محاضرات
في
الــجبـر

لطلاب الفرقة الأولى شعبة الرياضيات

إعداد

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

- ✓ **<u>رؤية كلية العلوم بقنا</u>**

كلية العلوم بقنا تقدم خدمات تعليمية وبحثية ومجتمعية متميزة.

- ✓ **<u>رسالة كلية العلوم بقنا</u>**

تلتزم كلية العلوم بقنا بإعداد خريجين متميزين طبقا للمعايير الأكاديمية القومية ، وتقديم بحوث علمية متميزة ، وتطوير مهارات وقدرات الكوادر البشرية بها ، وتوفير خدمات مجتمعية وبيئية تلبي طموحات مجتمع جنوب الوادي ، وذلك من خلال مشاركة مجتمعية فاعلة.

مقدمة:

الحمد لله الذي علم بالقلم،علم الإنسان مالم يعلم ، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد ﷺ وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد000

فلقد ارتبط علم الجبر منذ تأسيسه بعلماء المسلمين الأوائل وعلى رأسهم العلامة **الخوارزمي** (780م-850م) فقد أثبت أن للمعادلة الجبرية من الدرجة الثانية $ax^2+bx+c=0$ حلان

هما $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;b^2-4ac\geq 0$ وقسّم المعادلة من الدرجة الثالثة $ax^3+bx^2+cx+d=0$ إلى ثلاثة عشر نوعاً ، وقد شارك كلٌ من **الماهاني** المُتوَفى عام(874م) **وأبو الجود بن الليث** المُتوَفى عام (1008م) **وعمر الخيَام** (1042-1123م) في حل معادلات الدرجة الثالثة بطرق هندسية ، وحل **ابن الهيثم**
(965-1038م) و**عمر الخيام** معادلات الدرجة الرابعة.

ويُعتبر **الخوارزمي** مبتكر المحددات ،وطورها الياباني **سكي كاو** (1642-1708م) عام 1682م ، والألماني **ليبنز** (1646-1716م) عام 1693م ، والفرنسي **لابلاس** (1749-1827م) ، واستخدم جاوس المحددات في نظريته عن الأشكال مما قاد الفرنسي **كوشي** (1789-1857م) إلى تطوير نظرية المحددات ووضعها بالشكل الذي نراه اليوم وذلك في عام 1812م.

أما مفهوم المصفوفة فكان معروفاً للبابلين وقدماء الصينين وعلماء المسلمين ، وقد عبر الألماني **جاوس** (1777-1855م) عن المصفوفة بمستطيل منتظم عند دراسته لبعض التحويلات الخطية وذلك في عام 1829م ،كما عبر الألماني **فيردناند اينشتاين**
(1823-1852م) عن المصفوفة بدلالة الرموز وبين أن ضرب المصفوفات ليس إبدالياً، وتعامل **كيلي** عام 1858م مع المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية والثالثة.

ونقدم كتابنا الملخص هذا والذي يشتمل على مجموعة المحاضرات في الجبر العام والتي قمت بتدريسها في الجامعات والمعاهد وهي مقسمة إلى أحد عشر بابا.

الباب الأول منها يتناول المحددات وخصائصها ، والباب الثاني يتناول المصفوفات وتكوينها وخصائصها .

وفي الباب الثالث مفهوم الكسور الجزئية ، وفي الباب الرابع تناولنا نظرية ذات الحدين وخصائصها ، وفي الباب الخامس تناولنا مبدأ الاستنتاج الرياضي ، وفي الباب السادس المتسلسلات وطرق جمعها وبحث تقارب أو تباعد المتسلسلات ،

وفي الباب السابع جبر الأعداد المركبة ، وفي الباب الثامن تناولنا نظرية المعادلات الجبرية وطرق حل المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة والرابعة.

وفي الباب التاسع تناولنا الطرق التقريبية لإيجاد جذور المعادلات الجبرية وغير الجبرية.

وفي الباب العاشر تناولنا مفهوم توفيق المنحنيات.

وفي الباب الحادي عشر تناولنا مفهوم المنطق الرياضي وجبر المنطق والدوائر المنطقية.

ونسأل الله عز وجل أن ينفعنا بما علمنا وأن يعلمنا ما ينفعنا ، وأن يجعل أعمالنا خالصة لوجهه الكريم ، وأخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

كلية العلوم بقنا
جامعة جنوب الوادي

المحتوى:

الصفحة

- **الأهداف العامة للمقرر:**

1- إدراك أهمية المفهوم الرياضي والتفكير المنطقي السليم.
2- اكتساب مهارة التخصيص والتعميم والقدرة على الاستنتاج.
3- اكتساب مهارة المحاولات الذهنية التي تؤدي إلى حل صائب مناسب.
4- تبيين الصفات الأساسية لكل من مفاهيم الجبر العام.
5- استيعاب المفاهيم الأساسية في الجبر وتطبيقاتها.

- **المراجع:**

1- موسوعة علماء العرب على الإنترنت.
http://www.alnoor-world.com/scientists
2- موقع الرياضيات على الإنترنت.
http://www.math.com
3- موسوعة ويكيبيديا الحرة على الإنترنت.
http://en.wikipedia.org/wiki/mathematics
4- د.معروف سمحان وأخرون "مبادئ الرياضيات المتقطعة"جامعة الملك سعود.

(1) S.Lipschutz : “Theory and problem of matrices” ,Schaum’s outline Series Sl(metric Edition McGraw-Hill Book Company (1974).
(2) R.Courant and H.Rebbins: "What is Mathematics" Oxford university press (1978).
(3) P.M.Cohn: "Algebra" vol.1,2 John Wiley and Sons (1978),New York (1978,1979).
(4) E.Mendelson: "Number Systems and Foundations of Analysis" Academic press London (1973).
(5) David.I.Steinberg: "Computational Matrix Algebra" McGraw-Hill Inc (1974).

الباب الأول

المحددات Determinates

محددات الرتبة الثانية:

نعتبر المعادلتين الآتيتين في المجهولين x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ كلها مقادير معلومة.

لحل هاتين المعادلتين نستخدم طريقة حذف أحد المجاهيل ثم نعين الأخر والعكس كما يتضح فيما يلي:

لتعيين x_1 نضرب المعادلة الأولى في المقدار (a_{22}) والثانية في المقدار $(-a_{12})$ ثم نجمعهما معا فنحصل على x_1 ، وبضرب المعادلة الأولى في المقدار $(-a_{21})$ والثانية في المقدار (a_{11}) ثم نجمعهما معا فنحصل على x_2 ويكون:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \, , \qquad (2)$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

وإذا كان $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ فإن المقدار $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ يُسمى مفكوك محدد الرتبة الثانية ، ويُرمز له بالرمز:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وواضح أن هذا المحدد يتكون من معاملات المجاهيل x_1, x_2 في المعادلات(1) ولذلك يُسمى بمحدد المعاملات.

وبالمثل يمكن اعتبار المقادير $b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \, , a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$ وهي مفكوك المحددات:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{21} b_2 \, , \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

ويُلاحظ أن Δ_1 يمكن الحصول عليه من Δ باستبدال معاملات x_1 بالحدود المطلقة. كذلك Δ_2 يمكن الحصول عليه من Δ باستبدال معاملات x_2 بالحدود المطلقة. وبالتالي يمكن كتابة العلاقة(2) على الصورة:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \ , \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (3)$$

وتكون العلاقة (3) هذه هي حل المعادلات(1) .

وإذا كانت $\Delta \neq 0$ فإن المعادلات(1) يكون لها حل وحيد(قيم وحيدة للمجاهيل) ، أما إذا كانت $\Delta = 0$ وأحد المحددات Δ_1, Δ_2 على الأقل لا يساوي الصفر فإن مجموعة المعادلات(1) لا يكون لها حل على الإطلاق ، أما إذا كانت $0 = \Delta = \Delta_1 = \Delta_2$ فإن مجموعة المعادلات(1) يكون لها أكثر من حل.

<u>محددات الرتبة الثالثة:</u>

نعتبر الثلاث معادلات الآتية في ثلاث مجاهيل x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

لحل مجموعة المعادلات هذه نضرب المعادلة الأولى والثانية والثالثة في المقادير L, M, N على الترتيب، ونختار قيم L, M, N التي تجعل معاملات x_2, x_3 صفرا في حاصل الجمع التالي للمعادلات:

$$\begin{aligned} (La_{11} + Ma_{21} + Na_{31})x_1 + (La_{12} + Ma_{22} + Na_{32})x_2 \\ + (La_{13} + Ma_{23} + Na_{33})x_3 = Lb_1 + Mb_2 + Nb_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

$La_{12} + Ma_{22} + Na_{32} = 0$ (معامل x_2 يساوي الصفر)

$La_{13} + Ma_{23} + Na_{33} = 0$ (معامل x_3 يساوي الصفر)

ولتعيين قيم L, M, N نحل هاتين المعادلتين في النسب $\frac{L}{N}, \frac{M}{N}$ باعتبارهما مجهولين أي نحل المعادلتين:

$$a_{12}\frac{L}{N}+a_{22}\frac{M}{N}=-a_{32}$$

$$a_{13}\frac{L}{N}+a_{23}\frac{M}{N}=-a_{33}$$

وحلهما يكون:

$$\frac{L}{M}=\frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \frac{M}{N}=\frac{\Delta_2}{\Delta_3} \qquad (6)$$

حيث:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_1=\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك فإن (6) يمكن أن تأخذ الصورة:

$$\frac{L}{\Delta_1}=\frac{M}{\Delta_2}=\frac{N}{\Delta_3}$$

ويمكن اختيار قيم L, M, N التي تجعل معاملات x_2, x_3 تساوي الصفر بحيث إن:

$$L=\Delta_1 , M=\Delta_2 , N=\Delta_3$$

وبالتعويض في المعادلة(5) نحصل على:

$$(a_{11}\Delta_1+a_{21}\Delta_2+a_{31}\Delta_3)x_1=b_1\Delta_1+b_2\Delta_2+b_3\Delta_3$$

والمقدار:

$$(a_{11}\Delta_1+a_{21}\Delta_2+a_{31}\Delta_3)=a_{11}\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

والمقادير $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ تُسمى معاملات a_{11}, a_{21}, a_{31} على الترتيب.

يُسمى هذا المقدار بمفكوك محدد الرتبة الثالثة ويُرمز له:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

ويُلاحظ أن Δ يتكون من معاملات x_1, x_2, x_3 في المعادلات (4) .

وبالمثل يمكن استنتاج أن:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

وبالتـالي عنـدما يكـون $\Delta \neq 0$ فـإن حـل مجموعـة المعـادلات(4) يأخـذ الصورة:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

ونلاحظ أن مفكوك محدد الرتبـة الثالثـة يتوقـف علـى محددات أخـرى من الرتبـة الثانيـة، وتُسـمى هـذه المحـددات بالمحـددات الصـغرى للمحـدد الأصلي.

<u>محددات الرتب العليا:</u>

لقد عرفنـا أن محـدد الرتبـة الثانيـة يتكـون مـن عمـودين وصـفين، ومحـدد الرتبـة الثالثـة يتكـون مـن ثلاثـة أعمـدة وثـلاث صـفوف ، وبالمثـل يمكـن تعريف محدد الرتبـةn بأنـه يتكـون مـن عددn مـن الأعمـدة، وعـددn من الصفوف على الصورة:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{r1} & a_{r2} & ..... & a_{r(n-1)} & a_{rn} \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مفكـوك هـذا المحـدد هـو المجمـوع الجبـري الخطـي لمحـددات مـن الرتبة$n-1$ وهي معاملات عناصر الصف الأول(العمود الأول) أي أن:

$$\Delta_n = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + ... + a_{1n}\Delta_{1n}$$

حيث:

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & ..... & a_{2n} \\ a_{32} & ..... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & ..... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., \Delta_{1n}=(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_{21} & ..... & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & ..... & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ..... & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال(1): احسب قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\2&0&2&5\\0&1&0&1\\3&2&1&2\end{vmatrix}.$$

الحل: بفك المحدد باستخدام عناصر العمود الأول كما يلي:

$$\Delta=0(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&2&5\\1&0&1\\2&1&2\end{vmatrix}+2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&1&2\end{vmatrix}$$

$$+0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&5\\2&1&2\end{vmatrix}+3(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&5\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&1&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&5\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-2[1\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}]-3[1\begin{vmatrix}2&5\\0&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&3\\2&5\end{vmatrix}]$$

$$=-2[(0-1)-(4-3)+2(2-0)]-3[(2-0)-0(2-0)+(10-6)]$$

$$=-22$$

$$\therefore\ \Delta=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\2&0&2&5\\0&1&0&1\\3&2&1&2\end{vmatrix}=-22.$$

ملاحظة: يُلاحظ أنه يمكن إيجاد مفكوك المحدد باستخدام عناصر أي صف أو عمود ، ويكون معامل كل عنصر هو المحدد الصغير المناظر لهذا العنصر.

الخواص الأساسية للمحددات:

سنكتفي بذكر هذه الخواص للمحددات من الرتبة الثالثة ويمكن تعميمها على المحددات من الرتب العليا.

1- لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(يمكن إثبات ذلك بفك محدد الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول وبفك محدد الطرف الأيمن باستخدام العمود الأول فينتج المطلوب).

2- تتغير إشارة المحدد إذا بدلنا صفين (أو عمودين) متجاورين أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3- تنعدم قيمة المحدد إذا تساوى فيه صفان أو عمودان (وذلك من الخاصية السابقة).

4- إذا ضُربت عناصر أي صف (أو عمود) في مقدار ثابت α فإن قيمة المحدد تُضرب في نفس المقدار الثابت أي أن:

$$\alpha\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5- إذا كانت عناصر أي صف (أو عمود) عبارة عن مجموع n من الحدود فإن المحدد يساوي مجموع n من المحددات التي تحتوي كل منها على حد واحد فقط من هذه الحدود أي أن:

$$\begin{vmatrix} k_1+l_1-m_1 & b_1 & c_1 \\ k_2+l_2-m_2 & b_2 & c_2 \\ k_3+l_3-m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 \\ l_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -m_1 & b_1 & c_1 \\ -m_2 & b_2 & c_2 \\ -m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6- لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أي صف أو عمود مضاعفات العناصر المناظرة في الصفوف أو الأعمدة الأخرى أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1-\beta c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha b_2-\beta c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha b_3-\beta c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

مثال(2): ضع المحدد الآتي في أبسط صورة ، ثم أوجد قيمته:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 87 & 42 & 3 \\ 45 & 18 & 7 \\ 50 & 17 & 3 \end{vmatrix}.$$

<u>الحل</u>: بوضع العمود الأول $((-2C_2-C_3)+C_1)$ (أي نضرب عناصر العمود الثاني C_2 في (-2) ونضرب عناصر العمود الثالث C_3 في (-1) ثم نضيفهما إلى عناصر العمود الأول C_1) فيُصبح المحدد على الصورة الآتية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 42 & 3 \\ 2 & 18 & 7 \\ 13 & 17 & 3 \end{vmatrix}$$

وبوضع العمود الثاني $(-14C_3 +C_2)$ (أي نضرب عناصر العمود الثالث C_3 في 14- ثم نضيفها إلى عناصر العمود الثاني C_2) فيُصبح المحدد على الصورة الآتية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -80 & 7 \\ 13 & -25 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -80 \\ 13 & -25 \end{vmatrix} = 3[(2)(-25)-(-80)(13)] = 2970.$$

وذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الأول.

مثال(3): باستخدام خواص المحددات احسب قيمة المحددات الآتية:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} \;,\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

الحل:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = (3)(2)\begin{vmatrix} 7 & 11 & 2 \\ 13 & 15 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (6)(1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 6[0-40] = -240.$$

وذلك بوضع العمود الأول ($-C_3 + C_1$) ، والعمود الثاني ($-3C_3 + C_2$) ، وفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثالث.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c^3-a^3) - (c-a)(b^3-a^3)$$

وذلك بوضع العمود الثاني ($-C_1 + C_2$) ، والعمود الثالث ($-C_1 + C_3$).

مثال(4): باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات الآتية:

$$6x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 14$$
$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 32$$
$$4x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 18$$

الحل: نحسب أولاً محدد المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \\ 4 & 10 & 8 \end{vmatrix} = (2)(2)(2)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -10 & 3 \\ -10 & -11 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8[(1)(-1)^{1+3}(55-100)] = -360.$$

ثم نحسب محددات المجاهيل كما يلي:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}14&8&2\\32&4&6\\18&10&8\end{vmatrix}=(2)(2)(2)\begin{vmatrix}7&4&1\\16&2&3\\9&5&4\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}0&0&1\\-5&-10&3\\-19&-11&4\end{vmatrix}$$

$$=8[(1)(-1)^{1+3}(55-190)]=-1080.$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}6&14&2\\8&32&6\\4&18&8\end{vmatrix}=(2)(2)(2)\begin{vmatrix}3&7&1\\4&16&3\\2&9&4\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}0&0&1\\-5&-5&3\\-10&-19&4\end{vmatrix}$$

$$=8[(1)(-1)^{1+3}(95-50)]=360.$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}6&8&14\\8&4&32\\4&10&18\end{vmatrix}=(2)(4)(2)\begin{vmatrix}3&4&7\\2&1&8\\2&5&9\end{vmatrix}=16\begin{vmatrix}-5&0&-25\\2&1&8\\-8&0&-31\end{vmatrix}$$

$$=16[(1)(-1)^{2+2}(155-200)]=-720.$$

وعلى ذلك يكون حل المعادلات هو:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-1080}{-360}=3,\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{360}{-360}=-1,\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{-720}{-360}=2\ .$$

<u>مثال(5)</u>: تحقق من أن $x=1$ تكون جذر للمعادلة:

$$\begin{vmatrix}x&x^2&x+1\\1&0&1\\2&1&3\end{vmatrix}=0$$

<u>الحل</u>: لكي تكون قيمة x المعطاة جذر للمعادلة فلابد أن تكون نتيجة التعويض بهذه القيمة في المعادلة تحققها (أي الطرف الأيسر للمعادلة يساوي الطرف الأيمن).

وبوضع $x=1$ في الطرف الأيسر للمعادلة وهو المحدد فنحصل على:

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

وذلك بوضع العمود الثالث $(-C_1+C_3)$ وإذاً $x=1$ تكون جذر للمعادلة.

مثال(6): تحقق من أن $x=3$ تكون جذر للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} x & 4-x & -x \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

الحل: لكي تكون قيمة x المعطاة جذر للمعادلة فلابد أن تكون نتيجة التعويض بهذه القيمة في المعادلة تحققها (أي الطرف الأيسر للمعادلة يساوي الطرف الأيمن).

وبوضع $x=3$ في الطرف الأيسر للمعادلة وهو المحدد فنحصل على:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1(0) = 0.$$

وذلك بوضع العمود الأول $(-3C_2+C_1)$ والعمود الثالث $(3C_1+C_3)$

وإذاً $x=3$ تكون جذر للمعادلة.

مثال(7): تحقق من أن $x=-2$ تكون جذر للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

الحل: لكي تكون قيمة x المعطاة جذر للمعادلة فلابد أن تكون نتيجة التعويض بهذه القيمة في المعادلة تحققها (أي الطرف الأيسر للمعادلة يساوي الطرف الأيمن).

وبوضع $x=-2$ في الطرف الأيسر للمعادلة وهو المحدد فنحصل على:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

حيث إن الصف الأول يساوي الصف الثالث.

وإذاً $x=-2$ تكون جذر للمعادلة.

تمارين:

1- احسب قيمة المحددات الآتية:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}. \; .$$

2- تحقق من أن القيم $x = 2, 5, 17$ تكون جذور للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} 10-x & -6 & 2 \\ -6 & 9-x & -4 \\ 2 & -4 & 5-x \end{vmatrix} = 0 \; .$$

3- باستخدام المحددات أوجد حل كل من مجموعة المعادلات الآتية:

$$(1) \quad \begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (2) \quad \begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} &= 7 \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} &= 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y} - \frac{2}{z} &= -4 \end{aligned}$$

4- إذا كانت $a + b + c = 0$ فأوجد جذور المعادلة:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ b & c-x & a \\ c & a & b-x \end{vmatrix} = 0$$

5- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \; .$$

****

****

الباب الثاني
المصفوفات Matrices

- **تعريف المصفوفة Matrix :**

المصفوفة هي ترتيب من الأعداد في تنظيم معين يتكون من عدد من الصفوف وليكن m وعدد من الأعمدة وليكن n ، والأعداد التي تكون المصفوفة تُسمى عناصر المصفوفة ، وهي إما أعداد حقيقية (عندئذ تكون المصفوفة حقيقية) أو أعداد مركبة (عندئذ تكون المصفوفة مركبة). وسنهتم في دراستنا هذه بالمصفوفات الحقيقية ما لم يُذكر خلاف ذلك.

ملاحظة: المصفوفة ليست لها قيمة عددية ، ولكنها وسيلة مناسبة لعرض مجموعة من البيانات. ويُرمز للمصفوفات بالحروف الكبيرة $A, B, C, ...$ ، ويُرمز لعناصر المصفوفة بالحروف الصغيرة $a, b, c, ...$.

والصورة العامة للمصفوفة تُكتب كما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة تتكون من عدد m من الصفوف وعدد n من الأعمدة أي بها عدد $m \times n$ من العناصر $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{mn}$ ولذلك نقول أن المصفوفة A من النظام $m \times n$.

وإذا كان $n = m$ أي عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة نقول أن المصفوفة مربعة. العنصر a_{23} (يُقرأ a اثنين ثلاثة) وهو عبارة عن العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث أي دائما نذكر رقم الصف أولا ثم بعد ذلك نذكر رقم العمود.

وعلــى وجــه العمــوم العنصــر الواقــع فــي الصــف i والعمــود j فــي المصــفوفة A هــو العنصــر a_{ij} وبالتــالي يمكــن التعبيــر باختصــار عــن المصفوفة A بالصورة: $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

مثال(1): كون المصفوفة $A=(a_{ij})_{2\times 3}$ إذا كان:

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & if\ \ i<j \\ i & if\ \ i=j \\ i-j & if\ \ i>j \end{cases}$$

<u>الحل</u>: الشكل العام للمصفوفة المطلوبة هو:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

حيث

$$a_{11}=1\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{13}=1+3=4\ ,$$
$$a_{21}=2-1=1\ ,\ a_{22}=2\ ,\ a_{23}=2+3=5$$

إذاً المصفوفة المطلوبة تكون

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

مثال(2): كون المصفوفة $B=(b_{ij})_{3\times 3}$ إذا كان:

$$b_{ij}=\begin{cases} i+j & if\ \ i<j \\ 0 & if\ \ i=j \\ i^2-j^2 & if\ \ i>j \end{cases}$$

<u>الحل</u>: الشكل العام للمصفوفة المطلوبة هو:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

حيث

$$b_{11}=0\ ,\ b_{12}=1+2=3\ ,\ b_{13}=1+3=4\ ,$$
$$b_{21}=2^2-1^2=3\ ,\ b_{22}=0\ ,\ b_{23}=2+3=5$$
$$b_{31}=3^2-1^2=8\ ,\ b_{32}=3^2-2^2=5\ ,\ b_{33}=0$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}0&3&4\\3&0&5\\8&5&0\end{pmatrix}.$$

- **<u>أنواع المصفوفات</u>** <u>Type of Matrices</u>:

1. **<u>المصفوفة الصفرية</u>** Zero Matrix :

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا ويُرمز لها بالرمز O . والمصفوفة الصفرية قد تكون مستطيلة أو مربعة ، وتلعب المصفوفة الصفرية دورا رئيسيا في دراسة المصفوفات كما سنرى فيما بعد.

2. **<u>المصفوفة المثلثية العليا</u>** Upper Triangular Matrix :

وهي المصفوفة المربعة والتي فيها العناصر أسفل القطر الرئيسي $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ كلها أصفارا أي أن:

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{cases}a_{ij}=0 & if\ i>j\\ a_{ij}\neq 0 & if\ i\leq j\end{cases}$$

3. **<u>المصفوفة المثلثية السفلى</u>** Lower Triangular Matrix :

وهي المصفوفة المربعة والتي فيها العناصر أعلى القطر الرئيسي $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ كلها أصفارا أي أن:

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{cases}a_{ij}\neq 0 & if\ i\geq j\\ a_{ij}=0 & if\ i<j\end{cases}$$

4. **<u>المصفوفة القطرية</u>** Diagonal Matrix :

وهي المصفوفة المربعة والتي فيها جميع العناصر أصفارا ما عدا عناصر القطر الرئيسي أي أن:

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{cases}a_{ij}\neq 0 & if\ i=j\\ a_{ij}=0 & if\ i\neq j\end{cases}$$

- **ملاحظات:**

(1) المصفوفة القطرية هي مصفوفة مثلثية عليا ومثلثية سفلى في نفس الوقت.

(2) لا يمنع أن نجد في المصفوفة القطرية بعض عناصر القطر الرئيسي أصفارا.

(3) عدد عناصر القطر الرئيسي غير الصفرية في المصفوفة القطرية يساوي منزلة المصفوفة.

(4) إذا تساوت جميع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية سُميت المصفوفة القطرية بالمصفوفة القياسية (مثال: مصفوفة الوحدة) .

- **جبر المصفوفات:**

(1) تساوي مصفوفتان:

يُقال للمصفوفتين A, B أنهما متساويتان ويُكتب $A = B$ إذا وإذا فقط كانتا من نفس النظام ، وكل عنصر في المصفوفة A يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة B .

أي أن إذا كانت $A = (a_{ij})_{m\times n}\ , B = (b_{ij})_{m\times n}$ فإن $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$.

مثال(3): ليكن $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $A \neq B$ حيث $a_{12} = 0$ بينما $b_{12} = 1$.

مثال(4): المصفوفتان $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ غير متساويتان حيث إن المصفوفة A على النظام 2×2 بينما المصفوفة B على النظام 2×3 .

مثال(5): أوجد قيم x, y حتى تتساوى المصفوفتان $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & x & 3 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

<u>الحل</u>: المصفوفتان من نفس النظام 2×3 ، ولكي تتساوى المصفوفتان يجب أن تكون العناصر المتناظرة متساوية أي يجب أن يكون $x = 2, y = -7$.

مثال(6): أوجد قيم x, y, z حتى تتساوى المصفوفتان $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x+2y & 1 \end{pmatrix}$.

<u>الحل</u>: المصفوفتان من نفس النظام ، ولكي تتساوى المصفوفتان يجب أن تكون العناصر المتناظرة متساوية أي يجب أن يكون

$$x+y=1$$
$$x+2y=0$$
$$z=0$$

وبحل المعادلات الثلاثة نجد أن $x=2, y=-1, z=0$.

(2) <u>جمع المصفوفات:</u>

إذا كانت A, B مصفوفتان من نفس النظام فإن حاصل جمعهما يُرمز له $A+B$ وهو المصفوفة C على نفس النظام ، وكل عنصر من عناصر المصفوفة C نحصل عليه بجمع العنصرين المتناظرين في المصفوفتين A, B .

أي أن إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ , B=(b_{ij})_{m\times n}$ فإن $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

مثال(7): إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ فأوجد $A+B$.

<u>الحل</u>:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 \\ -3+1 & 0-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

مثال(8): المصفوفتان $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (3 \quad 4)$ لا يمكن جمعهما لأنهما ليس من نفس النظام

(المصفوفة الأولى من النظام 2×1 أما الثانية من النظام 1×2) .

- **خصائص عملية الجمع على المصفوفات:**

1- عملية جمع المصفوفات عملية إبدالية(للمصفوفات التي على نفس النظام).

أي أن إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ ,B=(b_{ij})_{m\times n}$ فإن $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ ،

ومن خاصية إبدال الجمع للأعداد الحقيقية فإن $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$

وعلى ذلك

فإن $A+B=B+A$.

2- عملية جمع المصفوفات عملية تجميعية (أو دامجة) للمصفوفات التي على نفس النظام.أي إذا كانت A,B,C ثلاثة مصفوفات

فإن $A+(B+C)=(A+B)+C$.

3- المصفوفة الصفرية O والتي من نفس النظام للمصفوفة A يُقال أنها عنصر محايد جمعي. حيث $A+O=O+A=A$.

4- للمصفوفة A يوجد مصفوفة من نفس النظام تُسمى المعكوس الجمعي لها وتتكون من عناصر المصفوفة A ولكن بإشارة مخالفة ويُرمز لها بالرمز $-A$ حيث

$A+(-A)=(-A)+A=O$.

5-حاصل ضرب عدد ثابت k في المصفوفة A هو مصفوفة جديدة على نفس نظام المصفوفة A فيها كل عنصر من عناصرها يساوي المناظر له في المصفوفة A مضروب في هذا الثابت k أي إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}$ فإن

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}\ \ ;k\ \ \text{constant.}$$

(3) ضرب المصفوفات:

يُقال للمصفوفتين A, B أنهما قابلتين للضرب على الصورة AB إذا كان عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، وفي هذه الحالة نقول أن حاصل الضرب AB معرفا (أو ممكنا).

كذلك يُقال للمصفوفتين A, B أنهما غير قابلتين للضرب إذا كان عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، وفي هذه الحالة نقول أن حاصل الضرب AB غير معرف (أو غير ممكن).أي إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ , B=(b_{ij})_{r\times s}$

فإن: AB يكون معرف $\Leftrightarrow n=r$ ، AB يكون غير معرف $\Leftrightarrow n\neq r$.

- <u>كيفية تعيين مصفوفة حاصل الضرب</u>:

إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ , B=(b_{ij})_{n\times k}$ في هذه الحالة يكون AB معرف ، ولإيجاد نظام AB نكتب $A_{m\times n}\times B_{n\times k}=C_{m\times k}$ والشكل الآتي يُوضح عملية الضرب:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & a_{i2} & ..... & ..... & a_{in} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ..... & b_{1j} & ..... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & ..... & b_{2j} & ..... & b_{2k} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ b_{n1} & b_{n2} & ..... & b_{nj} & ..... & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & ..... & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & ..... & ..... & c_{2k} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ & & & c_{ij} & \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ c_{m1} & c_{m2} & ..... & ..... & c_{mk} \end{pmatrix}.$$

حيث $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$.

مثال(9): أوجد $AB\,,BA$ إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

<u>الحل</u>:

$$A_{2\times3}\times B_{3\times2}=C_{2\times2}$$

إذاً حاصل الضرب AB معرف ومن ثم يكون:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1)(1)+(-1)(2)+(2)(-1) & (1)(1)+(-1)(0)+(2)(1)\\ (-1)(1)+(1)(2)+(0)(-1) & (-1)(1)+(1)(0)+(0)(1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

كذلك يكون:

$$B_{3\times2}\times A_{2\times3}=C_{3\times3}$$

وإذاً حاصل الضرب BA معرف ومن ثم يكون:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & -1+1 & 2+0\\ 2+0 & -2+0 & 4+0\\ -1-1 & 1+1 & -2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

مثال(10): إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

فأوجد $AB\,,BA$.

<u>الحل</u>: AB معرف حيث $A_{2\times2}\times B_{2\times3}=C_{2\times3}$ وإذاً:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

بينما BA غير معرف حيث $B_{2\times3}\,, A_{2\times2}$.

مثال(11): إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}$$

فأوجد AB, BA .

الحل:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-8 & 8+14\\ 1-12 & -8+21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 22\\ -11 & 13\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-8 & -2+24\\ -4-7 & -8+21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 22\\ -11 & 13\end{pmatrix}$$

وإذاً $AB=BA$.

ملاحظات: من الأمثلة السابقة نلاحظ أن:

- تُوجد بعض المصفوفات تحقق العلاقة $AB=BA$.
- تُوجد بعض المصفوفات لا تحقق العلاقة $AB=BA$.
- تُوجد بعض المصفوفات يكون لها AB معرف بينما BA غير معرف .
- تُوجد بعض المصفوفات يكون لها كل من AB , BA غير معرف .

- **خصائص ضرب المصفوفات:**

1- عملية الضرب على المصفوفات ليست إبدالية.

حيث لأي مصفوفتين $AB \neq BA$ في الحالة العامة (انظر مثال(9)).

2- عملية الضرب على المصفوفات دامجة.

أي أن لأي ثلاثة مصفوفات A, B, C يتحقق: $A(BC) = (AB)C$

3- عملية الضرب على المصفوفات تتوزع على عملية الجمع على المصفوفات من اليمين ومن اليسار.

أي أن لأي ثلاثة مصفوفات A, B, C يتحقق:

$$(A+B)C = AC + BC,$$
$$A(B+C) = AB + AC$$

4- مصفوفة الوحدة I (وهي مصفوفة قطرية فيها جميع عناصر القطر الرئيسي الواحد الصحيح)والتي من نفس النظام للمصفوفة A يُقال أنها عنصر محايد ضربي. حيث $AI = IA = A$.

5- إذا ضُربت المصفوفة القياسية في مصفوفة أخرى فإن حاصل الضرب يساوي العدد القياسي مضروبا في المصفوفة نفسها (ومن هنا سُميت المصفوفة القياسية).

مثال(12): إذا كانت $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

واضح أن المصفوفة K قياسية وأن:

$$KX = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + 0 & ka_2 + 0 & ka_3 + 0 \\ 0 + kb_1 & 0 + kb_2 & 0 + kb_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

بالمثل نجد أن $YK = KY$.

6- حاصل ضرب مصفوفتين مثلثتين علويتين (سفليتين) هو مصفوفة مثلثية علوية(سفلية).

مثال(13): إذا كانت $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ فإن

$$AB=\begin{pmatrix} a_1x_1 & a_1x_2+a_2y_2 & a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 \\ 0 & b_2y_2 & b_2y_3+b_3z_3 \\ 0 & 0 & c_3z_3 \end{pmatrix}.$$

7- إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $A^0=I$ ،وبذلك يكون A^n مُعرف حيث n عدد طبيعي.

مثال(14):إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ فأوجد A^2, A^3 .

الحل:

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

مثال(15): إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وكانت

$$f(x)=x^2-2x+1, g(x)=x^2-3x+5$$

فأوجد $f(A), g(A)$.

الحل:

$$f(A)=A^2-2A+I$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$g(A)=A^2-3A+5I$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&6\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\0&3\end{pmatrix}.$$

5-المصفوفة الدورية Periodic Matrix :

يُقال للمصفوفة المربعة A أنها مصفوفة دورية إذا كان $A^n=A$ حيث n عدد طبيعي أكبر من الواحد الصحيح ويُقال أن المصفوفة ذات دورة $n-1$.

6. <u>مدور المصفوفة</u> Transpose of a Matrix :

مدور المصفوفة A يُرمز له بالرمز A^t وهو المصفوفة التي نحصل عليها بجعل صفوف المصفوفة A أعمدة وبنفس الترتيب. أي أن:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\Leftrightarrow A^t=(a_{ji})_{n\times m}$$

مثال(16): إذا كانت $A=\begin{pmatrix}-2&3&5\\0&-1&4\\0&0&-6\end{pmatrix}$ فإن $A^t=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&-1&0\\5&4&-6\end{pmatrix}$.

- **<u>نتائج</u>:** لأي مصفوفتين مربعتين A,B من نفس النظام يتحقق:

$1-(A^t)^t=A.$

$2-(A+B)^t=A^t+B^t.$

$3-(AB)^t=B^tA^t.$

7. <u>المصفوفة المتماثلة</u> Symmetric Matrix :

يُقال للمصفوفة A أنها مصفوفة متماثلة إذا وفقط إذا كان $A=A^t$.

8. <u>المصفوفة المتخالفة</u> Skew Symmetric Matrix :

يُقال للمصفوفة A أنها مصفوفة متخالفة إذا وفقط إذا كان $-A=A^t$.

مثال(17): إذا كانت $B=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-3&2&4\\5&4&0\end{pmatrix}$

واضح أن المصفوفة A متماثلة ، والمصفوفة B متخالفة.

- **ملاحظات:**

(1) لكي تكون المصفوفة متماثلة (متخالفة) يجب أن تكون مربعة
والعكس غير صحيح دائما.

(2) في المصفوفة المتخالفة تكون عناصر القطر الرئيسي كلها أصفارا.

البرهان: لتكن $A=(a_{ij})_{m\times n}$ مصفوفة متخالفة فيكون $-a_{ij}=a_{ji}$ ،
وعندما يكون $i=j$ نجد أن $-a_{ij}=a_{ij}\Rightarrow 2a_{ij}=0\Rightarrow a_{ij}=0$.

(3) إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $A+A^t$ تكون مصفوفة متماثلة ، بينما $A-A^t$ تكون مصفوفة متخالفة.

البرهان: نفرض أن $B=A+A^t$ وإذاً:

$$B^t=(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t=A^t+A=A+A^t=B.$$

(حيث عملية جمع المصفوفات إبدالية).

وبالمثل نفرض أن $C=A-A^t$ وإذاً:

$$C^t=(A-A^t)^t=A^t-(A^t)^t=A^t-A=-(A-A^t)=-C.$$

(4) إذا كانت A مصفوفة مربعة فإنه يُمكن كتابة $A=B+C$ حيث B مصفوفة متماثلة ، C مصفوفة متخالفة.

البرهان:

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}[A+A^t+A-A^t]=\frac{1}{2}[(A+A^t)+(A-A^t)]\\&=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)\\&=B+C\end{aligned}$$

(حيث $B=\frac{1}{2}(A+A^t)$ مصفوفة متماثلة، $C=\frac{1}{2}(A-A^t)$ مصفوفة متخالفة).

- **المعكوس الضربي للمصفوفة:**

إذا كانت A مصفوفة مربعة غير مفردة أي أن محددها لا يساوي الصفر ($|A|\neq 0$) فإنه يمكن تعريف مصفوفة مربعة على نفس نظام

المصفوفة A تُسمى المعكوس الضربي للمصفوفة A ويُرمز لها بالرمز A^{-1} بحيث يتحقق:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

حيث I مصفوفة الوحدة من نفس النظام ، ويكون:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{(\tilde{A})^t}{|A|}$$

حيث $adjA$ المصفوفة المجاورة للمصفوفة $adjoint\ A$ وهي مدور مصفوفة المتممات $co-factors(a_{ij}) = (\Delta_{ij})$.

مثال(18): أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>الحل</u>:

<u>أولاً</u>: نحسب قيمة $|A|$ كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$$

وإذا فالمصفوفة غير مفردة وبالتالي لها معكوس ضربي.

<u>ثانياً</u>: نحسب عناصر مصفوفة المتممات للمصفوفة A وهي $\tilde{A} = (\Delta_{ij})$ كما يلي:

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad \Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-6,$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad \Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-6,$$

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad \Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6,$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad \Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6,$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3.$$

$$\therefore \tilde{A}=(\Delta_{ij})=\begin{pmatrix}-3 & -6 & -6\\ -6 & -3 & 6\\ -6 & 6 & -3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\therefore adjA=(\tilde{A})^t=-3\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{-3}{-27}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

(تحقق من أن $AA^{-1}=A^{-1}A=I$).

<u>تعريف</u>: يُقال للمصفوفة A أنها <u>مصفوفة عمودية Orthogonal Matrix</u> إذا كان معكوسها الضربي يساوي مدورها أي إذا كان $A^{-1} = A^t$.
(بمعنى أن المصفوفة A تكون عمودية إذا كان $AA^t = A^t A = I$).

مثال(19): مصفوفة الوحدة I هي مصفوفة عمودية
حيث $I^t I = I I^t = I$

مثال(20): المصفوفة $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ مصفوفة عمودية حيث:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▪ تمارين:

1- كون المصفوفات الآتية:

(i) $A=(a_{ij})_{2\times 3}\quad ,a_{ij}=i+j$

(ii) $B=(b_{ij})_{3\times 3}\quad ,b_{ij}=i^2-j^2$

(iii) $C=(c_{ij})_{2\times 3}\quad ,c_{ij}=\begin{cases}2i+1 & if\ \ i=j\\ i+j+2 & if\ \ i\neq j\end{cases}$

(iv) $X=(x_{ij})_{4\times 4}\quad ,x_{ij}=\begin{cases}1 & if\ i=j\\ 0 & if\ i\neq j\end{cases}.$

2- إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -3 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 0\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

فأوجد:

(i) $A+2B+3C$. (ii) $3Y+5Z-4X$.

ثم أوجد المعكوس الجمعي للمصفوفات الناتجة في(i),(ii) .

3- أوجد المصفوفة A التي تحقق ما يلي:

(i) $A+2\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ -1 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

(ii) $A-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -6 & 8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & -8\\ 6 & -3\end{pmatrix}.$

4- إذا كانت

$$\begin{pmatrix}k & k+l\\ 2l+m & m+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

فأوجد قيمة k,l,m,n .

5- إذا كانت $A = X + Y$ حيث X مصفوفة متماثلة ، Y مصفوفة متخالفة.

فأوجد X, Y علما بأن:

(i) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 7 & -8 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ (ii) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & -8 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix}$.

6- أوجد حاصل ضرب المصفوفات الآتية:

(i) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ثم أوجد المعكوس الضربي للمصفوفات الناتجة في(i),(iii) .

7- أوجد A^n إذا كانت

(i) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (ii) $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (iii) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8- أوجد المصفوفة B بحيث يتحقق $AB = BA$ علما بأن:

(i) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $A=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ (iii) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9- إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -2\\ 3 & -5 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

فأوجد:

(i) $A^2+AB+3BA+3B^2$. (ii) $(A+B+I)(A+B-I)$.

10- إذا كانت A مصفوفة مربعة متماثلة (متخالفة) على النظام $n\times n$ ،

وكانت B مصفوفة على النظام $m\times n$ ، وكانت $X=BAB^t$.

فأثبت أن X تكون متماثلة (متخالفة) .

****

الكسور الجزئية Partial Fractions

1. كثيرة الحدود في المتغير x من درجة n هي دالة على الصورة:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n.$$

حيث $a_0, a_1, ..., a_n$ هي معاملات ثابتة ، n عدد صحيح موجب.

ومن الناحية النظرية فإن كثيرة الحدود ذات المعاملات الحقيقية يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب عوامل خطية حقيقية على الصورة $(ax+b)$ وعوامل تربيعية حقيقية على الصورة (ax^2+bx+c) ومن الناحية العملية قد يكون التحليل صعبا.

2. تُسمى الدالة $\phi(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ كسر قياسي rational fraction

إذا كانت $f_1(x), f_2(x)$ كثيرتي حدود.

وإذا كانت درجة البسط $f_1(x)$ أصغر من درجة المقام $f_2(x)$ فإن الكسر $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ يُسمى كسر عادي proper fraction

وإذا كانت درجة البسط تساوي أو أكبر من درجة المقام فإن الكسر $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

يُسمى كسر غير عادي improper fraction

3. نعلم أن عملية جمع الكسرين $\dfrac{2}{x-3}, \dfrac{1}{2x+1}$ تساوي $\dfrac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$

وعلى ذلك يمكن التعبير عن الكسر $\dfrac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$ كمجموع كسرين جزئيين أبسط منه، وفي هذه الحالة يُقال أن الكسر جُزء لكسرين جزئيين $\dfrac{2}{x-3}, \dfrac{1}{2x+1}$

4. أي كسر قياسي غير عادي يمكن التعبير عنه كحاصل جمع كثيرة حدود

وكسر قياسي عادي ، فمثلاً: $\dfrac{x^3}{x^2+2} = x - \dfrac{2x}{x^2+2}$.

5. كل كسر قياسي عادي يمكن التعبير عنه (على الأقل نظريا) كمجموع كسور جزئية بسيطة بحيث يكون المقام لكل كسر جزئي على الصورة:

$(ax+b)^n, (ax^2+bx+c)^n \;;\; n \in Z^+.$

▪ قواعد خاصة بالكسور الجزئية:

<u>أولاً</u>: إذا كان $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ كسر عادي (درجة البسط أقل من درجة المقام)

▪ إذا أُريد وضع الكسر القياسي العادي $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ على صورة مجموع كسور جزئية

فهناك <u>أربعة حالات</u> تعتمد على طبيعة عوامل المقام $f_2(x)$ كما يلي:

<u>(1) عوامل المقام خطية مختلفة distinct linear factors</u>:

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل خطية مختلفة على الصورة $(ax+b)$

فإن هذا العامل يناظره كسر جزئي واحد على الصورة $\frac{\alpha}{ax+b}$ حيث α مقدار ثابت

أي أن:

$$\frac{f_1(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...} = \frac{\alpha_1}{a_1x+b_1} + \frac{\alpha_2}{a_2x+b_2} + ...$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, ...$ ثوابت.

<u>(2) عوامل المقام خطية مكررة repeated linear factors</u>:

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل خطية مكررة على الصورة $(ax+b)^n$

فهذا العامل يناظره مجموع n من الكسور الجزئية على الصورة:

$$\frac{f_1(x)}{(ax+b)^n...} = \frac{\alpha_1}{(ax+b)} + \frac{\alpha_2}{(ax+b)^2} + \frac{\alpha_3}{(ax+b)^3} + ... + \frac{\alpha_n}{(ax+b)^n}$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ثوابت.

<u>(3) عوامل المقام تربيعية مختلفة distinct quadratic factors</u>:

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل تربيعية مختلفة على الصورة (ax^2+bx+c)

وغير قابلة للتحليل إلى عاملين خطيين ، فمثل هذا العامل يناظره كسر واحد جزئي

على الصورة $\dfrac{\alpha_1 x+\alpha_2}{ax^2+bx+c}$ حيث α_1,α_2 ثوابت ، أي أن:

$$\frac{f_1(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+\ldots$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ldots$ ثوابت.

(4) عوامل المقام تربيعية مكررة repeated quadratic factors:

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل تربيعية مكررة على الصورة $(ax^2+bx+c)^n$ حيث ax^2+bx+c غير قابل للتحليل ، n عدد صحيح موجب ،

فمثل هذا العامل يناظره مجموع n من الكسور الجزئية على الصورة:

$$\frac{f_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n\ldots}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{(ax^2+bx+c)}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{\alpha_n x+\alpha_{n+1}}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ ثوابت.

أمثلة:

مثال(1): ضع الكسر $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$$\because x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3).$$

$$\therefore \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x-2} + \frac{\alpha_3}{x+3}$$

$$= \frac{\alpha_1(x-2)(x+3)+\alpha_2 x(x+3)+\alpha_3 x(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

أوبالضرب في $x(x-2)(x+3)$ ينتج أن:

$$\boxed{x+1 = \alpha_1(x-2)(x+3)+\alpha_2 x(x+3)+\alpha_3 x(x-2)}$$

وهذه العلاقة هي متطابقة صحيحة لجميع قيم x الحقيقية ،

ولتعيين قيم الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

- نستخدم طريقة التعويض (باختيار قيم مناسبة ل x ونعوض بها في طرفي العلاقة

ثم نعين $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)

- أو نستخدم طريقة المقارنة (نقارن معاملات قوى x في طرفي العلاقة) ،
- وقد نستخدم الطريقتين (طريقة التعويض ، وطريقة المقارنة) معاً إذا لزم الأمر.

وفي هذا المثال نستخدام طريقة التعويض كما يلي:

$$x=0 \Rightarrow 1=-6\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{6}\ ,$$

$$x=2 \Rightarrow 3=10\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3}{10}\ ,$$

$$x=-3 \Rightarrow -2=15\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{-2}{15}\ .$$

$$\therefore\ \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{-1}{6x} + \frac{3}{10(x-2)} + \frac{-2}{15(x+3)}.$$

مثال(2): ضع الكسر $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$\because x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1).$

$\therefore \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{\alpha_1}{x+1}+\frac{\alpha_2}{x-1}+\frac{\alpha_3}{(x-1)^2}.$

وبالضرب في $(x+1)(x-1)^2$ ينتج أن:

$3x+5=\alpha_1(x-1)^2+\alpha_2(x+1)(x-1)+\alpha_3(x+1)$

وباستخدام طريقة التعويض يكون:

$x=-1\Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{2},\ \ x=1\Rightarrow \alpha_3=4,\ \ x=0\Rightarrow \alpha_2=\frac{-1}{2}.$

وبالتعويض عن قيم $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ينتج أن:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{4}{(x-1)^2}.$$

مثال(3): ضع الكسر $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$\because x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2).$

$\therefore \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{\alpha_1x+\alpha_2}{x^2+1}+\frac{\alpha_3x+\alpha_4}{x^2+2}.$

وبضرب طرفي المعادلة السابقة في $(x^2+1)(x^2+2)$ ينتج أن:

$x^3+x^2+x+2=(\alpha_1x+\alpha_2)(x^2+2)+(\alpha_3x+\alpha_4)(x^2+1).$

وبمقارنة معاملات x,x^2,x^3 والحد المطلق في الطرفين ينتج أن:

$$\begin{aligned}1&=\alpha_1+\alpha_3,\\1&=\alpha_2+\alpha_4,\\1&=2\alpha_1+\alpha_3,\\2&=2\alpha_2+\alpha_4\end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلات ينتج أن:

$\alpha_1 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_4 = 0$

$$\therefore \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 2}.$$

مثال(4): ضع الكسر $\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{(x^2+2x+3)}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(x^2+2x+3)^2}.$$

$$\therefore x^2+x+2=(\alpha_1 x+\alpha_2)(x^2+2x+3)+(\alpha_3 x+\alpha_4)$$

وبمقارنة معاملات x, x^2, x^3 والحد المطلق في الطرفين نحصل على:

$$0=\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1=0,$$
$$1=2\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=1,$$
$$1=3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3=-1,$$
$$2=3\alpha_2+\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4=-1$$

$$\therefore \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{1}{x^2+2x+3}-\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

ثانياً: إذا كان $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ كسر غير عادي

(أي درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)

- إذا أُريد وضع الكسر القياسي غير العادي على صورة مجموع كسور جزئية ،

فتوجد طريقتان:

الطريقة الأولى:

- نقسم البسط على المقام ، ثم نضع الكسر الباقي على صورة مجموع كسور جزئية

كما في الحالات السابقة (في أولاً).

الطريقة الثانية:

- إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام. نضيف مقدار ثابت α_1 إلى مجموعة الكسور الجزئية السالفة الذكر في أولاً.

- إذا كانت درجة البسط تزيد عن درجة المقام بدرجة واحدة. نضيف مقدار (عامل) من الدرجة الأولى $(\alpha_1 x+\alpha_2)$ إلى مجموعة الكسور الجزئية في أولاً.
- إذا كانت درجة البسط تزيد عن درجة المقام بدرجتين. نضيف مقدار من الدرجة الثانية $(\alpha_1 x^2+\alpha_2 x+\alpha_3)$ إلى مجموعة الكسور الجزئية في أولاً ، وهكذا ...

مثال(5): ضع الكسر $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل: نستخدم الطريقة الأولى (نقسم البسط على المقام)

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x^2+x+1 \\ \hline 1 & \underline{x^2+2x+1} \\ & \quad -x \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{x^2+2x+1} \quad ,$$

$$\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{\alpha_1}{(x+1)}+\frac{\alpha_2}{(x+1)^2}=\frac{\alpha_1(x+1)+\alpha_2}{(x+1)^2} \quad ,$$

$$\therefore x=\alpha_1(x+1)+\alpha_2$$

وبالتعويض عن $x=-1$ في الطرفين نحصل على:

$$-1=\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=-1$$

وبالتعويض عن $x=0$ في الطرفين نحصل على:

$$0=\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow 0=\alpha_1-1 \Rightarrow \alpha_1=1$$

$$\therefore \frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2} \quad ,$$

$$\therefore \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{x^2+2x+1}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

مثال(6): ضع الكسر $\frac{x^4+2x+4}{(2x^2+3)(x-2)}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل: (نستخدم الطريقة الثانية)

$$\frac{x^4+2x+4}{(2x^2+3)(x-2)}=(\alpha_1 x+\alpha_2)+\frac{\alpha_3}{x-2}+\frac{\alpha_4 x+\alpha_5}{2x^2+3}.$$

$$\therefore x^4+2x+4=(\alpha_1 x+\alpha_2)(2x^2+3)(x-2)+\alpha_3(2x^2+3)+(\alpha_4 x+\alpha_5)(x-2).$$

وبوضع $x=2$ ومقارنة معاملات x^2,x^3,x^4 والحد المطلق في الطرفين ينتج أن:

$x=2 \Rightarrow 16+4+4=11\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3=\frac{24}{11}$,

$1=2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{2}$,

$0=-4\alpha_1+2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=1$,

$0=3\alpha_1-4\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4=\frac{-41}{22}$,

$4=-6\alpha_2+3\alpha_3-2\alpha_5 \Rightarrow \alpha_5=\frac{-38}{22}$

$$\therefore \frac{x^4+2x+4}{(2x^2+3)(x-2)}=(\frac{1}{2}x+1)+\frac{24}{11(x-2)}-\frac{41x+38}{22(2x^2+3)}.$$

تمارين:

ضع كلا من الكسور الآتية على صورة مجموع كسور جزئية:

(1) $\frac{x+1}{x^2+7x+12}$ (2) $\frac{x^2+1}{(2x-1)(x+2)^2}$ (3) $\frac{1}{x^3-2x-1}$

(4) $\frac{x^2-2}{x^3+2x^2}$ (5) $\frac{x^5-1}{x^2(x^3+1)}$ (6) $\frac{1}{x^4-1}$

(7) $\frac{2x-1}{x^3-x^2-2x}$ (8) $\frac{x^3+5x^2+4x+6}{(x-1)(x^3-1)}$

(9) $\frac{x^3+2x^2-3}{(x^2-1)^2}$ (10) $\frac{3x^2-9x-20}{x^2-2x-3}$

(11) $\frac{2x^2+5x+1}{(x+1)^2}$ (12) $\frac{6x^3-7x^2-16x+27}{6x^2-7x-5}$.

==
==========

الباب الرابع

نظرية ذات الحدين Binomial Theory

1. نظرية ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب n :

من خلال دراستنا السابقة (وباستخدام الضرب العادي) نعلم أن:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

أي أن

$$(x+y)^2 = x^n + nxy + y^n \quad ;n=2.$$

وأن

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + y^n \quad ;n=3.$$

وبالمثل يكون:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}x^{n-3}y^3 + y^n$$

$$;n=4.$$

وعلى ذلك يكون:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r + \ldots + y^n.$$

ويسمى هذا المفكوك الأخير مفكوك ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب $n \in Z^+$

ملاحظات:

نلاحظ في مفكوك ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب $n\in Z^+$ أن:

1- عدد الحدود في المفكوك يساوي $n+1$.

2- مجموع قوى (أس) كلا من x,y في أي حد من حدود المفكوك يساوي n .

3- معامل الحد الثاني في أول المفكوك يساوي معامل الحد الثاني في أخر المفكوك، ومعامل الحد الثالث في أول المفكوك يساوي معامل الحد الثالث في أخر المفكوك، وهكذا ...

4- الحد $T_{r+1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r$ يُسمى الحد العام (رتبته $r+1$) في المفكوك.

5- إذا كانت n عدد زوجي فإن رتبة الحد الأوسط في مفكوك ذات الحدين تساوي $\dfrac{n+2}{2}$. أما إذا كانت n عدد فردي فإنه يوجد حدان أوسطان في مفكوك ذات الحدين رتبتهما تساوي $\dfrac{n+1}{2},\dfrac{n+3}{2}$.

مثال(1): أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(1+\sqrt{2}x)^9$.

الحل: حيث إن n عدد فردي فإنه يوجد حدان أوسطان رتبتهما $\dfrac{9+1}{2}=5,\dfrac{9+3}{2}=6$ أي أن الحدين الأوسطين هما الحدان الخامس والسادس.

وبوضع $x=1,y=\sqrt{2}x,n=9,r=4$ في الحد العام T_{r+1} لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ يكون:

$$T_5=\frac{(9)(8)(7)(6)}{(4)(3)(2)(1)}(\sqrt{2}x)^4=504x^4.$$

وبوضع $x=1,y=\sqrt{2}x,n=9,r=5$ في الحد العام T_{r+1} لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ يكون:

$$T_6=\frac{(9)(8)(7)(6)(5)}{(5)(4)(3)(2)(1)}(\sqrt{2}x)^5=504\sqrt{2}x^5.$$

مثال(2): أوجد الحد الخالي من x في مفكوك $(x+\frac{1}{2x^2})^9$.

الحل: نضع $\frac{1}{2x^2}$ بدلا من y في الحد العام T_{r+1} لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ حيث $n=9$ فيكون:

$$T_{r+1}=\frac{9(9-1)(9-2)...(9-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}(x)^{9-r}(\frac{1}{2x^2})^r$$

$$=\frac{9(9-1)(9-2)...(9-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}(\frac{1}{2})^r(x)^{9-3r}.$$

ولكي يكون الحد خالي من x يجب أن يكون:

$$9-3r=0\Rightarrow r=3.$$

وإذاً الحد الخالي من x يكون هو الحد T_{3+1} (أي الحد الرابع):

$$T_4=\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)}(\frac{1}{2})^3=\frac{21}{2}.$$

▪ **استخدام التوافيق في التعبير عن معاملات مفكوك ذات الحدين:**

يمكننا التعبير عن معاملات قوى x, y في مفكوك ذات الحدين:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r + \ldots + y^n .$$

باستخدام التوافيق وفي هذه الحالة يكون الحد العام الذي رتبته $r+1$ في الصورة:

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r \ ; \ {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

وعلى ذلك يكون:

$$(x+y)^n = {}^nC_0 x^n y^0 + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + {}^nC_r x^{n-r} y^r + \ldots + {}^nC_n x^{n-n} y^n .$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} y^r .$$

وباعتبار $y=1$ في مفكوك ذات الحدين يكون:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r = \sum_{r=1}^{n+1} {}^nC_{r-1} x^{r-1} \qquad (1)$$

حيث معامل x^r هو:

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} \qquad (2)$$

▪ **دراسة خصائص معامل** x^r **في العلاقة (1):**

مثال(3): تحقق من أن:

1. $^{n}C_0 = {}^{n}C_n = 1$
2. $^{n}C_{n-1} = {}^{n}C_1 = n$
3. $^{n}C_r = 0 \quad if \quad r \geq n+1$
4. $^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

الحل:

1. $^{n}C_0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1 \, , \, {}^{n}C_n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1.$

2. $^{n}C_1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \, ,$

$$^{n}C_{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

3. $at \ r \geq n+1 \ ; {}^{n}C_r = \dfrac{n(n-1)...(n-n)}{r!} = 0.$

4. $^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} + \dfrac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r+1)!}[n-r+1+r]$$

$$\therefore {}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!} = {}^{n+1}C_r .$$

(حيث $(n-r+1)! = (n-r+1)(n-r)!$, $0! = 1! = 1$).

2. نظرية ذات الحدين بأي أس n (عدد حقيقي):

عندما يكون في ذات الحدين الأس n عدد صحيح سالب أو كسر فإن مفكوك ذات الحدين يصبح على صورة متسلسلة لانهائية (أي أن عدد حدود المفكوك يزداد إلى ما لانهاية) ويكون على الصورة التالية:

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!}x^r+\ldots$$

وعندما يكون $|x|<1$ فإن مجموع حدود هذا المفكوك إلى ما لانهاية يكون كمية محدودة (وذلك من خصائص جمع المتسلسلات).

وعلى ذلك يكون:

$$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!}a^{n-r}x^r.$$

حيث إن

$$(a+x)^n = x^n(1+\frac{a}{x})^n \ , \left|\frac{a}{x}\right|<1 \quad i.e. \ |a|<|x|.$$

وأيضا

$$(a+x)^n = a^n(1+\frac{x}{a})^n \ , \left|\frac{x}{a}\right|<1 \quad i.e. \ |x|<|a|.$$

مثال(4): إذا كان $|x|<1$ أوجد مفكوك كلا من:

$$(1+x)^{-1} \quad , \quad (1+x)^{-2}$$

الحل:

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} &= 1+\frac{(-1)}{1!}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\ldots+\frac{(-1)(-2)(-3)\ldots(-1-(r-1))}{r!}x^r+\ldots\\ &= 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^r x^r+\ldots \ .\end{aligned}$$

وبالمثل يكون:

$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^r(r+1)x^r+\ldots \ .$$

مثال(5): إذا كان $|x| > 4$ أوجد مجموع الحدود الأربع الأولى في مفكوك:

$$(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

الحل: $4 < |x| \Rightarrow \left|\frac{4}{x}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{4}{x^2}\right| < 1$

$$(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} = (x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{4}{x^2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{x}[1+\frac{(-\frac{1}{2})}{1!}(\frac{4}{x^2}) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(\frac{4}{x^2})^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(\frac{4}{x^2})^3 + ...]$$

$$= \frac{1}{x}[1-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^4}-\frac{20}{x^6}+...]$$

وإذاً مجموع الأربع الحدود الأولى في المفكوك يكون

$\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^5}-\frac{20}{x^7}$.

مثال(6): إذا كان $|x| < \frac{1}{3}$ فأوجد مجموع الثلاثة حدود الأولى في مفكوك:

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{5}}}{(1-3x)^{\frac{1}{4}}} .$$

الحل: المفكوك يكون صحيحا عندما يكون

$$|x| < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow |2x| < 1, |-3x| < 1$$

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{5}}}{(1-3x)^{\frac{1}{4}}} = (1+2x)^{\frac{1}{5}}(1-3x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= [1+(\frac{1}{5})(2x)+\frac{1}{2!}(\frac{1}{5})(\frac{-4}{5})(2x)^2+...]$$

$$.[1+(\frac{-1}{4})(-3x)+\frac{1}{2!}(\frac{-1}{4})(\frac{-5}{4})(-3x)^2+...]$$

$$= [1+\frac{2x}{5}-\frac{8x^2}{25}+...][1+\frac{3x}{4}+\frac{45x^2}{32}+...]$$

$$= 1+\frac{23x}{20}+\frac{1109x^2}{800}+....$$

وإذاً مجموع الثلاثة حدود الأولى في المفكوك يكون

$$1+\frac{23x}{20}+\frac{1109x^2}{800}$$

- **تمارين محلولة:**

(1) باستخدام مفكوك ذات الحدين أوجد مقربا لثلاثة أرقام عشرية قيمة كلا من:

$$\sqrt{24} \quad , \quad \sqrt[3]{28} \quad , \quad \sqrt{1.01}$$

الحل:

$$\sqrt{24} = (25-1)^{\frac{1}{2}} = 5(1-\frac{1}{25})^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5[1+(\frac{1}{2})(\frac{-1}{25})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{25})^2+...]$$

$$= 5[1-0.02-0.0002+...]$$

$$\approx 4.899$$

$$\sqrt[3]{28}=(27+1)^{\frac{1}{3}}=3(1+\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}}$$

$$=3[1+(\frac{1}{3})(\frac{1}{27})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{3})(\frac{-2}{3})(\frac{1}{27})^{2}+...]$$

$$=3+\frac{1}{27}-\frac{1}{(27)(81)}+...$$

$$\approx 3.037-0.0004$$

$$\approx 3.037$$

$$\sqrt{1.01}=(1+0.01)^{\frac{1}{2}}=1+(\frac{1}{2})(0.01)+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})(0.01)^{2}+...$$

$$\approx 1+0.005-0.0001$$

$$\approx 1.005.$$

(2) إذا كان $|x|<1$ فأوجد معامل x^r في مفكوك $\frac{2x}{1-x^2}$.

الحل:

$$\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=(1-x)^{-1}-(1+x)^{-1}$$

$$=[1+x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+...+\frac{(-1)(-2)(-3)...(-r)}{r!}x^r+...]$$

$$-[1-x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+...+\frac{(-1)(-2)(-3)...(-r)}{r!}x^r+...].$$

$$\therefore \frac{2x}{1-x^2}=[1+x+x^2+...+x^r+...]-[1-x+x^2+...+(-1)^r x^r+...].$$

$$=2x-2x^3+...+(1-(-1)^r)x^r+.....$$

وعلى ذلك يكون معامل x^r هو $(-1-(-1)^r)$ حيث $r=0,1,2,...$.

==
==========

- **تمارين:**

1- باستخدام ذات الحدين برهن أن:

$$(x+y)^5-(x-y)^5=2y(5x^4+10x^2y^2+y^4).$$

2- تحقق من أن الحد الأوسط في مفكوك $(x-\frac{1}{x})^{12}$ يكون خالي من x وأوجد قيمته.

3- إذا كان $|x|<\frac{1}{4}$ فأوجد مفكوك كل من:

$$(1-4x)^{\frac{-2}{3}}\ ,\ (2+3x)^{-2}\ ,\ \sqrt[3]{1+2x}\ ,\ \frac{1}{1+4x}.$$

==

==========

حل1:

$$(x+y)^5=[x^5+\frac{5x^4}{1}y+\frac{(5)(4)x^3}{(2)(1)}y^2+\frac{(5)(4)(3)x^2}{(3)(2)(1)}y^3$$
$$+\frac{(5)(4)(3)(2)x}{(4)(3)(2)(1)}y^4+y^5]\,,$$

$$(x-y)^5=[x^5+\frac{5x^4}{1}(-y)+\frac{(5)(4)x^3}{(2)(1)}(-y)^2+\frac{(5)(4)(3)x^2}{(3)(2)(1)}(-y)^3$$
$$+\frac{(5)(4)(3)(2)x}{(4)(3)(2)(1)}(-y)^4+(-y)^5].$$

$$\therefore (x+y)^5-(x-y)^5=10x^4y+20x^2y^3+2y^5=2y(5x^4+10x^2y^2+y^4).$$

حل2: رتبة الحد الأوسط $\frac{12+2}{2}=7$ (الحد السابع) وبالتعويض في الحد العام

$$T_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r$$

لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ عن $r=6\ ,\ n=12\ ,\ x=x\ ,\ y=(-\frac{1}{x})$

يكون:

$$T_7=\frac{(12)(11)(10)(9)(8)(7)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}(x)^{12-6}(-\frac{1}{x})^6=924$$ (حد خالي من x)

حل3:

$$(1+(-4x))^{\frac{-2}{3}}\ ,\ 2^{-2}(1+\frac{3}{2}x)^{-2}\ ,(1+2x)^{\frac{1}{3}}\ ,(1+4x)^{-1}.$$

==

الباب الخامس

الاستنتاج الرياضي Mathematical Induction

✓ الاستنتاج الرياضي هو طريقة رياضية لإثبات صحة بعض القوانين والعلاقات الرياضية التى يكون المتغير فيها عدداً صحيحاً موجباً.

✓ نستطيع أن نلخص مبدأ الاستنتاج الرياضي كما يلي:
ليكن $F(n)$ تقريراً صحيحاً عندما $n = 1$ فإذا كانت صحة التقرير عندما $n = k$ تؤدي إلى صحته عندما n تساوي الحد التالي لـ k فإن التقرير يكون صحيحاً
لكل عدد صحيح موجب n .

مثال(1): بالاستنتاج الرياضي أثبت أن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1/6)(n)(n+1)(2n+1)$$

<u>الحل</u>:

(1) نثبت صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$L.H.S. = 1^2 = 1 \quad , R.H.S. = (1/6)(1)(2)(3) = 1$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(2) نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ أي أن :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = (1/6)(k)(k+1)(2k+1).$$

(3) نثبت صحة العلاقة عندما $n = k+1$:

$$\begin{aligned} L.H.S. &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= (1/6)(k)(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= (1/6)(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)] \\ &= (1/6)(k+1)[2k^2+7k+6] \\ &= (1/6)(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R.H.S. &= (1/6)(k+1)(k+2)(2(k+1)+1) \\ &= (1/6)(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(2): أثبت بالاستنتاج الرياضي أن:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots\dots\dots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}\ .$$

الحل:

(1) نثبت صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\quad , \qquad \text{R.H.S.} = 1-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(2) نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ أي أن:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots\dots\dots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}.$$

(3) نثبت صحة العلاقة عندما $n = k+1$:

$$L.H.S.=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots\dots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{1}{(k+2)!}[k+2-k-1]$$

$$=1-\frac{1}{(k+2)!}.$$

$$R.H.S.=1-\frac{1}{(k+2)!}.$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(3): أثبت أن المقدار $(3n^2 - n)$ يقبل القسمة على 2 (لكل n عدد صحيح موجب)

الحل: نفرض أن P_n هي الخاصية: " $(3n^2 - n)$ يقبل القسمة على 2 " .

(1) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$:

$$3(1)^2 - 1 = 2$$

يقبل القسمة على 2 وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$.

(2) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $(3k^2 - k)$ يقبل القسمة على 2 ".
(3) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 3(k+1)^2 - (k+1) &= 3(k^2+2k+1) - k - 1 \\ &= 3k^2+6k+3 - k - 1 \\ &= (3k^2-k)+2(1+3k) \end{aligned}$$

وحيث إن المقدار $3k^2 - k$ يقبل القسمة على 2 من الفرض(2) وأن المقدار $2(1+3k)$ يقبل القسمة على 2 فيكون المقدار $3(k+1)^2 - (k+1)$ يقبل القسمة على 2 .
وإذاً الخاصية P_n تكون صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(4): تحقق من أن كل الأعداد التي في الصورة $(7^n - 2^n)$ تقبل القسمة على 5
(لكل n عدد صحيح موجب).

<u>الحل</u>**:** نفرض أن P_n هي الخاصية: " $(7^n - 2^n)$ تقبل القسمة على 5 " .
(1) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$:

$$7^1 - 2^1 = 5$$

تقبل القسمة على 5 وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$.
(2) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $(7^k - 2^k)$ تقبل القسمة على 5 ".
(3) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= (7)(7)^k - (7)(2)^k + (7)(2)^k - (2)(2)^k \\ &= 7[7^k - 2^k] + (5)(2)^k \end{aligned}$$

وحيث إن $(7^k - 2^k)$ تقبل القسمة على 5 من الفرض (2) وأن $(5)(2)^k$ تقبل القسمة على 5 فتكون $(7^{k+1} - 2^{k+1})$ تقبل القسمة على 5 .
وإذاً الخاصية P_n صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$
وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(5): أثبت أن $|\sin nx| \le n|\sin x|$ لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n

ولكل قيم x الحقيقية.

الحل: نفرض أن P_n هي الخاصية: "$|\sin nx| \le n|\sin x|$".

(1) نثبت صحة الخاصية عندما n = 1 :

$$|\sin(1)x| \le (1)|\sin x|.$$

وإذاً الخاصية صحيحة عندما n = 1 .

(2) نفرض صحة الخاصية عندما n = k أي أن: "$|\sin kx| \le k|\sin x|$ ".

(3) نثبت صحة الخاصية عندما n = k+1 :

$$|\sin(k+1)x| = |\sin(kx+x)| = |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x|.$$

وبتطبيق متباينة المثلث وخواص القيمة القياسية (المطلقة) فإننا نحصل على:

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx||\cos x| + |\cos kx||\sin x|.$$

وبما أن $|\cos x| \le 1$ لكل قيم x الحقيقية فإنه ينتج أن :

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx| + |\sin x| \le k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|.$$

وإذاً الخاصية P_n صحيحة عندما n = k+1 وذلك بفرض صحتها عندما n = k

وحيث إنها صحيحة عندما n = 1 فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة ولجميع قيم x الحقيقية.

- ## تمارين:

1- لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n تحقق من صحة العلاقات الآتية:

(i) $2 + 6 + 12 + \ldots + n(n+1) = (1/3)(n)(n+1)(n+2)$.

(ii) $3 + 11 + 19 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n$.

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

(iv) $1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/2^{n-1} = 2 - 1/2^{n-1}$.

(v) $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \ldots + (n)(n+1) = (1/3)(n)(n+1)(n+2)$.

2- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار $[(11)^n - (4)^n]$ يقبل القسمة على 7
لكل n عدد صحيح موجب
3- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار (7^n-6n-1) يقبل القسمة على 36
لكل n عدد صحيح موجب
4- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار $(x^n - y^n)$ يقبل القسمة على $(x-y)$
لكل n عدد صحيح موجب.
5- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار $(x^{2n} - y^{2n})$ يقبل القسمة على $(x \pm y)$
لكل n عدد صحيح موجب.
****
****

جبر الأعداد المركبة Algebra of Complex Numbers

تعريف: أي ثنائي مرتب (x, y) يُسمى عدد مركب ، حيث $x, y \in R$
العدد الحقيقي x يُسمى المركبة الحقيقية، والعدد الحقيقي y يُسمى المركبة التخيلية للعدد المركب (x, y) .

وللعدد المركب ثلاث صور:

- الصورة المعتادة وتُسمى أيضا الصورة القياسية للعدد المركب.
- الصورة القطبية للعدد المركب.
- الصورة الأسية وتُسمى أيضا صورة أويلر للعدد المركب.

✓ أولاً: الصورة المعتادة للعدد المركب:

إذا كان $z=(x,y)$ عدد مركب فإن الصورة:

$$z=x+iy.$$

حيث $i=\sqrt{-1}$ تُسمى الصورة المعتادة أو الصورة القياسية للعدد المركب z .

ويُسمى x الجزء الحقيقي للعدد المركب z ويُسمى y الجزء التخيلي للعدد المركب z ويُكتب:

$$\mathrm{Re}(z)=x\ ,\ \mathrm{Im}(z)=y.$$

ولكل عدد مركب $z=x+iy$ عدد مركب مرافق $\bar{z}=x-iy$ حيث:

$$\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z)\ ,\ \mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z).$$

ولكل عدد مركب $z=x+iy$ معكوس جمعي $-z=-x-iy$

ومعكوس ضربي للعدد $z\neq 0$

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\ .$$

- **أمثلة:** أوجد $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z),\bar{z},-z,z^{-1}$ لكل من الأعداد المركبة z الآتية:

$$1-2i\ ,\ 2+i\ ,\ i\ ,\ 2i\ ,\ \frac{1}{1+i}\ ,-1$$

الحل: تمرين فصلي.

ملاحظات:

الأعداد الحقيقية يمكن اعتبارها حالات خاصة من الأعداد المركبة، وذلك باعتبار أن العدد الحقيقي هو عدد مركب جزءه التخيلي صفر.

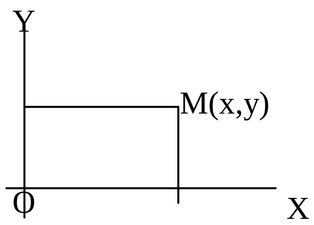
1- العدد المركب الذي جزءه الحقيقي صفر يُسمى عدد تخيلي خالص.

2-إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1 \ , \ z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$$

المستوى المركب:

نفرض مستوى محدد فيه مجموعة إحداثيات كارتيزية XOY ونأخذ أي عدد مركب $z = x + iy$ ثم نعين في المستوى النقطة $M\,(x\,, y\,)$ واضح أن العدد المركب z يحدد النقطة المناظرة له $M\,(x\,, y\,)$ تحديدا تاما، وبالعكس بفرض نقطة ما $M\,(x\,, y\,)$ في المستوى، فإنه يمكن تحديد العدد $z = x + iy$ حيث $x\,, y$ هما الإحداثيان السيني والصادي للنقطة M أي أن النقطة M تعين العدد المركب z انظر الشكل:



بهذه الطريقة يمكن القول بأنه توجد علاقة وحيدة متبادلة بين الأعداد المركبة ونقط المستوى ، بمعنى أن كل عدد مركب يحدد نقطة واحدة في المستوى، وكل نقطة في المستوى تقابل عددا مركبا واحدا، وذلك بتثبيت مجموعة إحداثيات معينة XOY ولذلك فإن العدد المركب $z = x + iy$ يمكن كتابته بالصورة $z = (x\,, y\,)$

كعلاقة ثنائية مرتبة من العددين الحقيقيين $x\,, y$ كما سبق شرحه.

يُسمى المستوى المشار إليه بالمستوى المركب.

✓ **ثانياً: الصورة القطبية للعدد المركب The Polar Form:**

لتكن النقطة $M(x,y)$ في المستوى المركب تمثل العدد المركب $z = x + iy$

ونفرض أن الإحداثيات القطبية للنقطة M هي (r,θ) إذاً:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \therefore z &= r\cos\theta + i\,r\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned} \qquad (2)$$

تُسمى العلاقة(2) بالصورة القطبية للعدد المركب $z = x + iy$

ويُلاحظ من العلاقة(1) أن r,θ تتحددان من العلاقتين:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \qquad (3)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (4)$$

العلاقة(3) تحدد r تحديدا تاما ، وتُسمى r مقياس العدد المركب z ويُرمز عادة للمقياس بالرمز $|z|$ وعلى ذلك يكون:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وكل زاوية θ تحقق العلاقة(4) تُسمى <u>سعة العدد المركب</u> argument of z وتُكتب $\arg(z) = \theta$.

والفرق بين أي سعتين للعدد المركب z يكون مضاعفا للزاوية 2π .

والزاوية θ التي تحقق العلاقة (4) وتحقق أيضا الشرط $-\pi \le \theta \le \pi$ تُسمى **القيمة الأساسية لسعة العدد المركب** z والزاوية θ قد تكون موجبة ، وقد تكون سالبة ، ولابد أن نلاحظ أن العلاقة $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ غير كافية لتعيين الزاوية θ تعيينا تاما ، ولذلك <u>لتعيين القيمة الأساسية لسعة العدد المركب</u>

يجب أن نحدد أولا الربع الذي تقع فيه الزاوية θ كما يلي:

- ✓ فإذا كانت θ تقع في الربع الأول (من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$) وذلك عندما تكون نسبها المثلثية ($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$) كلها موجبة فإن θ تكون مباشرة هي القيمة الأساسية لسعة العدد المركب .
- ✓ أما إذا كانت θ تقع في الربع الثاني (من $\frac{\pi}{2}$ إلى π) وذلك عندما تكون النسب المثلثية($\cos\theta, \tan\theta$) سالبة والنسبة المثلثية ($\sin\theta$) موجبة فإن $\theta = \pi - \theta_0$ حيث θ_0 هي الزاوية معلومة النسب المثلثية ($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$) بغض النظر عن الإشارة ، والتي تكون غالبا هي أحد الزوايا المعروفة مثل $...,0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$.
- ✓ أما إذا كانت θ تقع في الربع الثالث (من π إلى $\frac{3\pi}{2}$) وذلك عندما تكون النسب المثلثية ($\sin\theta, \cos\theta$) سالبة والنسبة المثلثية ($\tan\theta$) موجبة فإن $\theta = -(\pi - \theta_0)$ حيث θ_0 هي الزاوية معلومة النسب المثلثية ($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$) بغض النظر عن الإشارة.
- ✓ أما إذا كانت θ تقع في الربع الرابع (من $\frac{3\pi}{2}$ إلى 2π) وذلك عندما تكون النسب المثلثية ($\sin\theta, \tan\theta$) سالبة والنسبة المثلثية ($\cos\theta$) موجبة فإن $\theta = -\theta_0$ حيث θ_0 هي الزاوية معلومة النسب المثلثية($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$) بغض النظر عن الإشارة.

<u>أمثلة:</u>

أوجد المقياس والقيمة الأساسية للسعة لكل من الأعداد المركبة z الآتية:

$$1+i \ , -\sqrt{3}+i \ , -1-i\sqrt{3} \ , \ 1-i$$

ثم ضع كلا منها في الصورة القطبية.

<u>الحل:</u>

$$(1) \quad z = 1+i$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

وإذاً θ تقع في الربع الأول ، ومن ثم يكون:

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

(2) $z = -\sqrt{3} + i$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}}.$$

وإذاً θ تقع في الربع الثاني ، ومن ثم يكون:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\therefore -\sqrt{3} + i = 2[\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})].$$

(3) $z=-1-i\sqrt{3}$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}.$$

وإذاً θ تقع في الربع الثالث ، ومن ثم يكون:

$$\theta=-(\pi-\frac{\pi}{3})=-\frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore -1-i\sqrt{3}=2[\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})].$$

(4) $z=1-i$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{1}=-1.$$

وإذاً θ تقع في الربع الرابع ، ومن ثم يكون:

$$\theta=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore 1-i=\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})].$$

<u>الأعداد المركبة المترافقة وخواصها:</u>

ذكرنا سابقا أن العدد المركب $\bar{z}=x-iy$ يُسمى بالعدد المرافق للعدد المركب

وإذا كان $z=x+iy$ ، $z_1=x_1+iy_1\ ,\ z_2=x_2+iy_2$ عددين مركبين فيمكن التأكد من صحة العلاقات الآتية:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2\,,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad ,$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

وبالنسبة للعددين $z\,,\bar{z}$ نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}
|\bar{z}| &= \sqrt{x^2+(-y)^2} \\
&= \sqrt{x^2+y^2} \\
&= |z| \;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z\,\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) \\
&= x^2+y^2 \\
&= |z|^2 ,
\end{aligned}$$

$$\therefore |\bar{z}| = |z| = \sqrt{z\,\bar{z}}\,.$$

والقيمة الأساسية لسعة $\bar{z}$ تكون:

$$\tan^{-1}\left(\frac{-y}{x}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

أي أنها تساوي القيمة الأساسية لسعة z بإشارة مخالفة.

<u>خواص مقياس وسعة الأعداد المركبة:</u>

بفرض أن z_1, z_2 عددين مركبين.

<u>الخاصية الأولى</u>: إذا كانت $z_1 = z_2$ فإن $|z_1| = |z_2|$ والعكس ليس صحيحا عموماً.

<u>الإثبات</u>: ليكن

$$z_1 = x_1 + iy_1\,, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\therefore z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2\,, y_1 = y_2$$

$$\therefore |z_1| = \sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2} = \sqrt{(x_2)^2+(y_2)^2} = |z_2|.$$

والعكس نفرض أن $|z_1| = |z_2|$

$$\therefore \sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2}=\sqrt{(x_2)^2+(y_2)^2}$$
$$\therefore \ (x_1)^2+(y_1)^2=(x_2)^2+(y_2)^2$$

وهذا لا يتطلب أن يكون $x_1=x_2\,, y_1=y_2$ أي لا يتطلب أن يكون $z_1=z_2$

فمثلا القيم $x_1=y_1=\frac{1}{2}, x_2=0, y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ تعطينا $|z_1|=|z_2|$ بينما $z_1\neq z_2$.

<u>الخاصية الثانية</u>:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} .$$

<u>الإثبات</u>: نفرض أن $z_1\,, z_2$ في الصورة القطبية:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)$$
$$\therefore z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \qquad (*)$$

وهذه هي الصورة القطبية لحاصل الضرب z_1z_2 ولأن $r_1r_2>0$

$$\therefore |z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2| \ .$$

وبنفس الطريقة يكون:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_2\sin\theta_1-\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$
$$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \qquad (**)$$

وهذه هي الصورة القطبية لخارج القسمة $\frac{z_1}{z_2}$ ولأن $\frac{r_1}{r_2}>0$

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

ونلاحظ مما سبق أنه باستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن إثبات أن:

$$|z_1 z_2 ... z_n| = |z_1||z_2|...|z_n|$$

حيث n أي عدد صحيح موجب.

<u>الخاصية الثالثة</u>:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

وهذه الخاصية تتضح مباشرة من العلاقتين $(*), (**)$.

وباستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن إثبات أن:

$$\arg(z_1 z_2 ... z_n) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + ... + \arg(z_n) \quad ; n \in Z^+$$

<u>ملاحظة</u>:

إذا كانت θ_1, θ_2 هما القيمتان الأساسيتان لسعتي z_1, z_2 فإن القيمة الأساسية لسعة $z_1 z_2$ تكون هي $\theta_1 + \theta_2$ وذلك باعتبار $-\pi \le \theta_1 + \theta_2 \le \pi$ وإذا لم يتحقق هذا الشرط فإن القيم الأساسية لسعة $z_1 z_2$ تكون مساوية للمقدار $\theta_1 + \theta_2 \pm 2\pi$.

وبالمثل تكون القيمة الأساسية لسعة $\frac{z_1}{z_2}$ تكون مساوية لـ $\theta_1 - \theta_2 \pm 2\pi$.

<u>أمثلة</u>:

1- إذا كانت $z_1 = -1 - i, z_2 = i, z_3 = -1 + \sqrt{3}i$

فأوجد القيم الأساسية لسعة $z_2 z_3, \frac{z_1}{z_3}$.

<u>الحل</u>:

لتكن θ, ϕ, ψ هي القيم الأساسية لسعات z_1, z_2, z_3 على الترتيب ، وحيث إن:

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{-1}{-1}) = \tan^{-1} 1 = -(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\frac{3\pi}{4},$$

$$\phi = \tan^{-1}(\frac{1}{0}) = \tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2},$$

$$\psi = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{-1}) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore \phi+\psi=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6},$$

$$\theta-\psi=-\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{17\pi}{12}.$$

وباستخدام الملاحظة الأخيرة نستنتج أن القيمة الأساسية لسعة z_2z_3 تكون:

$$\frac{7\pi}{6}-2\pi=\frac{-5\pi}{6}$$

والقيمة الأساسية لسعة $\frac{z_1}{z_3}$ تكون:

$$\frac{-17\pi}{12}+2\pi=\frac{7\pi}{12}$$

ويمكن استخدام الخاصية الثالثة لمقياس وسعة العدد المركب ، بإيجاد $z_2z_3\,,\frac{z_1}{z_3}$

ثم حساب القيم الأساسية لسعة كل منهما كما يلي:

$$z_2z_3=i(-1+\sqrt{3}i)=-\sqrt{3}-i,$$

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{-1-i}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{-1-i}{-1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}=\frac{1}{4}[1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i]$$

إذاً القيمة الأساسية لسعة z_2z_3 تكون:

$$\tan^{-1}\frac{-1}{-\sqrt{3}}=-(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{-5\pi}{6}$$

والقيم الأساسية لسعة $\frac{z_1}{z_3}$ تكون:

$$\tan^{-1}\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{-(\sqrt{3}-1)}=\pi-(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{7\pi}{12}.$$

2- لأي عددين مركبين z_1,z_2 تحقق من أن $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

<u>الإثبات</u>: ليكن

$$z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta),z_2=s(\cos\phi+i\sin\phi)$$

$$\therefore z_1+z_2=m(\cos\psi+i\sin\psi)$$

$$\therefore m(\cos\psi+i\sin\psi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)+s(\cos\phi+i\sin\phi)$$

$$\therefore m\cos\psi = r\cos\theta + s\cos\phi,$$
$$m\sin\psi = r\sin\theta + s\sin\phi$$

وفي العلاقتين الأخيرتين بضرب العلاقة الأولى في $\cos\psi$ والثانية في $\sin\psi$

والجمع نحصل على:

$$m = r(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi) + s(\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)$$
$$= r\cos(\psi-\theta) + s\cos(\psi-\phi)$$
$$\therefore m \le r+s \qquad ;\cos(\psi-\theta)\le 1, \cos(\psi-\phi)\le 1$$
$$\therefore |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

ويُلاحظ أنه يمكن تعميم هذه النتيجة باستخدام الاستنتاج الرياضي فيكون:

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$$

لأي عدد صحيح موجب n .

3- لأي عددين مركبين z_1, z_2 تحقق من أن $|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$

<u>الإثبات</u>: نكتب z_1 في الصورة:

$$z_1 = (z_1+z_2)+(-z_2)$$

وبتطبيق نتيجة المثال السابق يكون:

$$|z_1| = |z_1+z_2+(-z_2)| = |(z_1+(-z_2)+z_2|$$
$$\le |z_1+(-z_2)|+|z_2|$$
$$\le |z_1-z_2|+|z_2|$$
$$\therefore |z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2|.$$

<u>ثالثاً: الصورة الأسية للعدد المركب:</u>

ليكن z عدد مركب في الصورة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

وفي ضوء دراستنا لمفكوكات الدوال نعلم أن:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$
$$\therefore e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(-1)\theta^2}{2!} + \frac{(-i)\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots$$
$$= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots)$$

وأن:

$$\cos\theta = 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\dots ,$$

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\dots$$

$$\therefore e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \mapsto (1)$$

إذاً أي عدد مركب z يمكن كتابته في الصورة:

$$z = r\,e^{i\theta} \qquad \mapsto (2)$$

هذه الصورة(2) تُسمى <u>الصورة الأسية أو صورة أويلر للعدد المركب</u> z

ومن(1) نستنتج أن:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \mapsto (3)$$

ومن(3),(1) بالجمع والطرح على الترتيب نحصل على:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \ , \ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$$

وحيث إن $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}.e^{2ik\pi}$ حيث k عدد صحيح موجب ، ومن ثم فإن:

$$e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$$

$$\therefore e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}.$$

وبأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة(2) نحصل على:

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + \log e^{i\theta}.$$

$$\therefore \log z = \log r + i\theta \qquad \mapsto (4)$$

وهذه الصورة(4) تُسمى **لوغاريتم العدد المركب** z .

وحيث إن للعدد المركب z عدد لا نهائي من السعات فيكون للمقدار $\log z$ أيضاً عدد لانهائي من القيم . فإذا كانت θ هي القيمة الأساسية لسعة z فيكون:

$$\log z = \log|z| + i(\theta+2k\pi) \ ; \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \qquad \mapsto (5)$$

<u>**مثال**</u>: أوجد قيم كل من $\log(-1)$, $\log(1+\sqrt{3}i)$

<u>الحل</u>:

(1) $z = 1+\sqrt{3}i$

$$\therefore |z| = \sqrt{1+3} = 2 \ , \ \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \log z &= \log(1+\sqrt{3}i)\\ &= \log|z| + i(\theta + 2k\pi)\\ &= \log 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)\\ &= \log 2 + \frac{1}{3}(6k+1)\pi i \quad ; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\end{aligned}$$

(2) $z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

$$\therefore \log(-1) = i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i \quad ; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

<u>نظرية دي موافر للأعداد المركبة:</u>

العدد $(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ هو قيمة أو إحدى قيم المقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ لجميع قيم n القياسية.

<u>الإثبات</u>: يوجد ثلاث حالات ممكنة هي:

(1) عندما تكون n عدد صحيح موجب:

سوف نستخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات العلاقة:

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)...(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)\\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) \qquad \mapsto (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because\ &(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \qquad \mapsto (*)\end{aligned}$$

أي أن العلاقة (5) صحيحة في حالة $n = 2$ ولاستكمال باقي خطوات الاستنتاج الرياضي نفرض أن العلاقة (5) صحيحة في حالة $n = k$ حيث $k \geq 2$ أي أن

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)...(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)\\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_k) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_k) \qquad \mapsto (**)\end{aligned}$$

وسنثبت صحة العلاقة في حالة $n = k+1$ باستخدام (**) .

وإذاً يكون:

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)....(\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1})\\ &= [(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)...(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)](\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1})\\ &= [\cos(\theta_1 + ... + \theta_k) + i\sin(\theta_1 + ... + \theta_k)](\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1})\\ &= \cos(\theta_1 + ... + \theta_{k+1}) + i\sin(\theta_1 + ... + \theta_{k+1})\end{aligned}$$

أي أن العلاقة (5) صحيحة في حالة $n=k+1$ بفرض صحتها في حالة $n=k$ ، لكنها صحيحة في حالة $n=2$ لذلك فهي صحيحة في حالة $n=3$ وبالتالي تكون صحيحة في حالة $n=4$ وهكذا.. أي أنها صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

وبوضع $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_n=\theta$ في العلاقة (5) نحصل على:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

وبذلك نكون قد أثبتنا صحة نظرية دي موافر في حالة n عدد صحيح موجب ، ويكون في هذه الحالة العدد $\cos n\theta+i\sin n\theta$ هو القيمة الوحيدة للمقدار:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

(2) عندما تكون n عدد صحيح سالب:

نفرض أن $n=-m$ حيث m عدد صحيح موجب. إذاً:

$$\begin{aligned}\cos n\theta+i\sin n\theta&=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)=\cos m\theta-i\sin m\theta\\&=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)^n.\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا نظرية دي موافر في حالة n عدد صحيح سالب ، ويكون أيضا في هذه الحالة العدد $\cos n\theta+i\sin n\theta$ هو القيمة الوحيدة للمقدار:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

(3) عندما تكون n عدد كسري:

نفرض أن $n=\frac{m}{k}$ حيث m,k عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك سوى الواحد الصحيح

$$\begin{aligned}\therefore(\cos n\theta+i\sin n\theta)^k&=\cos kn\theta+i\sin kn\theta\\&=\cos m\theta+i\sin m\theta\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)^m\end{aligned}$$

أي أن $\cos n\theta+i\sin n\theta$ هي إحدى قيم $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ وإذاً:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{n}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا نظرية دي موافر في حالة n عدد كسري ، ويكون في هذه الحالة العدد $\cos n\theta + i\sin n\theta$ هي إحدى قيم المقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n}$.

وبذلك ينتهي إثبات نظرية دي موافر.

✓ **القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n}$ عندما تكون n عدد كسري:**

من نظرية دي موافر يتضح أنه إذا كانت n كسرية فإن العدد $\cos n\theta + i\sin n\theta$ ليس سوى إحدى قيم المقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n}$ ولإيجاد القيم الأخرى لهذا المقدار نفرض أن $n = \frac{m}{k}$ حيث m, k عددان صحيحان ، ليس بينهما عامل مشترك سوى الواحد الصحيح.

وبفرض أن $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ إحدى قيم المقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n}$

$$\therefore (\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$$

$$\therefore (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{m}$$

$$\therefore \cos k\alpha + i\sin k\alpha = \cos m\theta + i\sin m\theta$$

$$\therefore \cos k\alpha = \cos m\theta, \sin k\alpha = \sin m\theta$$

$$\therefore k\alpha = m\theta + 2s\pi \Rightarrow \alpha = \frac{m\theta + 2s\pi}{k} \quad ; s = 0, 1, 2, \ldots$$

وبالتالي فإن القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ تُعطى بالعلاقة:

$$z_s = \cos\frac{m\theta + 2s\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta + 2s\pi}{k}.$$

وهذا يعني أنه يوجد عدد لا نهائي من القيم للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$.

وسنوضح أن هذه القيم ليست جميعها مختلفة ، وإنما يوجد منها فقط عدد k من القيم المختلفة وهي:

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$$

لذلك نوجد z_{s_1}, z_{s_2} حيث $0 \le k-1 \le s_2 < s_1$

$$\therefore \frac{m\theta + 2s_2\pi}{k} \ne \frac{m\theta + 2s_1\pi}{k}$$

وبذلك تكون القيم $z_0, z_1, z_2, ..., z_{k-1}$ جميعها مختلفة.

نُوجد $z_{s'}$ حيث $s' \geq k$ وبفرض أن $\frac{s'}{k} = a + \frac{b}{k}$ وإذاً $s' = ak + b$

حيث $a \geq 1$ ، $0 \leq b \leq k-1$.

وإذاً:

$$\begin{aligned} z_{s'} &= \cos\frac{m\theta + 2(ak+b)\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta + 2(ak+b)\pi}{k} \\ &= \cos\frac{m\theta + 2b\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta + 2b\pi}{k} \\ &= z_b. \end{aligned}$$

أي أن $z_{s'}$ تنطبق مع إحدى القيم $z_0, z_1, z_2, ..., z_{k-1}$.

ومن ثم فإن القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ تُعطى بالصورة:

$$z_s = \cos\frac{m\theta + 2s\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta + 2s\pi}{k}.$$

حيث $s = 0, 1, 2, ..., k-1$.

وبما أن $z_s = z_{a_{k+s}}$ إذاً بكتابة جميع القيم للعلاقة السابقة على شكل متتابعة لا نهائية

في الصورة $z_0, z_1, z_2, ...$

ونجد أن الحدود $z_0, z_1, z_2, ..., z_{k-1}$ مختلفة ، ثم تتكرر هذه الحدود بعد ذلك بنفس ترتيبها.

أمثلة:

1- أوجد قيمة $(1+i)^8$.

الحل:

نضع العدد $1+i$ في الصورة القطبية:

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

وبتطبيق نظرية دي موافر نحصل على:

$$(1+i)^8=(\sqrt{2})^8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^8$$
$$=16(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16.$$

2- **اختصر المقدار** $\dfrac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^5(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^7}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{11}(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)^9}$

ثم احسب قيمته عندما $\theta=\frac{\pi}{6}$.

<u>الحل</u>:

$$z=\frac{[\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)]^5[\cos 3\theta+i\sin 3\theta]^7}{[\cos 4\theta+i\sin 4\theta]^{11}[\cos(-5\theta)+i\sin(-5\theta)]^9}$$
$$=\frac{[\cos\theta+i\sin\theta]^{-10}[\cos\theta+i\sin\theta]^{21}}{[\cos\theta+i\sin\theta]^{44}[\cos\theta+i\sin\theta)]^{-45}}$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^{12}$$
$$=\cos(12\theta)+i\sin(12\theta).$$

وعندما $\theta=\frac{\pi}{6}$ يكون:

$$z=\cos(12)(\frac{\pi}{6})+i\sin(12)(\frac{\pi}{6})=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

3- اختصر المقدار $\dfrac{(1+i\tan\theta)^5}{(1-i\tan\theta)^7}$ ثم احسب قيمته عندما $\theta=\frac{\pi}{6}$.

<u>الحل</u>:

$$z=\frac{(1+i\tan\theta)^5}{(1-i\tan\theta)^7}=\frac{(\cos\theta)^7(1+i\tan\theta)^5}{(\cos\theta)^7(1-i\tan\theta)^7}$$
$$=\frac{(\cos\theta)^2(\cos\theta+i\sin\theta)^5}{(\cos\theta-i\sin\theta)^7}$$
$$=\frac{(\cos^2\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)^5}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-7}}$$
$$=(\cos^2\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)^{12}$$
$$=(\cos^2\theta)[\cos(12\theta)+i\sin(12\theta)].$$

وعندما $\theta=\frac{\pi}{6}$ يكون:

$$z = \cos^2(\frac{\pi}{6})[\cos(12)(\frac{\pi}{6}) + i\sin(12)(\frac{\pi}{6})] = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2[\cos 2\pi + i\sin 2\pi] = \frac{3}{4}$$

4- أوجد القيم المختلفة للمقدار $\sqrt[4]{i}$.

الحل:

نضع العدد i في الصورة القطبية:

$$|i| = \sqrt{0+1} = 1,$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sqrt[4]{i} = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}}$$

وبذلك تكون القيم المختلفة للمقدار $\sqrt[4]{i}$ تُعطى من العلاقة:

$$z_s = \cos\frac{m\theta + 2s\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta + 2s\pi}{k}.$$

حيث $s = 0,1,2,\ldots,k-1$ ($\frac{m}{k} = \frac{1}{4}$) وإذاً:

$$z_s = \cos\frac{1(\frac{\pi}{2}) + 2s\pi}{4} + i\sin\frac{1(\frac{\pi}{2}) + 2s\pi}{4}$$

$$= \cos\frac{(4s+1)\pi}{8} + i\sin\frac{(4s+1)\pi}{8} \qquad ; s = 0,1,2,3.$$

$$\therefore z_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8},$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8} = -\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8},$$

$$z_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8},$$

$$z_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

أي أن القيم المختلفة للمقدار $\sqrt[4]{i}$ تكون:

$$\pm(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}), \pm(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}).$$

5- أوجد قيم المقدار $(1+i)^{\frac{2}{3}}$.

الحل:

نضع العدد $1+i$ في الصورة القطبية:

$$|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ , \theta=\tan^{-1}\frac{1}{1}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$$\therefore (1+i)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{\frac{2}{3}}$$

وإذاً القيم المختلفة للمقدار $(1+i)^{\frac{2}{3}}$ تُعطى من العلاقة:

$$z_s=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{2(\frac{\pi}{4})+2s\pi}{3}+i\sin\frac{2(\frac{\pi}{4})+2s\pi}{3})$$

$$=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{(4s+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(4s+1)\pi}{6}) \qquad ;s=0,1,2.$$

$$\therefore z_0=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt[3]{4}},$$

$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt[3]{4}},$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=\sqrt[3]{2}\,i.$$

تمارين:

1- لكل من الأعداد المركبة z الآتية:

$4+3i\ ,\ 1-i\ ,\ 2i$

أوجد $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), -z, \bar{z}, z^{-1}$.

2- برهن أن:

(i) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(ii) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(iii) $z\,\bar{z} = |z|^2$

(iv) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

3-اكتب الأعداد المركبة الآتية

$\dfrac{3}{1-2i}\ ,\ \dfrac{1}{2+i}\ ,\ \dfrac{2+i}{1-i}$

على الصورة $x+iy$.

4- أوجد قيم x, y الحقيقية من المعادلات الآتية:

(i) $(2-3i)x+(3+4i)y = 2-i$

(ii) $(4-i)x-(3+2i)y-(1+i) = 0$

5- ضع الأعداد المركبة الآتية في الصورة القطبية:

$1+i\ ,\ 1-i\ ,\ \sqrt{3}-i\ ,\ -i\ ,\ 1-\sqrt{3}i\ ,\ 3+4i\ ,\ -9-4i\ ,$

$\cos\alpha + i\sin\alpha\ ,\ \sin\alpha + i(1+\cos\alpha)\ ,\ -\sin\alpha - i(1+\cos\alpha).$

6- أوجد $|z|, \arg(z)$ لكل من الأعداد المركبة z الآتية:

$1-\sqrt{3}\,i\ ,\ -2-3i\ ,\ i\ ,\ -2i\ ,\ 4$

7- أثبت أن $\left|\dfrac{1-z}{\bar{z}-1}\right| = 1\ ;\ \bar{z} \neq 1$

8- أوجد حل المعادلات الآتية:

(1) $|z| - z = 1+2i$

(2) $|z| + z = 2+i$

9- أوجد قيمة:

$$\log(-\sqrt{3}+i)\ ,\ \log(-3)$$

10- إذا كانت n عدد صحيح فأثبت أن:

(1) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$

(2) $(\sqrt{3}+i)^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6})$

(3) $(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta})^n = \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$

11- أثبت أن:

$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta} = \sin\theta + i\cos\theta$$

ومن ثم استنتج أن:

$$(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})^5 + i(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5})^5 = 0.$$

==