بسم الله الرحمن الرحيم

علم الرياضيات هو أحد أهم العلوم المعرفية ، والرياضيات أحد العلوم التي تقوم على دراسة القياس والحساب والهندسة والفضاء وتغير الأبعاد ، ويمكن أن يعرف بدراسة المنطق والبراهين الرياضية، وبالتالي الرياضيات تقوم على دراسة الأعداد ، والمساحات، والعمليات الرياضية، والأشكال الهندسية، والنمذجة الرياضية والاحتمالات والتوقعات المستقبلية.

مقرر المعادلات التفاضلية يعتبر من مقررات العلوم الرياضية المتقدمة ، ويدرس للفرق أعلى من الأولى ، حيث يتطلب له دراسة مقررات سابقة (التفاضل - التكامل). وعليه سوف ندرس لطلابنا لهذه الفرقة بعض المواضيع الهامة فى مقرر التكامل أولا ، والتى تساعد الطالب على إكتساب مهارات معرفية لتمكنة من حل أنواع المعادلات التفاضلية التى يقوم بدراستها فى هذا المقرر.

- **المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى .**
- **المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجات العليا والحلول الشاذة .**

مع تمنياتى بالنجاح ،،،،،، أ.د/ موسى خليفة ،،،،

الباب الأول

1-1 مقـــــدمــــــة

المعـادلات التفاضـلية مـن الموضـوعات الهامـة لورودهـا فـي كثيـر العلـوم مثـل الرياضيات البحتة و التطبيقية وفي الطبيعة و الكيمياء وفي كثير من العلوم الهندسية فكثير من مسائل الانحناء تعتمد في حلها علي المعادلات التفاضلية وكذلك تذبذب الاجسام و الذبذبات الكهربية وانتقال الحرارة وانتشار الاجسام الذائبة وسرعة التفاعلات الكيميائية .

2-1 تعريف المعادلات التفاضلية :

نفرض أن y دالة في المتغير x وأن $y', y'', ..., y^{(n)}$ المشتقات التفاضلية من الرتبة الاولي و الثانية حتي المشتقة النونية للمتغير y بالنسبة إلي x فإن إي علاقة تربط بين x,y وأحد المشتقات السابقة تسمي "معادلة تفاضلية عادية" أما إذا كانت y دالة في اكثر من متغير ولها مشتقات جزئية فإنها تسمي "معادلة تفاضلية جزئية " ونذكر الان بعض الامثلة المختلفة للمعادلات التفاضلية العادية .

$$\frac{d^2y}{dx^2} + w^2 y = 0 \text{.......................................}(1)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} - 5x = \cos 2x \text{.......................................}(2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2yx = 5 \text{.......................................}(3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{.......................................}(4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial y}{\partial x} \text{.......................................}(5)$$

3-1 رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية :

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلي مشتقة موجوده في المعادلة التفاضلية. **درجة المعادلة التفاضلية** هي الاس الذي يرفع الية أعلي معاملي تفاضلي المحدد لرتبة المعادلة.

فمثلاً المعادلة (1) هي معادلة من الرتبة الثانية والدرجة الاولي .

والمعادلة (2) من الرتبة الرابعة والدرجة الأولي .

والمعادلة (3) معادلة من الرتبة الثالثة و الدرجة الثانية .

والمعادلة (4)و(5) معادلات تفاضلية جزئية .

4-1 تكوين المعادلة التفاضلية :

يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية نفرض أن لدينا العلاقة

$$f(x,y,c)=0.....................(1)$$

هذه المعادلة تمثل مجموعة المنحنيات المستوية ذات البارامتر الواحد وبتفاضل العلاقة (1) بالنسبة إلي x نحصل علي معادلة تحتوي علي x,y,y',c ولتكن

$$\phi(x,y,y',c)=0............................(2)$$

وبحذف c من (1) ، (2) نحصل علي علاقة في الصورة

$$\psi(x,y,y')=0.....................(3)$$

و العلاقة (3) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الاولي حصلنا عليها نتيجة لحذف ثابت اختياري واحد وتسمي هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات (1) .

ولتوضيح ذلك نعتبر المثال الاتي

$$y^2=4a(x-c)$$

حيث c هو بارامتر المجموعة a ثابت مطلق فهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة التي محورها المحور السيني ووترها البؤري العمودي $4a$ بالتفاضل نحصل علي

$$y\frac{dy}{dx}=2a$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لمجموعة القطاعات المكافئة.

وفي الحالة العامة اذا اعتبرنا العلاقة

$$f(x,y,c_1,c_2,....,c_n)=0...........................(4)$$

وهذه العلاقة تحتوي علي n من البارامترات $c_1,c_2,...c_n$ للحصول علي المعادلة التفاضلية المناظرة نفاضل هذه العلاقة n من المرات المتتالية بالنسبة الي x فنحصل علي n من العلاقات في الصورة

$$\left.\begin{aligned}&\phi_1(x,y,y',c_1,c_2,...c_n)=0\\&\phi_2(x,y,y',y'',c_1,...c_n)=0\\&\phi_n(x,y,y',.......,y^{(n)},c_1,.....,c_n)=0\end{aligned}\right\}....................(5)$$

من العلاقات (4) ، (5) وعددها $n+1$ يمكن حذف الثوابت $c_1,c_2,...,c_n$ وتكون النتيجة هي الحصول علي معادلة تفاضلية عادية ورتبتها n علي الصورة

$$f(x,y,y',y'',.......,y^{(n)})=0$$

مثال (1) :- كون المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات

$$c_1 x+(y-c_2)^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

الحـــل

حيث ان معادلـة مجموعـة المنحنيـات تحتـوي علـي بـارا متـرين فإننـا نفاضـل مـرتين باعتبار ان

$$c_1+2(y-c_2)y'=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$2y'^2+2(y-c_2)y''=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بحذف c_1 من المعادلة (2) نحصل علي

$$c_1=-2(y-c_2)y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض من (4) في(1) نجد ان

$$-2xy'(y-c_2)+(y-c_2)^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

بحذف C_2 من المعادلة (3) نحصل علي

$$y-c_2=-y'^2/y'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

بالتعويض من (6) في (5) نحصل علي المعادلة التفاضلية المطلوب وهي

$$y'+2xy''=0$$

مثال(2):- أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور.

الحـــل

المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور هي

$$x^2=\alpha x+\beta y+c$$

و حيث ان هذه المعادلة تحتوي علي ثلاث ثوابت α,β,C
نفاضل ثلاث مرات متتالية.:

$$2x=\alpha+\beta\frac{dy}{dx}, \quad 2=\beta\frac{d^2y}{dx^2}, \quad 0=\beta\frac{d^3y}{dx^3}$$

المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

مثال (3) إذا كانت

$$y=ae^{2x}+be^{-x} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

فاثبت إن

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0$$

الحـــل

بالتفاضل نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} - be^{-x} \text{..............................}(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4ae^{2x} + be^{-x} \text{..............................}(3)$$

بجمع (1) ، (2) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} + y = ae^{2x}$$

وبجمع (2) ، (3) ينتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6ae^{2x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2(\frac{dy}{dx} + y)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

وهو المطلوب .

5-1 حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية هو عملية الحصول علي الأصل الكامل للمعادلة التفاضلية إي عملية عكس عملية تكوين المعادلة و التي درسناها

ويمكن تقسيم هذه المعادلات من حيث طرق حلها إلي الانواع الاتية :-

1- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال .
2- المعادلات التفاضلية المتجانسة .
3- المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية .
4- المعادلات التفاضلية التامة .
5- المعادلات التفاضلية الخطية .
6- معادلات برنولي .
7- معادلات ريكاتي .

و سوف ندرس كل نوع علي حدة

1-5-1 :- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال .

يمكن كتابة المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات علي الشكل الاتي :-

$M(x)dx + N(y)dy = 0$

$M(y)dx + N(x)dy = 0$

وهذه يمكن تحويلها إلي المعادلة (1) وذلك بالقسمة علي $N(x)M(y)$ أي أن

$$\frac{dx}{N(x)} + \frac{dy}{M(y)} = 0$$

وهذه يمكن حلها بإجراء التكامل مباشرة

مثال: أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0$$

الحـــل

بالقسمة علي $\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}$ نحصل علي

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy = 0$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = c$$

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = c$$

وهي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy^3\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$$

الحـــل

نضع المعادلة علي الصورة

$$xy^3\frac{dy}{dx} = (1-x^2) + y^2(1-x^2), \quad xy^3\frac{dy}{dx} = (1-x^2)(1+y^2)$$

$$xy^3dy = (1-x^2)(1+y^2)dx$$

بقسم طرفي المعادلة علي $x(1+y^2)$

$$\frac{y^3}{1+y^2}dy = \frac{1-x^2}{x}dx$$

وبالتكامل نحصل علي

$$\int \frac{y^3}{1+y^2}dy = \int \frac{1-x^2}{x}dx + c, \quad \int (y - \frac{y}{y^2+1})dy = \int \frac{dx}{x} - \int xdx + c$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln x - \frac{x^2}{2} + c, \quad x^2 + y^2 = 2\ln(x\sqrt{y^2+1}) + c$$

وهذا يمثل حل المعادلة التفاضلية

مثال (3) :- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\left(8x+2y+1\right)^{2} \quad ....(1)$$

الحل :- بوضع $u=8x+2y+1$

ثم بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل علي

$$u'=8+2y', \quad y'=\frac{1}{2}\left(u-8\right)$$

بالتعويض عن قيمة y' في المعادلة (1) نحصل علي

$$u'-8=2u^{2}, \qquad \frac{du}{dx}=2u^{2}+8$$

بالتكامل نحصل علي

$$\int\frac{du}{u^{2}+4}=2\int dx+c, \qquad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2}=2x+c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي

$$\tan^{-1}\frac{8x+2y+1}{2}=4x+c$$

2-5-1 المعادلات التفاضلية المتجانسة

يقال للدالة $f\ (x,y)$ إنها متجانسة من درجة n إذا امكن وضعها علي الصورة

$$f\ (x,y)=x^{n}f\ (\frac{y}{x}), \qquad f\ (x,y)=x^{n}g\ (x,y)$$

حيث g دالة للمتغير $\frac{y}{x}$

ويقال للمعادلة التفاضلية الآتية :-

$$f\ (x,y)dx+g\ (x,y)dy=0$$

انها متجانسة إذا كانت كل من الدالتين $g\ (x,y),f\ (x,y)$ متجانسة من نفس الدرجة إي إن

$$f\ (x,y)=x^{n}\phi(\frac{y}{x}), \qquad g\ (x,y)=x^{n}\psi(\frac{y}{x})$$

المعادلة السابقة تكون علي الصورة

$$\phi(\frac{y}{x})dx+\psi(\frac{y}{x})dy=0 \quad ....(1)$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلي معادلة من النوع الأول أي ذات متغيرات قابلة للانفصال وذلك بفرض أن

$$z=\frac{y}{x}, \qquad y=xz, \qquad \frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$$

وبوضع المعادلة (1) علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi(\frac{y}{x})}{\psi(\frac{y}{x})}, \qquad x\frac{dz}{dx}+z=-\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

$$x\frac{dz}{dx}=-\left[z+\frac{\phi(z)}{\psi(z)}\right]$$

وهذه معادلة قابلة للانفصال يمكن حلها كما سبق

مثال (1) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

ويوضع $y=xz$ نجد أن

$$x\frac{dz}{dx}+z=\frac{z^2-1}{2z}, \qquad x\frac{dz}{dx}=-\frac{1+z^2}{2z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2z}{1+z^2}dz, \qquad \ln x+\ln c=-\ln(1+z^2)$$

$$x(1+z^2)=c, \qquad x(1+\frac{y^2}{x^2})=c$$

$$x^2+y^2-cx=0$$

وهي معادلة مجموعة من الدوائر .

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2ye^{\frac{y}{x}}-x)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

الحل :- يمكن كتابة المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{x-2ye^{\frac{y}{x}}}$$

نضع $y=zx$ نجد أن

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z}{1-2ze^z}, \qquad x\frac{dz}{dx}=\frac{2(1+z^2e^z)}{1-2ze^z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-2ze^z}{2(1+z^2e^z)}dz, \qquad 2\ln x=\int\frac{e^{-z}-2z}{e^{-z}+z^2}dz$$

$$2\ln x=-\ln(z^z+e^{-z})+\ln c, \qquad x^2(z^z+e^{-z})=c$$

$$x^2(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{e^x})=c, \qquad y^2+x^2e^{-\frac{y}{x}}=c$$

مثال (3) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y'$$

الحل

$$y' = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y'}{x}$$

نضع $y = zx$ أي إن

$$y' = xz' + z , \qquad xz' + z = \sqrt{1-z^2} + z$$

$$xz' = \sqrt{1-z^2}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin^{-1} z = \ln cx , \qquad y = x \sin \ln cx$$

3-5-1 المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية تكون علي كصورة الآتية

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0.....(1)$$

أو تكتب علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

وهذه المعادلات ذات المعاملات الخطية يمكن تحويلها إلي

1- معادلات متجانسة .

2- معادلات ذات متغيرات قابلة للانفصال .

أولا :- المعادلات ذات المعاملات الخطية والتي يمكن تحويلها إلي معادلات متجانسة .

في هذه الحالة المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يتلاقيان في نقطة ولتكن (α, β) وهذا يعني إن محدد المعاملات لا يساوي الصفر .

نضع

$$x = u + \alpha \; , \; y = y + \beta$$

فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}$$

و المعادلة (1) تصبح :-

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فيمكن حلها كما سبق

ثانيا: معادلات يمكن تحويلها إلي متغيرات منفصلة ففي هذه الحالة يكون محدد المعاملات يساوي الصفر أي أن $a_1b_2 = a_2b_1$ والمستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ , \ \ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يكونان متوازيان ويكون

$$a_1x + b_1y = \alpha(a_2x + b_2y)$$

نضع

$$u = a_1x + b_1y, \qquad \frac{du}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^1}(\frac{du}{dx} - a_1)$$

والمعادلة (1) تصبح

$$\frac{1}{b_1}(\frac{du}{dx} - a_1) = \frac{u + c_1}{\alpha u + c_2}$$

وهذه معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال فيمكن حلها .

مثال (1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$$

الحل :-

نلاحظ أن محدد المعاملات

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

المعادلة يمكن تحويلها إلي معادلة متجانسة

أولا :- نوجد نقطة التقاطع للمستقيمين

$$2x - y + 4 = 0, \quad x - 2y + 5 = 0$$
$$y = 2, \ x = -1$$

باستخدام التعويض

$$x = u - 1 \quad , \quad y = v + 2$$
$$dx = du \quad , \quad dy = dv$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$(2u - 2 - v - 2 + 4) + (u - 1 - 2v - 4 + 5)du = 0$$

باستخدام التعويض $v = uz$

$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}, \qquad (2-z)(z+u\frac{dz}{du})+(1-2z)=0$$

$$2z'+2v\frac{dz}{du}-z^{2}-uz\frac{dz}{du}+1-2z=0, \qquad u(2-z)\frac{dz}{du}=z^{2}-1$$

$$\frac{2-z}{z^{2}-1}dz=\frac{1}{u}du, \qquad (\frac{1}{2(z-1)}-\frac{3}{2(z+1)})dz=\frac{1}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\ln(z-1)-\frac{3}{2}\ln(z+1)=\ln u+\ln c, \qquad \ln\frac{z-1}{(z+1)^{3}}=2\ln cu$$

بالتعويض عن قيم v,u نحصل علي

$$\frac{y-x-3}{(y+x-1)^{3}}=c$$

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx}+x-2y+3=0$$

الحل :- نلاحظ إن محدد المعاملات يساوي الصفر

نضع

$$x-2y=u, \qquad 1-2\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1-\frac{du}{dx})$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=-\frac{u+3}{2u+5}, \qquad \frac{du}{dx}=\frac{4u+11}{2u+5}$$

$$\int dx=\int\frac{2u+5}{4u+11}du=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{4u+11})du$$

$$2x+\frac{c}{4}=u-\frac{1}{4}\log(4u+11), \qquad 8x+c=4x-8y-log(4x-8y+11)$$

$$4x+8y+log(4x-8y+11)+c=0$$

4-5-1 المعادلات التفاضلية الكاملة (التامة)

يقال للمعادلة التفاضلية الآتية :-

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

أنها كاملة (تامة) إذا تحققت للدالتين $M\ ,N$ المتصلتين العلاقة

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

حيث كل من $\frac{\partial N}{\partial x} , \frac{\partial M}{\partial y}$ دالـة متصـلة وبـذلك يكـون الطـرف الأيسـر للمعادلـة (1) عنصراً تفاضليا تاماً لدالة ما $f\ (x,y)$ بالنسبة للمتغيرين x,y إي أن

$$df\ (x,y) = M\ (x,y)dx + N\ (x,y)dy$$

والشرط الضروري و الكافي لذلك هو إن تحقق العلاقة (2) وسوف نثبت

الشرط الضروري : نفرض إن الطرف الأيسر للمعادلة (1) يمثل تفاضلاً تاماً للدالـة $f\ (x,y)$

$$df\ (x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M\ (x,y)dx + N\ (x,y)dy$$

و بمقارنة المعاملات نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M\ (x,y) \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N\ (x,y) ....(3)$$

وبتفاضـل العلاقـة الأولـي مـن (3) بالنسـبة إلـي y و الثانيـة بالنسـبة إلـي x نحصـل علي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبمعنـي ذلـك أنـه إذا كانـت المعادلـة التفاضـلية (1) تامـة فإنـه الشـرط (2) يجـب أن يتحقق إي أن هذا الشرط ضروري .

الشرط الكافي : وبالعكس لا ثبات إن الشرط كـافي نفـرض إن العلاقـة (2) صـحيحة ويكـون المطلـوب أثبـات أن المعادلـة التفاضـلية (1) تكـون تامـة أي أن توجـد دالـة $f\ (x,y)$ وبحيث يكون .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M\ (x,y) \int \frac{\partial f}{\partial y} = N\ (x,y)$$

و العلاقة الأولي في (4) تحقق إذا كان :-

$$f\ (x,y) = \int M\ (x,y)dx + \phi(y) = \psi(x,y) + \phi(y) ......(5)$$

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية لا تحتوي علي x

وبتفاضل العلاقة (5) بالنسبة إلي y نجد ان

$$\mathrm{N} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \phi'(y) ....(6)$$

ومن العلاقة (6) نحصل علي $\phi(y)$ وذلك بالتكامل بالنسبة إلي y و بالتعويض في العلاقة (5) عن $\phi(y)$ وبذلك تتعين الدالة $f(x,y)$ تاماً وهذا يثبت أن الشرط كافي .

مثال (1) : اثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة و أوجد أصلها التام .

$$(2y^2+4xy-x^2)dx+(2x^2+4xy-y^2)dy=0............(1)$$

الحل : نفرض أن

$$M(x,y)=2y^2+4xy-x^2 \quad , \quad N(x,y)=2x^2+4xy-y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y+4x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+4y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}......................................(2)$$

المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=2y^2+4xy-x^2.................(3)$$

بتكامل المعادلة (3) بالنسبة إلي x

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x3}{3}+\phi(y)......(4)$$

وبتفاضل العلاقة (4) بالنسبة إلي y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=2x^2+4xy-y^2=4xy+2x^2+\phi'(y)$$

$$\phi'(y)=-y^2(y), \qquad \phi(y)=-\frac{y^3}{3}+c$$

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}=c$$

مثال 2 : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(\cos xe^{\sin x}+\sin y\cos x)dx+\cos y\sin x\,dy=0....(1)$$

الحل:- بوضع

$$M = \cos x e^{\sin x} + \sin y \cos x$$
$$N = \sin x \cos y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y \cos x \text{ ....(2)}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x \cos y \text{ ....(3)}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بالتالي المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$F(x, y) = c$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = \cos x \; e^{\sin x} + \sin y \cos x \text{ ....(4)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = \sin x \cos y \text{ ....(5)}$$

بتكامل العلاقة (4) بالنسبة إلي x نحصل علي

$$F(x, y) = -e^{\sin x} + \sin x \sin y + \phi(y) \text{........................(6)}$$

و بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y + \phi'(y) \text{...............................(7)}$$

من (7) ، (5) نحصل علي :-

$$\sin x \cos y = \phi'(y) + \sin x \cos y$$
$$\phi'(y) = 0, \qquad \phi(y) = c$$

بالتعويض في المعادلة (6) عن قيم $\phi(y)$

$$F(x, y) = e^{\sin x} + \sin x \sin y + c$$

العوامل المكاملة :-

إذا كانت المعادلة التفاضلية التي من الدرجة الأولى والرتبة الأولى

$$(1) M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{.......................(1)}$$

غير تامة أي يكون

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فإن يمكن تحويلها إلي معادلة تامة وذلك بضربها في عامل مكامل M والعامل المكامل M يكون غالبا دالة في (x, y) ولكن الحصول علي العامل المكامل في

الحالة العامة هي مسألة رياضية غير بسيط لذلك سوف نعتبر أن M دالة في y فقط أو M دالة في y فقط .

بضرب المعادلة (1) في العامل المكامل $M\ (x, y)$ لكي تصبح تامة وبذلك يكون

$$\mu(x,y)M\ (x,y)dx+\mu(x,y)N\ (x,y)dy\ =0..........(2)$$

المعادلة (2) اصبحت تامة إذا يكون

$$\frac{\partial x}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$M\ \frac{\partial\mu}{\partial y}-N\ \frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0..........(3)$$

ومن هذه المعادلة يتعين العامل المكاملة μ كدالة في x, y

أولا : شرط وجود عامل مكامل دالة في x فقط .

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل $\mu=\mu(x)$ وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$N\ \frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),\qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة الأخيرة دالة في x فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن دالة في x فقط .

الشرط الضروري والكافي كي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في x فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في x فقط .

$$\frac{1}{\mu}d\,\mu=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

وبالتكامل يكون

$$\ln\mu(x)=\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx,\qquad \mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

ثانيا : شرط و جود عامل دالة في y فقط .

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل في y وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة هو دالة في y فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن يكون كذلك دالة في y فقط .

الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في y فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في y فقط .
وبتكامل هذه المعادلة

$$\ln\mu(y)=-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy\,,\qquad \mu(y)=e^{-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$$

وهذه العلاقة تعطي العامل المكامل بصورة صريحة.
مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية
الحل :-

$$xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$$

$$M(x,y)=xy^3\;,\;N(x,y)=x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2\;,\;\frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2,\qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=xy^2$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{y}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في y فقط يتعين من

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة :

$$xy^2dx+\left(x^2y-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

ولإيجاد حل المعادلة التفاضلية (1) نفرض الحل العام لها علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=xy^2\text{..............................}(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y}\text{......................}(3)$$

يتكامل المعادلة (2) نحصل علي

$$\mathrm{f}\;(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2}x^2y^2+\phi(y)\text{.................}(4)$$

ثم نفاضل المعادلة بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y}=x^2y+\phi'(y), \qquad \phi'(y)=\frac{1}{y}$$
$$\phi(y)=\ln y+\ln c$$

بالتعويض في (4) نحصل علي الحل العام

$$\mathrm{f}\ (\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2}x^2y^2+\ln cy$$

مثال (2) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1-xy)dx+(xy-x^2)dy=0$$

الحل :

$$M=1-xy \quad , \quad N=xy-x^2$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x \ , \ \frac{\partial N}{\partial x}=y-2x, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x-y, \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{x-y}{x\left(y-x\right)}=-\frac{1}{x}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في x فقط يتعين من

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة .

$$\left(\frac{1-xy}{x}\right)dx+\left(\frac{xy-x^2}{x}\right)dy=0$$

واضح أن حل المعادلة التفاضلية التامة السابقة هو

$$\ln x-xy+\frac{y^2}{2}=c$$

6-5-1 المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كانت y ومشتقاتها التفاضلية بالنسبة إلي x من الدرجة الأولي وغير مضروبة ببعضها وتكون الصورة العامة لها

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

حيث أن $a_0,a_1,.....,a_n,f(x)$ دوال في x

والمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=\phi(x')....................(1)$$

Or

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=\phi(y)........................(2)$$

ولحل هذه المعادلة نقوم بتحويلها إلي صورة معادلة تامة ويمكن كتابة المعادلة (1)علي الصورة

$$\mu dy+(\mu p(x)y-\mu\phi(x))dx=0\ ....(3)$$

وذلك بضرب المعادلة (1) في عامل مكامل $\mu=\mu(x)$
و المعادلة التفاضلية (3) تكون تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x))=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)p(x)y-\mu(x)\phi(x)\right]$$

ومنها يكون

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu p,\quad \frac{d\mu}{\mu}=pdx,\quad \mu=e^{\int pdx}\ ....(4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل علي الصورة

$$\mu dy+y\,d\mu=\mu\phi dx,\qquad d(\mu y)=\mu\phi dx$$

و بتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\mu y=\int\mu\phi dx+c,\qquad y=\frac{1}{\mu}\int\mu\,\phi\,dx+\frac{c}{\mu}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (1)
وبالمثل يمكن إيجاد حل المعادلة التفاضلية (2) علي الصورة

$$x=\frac{1}{\mu}\int\mu\,\phi\,dy+\frac{c}{\mu}$$

مثال (1) : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$$

الحل :لحل هذا المثال اولاً نوجد عاملاً مكاملاً يعتمد علي x

$$\mu=e^{\int\cot x dx}=\sin x$$

بالتالى الحل العام للمعادلة يصبح علي الصورة

$$\frac{d}{dx}(y\sin x)=\tan x,\qquad y\sin x=\int\tan x dx+c$$

$$y=\operatorname{cosec}x\ln\sec x+c\operatorname{cosec}x$$

ويمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية:

$$x\frac{dy}{dx}+(x+1)y=3x^2e^x$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+(1+\frac{1}{x})y=3x^2e^x, \qquad \mu=e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}=xe^x$$

$$\frac{d}{dx}(yxe^x)=3x^3e^{2x}, \qquad yxe^x=3\int x^2e^{2x}dx+c$$

$$xy=(x^3+c)e^{-x}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

7-5-1 : معادلة برنولي

هي معادلة تفاضلية تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x)y^n.................(1)$$

حيث n عدد حقيقي اكبر من 1

لحل هذه المعادلة يتم تحويلها أولاً إلي معادلة خطية وذلك بالقسمة علي y^n

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=Q(x).....................(2)$$

نضع

$$u=y^{1-n}$$

بالتالى يكون

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.......................(3)$$

وبالتعويض من (3) في (2) نحصل علي

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+up(x)=Q(x), \qquad \frac{du}{dx}+(1-n)up(x)=(1-n)Q(x)$$

و هذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها كما سبق .

مثال : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=5x^2y^5$$

الحل :

بالقسمة علي y^5 نجد أن

$$y^{-5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y^{-4}=5x^2$$

نفرض أن

$$y^{-4}=u, \qquad -y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}, \qquad -\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-\frac{u}{2x}=5x^{2}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{2u}{x}=-20x^{2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية ونوجد أولاً عامل مكامل وهو

$$\mu=e^{\int\frac{2dx}{x}}=x^{2}, \qquad \frac{d}{dx}(ux^{2})=-20x^{4}$$

$$ux^{2}=-4x^{5}+c, \qquad u=-4x^{3}+\frac{c}{x^{2}}=\frac{c-4x^{5}}{x^{2}}=y^{-4}$$

بالتالى الحل العام للمعادلة هو

$$y^{4}=\frac{x^{2}}{c-4x^{5}}$$

7-5-1 : معادلة ريكاتي

معادلة ريكاتي هي المعادلة التي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^{2}+Q(x)y+R(x)...................(1)$$

حيث R,Q,P دوال في x فقط ويمكن حل هذه المعادلة إلي علم أحد الحلول الخاصة لها $y=y_1$ حيث y_1 دالة في x

وفي هذه الحالة فالأصل التام للمعادلة (1) يعطي بالتعويض

$$y=y_1+\frac{1}{z}$$

حيث أن z دالة في x يمكن ايجادها علي النحو التالي .

حيث أن $y=y_1$ حل للمعادلة (1) يحقق المعادلة (1)

$$\frac{dy_1}{dx}=p(x)y_1^{2}+Q(x)y_1+R(x)...................(3)$$

يطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) ينتج أن

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)=p(x)(y^{2}-y_1^{2})+Q(x)(y-y_1)................(4)$$

من المعادلة (2) نحصل علي

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{z})=-\frac{1}{z^{2}}\frac{dz}{dx}$$

المعادلة (4) تصبح علي

$$-\frac{1}{z^{2}}\frac{dz}{dx}=(y_1^{2}+\frac{1}{z^{2}}+\frac{2y}{z}+y_1^{2})p(x)+\frac{1}{z}Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+\left[2y_1p(x)+Q(x)\right]z=-p(x)$$

وهذه معادلة خطية يمكن حلها كما سبق

مثال : اثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)$$

الحل :

بوضع المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=(x-1)\,y^2+(1-2x)\,y+x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

وهذه معادلة تمثل معادلة ريكاتي

بالتعويض $y=1$ في المعادلة (1) نحصل علي

$$x-1+(1-2x)+x=0$$

ولذلك فإن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية

نفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية علي الصورة

$$y=1+\frac{1}{z}\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل علي :

$$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(x-1)(1+\frac{1}{z})^2+(1-2x)(1+\frac{1}{z})+x$$

$$\frac{dz}{dx}+(x-1)(z+1)^2+(1-2x)(z^z+z)+z^2x=0$$

$$\frac{dz}{dx}+z^2(x-1+2x+x)+z(2x-2+1-2x)+x-1$$

$$\frac{dz}{dx}-z=1-x\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

وهذه المعادلة معادلة خطية

$$\mu=\bar{e}^{\int dx}=\bar{e}^{x}$$

حل هذه المعادلة هو

$$\frac{d}{dx}(\bar{e}^{x}z)=(1-x)\bar{e}^{x},\qquad \bar{e}^{x}z=\int(1-x)\bar{e}^{x}+c=x\bar{e}^{x}+c$$

$$z=x+ce^{x}$$

إي أن الحل العام لمعادلة (1) هو

$$\frac{1}{y-1}=x+ce^{x}$$

وهو المطلوب .

تمارين (1)

1-كون المعادلات التفاضلية لمجموعة المنحنيات الآتية :-

$(i)\, y=(x-c)^3 \qquad (ii)\, y=\sin(x+c)$

$(iii)\, x^2+cy^2=2y \qquad (iv)\, y=c(x-2)^2$

$(iiv)\, y=ax^2+be^x \qquad (vi)\, y=ax^3+bx^2+cx$

$(vii)\, y=\alpha\, co(\ln x)+\beta \sin(\ln x)$

$(viii)\, y=a\{x+\sqrt{x^2-1}\}^n+b\{x-\sqrt{x^2-1}\}^n$

حيث n ثابت مطلق .

$(ix)\quad y=(a+bx)\cosh mx$

حيث m ثابت مطلق .

$(x)\, y=a(\sin^{-1}x)+b(\sin^{-1}x)^2$

$(xi)\, y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

$(xii)\, y=\alpha e^{\beta x}$

$(xiii)\, (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2$

2-أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة التي محورها هو المحور السيني .

3-كون المعادلة التفاضلية للدوائر التي نصف قطرها الواحد الصحيح ومركزها تقع علي المستقيم $y=2x$

4-حل المعادلات التفاضلية الآتية بفصل المتغيرات :

$(i)\, \frac{dy}{dx}=\cos(y-x) \qquad (ii)\, \tan x\, \sin^2 y dx+\cos^2 x\, \cot y dy=0$

$(iii)\, x\frac{dy}{dx}-y=y^2 \qquad (iv)\, xy\frac{dy}{dx}=1-x^2$

$(iiv)\, \frac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1} \qquad (v)\, x^2\frac{dy}{dx}+y=a$

$(vi)\, xy^3\frac{dy}{dx}=1-x^2+y^2-x^2y^2$

$(vii)\, x(1-x^2)dy=(x^2-x+1)y dx$

$(viii)\, (x+y)^2(x\frac{dy}{dx}+y)=xy(1+\frac{dy}{dx})$

5- حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الآتية :-

$(i)(x+2y)dx - xdy = 0 \quad (ii) xy' = y - xe^{y/x}$

$(iii) xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x} \quad (iv)\ xy' = y\cos(\ln\frac{y}{x})$

$(v)\ xy' - y = x\tan\frac{y}{x} \quad (vi)(x^2-2xy-y^2)\frac{dy}{dx} = x^2+2xy-y^2$

$(vii)(x+y)^2\frac{dy}{dx} = x^2-2xy+5y^2 \quad (viii) x\frac{dy}{dx} = y - x\cos^2(\frac{y}{x})$

6- حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية الآتية :

$(i) y' = \frac{4x-y+7}{2x+y-1}$

$(ii)(2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0$

$(iii)(x-y-1)+(y-x+2)y' = 0$

$(iv)(3y-x)y' = 3x-y+4$

$(v)(x-5y+5)dy + (5x-y+1)dx = 0$

$(vi)\ x^2\frac{dy}{dx} = (2x-y+1)^2$

$(vii)(y+ax+b)\frac{dy}{dx} = y+ax-b$

7- بين أن المعادلات الآتية تامة واوجد الحل العام

$(i) 2xy\,dx + (x^2-y^2)dy \quad (ii)(2-9xy^2)x\,dx + (4y^2-6x^3)y\,dy = 0$

$(iii)(x^3-3xy^2)dx + (y^3+3x^3y)dy = 0$

$(iv) xdx + ydy = a^2(\frac{xdx-ydy}{x^2+y^2})$

$(v)(3x^2+4x\ y)dx + (2x^2+3y^2)dy = 0$

$(vi)(\cos x - x\cos y)dy - (\sin y + y\sin x)dx = 0$

$(vii)\, e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0 \quad (viii)\, \frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$

$(ix)\, \frac{2x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$

$(x)\, (1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x dy=0$

$(xi)\, (\frac{x}{\sin y}+2)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$

$(xii)\, \sin x\cos y dy+\cos x\sin y dx+\cos x e^{\sin x}dx=0$

$(xiii)\, \left[3ax^2+2(a+2h)xy+(b+2h)y^2\right]dx$

$+\left[(a+2h)x^2+2(b+2h)xy+3by^2\right]dy=0$

8-أوجد عامل مكامل يعتمد علي x فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام .

$(i)\, (x^3+y^4)dx+8xy^3dy=0$

$(ii)\, (1-xy)dx+(1-x^2)dy=c$

$(iii)\, (x^3+2y^3-3xy)dx+3x(y^2+x)dy=0$

$(iv)\, (2x^2+xy+a^2)ydx+(x+2y)(x^2+a^2)dy=0$

9-أوجد عامل مكامل يعتمد علي y فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام .

$(i)\, xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$

$(ii)\, y^2dx+(xy+1)dy=0$

$(iii)\, (y+1)dx+(xy+y^2+y+1)dy=0$

$(iv)\, dx+\{1+(x+y)\tan y\}dy=0$

10- أوجد الحل العام لكل من المعادلات الخطية الآتية .

$(i)\, (x+1)\frac{dy}{dx}-y=3x^4+4x^5 \quad (ii)\, \left\{2x\frac{dy}{dx}+y\right\}\sqrt{1+x}=1+2x$

$(iii)\, 2(x^2+x+1)\frac{dy}{dx}+(2x+1)y=8x^2+1$

$(iv)\, 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}-(1+x)y=\sqrt{1-x^2}$

$$(v)(1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+(1+x)(1-x^2)y=2 \quad (vi)\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$$

$$(vii)\frac{dy}{dx}\sin x\cos^3 x+y\cos 2x\cos^2 x=0$$

$$(viii)\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=y\tan 2x+1+\sec 2x \quad (ix)\frac{dy}{dx}+2y=x^2+3\cosh x$$

$$(x)\frac{dy}{dx}+2y\operatorname{cosec} 2x=2\cot^2 x\cos 2x \quad (xi)\frac{dy}{dx}\cot x-y=\operatorname{cosec} 2x+\cos 2x$$

$$(xii)(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x\sin^{-1}x+(1-x)\sqrt{1-x^2}$$

10- حول المعادلات التفاضلية الآتية إلي معادلات خطية ثم أكمل حلها .

$$(i)(xy-y^2)\frac{dy}{dx}=y^2-1 \quad (ii)\left\{x\left(\frac{1-y^2}{1ty^2}\right)-1\right\}\frac{dy}{dx}=y$$

$$(iii)\left\{(2y^2-1)x+y^3\right\}\frac{dy}{dx}=y(1-y^2)^2 \quad (iv)\,x\frac{dy}{dx}=4y-4\sqrt{y}$$

$$(v)2x\frac{dy}{dx}-y=\frac{2x^3-1}{y} \quad (vi)x^3\frac{dy}{dx}=2x^2y+y^3$$

$$(vii)\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x+y^3=0$$

$$(viii)2(1+x)y\frac{dy}{dx}+2x-3x^2+y^2=0$$

11- أثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)$$

12- اثبت أن $y=\frac{x+1}{x^2}$ حل خاص للمعادلات التفاضلية الآتية واوجد أصلها التام .

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{1}{x4}$$

13- أثبت أن $y=x$ حل خاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام .

$$(i)x\frac{dy}{dx}+(n-1)ax^n(y-x)^2+y-2x=0$$

$$(ii)\frac{dy}{dx}+xy^2-(2x^2+1)y+x^3+x-1=0$$

$$(iii)(x^2+a)\frac{dy}{dx}+2y^2-3xy-a=0$$

الباب الثاني

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا و الحلول الشاذة

درسنا في الباب الأول كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي وفي هذا الباب سوف ندرس كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات الأعلى و المعادلات التي سوف ندرسها هي

(i) معادلات قابلة للحل في p (ii) معادلات قابلة للحل في x

(iii) معادلات قابلة للحل في y

وكذلك سوف ندرس الحلول الشاذة لبعض المعادلات التي من درجة أعلي من الأولي .

1-2 المعادلات القابلة للحل في p

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا هي :-

$$(1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + L_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + L_{n-1}\frac{dy}{dx} + L_n = 0$$

حيث أن $L_0, L_1, \ldots\ldots, L_n$ دوال في x, y

نفرض أن $p = \frac{dy}{dx}$ بالتالى المعادلة (1) تصبح علي الصورة .

$$L_0P^n + L_1P^{n-1} + L_2P^{n-2} + \ldots + L_{n-1}P + L_n = 0$$

الطرف الأيسر لهذه المعادلة عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n

فاذا أمكن حلها بالنسبة إلي p علي الصورة .

$$(p - m_1)(p - m_2)\ldots\ldots(p - m_n) = 0$$

حيث $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ دوال في x, y

و هذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي .

$$p = m_1, \mathrm{p} = m_2, \ldots\ldots, \mathrm{p} = m_n$$
$$i.e.$$
$$\frac{dy}{dx} = m_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \frac{dy}{dx} = m_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \ldots\ldots, \frac{dy}{dx} = m_n(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

حلول هذه المعادلات يمكن فرضها علي الصورة

$$f(x, y, c_1) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, c_2) = 0, \ldots, f_n(x, y, c_n) = 0$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$(3) f_1(x,y,c_1) f_2(x,y,c_2) \ldots f_n(x,y,c_n) = 0$$

المعادلة (3) تمثل مجموعات من المنحنيات

$$f_1(x,y,c_1)=0, f_2(x,y,c_2)=0, \ldots, f_n(x,y,c_n)=0$$

إذا استبدلنا $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بالثابت الاختياري c ورسمنا المنحنيات

$$f_1(x,y,c)=0, f_2(x,y,c)=0, \ldots, f_n(x,y,c)=0$$

وجعلنا c تتغير من $-\infty$ إلي $+\infty$ فإننا نحصل علي نفس المنحنيات .

الحل العام للمعادلة (1) هو :-

$$f_1(x,y,c) f_2(x,y,c) \ldots f_n(x,y,c) = 0$$

وهو يحتوي علي ثابت اختياري واحد لآن المعادلة من الرتبة الأولي .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\cosh x + 1 = 0$$

الحل :- بوضع $\frac{dy}{dx} = p$

$$p^2 - p(e^x + \bar{e}^x) + e^x \bar{e}^x = 0$$

$$(p - e^x)(p - \bar{e}^x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x , \frac{dy}{dx} = \bar{e}^x$$

$$y = e^x + c \quad , y = \bar{e}^x + c$$

الأصل التام للمعادلة هو

$$(y - e^x - c)(y + \bar{e}^x - c) = 0$$

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$p^2 - (x+y)p + xy = 0 \qquad \left(p = \frac{dy}{dx} \text{ حيث} \right)$$

الحل :- بالتحليل

$$(p-x)(p-y)=0$$

$$p=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x$$

$$y=\frac{1}{2}x^2+c_1$$

$$p=y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y$$

$$y=c_2e^x$$

 الحل العام هو :

$$(y-\frac{1}{2}x^2-c)(y-ce^x)=0$$

2-2 المعادلات القابلة للحل في x

المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x تأخذ الصورة

$$(1)x=f(y,p) \qquad (\text{حيث } p=\frac{dy}{dx})$$

وبمفاضلة المعادلة (1) بالنسبة إلي y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية في المتغيرين y, p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2)y=\psi(p,c)$$

فإنه بالتعويض عن y في المعادلة (1) نحصل علي

$$x=f(p,c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3),(2) وإذا لم يمكن حذف p من المعادلتين فإن المعادلتين(3),(2) تسمي بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1):- حل المعادلة التفاضلية

$$x-y=2ap-ap^2$$

الحل :

$$(1)x=y+2ap-ap^2$$

بالتفاضل بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{1}{p} = 1 + (2a - 2ap)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p}(1-p) = 2a(1-p)\frac{dp}{dy}$$

$$dy = 2ap\,dp$$

$$(2)y = ap^2 + c$$

وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3)x = 2ap + c$$

فلاخط أنه يمكن حذف p من المعادلتين (2) ، (3) وذلك كما يلي

$$p^2 = \frac{y-c}{a} \quad , \quad p = \frac{x-c}{2a}$$

$$\frac{(x-a)}{4a^2} = \frac{y-c}{a}$$

$$(x-c)^2 = 4a(y-c)$$

وهي مجموعة من القطاعات المكافئة

مثال (2):- حل المعادلة التفاضلية

$$x = yp - p^2 \qquad\qquad p = \frac{dy}{dx} \text{ حيث}$$

الحل :- بالتفاضل بالنسبة إلي y

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy}(y-2p) = \frac{1}{p} - p$$

$$(y-2p) = (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp}$$

$$(\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} - y = -2p$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}y = \frac{2p^2}{1-p^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي . العامل المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{p}{p^2-1}dp} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2-1}dp}$$
$$= e^{\ln\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$
$$\frac{d}{dp}(y\sqrt{p^2-1}) = \frac{-2p}{1-p^2}\sqrt{p^2-1} = \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}$$
$$y\sqrt{p^2-1} = \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp + c$$

ولإيجاد هذا التكامل نستخدم التعويض

$$p = \cosh\theta \qquad dp = \sinh\theta d\theta$$
$$\int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp = \int \frac{2\cosh\theta}{\sinh\theta} \,.\, \sinh\theta d\theta = \int 2\cosh^2\theta d\theta$$
$$= \int (1+\cosh 2\theta)d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$$
$$= \theta + \sinh\theta \cosh\theta$$
$$y\sqrt{p^2-1} = \theta + \sinh\theta\cosh\theta + c$$
$$= \cosh^{-1} p + p\sqrt{p^2-1} + c$$
$$(1) y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c)$$

بالتعويض عن y في المعادلة الأصلية نحصل على التالى

$$x = yp - p^2$$
$$= p^2 + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) - p^2$$
$$(2) = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c)$$

المعادلتان (2)،(1) تمثلان الحل البارا متري للمعادلة التفاضلية .

2 -3 المعادلات التفاضلية القابلة للحل في y

المعادلات القابلة للحل في y يمكن كتابتها علي الصورة .

$$(1) y' = f(x, p)$$

بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل على

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

وهذه معادلة تفاضلية في x , p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$(2)\, x = \phi(p, c)$$

فأنه بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (1) نحصل علي

$$(3)\, y = \psi(p, c)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (3)،(2) و إذا تغدر الحذف تسمي المعادلتين (3)،(2) بالمعادلات البارا مترية للحل .

مثال (1) :- حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$(1)\, y = p + p^3$$

الحل :-

بالتفاضل بالنسبة إلي x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} + 3p^2 \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}(1 + 3p^2)$$

$$\int dx = \int \frac{1 + 3p^2}{p} dp + c$$

$$(2)\, x = \ln p + \frac{3}{2} p^2 + c$$

المعادلتين (2)،(1) تمثل المعادلات البارا مترية للحل .

مثال (2) :- أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$(1)\, y = xp^2 + p$$

الحل : بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2xp \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$p(1 - p) = (2xp + 1) \frac{dp}{dx}$$

الحد الأوسط حلها عند الضرب بالتعويض عنها

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1 - p} x = \frac{1}{p(1 - p)}$$

و هذه معادلة خطية .

العامل المكامل لها

$$\mu = e^{\int -\frac{2dp}{1-p}} = e^{2\ln(1-p)} = (1-p)^2$$

$$\frac{d}{dp}[x(1-p)^2] = \frac{1-p}{p}$$

وبالتكامل نحصل علي

$$x(1-p)^2 = \int \frac{1-p}{p} dp + c$$

$$x(1-p)^2 = \ln p - p + c$$

$$(2) x = \frac{\ln p - p + c}{(1-p)^2} + p$$

بالتعويض من (2) عن قيم x في (1) نحصل علي

$$y = \frac{\mathrm{p}^2 \ln p - p^3 + p^2 c}{(1-p)^2} + p$$

$$(3) y = \frac{\mathrm{p}^2 \ln p - p^3 + p^2 c + p(1-p)^2}{(1-p)^2}$$

و المعادلتين (2) ، (3) تمثلان الحل العام في الصورة البارا مترية .

4-2 معادلة كليروت

معادلة كليروت تكون على الصورة

$$(1) \quad y = px + f(p)$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ بالتفاضل بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

اما $\frac{dp}{dx} = 0$ ومنها $p = c$ وبالتعويض فى (1) عن p نحصل على

$$(2) y = cx + f(c)$$

وهى مجموعة معادلة مجموعة من المستويات

واما $x+f'(p)=0$ ومنها

$$(3) x=-f'(p)$$

وبالتعويض في (1) عن x نحصل على

$$(4) y=-f'(p)\,\mathrm{p}+\mathrm{f}\,(\mathrm{p})$$

بحذف p من (4) ، (3) نحصل على علاقة بين (x,y) على الصورة

$$(5)\quad \phi(x,y)=0$$

المعادلة (5) تمثل حل أخر للمعادلة (1) وتكون المعادلتين (4) ، (3) هما المعادلتان البارامتريتان لهذا الحل .

العلاقة (5) لا تحتوى على ثابت اختياري فهى حل خاص وعلى العموم لا يستنتج هذا الحل من الحل العام بوضع قيمة خاصة للثابتان .

الحل الخاص (5) هو "حل شاذ " أو حل "مفرد" والمعادلة (2) تمثل الحل العام وهى معادلة مجموعة من المستقيمات ذات البارامتر c.

لإيجاد معادلة "الغلاف" لهذه المجموعة نفاضل (2) جزئيا بالنسبة إلى c

$$y=cx+f(c)$$
$$o=x+f'(c)$$
$$\mathrm{x}=-f'(c)$$

أي أن طريقة إيجاد الحل المفرد هي نفس طريقة إيجاد الغلاف .

مثال(1) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية الأتية :

$$(1)\ \mathrm{y}=xp+ap(1-p)$$

الحل : -

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (a - 2ap)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + a - 2ap) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام للمعادلة هو

$$\mathrm{y} = cx + ac - ac^2$$

أو

$$(2) x + a - 2ap = 0$$

بحذف (p) من المعادلتين (1) ، (2) نجد أن

$$y = \frac{(x + a)^2}{4a}$$

أي أن

$$(x - a)^2 = 4ay$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف مجموعة المستقيمات الممثلة بالحل العام .

مثال (2) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$$

الحل : بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}\frac{dp}{dx}$$

بذلك يكون

$$[x+\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}]\frac{dp}{dx}=0$$

منها يكون اما $\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c$

بالتالى الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$(2)\ \mathrm{y}=\mathrm{xc}+\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

وهى تمثل مجموعة من المستقيمات.

أو

$$(3) x=-\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}$$

بالتعويض من (3) في (1) عن قيمة x نجد أن

$$(4) y=\frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}$$

المعادلتين (3) ، (4) هما المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد وبحذف p بين (3) ، (4) نحصل علي المعادلة الكارتيزية للحل المفرد من (3) نجد أن

$$p^2=(-\frac{a}{x})^{2/3}$$
$$y=-xp^3$$
$$y^{2/3}=(-x)^{2/3}p^2=(-x)^{2/3}[(-\frac{a}{x})^{2/3}-1]$$
$$y^{2/3}=a^{2/3}-(-x)^{2/3}=a^{2/3}-x^{2/3}$$
$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

وهو الحل المفرد للمعادلة التفاضلية وهو غلاف مجموعة المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

مثال (3) :- أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$\sin px\ \cos y = \cos px\ \sin y + p$$

الحل : نكتب المعادلة على الصورة

$$\sin px\ \cos y = \cos px\ \sin y = p$$
$$\sin(px - y) = p$$
$$px - y = \sin^{-1} p$$
$$(1)\, y = xp - \sin^{-1} p$$

وهذه صورة معادلة كليروت .

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$$
$$\frac{dp}{dx}[x - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}] = 0$$
$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام هو

$$y = cx - \sin^{-1} c$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$$
$$p = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$y = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2-1} - sx^{-1}x$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف المستقيمات .

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

5-2 الحل المفرد (الشاذ) : -

مما سبق رأينا أنه يوجد حل شاذ لمعادلة كليروت

$$(1) y = px + f(p)$$

يمكن الحصول علية بحذف p بين هذه المعادلة والعلاقة

$$(2) x + f'(p) = 0$$

وناتج حذف p بين (1) ، (2) هو أيضاً ناتج حذف c بين المعادلتين

$$(3)\ y = cx + f(c),$$
$$(4) x + f'(c) = 0$$

والعلاقة (4) يمكن الحصول عليها بأجراء التفاضل جزئيا بالنسبة إلى c للمعادلة (3) .

وناتج حذف c هو إذن غلاف مجموعة المستقيمات (3) وعلى هذا فالمعادلة كليروت حل شاذه هو غلاف مجموعه المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

وبصورة عامة إذا اعتبرنا مجموعة لانهائية أحادية من المنحنيات (تحتوى معادلتها على بارامتر واحد فقط) فقد يوجد منحنى ثابت يمسها جميعاً ويسمى غلاف مجموعة المنحنيات المعلومة . فإذا كانت هذه المنحنيات تمثل الأصل التام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى فإن الغلاف يحقق أيضاً هذه المعادلة التفاضلية ويكون حلاً شاذاً لها وذلك لأنه عند أي نقطة (x, y) على الغلاف يوجد منحنى من مجموعة المنحنيات المعلوم يسمى الغلاف عند هذه النقطة وتكون قيم x, y, p عند هذه النقطة واحده للمنحنى والغلاف معاً وتحقق المعادلة التفاضلية أي أن معادلة الغلاف معادلة تحقق المعادلة التفاضلية وتكون حلاً شاذاً لها ولا يحتوى على ثوابت اختيارية ولا يمكن استنتاجه من الحل العام بإعطاء قيم معينة للثابت الاختياري .

وسوف ندرس الأن طرق إيجاد الحل الشاذ لمعادلة تفاضلية من الرتبة الاولى .

1-5-3 المميز c

نعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ومن درجة أعلى من الرتبة الأولى على الصورة

$$f(x, y, p)$$

ونفرض أن الحل العام لها هو :

$$(1) \phi(x, y, c) = 0$$

وبمفاضلة (1) بالنسبة إلى c جزئياً نحصل على

$$(2) \frac{\partial}{\partial c} \phi(x, y, c) = 0$$

وبحذف c بين (1) و (2) نحصل على علاقة بين x, y وتسمى المميز c للمعادلة (1) وسوف نرمز لها بالرمز Δ_c والمعادلة (1) تمثل مجموعة من المنحنيات والمعادلتان .

$$\phi(x, y, c) = 0 \ , \ \phi(x, y, c + h) = 0$$

حيث h مقدار ثابت صغير تمثلان منحنين مجاورين .

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة نرى أنه يمكن كتابة معادلة المنحنى الثاني على الصورة .

$$\phi(x, y, c) + h \frac{\partial}{\partial c} \phi(x, y, c + \theta h) = 0 \quad - | \theta |$$

ولإيجاد نقطة تقاطع المنحنين بطرح المعادلتين نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial c} \phi(x, y, c + \theta h) = 0$$

فإذا جعلنا h تؤول إلى الصفر نحصل على المعادلة (2) .

وفـى الواقـع أن المجـز c يحتـوى علـى الحـل الهندسـي للوضـع النهـائي لـنقط تقـاطع منحنـين متقـابلين مـن المجموعـة (1) وهـذا يشـمل التعريـف الأول لغـلاف مجموعـة المنحنيات .

وكل هذه الاعتبارات معروفة من دراسات الغلافات .

ولكن المميز c حسب التعريف العام كناتج حذف c بين المعادلتين (1) و (2) قد يحتوى على محال هندسية أخرى غير الغلاف .

في الحالات العادية يتقاطع كل منحنين متجاورين من منحنيات المجموعة (1) في نقطة واحدة وتقع نقط التقاطع على منحنى ee' .

وفـى النهايـة عنـدما يقتـرب كـل منحنـين متتـالين مـن بعضـهما لانهائيـاً تقـع جميـع نقـط التقاطع على منحنى EE' يسمى جميع المنحنيات وهو غلاف المنحنيات.

يكون الغلاف حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات أما أذا كان كل منحنى عقده (mode) فإن كل منحنين متجاورين يتقاطعان في ثلاث نقط وتقع نقط التقـاطع على ثلاث منحنيات مختلفة aa', ee' كما بالشكل .

وعنـدما تقتـرب المنحنيـات المتجـاورة مـن بعضـها لانهائيـاً فـإن المنحنـين aa', bb' يقتربان من منحنى العقد NN' حيث ينطبقاً علية أما المنحنى ee' فيؤول الى الغلاف المعتاد EE' أي أن المميز c في هذه الحالة يحتوى على منحنى العقد مرفوعاً للفوه الثانية حيث أنه ينـتج فـي النهايـة مـن تطـابق منحنـين aa', bb' ومنحنـى العقـد عنـد أي نقطة عليه يشترك مع منحنى المجموعة المار بهذه النقطـة فـي قيمتـي x, y ولكنهـا لا تشـتركان فـي قيمـة الميـل p وعلـى هـذا فمنحنـى العقـد لا يحقـق المعادلـة التفاضـلية للمنحنيات المعلومة وإذا انكمشت العقد فـي الحالـة السـابقة بحيـث تصـبح نابـا(cusp)

فإن المنحنين EE', NN' يقتربان من بعضهما حتى ينطبق مع منحنى الناب cusp

ee' (lecus) الذي يظهر حينئذ في المميز c مرفوعاً للقوه الثالث كما بالشكل.

واضح أن قيمة p عند أي نقطة على منحنى الناب لا تساوى ميل المنحنى المار بهذه النقطة وهو إذا ليس حلاً للمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات.

<u>الخلاصة</u> : عند البحث عن الحل الشاذ لمعادلة تفاضلية نوجد المميز c للحل العام لهذه المعادلة والمميز c يحتوى على واحد أو أكثر من

<u>المجالات الهندسية الاتية :</u>

1- الغلاف (مرفوعاً للقوة الأولى)

2- منحنى العقد (مرفوعاً للقوة الثانية)

3- منحنى الناب (مرفوعاً للقوة الثالثة)

ومن هذه المنحنيات يكون الغلاف فقط حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية أي أن المميز c يمكن التعبير عنه في الصورة .

$\triangle_c =$ (الغلاف)^1 x (منحني العقد)^2 x (منحني الناب)^3

<u>ملحوظة :</u>

إذا كان لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى ودرجة أعلى من الأولى

$$(1) f\ (x, y, p) = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على

$$(2) \phi(x, y, c) = 0$$

فإذا اعتبرنا أن (2) على أنها معادلة جبرية في c من الدرجة الثانية أو أعلى فإن المعادلة (2) تمثل الشرط اللازم لكى يكون للمعادلة (1) جزراً مكرراً للبارامتر c

وعلى هذا فالمميز c هو المحل الهندسي للقيم (x , y) التي تجعل للمعادلـة (1) جزراً مكرراً للبارامتر c فإذا كانت المعادلة (2) من الدرجة الثانية في c على الصورة

$$lc^2 + mc + n = 0$$

حيث l , m , n دوال في x , y فإن

$$\Delta_c = m^2 - 4lm = 0$$

وهذا هو الشرط لكى تكون قيمتاً c متساويين .

<u>مثال (1):-</u> أوجد المميز c للمعادلة التفاضلية

$$p^2 (3-4y)^2 = 4(1-y)$$

<u>الحل : -</u>

$$p=\frac{4(1-y)}{(3-4y)^2}$$

$$t\ \frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{1-y}}{3-4y}$$

$$dx=\frac{3-4y}{2\sqrt{1-y}}$$

$$\pm(x+c)=\int\frac{\frac{3}{2}-2y}{\sqrt{1-y}}dy$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{2}+2(1-y)}{\sqrt{1-y}}dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-y}dy+2\int\sqrt{1-y}\ dy$$

$$=\sqrt{1-y}+2\frac{(1-y)^{3/2}}{-3/2}=\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\ (4y-1)$$

$$[\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\ (4y-1)-(x+c)][\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\ (4y-1)+(x+c)]=0$$

$$[\frac{1}{3}\sqrt{1-y}\ (4y-1)]^2-(x+c)^2=0$$

$$\frac{1}{9}(1-y)(4y-1)^2=(x+c)^2$$

وهى تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية .

وبمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى c

$$2(x+c)=0$$

وبالتعويض عن $x+c$

$$\Delta_c=\frac{1}{9}(1-y)(4y-1)^2$$

$$\Delta_c=EN^2C^2$$

الدالة $1-y$ مرفوعة للقوة الاولى

المنحنى $y=1$ يمثل غلاف المجموعة وهو الحل المفرد .

الدالة $4y-1$ مرفوعة للقوة الثانية

المنحنى $y = \frac{1}{2}$ يمثل منحنى العقد

<u>مثال(2):-</u> أوجد المميز c للمعادلة التفاضلية

$$y = p + \frac{1}{p} e^{x} \quad , \quad p = \frac{dy}{dx}$$

<u>الحل : -</u>

نفاضل هذه المعادلة بالنسبة الى x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^{2}} e^{x} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{p} e^{x}$$

$$p - \frac{1}{p} e^{x} = \frac{dp}{dx} (1 - \frac{1}{p} e^{x})$$

$$\frac{p^{2} - e^{x}}{p} = \frac{p^{2} - e^{x}}{p^{2}}$$

$$\frac{dp}{p} = dx$$

$$\ln p = x + c$$

$$(2) p = ce^{x}$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$(3) y = ce^{x} + \frac{1}{c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

وبوضع

$$\phi(x, y, c) = y - ce^{x} - \frac{1}{c} = 0$$

ومنها يكون

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = -e^{x} + \frac{1}{c} = 0$$

$$(4) e^{x} = \frac{1}{c^{2}}$$

يكون مجز c هو

$$\Delta_c = y - \frac{2}{c} = 0$$
$$y = \frac{4}{c^2} = 4e^x$$

وهو الحل الشاذ للمعادلة التفاضلية وهو يمثل معادلة الغلاف مرفوعاً للقوة الأولى.

<u>2-5-3 المميز p :-</u>

هناك طريقة أخرى للحصول على الحل الشاذ للمعادلة التفاضلية التي من الرتبة الأولى ودرجة أعلى من الأولى مباشرة من المعادلة ذاتها بعد إيجاد الحل العام لها .

نفرض أن المعادلة المعلومة هي

$$(1) f(x, y, p) = 0$$

نفاضل هذه المعادلة جزئياً بالنسبة إلى p نجد أن

$$(2) \frac{\partial f}{\partial p}(x, y, p) = 0$$

وبحذف p بين (1) ، (2) نحصل على ما يسمى بالمميز p للمعادلة التفاضلية وهذا المميز هو المحل الهندسي لنقطة (x, y) التي يكون عندها للميل مع قيمتين متساويتين أو أكثر .

<u>المميز p قد يحتوى على المنحنيات الهندسية الاتية :-</u>

i) الغلاف (مرفوعاً للقوة الأولى)

ii) منحنى التماس (مرفوعاً للقوة الثانية)

iii) منحنى الناب (مرفوعاً للقوة الأولى)

والغلاف فقط هو الذى يحقق المعادلة التفاضلية ويكون في هذه الحالة حلاً شاذاً.

وإذا رمزنا للمجز p بالرمز Δ_p فإن

$$\triangle_p = (\text{الغلاف})^1 \quad (\text{التماس})^2 \quad (\text{الناب})^1$$

<u>ملحوظة :</u>

إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$Lp^2 + MP + N = 0$$

فإن المميز p يكون

$$\triangle_p = M^2 - 4 - N = 0$$

وهو يمثل شرط انطباق جزري المعادلة .

<u>مثال(1) :-</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية .

$$(1)4p^2(x-2) = 1$$

ثم أوجد المميز p ثم أوجد الحل الشاذ .

<u>الحل :</u>

المعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة .

$$p^2 = \frac{1}{4(x-2)}$$

$$p = \pm\frac{1}{2\sqrt{(x-2)}}$$

$$(p + \frac{1}{2\sqrt{(x-2)}})\ (p - \frac{1}{2\sqrt{(x-2)}}) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{2\sqrt{(x-2)}}$$

$$\{dy = \pm\{\frac{dx}{2\sqrt{(x-2)}}$$

$$y = \pm\sqrt{x-2} + c$$

$$(y + \sqrt{x-2} + c)(y - \sqrt{x-2} + c) = 0$$

الحل العام هو

$$(y+c)^2 = x-2$$

ولإيجاد المميز p نلاحظ أن المعادلة (1) هي معادلة من الدرجة الثانية في p.

$$\Delta_p = 16(x-2) = 0$$

ونلاحظ أن $(x-2)$ مرفوعة للقوة الأولى.

$$x = 2$$

وهى معادلة الغلاف وهو الحل المفرد.

<u>مثال (2):-</u> أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر

$$(1) x^2 + y^2 + 2ex + 2c^2 - 1 = 0$$

حيث c هو البارامتر للمجموعة ثم أوجد المميز p وعين الحل المفرد للمعادلة أن وجد.

<u>الحل :</u> بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x

$$2x + 2yp + 2c = 0$$
$$(2) c = -(x+py)$$

التعويض من (2) في (1) نحصل على

$$x^2 + y^2 + 2x(x+py) + 2(x+py)^2 - 1 = 0$$

أي أن

$$(3) x^2 + y^2 - 2xyp + 2y^2p^2 - 1 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في p وتمثل المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر (1)

المميز p هو

$$4x^2y^2 = 8y^2(x^2+y^2-1)$$
$$4y^2(x^2+2y^2-2) = 0$$

ونلاحظ أن المميز p يحتوى على المنحنيات الأتية .

$y = 0$ مرفوعاً للقوة الثانية .

فهو يمثل منحنى الالتحاق (التماس) لمجموعة المنحنيات) والقطع الناقص .

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{10} = 1$$

يمثل أما غلاف المنحنيات أو منحنى الناب لها .

الدوائر ليس لها أنياب.

يكون غلاف المنحنيات .

القطع الناقص يمثل غلاف المجموعة وعلى ذلك فهو الحل المفرد .

6-3 تنزيل (تخفيض) رتبة المعادلة التفاضلية من الرتبة العليا :-

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة العليا هي

$$(1)\ f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

ولا يوجد حتى الأن طريقة مباشره لحل هذه المعادلة .

وقد عرضنا في الأبواب السابقة طرق لحل حالة خاصة من هذه المعادلات وهى التي تكون فيها المعادلة (1) خطية .

ونلاحظ أنه حتى في هذه الحالة الخاصة لم نستطيع أن نحصل على طريقة مباشره نوجد بها الحل العام لأى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n إلا في الحالات التي تكون فيها المعاملات ثوابت .

وسوف ندرس الأن بعض الحالات للمعادلة (1) التي يمكن فيها باستخدام تعويض مناسب تحويلها الى معادلة تفاضلية أخرى ذات رتبة أقل .

أولا : المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى على y بصورة صريحة الصورة العامة لها هي

$$(1)\ f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

وفى هذه الحالة فإن رتبة المعادلة يمكن أن تؤول الى $n-k$ وذلك بوضع $y^{(k)} = p$ المعادلة (1) تأخذ الصورة :

$$f(x, p, p', \ldots\ldots, p^{(n-k)}) = 0$$

وهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة $(n-k)$ في المتغير بين $x\,,p$ فإذا أمكن حلها على الصورة .

$$p = p(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-k}) = 0$$

وبأجراء التكامل k من المرات لهذا الحل نحصل على الحل العام للمعادلة.

مثال(1) حل المعادلة

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{1}{x}\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

الحل :

$$let\ \ \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dp}{dx}$$

تصبح المعادلة التفاضلية على الصورة

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln p=\ln x+\ln c_1$$

$$p=c_1x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=cx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{c_1}{24}x^4+\frac{c_2}{2}x^2+c_3x+c_4$$

وهذا هو الحل العام .

<u>مثال(2):-</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{dy}{dx})^2-1$$

<u>الحل :</u>

$$let\ \frac{dy}{dx}=p\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$2xp\frac{dp}{dx}=p^2-1$$

$$\frac{pdp}{p^2-1}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(p^2-1)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln c_1$$

$$p^2-1=xc_1$$

$$(\frac{dy}{dx})^2=c_1x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{c_1x+1}$$

$$y=\pm\{\sqrt{c_1x+1}\,dx$$

$$y=\pm\frac{2}{3c_1}(c_1x+1)^{3/2}+c_2$$

$$9c_1^2(y-c_2)^2=4(c_1x+1)^3$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

ثانيا :- المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى x بصورة صريحة هذه المعادلة تكون على الصورة.

$$(1)\ f(y, y', y'', \ldots.., y^{(n)}) = 0$$

وباستخدام التعويض $y' = p$ يمكن تخفيض رتبة المعادلة كما يلى :-

$$\frac{dy}{dx} = p \ , \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \ . \ \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} ,$$

$$\frac{dy}{dx^3}^3 = \frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dx}) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + (\frac{dp}{dy})p$$

وبالمثل بالنسبة الى باقي المشتقات من الرتب الأعلى وبالتعويض عن قيم $y', y'', \ldots.., y^{(n)}$ فإن المعادلة (1) تصبح على الصورة .

$$\phi(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}) = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-1)$ في المتغيرين y, p فإذا أمكن حل المعادلة الأخيرة وإيجاد p كدالة في y فإنه باستخدام الفرض $y' = p$ نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وبحلها نوجد y .

مثال (1):- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأتية .

$$y(y-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 = 0$$

الحل : نضع

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$y(y-1)p\frac{dp}{dy}+p^2=0$$
$$y(y-1)\frac{dp}{dy}+p=0$$
$$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y(y-1)}=-[\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}]dy$$
$$\ln p=\ln\frac{y}{y-1}+\ln c_1$$
$$p=\frac{c_1 y}{y-1}$$
$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{c_1 y}{y-1}$$
$$\int\frac{y-1}{y}dy=\int c_1 dx$$
$$y-\ln y=c_1 x+c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة .

ملحوظة : إذا كانت المعادلة التفاضلية خالية من x, y فإن يمكن حل المعادلة بأخذ أحد التعويضين السابقين. ولكن نلاحظ أن استخدام التعويض $y'=p$, $=p\frac{dp}{dy}$ يكون أسهل في الحل.

مثال(2):- حل المعادلة التفاضلية

$$\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=m\frac{d^2y}{dx^2}$$

الحل : سوف ندرس حل هذه المعادلة باعتبارها معادلة لا تحتوى على x بصورة صريحة (ويترك دراستها باعتبارها معادلة لا تحتوى على y بصورة صريحة كتمرين) . باستخدام التعويض

$$\frac{dy}{dx}=p$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$\sqrt{1+p^2} = mp\,\frac{dp}{dy}$$

$$\{\frac{mpdp}{\sqrt{1+p^2}} = \{dy$$

$$m\sqrt{1+p^2} = y + c_1$$

$$1+p^2 = \frac{1}{m^2}(y+c_1)^2$$

$$p^2 = \frac{(y+c_1)^2}{m} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y+c_1)^2 - m^2}}{m^2}$$

$$\{\frac{mdy}{(y+c_1)^2 - m^2} = \{dx + c_2$$

$$m\cosh^{-1}(\frac{y+c_1}{m}) = c_2 + x$$

$$y = m\cosh\frac{x+c_1}{m} - c_1$$

وهو الحل العام .

<u>ثالثا : المعادلة المتجانسة</u>

<u>تعريف :</u> المعادلة التفاضلية تكون متجانسة إذا كانت كل حدودها من نفس البعد

إذا اعتبرنا x, y من البعد الواحد فإن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{dy}{dx}$ من البعد صفر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad\frac{1}{\lim}$$

المشتقة $\frac{d^2y}{dx^2}$ من البعد1

وهكذا نلاحظ أن $\frac{d^3y}{dx^3}$ من البعد 2

$\frac{d^ny}{dx^n}$ تكون من البعد $(n-1)$

فمثلاً المعادلة التفاضلية

$$x^2\frac{dy}{dx}+4x^3\frac{d^2y}{dx^2}+2y^2=0$$

هي معادلة متجانسة من البعد 2

والمعادلة التفاضلية

$$(x^2-4xy)\frac{dy}{dx}+8y\frac{dy}{dx}=0$$

هي معادلة متجانسة من البعد1.

<u>ولحل المعادلات المتجانسة نعتبر الحالات الأتية :</u>

(أ) إذا كانت المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الصورة الأتية :

$$\phi(x\frac{dy}{dx},\mathrm{x}^2\frac{d^2y}{dx^2},....,\mathrm{y})=0$$

يمكن حل هذه المعادلة باستخدام التعويض.

$$x=e^t \quad 02 \quad t=\ln x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}.\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

وهكذا يمكن إيجاد بقية الحدود وبالتعويض تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\phi(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ...) = 0$$

وهذه المعادلة لا تحتوى على t بصفة صريحة ويمكن حلها باستخدام التعويض .

$$y'' = p\frac{dp}{dy} \quad , \quad y' = p$$

وبذلك يمكن تخفيض رتبة المعادلة بمقدار الواحد .

<u>مثال(1):-</u> أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y(x^2\frac{d^2y}{dx^2}) + (\frac{dy}{dx})^2 = 3y(x\frac{dy}{dx})$$

<u>الحل :</u> هذه المعادلة متجانسة وتكون على الصورة

$$f(\mathrm{y}, \mathrm{x}\frac{dy}{dx}, x^2\frac{d^2y}{dx^2}, ...) = 0$$

باستخدام التعويض $x = e^t$ نجد أن .

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \;,\; x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$y\frac{d^2y}{dt^2} - 4y\frac{dy}{dt} + (\frac{dy}{dt})^2 = 0$$

بوضع $\frac{dy}{dt} = p$ L $\frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{dp}{dy}$

$$yp\frac{dp}{dy} - 4yp + p^2 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = 4$$

وهذه معادلة خطية يكون عاملها الكامل هو

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

$$\frac{d}{dy}(py) = 4y$$

$$yp = 2y^2 + c_1$$

$$p = 2y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4y\,dy}{2y^2 + c_1} = \int \mathrm{dt} + \mathrm{c}_2$$

$$\mu\sqrt[4]{2y^2 + c_1} = \ln x + \ln c_2$$

$$\sqrt[4]{2y^2 + c_1} = x c_2$$

$$2y^2 + c_1 = x^4 c_2^4$$

$$y^2 = \frac{x^4 c_2^4}{2} - \frac{c_1}{2}$$

وهو الحل العام

(ب) إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}, x\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

أي تكون هذه المعادلة متجانسة من البعد صفر .

وفى هذه الحالة نضع

$$y = zx, \quad x = e^t$$

فيكون

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}$$

ولكن

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt},$$

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$

$$(2)\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dt},$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=2x\frac{dz}{dx}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$=2\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$

$$(3)x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}$$

وبالتعويض عن (2) ، (3) تتحول المعادلة (1) الى الصورة

$$\phi(z,\frac{dz}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},.....)=0$$

وهى معادلة خالية من t ويمكن حلها كما سبق

مثال(2) :- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الأتية

$$(x^2+y^2)(y-xy')+x^2y^2y''=0$$

الحل :- بالقسمة على x^3 نجد أن

$$(1+\frac{y^2}{x^2})(\frac{y}{x}-y')\frac{y^2}{x^2}-xy''=0$$

بوضع

$$y=zx,\ x=e^t$$

تتحول المعادلة التفاضلية الى الصورة

$$(1+z^2)(z-z-\frac{dz}{dt})+z^2(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt})=0$$

$$-\frac{dz}{dt}-z^2\frac{dz}{dt}+z^2\frac{d^2z}{dt^2}+z^2\frac{dz}{dt}=0$$

$$z^2\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dz}{dt}$$

بوضع

$$\frac{dz}{dt}=p \quad , \frac{d^2z}{dt^2}=p\frac{dp}{dz}$$

$$z^2p\frac{dp}{dt}=p$$

$$\int dp=\int\frac{dz}{z^2}$$

$$p=\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{a}=\frac{z-a}{az}$$

$$\int\frac{az\,dz}{z-a}=\int dt$$

$$t.\ln b=a\int[1+\frac{a}{z-a}]dz$$

$$=az+a^2\ln(z-a)$$

$$\mathrm{t}=\mathrm{az}+\mathrm{a}^2\ln(\mathrm{z}-\mathrm{a})+\ln\mathrm{b}$$

$$\ln\mathrm{x}=\mathrm{a}\frac{y}{x}+a^2\ln(\frac{y}{x}-a)+\ln b$$

$$x=b(\frac{y}{x}-a)^{a^2}e^{a\frac{y}{x}}$$

وهو الحل العام

<u>رابعاً: الطرف الأيسر</u> للمعادلة

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',\mathrm{y}'',.....,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هو عبارة عن مشتقة لمقدار تفاضلي ما من الرتبة $(n-1)$ وليكن مثلاً:

$$\phi=\phi(\mathrm{c},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{y}',.....,\mathrm{y}^{(n)})=0$$

هنا يمكن كتابة المعادلة $\frac{d\phi}{dx}=0$ ومنها $\phi=c$

مثال(1) : حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' + y'^2 = 0$$

الحل : هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$d\,(yy') = 0$$

ومنها يكون

$$yy' = c$$
$$y^2 = c_1 x + c_2$$

ملحوظة : أحيانا للحصول على دالة مشتقتها تساوى الطرف الأيسر للمعادلة فإن ذلك لا يتحقق إلا بعد ضرب طرفي المعادلة في دالة ما .

مثال(2) : حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' = y'^2$$

الحل : بالقسمة على yy' نحصل على

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$$
$$\{\frac{y''}{y'} = \{\frac{y'}{y}$$
$$\ln y' = \ln y + \ln c$$
$$y' = yc$$
$$\frac{dy}{dx} = yc$$
$$\frac{dy}{y} = c\,dx$$
$$\ln y = cx + c_1$$
$$y = e^{cx + c_1} = c_1 e^{cx}$$

وهو الحل العام

مثال (3) :- حل المعادلة التفاضلية

$$y'y''' = 2y''^2$$

<u>الحل :</u> بالقسمة على $y'y''$ نحصل على

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}$$

$$\{\frac{y'''}{y''} = 2\{\frac{y''}{y'}$$

$$\ln y'' = 2\ln y' + \ln c$$

$$y'' = cy'^2$$

وبوضع $y' = p$

$$\frac{dp}{dx} = cp^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = cdx \Rightarrow -\frac{1}{p} = cx + c_1$$

$$p = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$y = \frac{1}{c}\ln(cx + c_1) + c_2$$

وهو الحل العام

تمارين (2)

1- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية بحلها بالنسبة إلى p , $p=\frac{dy}{dx}$

$$(i)\ y^2p^2-3xyp+2x^2=0$$
$$(ii)\ p^2-(xy+2x)p+2x^2y=0$$
$$(iii)\ p^2-p-6=0$$
$$(iv)\ p^3-p(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)=0$$
$$(v)\ p^2-2\cos x-1=0$$
$$(vi)\ x+yp^2=p(1+xy)$$

2- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في x:

$$(i)\ x=4p+4p^3$$
$$(ii)\ p^2-2xp+1=0$$
$$(iii)\ 2y+p^2+2p=2x(p+1)$$
$$(iv)\ p=\tan(x-\frac{p}{1+p^2})$$
$$(v)\ p^3-p(y+3)+x=0$$

3- أوجد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في y:

$(i)\ y = xp^2 + p$

$(ii)\ y = x + p^3$

$(iii)\ p^2 + p = e$

$(iv)\ y = p\sin p + \cos p$

$(v)\ y = p\tan p + \log\cos p$

$(vi)\ e^{p-y} = p^2 - 1$

4- أوجد الحل العام والحل المفرد لمعادلة كليروت التفاضلية لكل من المعادلات الآتية :

$(i)\ y = xp + p^2$

$(ii)\ y = xp + p^3$

$(iii)\ y = xp + \cos p$

$(iv)\ y = x\,p + \sqrt{a^2p^2 + b^2}$

$(v)\ p = \log(xp - y)$

$(vi)\ \cosh xp \cosh y = \sinh px \sinh y + p$

$(vii)\ y = xp + \dfrac{p}{p+1}$

$(viii)\ y = xp + \sqrt{p^2 - 1}$

$(ix)\ y = xp + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$

$(x)\ y = xp + \sqrt{p^2+1} - p\log(p + \sqrt{p^2+1})$

5- أوجد المميز c للمعادلات التفاضلية الأتية وبين المنحنيات التي يمثلها الحل الشاذ (أن وجد)

$(i)\ (x^2 - 1)p^2 - 2xyp - x^2 = 0$

$(ii)\ 2y^2p^2 + 2xyp + x^2 + y^2 - 1 = 0$

$(iii)\ p^2(x^2 - 1) - (y^2 - 1) = 0$

6- أوجد المميز p للمعادلات التفاضلية الأتية وبين المنحنيات التي يمثلها مبينا الحل الشاذ (أن وجد) ثم أوجد الحل العام

الفصل الأول
التكامل غير المحدد

مقدمة :

درسنا من قبل اشتقاق دالة ما فى فترة معطاة (نطاق تعريف الدالة) ، وسندرس فى هذا الفصل العملية العكسية لعملية الاشتقاق. بمعنى أنه يعطى لنا دالة ما $f(x)$ على فترة مفتوحة (a,b) ويطلب منا إيجاد دالة أخرى $F(x)$ على نفس الفترة بحيث يكون $F'(x)=f(x)$.

سوف نرمز لتلك الدالة المطلوب إيجادها بالرمز : $\int f(x)d(x)$ ونقرأ "التكامل غير المحدد" للدالة $f(x)$. وهذه التسمية جاءت نتيجة للارتباط الوثيق بين ما نسميه "الدالة المقابلة" و "التكامل المحدد" الذى سوف نتناوله بالدراسة فى فصل لاحق.

ولقد اكتشف التكامل المحدد فى أواخر القرن الثامن عشر بواسطة مجموعة من العلماء أمثال ريمان - ليمنتر - داربو وغيرهم ، وذلك فى محاولة لإيجاد مساحات الأشكال الهندسية المختلفة وأطوال المنحنيات وحجوم الأجسام المختلفة وغير ذلك من المشاكل الرياضية. أما مفهوم التكامل غير المحدد فإنه قدم واكتشف وطور كوسيلة لحساب التكامل المحدد.

(1-1) الدالة المقابلة :

لتكن $f(x)$ دالة معرفة فى فترة مفتوحة (a, b) من خط الأعداد ومطلوب منا البحث عند دالة أخرى $F(x)$ تحقق العلاقة :

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \tag{1-1}$$

"تسمى الدالة $F(x)$ إن وجدت "دالة مقابلة" للدالة $f(x)$."

فمثلا : الدالة $F(x)=x^5$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=5x^4$ لأن $F'(x)=f(x)$.

والدالة $F(x)=\sin x$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=\cos x$.

(1-2) بعض خواص الدالة المقابلة :

خاصية 1 : إذا كانت $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ وكان أ ثابت فإن $\psi(x)=F(x)+c$ تكون أيضاً دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

البرهان : الدالة $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ، لذا فإن $F'(x)=f(x)$ وحيث أن $\psi(x)=F(x)+c$ فإن

$\psi'(x)=F'(x)=f(x)$ إى أن $\psi(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

مثال : رأينا أن $F(x)=x^5$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)=5x^4$ لأن $F'(x)=f(x)$ الدالة $\psi(x)=x^5+12$ هى أيضا دالة مقابلة للدالة $f(x)$ كذلك الدوال $x^5-7,\ x^5+\sqrt{2},\ \ x^5+d$ أى أنه يوجد عدد لا نهائى من الدوال المقابلة معطاة $f(x)$.

خاصية 2 : إذا كانت كل من $F(x),\psi(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ فى فترة ما فإن

$$\psi 9x) - F(x) = const.$$

البرهان : من المعطيات نجد أن

$$F'(x) = \psi'(x) = f(x).$$

ضع $\phi(x) = \psi(x) - F(x)$ يكون $\phi'(x) = \psi'(x) - F'(x) = 0$ مما يعنى أن $\phi(x) = const.$.

من خاصية (1) ، (2) يتضح وجود عائلة من الدوال المقابلة لدالة ما $f(x)$. ونعبر عن هذه العائلة بالصورة : $F(x) + const$ حيث تختلف قيمة الثابت من دالة مقابلة إلى أخرى ، وهذا يعنى أنه لا يعتمد على المتغير x وتتحدد قيمته إذا أعطى شرط إضافى تحققه الدالة المقابلة.

مثال : $F(x) = \sin x + c$

هى عائلة الدوال المقابلة للدالة $\cos x$. ولكن الدالة $\cos x$ التى تحقق الشرط $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

والدالة $\chi(x) = \sin x + 1$ هى الدالة المقابلة للدالة $\cos x$ التى تحقق الشرط $\chi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ وهكذا ....

تعريف :

"التكامل غير محدد الدالة $f(x)$ هو الصورة العامة لأى دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ويرمز له بالرمز $\int f(x) d(x)$. ويقرأ متكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x."

وإذا كانت $\phi(x)$ أى دالة مقابلة للدالة $f(x)$ فإن :

(2-1) $\int f(x) d(x) = \phi(x) + c$ وحيث أن $\phi'(x) = f(x)$ فإن

(3-1) $\int \phi'(x) d(x) = \phi(x) + c$

أمثلة توضيحية :

(1) ليكن $\phi(x) = x^2$ فإن $\phi'(x) = 2x$ لذا فإن $\int 2x dx = x^2 + c$

(2) ليكن $F(x) = \sin x$ فإن $F'(x) = \cos x$ لذا فإن $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(3) إذا كان $\psi(x) = \tan x$ فإن $\psi'(x) = \sec^2 x$ وعليه فإن $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(4) نعلم أن الدالة $g(x) = e^x$ تحقق العلاقة $g'(x) = e^x$ وبذلك يكون $\int e^x dx = e^x + c$

(5) ليكن $h(x) = e^{x^2}$ فإن $h'(x) = e^{x^2}.2x$ لذا فإن $\int e^{x^2}.2x\, dx = e^{x^2} + c$

من تعريف التكامل غير المحدد يمكن مباشرة برهان قوانين التكامل ، وهى مدونة فى الجدول التالى حتى يسهل الرجوع إليها عند لضرورة. يبقى هنا أن نعطى تفسيراً هندسياً لثابت التكامل c ، لذلك نعتبر المثال التالى :

نرسم مجموعة الدوال المعرفة بالمعادلة $y = x^2 + c$ فنجدها عبارة عن المنحنى $y = x^2$ منزلقا بالمقدار c إلى أعلى أو إلى أسفل حسب إشارة c كما بالرسم.

إذا رسمنا مستقيماً يوازى المحور oy ليقطع هذه المنحنيات؟ ثم رسمنا من نقاط التقاطع مماسات للمنحنيات فإن المماسات تكون متوازية وميل كل منها $\frac{dy}{dx}=2x$ من ذلك نستنتج أن $y=\int 2x\,dx$ تدل على أحد المنحنيات $y=x^2+c$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sec^2 x$	$\tan x + c$
$\mathrm{sosec}^2 x$	$-\mathrm{cotan}\, x + c$
$\sec x . \tan x$	$\sec x + c$
$\mathrm{cosec}\, x . \tan x$	$-\mathrm{cosec}\, x + c$
e^x	$e^x + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\mathrm{sech}^2 x$	$\tanh x + c$
$\mathrm{socech}^2 x$	$-\mathrm{cotan}\, x + c$

(3-1) خواص التكامل غير المحدد :

نظرية (1-1) : ليكن $\psi'(x)=g(x), \phi'(x)=f(x)$ وليكن c ثابت فإن :

(1) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

البرهان :

(1) اعتبر الدالة $\psi(x)+\phi(x)$ فيكون :

$$[\psi(x)+\phi(x)]' = \psi'(x)+\phi'(x) = g(x)+f(x)$$

وبالتالى فإن $\psi(x)+\phi(x)$ هى دالة مقابلة للدالة $g(x)+f(x)$ أى أن :

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \phi(x)+\psi(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(2) اعتبر الدالة $c.\phi(x)$ فإن :

$$[c.\phi(x)]' = c.\phi'(x) = c.f(x)$$

ولذلك فإن $c.\phi(x)$ هى الدالة المقابلة للدالة $c.f(x)$ وبالتالى فإن

$$\int c.f(x)dx = c.\phi(x) + d = c.\int f(x)dx$$

ملاحظات :

(1) النظرية السابقة تمدنا بأحدى القواعد الأساسية لإجراء عملية التكامل ويمكن صياغتها كما يلى :

"تكامل مجموع دالتين = مجموع تكاملى الدالتين ،

تكامل ثابت مضروباً فى دالة = الثابت مضروباً فى تكامل الدالة"

(2) يمكننا صياغة النظرية السابقة بصورة عامة كما يلى :

لتكن $f(x), g(x)$ معرضتين كما سبق وليكن c_1, c_2 ثابتتين فإن :

$$\int [c_1.f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1\int f(x)dx + c_2.\int g9x)dx$$

(3) القاعدة السابقة تعطينا خاصية هامة هى "الخاصية الخطية" للدوال التى يوجد تكامل لها.

(4-1) الصورة القياسية :

$$(1)\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ \ n \neq -1$$

$$(2)\ \int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

الصورة القياسية 01) صحيحة لجميع قيم n الموجبة والسالبة والكسرية ماعدا $n=-1$ حيث نستخدم فى الحالة $n=-1$ الصورة (2).

أمثلة مباشرة :

1- $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$ $\qquad n = 5$

2- $\int dx = \frac{x^2}{2} + c$ $\qquad n = 1$

3- $\int sx = x + c$ $\qquad n = 0$

4- $\int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + c$ $\qquad n = \sqrt{2}$

5- $\int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + c$ $\qquad n=-3$

$\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + c$ $\qquad n = +\frac{2}{3}$

أمثلة مباشرة (بها أكثر من دالة) :

هنا سوف نطبق الخاصية الخطية للتكامل والتى سبق صياغتها فى نظرية (1-1).

مثال : أوجد قيمة التكامل $\int \left[3x^2 + 5x - 1\right]dx$

الحل : سوف نرمز للتكامل المعطى بالرمز I وذلك للاختصار.

$$\begin{aligned} I &= \int \left(3x^2+5x-1\right)dx \\ &= 3\int x^2dx+5\int xdx-\int dx \\ &= x^3+\frac{5}{2}x^2-x+c. \end{aligned}$$

يلاحظ فى هذا المثال أن الدالة المكاملة من البساطة بحيث لا تحتاج للاعتماد على قاعدة أو طريقة معينة لتحويلها إلى أحدى الصور القياسية. وفيما يلى نعطى بعض الطرق والأساليب التى تفيد فى حالات الدوال الأكثر تعقيداً والتى سوف نراها من خلال أمثلة.

(5-1) طرق التكامل :

من المشاكل التى تقابلنا عادة لإيجاد تكاملات الدوال مشكلة تحويل الدالة المراد تكاملها إلى احدى الصور القياسية. لذلك سنقوم بدراسة عدة طرق لإيجاد التكامل مثل :

1- طرق أولية.

2- طريقة التعويض.

3- طريقة التكامل بالتجزئ

4- طريقة الاختزال.

1- الطرق الأولية للتكامل :

نقصد بالطرق الأولية استخدام العمليات الأولية مثل الضرب والقسمة وفك الأقواس وخلافه. وسنوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال : أوجد

$$I=\int \frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2}dx$$

الحل : واضح أن

$$\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2}=\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2}=x-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$

ولذلك يكون

$$\begin{aligned} I &= \int x\,dx-\int dx+\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}x^2-x+\log|x|+\frac{1}{x}+c \end{aligned}$$

حيث c ثابت إختيارى.

مثال : احسب قيمة التكامل

$$I=\int \sqrt{x}\,(x+1)dx$$

الحل

$$I=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$
$$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$$

تمرينات (1-1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int (x^2-1)dx$

2- $\int (x-1)^2 dx$

3- $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

4- $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

5- $\int \frac{(2x+1)^2}{x}dx$

6- $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^2}dx$

7- $\int x(x-1)^2 dx$

8- $\int \frac{4x^2+7}{\sqrt{x}}dx$

9- $\int \left[\sqrt{7x}+\frac{3}{\sqrt{5x}}\right]dx$

10- $\int (x+\frac{1}{x})^2 dx$

11- $\int \frac{x(x-1)+5}{x}dx$

12- $\int \frac{1}{x}(x+1)^3 dx$

13- $\int (2x+1)^2(x-6)^2 dx.$

2- طريقة التعويض :

كما أشرنا فى البند السابق إلى أن صعوبة إيجاد التكامل هى فى وضع الدالة المكاملة فى صورة جدولية ، وطريقة التعويض هى أحدى الطرق الهامة التى يمكن بها وضع الدالة المكاملة بصورة يصلح معها استخدام الصور القياسية. ولتوضيح الفكرة :

ليكن $F'(x)=f(x)$ فإن $\int f(x)dx=F(x)+c$ وإذا كانت كل من $f,\ \ F$ دالة فى المتغير y وكان

$\frac{d}{dy}\left[F(y)\right]=F'(y)=f(y)$ فإن $\int f(y)dy=F(y)+c$

وإذا فرضنا أن y دالة فى المتغير x وليكن $y=\phi(x)$ فإن $\frac{dy}{dx}=\phi'(x)$ وهى تكافىء $dy=\phi'(x)dx$

بالتعويض عن y بدلالة x ينتج أن

$$\int f\left[\phi(x)\right]\phi'(x)\,dx=F\left[\phi(x)\right]+c$$

وسوف نطبق هذا القانون فى حالاته الخاصة :

حالات خاصة :

1- الصور القياسية :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

بوضع $x = \phi(y), \quad dx = \phi'(y)dy,$ نحصل على $\int [\phi(y)]^n\,\phi'(y)\,dy = \frac{[\phi(y)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

2- الصورة القياسية :

$$\int \frac{dy}{y} = \log|y| + c$$

بوضع $y = \phi(x), \quad dy = \phi'(x)dx,$ نحصل $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \log|\phi(x)| + c$

أمثلة :

1- أوجد $\int \left(x^2+3\right)^5 x\,dx$

الحل : يمكن إتباع الطرق الأولية مثل فك $\left(x^2+3\right)^5$ باستخدام نظرية ذات الحدين وضرب الناتج فى x ثم التكامل حدا حدا.

ويمكننا استخدام التعويض كما يلى :

ضع $\phi(x) = x^2+3$ يتضح أن $\phi'(x) = 2x$

نكتب التكامل على الصورة $I = \frac{1}{2}\int \left(x^2+3\right)^5 (2x)\,dx$

واستخدم القاعدة

$$\int [\phi(x)]^n . \phi'(x)\,dx = \frac{[\phi(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث $n = 5, \quad \phi(x) = x^2+3,$ ينتج أن $I = \frac{1}{2}.\frac{\left[x^2+3\right]^6}{6} + c$

$$= \frac{1}{12}\left[x^2+3\right]^6 + c$$

صورى أخرى للحل : ضع

$$y = x^2+3$$
$$dy = 2x\,dx$$
$$\therefore I = \frac{1}{2}\int \left(x^2+3\right)^5 (2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int y^5\,dy = \frac{1}{12}y^6 + c$$
$$= \frac{1}{12}\left(x^2+3\right) + c$$

2- أوجد $\int \sin^3 x . \cos x\,dx$

الحل :

ضع $y = \sin x$ نجد أن

$$dy = \cos x\,dx$$
$$\therefore I = \int y^3\,dy = \frac{y^4}{4} + c = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$$

3- أوجد $\int \frac{1}{x}\log x\,dx,\ x>0$

الحل :

نفرض أن $y=\log x$ نحصل على

$$dy=\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore I=\int \log x.\frac{1}{x}dx=\int y\,dy=\frac{y^2}{2}+c.$$

$$=\frac{1}{2}[\log x]^2+c.$$

4- أوجد $\int \frac{e^x}{\sqrt{ye^x+1}}sx$

الحل :

بوضع $y=e^x+1$ نحصل على

$$dy=e^x+1$$

$$\therefore I=\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$$

$$=\int y^{-\frac{1}{2}}dy=2y^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=2\sqrt{e^x+1}\quad +c$$

5- أوجد $\int \frac{3x\,dx}{x^2-1};\quad |x|\neq 1$

الحل :

بفرض أن $y=x^2-1$ ينتج أن $dy=2x\,dx$

نقوم بتعديل البسط فى الدالة المكاملة :

$$I=\frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{dy}{y}=\frac{3}{2}\log|y|+c$$

$$=\frac{3}{2}\log|x^2-1|+c.$$

ملاحظة : الصورة القياسية

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx=\log|\phi(x)|+c$$

يمكن صياغتها كما يلى :

"إذا كانت الدالة المراد تكامله على صورة كسر ، بحيث أن البسط تفاضل المقام فإن التكامل هو لوغاريتم المقام".

6- أوجد $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x+1}dx$

الحل : نلاحظ أن البسط تفاضل المقام فإذا كان $\phi(x)=\tan x+1$ فإن $\phi'(x)=\sec^2 x$ وبالتالى يكون

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x+1}\,dx=\log\left|1+\tan x\right|+c.$$

تمرينات (2-1)

1- $\int \left(x^2+5\right)^3 x\,dx$

2- $\int \sqrt{x^3+5}\,x^2\,dx$

3- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

4- $\int \sqrt[3]{5-4x}\,dx$

5- $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$

6- $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+7}}$

7- $\int \tan^2 x\,\sec^2 x\,dx$

8- $\int \sin^5 x\cos x\,dx$

9- $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

10- $\int \sin 2x\cos 2\,dx$

11- $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

12- $\int \frac{dx}{x\left(\log x\right)^2}$

13- $\int \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}\,dx$

14- $\int \frac{\cos x}{\sin x+1}\,dx$

15- $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}\,dx$

16- $\int \frac{x+5}{x+1}\,dx$

17- $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

18- $\int \frac{x+1}{x^2+2X+3}\,dx$

19- $\int \frac{x^2+2x-1}{x+2}$

20- $\int \frac{dx}{x\left(\log x+2\right)}$

(6-1) تكاملات الدوال المثلثية :

الصور القياسية لهذه التكاملات :

1- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

2- $\int \cos\ x\, dx = \sin x + c$

3- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

4- $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotan} x + c$

5- $\int \sec x \tan x\, dx = \tan x + c$

6- $\int \operatorname{cosec} x\ \operatorname{cotan} x\ dx = -\operatorname{cosec} x + c$

وهذه الصور يمكن كتابتها على صورة عامة باستخدام المتغير y بدلا من x. فمثلا

$$\int \sin y\ dy = -\cos y + c$$

وإذا كانت y دالة فى المتغير x أى أن $y = \phi(x)$ فإن $dy = \phi'(x)dx$

وبالتعويض ينتج أن

$$\int \sin[\phi(x)].\phi'(x)\, dx = -\cos[\phi(x)] + c$$

وبالمثل لبقية الصور القياسية :

حالة خاصة :

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

حيث a, b مقادير ثابتة.

وهذا صحيح لأنه بفرض أن $y = ax + b$ فإن

$$dy = a.dx$$

$$\therefore I = \frac{1}{a}\int \sin y\ dy = -\frac{1}{a}\cos y + c$$

$$= -\frac{1}{a}\cos[ax+b] + c$$

أمثلة

1- أوجد

1- $\int \sin 3x\, dx$ 2- $\int \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) dx$

الحل :

1- $\int \sin\ 3x\ dx = -\frac{1}{3}\cos\ 3x + c.$

2- $\int \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) dx = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + 4\right) + c$

2- أوجد

1- $\int \tan x\ dx$ 2- $\int \operatorname{cotan} x\ dx$

الحل :

$$1-\ \int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

والدالة المكاملة فيها البسط تفاضل المقام

$$\therefore I = -\log|\cos x| + c$$
$$= \log\left|[\cos x]^{-1}\right| + c$$
$$= \log|\sec x| + c$$

وبالمثل

$$2-\ \int \cot\text{an}\, x\ dx = \log|\sin x| + c$$

3- أوجد

$$1-\ \int x\ \sin x^2\ dx \qquad\qquad 2-\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\ dx$$

الحل :

$$1-\ \int x \sin x^2\ dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2 .\ (2x)\ dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

$$2-\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\ dx = 2\int \cos\sqrt{x} . \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sin\sqrt{x} + c$$

4- أوجد

$$1-\ \int (1+\tan x)^2\ dx \qquad\qquad 2-\ \int (\sec x - \tan x)^2\ dx$$

الحل :

$$1-\ I = \int \left(1 + 2\tan x + \tan^2 x\right) dx$$

ولكن

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$\therefore I = \int \sec^2 x\ dx + 2\int \tan x\ dx$$
$$= \tan x + 2\log|\sec x| + c$$

$$2-\ I = \int \left[\sec^2 x + \tan^2 x - 2\sec . \tan x\right] dx$$

بوضع

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

نجد أن

$$I = \int \left[2\sec^2 x - 2\sec x . \tan x - 1\right] dx$$
$$= 2\tan x - 2\sec x - x + c$$

(7-1) تكاملات على الصورة :

$$\int \sin^n x\ dx, \quad \int \cos^n x\ dx, \quad \int \sin^m x\ \cos^n x\ dx$$

حيث أن n أو m أو كلاهما فردى
إذا كانت n فردية فإن (n-1) زوجية لذا نستخدم المتطابقة $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ لتحويل دالة الجيب إلى جيب التمام أو العكس.

أمثلة

1- أوجد $\int \sin^5 x\ dx$

الحل :

$$I=\int \sin^4 x.\sin x\ dx$$
$$=\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\ dx$$
$$=\int \left[1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right]\sin x\ dx$$

ولكن

$$\frac{d}{dx}\left[\cos x\right]=-\sin x$$
$$\therefore I=-\int \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)\left(-\sin x\right)dx$$
$$=-\int \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)d\left(\cos x\right)$$

بوضع $y=\cos x$ نجد أن

$$I=-\int \left(1-2y^2+y^4\right)dy$$
$$=-\left(y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right)+c$$
$$=-\left(\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x\right)+c$$

2- أوجد $\int \sin^4 x\ \cos^3 x\ dx$

الحل : نكتب التكامل على الصورة

$$I=\int \left(y^4-y^6\right)dy$$
$$I=\int \sin^4 x\ \cos^2 x.\cos x\ dx$$
$$=\int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\ \cos x\ dx$$
$$=\int \left(\sin^4 x-\sin^6 x\right)\ d\sin x$$

بوضع $y=\sin x$ نحصل على

$$I=\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{7}y^7+c$$
$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\sin^2 x\right)\sin^5 x+c.$$

(8-1) تكاملات على الصور :

$$\int \sin^n x\ dx,\quad \int \cos^m x\ dx,\quad \int \sin^n x\ \cos^m x\ dx$$

حيث كلا من m, n زوجية.

فى هذه الحالة نستخدم قواعد التحويل لضعف الزاوية

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

أمثلة

1-
$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\ dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c\\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c\\ &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c.\end{aligned}$$

2-
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\ dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx\\ &= \frac{1}{2}(x + \sin x\ \cos x) + c.\end{aligned}$$

النتائج السابقة يمكن أن تحفظ كقواعد للتكاملين

$$\int \sin^2 x\ dx,\quad \int \cos^2 x\ dx.$$

3- أوجد $\int \sin^2 x\ \cos^2 x\ dx$

الحل : نعلم أن

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\therefore \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)$$

ولكن

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$\therefore \sin^2 x\cos^2 = \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{8}(1+\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

$$\therefore \int \sin^2 x\ \cos^2 x\ dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

تمرينات (3-1)

1- $\int \sin^4 4x\ dx$

2- $\cos(2x+1)dx$

3- $\int x\sin x^2\ dx$

4- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\ dx$

5- $\int \sec^2 2x\ dx$

6- $\int \tan 2x\ dx$

7- $\int x\sec^2 x^2\ dx$

8- $\int \sec^3 x\ \tan x\ dx$

9- $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$

10- $\int \cot\text{an}\, 3x\ dx$

11- $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x+1}}dx$

12- $\int \sin^2 x\cos^3 x\ dx$

13- $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

14- $\int \tan^2 x\sec^2 x\ dx$

15- $\int \cos^3 x\ dx$

16- $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$

17- $\int \tan^3 x\ \sec x\ dx$

18- $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$

19- $\int x\sin^3 x^2\ dx$

20- $\int \frac{\sin^4}{\sqrt{\tan x}}dx$

21- $\int \cos^4 x\ dx$

22- $\int \sin^4 x\ dx$

23- $\int \sin^2 2x\cos^2 2x\ dx$

24- $\int \sin^3 x\ \cos^2\ dx$

25- $\int \sin^6 x\ dx$

26- $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$

(9-1) تكاملات تحتوى دوال أسية وزائدية:

نعلم أن $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$ فإن

1- $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

وحيث أن $\frac{d}{dx}\left(e^{\phi(x)}\right) = e^{\phi(x)}.\phi'(x)$ فإن

2- $\int e^{\phi(x)}\phi'(x)\,dx = e^{\phi(x)} + c$

كذلك نعلم أنه لأى ثابت a يكون $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x.\log a$ فإن

3- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x + c$

أمثلة :

من المعلوم أن $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ لذا يكون

4- $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$

5- $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

6- $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh^2 x + c$

7- $\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = \operatorname{cotanh} x + c$

أمثلة

1- أوجد $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$

الحل : نفرض أن $\phi(x) = \cos 2x$ نجد أن

$$\phi'(x) = -2\sin^2 x$$

$$\therefore I = \int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{\cos 2x}\left(-2\sin 2x\right)dx\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\cos 2x} + c$$

2- أوجد $\int \frac{e^{2x}+4}{e^x}$

الحل :

$$I = \int e^x\,dx + 4\int e^{-x}\,dx$$

$$= e^x - 4e^{-x} + c$$

$$= \frac{e^{2x}-4}{e^x} + c$$

3- أوجد $\int e^x\cosh x\,dx$

ويمكننا كالمعتاد الحصول على صور عامة لهذه الصور السابقة إذا استبدلنا x بمتغير آخر وليكن $y=\phi(x)$.

أمثلة

1- أحسب قيمة التكاملات

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ b) $\int \frac{dx}{1+25x^2}$

الحل :

a) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

استخدم التعويض

$$y=2x$$
$$dy=2dx$$
$$\therefore I=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}y+c$$
$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}2x+c$$

b) $I=\int \frac{dx}{1+25x^2}$

نضع $y=5x$ نحصل على $dy=5dx$

$$\therefore I=\frac{1}{5}\int \frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{5}\tan^{-1}5x+c$$

2- أوجد قيمة

1- $\int \frac{dx}{16+9x^2}$ 2- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

الحل :

$$I=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{16}{9}+x^2}=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+x^2}$$
$$=\frac{1}{9}-\frac{3}{4}\tan^{-1}\frac{3x}{4}+c$$
$$=\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{3x}{4}+c$$

2- $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2}+c$

3- أوجد