما يلي:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحدد نجد أن:

$$J = \frac{1}{3}$$

وهكذا

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} \sqrt{u}(v^2)\left(\frac{1}{3}\right) dvdu = \frac{2}{9}$$

ويترك للقارئ إجراء عملية التكامل بالتفصيل والتحقق من صحة النتيجة.

مثـال 11

أوجد

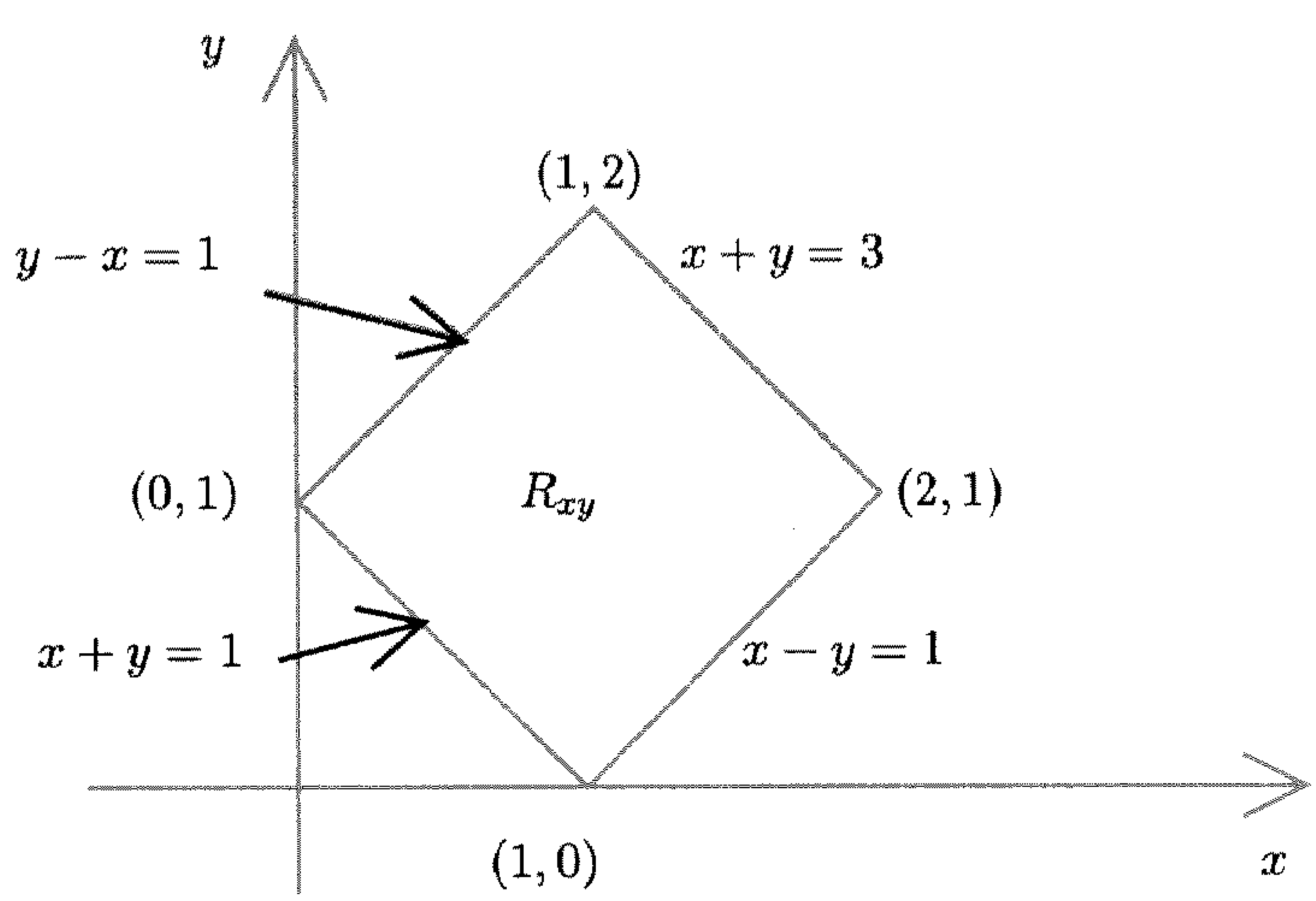
$$\iint\limits_R (x-y)^2 cos^2(x+y)dxdy$$

حيث أن R شبه المنحرف الذي رؤوسه:

$$(0,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,0)$$

الحـل

المنطقة R في المستوى $x\ y$ موضحة بالشكل (34).



شكل 34

من الدالة المكاملة (Integrand) يفضل استخدام التحويل:

$$v=x+y \quad \text{و} \quad u=x-y$$

وبعد حل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$y=\frac{1}{2}(-u+v) \quad , \quad x=\frac{1}{2}(u+v)$$

يمكن تحديد حدود المنطقة G من معادلات حدود المنطقة R في المستوى $x\,y$ كما يلي

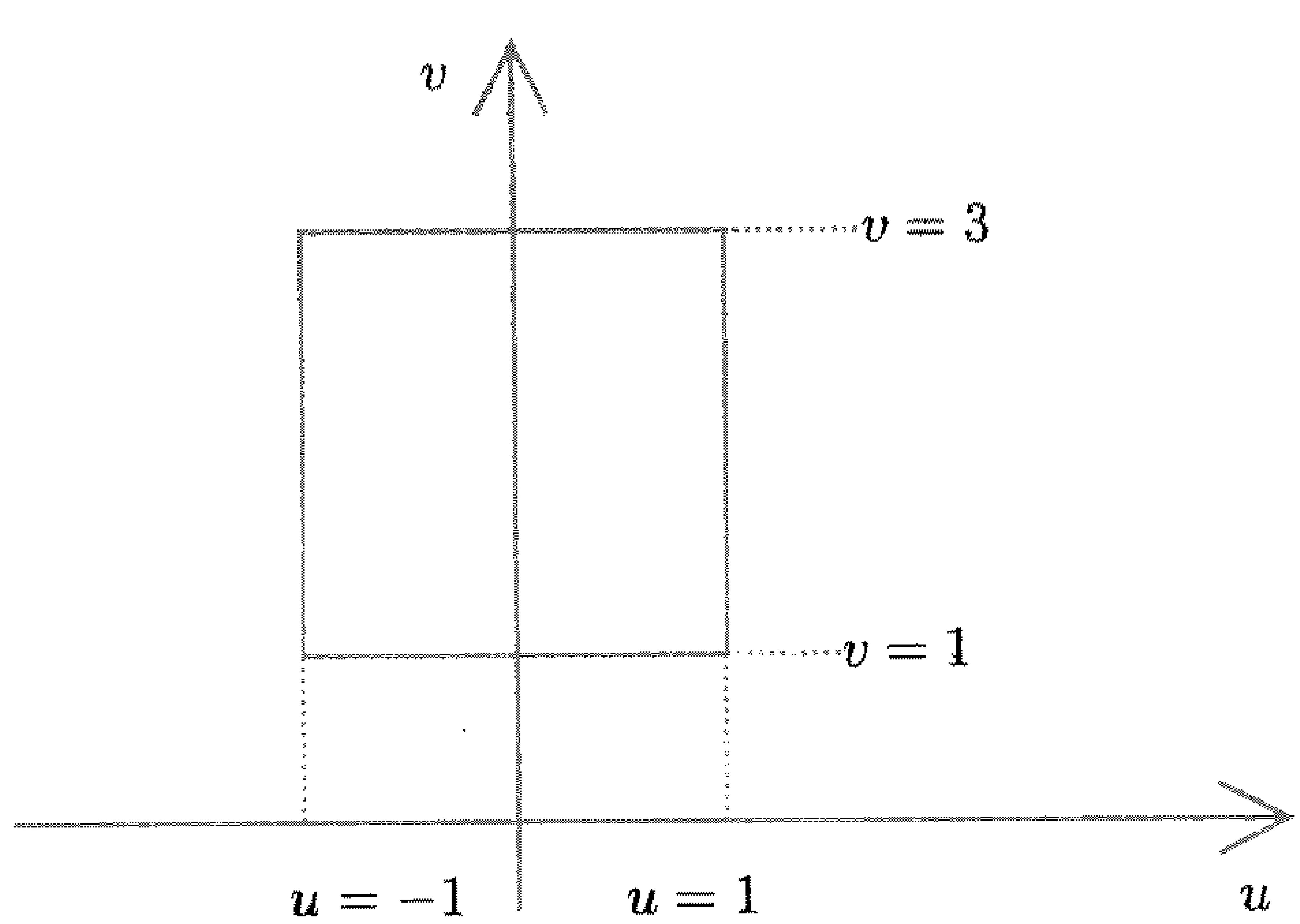
$$x-y=1 \implies u=1$$

$$x-y=3 \implies v=3$$

$$x+y=1 \implies v=1$$

$$y-x=1 \implies u=-1$$

المنطقة G في المستوى $u\,v$ موضحة بالشكل (35).



شكل 35

ويمكن إيجاد محدد جاكوبي للتحويل كما يلي:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

وهكذا

$$\iint_R (x-y)^2 cos^2(x+y)dxdy$$
$$= \int_1^3 \int_{-1}^1 u^2 cos^2 v \left(\frac{1}{2}\right) dudv$$
$$= \int_1^3 \frac{1}{3} cos^2 v dv$$
$$= \frac{1}{6}\int_1^3 (1+cos2v)dv$$
$$= \frac{1}{6}\left[v+\frac{1}{2}sin\ 2v\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{6}\left[2+\frac{1}{2}(sin6 - sin2)\right]$$
$$= 0.2342739$$

مثـــال 12

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

الحـــل

التكامل السابق يعتبر من أهم التكاملات التي يصادفها القارئ في نظرية الاحتمالات، وفي هذا المثال سنبين كيف يمكن استخدام التكامل الثنائي والإحداثيات القطبية لإيجاد قيمته.

نفرض أن:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

واضح أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I$$ (لماذا؟)

وبما أنه يمكن استخدام أي متغير في إيجاد قيمة التكامل، فإن:

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

وهكذا

$$I^2 = \left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx\ dy$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$I^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\ d\theta\ dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r\ dr$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty} e^{-r^2}\Big|_{0}^{a}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty}\left(e^{-a^2} - 1\right) = \frac{\pi}{4}$$

وهذا يتضمن $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ومنها $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

ويترك للقارئ أن يبين $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

(**إيضاح** استخدام التعويض $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$).

تمارين

عبر عن التكاملات الآتية كتكاملات جزئية واستخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة كل منها :

1) $\iint\limits_R x\,y\,dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=4$.

2) $\iint\limits_R (x^2+y^2)dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2(1+sin\theta)$

3) $\iint\limits_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2+cos\theta$

أوجد مساحة المنطقة R في المستوى $x\,y$ مستخدماً الإحداثيات القطبية

4) المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2+sin\theta$.

5) المنطقة داخل القلب $r=1+cos\theta$ وخارج الدائرة $r=\frac{1}{2}$

أوجد قيمة التكاملات الآتية مستخدماً الإحداثيات القطبية

6) $$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$$

7) $$\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy\,dx$$

8) $$\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}$$

9) $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} cos(x^2+y^2)dx\,dy$$

10) $$\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx$$

11) $$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$$

12) $$\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2\,dy\,dx$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى أو المنحنيات التالية:

13) $r = 1 - \cos\theta$ 14) $r = 4(1 + \cos\theta)$

15) $r^2 = \cos 2\theta$ 16) $r = 3 - 2\sin\theta$

17) $r = \tan 2\theta$ والمستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$

18) أوجد حجم المجسم المحدد بالمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$

19) أوجد مساحة المنطقة التي تقع داخل المنحنى $(x^2 + y^2)^3 = 9y^2$

20) بيّن أن $\iint\limits_{\Omega} \frac{dA}{1 + x^2 + y^2} = \pi \ln 2$

حث أن Ω قرص الوحدة $(r = 1)$.

21) أوجد

$$\iint\limits_{R} (4x - 4y + 1)^{-2} dxdy$$

حيث أن R المنطقة المحددة بالمعادلات التالية:

$$x = \sqrt{-y} \quad ، \quad x = y \quad و \quad x = 1$$

حيث أن: $x = u + v$ ، $y = v - u^2$

22) أوجد

$$\iint\limits_{R} (x^2 + 2y^2) dx\, dy$$

حيث أن R منطقة في الربع الأول ومحددة برسم المعادلات:

$$xy = 1 \;,\; xy = 2 \;,\; y = x \;,\; y = 2x$$

23) أوجد

$$\iint_R \left(\sqrt{x-2y}+\frac{1}{4}y^2\right)dx\,dy$$

حيث أن R المثلث الذي رؤوسه $(4,2)$, $(4,0)$, $(0,0$

حيث أن $u=\frac{1}{2}y$ ، $v=x-2y$

تمارين الفصل الثاني

أرسم منطقة التكامل ثم أوجد قيمة التكاملات التالية:

(1 $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\, dy\, dx$

(2 $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx\, dy$

(3 $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy\, dx$

(4 $\int_1^2 \int_0^{2\ln x} e^{x+y} dy\, dx$

(5 $\int_0^1 \int_{-y}^{y} \sinh(y^2) dx\, dy$

(6 $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{1+y^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$

(7 $\int_0^1 \int_{-y^{1/3}}^{y^{1/2}} 3x^2 y dx\, dy$

(8 $\int_0^{\pi/4} \int_0^{y} (\sin^2 xy + \cos^2 xy) dx\, dy$

أرسم منطقة التكامل واكتب التكامل الثنائي المكافئ مع تغيير ترتيب التكامل

(9 $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x dy\, dx$

(10 $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x dy\, dx$

(11 $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3xy\, dx\, dy$

(12 $\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x dy\, dx$

(13 $\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{x^2+1} f(x,y) dy\, dx$

(14 $\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} x^2 y\, dy\, dx$

(15 $\int_0^1 \int_0^{\exp(y)} xy\, dx\, dy$

(16 $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y) dy\, dx$

أرسم منطقة التكامل وحدد ترتيب التكامل المناسب وأوجد قيمة التكامل لكل من التكاملات التالية:

(17 $\displaystyle\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$ (18 $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$

(19 $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx$ (20 $\displaystyle\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} cos(16\pi x^5) dx\, dy$

(21 $\displaystyle\iint_R (y-2x^2)dA$ حيث أن R المنطقة داخل المربع
$|x|+|y|=1$

(22 $\displaystyle\iint_R xydA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمستقيمات
$y=x$, $y=2x$ و $x+y=2$

الحجم تحت السطح $z=f(x,y)$

(23 أوجد حجم المنطقة الواقعة تحت المجسم المكافئ $z=x^2+y^2$ وفوق المثلث المحدد بالمستقيمات $y=x$, $x=0$ و $x+y=2$ في المستوى $x\,y$.

(24 أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالأسطوانة $z=x^2$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y=2-x^2$ والمستقيم $y=x$ في المستوى $x\,y$.

(25 أوجد حجم المنطقة التي تشتمل على كل النقاط التي تقع داخل الأسطوانة $(x+1)^2+y^2=1$ وداخل الكرة $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

(26 أوجد حجم المنطقة الواقعة داخل الأسطوانتين (المنطقة المشتركة):

$$x^2+z^2=a^2 \quad \text{و} \quad y^2+z^2=a^2$$

التكاملات على مناطق غير محدودة

أوجد قيمة التكاملات المعتلة التالية:

(27 $$\int_{-1}^{1}\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)dy\,dx$$

(28 $$\int_{1}^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1} \frac{1}{x^3y}dy\,dx$$

(29 $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}dx\,dy$$

(30 $$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} xe^{-(x+2y)}dx\,dy$$

(31 أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{2}(tan^{-1}\pi x - tan^{-1}x)dx$

(32 أوجد المنطقة R التي تجعل قيمة التكامل التالي قيمة عظمى وقيمة صغرى وبيّن السبب في كل حالة $\iint_R (4-x^2-2y^2)dA$

(33 أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{1}\int_{0}^{3} \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}dy\,dx$

المساحة (Area)

أوجد مساحة المنطقة المحددة أو المطوقة بـ

(34 المحوران والمستقيم $2x+y=2$

(35 القطع المكافئ $x=-y^2$ والمستقيم $y=x+2$

(36 القطاعان المكافئان $x=y^2$ و $x=2y-y^2$

(37 القطاعان المكافئان $x=y^2-1$ و $x=2y^2-2$

التكاملات القطبية

استخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

(38 $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$$

(39 $$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx$$

(40 $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ln(x^2+y^2+1)dx\, dy$$

(41 $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\, dx$$

42) أوجد مساحة المنطقة داخل القلب $r = 1 + cos\ \theta$ وخارج الدائرة $r = 1$

43) أوجد مساحة المنطقة المشتركة التي تقع داخل القلبين $r = 1 + cos\ \theta$ و $r = 1 - cos\ \theta$

44) أوجد مساحة المنطقة المطوقة بالقلب $r = 1 + cos\ \theta$

45) أوجد المساحة الواقعة داخل رسم المنحنى $r = cos\ 2\theta$

46) أوجد المساحة داخل رسم المعادلة $r = sin(n\ \theta)$ حيث أن n عدد صحيح موجب.

تغير المتغيرات في التكاملات الثنائية

أوجد قيمة التكاملات التالية:

(47 $$\int_{0}^{4}\int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}dx\, dy$$

(48 $$\iint_R (2x^2-xy-y^2)dx\, dy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيمات

$$y = x_1\ ,\ y = x - 2\ ,\ y = -2x + 7\ ,\ y = -2x + 4$$

(**إيضاح**: استخدم التعويض $u = x - y$ و $v = 2x + y$).

48) أوجد قيمة التكامل:

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)dx\ dy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول ومحددة بالمستقيمات

$$y = -\frac{1}{4}x + 1\ ,\ y = -\frac{1}{4}x\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 3\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 1$$

(**إيضاح**: استخدم التعويض $u = 2x + 2y$ و $v = x + 4y$).

49) إذا كانت المنطقة الواقعة في الربع الأول للمستوى $x\,y$ ومحددة بالقطاعين الزائدين $xy = 1$ و $xy = 9$ والمستقيمين $y = 4x, y = x$، استخدم التعويض $x = \frac{u}{v}$ و $y = uv$ حيث أن $u > 0$ و $v > 0$ لكتابة التكامل $\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{y}} + \sqrt{xy}\right)dx\ dy$ كتكامل على منطقة ملائمة G في المستوى $u\,v$ ثم أوجد قيمة التكامل في المستوى $u\,v$ على المنطقة G

50) استخدم التحويل $x = u + \left(\frac{1}{2}\right)v$ و $y = v$ لإيجاد قيمة التكامل:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{(2x-y)^2} dx\ dy$$

51) أوجد مركز كتلة المنطقة المثلثية المحددة بالمستقيمات $x = 2$ و $y = 2$ والقطاع الزائد $x\,y = 2$ في المستوى $x\,y$.

52) أوجد عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل لصفيحة مثلثية رقيقة كثافتها 3 ومحددة بمحور y والمستقيمين $y = 2x$ و $y = 4$ في المستوى $x\,y$

53) أوجد مركز الكتلة وعزوم القصور الذاتية وأنصاف أقطار التدوير (gyration) حول المحاور لصفيحة رقيقة (thin) محددة بالمستقيم $y = x$،

القطاع المكافئ $y=x^2$ في المستوى $x\,y$ إذا كانت دالة الكثافة $\delta(x,y)=1$.

54) أوجد نصف قطر التدوير (radius of gyration) لكل مما يلي حول نقطة الأصل إذا كانت الكثافة 1:

أ) $x^2+y^2\geq 1$ ج) $0\leq x\leq y\leq 1$

ب) $x^2+y^2\leq 4\ ,\ y\geq 0$ د) $0\leq x\leq 1\ ,\ 0\leq y\leq 2$

55) أوجد مركز المناطق التالية إذا كانت الكثافة ثابتة:

أ) $x^2+y^2\leq 4\ ,\ y\geq 0$ ب) $x^2\leq y\leq 4\ ,\ x\geq 0$

ج) $0\leq y\leq sin\ x \qquad 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$

56) أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_0^2\int_{y/2}^1 e^{x^2}dx\ dy \qquad \int_0^1\int_{2y}^2 4cos(x^2)dx\ dy$$

$$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi\ sin\ \pi x^2}{x^2}dx\ dy \qquad \int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{1+y^4}$$

الفصل الثالث

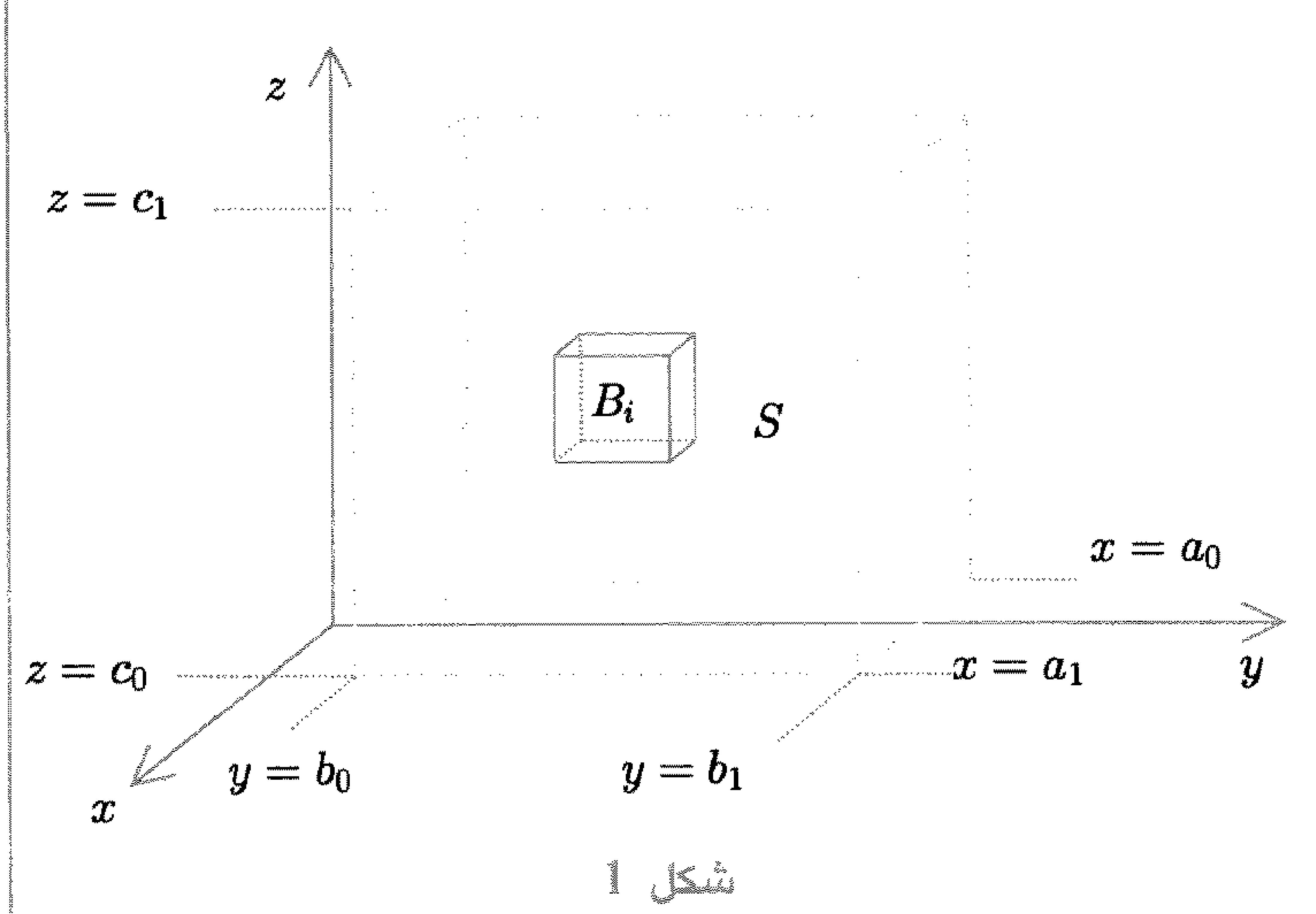
التكامل الثلاثي

3 . 1 تعريف التكامل الثلاثي

تعريف التكامل الثلاثي يوازي تعريف التكامل الثنائي، فإذا اعتبرنا متوازي السطوح المحدد بالمستويات الستة:

$$c_0 \le z \le c_1 \quad , \quad b_0 \le y \le b_1 \quad , \quad a_0 \le x \le a_1$$

أنظر الشكل (1).



شكل 1

وإذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ معرّفة في المنطقة المغلقة S، فإنه بصورة مشابهة للتكامل الثنائي تقسم المنطقة المجسمة S إلى متوازيات السطوح بمستويات موازية للمستويات الإحداثية (x,y,z).

وإذا كانت $B_1, B_2, ..., B_n$ تمثل متوازيات السطوح في S، وإذا رمزنا لحجم متوازي السطوح B_i بـ $V(B_i)$ وباختيار النقطة $P_i(x_i, y_i, z_i)$ في أي مكان من B_i، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, V(B_i)$$

يكون قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي.

ملاحظة

اعتبرنا المنطقة S متوازي السطوح للتوضيح فقط، حيث أن R يمكن أن تكون أي منطقة محددة ومغلقة ومقياس التقسيم يساوي طول أكبر قطر من $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$، وإذا كان المجموع السابق يؤول إلى نهاية (عدد حقيقي) عندما يؤول مقياس التقسيم إلى الصفر لكل P_i (أي اختيار)، فإن النهاية تسمى تكاملاً ثلاثياً للدالة f على المنطقة S، ويرمز للتكامل الثلاثي بالرمز:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV$$

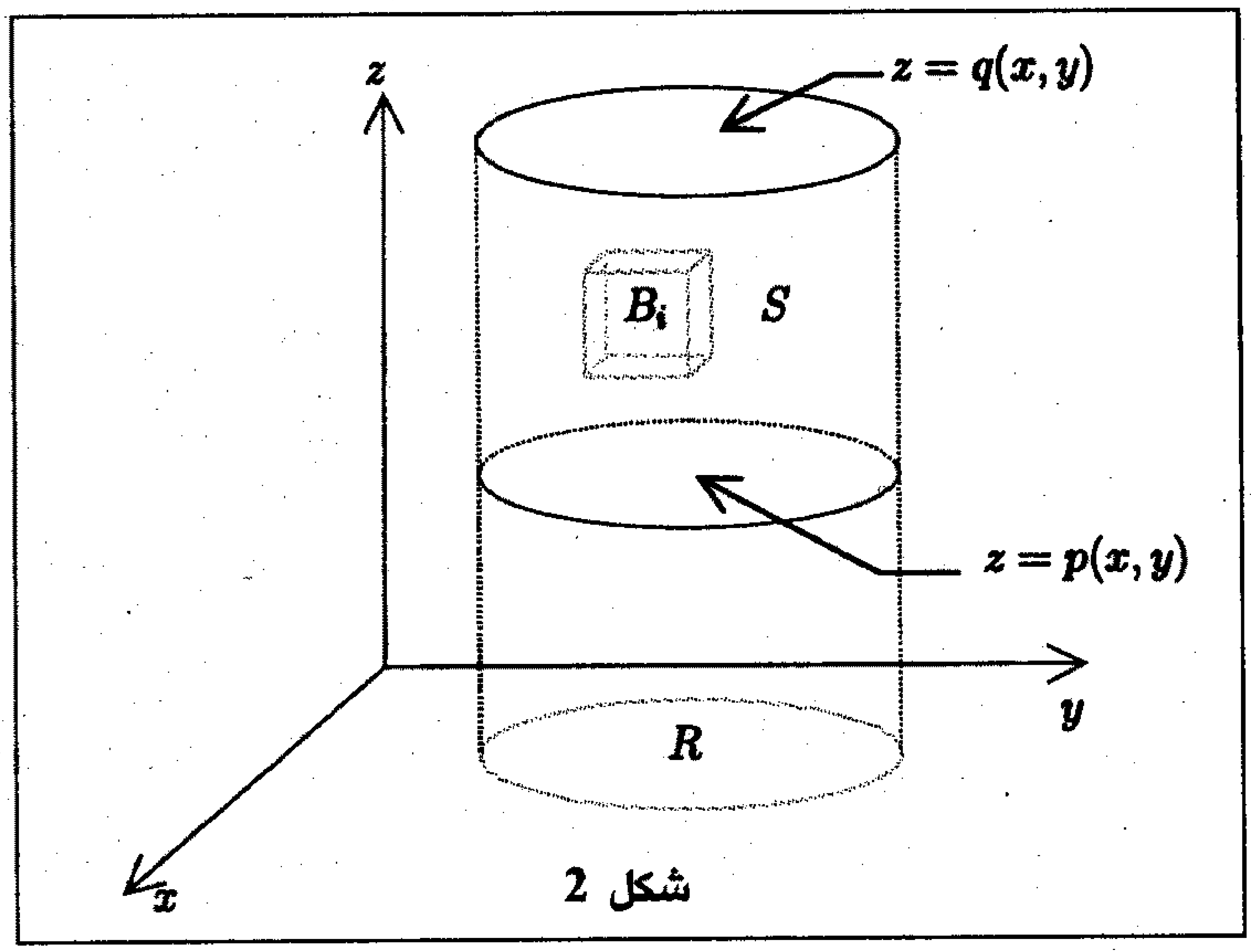
وعندما تكون المنطقة S متوازية السطوح كما سبق، فإن:

$$\iiint_S f(x,y,z)dv = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z)dz\, dy\, dx$$

وإذا كانت المنطقة S محددة كما يلي:

$$p(x,y) \leq z \leq q(x,y) \quad , \quad b_0 \leq y \leq b_1 \quad , \quad a_0 \leq x \leq a$$

كما هو موضح في الشكل (2).



شكل 2

فإن

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz\, dy\, dx$$

نظرية 1

نفرض أن المنطقة S معرفة بالمنحنيات التالية:

$$r_1(x,y) \leq z \leq r_2(x,y) \quad , \quad p(x) \leq y \leq q(x) \quad , \quad a \leq x \leq b$$

حيث أن الدوال r_2, r_1, q, p تكون متصلة.

وإذا كانت الدالة f متصلة في المنطقة S، فإن:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y,z)dz\, dy\, dx$$

ملاحظة

إذا كانت حدود z متغيرة فإنها تكون دالة في المتغيرين x و y على الأكثر وحدود y دالة في x فقط وحدود x ثابتة حيث أن ترتيب التكامل $dz\, dy\, dx$ ويمكن اعتبار الترتيبات الأخرى بصورة مشابهة تماماً.

في الغالب يمكن تحديد حدود التكامل من الرسم التخطيطي بصورة مشابهة للتكامل الثنائي، كما سيتضح من الأمثلة التي سنقدمها في هذا الفصل.

وبما أن التكامل المحدد للدالة في متغير واحد يفسر بالمساحة والتكامل الثنائي بالحجم فمن المتوقع تفسير التكامل الثلاثي بما فوق الحجم أو الحجم الزائد (Hypervolume) أو الحجم في أربعة أبعاد. وعلى الرغم من بعض الأهمية للتفسيرات السابقة فإنه من الأهمية اعتبار الحالات الآتية:

1) الكتلة (Mass)

إذا كانت الدالة $\rho(x,y,z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم، فإن:

$$M(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)dV$$

2) الحجم (Volume)

إذا كانت $f(x,y,z) = 1$، فإن:

$$V(S) = \iiint_S dV$$

3) عزم المجسم S بالسنبة للمستويات x y، x z، y z يعرف كما يأتي:

$$M_{xz} = \iiint_S y\ \rho(x,y,z)dV\ ,\ M_{xy} = \iiint_S z\ \rho(x,y,z)dV$$

$$M_{yz} = \iiint_S x \ \rho(x, y, z) dV$$

حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

4) مركز الكتلة هو النقطة (x, y, z)

حيث أن:

$$x = \frac{M_{yz}}{M} \ , \ y = \frac{M_{xz}}{M} \ , \ z = \frac{M_{xy}}{M}$$

5) عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور z, y, x

$$I_y = \iiint_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \ , \ I_x = \iiint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

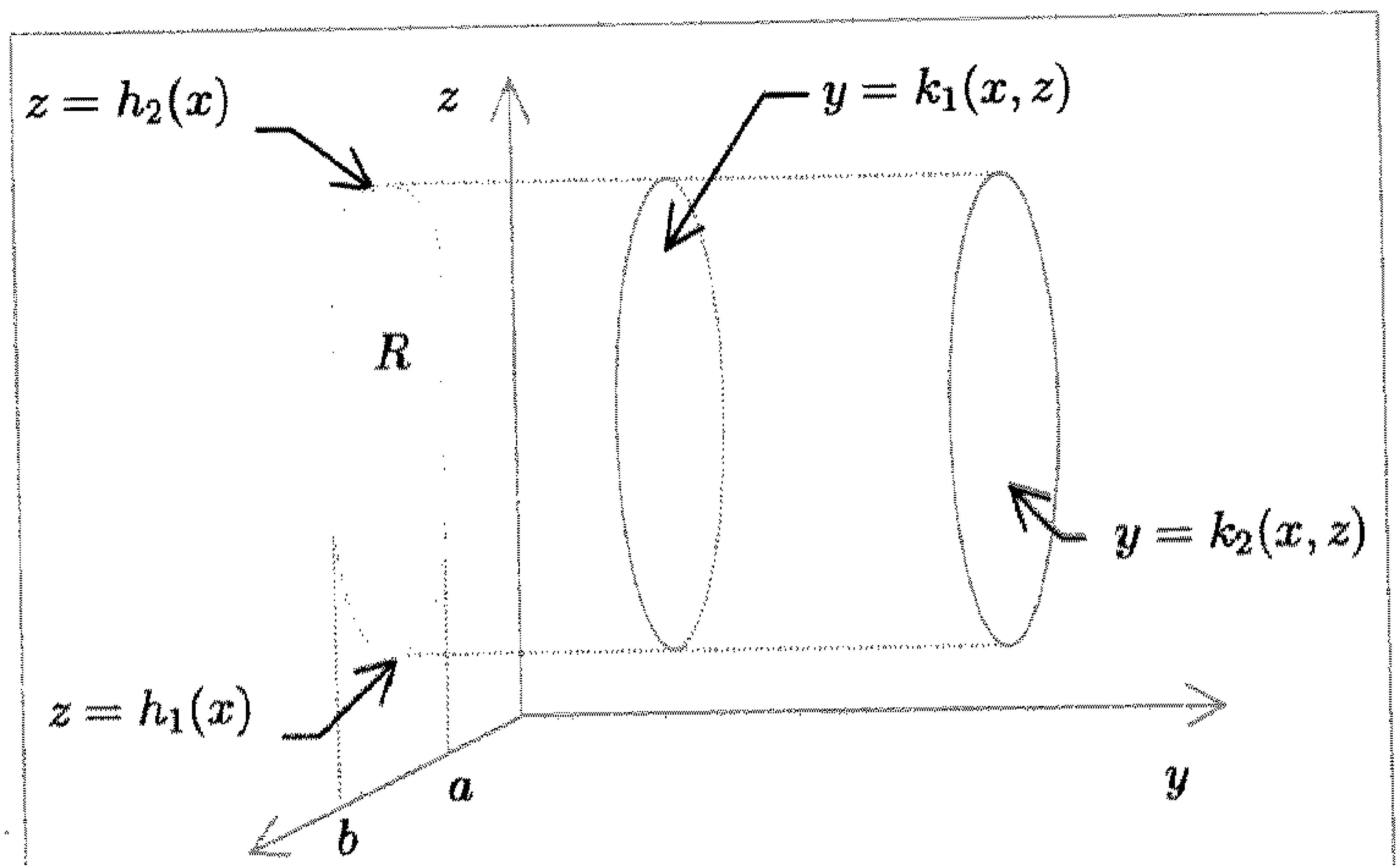
حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

2.3 تغيير ترتيب التكامل

رأينا أهمية ترتيب التكامل الثنائي، حين يتعذر في بعض المسائل إجراء عملية التكامل، كذلك الحال في التكامل الثلاثي يكون للترتيب أهمية كبيرة. فإذا كانت المنطقة S كما يلي:

$$S = \{(x,y,z) : a \le x \le b \ , \ h_1(x) \le z \le h_2(x) \ , \ k_1(x,z) \le y \le k_2(x,z)\}$$

أنظر الشكل (3).



شكل 3

فإن تكامل الدالة على المنطقة S يمكن كتابته كما يأتي:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int\limits_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z)dy\ dz\ dx$$

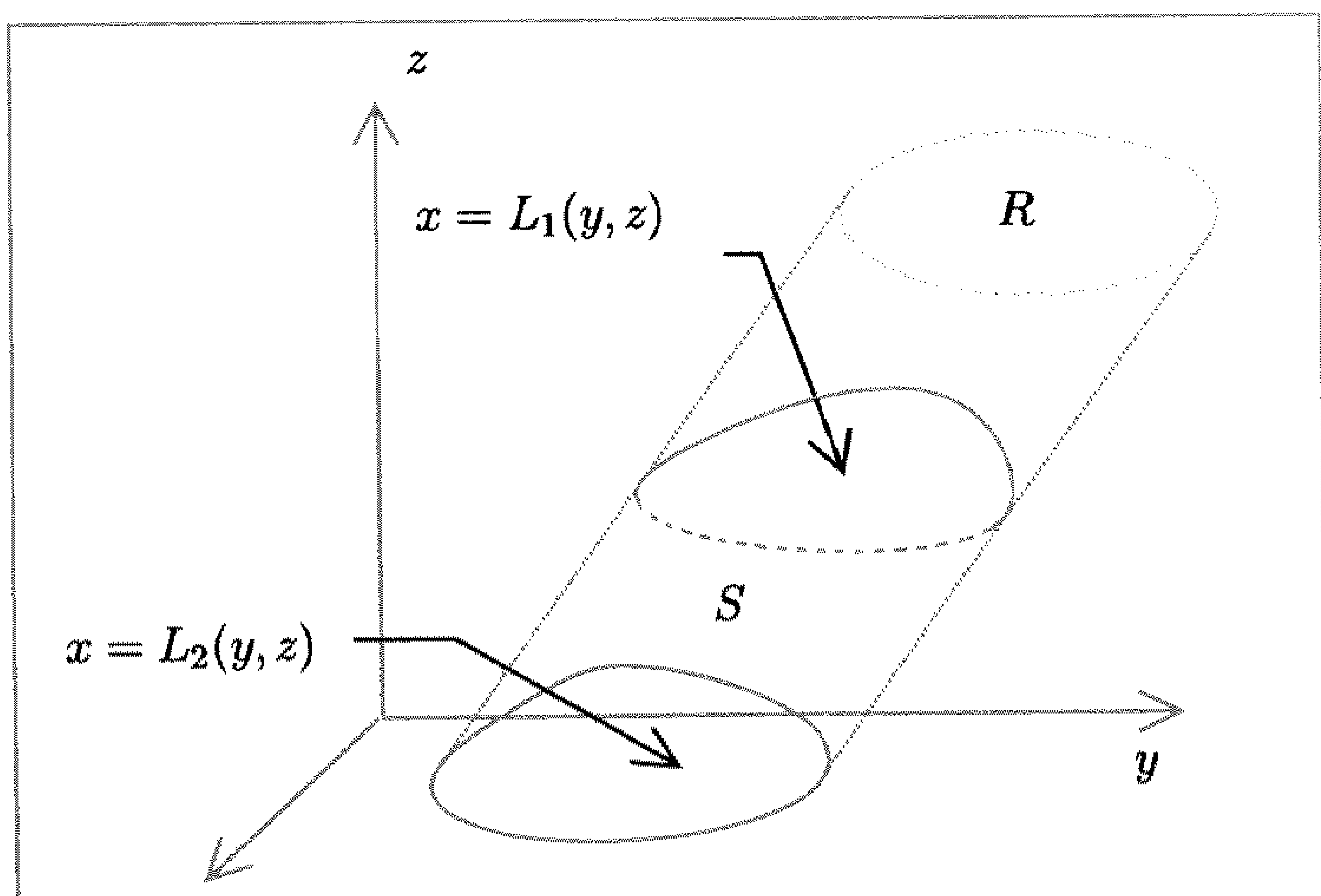
والصورة الأخيرة يمكن تفسيرها بأخذ نهاية مجموع صف من متوازيات السطوح الموازية لمحور y من السطح الأيسر $(y = k_1(x,z))$ إلى السطح الأيمن $(y = k_2(x,z))$ ثم تكامل الدالة المكاملة (Integrand) على المنطقة R في المستوى $x\,z$.

وأخيراً إذا كانت المنطقة S على الصورة التالية:

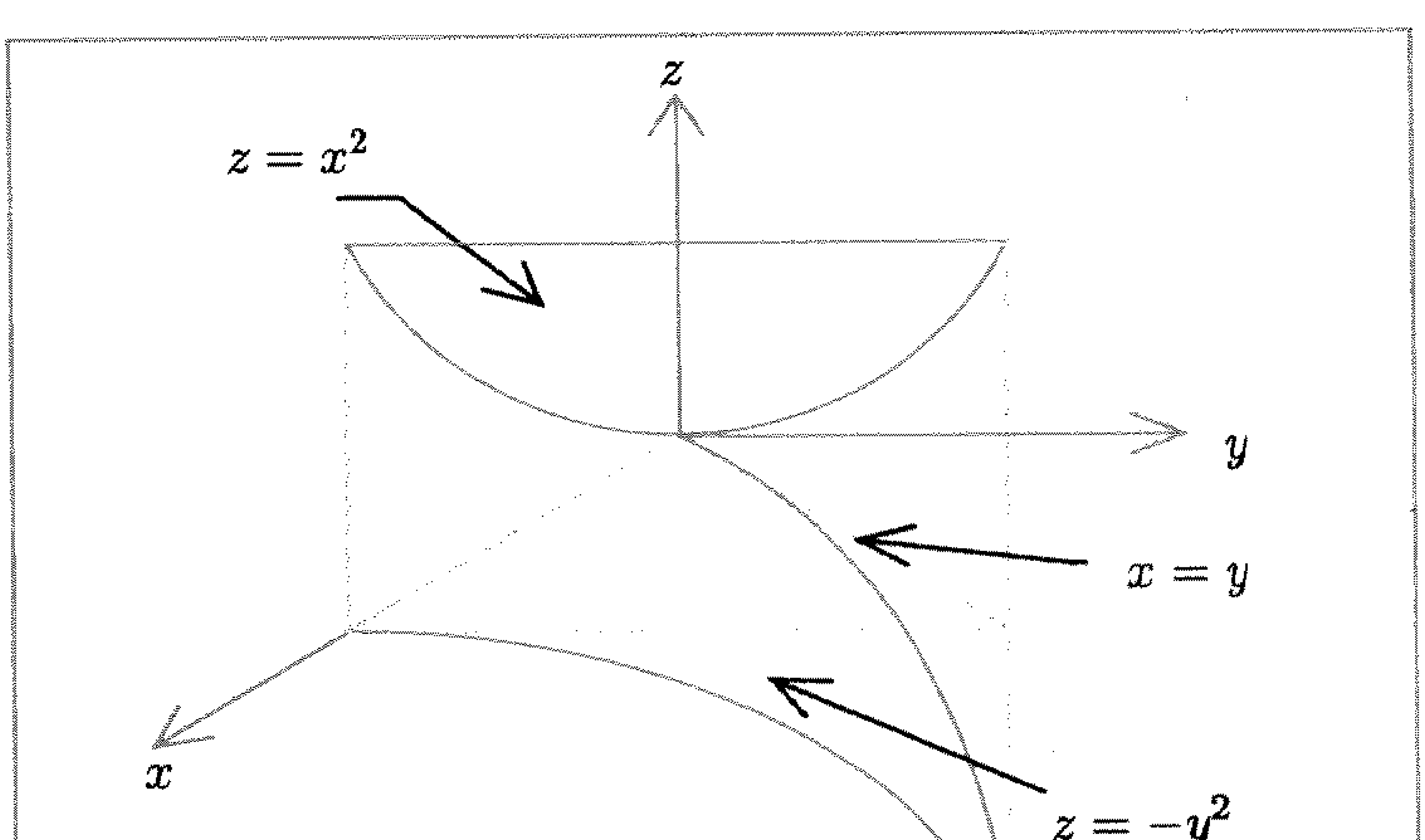
$$S = (x,y,z) : c_1 \le z \le c_2 \ , \ r_1(z) \le z \le r_2(z) \ , \ L_1(y,z) \le x \le L_2(y,z)\}$$

فإن التكامل الثلاثي للدالة f يكتب كما يأتي:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_{c_1}^{c_2}\int_{r_1(z)}^{r_2(z)}\int_{L_1(y,z)}^{L_2(y,z)} f(x,y,z)dx\ dy\ dz$$



شكل 4



شكل 5

مثـــال 1

أوجد قيمة التكامل $I=\iiint\limits_S (x^2-y^2)dv$

حيث أن S المجسم بين السطحين $z=-y^2$ و $z=x^2$ لكل $(x,y)\in R$ و R في المستوى $x\,y$ حيث أن $y=0$ و $y=x$ و $0\le x\le 1$.

الحـــل

من الشكل (5) يمكن كتابة حدود التكامل كما يأتي:

$$I=\int_0^1\int_0^x\int_{-y^2}^{x^2}(x^2-y^2)dz\,dy\,dx$$

ولإيجاد قيمة التكامل الثلاثي نعتبر أولاً المتغيرين y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z أي أن:

$$I=\int_0^1\int_0^x(x^2-y^2)(x^2+y^2)dy\,dx$$

والخطوة الثانية نكامل بالنسبة للمتغير y ونعتبر x ثابتاً:

$$I=\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{5}x^5\right)dx=\int_0^1\left(\frac{4}{5}x^2\right)dx$$

$$=\frac{4}{30}x^6\Big|_0^1=\frac{2}{15}$$

مثـــال 2

أوجد قيمة التكامل

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{sinz}x^2 sin\ y\ dx\ dy\ dz$$

وارسم المجسم S.

الحـــل

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\ siny\Big|_0^{sin\ z}\ dy\ dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3z\ sin\ y\ dy\ dz$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ cos\ y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz$$

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ dz$$

يمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2z)d\ cos\ z$$

وبعد إجراء التكامل بالنسبة لـ $cos\ z$:

$$I=-\frac{1}{3}\left(cos\ z-\frac{1}{3}cos^3z\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[0-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{9}$$

ويترك رسم المجسم كتمرين للقارئ.

مثـــال 3

أوجد قيمة التكامل

$$\iiint_S ye^{xy}dV$$

حيث أن S المكعب المحدد بالمستويات التالية:

$z=0$ و $z=-2$, $y=2$ $y=0$, $x=3$ $x=1$

الحـــل

$$\iiint\limits_S ye^{xy}dV = \int\limits_0^2 \int\limits_1^3 \int\limits_{-2}^0 ye^{xy}dz\, dx\, dy$$

$$= 2\int\limits_0^2 \int\limits_1^3 ye^{xy}dx\, dy$$

$$= \int\limits_0^2 (e^{3y} - e^y)dy$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^6 - 2e^2$$

ملاحظة

يمكن إيجاد التكامل السابق بتغيير ترتيب التكامل (خمس صور مختلفة) ويمكن للقارئ محاولة ذلك علماً بأن النتيجة مطابقة.

مثـــال 4

أوجد قيمة التكامل الثلاثي $\iiint\limits_S x\, dz\, dy\, dx$

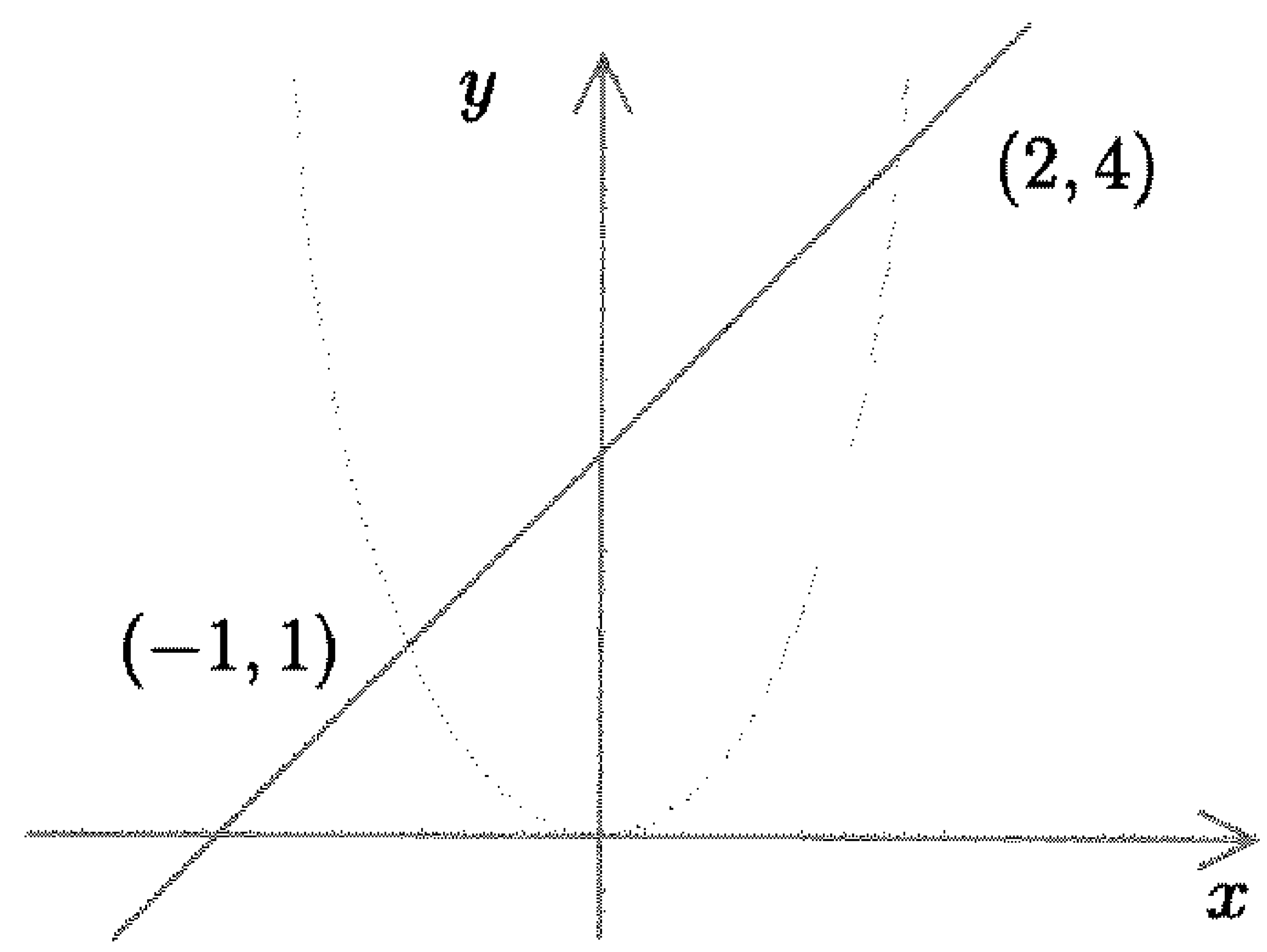
حيث أن S المنطقة المحددة بالسطوح التالية:

$y = x^2$, $y = 2 + x$ $4z = x^2 + y^2$ و $z = x + 3$

الحـــل

لمعرفة حدود التكامل نرسم مسقط المجسم S في المستوى $x\,y$، وهو عبارة عن المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x + 2$ كما هو موضح بالرسم، وبأخذ أي نقطة من السهل معرفة أن المجسم S محدد من أسفل

بـ $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ ومن أعلى بـ $z = x + 3$



شكل 6

وهكذا $$I = \iiint\limits_S x\ dv = \int\limits_{-1}^{2} \int\limits_{x^2}^{x+2} \int\limits_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{x+3} x\ dz\ dy\ dx$$

وعند إجراء عملية التكامل نعتبر y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z في البداية أي أن:

$$I = \int\limits_{-1}^{2} \int\limits_{x^2}^{x+2} \left[x(x+3) - \frac{x}{4}(x^2 + y^2)\right] dy\ dx$$

وعملية التكامل بسيطة ومن السهل أن يبين القارئ أن قيمة هذا التكامل تكون 5.23.

مثال 5

أوجد قيمة التكامل الثلاثي

$$I = \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-z^2}} \int\limits_{0}^{2-z} z\ dx\ dy\ dz$$

الحــل

أولاً نعتبر المتغيرين y و z ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير x

$$I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(x\ z)\Big|_0^{2-z}dy\ dz=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(2z-z^2)dy\ d$$

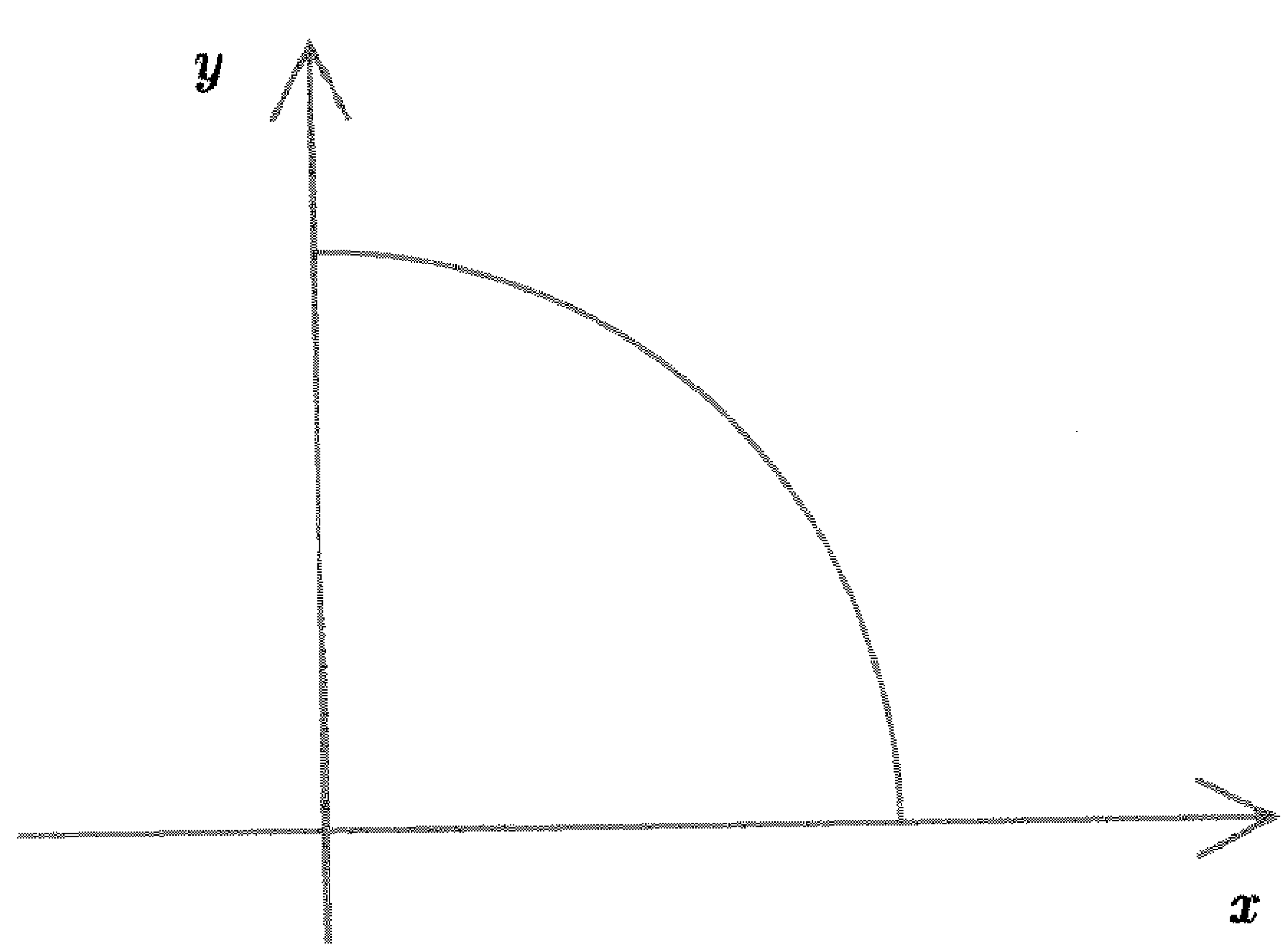
والآن نعتبر z ثابتاً ونكامل بالنسبة للمتغير y، ولتبسيط عملية التكامل نستخدم الإحداثيات القطبية، ولذلك:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2(2rcos\theta-r^2cos^2\theta)r\ dr\ d\theta$$

وبالتكامل بالنسبة لـ r نجد أن:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}r^3cos\theta-\frac{1}{4}r^4cos^2\theta\right)\Big|_0^2 d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}cos\ \theta-4cos^2\theta\right)d\theta$$



شكل 7

وباستخدام المتطابقة $cos^2\theta = \frac{1}{2}(cos2\theta + 1)$ نجد أن:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3}cos\ \theta - 2cos\ 2\theta - 2\right) d\theta$$

$$= \left(\frac{16}{3}sin\ \theta - sin\ 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 0 - \pi\right) = \frac{16 - 3\pi}{3}$$

مثـــال 6

أوجد الحجم الواقع بين السطحين

$$z = 8 - x^2 - y^2 \quad , \quad z = x^2 + 3y^2$$

الحـــل

السطحان يتقاطعان عند الأسطوانة التي قاعدتها قطع ناقص في المستوى $x\ y$

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

أو

$$x^2 + 2y^2 = 4 \Longrightarrow x \pm \sqrt{4 - 2y^2}$$

وعندما $x = 0$ فإن $y = \pm\sqrt{2}$

ولذلك

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dx\ dy$$

وبإجراء عملية التكامل بالنسبة للمتغير x (y ثابت) يمكن أن نبين أن:

$$V = \frac{8}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy$$

وباستخدام التعويض $y = \sqrt{2}\, sin\, \theta$، وهذا يتضمن $dy = \sqrt{2}\, cos\theta d\theta$، نجد أن:

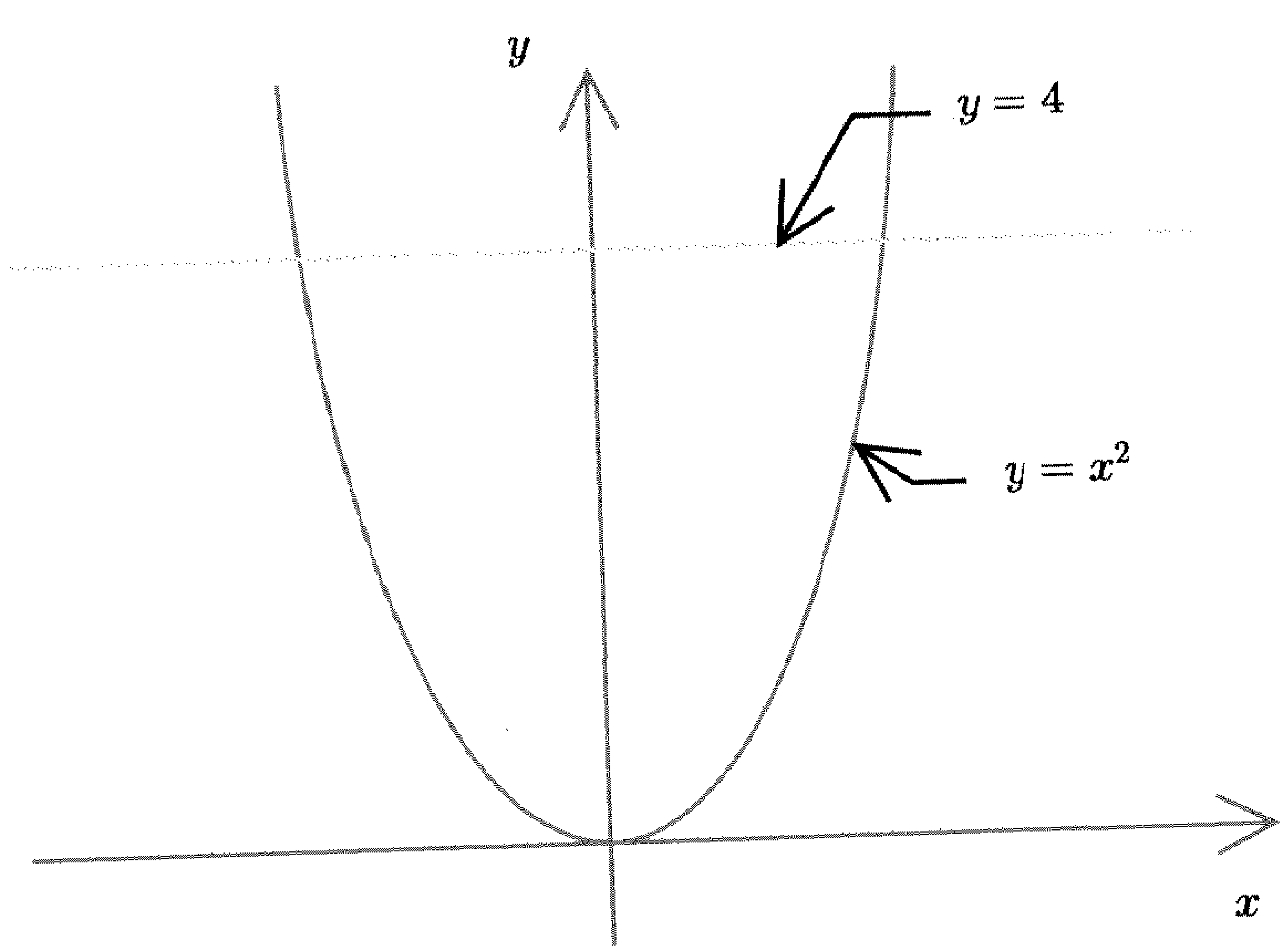
$$V = \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta\, d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\, 2\theta + 1)^2 d\theta$$

ويمكن كتابة التكامل الأخير على الصورة التالية:

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2cos2\theta + \frac{1}{2}(cos\, 4\theta + 1\right)\, d\theta$$

وبعد إجراء التكامل نجد أن:

$$V = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}\pi = 8\sqrt{2}\, \pi = 35.54306351$$



شكل 8

مثـــال 7

أوجد حجم المجسم المحدد بالأسطوانة $y = x^2$ والمستويين $y + z = 4$ ، $z = 0$

الحـــل

لتحديد حدود التكامل، نرسم مسقط المجسم في المستوى $x\,y$، انظر الشكل (8).

واضح أن المستوى $y + z = 4$ فوق المستوى $z = 0$ (المستوى $x\,y$).

ولذلك

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{0}^{4-y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (4-y)dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)dx$$

$$= 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10} = 17.067$$

مثـــال 8

إذا كانت المنطقة Ω معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le y \le x\ ,\ x - y \le z \le x + y\}$$

فأوجد ما يأتي:

أ) حجم المنطقة Ω

ب) $\iiint_{\Omega} 2x^3y^2z\, dV$

جـ) الكتلة الكلية

د) مركز الكتلة

إذا كانت الكثافة $\rho(x,y,z) = x + 2y + 4z$

الحـل

أ) يمكن إيجاد الحجم V كما يلي:

$$V = \iiint_{\Omega} dV$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{2} \int_{x-y}^{x+y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

ب)

$$\iiint_{\Omega} 2x^3y^2z\, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} 2x^3y^2z\, dz\, dy\, dx$$

الباب الأول

1-1 مقـــــــدمـــــــة

المعـادلات التفاضـلية مـن الموضـوعات الهامـة لورودهـا فـي كثيـر العلـوم مثـل الرياضيات البحتة و التطبيقية وفي الطبيعة و الكيمياء وفي كثير من العلوم الهندسية فكثير من مسائل الانحنـاء تعتمد في حلها علي المعادلات التفاضلية وكذلك تذبذب الاجسـام و الذبـذبات الكهربيـة وانتقـال الحـرارة وانتشـار الاجسـام الذائبـة وسـرعة التفاعلات الكيميائية .

2-1 تعريف المعادلات التفاضلية :

نفرض أن y دالـة فـي المتغيـر x وأن $y', y'', ..., y^{(n)}$ المشـتقات التفاضـلية مـن الرتبـة الاولـي و الثانية حتي المشتقة النونية للمتغيـر y بالنسـبة إلـي x فـإن إي علاقـة تـربط بين x, y وأحد المشتقات السابقة تسمي "معادلة تفاضلية عادية" أما إذا كانت y دالـة في اكثر من متغير ولها مشتقات جزئية فإنها تسمي "معادلة تفاضلية جزئيـة " ونـذكر الان بعض الامثلة المختلفة للمعادلات التفاضلية العادية .

$$\frac{d^2y}{dx^2} + w^2 y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} - 5x = \cos 2x \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2yx = 5 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (5)$$

3-1 رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية :

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلي مشتقة موجوده في المعادلة التفاضـلية. **درجـة المعادلـة التفاضـلية** هـي الاس الـذي يرفـع اليـة أعلـي معـاملي تفاضـلي المحـدد لرتبـة المعادلة.

فمثلاً المعادلة (1) هي معادلة من الرتبة الثانية والدرجة الاولي .

والمعادلة (2) من الرتبة الرابعة والدرجة الأولي .

والمعادلة (3) معادلة من الرتبة الثالثة و الدرجة الثانية .

والمعادلة (4)و(5) معادلات تفاضلية جزئية .

4-1 تكوين المعادلة التفاضلية :

يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية نفرض أن لدينا العلاقة

$$f\,(x\,,y\,,c)=0.....................(1)$$

هذه المعادلة تمثل مجموعة المنحنيات المستوية ذات البارامتر الواحد وبتفاضل العلاقة (1) بالنسبة إلي x نحصل علي معادلة تحتوي علي $x\,,y\,,y'\,,c$ ولتكن

$$\phi\left(x\,,y\,,y'\,,c\right)=0............................(2)$$

وبحذف c من (1) ، (2) نحصل علي علاقة في الصورة

$$\psi(x\,,y\,,y')=0.....................(3)$$

و العلاقة (3) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الاولي حصلنا عليها نتيجة لحذف ثابت اختياري واحد وتسمي هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات (1) .

ولتوضيح ذلك نعتبر المثال الاتي

$$y^2=4a\left(x-c\right)$$

حيث c هو بارامتر المجموعة a ثابت مطلق فهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة التي محورها المحور السيني ووترها البؤري العمودي $4a$ بالتفاضل نحصل علي

$$y\,\frac{dy}{dx}=2a$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لمجموعة القطاعات المكافئة.

وفي الحالة العامة اذا اعتبرنا العلاقة

$$f\,(x\,,y\,,c_1,c_2,....,c_n)=0...........................(4)$$

وهذه العلاقة تحتوي علي n من البارامترات $c_1, c_2, ... c_n$ للحصول علي المعادلة التفاضلية المناظرة نفاضل هذه العلاقة n من المرات المتتالية بالنسبة الي x فنحصل علي n من العلاقات في الصورة

$$\left.\begin{aligned}&\phi_1(x\,,y\,,y'\,,c_1,c_2,...c_n)=0\\&\phi_2(x\,,y\,,y'\,,y''\,,c_1,...c_n)=0\\&\phi_n(x\,,y\,,y'\,,.......,y^{(n)},c_1,.....,c_n)=0\end{aligned}\right\}....................(5)$$

من العلاقات (4) ، (5) وعددها $n+1$ يمكن حذف الثوابت $c_1, c_2, ..., c_n$ وتكون النتيجة هي الحصول علي معادلة تفاضلية عادية ورتبتها n علي الصورة

$$f\,(x\,,y\,,y'\,,y''\,,.......,y^{(n)})=0$$

مثال (1) :- كون المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات

$$c_1 x+(y-c_2)^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

الحـــل

حيث ان معادلـة مجموعـة المنحنيـات تحتـوي علـي بـارا متـرين فإننـا نفاضـل مـرتين باعتبار ان

$$c_1+2(y-c_2)y'=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$2y'^2+2(y-c_2)y''=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بحذف c_1 من المعادلة (2) نحصل علي

$$c_1=-2(y-c_2)y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض من (4) في(1) نجد ان

$$-2xy'(y-c_2)+(y-c_2)^2=0 \ldots\ldots\ldots(5)$$

بحذف C_2 من المعادلة (3) نحصل علي

$$y-c_2=-y'^2/y'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

بالتعويض من (6) في (5) نحصل علي المعادلة التفاضلية المطلوب وهي

$$y'+2xy''=0$$

مثال(2):- أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور.

الحـــل

المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور هي

$$x^2=\alpha x+\beta y+c$$

و حيث ان هذه المعادلة تحتوي علي ثلاث ثوابت α,β,C

نفاضل ثلاث مرات متتالية∴

$$2x=\alpha+\beta\frac{dy}{dx},\quad 2=\beta\frac{d^2y}{dx^2},\quad 0=\beta\frac{d^3y}{dx^3}$$

المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

مثال (3) إذا كانت

$$y=ae^{2x}+be^{-x} \ldots\ldots\ldots(1)$$

فاثبت إن

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0$$

الحـــل

بالتفاضل نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} - be^{-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4ae^{2x} + be^{-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بجمع (1) ، (2) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} + y = ae^{2x}$$

وبجمع (2) ، (3) ينتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6ae^{2x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

وهو المطلوب .

5-1 حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية هو عملية الحصول علي الأصل الكامل للمعادلة التفاضلية إي عملية عكس عملية تكوين المعادلة و التي درسناها

ويمكن تقسيم هذه المعادلات من حيث طرق حلها إلي الانواع الاتية :-

1- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال .
2- المعادلات التفاضلية المتجانسة .
3- المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية .
4- المعادلات التفاضلية التامة .
5- المعادلات التفاضلية الخطية .
6- معادلات برنولي .
7- معادلات ريكاتي .

و سوف ندرس كل نوع علي حدة

1-5-1 :- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال .

يمكن كتابة المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات علي الشكل الاتي :-

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$
$$M(y)dx + N(x)dy = 0$$

وهذه يمكن تحويلها إلي المعادلة (1) وذلك بالقسمة علي $N(x)M(y)$ أي أن

$$\frac{dx}{N(x)} + \frac{dy}{M(y)} = 0$$

وهذه يمكن حلها بإجراء التكامل مباشرة

مثال: أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\sqrt{y^2-1}dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0$$

الحــل

بالقسمة علي $\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}$ نحصل علي

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy = 0$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = c$$
$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = c$$

وهي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy^3\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$$

الحــل

نضع المعادلة علي الصورة

$$xy^3\frac{dy}{dx} = (1-x^2) + y^2(1-x^2), \quad xy^3\frac{dy}{dx} = (1-x^2)(1+y^2)$$
$$xy^3dy = (1-x^2)(1+y^2)dx$$

بقسم طرفي المعادلة علي $x(1+y^2)$

$$\frac{y^3}{1+y^2}dy = \frac{1-x^2}{x}dx$$

وبالتكامل نحصل علي

$$\int\frac{y^3}{1+y^2}dy = \int\frac{1-x^2}{x}dx + c, \quad \int(y - \frac{y}{y^2+1})dy = \int\frac{dx}{x} - \int xdx + c$$
$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln x - \frac{x^2}{2} + c, \quad x^2 + y^2 = 2\ln(x\sqrt{y^2+1}) + c$$

وهذا يمثل حل المعادلة التفاضلية

مثال (3) :- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = (8x + 2y + 1)^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

الحل :- بوضع $u = 8x + 2y + 1$
ثم بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل علي

$$u' = 8 + 2y', \quad y' = \frac{1}{2}(u - 8)$$

بالتعويض عن قيمة y' في المعادلة (1) نحصل علي

$$u' - 8 = 2u^2, \qquad \frac{du}{dx} = 2u^2 + 8$$

بالتكامل نحصل علي

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} = 2\int dx + c, \qquad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} = 2x + c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي

$$\tan^{-1}\frac{8x + 2y + 1}{2} = 4x + c$$

2-5-1 المعادلات التفاضلية المتجانسة

يقال للدالة $f(x,y)$ إنها متجانسة من درجة n إذا امكن وضعها علي الصورة

$$f(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad f(x,y) = x^n g(x,y)$$

حيث g دالة للمتغير $\frac{y}{x}$
ويقال للمعادلة التفاضلية الآتية :-

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

انها متجانسة إذا كانت كل من الدالتين $g(x,y), f(x,y)$ متجانسة من نفس الدرجة إي إن

$$f(x,y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad g(x,y) = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

المعادلة السابقة تكون علي الصورة

$$\phi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلي معادلة من النوع الأول أي ذات متغيرات قابلة للانفصال وذلك بفرض أن

$$z = \frac{y}{x}, \qquad y = xz, \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

وبوضع المعادلة (1) علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi(\frac{y}{x})}{\psi(\frac{y}{x})}, \qquad x\frac{dz}{dx}+z=-\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

$$x\frac{dz}{dx}=-\left[z+\frac{\phi(z)}{\psi(z)}\right]$$

وهذه معادلة قابلة للانفصال يمكن حلها كما سبق

مثال (1) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

ويوضع $y=xz$ نجد أن

$$x\frac{dz}{dx}+z=\frac{z^2-1}{2z}, \qquad x\frac{dz}{dx}=-\frac{1+z^2}{2z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2z}{1+z^2}dz, \qquad \ln x+\ln c=-\ln(1+z^2)$$

$$x(1+z^2)=c, \qquad x(1+\frac{y^2}{x^2})=c$$

$$x^2+y^2-cx=0$$

وهي معادلة مجموعة من الدوائر .

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2ye^{\frac{y}{x}}-x)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

الحل :- يمكن كتابة المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{x-2ye^{\frac{y}{x}}}$$

نضع $y=zx$ نجد أن

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z}{1-2ze^z}, \qquad x\frac{dz}{dx}=\frac{2(1+z^2e^z)}{1-2ze^z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-2ze^z}{2(1+z^2e^z)}dz, \qquad 2\ln x=\int\frac{e^{-z}-2z}{e^{-z}+z^2}dz$$

$$2\ln x=-\ln(z^z+e^{-z})+\ln c, \qquad x^2(z^z+e^{-z})=c$$

$$x^2(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{e^x})=c, \qquad y^2+x^2e^{-\frac{y}{x}}=c$$

مثال (3) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y'$$

الحل

$$y' = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y'}{x}$$

نضع $y = zx$ أي إن

$$y' = xz' + z, \qquad xz' + z = \sqrt{1-z^2} + z$$

$$xz' = \sqrt{1-z^2}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin^{-1} z = \ln cx, \qquad y = x \sin \ln cx$$

3-5-1 المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية تكون علي كصورة الآتية

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0.....(1)$$

أو تكتب علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

وهذه المعادلات ذات المعاملات الخطية يمكن تحويلها إلي

1- معادلات متجانسة .

2- معادلات ذات متغيرات قابلة للانفصال .

أولا :- المعادلات ذات المعاملات الخطية والتي يمكن تحويلها إلي معادلات متجانسة .

في هذه الحالة المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يتلاقيان في نقطة ولتكن (α, β) وهذا يعني إن محدد المعاملات لا يساوي الصفر .

نضع

$$x = u + \alpha \ , \ y = y + \beta$$

فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}$$

و المعادلة (1) تصبح :-

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فيمكن حلها كما سبق

ثانيا: معادلات يمكن تحويلها إلي متغيرات منفصلة ففي هذه الحالة يكون محدد المعاملات يساوي الصفر أي أن $a_1b_2 = a_2b_1$ والمستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ , \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يكونان متوازيان ويكون

$$a_1x + b_1y = \alpha(a_2x + b_2y)$$

نضع

$$u = a_1x + b_1y , \qquad \frac{du}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^1}(\frac{du}{dx} - a_1)$$

والمعادلة (1) تصبح

$$\frac{1}{b_1}(\frac{du}{dx} - a_1) = \frac{u + c_1}{\alpha u + c_2}$$

وهذه معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال فيمكن حلها .

مثال (1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$$

الحل :-

نلاحظ أن محدد المعاملات

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

المعادلة يمكن تحويلها إلي معادلة متجانسة

أولا :- نوجد نقطة التقاطع للمستقيمين

$$2x - y + 4 = 0, \quad x - 2y + 5 = 0$$
$$y = 2, \ x = -1$$

باستخدام التعويض

$$x = u - 1 \quad , \quad y = v + 2$$
$$dx = du \quad , \quad dy = dv$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\left(2u - 2 - v - 2 + 4\right) + \left(u - 1 - 2v - 4 + 5\right)du = 0$$

باستخدام التعويض $v = uz$

$$\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}, \qquad (2-z)(z+u\frac{dz}{du}) + (1-2z) = 0$$

$$2z' + 2v\frac{dz}{du} - z^2 - uz\frac{dz}{du} + 1 - 2z = 0, \qquad u(2-z)\frac{dz}{du} = z^2 - 1$$

$$\frac{2-z}{z^2-1}dz = \frac{1}{u}du, \qquad (\frac{1}{2(z-1)} - \frac{3}{2(z+1)})dz = \frac{1}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\ln(z-1) - \frac{3}{2}\ln(z+1) = \ln u + \ln c, \qquad \ln\frac{z-1}{(z+1)^3} = 2\ln cu$$

بالتعويض عن قيم $v\,,u$ نحصل علي

$$\frac{y-x-3}{(y+x-1)^3} = c$$

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx} + x - 2y + 3 = 0$$

الحل :- نلاحظ إن محدد المعاملات يساوي الصفر
نضع

$$x - 2y = u, \qquad 1 - 2\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 - \frac{du}{dx})$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = -\frac{u+3}{2u+5}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{4u+11}{2u+5}$$

$$\int dx = \int\frac{2u+5}{4u+11}du = \frac{1}{2}\int(1 - \frac{1}{4u+11})du$$

$$2x + \frac{c}{4} = u - \frac{1}{4}\log(4u+11), \qquad 8x + c = 4x - 8y - log(4x - 8y + 11)$$

$$4x + 8y + log(4x - 8y + 11) + c = 0$$

4-5-1 المعادلات التفاضلية الكاملة (التامة)

يقال للمعادلة التفاضلية الآتية :-

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

أنها كاملة (تامة) إذا تحققت للدالتين $M\,,N$ المتصلتين العلاقة

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

حيث كل من $\frac{\partial M}{\partial y} , \frac{\partial N}{\partial x}$ دالـة متصـلة وبـذلك يكـون الطـرف الأيسـر للمعادلـة (1) عنصراً تفاضليا تاماً لدالة ما $f\ (x , y)$ بالنسبة للمتغيرين x , y إي أن

$$df\ (x , y) = M\ (x , y)dx\ + N\ (x , y)dy$$

والشرط الضروري و الكافي لذلك هو إن تحقق العلاقة (2) وسوف نثبت

الشرط الضروري : نفرض إن الطرف الأيسر للمعادلة (1) يمثل تفاضلاً تاماً للدالـة $f\ (x , y)$

$$df\ (x , y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\ = M\ (x , y)dx\ + N\ (x , y)dy$$

و بمقارنة المعاملات نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M\ (x , y)\ \ ,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = N\ (x , y)............(3)$$

وبتفاضل العلاقة الأولـي من (3) بالنسبة إلـي y و الثانيـة بالنسبة إلـي x نحصـل علي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبمعنـي ذلـك أنـه إذا كانـت المعادلـة التفاضـلية (1) تامـة فإنـه الشـرط (2) يجـب أن يتحقق إي أن هذا الشرط ضروري .

الشرط الكافي : وبالعكس لا ثبات إن الشرط كافي نفرض إن العلاقة (2) صـحيحة ويكـون المطلـوب أثبـات أن المعادلـة التفاضـلية (1) تكـون تامـة أي أن توجـد دالـة $f\ (x , y)$ وبحيث يكون .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M\ (x , y) \int \frac{\partial f}{\partial y} = N\ (x , y)$$

و العلاقة الأولي في (4) تحقق إذا كان :-

$$f\ (x , y) = \int M\ (x , y)dx\ + \phi(y) = \psi(x , y) + \phi(y)......(5)$$

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية لا تحتوي علي x

وبتفاضل العلاقة (5) بالنسبة إلي y نجد ان

$$\text{N} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \phi'(y)........................(6)$$

ومن العلاقة (6) نحصل علي $\phi(y)$ وذلك بالتكامل بالنسبة إلي y و بالتعويض في العلاقة (5) عن $\phi(y)$ وبذلك تتعين الدالة $f(x,y)$ تاماً وهذا يثبت أن الشرط كافي .

مثال (1) : اثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة و أوجد أصلها التام .

$$(2y^2+4xy-x^2)dx+(2x^2+4xy-y^2)dy=0............(1)$$

الحل : نفرض أن

$$M(x,y)=2y^2+4xy-x^2 \quad , \quad N(x,y)=2x^2+4xy-y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y+4x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+4y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}......................................(2)$$

المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=2y^2+4xy-x^2.................(3)$$

بتكامل المعادلة (3) بالنسبة إلي x

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x3}{3}+\phi(y)......(4)$$

وبتفاضل العلاقة (4) بالنسبة إلي y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=2x^2+4xy-y^2=4xy+2x^2+\phi'(y)$$

$$\phi'(y)=-y^2(y), \qquad \phi(y)=-\frac{y^3}{3}+c$$

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}=c$$

مثال 2 : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(\cos x e^{\sin x}+\sin y\cos x)dx+\cos y\sin x\,dy=0....(1)$$

الحل:- بوضع

$$M = \cos x e^{\sin x} + \sin y \cos x$$
$$N = \sin x \cos y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y \cos x \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x \cos y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بالتالي المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$F(x, y) = c$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = \cos x \; e^{\sin x} + \sin y \cos x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = \sin x \cos y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

بتكامل العلاقة (4) بالنسبة إلي x نحصل علي

$$F(x, y) = -e^{\sin x} + \sin x \sin y + \phi(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

و بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y + \phi'(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

من (7) ، (5) نحصل علي :-

$$\sin x \cos y = \phi'(y) + \sin x \cos y$$
$$\phi'(y) = 0, \qquad \phi(y) = c$$

بالتعويض في المعادلة (6) عن قيم $\phi(y)$

$$F(x, y) = e^{\sin x} + \sin x \sin y + c$$

العوامل المكاملة :-

إذا كانت المعادلة التفاضلية التي من الدرجة الأولى والرتبة الأولى

$$(1) M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

غير تامة أي يكون

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فإن يمكن تحويلها إلي معادلة تامة وذلك بضربها في عامل مكامل M والعامل المكامل M يكون غالبا دالة في (x, y) ولكن الحصول علي العامل المكامل في

الحالة العامة هي مسألة رياضية غير بسيط لذلك سوف نعتبر أن M دالة في y فقط أو M دالة في y فقط .

بضرب المعادلة (1) في العامل المكامل $M\ (x, y)$ لكي تصبح تامة وبذلك يكون

$$\mu(x,y)M\ (x,y)dx+\mu(x,y)N\ (x,y)dy=0..........(2)$$

المعادلة (2) اصبحت تامة إذا يكون

$$\frac{\partial x}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$M\ \frac{\partial \mu}{\partial y}-N\ \frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0..........(3)$$

ومن هذه المعادلة يتعين العامل المكاملة μ كدالة في x, y

أولا : شرط وجود عامل مكامل دالة في x فقط .

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل $\mu=\mu(x)$ وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$N\ \frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),\qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة الأخيرة دالة في x فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن دالة في x فقط .

الشرط الضروري والكافي كي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في x فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في x فقط .

$$\frac{1}{\mu}d\ \mu=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

وبالتكامل يكون

$$\ln\mu(x)=\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx,\qquad \mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

ثانيا : شرط و جود عامل دالة في y فقط .

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل في y وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة هو دالة في y فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن يكون كذلك دالة في y فقط .

الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في y فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في y فقط .

وبتكامل هذه المعادلة

$$\ln\mu(y)=-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy, \qquad \mu(y)=e^{-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$$

وهذه العلاقة تعطي العامل المكامل بصورة صريحة.

مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل :-

$$xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$$

$$M(x,y)=xy^3 \ , \ N(x,y)=x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2 \ , \ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=xy^2$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{y}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في y فقط يتعين من

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة :

$$xy^2dx+\left(x^2y-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

ولإيجاد حل المعادلة التفاضلية (1) نفرض الحل العام لها علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=xy^2 \text{.............................(2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y} \text{.....................(3)}$$

يتكامل المعادلة (2) نحصل علي

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\phi(y) \text{................(4)}$$

ثم نفاضل المعادلة بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y}=x^2y+\phi'(y), \qquad \phi'(y)=\frac{1}{y}$$

$$\phi(y)=\ln y+\ln c$$

بالتعويض في (4) نحصل علي الحل العام

$$f(x, y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\ln cy$$

مثال (2) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1-xy)dx+(xy-x^2)dy=0$$

الحل :

$$M=1-xy \quad , \quad N=xy-x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=y-2x, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x-y, \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{x-y}{x\left(y-x\right)}=-\frac{1}{x}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في x فقط يتعين من

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة .

$$\left(\frac{1-xy}{x}\right)dx+\left(\frac{xy-x^2}{x}\right)dy=0$$

واضح أن حل المعادلة التفاضلية التامة السابقة هو

$$\ln x-xy+\frac{y^2}{2}=c$$

6-5-1 المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كانت y ومشتقاتها التفاضلية بالنسبة إلي x من الدرجة الأولي وغير مضروبة ببعضها وتكون الصورة العامة لها

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

حيث أن $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n, f(x)$ دوال في x

والمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=\phi(x')....................(1)$$

Or

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=\phi(y)........................(2)$$

ولحل هذه المعادلة نقوم بتحويلها إلـي صـورة معادلـة تامـة ويمكـن كتابـة المعادلـة (1)علي الصورة

$$\mu dy+(\mu p(x)y-\mu\phi(x))dx=0\ ....(3)$$

وذلك بضرب المعادلة (1) في عامل مكامل $\mu=\mu(x)$

و المعادلة التفاضلية (3) تكون تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x))=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)p(x)y-\mu(x)\phi(x)\right]$$

ومنها يكون

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu p,\quad \frac{d\mu}{\mu}=pdx,\quad \mu=e^{\int pdx}\ ....(4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل علي الصورة

$$\mu dy+y\,d\mu=\mu\phi dx,\qquad d(\mu y)=\mu\phi dx$$

و بتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\mu y=\int\mu\phi dx+c,\qquad y=\frac{1}{\mu}\int\mu\,\phi\,dx+\frac{c}{\mu}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (1)

وبالمثل يمكن إيجاد حل المعادلة التفاضلية (2) علي الصورة

$$x=\frac{1}{\mu}\int\mu\,\phi\,dy+\frac{c}{\mu}$$

مثال (1) : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$$

الحل :لحل هذا المثال اولاً نوجد عاملاً مكاملاً يعتمد علي x

$$\mu=e^{\int\cot x dx}=\sin x$$

بالتالى الحل العام للمعادلة يصبح علي الصورة

$$\frac{d}{dx}(y\sin x)=\tan x,\qquad y\sin x=\int\tan x dx+c$$

$$y=\operatorname{cosec}x\ \ln\sec x+c\ \operatorname{cosec}x$$

ويمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية:

$$x\frac{dy}{dx}+(x+1)y=3x^2e^x$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+(1+\frac{1}{x})y=3x^2e^x, \qquad \mu=e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}=xe^x$$

$$\frac{d}{dx}(yxe^x)=3x^3e^{2x}, \qquad yxe^x=3\int x^2e^{2x}dx+c$$

$$xy=(x^3+c)e^{-x}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

7-5-1 : معادلة برنولي

هي معادلة تفاضلية تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x)y^n \text{.................}(1)$$

حيث n عدد حقيقي اكبر من 1

لحل هذه المعادلة يتم تحويلها أولاً إلي معادلة خطية وذلك بالقسمة علي y^n

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=Q(x)\text{....................}(2)$$

نضع

$$u=y^{1-n}$$

بالتالى يكون

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}\text{......................}(3)$$

وبالتعويض من (3) في (2) نحصل علي

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+up(x)=Q(x), \qquad \frac{du}{dx}+(1-n)up(x)=(1-n)Q(x)$$

و هذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها كما سبق .

مثال : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=5x^2y^5$$

الحل :

بالقسمة علي y^5 نجد أن

$$y^{-5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y^{-4}=5x^2$$

نفرض أن

$$y^{-4}=u, \qquad -y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}, \qquad -\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-\frac{u}{2x}=5x^2$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{2u}{x}=-20x^2$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية ونوجد أولاً عامل مكامل وهو

$$\mu=e^{\int\frac{2dx}{x}}=x^2, \qquad \frac{d}{dx}(ux^2)=-20x^4$$

$$ux^2=-4x^5+c, \qquad u=-4x^3+\frac{c}{x^2}=\frac{c-4x^5}{x^2}=y^{-4}$$

بالتالى الحل العام للمعادلة هو

$$y^4=\frac{x^2}{c-4x^5}$$

7-5-1 : معادلة ريكاتي

معادلة ريكاتي هي المعادلة التي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+Q(x)y+R(x)\text{..................}(1)$$

حيث R,Q,P دوال في x فقط ويمكن حل هذه المعادلة إلي علم أحد الحلول الخاصة لها $y=y_1$ حيث y_1 دالة في x

وفي هذه الحالة فالأصل التام للمعادلة (1) يعطي بالتعويض

$$y=y_1+\frac{1}{z}$$

حيث أن z دالة في x يمكن ايجادها علي النحو التالي .

حيث أن $y=y_1$ حل للمعادلة (1) يحقق المعادلة (1)

$$\frac{dy_1}{dx}=p(x)y_1^2+Q(x)y_1+R(x)\text{..................}(3)$$

يطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) ينتج أن

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)=p(x)(y^2-y_1^2)+Q(x)(y-y_1)\text{................}(4)$$

من المعادلة (2) نحصل علي

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{z})=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

المعادلة (4) تصبح علي

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(y_1^2+\frac{1}{z^2}+\frac{2y}{z}+y_1^2)p(x)+\frac{1}{z}Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+\left[2y_1p(x)+Q(x)\right]z=-p(x)$$

وهذه معادلة خطية يمكن حلها كما سبق

مثال : اثبت أن $y = 1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(xy - y - x)$$

الحل :

بوضع المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)\,y^2 + (1-2x)\,y + x \quad ....(1)$$

وهذه معادلة تمثل معادلة ريكاتي

بالتعويض $y = 1$ في المعادلة (1) نحصل علي

$$x - 1 + (1-2x) + x = 0$$

ولذلك فإن $y = 1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية

نفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية علي الصورة

$$y = 1 + \frac{1}{z} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل علي :

$$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = (x-1)(1+\frac{1}{z})^2 + (1-2x)(1+\frac{1}{z}) + x$$

$$\frac{dz}{dx} + (x-1)(z+1)^2 + (1-2x)(z^z + z) + z^2 x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + z^2(x - 1 + 2x + x) + z(2x - 2 + 1 - 2x) + x - 1$$

$$\frac{dz}{dx} - z = 1 - x \quad ....(2)$$

وهذه المعادلة معادلة خطية

$$\mu = \bar{e}^{\int dx} = \bar{e}^{x}$$

حل هذه المعادلة هو

$$\frac{d}{dx}(\bar{e}^{x} z) = (1-x)\bar{e}^{x}, \qquad \bar{e}^{x} z = \int (1-x)\bar{e}^{x} + c = x\bar{e}^{x} + c$$

$$z = x + ce^{x}$$

إي أن الحل العام لمعادلة (1) هو

$$\frac{1}{y-1} = x + ce^{x}$$

وهو المطلوب .

تمارين (1)

1-كون المعادلات التفاضلية لمجموعة المنحنيات الآتية :-

$(i)\, y=(x-c)^3 \qquad (ii)\, y=\sin(x+c)$

$(iii)\, x^2+cy^2=2y \qquad (iv)\, y=c(x-2)^2$

$(iiv)\, y=ax^2+be^x \qquad (vi)\, y=ax^3+bx^2+cx$

$(vii)\, y=\alpha\,\mathrm{co}(\ln x)+\beta\sin(\ln x)$

$(viii)\, y=a\{x+\sqrt{x^2-1}\}^n+b\{x-\sqrt{x^2-1}\}^n$

حيث n ثابت مطلق .

$(ix)\quad y=(a+bx)\cosh mx$

حيث m ثابت مطلق .

$(x)\, y=a(\sin^{-1}x)+b(\sin^{-1}x)^2$

$(xi)\, y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

$(xii)\, y=\alpha e^{\beta x}$

$(xiii)\, (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2$

2-أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة التي محورها هو المحور السيني .

3-كون المعادلة التفاضلية للدوائر التي نصف قطرها الواحد الصحيح ومركزها تقع علي المستقيم $y=2x$

4-حل المعادلات التفاضلية الآتية بفصل المتغيرات :

$(i)\, \frac{dy}{dx}=\cos(y-x) \qquad (ii)\, \tan x\,\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\,\cot y\,dy=0$

$(iii)\, x\frac{dy}{dx}-y=y^2 \qquad (iv)\, xy\frac{dy}{dx}=1-x^2$

$(iiv)\, \frac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1} \qquad (v)\, x^2\frac{dy}{dx}+y=a$

$(vi)\, xy^3\frac{dy}{dx}=1-x^2+y^2-x^2y^2$

$(vii)\, x(1-x^2)dy=(x^2-x+1)y\,dx$

$(viii)\, (x+y)^2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=xy\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$

5-حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الآتية :-

$(i)(x+2y)dx - xdy = 0 \quad (ii)xy' = y - xe^{y/x}$

$(iii)xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x} \quad (iv)\ xy' = y\cos(\ln\frac{y}{x})$

$(v)\ xy' - y = x\tan\frac{y}{x} \qquad (vi)(x^2 - 2xy - y^2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 2xy - y^2$

$(vii)(x+y)^2\frac{dy}{dx} = x^2 - 2xy + 5y^2 \quad (viii)x\frac{dy}{dx} = y - x\cos^2(\frac{y}{x})$

6-حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية الآتية :

$(i)y' = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$

$(ii)(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$

$(iii)(x - y - 1) + (y - x + 2)\,y' = 0$

$(iv)(3y - x)\,y' = 3x - y + 4$

$(v)(x - 5y + 5)dy + (5x - y + 1)dx = 0$

$(vi)\ x^2\frac{dy}{dx} = (2x - y + 1)^2$

$(vii)(y + ax + b)\frac{dy}{dx} = y + ax - b$

7-بين أن المعادلات الآتية تامة واوجد الحل العام

$(i)2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy \quad (ii)(2 - 9xy^2)\,x\,dx + (4y^2 - 6x^3)\,y\,dy = 0$

$(iii)(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^3\,y)dy = 0$

$(iv)xdx + ydy = a^2(\frac{xdx - ydy}{x^2 + y^2})$

$(v)(3x^2 + 4x\ y)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$

$(vi)(\cos x - x\cos y)dy - (\sin y + y\sin x)dx = 0$

$(vii)\, e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0 \quad (viii)\, \frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$

$(ix)\, \frac{2x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$

$(x)\,(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x\,dy=0$

$(xi)\,(\frac{x}{\sin y}+2)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$

$(xii)\, \sin x\cos y\,dy+\cos x\sin y\,dx+\cos x\, e^{\sin x}dx=0$

$(xiii)\left[3ax^2+2(a+2h)xy+(b+2h)y^2\right]dx$

$+\left[(a+2h)x^2+2(b+2h)xy+3by^2\right]dy=0$

8- أوجد عامل مكامل يعتمد علي x فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام .

$(i)\,(x^3+y^4)dx+8xy^3dy=0$

$(ii)\,(1-xy)dx+(1-x^2)dy=c$

$(iii)\,(x^3+2y^3-3xy)dx+3x(y^2+x)dy=0$

$(iv)\,(2x^2+xy+a^2)y\,dx+(x+2y)(x^2+a^2)dy=0$

9- أوجد عامل مكامل يعتمد علي y فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام .

$(i)\, xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$

$(ii)\, y^2dx+(xy+1)dy=0$

$(iii)\,(y+1)dx+(xy+y^2+y+1)dy=0$

$(iv)\, dx+\{1+(x+y)\tan y\}dy=0$

10- أوجد الحل العام لكل من المعادلات الخطية الآتية .

$(i)\,(x+1)\frac{dy}{dx}-y=3x^4+4x^5 \quad (ii)\left\{2x\frac{dy}{dx}+y\right\}\sqrt{1+x}=1+2x$

$(iii)\, 2(x^2+x+1)\frac{dy}{dx}+(2x+1)y=8x^2+1$

$(iv)\, 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}-(1+x)y=\sqrt{1-x^2}$

$(v)(1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+(1+x)(1-x^2)y=2$ $(vi)\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$

$(vii)\frac{dy}{dx}\sin x\cos^3 x+y\cos 2x\cos^2 x=0$

10- حول $(viii)\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=y\tan 2x+1+\sec 2x$ $(ix)\frac{dy}{dx}+2y=x^2+3\cosh x$

$(x)\frac{dy}{dx}+2y\operatorname{cosec} 2x=2\cot^2 x\cos 2x$ $(xi)\frac{dy}{dx}\cot x-y=\operatorname{cosec} 2x+\cos 2x$

$(xii)(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x\sin^{-1}x+(1-x)\sqrt{1-x^2}$

المعادلات التفاضلية الآتية إلي معادلات خطية ثم أكمل حلها .

$(i)(xy-y^2)\frac{dy}{dx}=y^2-1$ $(ii)\left\{x\left(\frac{1-y^2}{1ty^2}\right)-1\right\}\frac{dy}{dx}=y$

$(iii)\left\{(2y^2-1)x+y^3\right\}\frac{dy}{dx}=y(1-y^2)^2$ $(iv)\,x\frac{dy}{dx}=4y-4\sqrt{y}$

$(v)2x\frac{dy}{dx}-y=\frac{2x^3-1}{y}$ $(vi)x^3\frac{dy}{dx}=2x^2y+y^3$

$(vii)\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x+y^3=0$

$(viii)2(1+x)y\frac{dy}{dx}+2x-3x^2+y^2=0$

11- أثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)$$

12- اثبت أن $y=\frac{x+1}{x^2}$ حل خاص للمعادلات التفاضلية الآتية واوجد أصلها التام .

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{1}{x4}$$

13- أثبت أن $y=x$ حل خاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام .

$(i)x\frac{dy}{dx}+(n-1)ax^n(y-x)^2+y-2x=0$

$(ii)\frac{dy}{dx}+xy^2-(2x^2+1)y+x^3+x-1=0$

$(iii)(x^2+a)\frac{dy}{dx}+2y^2-3xy-a=0$

الباب الثاني

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا و الحلول الشاذة

درسنا في الباب الأول كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي وفي هذا الباب سوف ندرس كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات الأعلى و المعادلات التي سوف ندرسها هي

(i) معادلات قابلة للحل في p (ii) معادلات قابلة للحل في x

(iii) معادلات قابلة للحل في y

وكذلك سوف ندرس الحلول الشاذة لبعض المعادلات التي من درجة أعلي من الأولي .

1-2 المعادلات القابلة للحل في p

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا هي :-

$$(1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + L_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + ...+ L_{n-1}\frac{dy}{dx} + L_n = 0$$

حيث أن $L_0, L_1, ..., L_n$ دوال في x, y

نفرض أن $p = \frac{dy}{dx}$ بالتالى المعادلة (1) تصبح علي الصورة .

$$L_0P^n + L_1P^{n-1} + L_2P^{n-2} + ... + L_{n-1}P + L_n = 0$$

الطرف الأيسر لهذه المعادلة عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n

فاذا أمكن حلها بالنسبة إلي p علي الصورة .

$$(p - m_1)(p - m_2)......(p - m_n) = 0$$

حيث $m_1, m_2, ..., m_n$ دوال في x, y

و هذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي .

$$p = m_1, \mathrm{p} = m_2, ..., \mathrm{p} = m_n$$
$$i.e.$$
$$\frac{dy}{dx} = m_1(\mathrm{x, y}), \frac{dy}{dx} = m_2(\mathrm{x, y}), ..., \frac{dy}{dx} = m_n(\mathrm{x, y})$$

حلول هذه المعادلات يمكن فرضها علي الصورة

$$f(x, y, c_1) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, c_2) = 0, ..., f_n(x, y, c_n) = 0$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$(3)f_1(x,y,c_1)f_2(x,y,c_2)....f_n(x,y,c_n)=0$$

المعادلة (3) تمثل مجموعات من المنحنيات

$$f_1(x,y,c_1)=0,f_2(x,y,c_2)=0,....,f_n(x,y,c_n)=0$$

إذا استبدلنا $c_1,c_2,...,c_n$ بالثابت الاختياري c ورسمنا المنحنيات

$$f_1(x,y,c)=0,f_2(x,y,c)=0,....,f_n(x,y,c)=0$$

وجعلنا c تتغير من $-\infty$ إلي $+\infty$ فإننا نحصل علي نفس المنحنيات .

الحل العام للمعادلة (1) هو :-

$$f_1(x,y,c)f_2(x,y,c)....f_n(x,y,c)=0$$

وهو يحتوي علي ثابت اختياري واحد لآن المعادلة من الرتبة الأولي .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$(\frac{dy}{dx})^2-2\frac{dy}{dx}\cosh x+1=0$$

الحل :- بوضع $\frac{dy}{dx}=p$

$$p^2-p(e^x+\bar{e}^x)+e^x\bar{e}^x=0$$
$$(p-e^x)(p-\bar{e}^x)=0$$
$$\frac{dy}{dx}=e^x,\frac{dy}{dx}=\bar{e}^x$$
$$y=e^x+c\quad ,y=\bar{e}^x+c$$

الأصل التام للمعادلة هو

$$(y-e^x-c)(y+\bar{e}^x-c)=0$$

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية

(حيث $p=\frac{dy}{dx}$)
$$p^2-(x+y)p+xy=0$$

الحل :- بالتحليل

$$(p-x)(p-y)=0$$

$$p=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x$$

$$y=\frac{1}{2}x^2+c_1$$

$$p=y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y$$

$$y=c_2e^x$$

∴ الحل العام هو :

$$(y-\frac{1}{2}x^2-c)(y-ce^x)=0$$

2-2 المعادلات القابلة للحل في x

المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x تأخذ الصورة

$$(1)\, x=f(y,p) \qquad (\text{حيث } p=\frac{dy}{dx})$$

وبمفاضلة المعادلة (1) بالنسبة إلي y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية في المتغيرين $y\,,p$ فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2)\, y=\psi(p,c)$$

فإنه بالتعويض عن y في المعادلة (1) نحصل علي

$$x=f(p,c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3),(2) وإذا لم يمكن حذف p من المعادلتين فإن المعادلتين(3),(2) تسمي بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1):- حل المعادلة التفاضلية

$$x-y=2ap-ap^2$$

الحل :

$$(1)\, x=y+2ap-ap^2$$

بالتفاضل بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{1}{p} = 1 + (2a - 2ap)\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{1}{p}(1 - p) = 2a(1 - p)\frac{dp}{dy}$$
$$dy = 2ap\, dp$$
$$(2) y = ap^2 + c$$

وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3) x = 2ap + c$$

فلاخط أنه يمكن حذف p من المعادلتين (2) ، (3) وذلك كما يلي

$$p^2 = \frac{y - c}{a} \quad , \quad p = \frac{x - c}{2a}$$
$$\frac{(x - a)}{4a^2} = \frac{y - c}{a}$$
$$(x - c)^2 = 4a(y - c)$$

وهي مجموعة من القطاعات المكافئة

مثال (2):- حل المعادلة التفاضلية

$$x = yp - p^2 \qquad \text{حيث } p = \frac{dy}{dx}$$

الحل :- بالتفاضل بالنسبة إلي y

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{dp}{dy}(y - 2p) = \frac{1}{p} - p$$
$$(y - 2p) = (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp}$$
$$(\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} - y = -2p$$
$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1 - p^2}y = \frac{2p^2}{1 - p^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي . العامل المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{p}{p^2-1}dp} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2-1}dp}$$
$$= e^{\ln\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$
$$\frac{d}{dp}(y\sqrt{p^2-1}) = \frac{-2p}{1-p^2}\sqrt{p^2-1} = \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}$$
$$y\sqrt{p^2-1} = \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp + c$$

ولإيجاد هذا التكامل نستخدم التعويض

$$p = \cosh\theta \qquad dp = \sinh\theta d\theta$$
$$\int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp = \int \frac{2\cosh\theta}{\sinh\theta} \;.\; \sinh\theta d\theta = \int 2\cosh^2\theta d\theta$$
$$= \int (1+\cosh 2\theta)d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$$
$$= \theta + \sinh\theta \cosh\theta$$
$$y\sqrt{p^2-1} = \theta + \sinh\theta\cosh\theta + c$$
$$= \cosh^{-1} p + p\sqrt{p^2-1} + c$$
$$(1)\, y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c)$$

بالتعويض عن y في المعادلة الأصلية نحصل على التالى

$$x = yp - p^2$$
$$= p^2 + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) - p^2$$
$$(2) = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c)$$

المعادلتان (2)،(1) تمثلان الحل البارا متري للمعادلة التفاضلية .

2 -3 المعادلات التفاضلية القابلة للحل في y

المعادلات القابلة للحل في y يمكن كتابتها علي الصورة .

$$(1)\, y' = f(x, p)$$

بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل على

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

وهذه معادلة تفاضلية في x , p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2) x=\phi(p, c)$$

فأنه بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3) y=\psi(p, c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3)،(2) و إذا تغدر الحذف تسمي المعادلتين (3)،(2) بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$(1) y=p+p^{3}$$

الحل :-

بالتفاضل بالنسبة إلي x نجد أن

$$p=\frac{dp}{dx}+3p^{2}\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dx}(1+3p^{2})$$

$$\int dx=\int\frac{1+3p^{2}}{p}dp+c$$

$$(2) x=\ln p+\frac{3}{2}p^{2}+c$$

المعادلتين (2)،(1) تمثل المعادلات البارا مترية للحل .

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) y=xp^{2}+p$$

الحل : بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$p=\frac{dy}{dx}=p^{2}+2xp\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}$$

$$p(1-p)=(2xp+1)\frac{dp}{dx}$$

الحد الأوسط حلها عند الضرب بالتعويض عنها

$$\frac{dx}{dp}-\frac{2}{1-p}x=\frac{1}{p(1-p)}$$

و هذه معادلة خطية .

العامل المكامل لها

$$\mu = e^{\int -\frac{2dp}{1-p}} = e^{2\ln(1-p)} = (1-p)^2$$

$$\frac{d}{dp}[x(1-p)^2] = \frac{1-p}{p}$$

وبالتكامل نحصل علي

$$x(1-p)^2 = \int \frac{1-p}{p} dp + c$$

$$x(1-p)^2 = \ln p - p + c$$

$$(2) x = \frac{\ln p - p + c}{(1-p)^2} + p$$

بالتعويض من (2) عن قيم x في (1) نحصل علي

$$y = \frac{\mathrm{p}^2 \ln p - p^3 + p^2 c}{(1-p)^2} + p$$

$$(3) y = \frac{\mathrm{p}^2 \ln p - p^3 + p^2 c + p(1-p)^2}{(1-p)^2}$$

و المعادلتين (2) ، (3) تمثلان الحل العام في الصورة البارا مترية .

4-2 معادلة كليروت

معادلة كليروت تكون على الصورة

$$(1)\quad y = px + f(p)$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ بالتفاضل بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

اما $\frac{dp}{dx} = 0$ ومنها $p = c$ وبالتعويض فى (1) عن p نحصل على

$$(2) y = cx + f(c)$$

وهى مجموعة معادلة مجموعة من المستويات

واما $x+f'(p)=0$ ومنها

$$(3) x=-f'(p)$$

وبالتعويض في (1) عن x نحصل على

$$(4) y=-f'(p)\,\mathrm{p}+\mathrm{f}\,(\mathrm{p})$$

بحذف p من (4) ، (3) نحصل على علاقة بين (x,y) على الصورة

$$(5)\quad \phi(x,y)=0$$

المعادلة (5) تمثل حل أخر للمعادلة (1) وتكون المعادلتين (4) ، (3) هما المعادلتان البارامتريتان لهذا الحل .

العلاقة (5) لا تحتوى على ثابت اختياري فهى حل خاص وعلى العموم لا يستنتج هذا الحل من الحل العام بوضع قيمة خاصة للثابتان .

الحل الخاص (5) هو "حل شاذ " أو حل "مفرد" والمعادلة (2) تمثل الحل العام وهى معادلة مجموعة من المستقيمات ذات البارامتر c.

لإيجاد معادلة "الغلاف" لهذه المجموعة نفاضل (2) جزئيا بالنسبة إلى c

$$\begin{aligned} y &= cx+f(c) \\ o &= x+f'(c) \\ \mathrm{x} &= -f'(c) \end{aligned}$$

أي أن طريقة إيجاد الحل المفرد هي نفس طريقة إيجاد الغلاف .

مثال(1) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية الأتية :

$$(1)\ \mathrm{y}=xp+ap(1-p)$$

الحل : -

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\,\frac{dp}{dx} + (a - 2ap)\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + a - 2ap) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام للمعادلة هو

$$\mathrm{y} = cx + ac - ac^2$$

أو

$$(2) x + a - 2ap = 0$$

بحذف (p) من المعادلتين (1) ، (2) نجد أن

$$y = \frac{(x + a)^2}{4a}$$

أي أن

$$(x - a)^2 = 4ay$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف مجموعة المستقيمات الممثلة بالحل العام .

مثال (2) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$$

الحل : بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}\frac{dp}{dx}$$

بذلك يكون

$$[x+\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}]\frac{dp}{dx}=0$$

منها يكون اما $\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c$

بالتالى الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$(2)\ \mathrm{y}=\mathrm{xc}+\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

وهى تمثل مجموعة من المستقيمات.

أو

$$(3) x=-\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}$$

بالتعويض من (3) في (1) عن قيمة x نجد أن

$$(4) y=\frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}$$

المعادلتين (3) ، (4) هما المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد وبحذف p بين (3) ، (4) نحصل علي المعادلة الكارتيزية للحل المفرد من (3) نجد أن

$$p^2=(-\frac{a}{x})^{2/3}$$
$$y=-xp^3$$
$$y^{2/3}=(-x)^{2/3}p^2=(-x)^{2/3}[(-\frac{a}{x})^{2/3}-1]$$
$$y^{2/3}=a^{2/3}-(-x)^{2/3}=a^{2/3}-x^{2/3}$$
$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

وهو الحل المفرد للمعادلة التفاضلية وهو غلاف مجموعة المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

مثال (3) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$\sin px\ \cos y = \cos px\ \sin y + p$$

الحل : نكتب المعادلة على الصورة

$$\sin px\ \cos y = \cos px\ \sin y = p$$

$$\sin(\mathrm{px}-\mathrm{y}) = \mathrm{p}$$

$$\mathrm{px}-\mathrm{y} = \sin^{-1} p$$

$$(1) y = xp - \sin^{-1} p$$

وهذه صورة معادلة كليروت .

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}] = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام هو

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$p = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$y = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2-1} - sx^{-1}x$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف المستقيمات .

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

5-2 الحل المفرد (الشاذ) : -

مما سبق رأينا أنه يوجد حل شاذ لمعادلة كليروت

$$(1)\ y = px + f(p)$$

يمكن الحصول علية بحذف p بين هذه المعادلة والعلاقة

$$(2)\ x + f'(p) = 0$$

وناتج حذف p بين (1) ، (2) هو أيضاً ناتج حذف c بين المعادلتين

$$(3)\ y = cx + f(c),$$
$$(4)\ x + f'(c) = 0$$

والعلاقة (4) يمكن الحصول عليها بأجراء التفاضل جزئيا بالنسبة إلى c للمعادلة (3) .

وناتج حذف c هو إذن غلاف مجموعة المستقيمات (3) وعلى هذا فالمعادلة كليروت حل شاذه هو غلاف مجموعه المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

وبصورة عامة إذا اعتبرنا مجموعة لانهائية أحادية من المنحنيات (تحتوى معادلتها على بارامتر واحد فقط) فقد يوجد منحنى ثابت يمسها جميعاً ويسمى غلاف مجموعة المنحنيات المعلومة . فإذا كانت هذه المنحنيات تمثل الأصل التام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى فإن الغلاف يحقق أيضاً هذه المعادلة التفاضلية ويكون حلاً شاذاً لها وذلك لأنه عند أي نقطة (x, y) على الغلاف يوجد منحنى من مجموعة المنحنيات المعلوم يسمى الغلاف عند هذه النقطة وتكون قيم x, y, p عند هذه النقطة واحده للمنحنى والغلاف معاً وتحقق المعادلة التفاضلية أي أن معادلة الغلاف معادلة تحقق المعادلة التفاضلية وتكون حلاً شاذاً لها ولا يحتوى على ثوابت اختيارية ولا يمكن استنتاجه من الحل العام بإعطاء قيم معينة للثابت الاختياري .

وسوف ندرس الأن طرق إيجاد الحل الشاذ لمعادلة تفاضلية من الرتبة الاولى .

1-5-3 المميز c

نعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ومن درجة أعلى من الرتبة الأولى على الصورة

$$f(x , y , p)$$

ونفرض أن الحل العام لها هو :

$$(1)\phi(x , y , c) = 0$$

وبمفاضلة (1) بالنسبة إلى c جزئياً نحصل على

$$(2)\frac{\partial}{\partial c}\phi(x , y , c) = 0$$

وبحذف c بين (1) و (2) نحصل على علاقة بين x , y وتسمى المميز c للمعادلة (1) وسوف نرمز لها بالرمز Δ_c والمعادلة (1) تمثل مجموعة من المنحنيات والمعادلتان .

$$\phi(x , y , c) = 0 \;,\; \phi(x , y , c + h) = 0$$

حيث h مقدار ثابت صغير تمثلان منحنين مجاورين .

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة نرى أنه يمكن كتابة معادلة المنحنى الثاني على الصورة .

$$\phi(x , y , c) + h\frac{\partial}{\partial c}\phi(x , y , c + \theta h) = 0 \quad -|-\theta|-$$

ولإيجاد نقطة تقاطع المنحنين بطرح المعادلتين نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial c}\;\phi(x , y , c + \theta h) = 0$$

فإذا جعلنا h تؤول إلى الصفر نحصل على المعادلة (2) .

وفـى الواقـع أن المجـز c يحتـوى علـى الحـل الهندسـي للوضـع النهـائي لـنقط تقـاطع منحنـين متقـابلين مـن المجموعـة (1) وهـذا يشـمل التعريـف الأول لغـلاف مجموعـة المنحنيات .

وكل هذه الاعتبارات معروفة من دراسات الغلافات .

ولكن المميز c حسب التعريف العام كناتج حذف c بين المعادلتين (1) و (2) قد يحتوى على محال هندسية أخرى غير الغلاف .

في الحالات العادية يتقاطع كل منحنين متجاورين من منحنيات المجموعة (1) في نقطة واحدة وتقع نقط التقاطع على منحنى ee' .

وفـى النهاية عندما يقترب كل منحنين متتالين من بعضهما لانهائياً تقع جميع نقط التقاطع على منحنى EE' يسمى جميع المنحنيات وهو غلاف المنحنيات.

يكون الغلاف حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات أما أذا كان كل منحنى عقده (mode) فإن كل منحنين متجاورين يتقاطعان في ثلاث نقط وتقع نقط التقاطع على ثلاث منحنيات مختلفة aa', ee' كما بالشكل .

وعنـدما تقتـرب المنحنيـات المتجـاورة مـن بعضـها لانهائيـاً فـإن المنحنـين aa', bb' يقتربان من منحنى العقد NN' حيث ينطبقاً علية أما المنحنى ee' فيؤول الى الغلاف المعتاد EE' أي أن المميز c في هذه الحالة يحتوى على منحنى العقد مرفوعاً للفوه الثانية حيث أنه ينتج في النهاية من تطابق منحنين aa', bb' ومنحنى العقد عند أي نقطة عليه يشترك مع منحنى المجموعة المار بهذه النقطة في قيمتي x, y ولكنها لا تشتركان في قيمة الميل p وعلى هذا فمنحنى العقد لا يحقق المعادلة التفاضلية للمنحنيات المعلومة وإذا انكمشت العقد في الحالة السابقة بحيث تصبح نابا(cusp)

فإن المنحنين EE', NN' يقتربان من بعضهما حتى ينطبق مع منحنى الناب cusp ee' (lecus) الذي يظهر حينئذ في المميز c مرفوعاً للقوه الثالث كما بالشكل.

واضح أن قيمة p عند أي نقطة على منحنى الناب لا تساوى ميل المنحنى المار بهذه النقطة وهو إذا ليس حلاً للمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات.

الخلاصة : عند البحث عن الحل الشاذ لمعادلة تفاضلية نوجد المميز c للحل العام لهذه المعادلة والمميز c يحتوى على واحد أو أكثر من

المجالات الهندسية الاتية :

1- الغلاف (مرفوعاً للقوة الأولى)
2- منحنى العقد (مرفوعاً للقوة الثانية)
3- منحنى الناب (مرفوعاً للقوة الثالثة)

ومن هذه المنحنيات يكون الغلاف فقط حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية أي أن المميز c يمكن التعبير عنه في الصورة .

$\triangle_c =$ (الغلاف)^1 x (منحني العقد)^2 x (منحني الناب)^3

ملحوظة :

إذا كان لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى ودرجة أعلى من الأولى

$$(1) f\ (x, y, p) = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على

$$(2) \phi(x, y, c) = 0$$

فإذا اعتبرنا أن (2) على أنها معادلة جبرية في c من الدرجة الثانية أو أعلى فإن المعادلة (2) تمثل الشرط اللازم لكى يكون للمعادلة (1) جزراً مكرراً للبارامتر c

وعلى هذا فالمميز c هو المحل الهندسي للقيم (x, y) التي تجعل للمعادلـة (1) جزراً مكرراً للبارامتر c فإذا كانت المعادلة (2) من الدرجة الثانية في c على الصورة

$$lc^2 + mc + n = 0$$

حيث l, m, n دوال في x, y فإن

$$\Delta_c = m^2 - 4lm = 0$$

وهذا هو الشرط لكى تكون قيمتاً c متساويين .

<u>مثال (1):-</u> أوجد المميز c للمعادلة التفاضلية

$$p^2 (3-4y)^2 = 4(1-y)$$

<u>الحل : -</u>

$$p=\frac{4(1-y)}{(3-4y)^2}$$

$$t\,\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{1-y}}{3-4y}$$

$$dx=\frac{3-4y}{2\sqrt{1-y}}$$

$$\pm(x+c)=\{\frac{3/2-2y}{\sqrt{1-y}}dy$$

$$=\{\frac{-\frac{1}{2}+2(1-y)}{\sqrt{1-y}}dy$$

$$=-\frac{1}{2}\{\frac{1}{1-y}dy+2\{\sqrt{1-y}\;dy$$

$$=\sqrt{1-y}+2\frac{(1-y)^{3/2}}{-3/2}=\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\;(4y-1)$$

$$[\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\;(4y-1)-(x+c)][\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\;(4y-1)+(x+c)]=0$$

$$[\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\;(4y-1)]^2-(x+c)^2=0$$

$$\frac{1}{9}(1-y)(4y-1)^2=(x+c)^2$$

وهى تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية .

وبمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى c

$$2(x+c)=0$$

وبالتعويض عن $x+c$

$$\Delta_c=\frac{1}{9}(1-y)(4y-1)^2$$

$$\Delta_c=EN^2C^2$$

الدالة $1-y$ مرفوعة للقوة الاولى

المنحنى $y=1$ يمثل غلاف المجموعة وهو الحل المفرد .

الدالة $4y-1$ مرفوعة للقوة الثانية

المنحنى $y = \frac{1}{2}$ يمثل منحنى العقد

<u>مثال(2):-</u> أوجد المميز c للمعادلة التفاضلية

$$y = p + \frac{1}{p} e^{x} \quad , \quad p = \frac{dy}{dx}$$

<u>الحل : -</u>

نفاضل هذه المعادلة بالنسبة الى x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^{2}} e^{x} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{p} e^{x}$$

$$p - \frac{1}{p} e^{x} = \frac{dp}{dx} (1 - \frac{1}{p} e^{x})$$

$$\frac{p^{2} - e^{x}}{p} = \frac{p^{2} - e^{x}}{p^{2}}$$

$$\frac{dp}{p} = dx$$

$$\ln p = x + c$$

$$(2) p = ce^{x}$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$(3) y = ce^{x} + \frac{1}{c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

وبوضع

$$\phi(x, y, c) = y - ce^{x} - \frac{1}{c} = 0$$

ومنها يكون

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = -e^{x} + \frac{1}{c} = 0$$

$$(4) e^{x} = \frac{1}{c^{2}}$$

يكون مجز c هو

$$\Delta_c = y - \frac{2}{c} = 0$$
$$y = \frac{4}{c^2} = 4e^x$$

وهو الحل الشاذ للمعادلة التفاضلية وهو يمثل معادلة الغلاف مرفوعاً للقوة الأولى.

2-5-3 المميز p :-

هناك طريقة أخرى للحصول على الحل الشاذ للمعادلة التفاضلية التي من الرتبة الأولى ودرجة أعلى من الأولى مباشرة من المعادلة ذاتها بعد إيجاد الحل العام لها .

نفرض أن المعادلة المعلومة هي

$$(1) f(x, y, p) = 0$$

نفاضل هذه المعادلة جزئياً بالنسبة إلى p نجد أن

$$(2) \frac{\partial f}{\partial p}(x, y, p) = 0$$

وبحذف p بين (1) ، (2) نحصل على ما يسمى بالمميز p للمعادلة التفاضلية وهذا المميز هو المحل الهندسي لنقطة (x, y) التي يكون عندها للميل مع قيمتين متساويتين أو أكثر .

المميز p قد يحتوى على المنحنيات الهندسية الاتية :-

i) الغلاف (مرفوعاً للقوة الأولى)

ii) منحنى التماس (مرفوعاً للقوة الثانية)

iii) منحنى الناب (مرفوعاً للقوة الأولى)

والغلاف فقط هو الذى يحقق المعادلة التفاضلية ويكون في هذه الحالة حلاً شاذاً.

وإذا رمزنا للمجز p بالرمز Δ_p فإن

$$\Delta_p = (\text{الغلاف})^1 \quad (\text{التماس})^2 \quad (\text{الناب})^1$$

ملحوظة :

إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$Lp^2 + MP + N = 0$$

فإن المميز p يكون

$$\Delta_p = M^2 - 4 - N = 0$$

وهو يمثل شرط انطباق جزري المعادلة .

مثال(1) :- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية .

$$(1) 4p^2(x-2) = 1$$

ثم أوجد المميز p ثم أوجد الحل الشاذ .

الحل :

المعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة .

$$p^2 = \frac{1}{4(x-2)}$$

$$p = \pm\frac{1}{2\sqrt{(x-2)}}$$

$$(p + \frac{1}{2\sqrt{(x-2)}})\ (p - \frac{1}{2\sqrt{(x-2)}}) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{2\sqrt{(x-2)}}$$

$$\{dy = \pm\{\frac{dx}{2\sqrt{(x-2)}}$$

$$y = \pm\sqrt{x-2} + c$$

$$(y + \sqrt{x-2} + c)(y - \sqrt{x-2} + c) = 0$$

الحل العام هو

$$(y+c)^2 = x-2$$

ولإيجاد المميز p نلاحظ أن المعادلة (1) هي معادلة من الدرجة الثانية في p .

$$\Delta_p = 16(x-2) = 0$$

ونلاحظ أن $(x-2)$ مرفوعة للقوة الأولى.

$$x = 2$$

وهى معادلة الغلاف وهو الحل المفرد.

<u>مثال (2):-</u> أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر

$$(1) x^2 + y^2 + 2ex + 2c^2 - 1 = 0$$

حيث c هو البارامتر للمجموعة ثم أوجد المميز p وعين الحل المفرد للمعادلة أن وجد.

<u>الحل :</u> بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x

$$2x + 2yp + 2c = 0$$
$$(2) c = -(x+py)$$

التعويض من (2) في (1) نحصل على

$$x^2 + y^2 + 2x(x+py) + 2(\mathrm{x}+\mathrm{py})^2 - 1 = 0$$

أي أن

$$(3) x^2 + y^2 - 2xyp + 2\mathrm{y}^2 p^2 - 1 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في p وتمثل المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر (1)

المميز p هو

$$4x^2y^2 = 8y^2(x^2+y^2-1)$$
$$4\mathrm{y}^2(x^2 + 2\mathrm{y}^2 - 2) = 0$$

ونلاحظ أن المميز p يحتوى على المنحنيات الأتية .

$y = 0$ مرفوعاً للقوة الثانية .

فهو يمثل منحنى الالتحاق (التماس) لمجموعة المنحنيات) والقطع الناقص .

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{10} = 1$$

يمثل أما غلاف المنحنيات أو منحنى الناب لها .

الدوائر ليس لها أنياب.

يكون غلاف المنحنيات .

القطع الناقص يمثل غلاف المجموعة وعلى ذلك فهو الحل المفرد .

6-3 تنزيل (تخفيض) رتبة المعادلة التفاضلية من الرتبة العليا :-

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة العليا هي

$$(1)\ f(x, y, y', y'', \ldots.., y^{(n)}) = 0$$

ولا يوجد حتى الأن طريقة مباشره لحل هذه المعادلة .

وقد عرضنا في الأبواب السابقة طرق لحل حالة خاصة من هذه المعادلات وهى التي تكون فيها المعادلة (1) خطية .

ونلاحظ أنه حتى في هذه الحالة الخاصة لم نستطيع أن نحصل على طريقة مباشره نوجد بها الحل العام لأى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n إلا في الحالات التي تكون فيها المعاملات ثوابت .

وسوف ندرس الأن بعض الحالات للمعادلة (1) التي يمكن فيها باستخدام تعويض مناسب تحويلها الى معادلة تفاضلية أخرى ذات رتبة أقل .

أولا : المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى على y بصورة صريحة الصورة العامة لها هي

$$(1)\ \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}^{(k)}, \mathrm{y}^{(k+1)}, \ldots\ldots, \mathrm{y}^{(n)}) = 0$$

وفى هذه الحالة فإن رتبة المعادلة يمكن أن تؤول الى $n-k$ وذلك بوضع $y^{(k)} = p$ المعادلة (1) تأخذ الصورة :

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, p, p', \ldots\ldots, p^{(n-k)}) = 0$$

وهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة $(n-k)$ في المتغير بين x , p فإذا أمكن حلها على الصورة .

$$p = p(\mathrm{x}, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-k}) = 0$$

وبأجراء التكامل k من المرات لهذا الحل نحصل على الحل العام للمعادلة.

<u>مثال(1)</u> حل المعادلة

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{1}{x}\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

<u>الحل :</u>

$$let\ \ \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dp}{dx}$$

تصبح المعادلة التفاضلية على الصورة

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln p=\ln x+\ln c_1$$

$$p=c_1x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=cx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{c_1}{24}x^4+\frac{c_2}{2}x^2+c_3x+c_4$$

وهذا هو الحل العام .

<u>مثال(2):-</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{dy}{dx})^2-1$$

<u>الحل :</u>

$$let\ \frac{dy}{dx}=p\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$2xp\frac{dp}{dx}=p^2-1$$

$$\frac{pdp}{p^2-1}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(p^2-1)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln c_1$$

$$p^2-1=xc_1$$

$$(\frac{dy}{dx})^2=c_1x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{c_1x+1}$$

$$y=\pm\{\sqrt{c_1x+1}\,dx$$

$$y=\pm\frac{2}{3c_1}(c_1x+1)^{3/2}+c_2$$

$$9c_1^2(y-c_2)^2=4(c_1x+1)^3$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

ثانيا :- المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى x بصورة صريحة هذه المعادلة تكون على الصورة.

$$(1)\ f(y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

وباستخدام التعويض $y' = p$ يمكن تخفيض رتبة المعادلة كما يلى :-

$$\frac{dy}{dx} = p\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\ \cdot\ \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{dy}{dx^3}^3 = \frac{d}{dx}(p\,\frac{dp}{dx}) = p^2\,\frac{d^2p}{dy^2} + (\frac{dp}{dy})p$$

وبالمثل بالنسبة الى باقي المشتقات من الرتب الأعلى وبالتعويض عن قيم $y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}$ فإن المعادلة (1) تصبح على الصورة .

$$\phi(y\ , p\,, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots\ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}) = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-1)$ في المتغيرين $y\ , p$ فإذا أمكن حل المعادلة الأخيرة وإيجاد p كدالة في y فإنه باستخدام الفرض $y' = p$ نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وبحلها نوجد y .

<u>مثال (1):-</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأتية .

$$y\,(y-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 = 0$$

<u>الحل :</u> نضع

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$y(y-1)p\frac{dp}{dy}+p^2=0$$

$$y(y-1)\frac{dp}{dy}+p=0$$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y(y-1)}=-[\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}]dy$$

$$\ln p=\ln\frac{y}{y-1}+\ln c_1$$

$$p=\frac{c_1 y}{y-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{c_1 y}{y-1}$$

$$\int\frac{y-1}{y}dy=\int c_1 dx$$

$$y-\ln y=c_1 x+c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة .

ملحوظة : إذا كانت المعادلة التفاضلية خالية من x, y فإن يمكن حل المعادلة بأخذ أحد التعويضين السابقين. ولكن نلاحظ أن استخدام التعويض $y'=p\ ,\ =p\frac{dp}{dy}$ يكون أسهل في الحل.

مثال(2):- حل المعادلة التفاضلية

$$\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=m\frac{d^2y}{dx^2}$$

الحل : سوف ندرس حل هذه المعادلة باعتبارها معادلة لا تحتوى على x بصورة صريحة (ويترك دراستها باعتبارها معادلة لا تحتوى على y بصورة صريحة كتمرين) . باستخدام التعويض

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$\sqrt{1+p^2} = mp\,\frac{dp}{dy}$$

$$\{\frac{mpdp}{\sqrt{1+p^2}} = \{dy$$

$$m\sqrt{1+p^2} = y + c_1$$

$$1+p^2 = \frac{1}{m^2}(y + c_1)^2$$

$$p^2 = \frac{(y + c_1)^2}{m} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y + c_1)^2 - m^2}}{m^2}$$

$$\{\frac{mdy}{(y + c_1)^2 - m^2} = \{dx + c_2$$

$$m\cosh^{-1}(\frac{y + c_1}{m}) = c_2 + x$$

$$y = m\cosh\frac{x + c_1}{m} - c_1$$

وهو الحل العام .

<u>ثالثا : المعادلة المتجانسة</u>

<u>تعريف :</u> المعادلة التفاضلية تكون متجانسة إذا كانت كل حدودها من نفس البعد

إذا اعتبرنا x , y من البعد الواحد فإن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{dy}{dx}$ من البعد صفر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{1}{\lim}$$

المشتقة $\frac{d^2y}{dx^2}$ من البعد1

وهكذا نلاحظ أن $\frac{d^3y}{dx^3}$ من البعد 2

$\frac{d^n y}{dx^n}$ تكون من البعد $(n-1)$

فمثلاً المعادلة التفاضلية

$$x^2\frac{dy}{dx}+4x^3\frac{d^2y}{dx^2}+2y^2=0$$

هي معادلة متجانسة من البعد 2

والمعادلة التفاضلية

$$(x^2-4xy)\frac{dy}{dx}+8y\frac{dy}{dx}=0$$

هي معادلة متجانسة من البعد1.

<u>ولحل المعادلات المتجانسة نعتبر الحالات الأتية :</u>

(أ) إذا كانت المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الصورة الأتية :

$$\phi(x\frac{dy}{dx},\mathrm{x}^2\frac{d^2y}{dx^2},....,\mathrm{y})=0$$

يمكن حل هذه المعادلة باستخدام التعويض.

$$x=e^t \quad 02 \quad t=\ln x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

وهكذا يمكن إيجاد بقية الحدود وبالتعويض تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\phi(y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},....)=0$$

وهذه المعادلة لا تحتوى على t بصفة صريحة ويمكن حلها باستخدام التعويض .

$$y''=p\frac{dp}{dy} \quad , \quad y'=p$$

وبذلك يمكن تخفيض رتبة المعادلة بمقدار الواحد .

<u>مثال(1):-</u> أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y\,(x^2\frac{d^2y}{dx^2})+(\frac{dy}{dx})^2=3y\,(x\,\frac{dy}{dx})$$

<u>الحل :</u> هذه المعادلة متجانسة وتكون على الصورة

$$f\,(y,x\frac{dy}{dx},x^2\frac{d^2y}{dx^2},...)=0$$

باستخدام التعويض $x=e^t$ نجد أن .

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \;,\; x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$y\,\frac{d^2y}{dt^2}-4y\,\frac{dy}{dt}+(\frac{dy}{dt})^2=0$$

بوضع $\frac{dy}{dt}=p$ L $\frac{d^2y}{dt^2}=p\frac{dp}{dy}$

$$yp\frac{dp}{dy}-4yp+p^2=0$$

$$\frac{dp}{dy}+\frac{1}{y}p=4$$

وهذه معادلة خطية يكون عاملها الكامل هو

$$\mu(y) = e^{\{\frac{1}{y}dy} = y$$

$$\frac{d}{dy}(py) = 4y$$

$$yp = 2y^2 + c_1$$

$$p = 2y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{1}{4}\{\frac{4ydy}{2y^2 + c_1} = \{\mathrm{dt} + \mathrm{c}_2$$

$$\mu\sqrt[4]{2y^2 + c_1} = \ln x + \ln c_2$$

$$\sqrt[4]{2y^2 + c_1} = xc_2$$

$$2y^2 + c_1 = x^4 c_2^4$$

$$y^2 = \frac{x^4 c_2^4}{2} - \frac{c_1}{2}$$

وهو الحل العام

(ب) إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}, x\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

أي تكون هذه المعادلة متجانسة من البعد صفر .

وفى هذه الحالة نضع

$$y = zx, \quad x = e^t$$

فيكون

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}$$

ولكن

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt},$$
$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$
$$(2)\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dt},$$
$$x\frac{d^2y}{dx^2}=2x\frac{dz}{dx}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$=2\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$
$$(3)x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}$$

وبالتعويض عن (2) ، (3) تتحول المعادلة (1) الى الصورة

$$\phi(z,\frac{dz}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},.....)=0$$

وهى معادلة خالية من t ويمكن حلها كما سبق

مثال(2) :- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الأتية

$$(x^2+y^2)(y-xy')+x^2y^2y''=0$$

الحل :- بالقسمة على x^3 نجد أن

$$(1+\frac{y^2}{x^2})(\frac{y}{x}-y')\frac{y^2}{x^2}-xy''=0$$

بوضع

$$y=zx,\ x=e^t$$

تتحول المعادلة التفاضلية الى الصورة

$$(1+z^2)(z-z-\frac{dz}{dt})+z^2(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt})=0$$

$$-\frac{dz}{dt}-z^2\frac{dz}{dt}+z^2\frac{d^2z}{dt^2}+z^2\frac{dz}{dt}=0$$

$$z^2\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dz}{dt}$$

بوضع

$$\frac{dz}{dt}=p \quad , \frac{d^2z}{dt^2}=p\frac{dp}{dz}$$

$$z^2p\frac{dp}{dt}=p$$

$$\int dp=\int\frac{dz}{z^2}$$

$$p=\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{a}=\frac{z-a}{az}$$

$$\int\frac{az\,dz}{z-a}=\int dt$$

$$t.\ln b=a\int[1+\frac{a}{z-a}]dz$$

$$=az+a^2\ln(z-a)$$

$$\mathrm{t}=\mathrm{az}+\mathrm{a}^2\ln(\mathrm{z}-\mathrm{a})+\ln\mathrm{b}$$

$$\ln\mathrm{x}=\mathrm{a}\frac{y}{x}+a^2\ln(\frac{y}{x}-a)+\ln b$$

$$x=b(\frac{y}{x}-a)^{a^2}e^{a\frac{y}{x}}$$

وهو الحل العام

رابعاً: الطرف الأيسر للمعادلة

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',\mathrm{y}'',\ldots..,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هو عبارة عن مشتقة لمقدار تفاضلي ما من الرتبة $(n-1)$ وليكن مثلاً:

$$\phi=\phi(\mathrm{c},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',\ldots..,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هنا يمكن كتابة المعادلة $\frac{d\phi}{dx}=0$ ومنها $\phi=c$

مثال(1) : حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' + y'^2 = 0$$

الحل : هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$d\,(yy') = 0$$

ومنها يكون

$$yy' = c$$
$$y^2 = c_1 x + c_2$$

ملحوظة : أحيانا للحصول على دالة مشتقتها تساوى الطرف الأيسر للمعادلة فإن ذلك لا يتحقق إلا بعد ضرب طرفي المعادلة في دالة ما .

مثال(2) : حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' = y'^2$$

الحل : بالقسمة على yy' نحصل على

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$$
$$\{\frac{y''}{y'} = \{\frac{y'}{y}$$
$$\ln y' = \ln y + \ln c$$
$$y' = yc$$
$$\frac{dy}{dx} = yc$$
$$\frac{dy}{y} = c\,dx$$
$$\ln y = cx + c_1$$
$$y = e^{cx + c_1} = c_1 e^{cx}$$

وهو الحل العام

مثال (3) :- حل المعادلة التفاضلية

$$y'y''' = 2y''^2$$

<u>الحل :</u> بالقسمة على $y'y''$ نحصل على

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}$$

$$\{\frac{y'''}{y''} = 2\{\frac{y''}{y'}$$

$$\ln y'' = 2\ln y' + \ln c$$

$$y'' = cy'^2$$

وبوضع $y' = p$

$$\frac{dp}{dx} = cp^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = cdx \Rightarrow -\frac{1}{p} = cx + c_1$$

$$p = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$y = \frac{1}{c}\ln(cx + c_1) + c_2$$

وهو الحل العام

تمارين (2)

1- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية بحلها بالنسبة إلى p , $\mathrm{p}=\frac{dy}{dx}$

$$(i)\, y^2p^2-3xyp+2x^2=0$$
$$(ii)\, p^2-(xy+2x)p+2x^2y=0$$
$$(iii)\, p^2-p-6=0$$
$$(iv)\, p^3-p(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)=0$$
$$(v)\, p^2-2\cos x-1=0$$
$$(vi)\, x+yp^2=p(1+xy)$$

2- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في x:

$$(i)\, x=4p+4p^3$$
$$(ii)\, p^2-2xp+1=0$$
$$(iii)\, 2y+p^2+2p=2x(p+1)$$
$$(iv)\, p=\tan(x-\frac{p}{1+p^2})$$
$$(v)\, p^3-p(y+3)+x=0$$

3- أوجد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في y:

$(i)\ y = xp^2 + p$
$(ii)\ y = x + p^3$
$(iii)\ p^2 + p = e$
$(iv)\ y = p\sin p + \cos p$
$(v)\ y = p\tan p + \log\cos p$
$(vi)\ e^{p-y} = p^2 - 1$

4- أوجد الحل العام والحل المفرد لمعادلة كليروت التفاضلية لكل من المعادلات الآتية :

$(i)\ y = xp + p^2$
$(ii)\ y = xp + p^3$
$(iii)\ y = xp + \cos p$
$(iv)\ y = x\ p + \sqrt{a^2p^2 + b^2}$
$(v)\ p = \log(xp - y)$
$(vi)\ \cosh xp \cosh y = \sinh px \sinh y + p$
$(vii)\ y = xp + \dfrac{p}{p+1}$
$(viii)\ y = xp + \sqrt{p^2 - 1}$
$(ix)\ y = xp + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$
$(x)\ y = xp + \sqrt{p^2+1} - p\log(p + \sqrt{p^2+1})$

5- أوجد المميز c للمعادلات التفاضلية الأتية وبين المنحنيات التي يمثلها الحل الشاذ (أن وجد)

$(i)(x^2 - 1)p^2 - 2xyp - x^2 = 0$
$(ii)2y^2p^2 + 2xyp + x^2 + y^2 - 1 = 0$
$(iii)p^2(x^2 - 1) - (y^2 - 1) = 0$

6- أوجد المميز p للمعادلات التفاضلية الأتية وبين المنحنيات التي يمثلها مبينا الحل الشاذ (أن وجد) ثم أوجد الحل العام

رياضيات تطبيقية ٢

أ.د مهدى

الفرقة الأولي

كلـــــية التربية
شعبة الرياضيات

الحركـــة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، ثم حركة جسيم في مســـتوى ثم تناولنا في الباب الذي يليه حركة المقذوفات وهي نوع مـــن أنـــواع الحركـــة في المســـتوى وسنتعرف بمشيئة الله في هذا الباب على نوع له أهميه من أنواع الحركة تُســـمى " الحركـــة التوافقية البسيطة " أو الحركة الموجية. إذا تحرك جسيم متذبذباً حول موضع اتزانـــه (وهـــو الوضع الذي إذا زُحزح الجسيم عنه وهو متزن عاد إليه مرةً أخرى) سُميت حركة الجســـيم بالحركة الاهتزازية أو الحركة الدورية وهناك أنواع مختلفة من الإهتزازات منها

♦الإهتزاز الحر أو الحركة التوافقية البسيطة وهى ما سندرسه بالتفصيل.

♦الإهتزاز القسري إذا أثرت قوة قاسرة دورية على جسيم يُقال أن الحركة إهتزاز قسري.

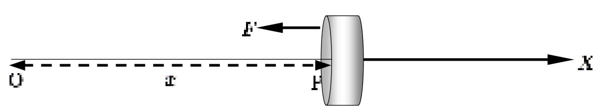
♦الإهتزاز المخمد الحر وفيها يكون الجسيم لقوة مقاومة مثل الاحتكاك والتي تجعـــل ســـعة الذبذبة تتناقص تدريجياً حتى تنعدم ومن ثم يتوقف الجسيم عن الحركة.

♦الإهتزاز القسري المخمد وهذه الحالة تمثل الحالتين السابقتين معاً وفيها يتلاشى تأثير المقاومة تدريجياً مع الزمن ويتبقى تأثير الذبذبة القسرية.

الإهتزاز الحر يُقال أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة وفيها يتحرك الجسيم متذبـــذباً حول موضع اتزانه دون أن تتغير سعة الذبذبة أو الزمن الدوري لها كما أن القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً تتجه نحو نقطة ثابتة أثناء الحركة ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناســـب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تُسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفـــرض أن O هـــي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذي سيمثله المحور OX وأن موضع الجسيم عند اللحظة t هو P حيث $\mathrm{OP} = x$ كما بالشكل. من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = k/m \qquad ....(1)$$



والاشارة السالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الذبذبة ولإيجاد سرعة الجسيم عند أي موضع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad ....(2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج أن $v\dfrac{dv}{dx} = -\omega^2 x$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$v^2 = c_1 - \omega^2 x^2 \qquad ....(3)$$

حيث c_1 هو ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج إلى شروط أبتدائية ولذلك سنعتبر أن أقصى مسافة للجسيم هي a والتي عندها يسكن الجسيم (أي أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c_1 = \omega^2 a^2$ وتُكتب المعادلة (3) في الصورة

$$v^2 = \omega^2 a^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 \ a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad .....(4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الأشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه الموجب (أي في اتجاه OX – تزايد x) وسنعتبر الأشارة السالبة إذا كان الجسيم متحركاً في الاتجاه المضاد.

والآن لمعرفة موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية نضع $v = dx/dt$ في المعادلة (4) (على اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \omega dt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad ....(5a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل ويُسمى " زاوية الطور " ويُعيّن من الشروط الأبتدائية للحركة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$x = a\sin \ \omega t + \epsilon \qquad ......(5b)$$

وهذه المعادلة تُمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالة الأشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $|\sin\ \omega t+\epsilon\ |\le 1$ ومن المعادلة (5 b) يكون

$$|x| = |a\sin\ \omega t+\epsilon\ | = |a||\sin\ \omega t+\epsilon\ | \le a \qquad \Rightarrow -a \le x \le a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x=a$ ، $x=-a$ لذلك فإن a تُسمى سعة الحركة التوافقية.

كما يمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x=\pm a$ ، كما تكون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x=0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x و $-x$ متساوٍ.

■ الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية البسيطة هي حركة تذبذبية ، ومن ثم فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويُعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من أحد أطراف الذبذبة $x=+a$ إلى الطرف الآخر $x=-a$ ثم العودة مرة أخرى $x=+a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبةً كاملةً وحيث أن

$$\begin{aligned} x = a\sin(\omega t+\epsilon) &= a\sin(\omega t+\epsilon+2\pi) \\ &= a\sin\left(\omega\underbrace{\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'}+\epsilon\right) \\ &= a\sin(\omega t'+\epsilon), \qquad\qquad \left(t' = t+\frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned}$$

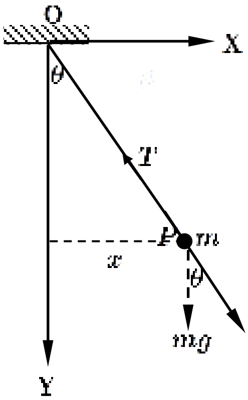
أي أن x عند الزمن t هي نفسها عند الزمن $t' = t+\frac{2\pi}{\omega}$ و ذلك يعني أن الجسيم يعود إلى وضعه الأول بعد زمن $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ و هو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري).

و لأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن و هو ما يُعرف بالتردد.

■ التردد Frequency

يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) وسنرمز له بالرمز ν وهو مقلوب الزمن الدوري أي أن $\nu = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طرف خيط غير مرن (ساق خفيفة) طولها L مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طول الخيط L . حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومن قانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في الاتجاه الأفقي OX هى (بتحليل قوة الشد) بفرض أن $\angle \mathrm{YOP} = \theta$

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ddot{x} = -T\frac{x}{L}$$

وحيث أن θ صغيرة جداً فيمكن اعتبار أن الحركة هي حركة أفقية فقط أي أن $T\cos\theta = mg$ ومن ثم تصبح المعادلة السابقة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L\cos\theta}$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\cos\theta \cong 1$ ومن ثم تؤول المعادلة السابقة إلى الصورة

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -\frac{g}{L}\,x$$

هذه المعادلة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من – حيث – $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

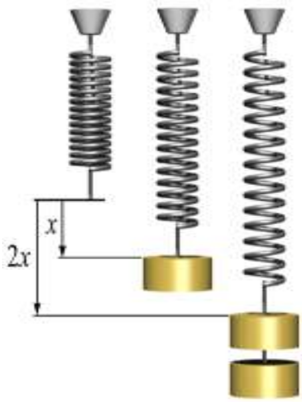
و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـ " بندول الثواني ".

■ قانون هوك Hooke's Law

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب تناسباً طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. الصيغة الرياضية لهذا القانون هي $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه و عدد لفاته إلى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell}x$$

حيث λ ثابت يُسمى معامل المرونة للخيط و الزنبرك ، x مُثل الأستطالة الحادثة ، ℓ لطول الطبيعي للخيط ، T وة الشد الناشئة في الخيط. (الأستطالة الحادثة هي الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي).



كما ذكرنا ما يسري على الخيط المرن يسري على الزنبركات في حالة الأستطالة فقط أما في حالة الأنضغاط فتختفي القوة الناشئة في الخيط خلافاً لحالة الزنبرك و هذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم اغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ فاثبت أن حركة هذا الجسيم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها والزمن الدوري لها.

الحـــــــل

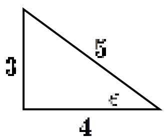
حيث أن موضع الجسيم يتعين من $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = -6\sin 2t + 8\cos 2t, \qquad \text{again differentiating} \quad \therefore \ddot{x} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$$

$$\text{Or} \quad \therefore \ddot{x} = -4(\underbrace{3\cos 2t + 4\sin 2t}_{x}) = -2^2 x$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $\omega = 2$ حيث أن العجلة تتناسب مع المسافة و زمنها الدوري τ يتعين من $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ وسعة الحركة يمكن الحصول عليه كالآتي

$$3\cos 2t + 4\sin 2t = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\sin 2t\right)$$
$$= 5\ \ \sin\epsilon\, cos 2t + \cos\epsilon \sin 2t \ = 5\sin(2t+\epsilon)$$



ومن ثم فإن سعة الذبذبة هي 5

مثـــ ٢ ـــال

إذا تعينـــت ســـرعة نقطـــة ماديـــة تتحـــرك في خـــط مســـتقيم مـــن العلاقـــة $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ فاثبت أن حركة هذه النقطة هي حركـــة توافقيـــة بســـيطة وأوجد سعتها والزمن اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$.

الحـــــــل

حيث أن $v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2)$ و باجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير x ينتج أن

$$v^2 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \Rightarrow 2v\frac{dv}{dx} = n^2(4b - 2x) \quad \text{Or}$$

$$\underbrace{v\frac{dv}{dx}}_{\text{accel}} = -n^2(x - 2b) \qquad \text{Or} \qquad \ddot{x} = -n^2(x - 2b)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها مركز الذبذبة $4b$ و $n = \omega$

(توضيح: بوضع $y = x - 2b$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -n^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = 2b$).

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v = 0$ ومنها

$$0 = n^2(8bx - x^2 - 12b^2) \quad \Rightarrow (x-2b)(x-6b) = 0 \quad \text{i.e.} \;\; x = 2b, \; x = 6b$$

وهذه القيم تمثل أطراف الذبذبة ومن ثم فتكون سعة الذبذبة هي $2b$ والزمن T اللازم للحركة من $4b$ إلى $6b$ يمثل ربع الزمن الدوري أي أن

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \because T = \frac{1}{4}\tau \qquad \Rightarrow T = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u, u' سرعتي الجسيم على بعدين b, b' من مركز الذبذبة على الترتيب. أوجد الزمن الدورى لها.

الحــــــــل

حيث أن السرعة لجسيم يتحرك حركة توافقية هي $v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ حيث أن سعة الحركة هي a وعند الموضعين المذكورين يكون

$$u^2 = w^2(a^2 - b^2), \qquad u'^2 = w^2(a^2 - b'^2)$$

من العلاقتين نحصل على – بالطرح –

$$u'^2 - u^2 = w^2(b^2 - b'^2), \qquad Or \qquad \omega^2 = \frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{u'^2 - u^2}{b^2 - b'^2}}$$

ومن ثم يكون الزمن الدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b^2 - b'^2}{u'^2 - u^2}}$ وهو المطلوب

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم بحيث أن موضعه يتعين من $x = \mu - \mu\cos 2t$ حيث μ ثابت فاثبـــت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة واوجد زمنها الدوري ومركزها.

الحـــــــل

حيث أن موضع الجسيم المتحرك $x = \mu - \mu\cos 2t$ وبالتفاضل مرتين للحصـــول علـــى العجلة نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\sin 2t \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\underbrace{\mu\cos 2t}_{\mu - x} = 4(\mu - x) = -4(x - \mu)$$

وهي معادلـــة حركـــة توافقيـــة بســـيطة مركزهـــا النقطـــة $x = \mu$ وزمنـــها الـــدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ حيث $\omega = 2$.

(توضيح: بوضع $y = x - \mu$ فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة $\ddot{y} = -2^2 y$ وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عند النقطة $y = 0$ أي عند $x = \mu$).

(على الدارس ايجاد سعة الذبذبة).

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة اثناء جزء من الحركة – مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الذبذبة – هي X_1, X_2, X_3 عند نهايات ثلاث ثوانٍ متتالية عيّن الزمن الدوري للحركة.

الحـــــــل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركة التوافقيـــة البســـيطة هـــي $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$ و سنفرض أن زمن وصول الجسيم إلى الموضع X_1 هو t وبالتالي زمن وصوله إلى الموضع X_2 هو $t + 1$ وزمن وصوله إلى الموضع X_3 هو $t + 2$ ويكون

$$\begin{aligned} X_1 &= a\sin(\omega t + \epsilon) \\ X_2 &= a\sin(\omega(t+1) + \epsilon) \\ X_3 &= a\sin(\omega(t+2) + \epsilon) \end{aligned}$$

من المعادلات السابقة – بجمع الأولى والثالثة – ينتج أن

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= a \quad \sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon) \\ &= 2\underbrace{a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{X_2}\cos\omega \\ &= 2X_2\cos\omega \end{aligned}$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$\because X_1 + X_3 = 2X_2\cos\omega$$

$$\Rightarrow \cos\omega = \frac{X_1 + X_3}{2X_2}$$

$$\text{Or} \qquad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)$$

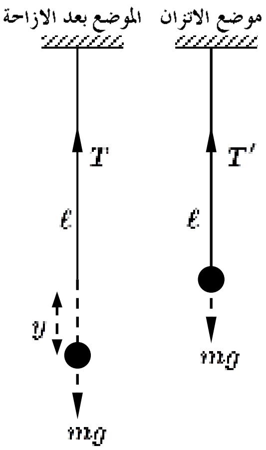
وحيث أن الزمن الدوري يُعطى بالعلاقة $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وبالتعويض عن قيمة ω يكون

$\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{X_1 + X_3}{2X_2}\right)}$ و يجب أن يتحقق الشرط $-2X_2 \le X_1 + X_3 \le 2X_2$

مثال ٦

عُلق جسيم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زحزح الجسيم من موضع اتزانه مسافةً رأسيةً صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبةً في الثانية. فإذا كان طول الخيط عند موضع الاتزان هو ℓ. اوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الاستطالة مساويةً للطول الطبيعي هو $m(4\pi^2n^2\ell - g)$.

الحل



حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الاتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط (قبل تعليق الكتلة m) و أن T' هو قيمة الشد في الخيط عند الاتزان ، في حالة الاتزان تؤثر على الكتلة قوتا الوزن والشد في الخيط فقط ومن قانون هوك يكون

$$mg = T' = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \qquad (1)$$

إذا أعطينا الكتلة ازاحة y بعيدا عن موضع اتزانها في هذه الحالة فإن معادلة حركة الكتلة هي

$$m\ddot{y} = mg - T \qquad (2)$$

حيث T هو الشد في الخيط و يساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$ وبالتعويض عن قيمة الشد في المعادلة (2) و باستخدام المعادلة (1)

$$\therefore m\ddot{y} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + y - \ell_0)$$
$$= \cancel{mg} - \underbrace{\frac{\lambda}{\cancel{\ell_0}}(\cancel{\ell - \ell_0})}_{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0}y = -\frac{\lambda}{\ell_0}y$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{\lambda}{\ell_0 m}x = -w^2 x, \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$$

المعادلة الاخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 m}{\lambda}}$ و التردد يتعين من $\therefore n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\ell_0 m}}$ $\nu = \frac{1}{\tau}$ و نجد من هذه العلاقة $\frac{\lambda}{\ell_0} = m\ {}^2 2\pi n$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$\cancel{m}g = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4\pi^2 n^2 \cancel{m}(\ell - \ell_0)$$

$$\therefore \ell - \ell_0 = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \ \text{ Or } \ \ell_0 = \ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$

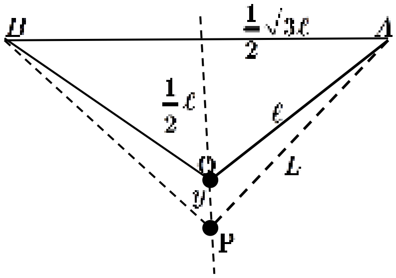
وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعيين قيمة الشد حينما تكون الاستطالة مساوية للطول الطبيعي من قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4\pi^2 n^2 m \ell_0 = 4\pi^2 n^2 m\left(\ell - \frac{g}{4\pi^2 n^2}\right) = m \ \ 4\pi^2 n^2 \ell - g$$

مثـــ ٦ ـــال

عُلق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن c مثبت طرفاه في نقطتين A, B يقعان في مستوى أفقي واحد. و في وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية 60^0 مع الرأسي و يكون طول كل منهما ℓ ، معامل مرونة الخيط يساوي mg . فإذا زحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي و ترك ليتذبذب. اوجد زمن الذبذبة.

الحـــــل



باعتبار أن λ هو معامل المرونة للخيط حيث $\lambda = mg$ و بفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط ومن ثم فعند حالة الاتزان يكون الشد من قانون هوك

$$mg = 2\lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\cos 60^0 = \lambda \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

ولكن $\lambda = mg$ ومن ثم $\ell_0 = \frac{1}{2}\ell$

باعتبار أن y يمثل المسافة الرأسية و L هو هو طول الخيط بعد الازاحة كما بالشكل

ومن ثم بكتابة معادلة الحركة الرأسية للكتلة يكون

$$m\ddot{y} = mg - 2\lambda \frac{L - \ell_0}{\ell_0}\cos\angle\mathrm{OPA}$$

حيث P موضع الجسيم عند اللحظة t، O هو موضع الاتزان وعند موضع عام حيث

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB} = L$ هو طول الخيط والآن

$$L^2 = \left(y + \frac{1}{2}\ell\right)^2 + \frac{3}{4}\ell^2 = \ell^2 + \ell y + y^2$$

ومن ثم
$$L = \ell\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)^{1/2} = \ell + \frac{1}{2}y$$

حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية فأعلى وايضاً

$$\cos\angle\mathrm{OPA} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{L} = \frac{\frac{1}{2}\ell + y}{\ell + \frac{1}{2}y}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{2\ell}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

لأول قوة حيث أهملت الحدود من الدرجة الثانية

$$m\ddot{y} = mg - \frac{2\lambda\left(\ell + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\ell\right)}{\frac{1}{2}\ell} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

وهذا
$$\ddot{y} = g - g\left(1 + \frac{y}{\ell}\right)\left(1 + \frac{3y}{2\ell}\right)$$

أو
$$\ddot{y} = -\frac{5g}{2\ell}y$$

والاخيرة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $2\pi\sqrt{2\ell / 5g}$

■ مســـــائل Problems ■

الحركة الدفعية وتصادم الاجسام

Impulse and Collision Motion

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وسنتعرف بمشيئة الله تعالى في هذا الباب على نوع من أنواع الحركة تُسمى " الحركة الدفعية ".

■ الدفع وقانون الحركة

إذا بدأنا بقانون نيوتن الثاني للحركة معوضين عـــن العجلـــة بصـــورتها $a = \frac{dv}{dt}$ يكـــون $F = m\frac{dv}{dt}$ وبضرب طرفي هذه العلاقة في dt وتكاملها بين اللحظتين t_1, t_2 حيث سرعة الجسيم عندهما v_1, v_2 فإن

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv = mv\Big|_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1$$

يُعرف التكامل الزمني للقوة F بين اللحظتين t_1, t_2 والوارد بالطرف الأيسر للمعادلة السابقة ب دفع القوة خلال الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ ويرمز له بالرمز $\underline{I}$ اختصاراً لكلمة **Impulse** أي أن $\int_{t_1}^{t_2} F dt = \underline{I}$. ودفع أي قوة هو متجه ينطبق عليها نظراً لأن الزمن كمية قياسية.

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة

ينص هذا المبدأ على أن كمية الحركة mv في اتجاه خط التصادم (في حالة الكرات يكون خط المركزين) ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ قانون نيوتن التجريبي Experimental Newton's Law

في اتجاه خط المركزين تخضع لقاعدة نيوتن التجريبية والتي تنص على أن الســـرعة النســـبية للجسمين بعد التصادم تساوي معكوس السرعة النسبية لهما قبل التصادم مضروباً في معامـــل الأرتداد (يُرمز له بالرمز e)أي أن

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

ويُطبق هذا القانون في اتجاه خط التصادم (خط المركزين) ، وتنحصر قيمة معامل الأرتداد e بين الصفر والواحد $0 \le e \le 1$ ويكون $e = 0$ إذا كان الجسمان عديمي المرونة ويساوي الواحد $e = 1$ إذا كان الجسمان تامي المرونة.

ايضاً حيث أن الكرتين ملساوتان فإنه لا توجد قوة عمودية على خط المركزين (خط التصادم) ومن ثم فإنه في حالة التصادم غير المباشر تظل مركبة السرعة لكل من الكرتين في اتجاه العمودي على خط المركزين ثابتة لا تتغير نتيجة التصادم.

■ تصادم الاجسام

عند تصادم جسمان مرنان فإنه يحدث نتيجةً لهذا التصادم ردود فعل كبيرة جداً تؤثر على كلا الجسمين لفترة صغيرة ثم يميل الجسمان بعدها للعودة إلى حركتهما ، تُسمى ردود الأفعال هذه بردود الأفعال الدفعية.

سنعتبر في دراستنا تصادم الاجسام الملساء بحيث أننا سنهمل جميع قوى الاحتكاك ويبقى فقط ردود الأفعال العمودية على الأسطح المشتركة و لسهولة الدراسة سنعتبر تصادم اجسام على هيئة كرات مرنة ملساء كما سنهمل كلا من قوى الأوزان لصغر دفوعها و التغير في مواضع الكرات أثناء فترة التصادم باعتبار أن هذه الفترة الزمنية للتصادم صغيرة جداً ، أي أن التصادم سيغير من سرعات الكرات ولن يغير من مواضعها أثناء فترة حدوثة. وفي دراستنا سوف نعتبر نوعين من التصادم (تصادم مرن وتصادم غير مرن) – التصادم غير المرن تم دراسته سابقاً – والتصادم المرن ينقسم إلى تصادم مباشر وتصادم غير مباشر.

■ التصادم المباشر وغير المباشر (مائل)

نعتبر تصادم كرتين ملساوتين ، الخط الواصل بين المركزين الهندسيين للكرتين يُسمى بخط المركزين أو خط التصادم ، و إذا كان التصادم بحيث كانت السرعتان قبل التصادم كلاهما في اتجاه خط التصادم للكرتين سُميّ هذا التصادم بـ "التصادم المباشر" أما في حالة التصادم غير المباشر يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كليهما مائلاً على خط التصادم بزاوية معينة – نلاحظ أن التصادم المباشر هو حالة خاصة من التصادم غير المباشر فيها زاوية الميل صفراً.

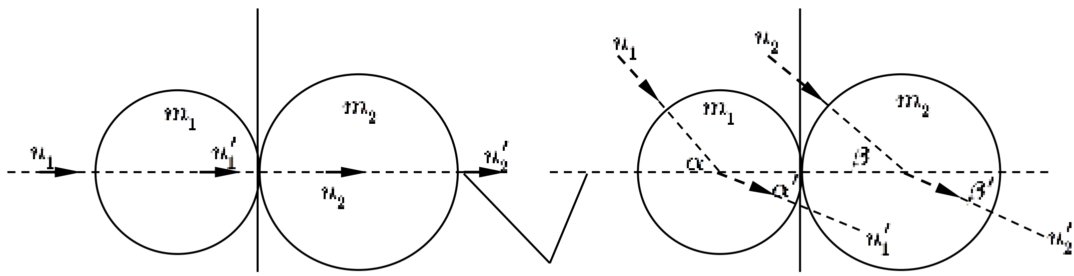
و في التصادم المرن سواءً كان التصادم مباشراً أو غير مباشر يُطبق قانون مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية و قانون نيوتن التجريبي في اتجاه خط التصادم. ويأخذ مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في حالة التصادم المباشر الصورة الرياضية

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2'$$

أما في حالة التصادم غير المباشر يكون

$$m_1u_1\cos\alpha + m_2u_2\cos\beta = m_1u_1'\cos\alpha' + m_2u_2'\cos\beta'$$

كما أن سرعة أي من الكرتين في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة قبل وبعد التصادم و من ثم فإن الكرة الساكنة أو الكرة المتحركة في اتجاه خط التصادم فإن حركتها بعد التصادم إذا تحركت تكون في اتجاه خط التصادم.



تصادم غير مباشر (مائل)   تصادم مباشر

■ تصادم كرة بمستوى ثابت

نعتبر كرة ملساء كتلتها m اصطدمت بمستوى ثابت أملس وأن سرعة الكرة قبل التصادم مباشرة هي u وأن سرعتها بعد التصادم هي u' كما بالشكل و نظراً لأن كل من الكرة والمستوى أملسين فإن سرعة الكرة في اتجاه المستوى (العمودي على خط التصادم) لا تتغير بالتصادم أي أن

$$u \sin\alpha = u' \sin\theta \qquad (1)$$

ومن قانون نيوتن التجريبي $u' \cos\theta = eu \cos\alpha$

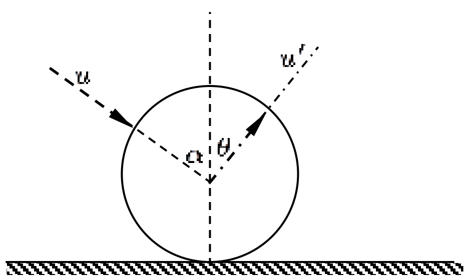
وهاتان العلاقتان كافيتان لتعيين سرعة الكرة بعد التصادم إذا عُلمت سرعة الكرة قبل التصادم.

ومن العلاقة $u' \cos\theta = eu \cos\alpha$ نجد أنه إذا كان $e = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه في حالة تصادم كرة غير مرنة فإنها لا ترتد وإنما تتحرك على المستوى وبسرعة مقدارها $u \sin\alpha$.

أما إذا كان $e = 1$ فإنه يكون $u' \cos\theta = u \cos\alpha$ ومن هذه المعادلة والمعادلة (1) نحصل على

$$\tan\theta = \tan\alpha, \qquad \Rightarrow \theta = \alpha$$

أي أن زاوية السقوط تساوي زاوية الأرتداد ونستنتج ايضاً أن $u = u'$ أي ان سرعة الكرة بعد التصادم تساوي في المقدار سرعتها قبل التصادم



■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

كرة تتحرك بسرعة u اصطدمت تصادماً مباشراً بكرة أخرى مساوية لها في الكتلة تتحـــرك بسرعة u' في الاتجاه المعاكس إذا توقفت الكرة ذات السرعة u بعد التصـــادم فاثبـــت أن $\frac{u}{u'} = \frac{1+e}{1-e}$ حيث e هو معامل الارتداد.

الحـــــــل

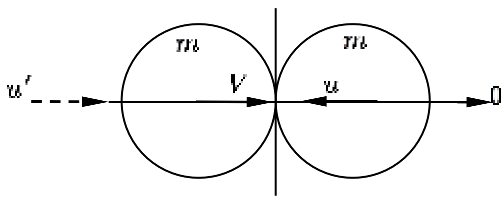
نفترض أن سرعة الكرة التي تتحرك بسرعة u' بعد التصادم هي V وأن m هي كتلة كل من الكرتين و حيث أن الكرة ذات السرعة u توقفت بعد التصادم فإنه من مبدأ ثبوت كمية الحركة

$$m \times 0 + m \times V = mu + m(-u') \quad \text{Or} \quad V = u - u'$$

ومن قانون نيوتن التجريبي

$$0 - V = -e(u - (-u')) \qquad \text{Or} \quad V = e(u + u')$$
$$\therefore\ u - u' = V = e(u + v) \quad \text{Or} \quad (1-e)u = (1+e)u'$$

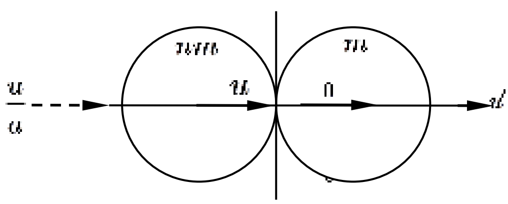
ولهذا فإن $\frac{u}{u'} = \frac{1+e}{1-e}$



مثـــ ٢ ـــال

اصطدمت كرة كتلتها nm وسرعتها $\frac{u}{a}$ تصادماً مباشراً بكرة أخرى كتلتها m وسرعتها u وكانت السرعتان في نفس الاتجاه. إذا وقفت الكرة ذات الكتلة m بعد التصادم فاوجد معامل الارتداد.

الحـــــــل



نفرض أن الكرة ذات الكتلة nm تحركت بعد التصادم بسرعة V (في اتجاه خط التصادم حيث أن التصادم مباشر) و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$m(0)+nmV=mu+nm\left(\frac{u}{a}\right) \quad \Rightarrow nV=\left(1+\frac{n}{a}\right)u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V-0=-e\left(\frac{u}{a}-u\right) \quad \Rightarrow V=eu\left(1-\frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

ومن المعادلتين (1) ، (2)

$$ne\cancel{u}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\left(1+\frac{n}{a}\right)\cancel{u} \quad \Rightarrow e=\frac{a+n}{n(a-1)}$$

مثـــال ٣

تتحرك كرة ملساء بسرعة $20\ \mathrm{ft\,sec^{-1}}$ اصطدمت بمستوى افقي أملس ثابت و في اتجاه يصنع زاوية 60^0 مع المستوى فإذا كان معامل الارتداد يساوي $e=0.5$ فأوجد سرعة الكـــرة و اتجاهها بعد التصادم ثم أوجد مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة في اتجاه المستوى لا تتغير (في الاتجاه العمودي على خط التصـــادم) أي أن

$$u\sin\theta=20\sin 30 \quad \Rightarrow u\sin\theta=10$$

من قانون نيوتن التجريبي

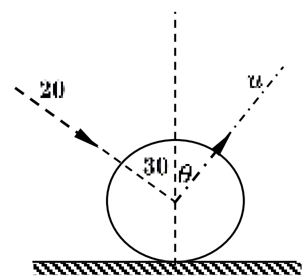
$$u\cos\theta=-e(-20\cos 30) \quad \text{Or} \quad u\cos\theta=10\sqrt{3}(0.5)=5\sqrt{3}$$

من المعادلتين بالتربيع والجمع نحصل على

$$u^2=100+75=175 \quad \Rightarrow u=\sqrt{175}$$

وبقسمة المعادلتين

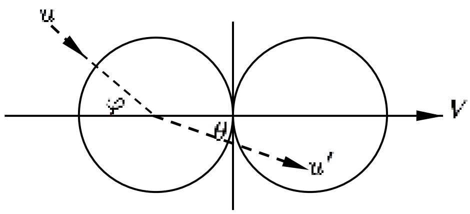
$$\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{Or} \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



مثـــال ٤

اصطدمت كرة بأخرى ساكنة مساويةً لها في الكتلة تصادماً مائلاً. إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع مع خط التصادم زاوية φ. و كان e هومعامل الارتداد فاثبت ان اتجاه هذه الكرة بعد التصادم يصنع مع خط التصادم زاوية تتعين من $\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$.

الحـــــل



من الشكل و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos\theta + mV = mu\cos\varphi + 0 \quad \Rightarrow u'\cos\theta + V = u\cos\varphi \tag{1}$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$u'\cos\theta - V = -e(u\cos\varphi - 0) \tag{2}$$

بجمع المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore\ 2u'\cos\theta = (1-e)u\cos\varphi \tag{3}$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u\sin\varphi \tag{4}$$

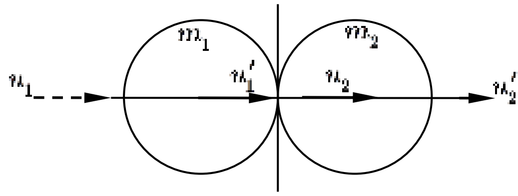
و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4)

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\tan\varphi}{1-e} \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\tan\varphi}{1-e} \quad \text{Or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\varphi}{1-e}\right)$$

مثـــال ٥

اثبـــت أنـــه في حالـــة التصـــادم المباشـــر يكـــون الفقـــد في طاقـــة الحركـــة مســـاوياً $\frac{(1-e^2)m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2$ حيث m_1, m_2 تمثل كتلتا الكرتين ، u_1, u_2 سرعتيهما قبل التصادم ، e معامل الارتداد.

الحـــــــل



من الشكل ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط التصادم

$$m_1u_1' + m_2u_2' = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (1)$$

و ذلك بفرض أن سرعتي الكرتان بعد التصادم هما u_1', u_2' و من قانون نيوتن التجريبي

$$u_1' - u_2' = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

الآن بتربيع المعادلة (1) ، (2) وضرب المعادلة (2) في m_1m_2 ثم الجمع نحصل على

$$\left(m_1u_1' + m_2u_2'\right)^2 + m_1m_2\left(u_1' - u_2'\right)^2 = \left(m_1u_1 + m_2u_2\right)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

باضافة وطرح المقدار $m_1m_2(u_1 - u_2)^2$ إلى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة نجد أن

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\left(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2\right) &= \left(m_1u_1 + m_2u_2\right)^2 \\ &\pm m_1m_2(u_1 - u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2\end{aligned}$$

أي أن

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\left(m_1u_1'^2 + m_2u_2'^2\right) &= \\ (m_1 + m_2)\left(m_1u_1^2 + m_2u_2^2\right) &- m_1m_2\left(1 - e^2\right)(u_1 - u_2)^2\end{aligned}$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ نحصل على

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{m_1m_2\left(1 - e^2\right)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

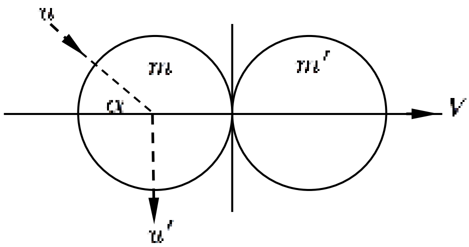
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2\right) = \frac{m_1m_2\left(1 - e^2\right)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

من هذه العلاقة يتضح أن مجموع طاقتي الحركة بعد التصادم أقل من مجموع طاقتي حركة الكرتين قبل التصادم بمقدار $\dfrac{m_1 m_2 \ \ 1-e^2 \ \ (u_1-u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$ وهو ما يمثل مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

مثـــ ٦ ـــال

اصطدمت كرة ملساء بأخرى ساكنة. إذا كان اتجاها الحركة بعد التصادم متعامدين وكانـــت الكرتان تامتي المرونة فاثبت أن كتلتيهما متساويتان.

الحــــــــل



بفرض أن الكرة الساكنة كتلتها m' وحيث أن هذه الكرة كانت ساكنة فإن حركتها بعد التصادم يكون في اتجاه خط التصادم بسرعة ولتكن V وحيث أن اتجاها الحركة بعد التصادم متعامد فتكون السرعة u' عمودية على خط التصادم من الشكل وباعتبار أن كتلة الكرة الثانية m وسرعتها u في اتجاه يصنع زاوية α مع خط التصادم وأن سرعتها بعد التصادم u' و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mu'\cos 90 + m'V = mu\cos\alpha + 0 \quad \Rightarrow m'V = mu\cos\alpha \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

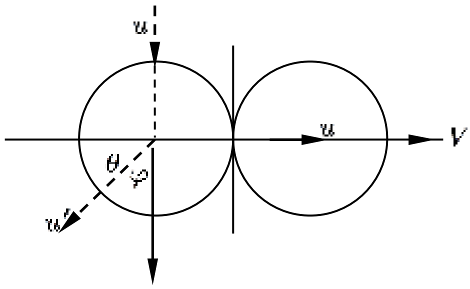
$$u'\cos 90 - V = -e(u\cos\alpha - 0) \quad \Rightarrow V = u\cos\alpha \quad (e=1) \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (2) يكون $\therefore m = m'$

مثـــ ٧ ـــال

تصطدم كرتان متساويتان وتتحركان بنفس السرعة و في اتجاهين متعامدين. إذا كـــان خــــط المركزين لحظة التصادم عمودياً على اتجاه الكرة الثانية وكان معامل الارتـــداد e فاثبـــت أن الكرة الثانية تنحرف بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ عن اتجاهها الأصلي.

الحـــــــل



من الشكل – مع مراعاة اتجاه السرعات – و من مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$mV - mu'\cos\theta = mu\cos 90 + mu \quad \Rightarrow V - u'\cos\theta = u \qquad (1)$$

و من قانون نيوتن التجريبي

$$V - (-u'\cos\theta) = -e(u - u\cos 90) \quad \Rightarrow V + u'\cos\theta = -eu \qquad (2)$$

بطرح المعادلتين (1) ، (2)

$$\therefore 2u'\cos\theta = (1+e)u \qquad (3)$$

وحيث أن مركبات السرعات العمودية على خط التصادم تظل ثابتة فإن

$$u'\sin\theta = u \qquad (4)$$

و الآن بقسمة المعادلتين (3) ، (4) $\tan\theta = \frac{2}{1+e}$ ولحساب انحراف السرعة عن اتجاهها الأصلي حيث الانحراف عن الاتجاه الأصلي هو $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ و من ثم

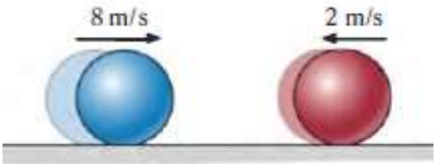
$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1+e}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{1+e}{2} \text{ Or } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

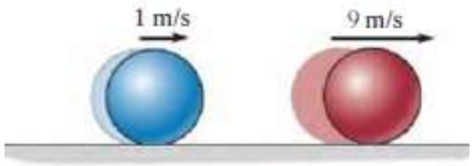
■ مسـائل Problems ■

١- تتحرك كرة كتلتها الوحدة بسرعة $8\ \text{ft sec}^{-1}$ عندما صدمت مستوى أفقي أملس ثابت في اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الرأسي. اثبت أنه إذا كان معامل الارتداد يساوي 0.5 فإن مقدار الفقد في طاقة الحركة يساوي 12 وحدة طاقة.

٢- عيّن معامل الارتداد بين الكرتين المتساويتين الكتلة ١ ، ٢ حيث وضّحت السرعات قبل وبعد التصادم على الرسم.



Before collision

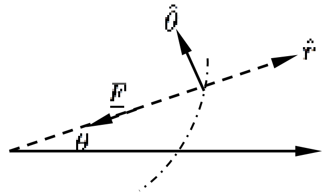


After collision

الحركة المداريـة

Orbital Motion

سنعالج في هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى. كثيراً ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين O يسمى بمركز القوة. كما تُسمى القوة في هذه الحالة بالقوة المركزية – حيث تنعدم المركبة العمودية لقوة المجال (طاردة أو جاذبة) ومن ثم تنعـــدم العجلة العمودية لحركة الجسيم دائماً و بتطبيق هذا الشرط نجد أنه من الاحداثيات القطبية



$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0$$

$$\therefore\ r^2\dot{\theta} = h\ \ \text{(const.)}$$

ويسمى المسار الذي ترسمه القوة بالمسار المركزي.

■ **المعادلة التفاضلية للمسار المركزي Differential Equation of Orbital Path**

معادلة الحركة في الاتجاهين r, θ هما

$$m\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ = -F \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تُعطي $r^2\dot{\theta} = h\ \ \text{(const.)}$

حيث h مقدار ثابت. المعادلتان (1) و (2) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب ومـــن هاتين المعادلتين بحذف $\dot{\theta}$ نحصل على

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{F}{m} \qquad (3)$$

ويمكن اجراء تكامل للمعادلة (3) باستخدام التعويض $\left(r=\dfrac{1}{u}\right)$ وبحذف t منها

$$\because r=\frac{1}{u} \qquad \therefore \frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{dr/du}\frac{du}{d\theta}\underbrace{\frac{h}{r^2}}_{d\theta/dt}=-h\frac{du}{d\theta},$$

$$\therefore \ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$
$$=-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2},$$

وبتعويض عن هذه النتائج في المعادلة نحصل على

$$-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{F}{mh^2u^2} \qquad (4)$$

هذه المعادلة تُسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي وهي تُستخدم لمعرفة قانون القوة المركزي إذا عُلمت معادلة المسار و أيضاً إذا عُلمت القوة المركزية F فإنه يمكن حل المعادلة التفاضلية وايجاد معادلة المسار.

و كحالة خاصة حينما تكون الحركة في مجال قوة تتبع قانون التربيع العكسي $F=\dfrac{\mu}{r^2}$ فمن المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu \cancel{u^2}}{mh^2\cancel{u^2}}=\frac{1}{\mu^\star}, \qquad \mu^\star=\frac{mh^2}{\mu}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها العام على الصورة

$$u=\frac{1}{\mu^\star}\ \ 1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)$$

حيث ϵ,α ثابتي التكامل والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها

$$r=\frac{\mu^\star}{1+\epsilon\cos(\theta-\alpha)}$$

وهذه المعادلة تُمثل قطع مخروط ويكون قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً حسبما تكون $1>\epsilon$ أو $\epsilon=1$ أو $\epsilon>1$ على الترتيب.

■ قانون السرعة Velocity Law

كما نعلم أن مركبتي السرعة في الاتجاهين r,θ هما $\dot{r},\ r\dot{\theta}$ ومن ثم فإن مقدار سرعة الجسيم v تتعين من $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ولكن $\dot{r} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ ومنها

$$v^2 = \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2h^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \tag{5}$$

وهذه المعادلة تُعطي مقدار سرعة الجسيم عند أي موضع θ على المسار المركزي.

■ قوانين كبلر Kepler's Laws

من أهم تطبيقات الحركة بالاحداثيات القطبية هو دراسة حركة الكواكب. و لقد قام العالم يوهان كبلر (١٥٧١–١٦٣٠) و هو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية والمعرفة باسمه:

القانون الأول: تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

القانون الثاني: يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما أقترب من الشمس.

القانون الثالث: يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدوري ومعامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية.

هذه هي نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالي ٦٠ عاماً ليثبت على أساسها قانون الجذب العام والذي يُعتبر من أكبر كشوف الانسان

■ مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية

كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب (الطرد) O هي عزم كمية الحركة الخطية حول O وتساوي -تذكر أن $v \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$ -

$$m\dot{r}(0) + mr\dot{\theta}(r) = mr^2\dot{\theta} = mh = \text{constant}$$

أي أن كمية الحركة الزاوية للجسيم حول المركز تظل ثابتة أثناء الحركة وهو ما يُسمى بمبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية.

■ السرعة المساحية Area Velocity

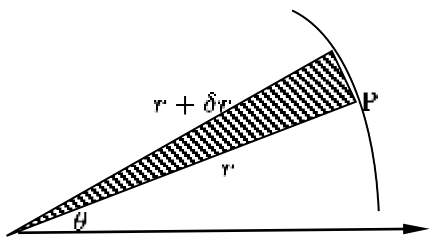
بفرض أن $P(r,\theta)$ هو موضع الكوكب عند اللحظة الزمنية t وأنه بعد زمن صغير δt يكون عند الموضع $Q(r+\delta r,\theta+\delta\theta)$. المساحة δA المقطوعة بمتجه الموضع خلال الفترة الزمنية δt تساوي تقريباً مساحة المثلث OPQ – كما بالشكل – أي أن

$$\delta A=\frac{1}{2}r(r+\delta r)\sin\delta\theta\cong\frac{1}{2}r^2\delta\theta$$

السرعة المساحية $\dot{A}$ هي المساحة التي يرسمها OP في وحدة الزمن و تتعين من

$$\begin{aligned}\dot{A}=\frac{dA}{dt}&=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta A}{\delta t}\\&=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}r^2\frac{\delta\theta}{\delta t}=\frac{1}{2}r^2\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t}\\&=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{h}=\frac{1}{2}h,\qquad \dot{A}=\frac{1}{2}h\end{aligned}$$

أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة في حالة المسار المركزي.



■ القُبا Apse

وتُعرف بأنها نقاط المسار المركزي والتي عندها يكون البعد عن مركز القوة نهاية عظمى أو صغرى. هذه الأبعاد تُسمى أبعاد القُبا أي عند نقط القُبا يكون $\dot{r}$ أو $\frac{du}{d\theta}$ أو $\frac{dr}{d\theta}$ وهذا يعني أنه عند القُبا تكون حركة الكوكب عمودية على متجه الموضع.

■ Illustrative Examples أمثلة توضيحية ■

مثـــ ١ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. اثبـــت أن الســـرعة تتناسب عكسياً مع r^3 وأن القوة تتناسب عكسياً مع r^7 .

الحـــــــل

باختيار $r = \dfrac{1}{u}$ فيكون

$$\frac{1}{u^2} = a^2 \cos 2\theta$$

بالتفاضل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$-\cancel{2}\frac{1}{u^3}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{2}a^2 \sin 2\theta \;\; \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^2 u^3 \sin 2\theta$$

ولحساب قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = h^2\left(\left(a^2 u^3 \sin 2\theta\right)^2 + u^2\right)$$

$$= h^2\left(a^4 u^6 \sin^2 2\theta + u^2\right)$$

$$= h^2\left(a^4 (1-\cos^2 2\theta) u^6 + u^2\right) = h^2\left(a^4 u^6 - u^2 + u^2\right) = h^2 a^4 u^6$$

$$\therefore v^2 = h^2 a^4 u^6 \;\Rightarrow v = h a^2 u^3 = \frac{h a^2}{r^3} \qquad \text{that is } \; v \propto \frac{1}{r^3}$$

بالتفاضل مرةً ثانية لــ $\dfrac{du}{d\theta}$ يكون

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2a^2u^3 \cos 2\theta + 3a^2u^2 \frac{du}{d\theta}\sin 2\theta = 2u^3 \underbrace{a^2 \cos 2\theta}_{1/u^2} + 3a^2u^2 \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^2u^3 \sin 2\theta} \sin 2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2u + 3a^4u^5 \sin^2 2\theta = 2u + 3a^4u^5\left(1 - \cos^2 2\theta\right)$$

$$= 2u + 3a^4u^5 - 3a^4u^5 \cos^2 2\theta$$

$$= 2u + 3a^4u^5 - 3u = 3a^4u^5 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^5$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2\left(3a^4u^5\right) = 3ma^4h^2u^7 = \frac{3ma^4h^2}{r^7} \qquad \text{that is } \; F \propto \frac{1}{r^7}$$

$$\ln u = -\theta + c_2$$

ومن الشرط $u = \dfrac{1}{2}$ عندما $\theta = 0$ نجد أن $c_2 = -\ln 2$ Or $c_2 = \ln\dfrac{1}{2}$

$$\ln u = -\theta - \ln 2 \quad \Rightarrow \ln r = \theta + \ln 2 \quad \text{Or} \quad r = 2e^{\theta}$$

وهي معادلة المسار.

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مركزية جاذبة F وكانت سرعة النقطة المادية $v = \dfrac{\ell}{r}$ حيث ℓ ثابت. فاثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r وأن معادلة المســـار الذي تتحرك عليه النقطة المادية هي $r = e^{a\theta}$ حيـــث $a = \dfrac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2 - h^2}$ إذا علمـــت أن $r = 1$ عندما $\theta = 0$.

الحـــــــل

من قانون السرعة حيث $v^2 = \dfrac{\ell^2}{r^2} = \ell^2 u^2$

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2 u^2 \qquad (1)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$2h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\cancel{\frac{du}{d\theta}} = 2\ell^2 u\cancel{\frac{du}{d\theta}} \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \ell^2 u$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \qquad \Rightarrow F = mh^2\ell^2u^3 = \frac{mh^2\ell^2}{r^3}$$

ولايجاد معادلة المسار من المعادلة (1)

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \ell^2u^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{h^2}u^2$$

$$\text{Or} \quad \frac{du}{d\theta} = -\underbrace{\frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{h}}_{a}u = -au$$

واعتبرنا الاشارة سالبة لأن القوة جاذبة أى نحو المركز. بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{du}{u} = -ad\theta \quad \Rightarrow \ln u = -a\theta + c$$

مثــ ٢ ــال

إذا كان المسار المركزي لجسيم هو قطع مخروطي فاثبت أن القوة تخضـــع لقـــانون التربيـــع العكسي.

الحـــــــل

معادلة المسار هي $r = \dfrac{\ell}{1 + e\cos\theta}$ حيث e هو الاختلاف المركزي ، ℓ هو نصـــف وتره البؤري العمودي

$$\because u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow u = \frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\ell}\sin\theta, \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{\ell}\cos\theta = \frac{1}{\ell} - u$$

ومن ثم فإن قانون القوة يتعين من

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$= mh^2u^2\left(\frac{1}{\ell} - u + u\right) = \frac{mh^2}{\ell r^2} \qquad \text{i.e.} \quad F \propto \frac{1}{r^2}$$

مثــ ٣ ــال

اوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو القطب حتى يتحرك جسيم كتلته الوحدة على المسار $r = a(1 - \cos\theta)$. وإذا كان مقدار كل من سرعة الجسيم والقوة عند القُبا همـــا P, V فاثبت أن $3V^2 = 4aP$.

الحـــــــل

حيث أن $r = a(1 - \cos\theta)$ وباستخدام الفرضية $r = \dfrac{1}{u}$ نحصل على

$$\frac{1}{u} = a(1 - \cos\theta)$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ يكون

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = a\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -au^2\sin\theta$$

بالتفاضل مرةً أخرى بالنسبة إلى θ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -2au\frac{du}{d\theta}\sin\theta - au^2\cos\theta = 2a^2u^3\sin^2\theta - au^2\cos\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2 \ \cos\theta - 2au\sin^2\theta \ = -au^2 \ \cos\theta - 2au \ 1-\cos^2\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -au^2 \ \cos\theta + 2au \ 1-\cos^2\theta$$

$$= -au^2\left(\cos\theta - 2u\underbrace{a \ 1-\cos\theta}_{1/u} (1+\cos\theta)\right)$$

$$= -au^2 \ \cos\theta - 2(1+\cos\theta)$$

$$= -au^2(-2-\cos\theta) = -au^2(-3+\underbrace{1-\cos\theta}_{1/au})$$

$$= 3au^2 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3au^2$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \ 3au^2 \ = 3mah^2u^4 \ = \frac{3mah^2}{r^4}$$

عند نقاط القُبا يكون

$$\dot{r} = 0 \ \text{ Or } \ \frac{du}{d\theta} = 0 \qquad \Rightarrow -au^2\sin\theta = 0 \qquad \therefore \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\because h = r^2\dot{\theta} = \underbrace{(r\dot{\theta})}_{V}r = 2aV \quad \text{Note } \ r\Big|_{\theta=\pi} = a(1-\cos\pi) = 2a$$

ومن قانون القوة التى حصلنا عليها

$$\because F = \frac{3ah^2}{r^4} \quad \Rightarrow F\Big|_{\theta=\pi} = P = \frac{3a(2aV)^2}{(2a)^4} \quad \Rightarrow \quad 3V^2 \ = 4aP$$

مثـــ ٤ ـــال

جسيم كتلته واحد جرام يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية تتناسب عكسياً مع مكعب r بحيث أن القوة تساوي واحد داين عند $r = 1$ cm. أوجد معادلة المسار علماً بأنـــه عنـــد $\theta = 0$ فإن $r = 2$ cm والسرعة تساوي $\frac{1}{2}$ cm sec^{-1} واتجاهها يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الثابت.

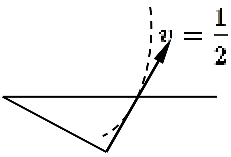
الحـــــــل

حيث أن قوة الجذب تتناسب مع مكعب r فإن $F = \dfrac{\mu}{r^3}$ حيث μ ثابت التناسب ويمكن حساب قيمته من الشـــرط $F = 1$ عنـــدما $r = 1$ ويكـــون ثابـــت التناســـب $\mu = 1$ أي أن $F = \dfrac{1}{r^3}$ ومن المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u^3 \quad \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = u \quad \text{Or} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{1}{h^2}\right)u = 0 \quad (1)$$

نوجد الثابت h باستخدام مبدأ ثبوت كمية الحركة الزاوية حول مركز الجذب ويكون

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}(2\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - u = 0$

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\theta}\right) - u = 0 \quad \text{Or} \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)d\left(\frac{du}{d\theta}\right) - udu = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل ولحساب c_1 يلزمنا حساب $\dfrac{du}{d\theta}$ عندما $r = 2$ والتي يمكن حسابها من قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$$

وحيث أن $v = \dfrac{1}{2}$ عندما $u = \dfrac{1}{2}$ فإن

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\Bigg|_{r=2} = \frac{1}{4}$$

أي أن عند $u = \dfrac{1}{2}$ فإن $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ وبالتالي قيمة ثابت التكامل $c_1 = 0$ من المعادلة (2)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -u \qquad \text{Or} \qquad \frac{du}{u} = -d\theta$$

وبعد اجراء فصل المتغيرات ، الآن بالتكامل

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $r = 1$ عندما $\theta = 0$ ومنها $c = 0$

$$\ln u = -a\theta \qquad \Rightarrow \ln\frac{1}{r} = -a\theta \quad \text{Or} \quad \ln r = a\theta \quad \text{Or} \quad r = e^{a\theta}$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت النسبة بين اكبر سرعة زاوية يدور بها كوكب حول الشمس واقل ســـرعة زاويـــة تساوي γ^2 فاثبت أن الاختلاف المركزي لمسار هذا الكوكب هو $\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

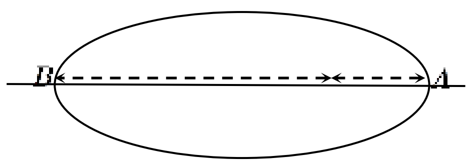
الحـــــــل

حسب قوانين كبلر فإن الكوكب يتحرك حول الشمس في مسار على شكل قطع نـــاقص و حيث أن $r^2\dot{\theta} = h \quad \therefore \dot{\theta} = \dfrac{h}{r^2}$

واضح أن السرعة الزاوية تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن الشمس r ومن ثم فإن اكـــبر سرعة زاوية تحدث عندما تكـــون r اصـــغر مـــا يمكـــن ، اي عنـــدما $r = r_1$ حيـــث $r_1 = OA = a - ae$ واصـــغر ســـرعة زاويـــة تحـــدث عنـــدما $r = r_2$ حيـــث $r_2 = OB = a + ae$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B} = \gamma^2 = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1+e}{1-e} \qquad \text{Or} \qquad e = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$



مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية في منحنى $r^n = a^n \cos n\theta$. اثبـــت أن القـــوة تتناسب عكسياً مع r^{2n+3}.

الحـــــــــل

حيث أن $r^n = a^n \cos n\theta$ وباستخدام $r = \dfrac{1}{u}$ نجد أن

$$\frac{1}{u^n} = a^n \cos n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى المتغير θ

$$-\cancel{n}\,\frac{1}{u^{n+1}}\frac{du}{d\theta} = -\cancel{n}a^n \sin n\theta \quad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = a^n u^{n+1} \sin n\theta$$

والآن بالتفاضل بالنسبة إلى θ مرة أخرى

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= na^n u^{n+1} \cos n\theta + (n+1)a^n u^n \frac{du}{d\theta} \sin n\theta \\ &= nu^{n+1} \underbrace{a^n \cos n\theta}_{1/u^n} + (n+1)a^n u^n \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{a^n u^{n+1}\sin n\theta} \sin n\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}\sin^2 n\theta = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1}(1-\cos^2 n\theta) \\ &= nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u^{2n+1}\underbrace{a^{2n}\cos^2 n\theta}_{1/u^{2n}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = nu + (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - (n+1)u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1} - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = (n+1)a^{2n}u^{2n+1}$$

$$\because F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$\therefore F = mh^2u^2 \;\; (n+1)a^{2n}u^{2n+1} \;= (n+1)ma^{2n}h^2u^{2n+3} \;= \frac{3ma^{2n}h^2}{r^{2n+3}}$$

وهذا يعني أن $F \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$ (على الدراس استنتاج قانون السرعة)

■ مســـــائل Problems ■

$(i)\ yp^2-2xp+y=0$

$(ii)\ 3xp^2-6yp+x+2y=0$

$(iii)\ 4xp^2-(3x-1)^2=0$

$(iv)\ p^2+2px^2-4x^2y=0$

7- حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من y

$(i)\ 2xy'y''=y'^2-1$

$(ii)\ x^2y''=y'^2$

$(iii)\ y''^2+y'=xy''$

$(iv)\ y''\operatorname{cosec}x=1$

$(v)\ x(a-x)y''+2(1-x)y'=1$

$(vi)\ y^{(n)}-2y^{(n-1)}=e^x$

8- حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من x

$(i)\ yy''=y'^2$

$(ii)\ y'^2-(3y-2y')y''=0$

$(iii)\ yy''+1=y'^2$

$(iv)\ y''+y'^2=1$

$(v)\ 2yy''=y'^2$

$(vi)\ yy''=y'^2-y'^3$

$(vii)\ yy''+y'^2+2ay^2=0$

9- حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الأتية :

$(i)\ xy''-xy'+y=0$

$(ii)\ x^2y''-xy'+5y=0$

$(iii)\ 2x^2yy''+y^2=x^2y'^2$

$(iv)\ (2yy''-y'^2)x^2+y^2=0$