مبادئ الميكانيكا الكلاسيكية

ديناميكا

لطلاب الفرقة الثانية تربية رياضيات

إعداد

قسم الرياضيات

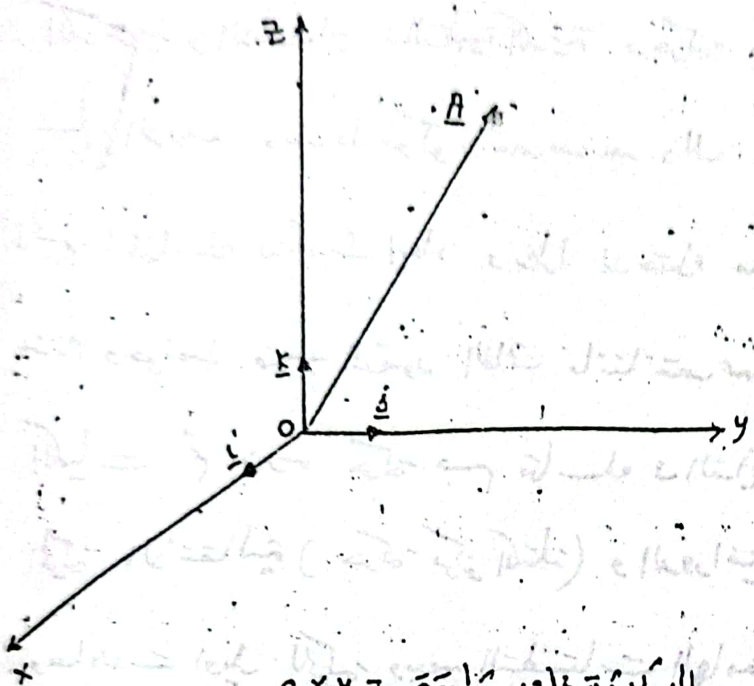
مطبعة الساهر بقنا

مقدمة

ندرس في هذا الجزء ديناميكا الجسيم في ثلاث أبعاد ونتعرض خلالها لمركبات السرعة والعجلة في الثلاثة في الاحداثيات المختلفة الكرتيزية والاسطوانية والقطبية الكرية وحركة جسيم بالقرب من سطح الارض وبندول فوكو. نتعرض بعد ذلك لدراسة ديناميكا الجسم المتماسك في ثلاث ابعاد ونظرا لاحتواء معادلات الحركة على عزوم وحواصل ضرب القصور الذاتي فاننا نتعرض لدراسة هذه الكميات ثم ندرس حركة جسم متماسك في الثلاثة واربط معادلات الحركة الانتقالية (حركة مركز الكتلة) والدورانية (حول مركز الكتلة) ومعادلات اويلر للحركة وبعض التطبيقات الهامة.

ديناميكا الجسيم في ثلاث أبعاد

معدل تغير متجه بالنسبة الى محاور ثابتة.



نفرض متجه $\underline{A}$ منسوب الى ثلاثة محاور ثابتة $oxyz$

$$\underline{A} = A_1 \underline{i} + A_2 \underline{j} + A_3 \underline{k}$$

حيث $\underline{i}$ ، $\underline{j}$ ، $\underline{k}$ متجهات وحدة في اتجاهات المحاور ox ، oy ، oz على الترتيب.

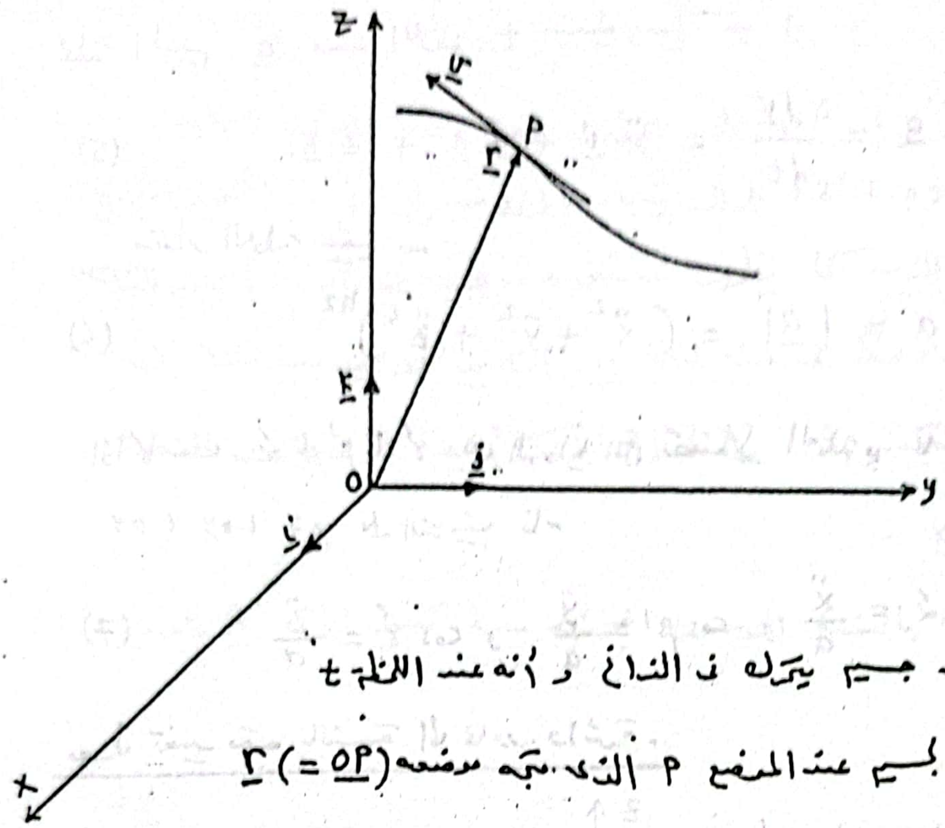
سنرمز الى معدل تغير المتجه $\underline{A}$ بالنسبة للزمن في هذه الحالة ،

أي في حالة المحاور الثابتة ، بالرمز $\left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{fixed}$ ويعطى

$$\left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{Fixed} = \frac{dA_1}{dt}\underline{i} + \frac{dA_2}{dt}\underline{j} + \frac{dA_3}{dt}\underline{k}$$

$$= \dot{A}_1 \underline{i} + \dot{A}_2 \underline{j} + \dot{A}_3 \underline{k} \qquad (1)$$

سرعة وعجلة جسيم بالنسبة الى محاور ثابتة .



نفرض جسيم يتحرك في الفراغ وانه عند اللحظة t

يكون الجسيم عند الموضع P الذي متجه موضعه $\underline{r}\ (=\underline{OP})$

بالنسبة الى مجموعة محاور ثابتة oxyz حيث

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$$

سرعة الجسيم $\underline{v}$ عند اللحظة t تتعين من

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j} + \dot{z}\,\underline{k} \qquad (2)$$

مقدار السرعة يتعين من

$$v = |\underline{v}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} \qquad (3)$$

اتجاه السرعة يكون في اتجاه المماس لمنحنى المسار. اذا كانت α, β, γ

هي الزوايا التي تصنعها السرعة مع محاور الاحداثيات ox, oy, oz

على الترتيب فإن

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{v} \qquad (4)$$

حيث v مقدار سرعة الجسم وتعطى من المعادلة (3).

عجلة الجسم $\underline{a}$ عند اللحظة t تعطى من

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{x}\,\underline{i} + \ddot{y}\,\underline{j} + \ddot{z}\,\underline{k} \qquad (5)$$

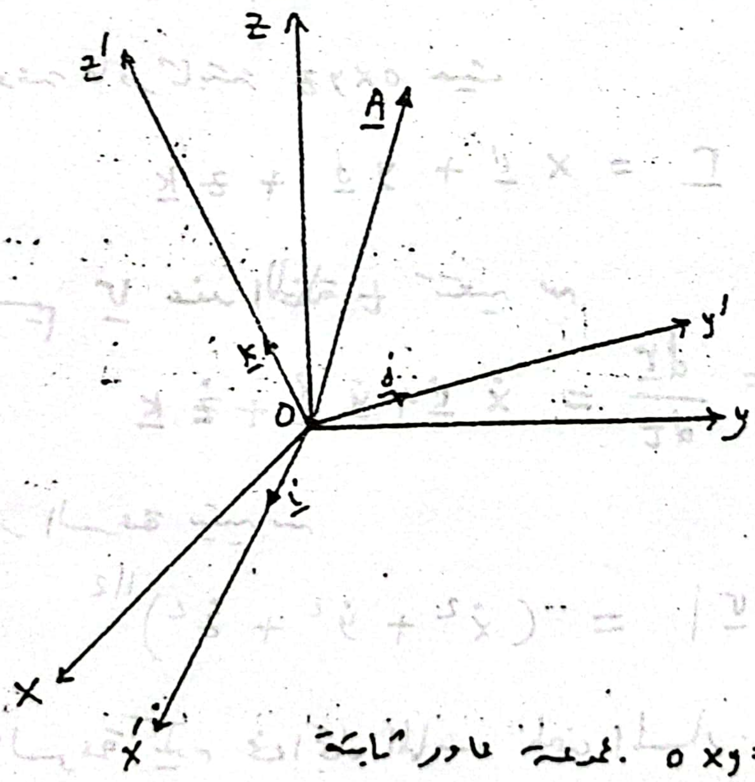
مقدار العجلة يعطى من

$$a = |\underline{a}| = \left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2\right)^{1/2} \qquad (6)$$

اذا كانت α' ، β' ، γ' هي الزوايا التي تصنعها العجلة مع محاور الاحداثيات ox ، oy ، oz على الترتيب فان

$$\cos\alpha' = \frac{\ddot{x}}{a} \, , \quad \cos\beta' = \frac{\ddot{y}}{a} \, , \quad \cos\gamma' = \frac{\ddot{z}}{a} \qquad (7)$$

معدل تغير متجه بالنسبة الى محاور دائرة.



نفرض ان $oxyz$ مجموعة محاور ثابتة في الفراغ وان $ox'y'z'$ مجموعة محاور تدور بسرعة زاوية $\underline{\omega}$ بالنسبة الى مجموعة المحاور الثابتة $oxyz$ وان المجموعتين كانتا في البداية منطبقتين.

نفرض متجه $\underline{A}$ في الصورة

$$\underline{A} = A_1 \underline{i}' + A_2 \underline{j}' + A_3 \underline{k}' \qquad (8)$$

حيث $\underline{i}'$ ، $\underline{j}'$ ، $\underline{k}'$ متجهات وحدة في اتجاهات المحاور ox' ، oy' ، oz' على الترتيب. المطلوب إيجاد معدل تغير المتجه $\underline{A}$ بالنسبة للزمن كما يظهر لشخص موجود في مجموعة المحاور الثابتة $oxyz$. نلاحظ أن في هذه الحالة أن التغير لا يحدث فقط في مركبات المتجه A_1 ، A_2 ، A_3 ولكن أيضا في متجهات الوحدة $\underline{i}'$ ، $\underline{j}'$ ، $\underline{k}'$.

بتفاضل (8) بالنسبة للزمن t نجد أن معدل تغير المتجه $\underline{A}$ بالنسبة للزمن يكون

$$\left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{fixed} = \frac{dA_1}{dt}\underline{i}' + A_1\frac{d\underline{i}'}{dt} + \frac{dA_2}{dt}\underline{j}' + A_2\frac{d\underline{j}'}{dt} + \frac{dA_3}{dt}\underline{k}' + A_3\frac{d\underline{k}'}{dt}$$

$$= \dot{A}_1 \underline{i}' + \dot{A}_2 \underline{j}' + \dot{A}_3 \underline{k}' + A_1\frac{d\underline{i}'}{dt} + A_2\frac{d\underline{j}'}{dt} + A_3\frac{d\underline{k}'}{dt} \qquad (9)$$

حيث أن متجهات الوحدة $\underline{i}'$ ، $\underline{j}'$ ، $\underline{k}'$ ثابتة في المقدار (الطول لكل منها يساوي الوحدة) فيمكن اعتبار $\frac{d\underline{i}'}{dt}$ تمثل سرعة نقطة مادية متجه موضعها بالنسبة إلى o هو $\underline{i}'$ وتكون سرعة النقطة المادية تساوي $\underline{\omega} \wedge \underline{i}'$ ، أي أن

$$\frac{d\underline{i}'}{dt} = \underline{\omega} \wedge \underline{i}'$$

بالمثل فإن $\frac{d\underline{j}'}{dt}$ ، $\frac{d\underline{k}'}{dt}$ تعطى من

$$\frac{d\underline{j}'}{dt} = \underline{\omega} \wedge \underline{j}' \quad , \quad \frac{d\underline{k}'}{dt} = \underline{\omega} \wedge \underline{k}'$$

بالتعويض في (٩) نحصل على

$$\left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{fixed} = \dot{A}_1 \underline{i}' + \dot{A}_2 \underline{j}' + \dot{A}_3 \underline{k}' + A_1 \underline{\omega} \wedge \underline{i}' + A_2 \underline{\omega} \wedge \underline{j}' + A_3 \underline{\omega} \wedge \underline{k}'$$

$$= \dot{A}_1 \underline{i}' + \dot{A}_2 \underline{j}' + \dot{A}_3 \underline{k}' + \underline{\omega} \wedge (A_1 \underline{i}') + \underline{\omega} \wedge (A_2 \underline{j}') + \underline{\omega} \wedge (A_3 \underline{k}')$$

$$= \dot{A}_1 \underline{i}' + \dot{A}_2 \underline{j}' + \dot{A}_3 \underline{k}' + \underline{\omega} \wedge (A_1 \underline{i}' + A_2 \underline{j}' + A_3 \underline{k}')$$

$$= \dot{A}_1 \underline{i}' + \dot{A}_2 \underline{j}' + \dot{A}_3 \underline{k}' + \underline{\omega} \wedge \underline{A}$$

أي أن

$$\left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{rotating} + \underline{\omega} \wedge \underline{A} \qquad (10)$$

حيث $\left(\frac{d\underline{A}}{dt}\right)_{rotating}$ هو المعدل الزمني لتغير المتجه $\underline{A}$ كما يبدو لشخص في مجموعة المحاور $ox'y'z'$ ويدور معها ، $\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}'$ متجهات الوحدة في اتجاهات المحاور الدائرة $ox'y'z'$ تعتبر ثابتة بالنسبة لهذا الشخص .

سرعة وعجلة جسيم بالنسبة الى محاور دائرة .

نفرض جسيم يتحرك في الفراغ وأن متجه موضعه عند أي لحظة t هو $\underline{r}$ بالنسبة الى مجموعة المحاور $ox'y'z'$ التي تدور بسرعة زاوية $\underline{\omega}$ حول النقطة الثابتة o في مجموعة المحاور الثابتة $oxyz$:

بالنسبة الى مجموعة المحاور الثابتة $oxyz$ (أي بالنسبة لراصد في مجموعة المحاور الثابتة) فان سرعة الجسيم تتعين من العلاقة (10) وذلك

بوضع $\underline{A} = \underline{r}$ ونحصل على

$$\underline{v}_f = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{rotating} + \underline{\omega} \wedge \underline{r}$$

نستخدم متجه الموضع $\underline{r}$ ، والسرعة الزاوية $\underline{\omega}$ في الصورة

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k} ,$$

$$\underline{\omega} = \omega_1\,\underline{i} + \omega_2\,\underline{j} + \omega_3\,\underline{k}$$

حيث $\underline{i}$ ، $\underline{j}$ ، $\underline{k}$ متجهات وحدة في اتجاهات المحاور ox' ، oy' ، oz' على الترتيب.

$$\underline{v}_f = \underline{v}_r + \underline{\omega} \wedge \underline{r}$$

$$\therefore \underline{v}_f = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j} + \dot{z}\,\underline{k} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

إذا كانت (v_1, v_2, v_3) هي مركبات السرعة $\underline{v}_f$ فإن

$$v_1 = \dot{x} + \omega_2 z - \omega_3 y ,$$

$$v_2 = \dot{y} + \omega_3 x - \omega_1 z ,$$

$$v_3 = \dot{z} + \omega_1 y - \omega_2 x$$

وهذه هي مركبات سرعة جسيم في حالة المحاور الدائرة كما تبدو لشخص موجود في مجموعة الاسناد الثابتة $oxyz$.

عجلة الجسيم $\underline{a}_f$ تعطى من

$$\underline{a}_f = \left(\frac{d\underline{v}_f}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\underline{v}_f}{dt}\right)_{rotating} + \underline{\omega} \wedge \underline{v}_f \quad (11)$$

حيث أن

$$\left(\frac{d\underline{v}_f}{dt}\right)_{rotating} = \underline{a}_r + \underline{\omega} \wedge \underline{v}_r + \dot{\underline{\omega}} \wedge \underline{r}$$

حيث $\underline{a}_r = \ddot{x}\,\underline{i} + \ddot{y}\,\underline{j} + \ddot{z}\,\underline{k}$

الحد الثاني في الطرف الأيمن من المعادلة (11) يساوي

$$\underline{\omega}\wedge\underline{v}_f = \underline{\omega}\wedge(\underline{v}_r + \underline{\omega}\wedge\underline{r})$$
$$= \underline{\omega}\wedge\underline{v}_r + \underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{r})$$

وبالتالي فإن عجلة الجسيم $\underline{a}_f$ تتعين من

$$\underline{a}_f = \underline{a}_r + 2\,\underline{\omega}\wedge\underline{v}_r + \underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{r}) + \dot{\underline{\omega}}\wedge\underline{r}$$

أي أن

$$\underline{a}_r = \underline{a}_f - 2\,\underline{\omega}\wedge\underline{v}_r - \underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{r}) - \dot{\underline{\omega}}\wedge\underline{r}$$
$$= \underline{a}_f + \underline{a}_C + \underline{a}_c - \dot{\underline{\omega}}\wedge\underline{r}$$

حيث

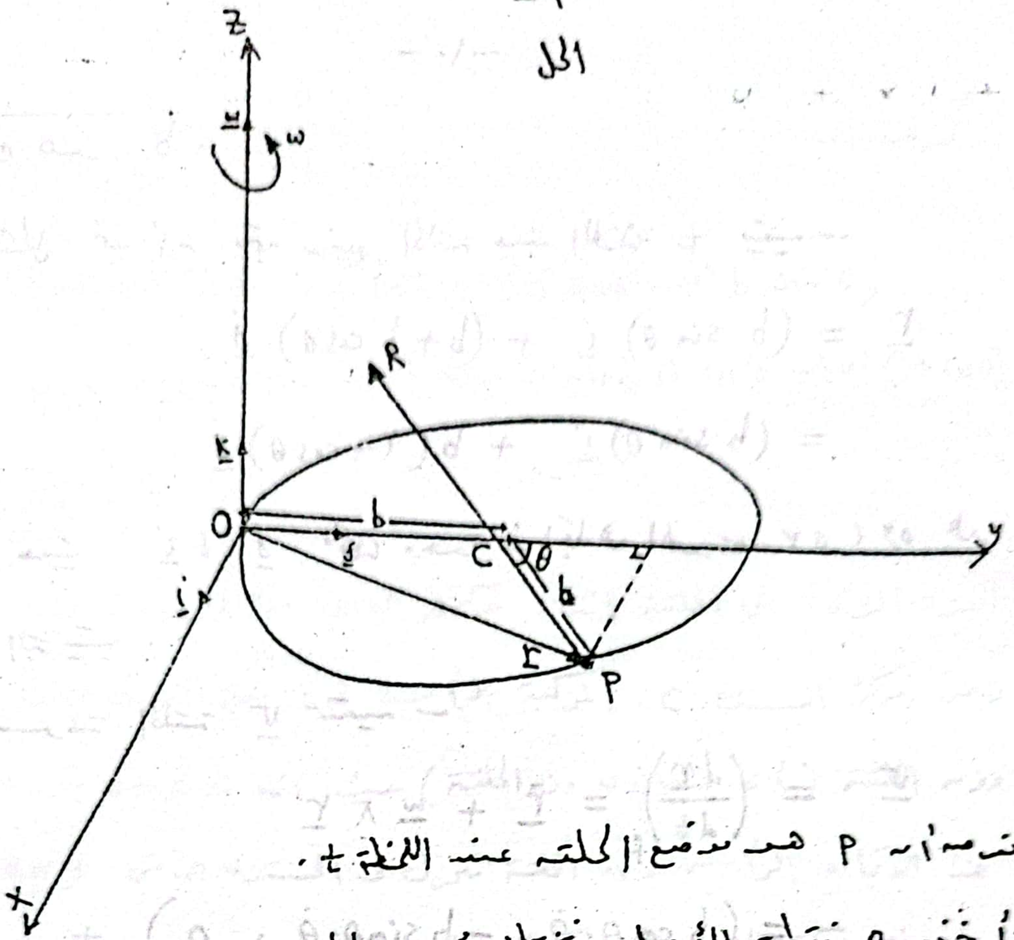
$$\underline{a}_C = -2\,\underline{\omega}\wedge\underline{v}_r \quad و$$
$$\underline{a}_c = -\underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{r})$$

العجلة $\underline{a}_C$ تسمى بعجلة كريوليس Coriolis acceleration

والعجلة $\underline{a}_c$ تسمى بعجلة الطرد المركزي centrifugal acceleration

مثال. سلك دائري أملس يدور بسرعة زاوية منتظمة ω في مستوى أفقي حول محور عمودي على مستواه عند نقطة O على محيطه. أثبت أن معادلة الحركة لحلقة صغيرة ملساء تنزلق على السلك هي $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$ حيث θ هي الزاوية بين القطر المار بالحلقة والقطر المار بالنقطة O.

الحل



نفرض أن P هو موضع الحلقة عند اللحظة t.

نأخذ O نقطة الأصل ونختار مجموعة المحاور الدائرة OXYZ كالآتي: المحور OZ ينطبق على محور الدوران، المحور OY ينطبق على القطر المار بالنقطة O، المحور OX عمودي على كل من المحورين OY، OZ، أي أن المحور OX ينطبق على المماس للسلك عند O.

السرعة الزاوية $\underline{\omega}$ التي يدور بها السلك حول المحور OZ تكون في الصورة

$$\underline{\omega} = w\,\underline{K}$$

حيث $\underline{K}$ متجه وحدة في اتجاه المحور OZ.

نفرض أن $\underline{r}$ هو متجه موضع الحلقة ($\underline{OP}$) وأنه نفسه يعطى

السلك هو b .

من الشكل نجد أن متجه موضع الحلقة عند اللحظة t يعطى بـ

$$\underline{r} = (b\sin\theta)\,\underline{i} + (b + b\cos\theta)\,\underline{j}$$

$$= (b\sin\theta)\,\underline{i} + b(1+\cos\theta)\,\underline{j}$$

حيث $\underline{i}$ ، $\underline{j}$ متجها وحدة في اتجاهي المحورين ox ، oy على الترتيب .

سرعة الحلقة $\underline{v}$ تعطى بـ

$$\underline{v} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_f = \dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \wedge \underline{r}$$

$$= \left(b\cos\theta\cdot\dot\theta\,,\ -b\sin\theta\cdot\dot\theta\,,\ 0\right) + $$

$$+ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b\sin\theta & b(1+\cos\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{v} = \left[b\dot\theta\cos\theta - \omega b(1+\cos\theta)\,,\ -b\dot\theta\sin\theta + \omega b\sin\theta\,,\ 0\right]$$

عجلة الحلقة $\underline{a}$ تعطى بـ

$$\underline{a} = \left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_f = \dot{\underline{v}} + \underline{\omega} \wedge \underline{v}$$

$$= \left[b\ddot\theta\cos\theta - b\dot\theta^2\sin\theta + \omega b\dot\theta\sin\theta\,,\ -b\ddot\theta\sin\theta - b\dot\theta^2\cos\theta + \omega b\dot\theta\cos\theta\,,\ 0\right]$$

$$+ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b\dot\theta\cos\theta - \omega b(1+\cos\theta) & -b\dot\theta\sin\theta + \omega b\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

نفرض أن

$$\underline{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$$

$$\therefore a_1 = b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta + 2wb\dot{\theta}\sin\theta - w^2 b\sin\theta ,$$

$$a_2 = -b\ddot{\theta}\sin\theta - b\dot{\theta}^2\cos\theta + 2wb\dot{\theta}\cos\theta - bw^2(1+\cos\theta),$$

$$a_3 = 0$$

القوة المؤثرة على الحلقة أثناء حركتها هي رد فعل السلك R وتمر بمركز السلك C . المركبة الرأسية لرد فعل السلك تتساوى مع وزن الحلقة (أي تساوي وزن الحلقة) حيث أنه لا توجد حركة في هذا الاتجاه الرأسي وإن الحلقة تتحرك في المستوى الأفقي xoy.
معادلتا حركة الحلقة في اتجاهي المحورين ox ، oy هما على الترتيب

$$m a_1 = -R\sin\theta , \qquad (1)$$

$$m a_2 = -R\cos\theta \qquad (2)$$

بقسمة (1) على (2) نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

i.e. $a_1\cos\theta = a_2\sin\theta$

بالتعويض عن قيمتي a_1 ، a_2 نجد أن

$$(\cos\theta)\left[b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta + 2wb\dot{\theta}\sin\theta - w^2 b\sin\theta\right]$$

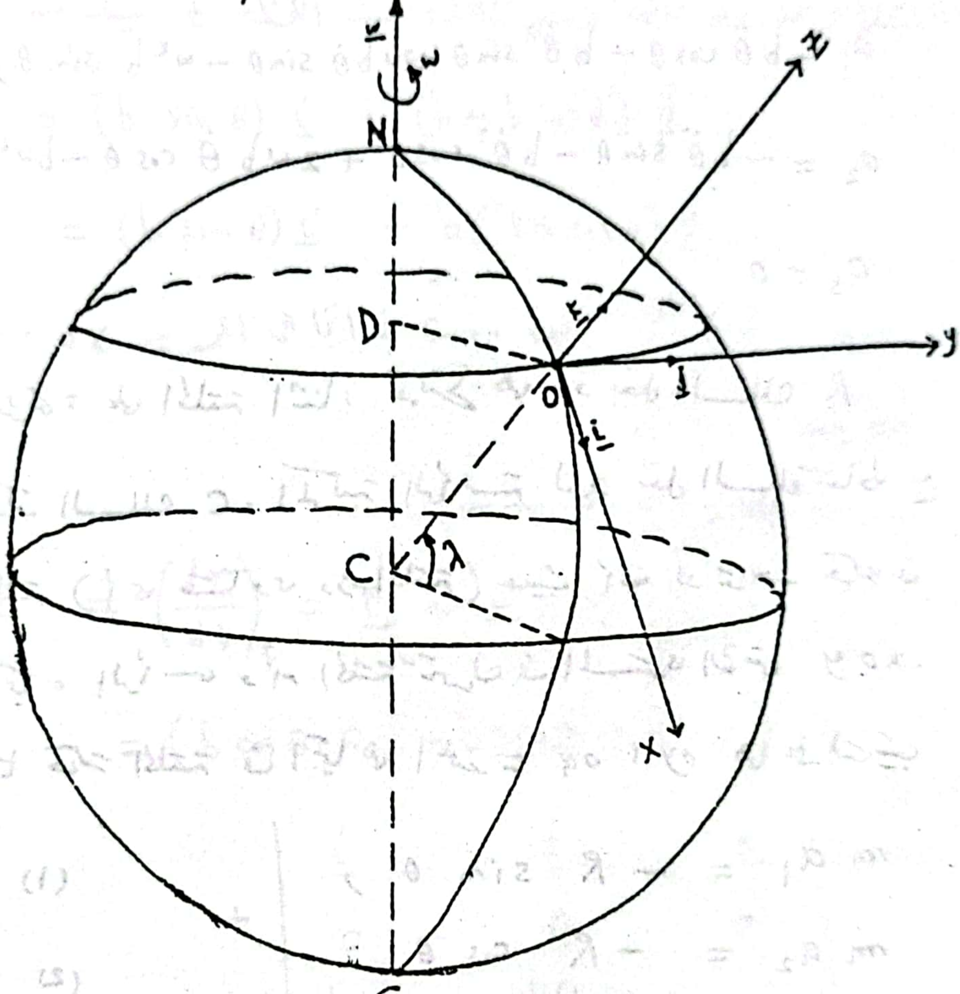
$$= (\sin\theta)\left[-b\ddot{\theta}\sin\theta - b\dot{\theta}^2\cos\theta + 2wb\dot{\theta}\cos\theta - bw^2(1+\cos\theta)\right]$$

$$\therefore b\ddot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + bw^2\sin\theta = 0$$

أي معادلة حركة الحلقة تكون $\ddot{\theta} + w^2\sin\theta = 0$

حركة جسيم بالقرب من سطح الأرض.

Motion of a particle near to the earth.



لدراسة تأثير دوران الأرض على حركة الجسيمات بالقرب من سطح الأرض نعتبر جسيم ساقط بالقرب من سطح الأرض من السكون من ارتفاع h من سطح الأرض.

الكرة الأرضية تدور بسرعة زاوية ω في الاتجاه $\underline{SN}$ المبين بالشكل حيث N ترمز الى الشمال ، S ترمز الى الجنوب ، ومقدار السرعة الزاوية يساوي

$$\omega = \frac{2\pi \quad rad/day}{(24)(60)(60) \quad sec/day}$$

أي أن

$$w = \frac{2\pi \quad rad/day}{86,400 \quad sec/day}$$

$$\cong 7.29 \times 10^{-5} \quad rad/sec. \qquad (1)$$

نفرض أن C مركز الأرض وأن $\underline{R} = \underline{CO}$ حيث R نصف قطر الأرض. نأخذ مجموعة محاور $oxyz$ عند نقطة o على سطح الأرض عند خط عرض λ حيث المحور oz في اتجاه $\underline{CO}$ والمحور ox في اتجاه المماس لخط الطول المار بالنقطة o نحو الجنوب، والمحور oy مماس لخط العرض للنقطة o نحو الشرق.

نلاحظ أن المحاور $oxyz$ تدور بسرعة زاوية $\underline{\omega}$ حيث

$$\underline{\omega} = -w\cos\lambda \, \underline{i} + w\sin\lambda \, \underline{k} \qquad (2)$$

في هذه الحالة نجد

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{R}$$

حيث $\underline{r}, \underline{r}'$ متجهي موضع الجسيم بالنسبة إلى o, C على الترتيب. تختلف صورة العجلة في هذه الحالة عن الصورة التي حصلنا عليها سابقاً بمقدار عجلة o بالنسبة إلى C والتي تساوي $w^2 \cdot OD$ حيث D مركز دائرة العرض عند o، أي تختلف بمقدار $w^2 R\cos\lambda$ وهو مقدار صغير يمكن إهماله. أي أن عجلة الجسيم $\underline{a}$ بالنسبة إلى o تعطى من

$$\underline{a} = \underline{g} - 2\underline{\omega} \wedge \underline{v} - \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{r}) - \underline{\dot{\omega}} \wedge \underline{r}.$$

حيث أن السرعة الزاوية ثابتة نجد $\underline{\dot{\omega}} = 0$. كذلك الحد

$\underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{r})$ صغير يمكن اهماله ونحصل على

$$\underline{a} = \underline{g} - 2\,\underline{\omega} \wedge \underline{v} \tag{3}$$

حيث $\underline{g}$ عجلة الجاذبية الارضية وتساوى

$$\underline{g} = -g\,\underline{k}\ , \tag{4}$$

$$\underline{\omega} \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= -(\omega\,\dot{y}\,\sin\lambda)\,\underline{i} + (\omega\,\dot{x}\sin\lambda + \omega\,\dot{z}\cos\lambda)\,\underline{j} - (\omega\,\dot{y}\cos\lambda)\,\underline{k} \tag{5}$$

بالتعويض من (4) ، (5) في (3) نجد أن مركبات عجلة الجسم في الصورة

$$\ddot{x} = 2\omega\,\dot{y}\sin\lambda\ , \tag{6}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\,(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)\ , \tag{7}$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega\,\dot{y}\cos\lambda \tag{8}$$

بتكامل (6) ، (8) نجد أن

$$\dot{x} = 2\omega\,y\sin\lambda + c_1\ ,$$

$$\dot{z} = -g\,t + 2\omega\,y\cos\lambda + c_2$$

حيث أن الجسم سقط من السكون من الموضع $(0,0,h)$ ،

أى أن $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ، $x = y = 0$ ، $z = h$ عند $t=0$

ونجد أن $C_1 = 0$ ، $C_2 = 0$

$$\therefore \dot{x} = 2wy \sin\lambda , \qquad (9)$$

$$\dot{z} = -gt + 2wy\cos\lambda \qquad (10)$$

بالتعويض من (9) ، (10) في (7) نجد أن

$$\ddot{y} = -2w\left[2wy\sin^2\lambda - gt\cos\lambda + 2wy\cos^2\lambda\right]$$

$$\ddot{y} = 2wgt\cos\lambda - 4w^2 y \qquad (11)$$

بإهمال الحد الذي يحتوي على w^2 في الطرف الأيمن من (11) نحصل على

$$\ddot{y} = 2wgt\cos\lambda \qquad (12)$$

بتكامل (12) نجد أن

$$\dot{y} = wgt^2\cos\lambda + C_3$$

حيث أنه عند بداية الحركة $(t=0)$ فإن $\dot{y}=0$ وبالتالي فإن $C_3=0$ وتأخذ مركبة السرعة $\dot{y}$ الصورة

$$\dot{y} = wgt^2\cos\lambda \qquad (13)$$

بالتعويض عن $\dot{y}$ من (13) في المعادلتين (6) ، (8) وإهمال الحدود المشتملة على w^2 نجد أن

$$\ddot{x} = 0 , \qquad (14)$$

$$\ddot{z} = -g \qquad (15)$$

بتكامل (14) ، (15) فإن

$$\dot{x} = C_4 ,$$

$$\dot{z} = -gt + C_5$$

من شروط الحركة الابتدائية يكون $\dot{x} = \dot{z} = 0$ عند $t=0$ وبالتالي فإن

$$c_4 = c_5 = 0$$

$$\therefore \quad \dot{x} = 0 \,, \qquad (16)$$

$$\dot{z} = -g t \qquad (17)$$

بتكامل (16) ، (17) فإن

$$x = c_6 \,,$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + c_7$$

عند بداية الحركة $(t=0)$ يكون $x=0$ ، $z=h$ وبالتالي

فإن $c_6 = 0$ ، $c_7 = h$

$$\therefore \quad x = 0 \,, \qquad (18)$$

$$z = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (19)$$

بتكامل المعادلة (13) نحصل على

$$y = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos\lambda + c_8$$

حيث أن $y=0$ عند $t=0$ فإن $c_8 = 0$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos\lambda \qquad (20)$$

مما سبق نلاحظ أن تأثير دوران الأرض هو ظهور مركبات لكل من العجلة والسرعة والموضع في الاتجاه oy وهذه المركبات جميعها تظهر فيها السرعة الزاوية ω ، إذا وضعنا $\omega = 0$ أي إذا أهملنا تأثير دوران الأرض على حركة الجسم بالقرب من سطح الأرض

فاننا نجد أن حركة الجسم في هذه الحالة تكون فقط في الاتجاه الرأسي oz وهذا هو ما نحسبه دراسته.

يصل الجسم سطح الأرض عندما يقطع مسافة رأسية h. للحصول على الزمن الذي يأخذه الجسم حتى يصل سطح الأرض فاننا نضع $z=0$ فنجد أن

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

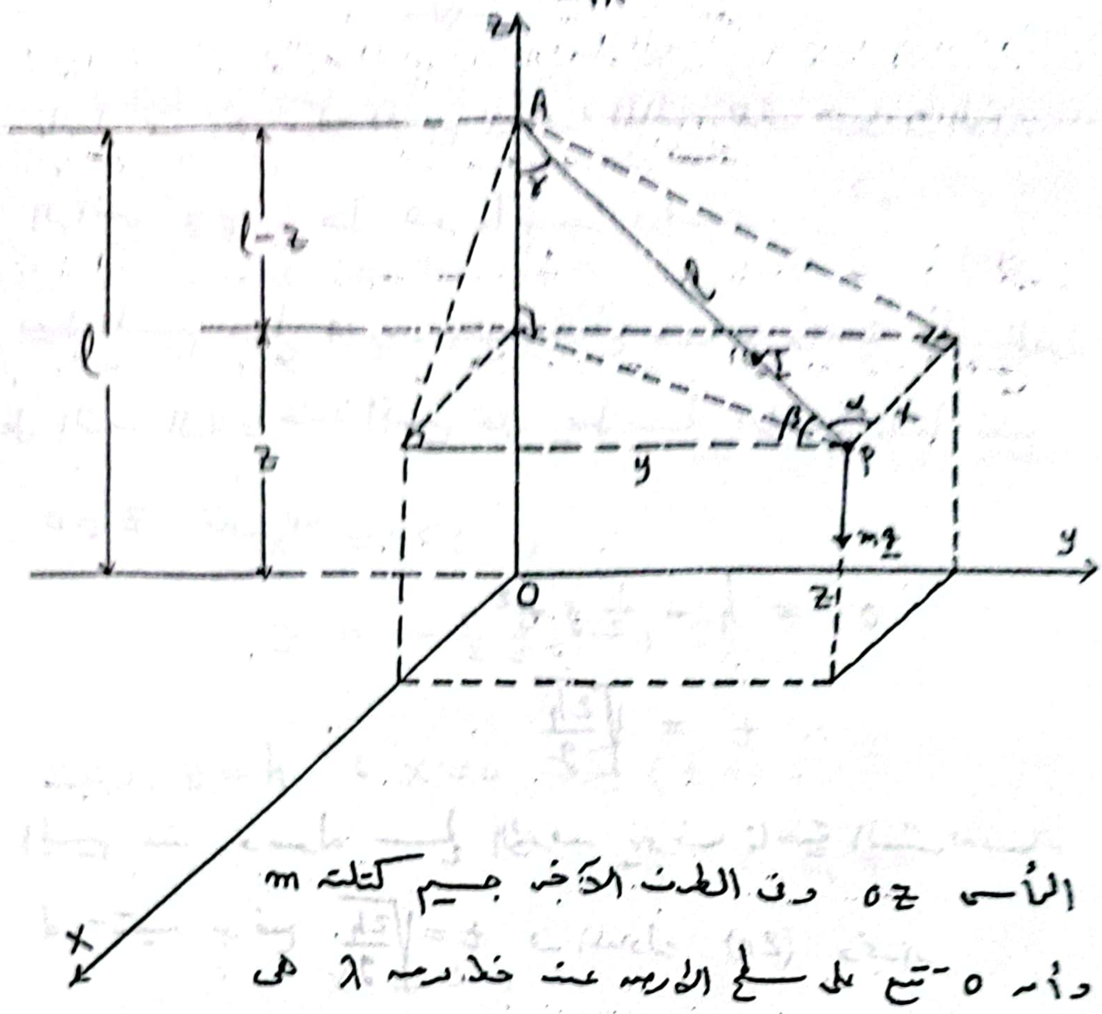
الجسم عند وصوله سطح الأرض ينحرف ناحية الشرق مسافة d تتعين بوضع $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ في المعادلة (20) ونجد أن

$$d = \frac{2}{3} h \omega \cos\lambda \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ملحوظة. نلاحظ أنه باختلاف الشروط الابتدائية تختلف النتائج التي نحصل عليها للأسباب المختلفة فالحالة التي تعرضنا لدراستها كانت شروط الحركة الابتدائية للجسم هو سقوطه رأسيا من السكون من ارتفاع h من سطح الأرض وأثبتنا أن الجسم يتحرك في المستوى yoz.

بندول فوكو. Foucault Pendulum

لدراسة تأثير دوران الأرض على حركة بندول بسيط نعتبر خيط طوله l مثبت من أحد طرفيه عند نقطة A الواقعة على المحور



الرأسي OZ وفي الطرف الآخر جسيم كتلته m

وأن O تقع على سطح الأرض عند خط عرض λ هي

موضع اتزان الجسيم .

نعتبر مجموعة المحاور $oxyz$ التي سبق اختيارها والتي تدور بسرعة

دوران الأرض $\underline{\omega}$ حيث

$$\underline{\omega} = -\omega \cos\lambda \, \underline{i} + \omega \sin\lambda \, \underline{k} \qquad (1)$$

نفرض أنه عند أي لحظة t تكون احداثيات الجسيم هي (x, y, z).

يؤثر على الجسيم أثناء حركته قوتين هما وزنه $m\underline{g}$ رأسيا لأسفل

والشد في الخيط $\underline{T}$ حيث

$$m\underline{g} = -mg\,\underline{k} \,, \qquad (2)$$

$$\underline{T} = -T\cos\alpha \, \underline{i} - T\cos\beta \, \underline{j} + T\cos\gamma \, \underline{k} \qquad (3)$$

حيث الزوايا α ، β ، γ تعطى من (انظر الشكل)

$$\cos\alpha = \frac{x}{l} \;,\; \cos\beta = \frac{y}{l} \;,\; \cos\gamma = \frac{l-z}{l} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3) نحصل على

$$\underline{T} = -\frac{xT}{l}\,\underline{i} - \frac{yT}{l}\,\underline{j} + \frac{(l-z)T}{l}\,\underline{k} \qquad (5)$$

وتكون معادلة حركة الجسيم بالنسبة الى المحاور الدائرة $oxyz$ هي

$$m\,\underline{a} = \underline{T} + m\,\underline{g} - 2m\,\underline{\omega}\wedge\underline{v} \qquad (6)$$

وذلك باهمال كل من عجلة o بالنسبة الى مركز الأرض c والحد $-\underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{r})$ لصغرهما حيث يحويان ω^2 وكذلك $\dot{\underline{\omega}}=0$ لأن $\underline{\omega}$ سرعة زاوية منتظمة . حيث $\underline{r}$ ، $\underline{v}$ ، $\underline{a}$ هي على الترتيب موضع وسرعة وعجلة الجسيم عند اللحظة t وتعطى من

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k} \,, \qquad (7)$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j} + \dot{z}\,\underline{k} \,, \qquad (8)$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{x}\,\underline{i} + \ddot{y}\,\underline{j} + \ddot{z}\,\underline{k} \qquad (9)$$

حيث أن $\underline{\omega}\wedge\underline{v}$ تعطى من

$$\underline{\omega}\wedge\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\therefore\; \underline{\omega}\wedge\underline{v} = -\omega\dot{y}\sin\lambda\,\underline{i} + \omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)\,\underline{j} - \omega\dot{y}\cos\lambda\,\underline{k} \qquad (10)$$

معادلات الحركة في اتجاهات المحاور ox ، oy ، oz على الترتيب

$$m\ddot{x} = -\frac{Tx}{l} + 2mw\dot{y}\sin\lambda \; , \qquad (11)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{Ty}{l} - 2mw(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda), \qquad (12)$$

$$m\ddot{z} = \frac{T(l-z)}{l} - mg + 2mw\dot{y}\cos\lambda \qquad (13)$$

بفرض أن تمثل البندول البسيط يعمل ذبذبات صغيرة حول موضع الاتزان o فإنه يمكن اعتبار أن الجسم يتحرك في المستوى الأفقي xoy ، أي أن $z=0$ وبالتالي $\dot{z} = \ddot{z} = 0$.

من المعادلة (13) نعين مقدار الشد في الخيط T عند أي لحظة في الصورة

$$T = mg - 2mw\dot{y}\cos\lambda \qquad (14)$$

بالتعويض من (14) عن الشد T في المعادلتين (11)، (12) نجد أن

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{l}(mg - 2mw\dot{y}\cos\lambda) + 2mw\dot{y}\sin\lambda ,$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{l}(mg - 2mw\dot{y}\cos\lambda) - 2mw\dot{x}\sin\lambda$$

أي أن

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + \frac{2wx\dot{y}\cos\lambda}{l} + 2w\dot{y}\sin\lambda , \qquad (15)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y + \frac{2wy\dot{y}\cos\lambda}{l} - 2w\dot{x}\sin\lambda \qquad (16)$$

واضح أن المعادلتين التفاضليتين (15) ، (16) غير خطيتين بسبب وجود $\dot{y}x$ ، $\dot{y}y$.

حيث أن ω ، x ، y كميات صغيرة فيمكن اهمال الحدود المشتملة على ωx ، ωy وتتحول المعادلتين (15) ، (16) الى معادلتين تفاضليتين في الصورة

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega\dot{y}\sin\lambda , \qquad (17)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\omega\dot{x}\sin\lambda \qquad (18)$$

لحل المعادلتين (17) ، (18) نضع $q = x+iy$ ، $K^2 = \frac{g}{l}$ ، $\omega_z = \omega\sin\lambda$ ونضرب (18) في الكمية التخيلية i ونجمع (17) على الناتج نحصل على

$$\ddot{q} + 2i\omega_z\dot{q} + K^2 q = 0 \qquad (19)$$

المعادلة التفاضلية (19) خطية من الدرجة الثانية ويمكن حلها بنفرض أن $q(t) = c\,e^{\mu t}$ فإن μ تحقق المعادلة المساعدة

$$\mu^2 + 2i\omega_z\mu + K^2 = 0 \qquad (20)$$

جذور المعادلة (20) هما

$$\mu = \frac{-2i\omega_z \pm\sqrt{-4\omega_z^2 - 4K^2}}{2}$$

$$= -i\omega_z \pm i\sqrt{\omega_z^2 + K^2} \qquad (21)$$

يكون الحل العام للمعادلة (١٩) في الصورة

$$q(t) = e^{-i\omega_z t}\left[c_1 e^{i\sqrt{\omega_z^2 + k^2}\, t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_z^2 + k^2}\, t}\right] \quad (22)$$

إذا أهملنا دوران الأرض فإن $\omega = 0$ وبالتالي $\omega_z = 0$ وتصبح المعادلة (١٩) في الصورة

$$\ddot{Q} + k^2 Q = 0 \quad , \quad (23)$$

وتستخدم $Q(t) = q(t)\Big|_{\omega=0} = X(t) + iY(t)$ حيث

$$Q(t) = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt} \quad (24)$$

وهي حركة تذبذبية زمنها الدوري $\frac{2\pi}{k}$ ، أي يساوي $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ بعد التعويض عن قيمة K.

حيث أن $\omega_z \ll K$ فإنه يمكن إهمال ω_z بالنسبة إلى K وتأخذ المعادلة (22) الصورة

$$q(t) = e^{-i\omega_z t}\left[c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}\right] \quad (25)$$

باستخدام (24) فإن (25) تكون

$$q(t) = Q(t)\, e^{-i\omega_z t} \quad (26)$$

$$\therefore x(t) + iy(t) = \big(X(t) + iY(t)\big)\big(\cos\omega_z t - i\sin\omega_z t\big)$$

$$= \big(X\cos\omega_z t + Y\sin\omega_z t\big) + i\big(Y\cos\omega_z t - X\sin\omega_z t\big)$$

أي أن

$$x(t) = X(t)\cos w_z t + Y(t)\sin w_z t \quad , \qquad (27)$$

$$y(t) = Y(t)\cos w_z t - X(t)\sin w_z t \qquad (28)$$

نضع $\theta = w_z t$ فان المعادلتين (27)، (28) تصبحان في الصورة

$$x = X\cos\theta + Y\sin\theta \quad , \qquad (29)$$

$$y = Y\cos\theta - X\sin\theta \qquad (30)$$

نستنتج من المعادلتين (29)، (30) أن مستوى تذبذب البندول وهو المستوى الرأسي المار بالخيط (أي المستوى OAP) يدور بسرعة زاوية w_z حول المحور OZ وأن زمن الدورة يساوي $\frac{2\pi}{w_z}$، أي يساوي $\frac{2\pi}{w\sin\lambda}$. وهذا هو تأثير دوران الأرض على البندول البسيط فالى جانب تذبذب الثقل في المستوى الرأسي المار بالخيط (أي المستوى OAP) ذبذبات زمنها الدوري $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ فان مستوى تذبذب البندول يدور بسرعة زاوية w_z زمن الدورة يساوي $\frac{2\pi}{w\sin\lambda}$.

تمارين

(1) يتحرك مجموعة المحاور oxyz بسرعة زاوية $\underline{w}$ بالنسبة الى محاور ثابتة في الفراغ $ox'y'z'$ حيث

$$\underline{w} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + 5\underline{k}$$

اذا كانت $\underline{A} = \sin t\,\underline{i} - \cos t\,\underline{j} + e^{-t}\,\underline{k}$ فأوجد

(i) $\left(\dfrac{d\underline{A}}{dt}\right)_{rotating}$

(ii) $\left(\dfrac{d\underline{A}}{dt}\right)_{fixed}$

(iii) $\left(\dfrac{d^2\underline{A}}{dt^2}\right)_{rotating}$

(iv) $\left(\dfrac{d^2\underline{A}}{dt^2}\right)_{fixed}$

(٢) السرعة الزاوية $\underline{\omega}$ لمجموعة محاور دائرة $oxyz$ بالنسبة الى مجموعة محاور ثابتة في الفراغ $o'x'y'z'$ عند أي لحظة t تعطى بـ $\underline{\omega} = 2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} + (2t+4)\,\underline{k}$.
اذا كان متجه موضع جسيم عند اللحظة t بالنسبة لراصد في المجموعة $oxyz$ يعطى بـ $\underline{r} = (t^2+1)\,\underline{i} - 6t\,\underline{j} + 4t^3\,\underline{k}$
فأوجد السرعة الظاهرية والسرعة الحقيقية عند اللحظة $t=1$.

(٣) مجموعة محاور $oxyz$ تدور بسرعة زاوية $\underline{\omega} = 5\underline{i} - 4\underline{j} - 10\underline{k}$ بالنسبة الى مجموعة محاور ثابتة في الفراغ $o'x'y'z'$. اوجد سرعة جسيم مثبت في المجموعة $oxyz$ عند النقطة $(3,1,-2)$ كما يراها مشاهد مثبت في المجموعة $o'x'y'z'$.

(٤) قذف جسيم عند خط عرض $90-\lambda$ بسرعة v_0 في اتجاه نحو الجنوب يصنع زاوية α مع الأفق . عين موضع الجسيم بعد زمن t وأثبت أنه ينحرف نحو شرق المستوى الرأسي الأصلي

للمركبة بمقدار $\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\lambda - \omega v_0 t^2 \cos(\alpha-\lambda)$ حيث

ω السرعة الزاوية المنتظمة للارض والتي يكون اتجاهها [illegible]،

g عجلة الجاذبية الارضية.

(٥) اذا الطلقة مقذوفة بسرعة ابتدائية $\underline{v}_0 = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$

من نقطة على سطح الارض عند خط عرض $90-\lambda$ اثبت ان

موضعه عند اي لحظة t يعطى بـ

$$x = v_1 t + \omega v_2 t^2 \cos\lambda ,$$

$$y = v_2 t - \omega t^2 (v_1 \cos\lambda + v_3 \sin\lambda) + \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\lambda ,$$

$$z = v_3 t - \frac{1}{2} g t^2 + \omega v_2 t^2 \sin\lambda$$

وذلك باهمال الحدود المشتملة على ω^2.

(٦) القي جسم الى أسفل بسرعة ابتدائية v_0 عند خط عرض $\lambda-90$.

اثبت انه بعد زمن t ينحرف الجسم الى شرق الرأسي بمقدار

$\omega v_0 (\sin\lambda) t^2 + \frac{1}{3}\omega g (\sin\lambda) t^3$ حيث ω السرعة الزاوية لدوران

الارض واهمال الحدود المشتملة على ω^2.

(٧) بفرض ان الثقل في بندول فوكو يبدأ الحركة من السكون في المستوى yz

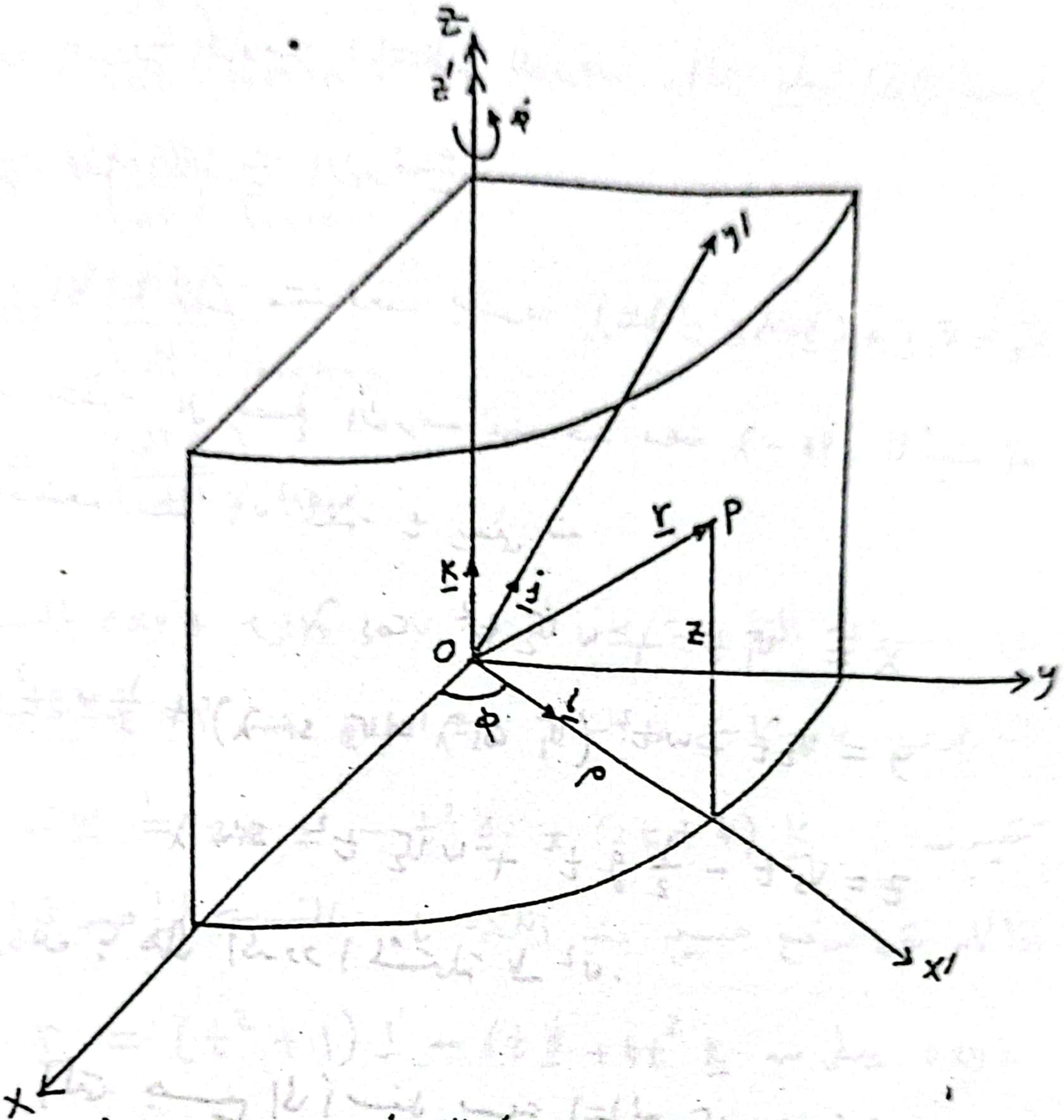
من الموضع $(B, 0)$ اثبت ان متجه موضع الجسم عند اللحظة t يعطى

بـ $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} = B\left(\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\underline{e}$ حيث ،

$$\underline{e} = \left[\sin\{(\omega\sin\lambda)t\}\right]\underline{i} + \left[\cos\{(\omega\sin\lambda)t\}\right]\underline{j}$$

اذكر تفسيرا طبيعيا لذلك.

مركبات السرعة والعجلة بالاحداثيات الاسطوانية.



لتكن oxyz مجموعة محاور ثابتة في الفراغ. نفرض ان احداثيات النقطة P في الفراغ احداثياتها الاسطوانية هي z, ϕ, ρ. نختار المحاور الدائرة $ox'y'z'$ حيث ox' في اتجاه زيادة ρ و oy' عمودي على ox' في المستوى xoy في اتجاه تزايد ϕ و oz' منطبقا على oz.

متجه موضع النقطة P يعطى بـ

$$\underline{r} = \rho \, \underline{i} + z \, \underline{k}$$

حيث $\underline{i}$ ، $\underline{j}$ ، $\underline{k}$ متجهات وحدة في اتجاهات المحاور ox' ، oy' ، oz' على الترتيب.

نلاحظ أن (ρ , z) تحدد موضع النقطة المادية في المستوى zop وأن الزاوية ϕ تحدد موضع المستوى zop بالنسبة الى مستوى ثابت في الفراغ وليكن xoz . النقطة p تمثل موضع جسيم أو نقطة مادية عند أي لحظة. السرعة الزاوية للمحاور $ox'y'z'$ تكون في الصورة

$$\underline{\omega} = \dot{\phi}\, \underline{k}$$

سرعة الجسيم عند أي لحظة تعطى بـ

$$\underline{v}_f = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{rotating} + \underline{\omega} \wedge \underline{r}$$

$$= \dot{\rho}\, \underline{i} + \dot{z}\, \underline{k} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ \rho & 0 & z \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{v}_f = \dot{\rho}\, \underline{i} + \rho \dot{\phi}\, \underline{j} + \dot{z}\, \underline{k}$$

عجلة الجسيم عند أي لحظة تعطى بـ

$$\underline{a}_f = \left(\frac{d\underline{v}_f}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\underline{v}_f}{dt}\right)_{rotating} + \underline{\omega} \wedge \underline{v}_f$$

$$= \ddot{\rho}\, \underline{i} + (\rho \ddot{\phi} + \dot{\rho} \dot{\phi})\, \underline{j} + \ddot{z}\, \underline{k} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ \dot{\rho} & \rho\dot{\phi} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{a}_f = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2)\, \underline{i} + (\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\phi} \dot{\rho})\, \underline{j} + \ddot{z}\, \underline{k}$$

يمكن كتابة المركبة الثانية للعجلة في الصورة

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\phi})$$

وبالمثل نجد أن

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = \frac{1}{\rho}\left[\rho^2\ddot{\phi} + \dot{\phi}\cdot 2\rho\dot{\rho}\right]$$

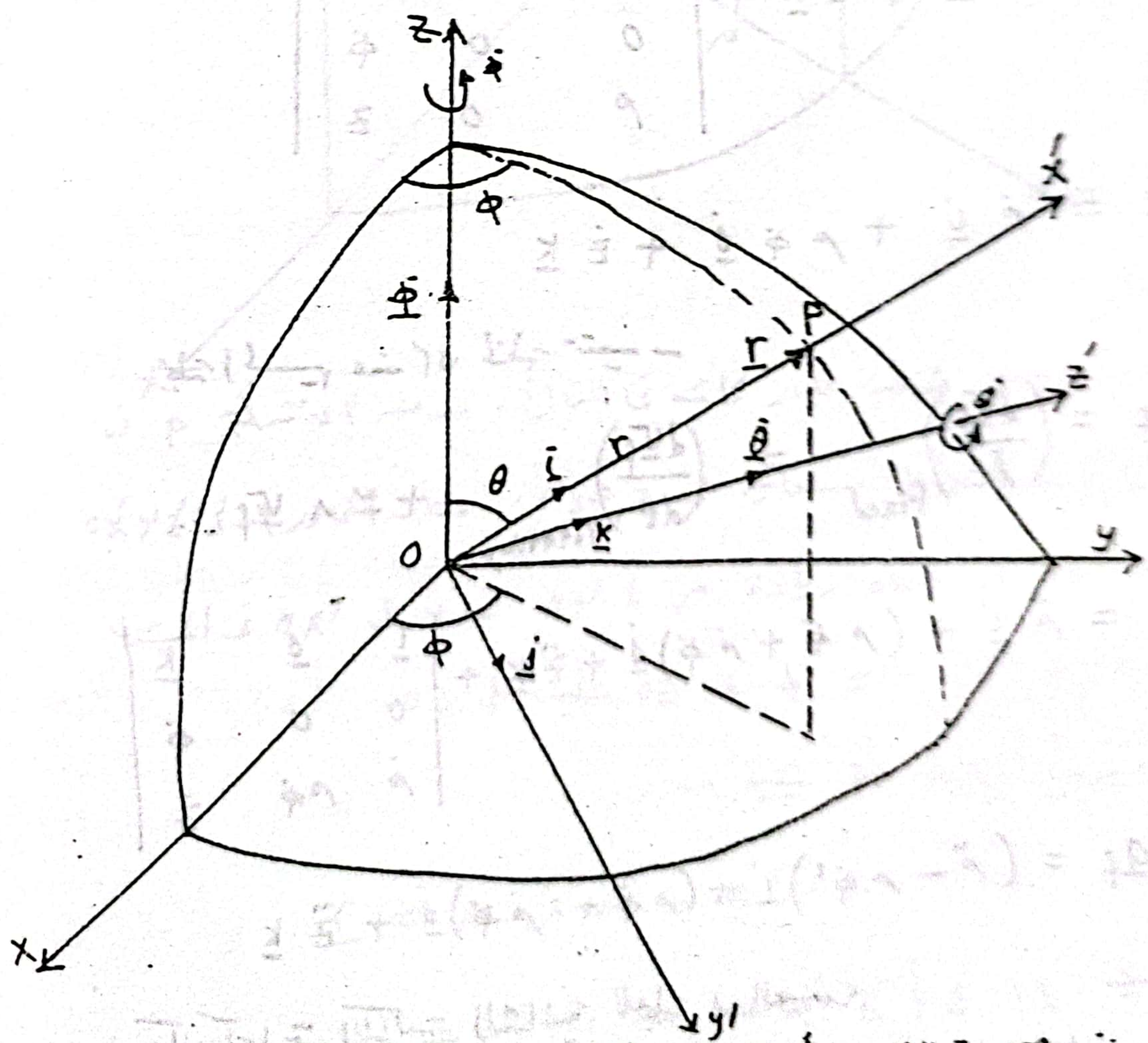
$$= \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}$$

ملاحظة: نلاحظ أن الإحداثيات الاسطوانية (ρ, ϕ, z) ترتبط بالإحداثيات الكرتيزية (x, y, z) للنقطة P بالعلاقات

$$x = \rho\cos\phi \quad ,$$
$$y = \rho\sin\phi$$

والإحداثي الثالث z واحد في الحالتين.

مركبات السرعة والعجلة بالإحداثيات القطبية الكروية.



نفرض $oxyz$ محاور كارتيزية في الفراغ وأن P هو موضع جسيم

عند اللحظة t وتتعين بالاحداثيات الكروية r, θ, ϕ.

نختار مجموعة المحاور الدائرة $ox'y'z'$ حيث ox' في اتجاه $\underline{OP}$ اي في

اتجاه تزايد r ، oy' عمودي على ox' ويقع في المستوى zox'

اي في اتجاه تزايد θ ، oz' عمودي على $x'oy'$ في اتجاه تزايد ϕ.

السرعة الزاوية $\underline{\omega}$ للمحاور الدائرة بالنسبة الى المحاور الثابتة تتعين من

$$\underline{\omega} = \underline{\dot{\theta}} + \underline{\dot{\phi}}$$

حيث

$$\underline{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\,\underline{k} \;,$$

$$\underline{\dot{\phi}} = \dot{\phi}\cos\theta\,\underline{i} - \dot{\phi}\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\therefore \underline{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta\,\underline{i} - \dot{\phi}\sin\theta\,\underline{j} + \dot{\theta}\,\underline{k}$$

حيث $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ متجهات وحدة في اتجاهات المحاور ox', oy', oz' الخ.

نلاحظ ان ϕ تحدد موضع المستوى zop بالنسبة الى المستوى الثابت في

الفراغ ولكن (r, θ) تحدد موضع النقطة p في المستوى

zop .

متجه موضع الجسيم عند اي لحظة يتعين من

$$\underline{r} = r\,\underline{i}$$

سرعة الجسيم عند اي لحظة تتعين من

$$\underline{v}_f = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{rotating} + \underline{\omega} \wedge \underline{r}$$

$$= \dot{r}\,\underline{i} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{\phi}\cos\theta & -\dot{\phi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \underline{v}_f = \dot{r}\,\underline{i} + r\dot{\theta}\,\underline{j} + r\dot{\phi}\sin\theta\,\underline{k}$$

عجلة الجسيم عند أى لحظة تعطى بـ

$$\underline{a}_f = \left(\frac{d\underline{v}_f}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\underline{v}_f}{dt}\right)_{rotating} + \underline{\omega}\wedge\underline{v}_f$$

$$= \ddot{r}\,\underline{i} + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\underline{j} + (\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\underline{k}$$

$$+ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{\phi}\cos\theta & -\dot{\phi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\underline{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\underline{j}$$

$$+ (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\underline{k}$$

ويمكن كتابة المركبة الثانية للعجلة فى الصورة

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$$

كذلك المركبة الثالثة للعجلة يمكن كتابتها فى الصورة

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)$$

وذلك لأن

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta) =$$

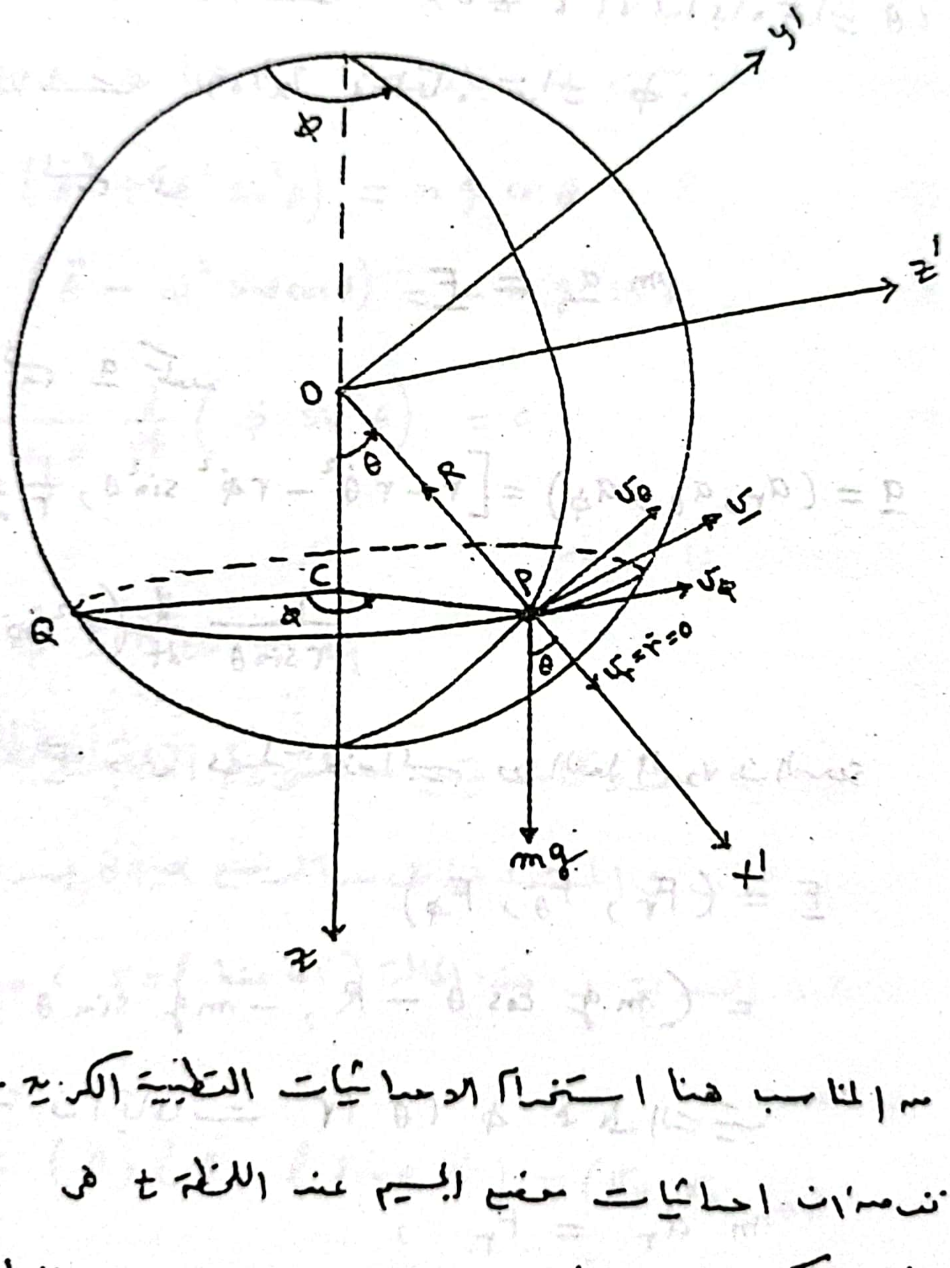
$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left[2r\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta + r^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + 2r^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$= 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta$$

أمثلة

مثال (1) ادرس حركة جسيم كتلته m على السطح الداخلي لقشرة كروية ناعمة ملساء نصف قطرها a. إذا قذف الجسيم في بداية الحركة في المستوى الأفقي بسرعة v_0 من نقطة على مسافة زاوية α من أسفل نقطة من القشرة، أثبت أن حركة الجسيم تنحصر بين مستويين أفقيين

الحل



من المناسب هنا استخدام الإحداثيات القطبية الكروية:

نفرض أن احداثيات موضع الجسيم عند اللحظة t هي r, θ, ϕ

وأنه يكون عند الموضع P حيث θ هي المسافة الزاوية مقاسة

من أسفل نقطة من القشرة الكروية ، ϕ الزاوية التي تحدد المستوى

zop الذي يقع عليه الجسم عند اللحظة t بالنسبة المستوى ثابت ثابت في الفراغ ، وليكن OCQ كما بالشكل.

يؤثر على الجسم اثناء حركته قوتان تتمثلان في وزن الجسم mg رأسيا لأسفل ورد الفعل العمودي على السطح الكروي R في اتجاه $\underline{po}$.

نأخذ المحاور الثلاثة $ox'y'z'$ حيث ox' ينطبق على $\underline{op}$ ،
oy' عمودي على ox' في المستوى zox' ، في اتجاه تزايد θ ،
oz' عمودي على المستوى $x'oy'$ في اتجاه تزايد ϕ.

معادلة حركة الجسم هي

$$m\,\underline{a} = \underline{F}$$

حيث عجلة الجسم $\underline{a}$ تكون

$$\underline{a} = (a_r, a_\theta, a_\phi) = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta,\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2,\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)\right]$$

والقوة المؤثرة $\underline{F}$ وهي محصلة وزن الجسم ورد الفعل العمودي في الصورة

$$\underline{F} = (F_r, F_\theta, F_\phi)$$
$$= (mg\cos\theta - R,\ -mg\sin\theta,\ 0)$$

معادلات الحركة في اتجاهات r ، θ ، ϕ على الترتيب

$$m\,a_r = F_r\ ,$$
$$m\,a_\theta = F_\theta\ ,$$
$$m\,a_\phi = F_\phi$$

حيث أن الجسيم يتحرك على السطح الداخلي لكرة نصف قطرها l لذلك $r = l$ عند أي لحظة وبالتالي فإن $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

عجلة الجسيم في هذه الحالة تصبح في الصورة

$$\underline{a} = (a_r, a_\theta, a_\phi) =$$

$$= \left[-l(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta),\ l(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta),\ \frac{l}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) \right]$$

معادلات حركة الجسيم في اتجاهات r ، θ ، ϕ هي على الترتيب

$$-ml(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) = mg\cos\theta - R, \qquad (1)$$

$$ml(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta) = -mg\sin\theta, \qquad (2)$$

$$m\frac{l}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \qquad (3)$$

من المعادلة (3) نجد أن

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = c_1 \qquad (4)$$

حيث c_1 مقدار ثابت يتعين من الشروط الابتدائية للحركة. حيث أن الجسيم قذف في المستوى الأفقي من المركز عند $\theta = \alpha$ بسرعة v_0 وأن مركبات السرعة في هذه الحالة (لأن عندما $r = l$ ، $\dot{r} = 0$) تكون في الصورة

$$\underline{v} = (0, l\dot{\theta}, l\sin\theta\,\dot{\phi}) = (v_r, v_\theta, v_\phi)$$

من الشروط الابتدائية فإن

$$v_0 = v_\phi\Big|_{t=0} = l\sin\theta\,\dot{\phi}\Big|_{t=0} = l\sin\alpha\,\dot{\phi}_0$$

حيث $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ عند $t = 0$

$$\therefore \quad \dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{l \sin\alpha}$$

وبتعيين الثابت C_1 من (4) عند بداية الحركة $(t=0)$

$$\therefore \quad C_1 = \dot{\phi} \sin^2\theta \Big|_{t=0} = \dot{\phi}_0 \sin^2\alpha$$

$$= \frac{v_0}{l \sin\alpha} \cdot \sin^2\alpha = \frac{v_0 \sin\alpha}{l}$$

$$\therefore \quad \dot{\phi} \sin^2\theta = C_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{l}$$

$$\text{i.e.} \quad \dot{\phi} = \frac{v_0 \sin\alpha}{l \sin^2\theta} \qquad (5)$$

بالتعويض عن $\dot{\phi}$ من (5) في (2) نحصل على

$$l\left(\ddot{\theta} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha \cos\theta}{l^2 \sin^3\theta}\right) = -g \sin\theta$$

بالضرب في $2\dot{\theta}$ والتكامل نجد أن

$$l\,\dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{l \sin^2\theta} = 2g\cos\theta + C_2$$

حيث C_2 ثابت يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي

$t=0$ عند $\dot{\theta}=0$ ، $\theta=\alpha$

$$\therefore \quad C_2 = \frac{v_0^2}{l} - 2g\cos\alpha$$

$$\therefore \quad l\,\dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2}{l}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} - 1\right) - 2g(\cos\theta - \cos\alpha) = 0 \qquad (6)$$

لإثبات أن حركة الجسم تكون محصورة بين مستويين أفقيين نضع

$\dot{\theta} = 0$ ونجد أن (6) تعطي

$$\frac{v_0^2}{\ell}\left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) - 2g(\cos\theta - \cos\alpha) = 0$$

$$\frac{v_0^2}{\ell}\left(\frac{\cos^2\theta - \cos^2\alpha}{1 - \cos^2\theta}\right) - 2g(\cos\theta - \cos\alpha) = 0$$

$$\therefore \quad (\cos\theta - \cos\alpha)\left[\frac{v_0^2(\cos\theta + \cos\alpha)}{\ell(1 - \cos^2\theta)} - 2g\right] = 0 \qquad (7)$$

من ذلك نجد أن أحد جذور المعادلة (7) هو $\theta = \alpha$

وهذا هو مستوى التذبذب الابتدائي والجذران الباقيان يحققان

المعادلة

$$2g\ell\cos^2\theta + v_0^2\cos\theta + (v_0^2\cos\alpha - 2g\ell) = 0 \qquad (8)$$

جذرا المعادلة (8) يكونان

$$\cos\theta = \frac{-v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 8g\ell(v_0^2\cos\alpha - 2g\ell)}}{4g\ell}$$

$$= \frac{1}{4g\ell}\left[-v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 16g^2\ell^2 - 8g\ell v_0^2\cos\alpha}\right]$$

الجذر السالب مرفوض لأنه يكون أصغر ما يمكن عندما $\cos\alpha = -1$ ويساوي

$$\frac{1}{4g\ell}\left(-v_0^2 - \sqrt{v_0^4 + 16g^2\ell^2 + 8g\ell v_0^2}\right) = \frac{1}{4g\ell}\left(-v_0^2 - \sqrt{(v_0^2 + 4g\ell)^2}\right)$$

$$= \frac{-v_0^2 - (v_0^2 + 4g\ell)}{4g\ell} = \frac{-2v_0^2 - 4g\ell}{4g\ell} = -1 - \frac{v_0^2}{2g\ell} < -1$$

، وهذا مستحيل لذلك $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

∴ حركة الجسم تكون محصورة بين مستويين أفقيين هما مستوى

التذبذب الأعلى $\theta=\alpha$ والمستوى $\theta=\beta$ حيث

$$\cos\beta = \frac{1}{4gl}\left(-v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2l^2-8glv_0^2\cos\alpha}\right) \quad (9$$

ملاحظة : نلاحظ أن $\cos\beta$ محصورة بين (-1) ، $+1$ وذلك لأن

أصغر قيمة تحصل عليها عندما $\cos\alpha=1$ وتساوي

$$\frac{1}{4gl}\left(-v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2l^2-8glv_0^2}\right)=\frac{-v_0^2+(v_0^2-4gl)}{4gl}$$

$$=\frac{-4gl}{4gl}=-1$$

وأكبر قيمة عندما $\cos\alpha=-1$ وتساوي

$$\frac{1}{4gl}\left(-v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2l^2+8glv_0^2}\right)=\frac{-v_0^2+(v_0^2+4gl)}{4gl}$$

$$=\frac{4gl}{4gl}=1$$

<u>مثال (٤)</u> في المثال السابق اثبت أن شرط صعود أو هبوط

الجسم من مستوى التذبذب $(\theta=\alpha)$ هو $v_0^2 \gtrless gl\sin\alpha\tan\alpha$

اوجد كذلك رد الفعل العمودي R .

الحل

يصعد الجسم أعلى مستوى التذبذب اذا كانت $\beta > \alpha$

ويهبط الجسم أسفل مستوى التذبذب اذا كانت $\beta < \alpha$

∴ شرط عدم هبوط الجسم أعلى أو أسفل مستوى الخيط هو

$$\beta \gtrless \alpha$$

أى هو

$$\cos\beta \lessgtr \cos\alpha$$

بالتعويض عن

$$\cos\beta = \frac{1}{4gl}\left(-v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 16g^2l^2 - 8glv_0^2\cos\alpha}\right)$$

فإن شرط صعود أو هبوط الجسم يكون

$$-v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 16g^2l^2 - 8glv_0^2\cos\alpha} \lessgtr 4gl\cos\alpha$$

أى هو

$$\sqrt{v_0^4 + 16g^2l^2 - 8glv_0^2\cos\alpha} \lessgtr v_0^2 + 4gl\cos\alpha$$

i.e. $$v_0^4 + 16g^2l^2 - 8glv_0^2\cos\alpha \lessgtr (v_0^2 + 4gl\cos\alpha)^2$$

i.e. $$16g^2l^2(1-\cos^2\alpha) \lessgtr 16glv_0^2\cos\alpha$$

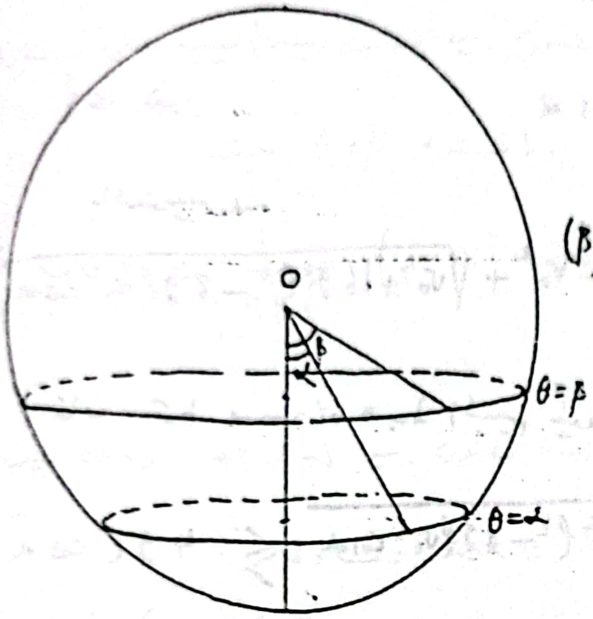
i.e. $$gl\sin^2\alpha \lessgtr v_0^2\cos\alpha$$

i.e. $$v_0^2 \gtrless gl\sin\alpha\tan\alpha$$

أى إذا كان $v_0^2 > gl\sin\alpha\tan\alpha$ فإن الجسم يصعد إلى أعلى مستوى الخيط الابتدائى أما إذا كان $v_0^2 < gl\sin\alpha\tan\alpha$ فإن الجسم يهبط أسفل مستوى الخيط.

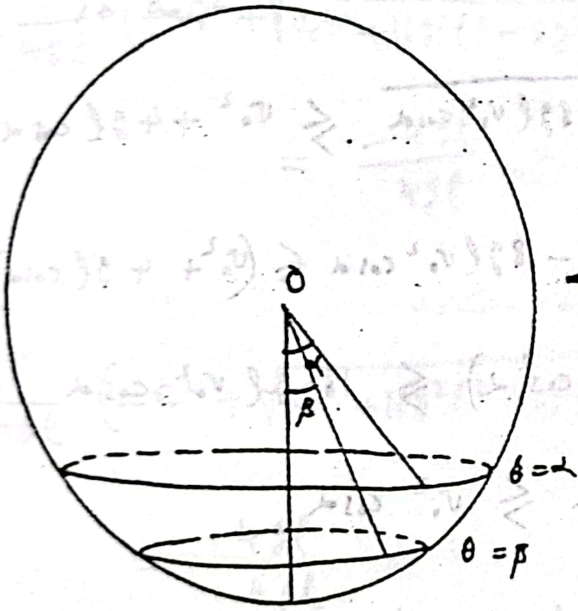
<u>ملحوظة</u> : إذا كان $v_0^2 = gl\sin\alpha\tan\alpha$ فإن الجسم لا يصعد ولا يهبط ويتحرك فى الدائرة الأفقية $\theta = \alpha$ أى أن يظل الجسم

على محيط ثابت من مركز الكرة O ويساوى $l\cos\alpha$



حالة صعود الجسم (أى $\beta > \alpha$)

عندما $v_0^2 > gl\sin\alpha\tan\alpha$

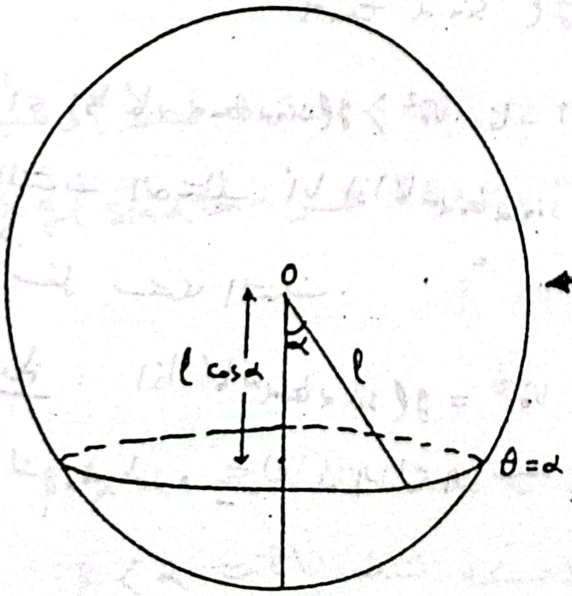


حالة هبوط الجسم

(أى $\beta < \alpha$

عندما

$v_0^2 < gl\sin\alpha\tan\alpha$



عندما $v_0^2 = gl\sin\alpha\tan\alpha$

يظل الجسم متحركا فى

الدائرة الأفقية المارة

بنقطة القذف أى يظل

على محيط من المركز O ويساوى $l\cos\alpha$.

لايجاد رد الفعل R نستخدم معادلة حركة الجسيم في اتجاه نصف

القطر $\underline{OP}$ وهي المعادلة (١) في مثال (١) فنجد أن

$$R = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 + ml\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

بالتعويض عن $\dot{\phi}$ من (5) ، $l\dot{\theta}^2$ من (6) في مثال (١)

نجد أن

$$R = mg\cos\theta + m\left[2g(\cos\theta-\cos\alpha)-\frac{v_0^2}{l}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}-1\right)\right]$$

$$+ ml\cdot\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{l^2\sin^4\theta}\cdot\sin^2\theta$$

$$= mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta-\cos\alpha) + \frac{mv_0^2}{l}$$

$$\therefore R = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\alpha + \frac{mv_0^2}{l}$$

وهي تعين رد الفعل R عند اى لحظة.

عند بداية الحركة (أى عندما $\theta=\alpha$) فان رد الفعل الابتدائى R_0

يتعين من

$$R_0 = mg\cos\alpha + \frac{mv_0^2}{l}$$

اذا تحرك الجسيم أسفل مستوى التنصف ، اى ان $\theta\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ وبالتالى

فان $\cos\theta\geqslant\cos\alpha\geqslant 0$ ونلاحظ ان رد الفعل عند اى لحظة يكون موجب

$(R>0)$ ويزداد قيمة R كلما صغرت θ . نستنتج من ذلك

أنه فى هذه الحالة لا يترك الجسيم سطح الكرة.

أما اذا تحرك الجسيم اعلى مستوى التنصف ، اى ان $\theta>\alpha$ فان

وبالتالي فإن رد الفعل يتناقص وأصغر $\cos\theta < \cos\alpha$

قيمة له عندما $\theta = \beta$ وعليه أقل رد فعل $R_{min.}$

$$R_{min.} = R\Big|_{\theta=\beta} = 3mg\cos\beta - 2mg\cos\alpha + \frac{m v_0^2}{l}$$

للتبسيط نضع $\xi^2 = \frac{v_0^2}{2gl}$ فنحصل

$$\cos\beta = \frac{1}{4gl}\left(-v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 16g^2l^2 - 8glv_0^2\cos\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\xi^2 + \sqrt{\xi^4 - 4\xi^2\cos\alpha + 4}\right)$$

وبالتالي فإن أقل رد فعل يساوي

$$R_{min.} = \frac{3}{2}mg\left(-\xi^2 + \sqrt{\xi^4 - 4\xi^2\cos\alpha + 4}\right) - 2mg\cos\alpha + 2mg\xi^2$$

يترك الجسم سطح الكرة عندما يتلاشى رد الفعل أي أن عندما

$$-3\xi^2 + 3\sqrt{\xi^4 - 4\xi^2\cos\alpha + 4} - 4\cos\alpha + 4\xi^2 = 0$$

$$\therefore \quad 3\sqrt{\xi^4 - 4\xi^2\cos\alpha + 4} = 4\cos\alpha - \xi^2$$

بالتربيع نحصل

$$9(\xi^4 - 4\xi^2\cos\alpha + 4) = 16\cos^2\alpha + \xi^4 - 8\xi^2\cos\alpha$$

$$\text{i.e.} \quad 2\xi^4 - (7\cos\alpha)\xi^2 + (9 - 4\cos^2\alpha) = 0$$

هذه معادلة من الدرجة الثانية في ξ^2 وجذراها هما

$$\xi^2 = \frac{1}{4}\left[7\cos\alpha \pm \sqrt{49\cos^2\alpha - 8(9 - 4\cos^2\alpha)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[7\cos\alpha \pm 3\sqrt{9\cos^2\alpha - 8}\right]$$

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

$$\therefore \frac{v_0^2}{2gl} = \frac{1}{4}\left(7\cos\alpha \pm 3\sqrt{9\cos^2\alpha - 8}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(7\cos\alpha \pm 3\sqrt{1 - 9\sin^2\alpha}\right)$$

يترك الجسم الكرة اذا كانت الجذران حقيقيان ، أى اذا كانت

$$1 - 9\sin^2\alpha \geq 0$$

أى اذا كان $\sin\alpha \leq \frac{1}{3}$

الجواب ذلك تحت الشرط

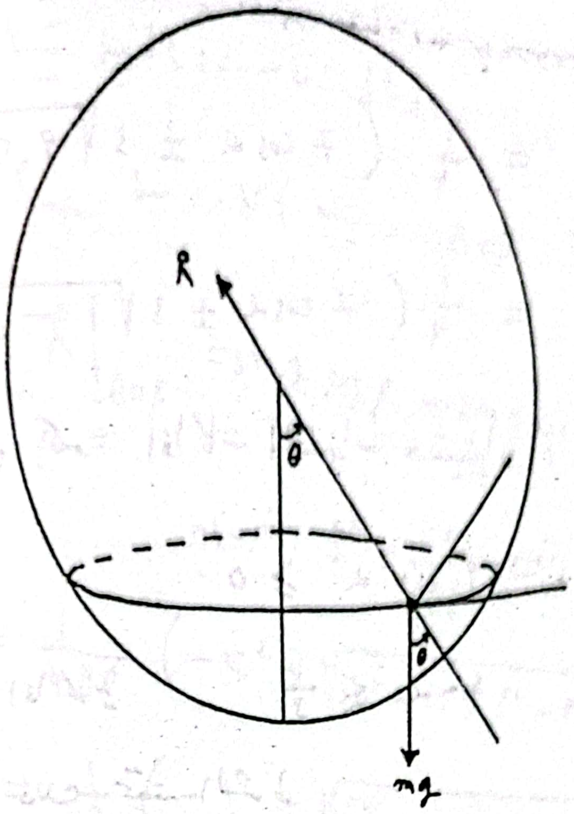
$$\frac{2v_0^2}{gl} = 7\cos\alpha \pm 3\sqrt{1 - 9\sin^2\alpha}$$

مثال (٢). قذف جسم فى المستوى الأفقى بسرعة تساوى $(gl\sin\alpha\tan\alpha)^{\frac{1}{2}}$ من نقطة على مسافة زاوية α $(\alpha < \frac{\pi}{2})$ من أسفل نقطة من كرة ملساء نصف قطرها l فإن الجسم يظل متحركا فى الدائرة الأفقية المارة بنقطة القذف . اذا أزيح الجسم ازاحة صغيرة لأعلى يصبح على مسافة زاوية $\alpha + \psi$ من أسفل نقطة من الكرة حيث ψ زاوية صغيرة فاثبت أن الجسم يعمل ذبذبات صغيرة حول الدائرة الأفقية $\theta = \alpha$ الزمن الدورى لها يساوى

$$2\pi\left[\frac{l\cos\alpha}{g(1+3\cos^2\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

الحل .

بكتابة معادلة الحركة فى اتجاهى θ ، ϕ نجد أن



$$m l\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\right) = -mg\sin\theta\,, \qquad (1)$$

$$m\frac{l}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0 \qquad (2)$$

من (2) فإن

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = C \qquad (3)$$

حيث C مقدار ثابت يتعين من الشروط الابتدائية كما سبق أن أوضحنا في مثال (1) ونجد أن (3) تعطي

$$\dot{\phi} = \frac{V_0\sin\alpha}{l\sin^2\theta} \qquad (4)$$

بالتعويض عن $\dot{\phi}$ من (4) في المعادلة (1) نحصل على

$$l\ddot{\theta} - \frac{V_0^2\sin^2\alpha\cos\theta}{l\sin^3\theta} = -g\sin\theta \qquad (5)$$

بالتعويض عن قيمة السرعة الابتدائية $V_0 = (gl\sin\alpha\tan\alpha)^{1/2}$ فإن المعادلة (5) تأخذ الصورة

$$l\ddot{\theta} - \frac{g \sin^4\alpha \cos\theta}{\cos\alpha \sin^3\theta} = -g\sin\theta \qquad (6)$$

اذا أزيح الجسم ازاحة صغيرة ψ ، فإن $\theta = \alpha + \psi$ فإن

$\dot{\theta} = \dot{\psi}$ ، $\ddot{\theta} = \ddot{\psi}$ وتأخذ (6) الصورة

$$l\ddot{\psi} - \frac{g \sin^4\alpha \cos(\alpha+\psi)}{\cos\alpha \sin^3(\alpha+\psi)} = -g\sin(\alpha+\psi)$$

$$\therefore \ddot{\psi} = \frac{g}{l}\left[\frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\psi - \sin\alpha\sin\psi}{(\sin\alpha\cos\psi + \cos\alpha\sin\psi)^3} - (\sin\alpha\cos\psi + \cos\alpha\sin\psi)\right]$$

حيث أن ψ زاوية صغيرة فإن $\sin\psi = \psi$ ، $\cos\psi = 1$ ونجد

$$\ddot{\psi} = \frac{g}{l}\left[\frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha - \psi\sin\alpha}{(\sin\alpha + \psi\cos\alpha)^3} - (\sin\alpha + \psi\cos\alpha)\right]$$

$$= \frac{g\sin\alpha}{l}\left[(1-\psi\tan\alpha)(1+\psi\cot\alpha)^{-3} - (1+\psi\cot\alpha)\right]$$

بفك $(1+\psi\cot\alpha)^{-3}$ واهمال حدود ψ^2 والحدود الأعلى فإن

$$\ddot{\psi} = \frac{g\sin\alpha}{l}\left[(1-\psi\tan\alpha)(1-3\psi\cot\alpha) - 1 - \psi\cot\alpha\right]$$

$$= \frac{g\sin\alpha}{l}\left[1 - 3\psi\cot\alpha - \psi\tan\alpha - 1 - \psi\cot\alpha\right]$$

$$= -\frac{g\sin\alpha}{l}\left[4\psi\cot\alpha + \psi\tan\alpha\right]$$

$$= -\frac{g\sin\alpha}{l}\left[\frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right]\psi.$$

$$\therefore\ \ddot{\psi} = -\frac{g}{l}\left(\frac{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)\psi$$

$$= -\frac{g(1+3\cos^2\alpha)}{l\cos\alpha}\psi$$

أي أن

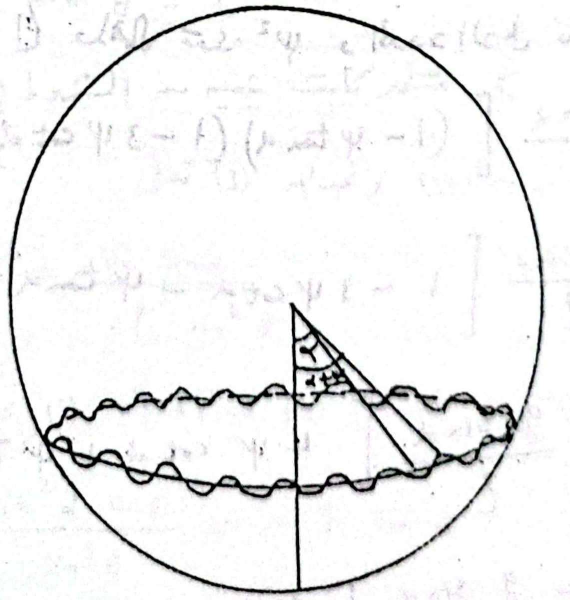
$$\ddot{\psi} = -w^2\psi\ ,\ w = \left[\frac{g(1+3\cos^2\alpha)}{l\cos\alpha}\right]^{1/2} \quad (7)$$

المعادلة (7) هي معادلة حركة توافقية بسيطة ، أي أن الجسم

يعمل ذبذبات صغيرة زمنها الدوري ، أي التردد الدوري لأي نقطة

يساوي $\frac{2\pi}{w}$ ، أي أنه يساوي

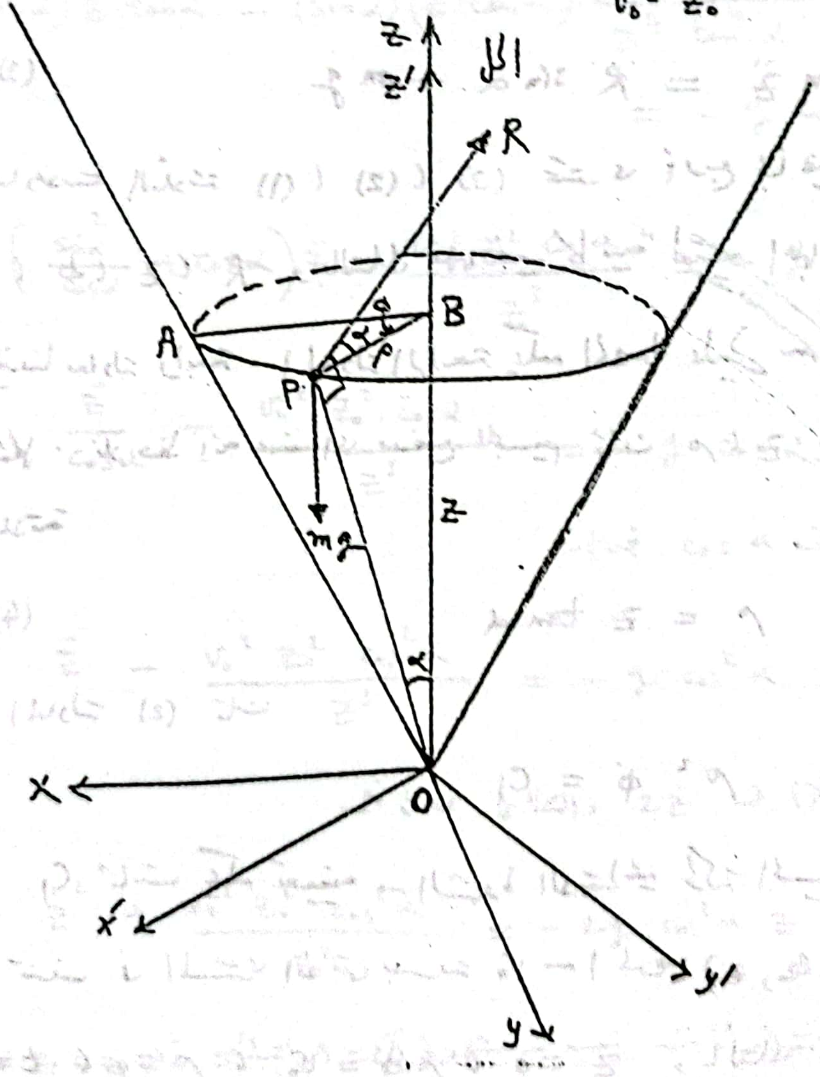
$$2\pi\left[\frac{l\cos\alpha}{g(1+3\cos^2\alpha)}\right]^{1/2}$$



الشكل يوضح الذبذبات الصغيرة للجسم حول الحركة الأفقية المارة بتدلية المستقر

. (θ = ٢ ٥١')

مثال (٤): يتحرك جسيم على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم أملس مثبت زاوية رأسه 2α محوره رأسي ورأسه إلى أسفل. إذا قذف الجسيم في المستوى الأفقي بسرعة v_0 من موضع على ارتفاع z_0 من المستوى الأفقي المار برأس المخروط O فأثبت أن حركة الجسيم تكون محصورة بين مستويين أفقيين وأن المعادلة التفاضلية لمسقط مسار الجسيم على المستوى الأفقي المار بالرأس O هي $\frac{d^2u}{d\phi^2} + \sin^2\alpha\, u = \frac{c}{u^2}$ حيث $u = \frac{1}{\rho}$ ، ρ نصف قطر الدائرة الأفقية المارة بالجسيم عند أي لحظة، $C = \frac{g\cot\alpha\cos^2\alpha}{v_0^2 z_0^2}$.



باستخدام الاحداثيات الاسطوانية نفرض أن احداثيات الجسيم عند أي نقطة P هي ρ, ϕ, z حيث بالنسبة لمحاور ثابتة في الفراغ $OXYZ$ ،

المحور الرأسي ، ϕ الزاوية التي يصنعها المستوى OPB مع المستوى OXZ الموجود عليه الجسم عند t مع مستوى ثابت في الفراغ مثل OAB.

يؤثر على الجسم أثناء حركته قوتين هما وزنه mg رأسيا لأسفل ورد الفعل العمودي R.

معادلات حركة الجسم في اتجاهات ρ ، ϕ ، z هي على الترتيب

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -R\cos\alpha , \qquad (1)$$

$$m\,\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0 , \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = R\sin\alpha - mg \qquad (3)$$

المعادلات الثلاثة (1) ، (2) ، (3) تحتوي أربع مجاهيل وهي ρ ، ϕ ، z ، R وبالتالي فهي غير كافية لتعيين المجاهيل الأربعة ويلزمنا معادلة رابعة. المعادلة الرابعة يمكن الحصول عليها من هندسة الشكل. نلاحظ أنه عند أي موضع للجسم فإن ρ ، z يرتبطا بالعلاقة

$$\rho = z\tan\alpha \qquad (4)$$

من المعادلة (2) فإن

$$\rho^2\dot{\phi} = c_1$$

حيث c_1 ثابت يمكن تعيينه من الشروط الابتدائية لحركة الجسم. حيث أن الجسم يقذف في المستوى الأفقي بسرعة v_0 من الموضع (ρ_0, ϕ_0, z_0) فإنه عند $t=0$ ، $\dot{\rho}=0$ ، $\rho\dot{\phi} = v_0$ ، $\dot{z}=0$ وبالتالي فإن

$$c_1 = \rho_0 v_0 = v_0 z_0 \tan\alpha$$

$$\therefore \rho^2 \dot{\phi} = v_0 z_0 \tan\alpha \qquad (5)$$

نحذف R من المعادلتين (1) ، (3) وذلك بضرب (1) في $\sin\alpha$)
(3) في $\cos\alpha$ والجمع نجد أن

$$m \sin\alpha (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) + m \cos\alpha \ddot{z} = - m g \cos\alpha$$

أي أن

$$\sin\alpha (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) + \cos\alpha \ddot{z} = - g \cos\alpha \qquad (6)$$

بالتعويض من (4) ، (5) في (6) نحصل على

$$(\sin\alpha) \ddot{z} \tan\alpha - (\sin\alpha)(z \tan\alpha) \cdot \frac{v_0^2 z_0^2 \tan^2\alpha}{z^4 \tan^4\alpha} + \cos\alpha \ddot{z} = - g \cos\alpha$$

$$\therefore \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha \right) \ddot{z} - \frac{v_0^2 z_0^2 \cos\alpha}{z^3} = - g \cos\alpha$$

$$\therefore \frac{\ddot{z}}{\cos\alpha} - \frac{v_0^2 z_0^2 \cos\alpha}{z^3} = - g \cos\alpha$$

بالضرب في $\cos\alpha$ نجد أن

$$\ddot{z} - \frac{v_0^2 z_0^2 \cos^2\alpha}{z^3} = - g \cos^2\alpha \qquad (7)$$

نضرب (7) في $2\dot{z}$ والتكامل نحصل على ...

$$\dot{z}^2 + \frac{v_0^2 z_0^2 \cos^2\alpha}{z^2} = - 2g \cos^2\alpha \, z + C_2$$

حيث C_2 مقدار ثابت يتعين من شروط الحركة الابتدائية (عند $z = z_0$
$\dot{z} = 0$ عند $t = 0$) نجد أن

$$C_2 = v_0^2 \cos^2\alpha + 2g \cos^2\alpha \, z_0$$

$$\therefore \quad \dot{z}^2 + v_0^2 z_0^2 \cos^2\alpha \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}\right) = 2g\cos^2\alpha\,(z_0 - z) \qquad (٨)$$

نضع $\dot{z} = 0$ فنجد أن

$$v_0^2 z_0^2 \cos^2\alpha \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}\right) = 2g\cos^2\alpha\,(z_0 - z)$$

$$v_0^2 \left(\frac{z_0^2 - z^2}{z^2}\right) = 2g(z_0 - z)$$

$$(z_0 - z)\left[\frac{v_0^2 (z_0 + z)}{z^2} - 2g\right] = 0 \qquad (٩)$$

$z = z_0$ و هذا هو مستوى النتوء الابتدائي و الجذر الباقي للمعادلة (٩) بكتابة المعادلة

$$v_0^2 (z_0 + z) - 2g z^2 = 0$$

$$2g z^2 - v_0^2 z - v_0^2 z_0 = 0 \qquad (١٠)$$

المعادلة (١٠) من الدرجة الثانية في z وجذراها هما

$$z = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 8 g z_0 v_0^2}}{4g}$$

الجذر السالب مرفوض لأنه سيعطي قيمة سالبة وعلى ذلك فإن الحركة تكون محصورة بين المستويين $z = z_0$ (مستوى النتوء الابتدائي) والمستوى

$$z = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 8 g z_0 v_0^2}}{4g}$$

لإيجاد المعادلة التفاضلية لمسقط مسار الجسم على المستوى الأفقي المار بالنقطة o (١،٠،١) المسقط على المستوى (x, y) فإننا نوجد معادلة تفاضلية في r ، ϕ وذلك بالتعويض من (4) عن t بدلالة r

في المعادلة (7) نجد أن

$$\ddot{\rho}\cot\alpha - \frac{v_0^2 z_0^2 \cos^2\alpha}{\rho^3 \cot^3\alpha} = -g\cos^2\alpha$$

$$\ddot{\rho} - \frac{v_0^2 z_0^2 \sin^2\alpha \tan^2\alpha}{\rho^3} = -g\sin\alpha\cos\alpha \quad (11)$$

نضع $\rho = \frac{1}{u}$ ونحسب المشتقة $\dot{\rho}$ ، $\ddot{\rho}$.

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}\cdot\dot{\phi}$$

$$= -\rho^2\dot{\phi}\frac{du}{d\phi} = -v_0 z_0 \tan\alpha\frac{du}{d\phi}$$

وذلك باستخدام المعادلة (5)

$$\therefore \ddot{\rho} = -v_0 z_0 \tan\alpha\frac{d^2u}{d\phi^2}\cdot\dot{\phi}$$

$$= -\frac{v_0^2 z_0^2 \tan^2\alpha}{\rho^2}\cdot\frac{d^2u}{d\phi^2} \quad (12)$$

وذلك باستخدام المعادلة (5) مرة أخرى.

بالتعويض من (12) عن قيمة $\ddot{\rho}$ في (11) نحصل على

$$-\frac{v_0^2 z_0^2 \tan^2\alpha}{\rho^2}\frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{v_0^2 z_0^2 \sin^2\alpha\tan^2\alpha}{\rho^3} = -g\sin\alpha\cos\alpha$$

بالضرب في $-\frac{\rho^2}{v_0^2 z_0^2 \tan^2\alpha}$ نحصل على

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + (\sin^2\alpha)u = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha\,\rho^2}{v_0^2 z_0^2\tan^2\alpha} \quad (13)$$

حيث أن $\rho = \frac{1}{u}$ فإن المعادلة (13) تأخذ الصورة

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + (\sin^2\alpha)\,u = \frac{C}{u^2} \quad \ldots$$

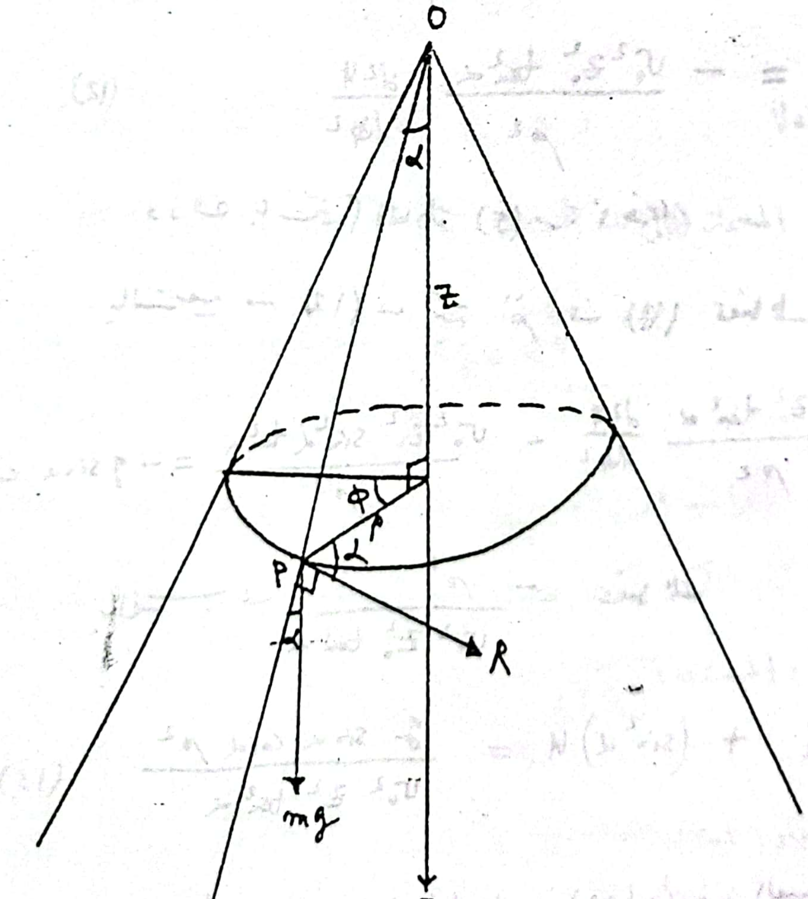
حيث

$$C = \frac{g \sin\alpha \cos\alpha}{v_0^2\, z_0^2 \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{g \cot\alpha \cos^2\alpha}{v_0^2\, z_0^2}$$

مثال (٥). يقذف جسيم كتلته m في مستوى أفقي بسرعة v_0 على السطح الداخلي لمخروط أملس زاوية رأسه 2α محوره رأسي ورأسه O إلى أسفل على بعد h من O. أوجد مقدار ضغط الجسيم عند أي موضع وأثبت أن الجسيم يترك السطح المخروطي عندما يكون على بعد يساوي $\left(\frac{v_0^2 h^2}{g \tan^2\alpha}\right)^{1/3}$ من الرأس O.

الحل



باستخدام الإحداثيات الاسطوانية لموضع الجسيم عند أي لحظة أنها r, ϕ, z

يؤثر على الجسيم أثناء حركته قوتين هما وزنه mg رأسيا لأسفل ورد الفعل العمودي R .

معادلات حركة الجسيم في الاتجاهات ρ ، ϕ ، z هي على الترتيب

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -R\cos\alpha , \qquad (1)$$

$$m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0, \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = mg + R\sin\alpha \qquad (3)$$

من (2) فإن

$$\rho^2\dot{\phi} = c_1$$

حيث الثابت c_1 يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي

$$v_0 = v_\phi = \rho\dot{\phi}\big|_{t=0}$$

نفرض أنه عند $t=0$ تكون $\rho = \rho_0$ ، $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$

$$\therefore\ c_1 = \rho_0 \cdot \rho_0\dot{\phi}_0 = \rho_0 v_0$$

$$\therefore\ \rho^2\dot{\phi} = \rho_0 v_0 \qquad (4)$$

عند انزلاق الجسيم على سطح المخروط فإن ρ ، z ترتبطان بالعلاقة

$$\rho = z\tan\alpha \qquad (5)$$

حيث أنه عند بداية الحركة $z = h$ فإن $\rho_0 = h\tan\alpha$ وعلى ذلك فإن (4) تصبح

$$\rho^2\dot{\phi} = h v_0 \tan\alpha \qquad (6)$$

لإيجاد رد الفعل R نضرب المعادلة (1) في $\cos\alpha$ ، (3) في $\sin\alpha$

والعمودي يعطينا

$$m\sin\alpha\,\ddot{z} - m\cos\alpha\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right) = mg\sin\alpha + R \quad (7)$$

بتفاضل (5) مرتين بالنسبة الى t نأخذ $\ddot{\rho} = \ddot{z}\tan\alpha$

ونلاحظ ان الحدين الاول والثاني من الطرف الايسر من (7) يلاشي

كل منهما الآخر وبالتعويض عن $\dot{\phi}$ من (6) واستخدام (5)

فاننا نحصل على

$$(m\cos\alpha)\cdot\left(\frac{h^2 v_0^2}{z^3\tan\alpha}\right) = mg\sin\alpha + R$$

$$\therefore R = \frac{m\sin\alpha\, h^2 v_0^2}{z^3\tan^2\alpha} - mg\sin\alpha$$

$$R = m\sin\alpha\left[\frac{h^2 v_0^2}{z^3\tan^2\alpha} - g\right] \quad (8)$$

المعادلة (8) تعطي رد الفعل عند اي موضع والذي يساوي الضغط

ديناميكيا في الاتجاه. معتمد الجسم على السطح الجانبي.

يترك الجسم السطح الجانبي عندما $R = 0$

اي عندما

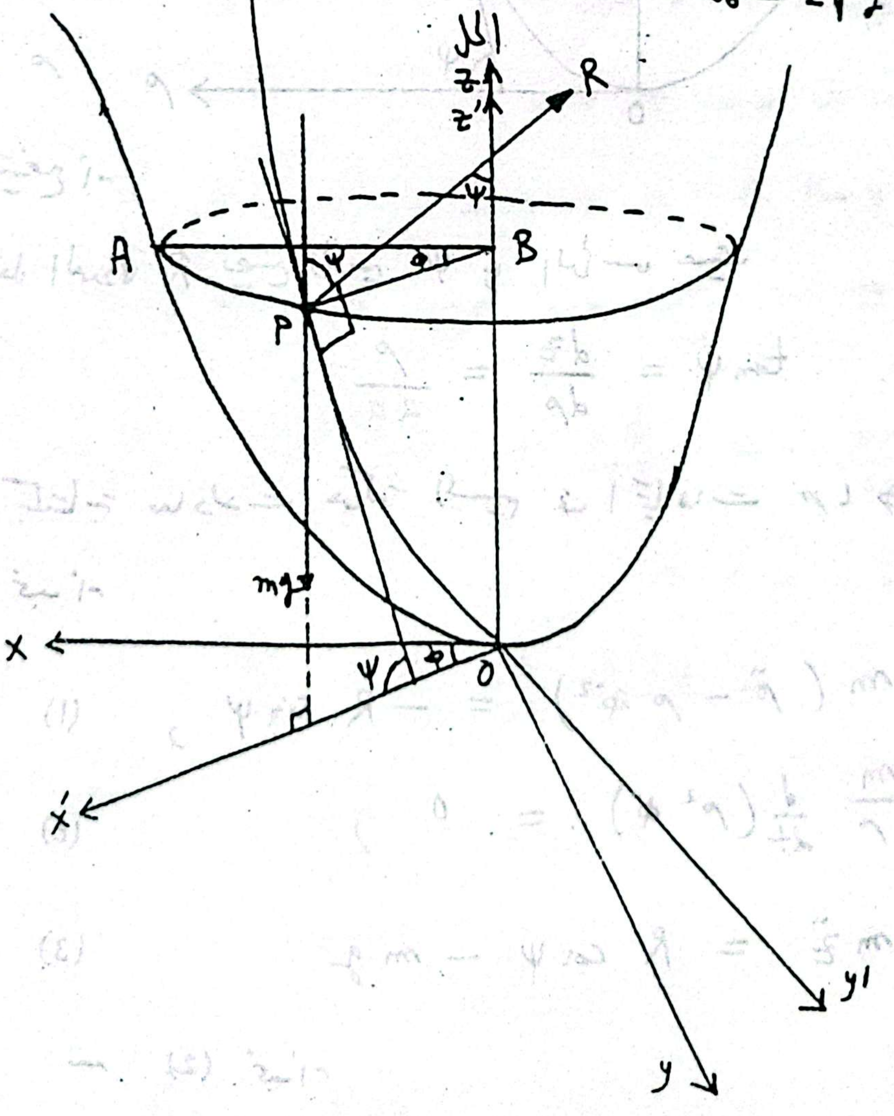
$$\frac{h^2 v_0^2}{z^3\tan^2\alpha} - g = 0$$

$$\therefore z^3 = \frac{h^2 v_0^2}{g\tan^2\alpha}$$

$$\therefore z = \left(\frac{h^2 v_0^2}{g\tan^2\alpha}\right)^{1/3}$$

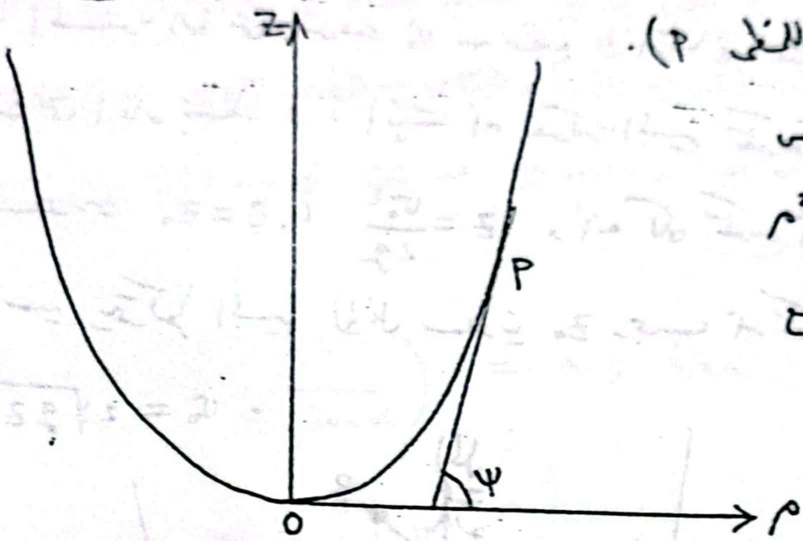
اي ان الجسم يترك المخروط عندما يكون على بعد من رأس المخروط يساوي $\left(\frac{h^2 v_0^2}{g\tan^2\alpha}\right)^{1/3}$

<u>مثال (٦)</u>. يتحرك جسيم على السطح الداخلي الأملس الناشئ من دوران القطع المكافئ $x^2 = 4az$ حول المحور oz الرأسي لأعلى. قذف الجسيم في المستوى الأفقي بسرعة v_0 من موضع على ارتفاع z_0 من المستوى الأفقي المار بنقطة o. اثبت أن حركة الجسيم تكون محصورة بين المستويين $z = z_0$ ، $z = \frac{v_0^2}{2g}$ وأنه لكي تكون أقصى مسافة رأسية يتحركها الجسيم لأعلى مساوية z_0 يجب أن تكون سرعة القذف $v_0 = 2\sqrt{g z_0}$.



نفرض أن الجسيم عند أي لحظة له الإحداثيات الاسطوانية ρ, ϕ, z حيث $oxyz$ مجموعة محاور ثابتة في الفراغ ، $ox'y'z'$ مجموعة محاور دائرة.

واضح أنه يؤثر على الجسم أثناء حركته قوتين فقط هما وزنه mg رأسيا لأسفل ، ورد الفعل العمودي R (أي العمودي على السطح الدوراني عند الموضع اللحظي P).



نفرض أن المماس للمنحنى $\rho^2 = 4az$ عند P يصنع زاوية ψ مع محور ρ فإنه يتضح أن رد الفعل العمودي R يصنع زاوية ψ مع الرأسي حيث

$$\tan\psi = \frac{dz}{d\rho} = \frac{\rho}{2a}$$

بكتابة معادلات حركة الجسم في اتجاهات ρ, ϕ, z نجد أن

$$m(\ddot\rho - \rho\dot\phi^2) = -R\sin\psi \quad , \qquad (1)$$

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\phi) = 0 \quad , \qquad (2)$$

$$m\ddot z = R\cos\psi - mg \qquad (3)$$

من (2) نجد أن

$$\rho^2\dot\phi = C_1$$

حيث C_1 مقدار ثابت نعينه من الشروط الابتدائية لحركة الجسم ولتكن

$v_0 = \rho\dot\phi|_{t=0}$ ، $z = z_0$ ونفرض أن

$$c_1 = \rho_0 \cdot \rho\dot\phi \Big|_{t=0} = 2\sqrt{a z_0}\; v_0$$

وذلك باستخدام معادلة القطع المكافئ التي تربط ρ ، z عندما موضح بالعلاقة $\rho^2 = 4az$.

$$\therefore \quad \rho^2\dot\phi = 2\sqrt{a z_0}\; v_0 \qquad (4)$$

نحذف R بين (1) ، (3) وذلك بضرب (1) في $\cos\psi$ ، (3) في $\sin\psi$ والجمع نحصل على

$$m\cos\psi\,(\ddot\rho - \rho\dot\phi^2) + m\sin\psi\,\ddot z = -mg\sin\psi$$

بالقسمة على $m\cos\psi$ نجد أن

$$\ddot\rho - \rho\dot\phi^2 + \ddot z\tan\psi = -g\tan\psi \qquad (5)$$

بالتعويض عن $\tan\psi = \frac{\rho}{2a}$ وعن $\dot\phi$ من (4) نحصل على

$$\ddot\rho - \frac{4 a z_0 v_0^2}{\rho^3} + \frac{\rho\ddot z}{2a} = -\frac{g\rho}{2a}$$

نحسب الآن $\dot\rho$ ثم $\ddot\rho$

$$\dot\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{2a}{\rho}\dot z$$

$$\therefore \ddot\rho = \frac{2a\ddot z}{\rho} - \frac{2a\dot z}{\rho^2}\dot\rho$$

$$= \frac{2a\ddot z}{\rho} - \frac{2a\dot z}{\rho^2}\left(\frac{2a\dot z}{\rho}\right)$$

$$\ddot\rho = \frac{2a\ddot z}{\rho} - \frac{4a^2\dot z^2}{\rho^3} \qquad (6)$$

بالتعويض من (6) عن قيمة $\ddot\rho$ بدلالة $\dot z$ ، $\ddot z$ في (5) نحصل على

$$\frac{2a\ddot{z}}{\rho} - \frac{4a^2\dot{z}^2}{\rho^3} - \frac{4a z_0 v_0^2}{\rho^3} + \frac{\rho\ddot{z}}{2a} = -\frac{g\rho}{2a}$$

بالضرب في $\frac{2a}{\rho}$ نجد أن

$$\frac{4a^2\ddot{z}}{\rho^2} - \frac{8a^3\dot{z}^2}{\rho^4} - \frac{8a^2 z_0 v_0^2}{\rho^4} + \ddot{z} = -g$$

بالتعويض عن $\rho^2 = 4az$ نحصل على

$$\frac{a\ddot{z}}{z} - \frac{a\dot{z}^2}{2z^2} - \frac{z_0 v_0^2}{2z^2} + \ddot{z} = -g \qquad (7)$$

بضرب (7) في $2\dot{z}$ نجد أن

$$2a\frac{\dot{z}\ddot{z}}{z} - \frac{a\dot{z}^3}{z^2} - \frac{z_0 v_0^2\dot{z}}{z^2} + 2\dot{z}\ddot{z} = -2g\dot{z} \qquad (8)$$

المعادلة (8) يمكن كتابتها في الصورة

$$a\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}^2}{z}\right) + z_0 v_0^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{d}{dt}\left(\dot{z}^2\right) = -2g\frac{dz}{dt}$$

بالتكامل نحصل على

$$\frac{a\dot{z}^2}{z} + \frac{z_0 v_0^2}{z} + \dot{z}^2 = -2gz + C_2$$

حيث C_2 مقدار ثابت يمكن تعيينه من شروط الحركة الابتدائية وهي

$\dot{z} = 0$ عندما $z = z_0$

$$\therefore C_2 = v_0^2 + 2g z_0$$

$$\therefore \frac{a\dot{z}^2}{z} + \frac{z_0 v_0^2}{z} + \dot{z}^2 = v_0^2 + 2g z_0 - 2gz$$

لتعيين المستويين اللذين تنحصر بينهما حركة الجسم نضع $\dot{z} = 0$ نجد أن

$$\frac{z_0 v_0^2}{z} = v_0^2 + 2g z_0 - 2gz$$

بالضرب في z نجد

$$2gz^2 - (v_0^2 + 2gz_0)\,z + z_0 v_0^2 = 0 \qquad (٩)$$

المعادلة (٩) من الدرجة الثانية في z وجذراها هما

$$z = \frac{1}{4g}\left[v_0^2 + 2gz_0 \pm \sqrt{(v_0^2 + 2gz_0)^2 - 8gz_0 v_0^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4g}\left[v_0^2 + 2gz_0 \pm \sqrt{v_0^4 - 4gz_0 v_0^2 + 4g^2 z_0^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4g}\left[v_0^2 + 2gz_0 \pm (v_0^2 - 2gz_0)\right]$$

الإشارة الموجبة تعطي أحد الجذرين ويساوي

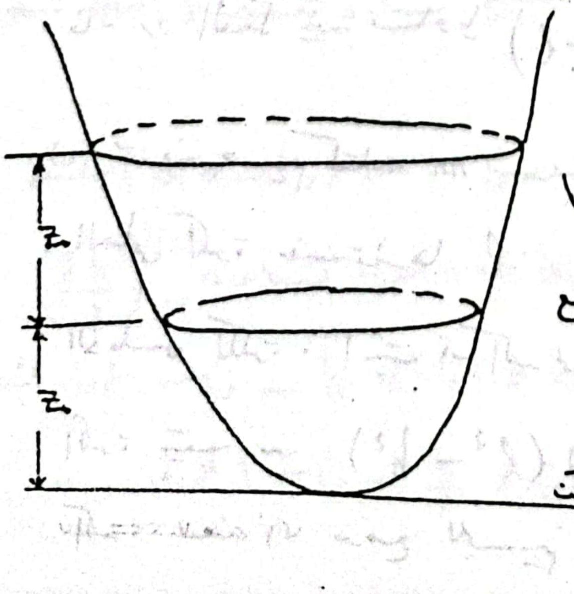
$$z = \frac{1}{4g}\left[v_0^2 + 2gz_0 + v_0^2 - 2gz_0\right] = \frac{v_0^2}{2g}$$

والإشارة السالبة تعطي الجذر الآخر وهو

$$z = \frac{1}{4g}\left[v_0^2 + 2gz_0 - (v_0^2 - 2gz_0)\right]$$

$$= \frac{1}{4g}\left[4gz_0\right] = z_0$$

∴ حركة الجسم تكون محصورة بين المستويين $z = z_0$ (وهو مستوى التثبيت الابتدائي) ، $z = \frac{v_0^2}{2g}$



لكي تكون أقصى مسافة رأسية يتحركها الجسم لأعلى تساوي z_0 فإننا نضع

$$\frac{v_0^2}{2g} = 2z_0$$

إذاً أن السرعة الابتدائية v_0 يجب أن تكون

$$v_0 = 2\sqrt{g z_0}$$

تمارين

(١) قذف جسيم في مستوى أفقي على السطح الداخلي لنصف قشرة كروية ملساء محورها رأسي ورأسها الى أسفل وكانت اتجاه القذف تصنع زاوية حادة γ مع الرأسي الى أسفل. أثبت أن السرعة الابتدائية للقذف بحيث يصعد الجسيم الى حافة نصف الكرة هي $(2lg\sec\gamma)^{1/2}$ حيث l نصف قطر القشرة.

(٢) قذفت نقطة مادية في مستوى أفقي على السطح الداخلي لقشرة كروية ملساء نصف قطرها $\frac{l}{\sqrt{2}}$ بسرعة $\sqrt{\frac{7lg}{3}}$ على عمق $\frac{2}{3}l$ تحت المركز. أثبت أن النقطة المادية سوف ترتفع الى مسافة $\frac{1}{3}l$ من المركز وأن الضغط على الكرة ينعدم عند هذا الموضع.

(٣) جسيم كتلته m يتحرك على السطح الداخلي لكرة ملساء نصف قطرها l وكان أكبر وأقل عمق تحت المركز هما $\frac{1}{2}l$، $\frac{1}{4}l$ على الترتيب. أثبت أنه عندما يكون العمق تحت المركز هو h فإن رد الفعل يكون مساويا $\frac{3mg}{l}\left(h+\frac{1}{2}l\right)$.

(٤) قذف جسيم كتلته m بسرعة أفقية v_0 على الدائرة الأفقية العظمى لكرة نصف قطرها l، وتحرك الجسيم على السطح الداخلي الأملس للكرة. أثبت أن أكبر عمق رأسي h للجسيم أسفل مركز الكرة يتعين من $v_0^2 h = 2g(l^2-h^2)$ وأن الضغط على الكرة عند أدنى موضع للجسيم يساوي

$\frac{m}{2l}\left(3v^2 - v_0^2\right)$ حيث v هي مقدار سرعة الجسيم عند هذا الموضع.

(٥) يثبت طرف خيط طوله l في نقطة O ويربط جسيم كتلته m في الطرف الآخر. يقذف الجسيم بسرعة أفقية عمودية على الخيط مقدارها v_0 عندما كان الخيط مائلا على الرأسي إلى أسفل زاوية حادة α. اثبت أن حركة الجسيم تكون محصورة بين مستويين أفقيين. اثبت كذلك أن شرط صعود أو هبوط الجسيم هو $v_0^2 \gtrless gl\sin\alpha\tan\alpha$ ثم اوجد الشد في الخيط عند أي لحظة.

(٦) يتحرك جسيم كتلته m على السطح الداخلي لكرة ملساء نصف قطرها l بين دائرتين أفقيتين الأولى فوق المركز بمسافة $\frac{l}{3}$ والثانية أسفل المركز بمسافة $\frac{2l}{3}$. اثبت أن مقدار سرعة الجسيم عندما يقع في المستوى الأفقي المار بالمركز تساوي $2\sqrt{lg}$ واتجاهها يصنع مع الأفقي زاوية $\tan^{-1}\sqrt{\frac{7}{20}}$. اثبت كذلك أن رد الفعل عند أسفل موضع للجسيم يساوي نصف رد الفعل عند أعلى موضع.

(٧) مخروط أملس دائري قائم محوره رأسي ورأسه إلى أسفل. يقذف جسيم في المستوى الأفقي بسرعة تساوي $\left(\frac{gh}{3}\right)^{1/3}$ من نقطة على السطح الداخلي للمخروط على ارتفاع h من رأس المخروط. اثبت أن أدنى نقطة للجسيم تكون على ارتفاع $\frac{h}{2}$ من رأس المخروط.

(٨) انبوبة رفيعة ملساء مستقيمة تميل دائما بزاوية α على الرأسي وتدور بسرعة زاوية منتظمة ω حوله. تنزلق جسيم كتلته m داخل الانبوبة بسرعة $\frac{g}{\omega}\cot\alpha$ مبتعدا عن محور الدوران. اثبت ان الجسيم بعد مضي زمن t يقطع مسافة

$$\frac{g}{\omega^2}\cot\alpha \csc\alpha\left[1 - e^{-\omega(\sin\alpha)t}\right]$$

اوجد كذلك رد فعل الانبوبة عند اى لحظة.

(٩) يتحرك جسيم كتلته m على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم أملس محوره رأسي ورأسه الى أسفل وزاوية رأسه 2α وكانت حركة الجسم محصورة بين مستويين أفقيين ارتفاعهما z_1, z_2 فوق رأس المخروط. اثبت ان ضغط الجسيم على المخروط عندما يكون على ارتفاع z فوق الرأس يساوي

$$m g \sin\alpha\left[1 + \frac{2 z_1^2 z_2^2 \cot^2\alpha}{(z_1+z_2) z^3}\right]$$

(١٠) مخروط دائري أملس قائم محوره رأسي ورأسه الى أسفل. تنزلق جسيم فى المستوى الأفقي بسرعة $\left(\frac{2 g h}{c^2+c}\right)^{1/2}$ منزلقا على السطح الداخلي للمخروط على ارتفاع h من رأس المخروط، حيث c ثابت. اثبت ان حركة الجسيم تكون محصورة بين المستوى الابتدائي والمستوى الذي يرتفع عن رأس المخروط مسافة $\frac{h}{c}$.

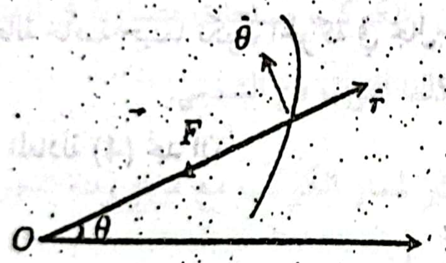
الحركة المدارية (ORBITAL MOTION)

سنعالج في هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى. كثيراً ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين O يسمى بمركز القوة – وتسمى القوة في هذه الحالة بالقوة المركزية – بحيث تنعدم المركبة العمودية لقوة المجال (الطاردة أو الجاذبة) وبالتالي تنعدم العجلة العمودية لحركة الجسيم دائماً وبتطبيق هذا الشرط نجد أنه من الاحداثيات القطبية

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0.$$

$$\therefore r^2\dot{\theta} = const$$

كما يسمى المسار الذي ترسمه القوة بالمسار المركزي.



المعادلة التفاضلية للمسار المركزي

معادلة الحركة في الاتجاهين r, θ هما

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -F \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (2)$$

المعادلة تعطي (2)

$$r^2\dot{\theta} = h$$

حيث h مقدار ثابت المعادلتان (1) ، (2) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب وبحذف بينهما نحصل على

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{F}{m} \qquad (3)$$

ويمكن اجراء تكامل للمعادلة (3) باستخدام التعويض $\left(r = \frac{1}{u}\right)$ وبحذف t منها

$$\therefore \dot{r} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{\frac{dr}{du}}\frac{du}{d\theta}\underbrace{\frac{h}{r^2}}_{\frac{d\theta}{dt}} = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\& \ddot{r} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

وبتعويض هذه النتائج في المعادلة (3) نحصل على

$$-h^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} = -\frac{F}{m} \qquad \therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \qquad (4)$$

هذه المعادلة تسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي وهي تستخدم لمعرفة قانون القوة المركزي إذا علم المسار وأيضاً إذا علمت القوة المركزية F فإنه يمكن حل المعادلة التفاضلية وايجاد المسار.

وكحالة خاصة حينما تكون الحركة في مجال قوة تتبع قانون التربيع العكسي (نضع $F = \frac{\lambda}{r^2}$)

ومن المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\lambda u^2}{mh^2u^2} = \frac{1}{\mu}, \qquad \mu = \frac{mh^2}{\lambda}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها العام في الصورة

$$u = \frac{1}{\mu}\{1 + \varepsilon\cos(\theta - \alpha)\}$$

حيث ε, α ثابتان والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها في الصورة $r = \frac{\mu}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \alpha)}$.

المعادلة الأخيرة تمثل قطع مخروطي ويكون قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً حسبما تكون $\varepsilon < 1$ أو $\varepsilon = 1$ أو $\varepsilon > 1$ على الترتيب.

كما نعلم أن مركبتي السرعة في اتجاهي r, θ هما $\dot{r}$ ، $r\dot{\theta}$ ومن ثم فإن مقدار سرعة الجسيم v تتعين من $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ولكن $\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}$ ومنها

$$v^2 = h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right\} \qquad (5)$$

وهذه المعادلة تعطي مقدار سرعة الجسيم عند أي موضع.

قوانين كبلر لحركة الكواكب

من أهم تطبيقات الحركة بالاحداثيات القطبية دراسة حركة الكواكب. ولقد قام كبلر (١٥٧١ -١٦٣٠) وهو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية المعروفة بأسمه:

القانون الأول : تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

القانون الثاني : يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما أقترب من الشمس.

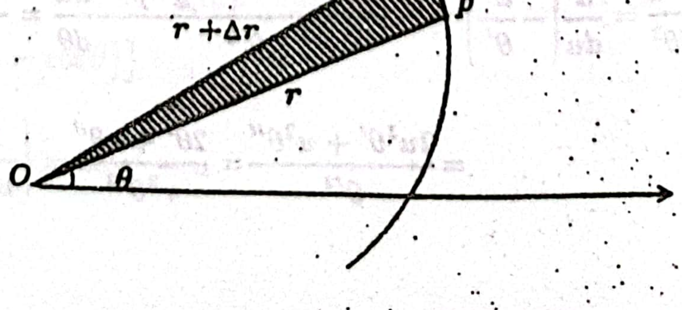
القانون الثالث : يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدوري. ومعامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية.

هذه هي نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالي ٦٠ عاماً ليثبت على أساسها قانون الجذب العام (الباب الثاني) والذي يعتبر من أكبر كشوف الانسان.

السرعة المساحية

بفرض أن $p(r,\theta)$ هو موضع الجسيم عند اللحظة t وأنه بعد زمن صغير Δt يكون عند الموضع $Q(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$. المساحة ΔA المقطوعة بمتجه الموضع في الفترة الزمنية Δt تساوي تقريباً مساحة المثلث OpQ

$$\therefore \Delta A = \frac{1}{2} r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta \cong \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$



السرعة المساحية $\dot{A}$ هي المساحة التي يرسمها Op في وحدة الزمن وتتعين من

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} \underbrace{r^2 \dot{\theta}}_{h} \qquad \therefore \dot{A} = \frac{1}{2} h$$

أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة في حالة المسار المركزي.

<u>القُبا</u> : وهي نقط المسار المركزي التي عندها يكون البعد عن مركز القوة نهاية عظمى أو صغرى. هذه الأبعاد تسمى ابعاد القبا أي عند نقط القبا يكون $\dot{r} = 0$ أو $\frac{du}{d\theta} = 0$ أو $\frac{dr}{d\theta} = 0$ وهذا يعني أنه عند القبا تكون حركة الجسيم عمودية على متجه الموضع.

<u>مثال ١</u>

افترض جسماً يتحرك في مجال قوة مركزي على مسار معادلته $\theta = \theta(r)$ اثبت أن قانون القوة يتعين من $-\frac{mh^2\left[2\theta' + r\theta'' + r^2\theta'^3\right]}{r^5\theta'^3}$ حيث ترمز الشرط الى تفاضلات بالنسبة إلى r؟

<u>الحل</u>

نعلم أن قانون القوة يتعين من
$$F = -mh^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\}$$

لاحظ أنه عند اشتقاق قانون القوة أعتبرت القوة متجهه نحو O أما في مسألتنا الإشارة السالبة تعني أن القوة خارجة من المركز

حيث $r = \frac{1}{u}$ ومن معادلة المسار $\theta = \theta(r)$ نضع $r = \frac{1}{u}$ يكون

$$\theta = \theta(r) \qquad \frac{d\theta}{du} = \underbrace{\frac{d\theta}{dr}}_{\theta'}\frac{dr}{du} = \theta' \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) \qquad \therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{u^2}{\theta'}, \quad \left[\theta' = \frac{d\theta}{dr}\right]$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{du}\left(-\frac{u^2}{\theta'}\right) = -\frac{2u\theta' - \cancel{u^2}\left(-\frac{1}{\cancel{u^2}}\right)\theta''}{\theta'^2}\frac{du}{d\theta} = -\frac{2u\theta' + \theta''}{\theta'^2}\overbrace{\left[-\frac{u^2}{\theta'}\right]}^{\frac{du}{d\theta}}$$

$$= \frac{2u^3\theta' + u^2\theta''}{\theta'^3} = \frac{2\theta' + r\theta''}{r^3\theta'^3}, \qquad \left[\theta'' = \frac{d^2\theta}{dr^2}\right]$$

$$F = -mh^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} = -mh^2\left\{\frac{2\theta' + r\theta''}{r^5\theta'^3} + \frac{1}{r^3}\right\}$$

$$= -\frac{mh^2\left\{2\theta' + r\theta'' + r^2\theta'^3\right\}}{r^5\theta'^3}$$

مثال ٢

أوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو قطب حتى يتحرك جسيم كتلته الوحدة على المنحنى $r = a(1-\cos\theta)$. وإذا كان مقدار كل من سرعة الجسيم والقوة عند القبا هما F, V فاثبت أن $3V^2 = 4aF$ ؟

الحـــل

بالتعويض في معادلة المسار بـ $r = \frac{1}{u} = a(1-\cos\theta)$

$$\frac{1}{u} = a(1-\cos\theta)$$

بالتفاضل بالنسبة لـ θ نحصل على

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = a\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = -au^2\sin\theta$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -a\left\{u^2\cos\theta - 2au^3\sin^2\theta\right\}$$

$$= -au^2\left\{\cos\theta - 2au\underbrace{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}_{\sin^2\theta}\right\}$$

$$= -au^2\left\{\cos\theta - 2(1+\cos\theta)\right\}$$

$$= -au^2\left\{-2-\cos\theta\right\}$$

$$= -au^2\left\{-3+(1-\cos\theta)\right\}$$

$$= -au^2\left\{-3+\frac{1}{au}\right\} = 3au^2 - u$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3au^2$$

$$\because F = h^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} = 3ah^2u^4 = \frac{3ah^2}{a^4\left(1-\cos\theta\right)^4}$$

عند القبا فإن السرعة تكون عمودية على نصف القطر المتجه (أي $\dot{r} = 0$ أو $\frac{du}{d\theta} = 0$)

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -au^2\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \sin\theta = 0 \qquad \therefore \theta = \pi$$

$$\therefore h = r^2\dot{\theta} = \underbrace{(r\dot{\theta})}_{V}\underbrace{r}_{2a} = V(2a) = 2aV, \qquad \theta = \pi$$

ولكن $F = 3ah^2u^4$ وبالتالي يكون $F = 3a\left(4a^2V^2\right)\frac{1}{16a^4}$ ومن ثم يكون

$$3V^2 = 4aF$$

مثال ٣

اثبت أنه إذا تحرك جسيم في مجال قوة مركزي فإن المسار يجب أن يكون في مستوى؟

الحـــل

حيث أن القوة مركزية فإن $\underline{F} = F\hat{r}$ حيث هو متجه وحدة في اتجاه الخط الواصل من نقطة المركز و حتى الجسيم أي في اتجاه $\underline{r}$ ومن ثم $\underline{r}\times\underline{F} = \underline{r}\times F\hat{r} = \underline{0}$ ومن قانون نيوتن الثاني فإن $\underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$ حيث $\frac{d\underline{v}}{dt}$ هي سرعة الجسيم وبالتالي يكون

$$\underline{r}\times\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underline{r}\times\underline{v}\right) = \underline{r}\times\frac{d\underline{v}}{dt} + \cancel{\underline{v}\times\frac{d\underline{r}}{dt}} = \underline{0} \qquad \therefore \underline{r}\times\underline{v} = \underline{h}$$

حيث $\underline{h}$ متجة ثابت وبضرب طرفي المعادلة السابقة في $\underline{r}$ نجد أن

$$\therefore \underline{r}\cdot\left(\underline{r}\times\underline{v}\right) = \underline{r}\cdot\underline{h} = 0$$

حيث $\underline{r}\cdot\left(\underline{r}\times\underline{v}\right) = 0$ أي أن $\underline{r}\cdot\underline{h} = 0$ ونستنتج أن متجه الموضع للجسيم $\underline{r}$ يكون دائماً عمودياً على المتجه الثابت $\underline{h}$ ومارا بالنقطة الثابتة O، أي أن المسار يقع في مستوى.

مثال ٤

يتحرك جسيم كتلته m تحت تأثير قوة مركزية F وكانت سرعة الجسيم $v = \frac{\ell}{r}$ حيث ℓ ثابت. اثبت أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r وأن معادلة المسار الذي يتحرك عليه الجسيم هي $r = e^{a\theta}$ حيث $a = \frac{1}{h}\sqrt{\ell^2 - h^2}$ حيث أنه عند $\theta = 0$ كانت $r = 1$؟

الحـــل

من قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right\} = \frac{\ell^2}{r^2} = \ell^2 u^2 \qquad (1)$$

بالتفاضل بالنسبة لـ θ نجد أن

$$\cancel{2}h^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\}\frac{\cancel{du}}{\cancel{d\theta}} = \cancel{2}\ell^2 u\frac{\cancel{du}}{\cancel{d\theta}} \qquad \therefore h^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} = \ell^2 u$$

$$\because F = mh^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} = m\ell^2u^3 = \frac{m\ell^2}{r^3}$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن القوة تتناسب عكسياً مع مكعب r.

لإيجاد معادلة المسار من المعادلة (1)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left[\frac{\ell^2}{h^2} - 1\right]u^2 \qquad \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\overbrace{\frac{1}{h}\sqrt{\ell^2 - h^2}}^{a}\,u = -au$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int\frac{du}{u} = -a\int d\theta \qquad \therefore \ln u = -a\theta + c$$

حيث c مقدار ثابت يتعين من الشرط عند $\theta = 0$ كانت $u = 1$ ومنها $c = 0$

$$\ln u = -a\theta \qquad i.e\ \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -a\theta$$

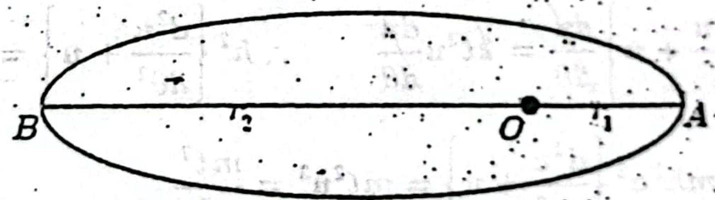
$$\therefore \ln r = a\theta \qquad Or \quad r = e^{a\theta}$$

مثال ٥

إذا كانت النسبة بين أكبر سرعة زاوية يدور بها كوكب حول الشمس وأصغر سرعة زاوية تساوي λ فاثبت أن الأختلاف المركزي لمسار هذا الكوكب هو $\dfrac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}$؟

الحـــل

كما ذكرنا وعلى حسب قوانين كبلر فإن الكوكب يتحرك في مسار على شكل قطع ناقص



وحيث أن $r^2\dot{\theta} = h$ ومنها $\dot{\theta} = \dfrac{h}{r^2}$ أي أن السرعة الزاوية تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن الشمس وبالتالي أكبر سرعة زاوية عندما تكون r أصغر ما يمكن. أي عندما $r = r_1$ حيث $r_1 = OA = a - a\varepsilon$ وأصغر سرعة زاوية عندما $r = r_2$ حيث $r_2 = OB = a + a\varepsilon$

$$\therefore \frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B} = \lambda = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2} \qquad \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad \therefore \varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}$$

الخلاصة

- إذا أعطي مسار الجسم ومعادلته القطبية أمكن الحصول على قانون القوة عن طريق التفاضل بالنسبة للزمن والتعويض في الصورة القطبية لمركبات العجلة.
- إذا أعطي قانون القوة وأحوال الابتداء نعوض في الصورة القطبية لمركبات العجلة ونكامل المعادلات التفاضلية الناتجة للحصول على المسار ونعين أحوال الابتداء لإيجاد الثوابت المختلفة في كل مرة.
- يعتبر قانون المساحات $\left(r^2\dot{\theta} = h = const.\right)$ تعبير عن كون مركبة العجلة العمودية تساوي صفراً فقط ويسري ذلك في حركة كل القوى المركزية.
- في حالة كون القوة مركزية فإن المعادلة التفاضلية للمسار المداري هي

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2}$$

تمـــــارين

(١) اذكر مثالاً لمجال قوة يتجه نحو نقطة ثابتة ولكنه ليس مجال قوة مركزية؟

(٢) استخدم المثال ١ لإثبات أنه إذا كانت $\theta = \frac{1}{r}$ فإن القوة المركزية تتناسب عكسياً مع r^3؟

(٣) يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية في منحنى ذي عروتين $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. اثبت أن السرعة تتناسب عكسياً مع r^2 وأن القوة تتناسب عكسياً مع r^7؟

(٤) إذا كان المسار المركزي لجسيم هو قطع مخروطي (أي $r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos\theta}$) فاثبت أن القوة تخضع لقانون التربيع العكسي؟

(٥) إذا علم أن العجلة في مسار مركزي جاذب هي $\frac{\mu}{r^3}\left(3 + \frac{2\lambda^2}{r^2}\right)$ حيث λ, μ ثابتين وأن النقطة المادية قذفت من الموضع $r = \lambda$ بسرعة $\sqrt{\frac{5\mu}{\lambda^2}}$ وفي اتجاه يصنع زاوية $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ مع نصف القطر المتجه فاثبت أن معادلة المسار هي $r = \lambda \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$؟

(٦) يتحرك جسيم كتلته m متأثراً بجذب مركزي $\frac{\mu m}{r^2}$ نحو O. إذا قذف الجسيم بسرعة u من نقطة تبعد a عن O. فاثبت أن المسار هو قطع ناقص إذا كان $u^2 < \frac{2\mu}{a}$. قطع مكافئ إذا كان $u^2 = \frac{2\mu}{a}$، قطع زائد إذا كان $u^2 > \frac{2\mu}{a}$؟

(٧) جسيم كتلته واحد جرام يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية تتناسب عكسياً مع مكعب r بحيث القوة تساوي واحد داين عندما $r = 1\ cm$. اوجد معادلة المسار علماً بأنه عندما $\theta = 0$ فإن $r = 2\ cm$ والسرعة تساوي $\frac{1}{2}\ cm\,sec^{-1}$ واتجاهها يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الإبتدائي؟

(٨) يتحرك جسيم كتلته m تحت تأثير قوة طاردة مقدارها $\frac{m\lambda}{r^3}$. إذا قذف الجسيم من قبو على بعد a من المركز بسرعة $u = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}$ فاثبت أن معادلة المسار هي $r = a\sec b\theta$ وأن الزاوية θ التي يدورها الخط الواصل بين الجسيم والمركز O بعد زمن t تساوي $b^{-1}\tan^{-1}\frac{but}{a}$ حيث $b^2 = \mu + 1$ ؟

(٩) اوجد القوة المركزية التي تؤثر على جسيم نحو القطب لكي يتحرك على المنحنى $r^n = a^n \cos n\theta$ حيث a, n ثابتان . أوجد كذلك قانون تغيّر السرعة؟

(١٠) اثبت أنه في الاحداثيات المتعامدة يكون مقدار السرعة المساحية هو $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$ ؟

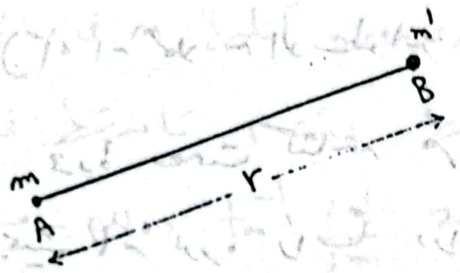
اختبر نفسك

اثبت أنه عندما يكون قانون القوة على الصورة $F = -\frac{K}{r^2}, \quad K > 0$ فإن مسار الجسيم يكون مخروطياً ؟

الحـــل

الباب السادس

الجذب والجهد



المجال والجهد.

نفرض أن نقطتين ماديتين عند A ، B كتلتاهما m ، m' على الترتيب والمسافة بينهما r تتكون قوة الجذب بينهما F تعطيه من قانون الجذب العام لنيوتن.

$$F = \frac{\gamma m m'}{r^2} \qquad (5.1)$$

حيث γ ثابت الجاذبية لنيوتن.

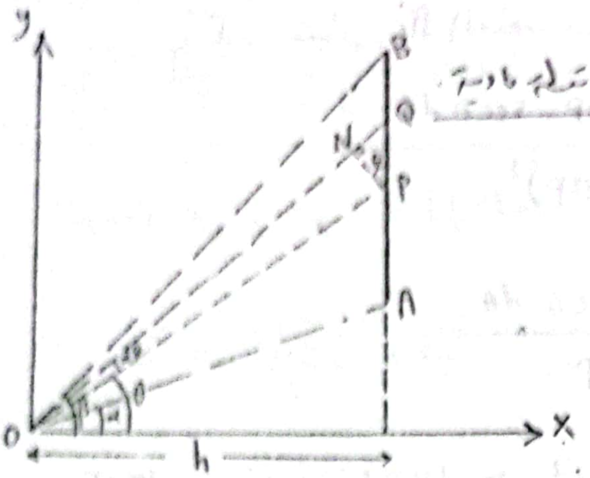
يعرف المجال E عند النقطة B الناتج من وجود الكتلة m عند A بأنه القوة التي تؤثر على وحدة الكتل عند B ، أي أن

$$E = \frac{\gamma m}{r^2} \qquad (5.2)$$

العلاقة (5.2) تعطي مقدار المجال ودائما هو يكون في الاتجاه BA.

يعرف الجهد V عند B من العلاقة

$$V = \frac{\gamma m}{r} \qquad (5.3)$$



الجذب بين سلك رفيع ونقطة مادية

نفرض سلك AB والمطلوب إيجاد الجذب عند نقطة O التي تبعد h عن AB.

نأخذ المحور ox عموديا على السلك AB و oy موازيا للسلك حيث OA ، OB يصنعان زاويتي α ، β مع المحور ox.

نأخذ عنصر من السلك PQ حيث OP ، OQ يصنعان زاويتي θ ، $\theta + d\theta$ مع المحور ox على الترتيب.

الجذب عند O بسبب العنصر PQ يعطى بالمقدار

$$dE = \frac{\gamma \; \sigma \; . \; PQ}{(OP)^2} \qquad (5.4)$$

حيث σ كتلة وحدة الطول من السلك.

ننزل العمود PN على OQ فتكون الزاوية NPQ مساوية θ وبالتالي

$$PQ = PN \; . \; \sec\theta \qquad (5.5)$$

حيث أن

$$PN = OP \; . \; d\theta \qquad (5.6)$$

بالتعويض من (5.6) في (5.5) نحصل

$$PQ = OP \; . \; \sec\theta \; d\theta \qquad (5.7)$$

ويكون مقدار المجال للعنصر مساويا

$$dE = \frac{\gamma \sigma \cdot OP \cdot \sec\theta \, d\theta}{(OP)^2}$$

$$= \frac{\gamma \sigma \sec\theta \, d\theta}{OP}$$

$$= \frac{\gamma \sigma}{h} d\theta \qquad (5.8)$$

وذلك لأن $OP = h \sec\theta$

مركبتا المجال dE_x ، dE_y في اتجاهي ox ، oy تتعينان من

$$dE_x = \frac{\gamma \sigma}{h} \cos\theta \, d\theta \ , \qquad (5.9)$$

$$dE_y = \frac{\gamma \sigma}{h} \sin\theta \, d\theta \qquad (5.10)$$

مركبة المجال للسلك AB في اتجاه ox نحصل عليها بتكامل (5.9) ونجد أن

$$E_x = \frac{\gamma \sigma}{h} \int_{\alpha}^{\beta} \cos\theta \, d\theta$$

$$\therefore E_x = \frac{\gamma \sigma}{h} (\sin\beta - \sin\alpha) \qquad (5.11)$$

بالمثل مركبة المجال E_y للسلك AB في اتجاه oy تتعين من

$$E_y = \frac{\gamma \sigma}{h} \int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta \, d\theta$$

$$\therefore \quad E_y = \frac{\gamma\sigma}{h}(\cos\alpha - \cos\beta) \qquad (5.12)$$

ويكون شدة المجال E هو المحصلة المركبتين E_x ، E_y ، أي أن

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \qquad (5.13)$$

بالتعويض عن قيمتي E_x ، E_y من (5.11) ، (5.12) في (5.13) نجد أن.

$$E = \frac{\gamma\sigma}{h}\sqrt{(\sin\beta - \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2}$$

$$= \frac{\gamma\sigma}{h}\sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}$$

$$= \frac{\gamma\sigma}{h}\sqrt{2 - 2\cos(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\gamma\sigma}{h}\sqrt{2\left[2\sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{2\gamma\sigma}{h}\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \qquad (5.14)$$

وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \quad ,$$

$$\cos(\phi - \psi) = \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \,,$$

$$\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi \,.$$

اتجاه المجال يصنع زاوية ψ مع $\overline{ox}$ حيث

$$\tan\psi = \frac{E_y}{E_x} \qquad (5.15)$$

بالتعويض عن قيمتي E_x و E_y من (5.11) و (5.12) في (5.15) نجد أن

$$\tan\psi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \qquad (5.16)$$

باستخدام المطابقتين التاليتين

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right),$$

$$\sin\beta - \sin\alpha = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

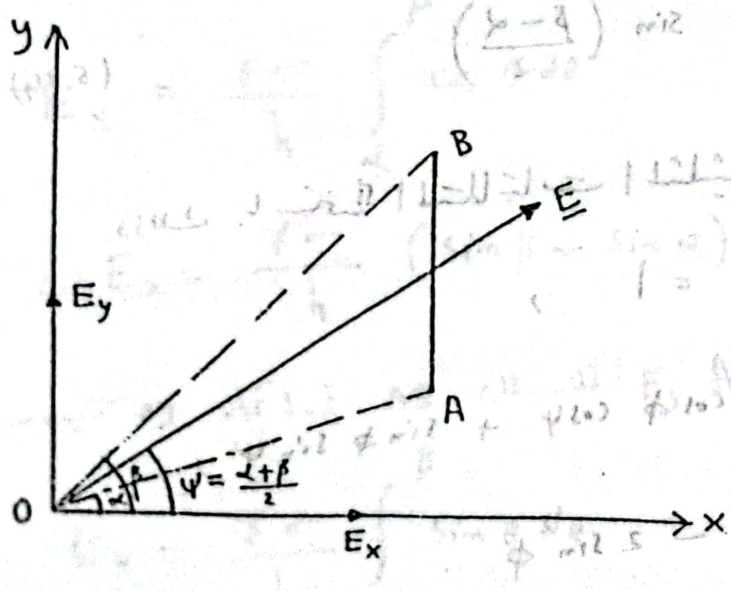
فإن (5.16) تصبح بالصورة

$$\tan\psi = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (5.17)$$

أي أن

$$\psi = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (5.18)$$

المعادلة (5.18) تعني أن المجال E يكون في اتجاه منصف الزاوية AOB كما بالشكل.



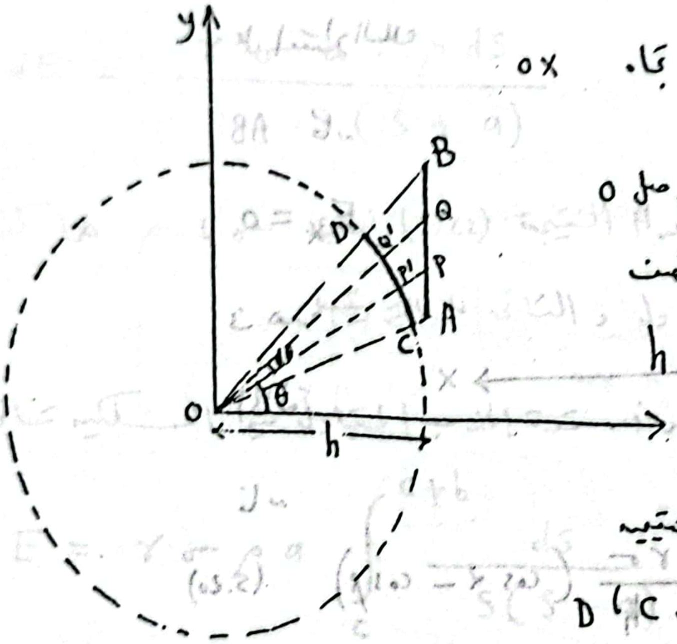
نتائج :

(1) إذا امتد السلك إلى ما لا نهاية من طرفيه فإنه في هذه الحالة $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ، $\beta = \frac{\pi}{2}$ ونجد أن:

$$E = \frac{2\gamma\sigma}{h} \sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{2\gamma\sigma}{h} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2\gamma\sigma}{h} \qquad (5.19)$$

واتجاهه في اتجاه ox.



(2) من نقطة الأصل O نرسم دائرة نصف قطرها يساوي h ونرسم أنصاف المستقيمين OA ، OB في C ، D على التوالي.

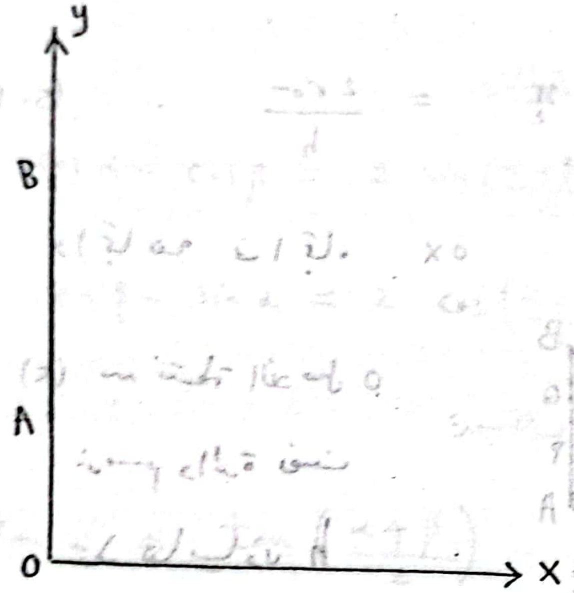
نتصور أن القوس CD يمثل سلكاً دائرياً كثافته σ فيكون مجال العنصر $P'Q'$ الذي طوله $h\,d\theta$ مساوياً

$$dE = \frac{\gamma\sigma \cdot h\,d\theta}{h^2} = \frac{\gamma\sigma}{h}\,d\theta$$

المعادلة الأخيرة هي نفسها المعادلة (5.8) والتي تعطي مجال العنصر PQ من السلك AB.

أي أن مجال العنصر $P'Q'$ من القوس CD يساوي مجال العنصر PQ من السلك المستقيم AB .

من ذلك نستنتج أن مجال السلك الذي على شكل قوس من دائرة CD هو نفسه مجال السلك المستقيم AB والذي سبق الحصول عليه وتعيينه مقداراً واتجاهاً بالمعادلتين (5.14) ، (5.18) على الترتيب .



(٢) إذا كانت O على امتداد السلك AB فإن $E_x = 0$ وفي هذه الحالة فإن

$$E = E_y = \frac{\gamma \sigma}{h}(\cos\alpha - \cos\beta) \qquad (5.20)$$

نلاحظ أن

$$\cos\alpha = \frac{h}{OA} \; , \; \cos\beta = \frac{h}{OB} \qquad (5.21)$$

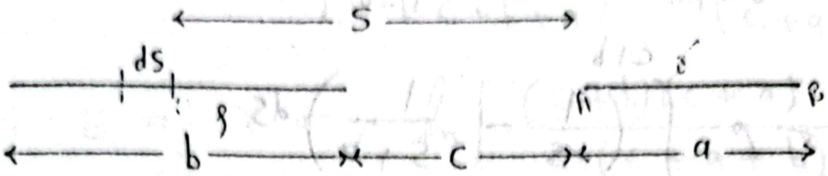
وبالتالي فإنه يمكن كتابة (5.20) باستخدام (5.21) على الصورة

$$E = E_y = \gamma\sigma\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right)$$

$$= \gamma\sigma \cdot \frac{OB - OA}{OA \cdot OB}$$

$$= \frac{\gamma\sigma \cdot AB}{OA \cdot OB} \qquad (5.22)$$

الجذب المتبادل بين سلكين رفيعين على استقامة واحدة.



جذب السلك الأول (طوله a) لعنصر طوله ds من السلك الثاني (طوله b) كما بالشكل يعطى من

$$dE = \frac{\gamma \sigma a \cdot \rho \, ds}{s(s+a)} \quad (5.23)$$

وذلك باستخدام النتيجة (5.22) حيث σ ، ρ هما كثافتي السلكين الأول والثاني على الترتيب.

بالتكامل نجد أن شدة الجذب المتبادل بين السلكين تساوي

$$E = \gamma \sigma \rho a \int_{c}^{c+b} \frac{ds}{s(s+a)} \quad (5.24)$$

باستخدام الكسور الجزئية نجد

$$\frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] \quad (5.25)$$

بالتعويض من (5.25) في (5.24) نجد أن

$$E = \gamma \sigma \rho \int_{c}^{c+b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) ds$$

$$= \gamma \sigma \rho \left[\ln s - \ln (s+a)\right]\Big|_{c}^{c+b}$$

$$E = -\gamma \sigma \rho \int_{s=c}^{s=c+b} \left[\frac{1}{r+s} \right]_{r=0}^{r=a} ds$$

$$= \gamma \sigma \rho \int_{c}^{c+b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) ds$$

ونلاحظ أن التكامل بالنسبة الى s هو نفس التكامل الذى

سبق حسابه ونحصل على نفس النتيجة السابقة.

<u>نتيجة:</u>

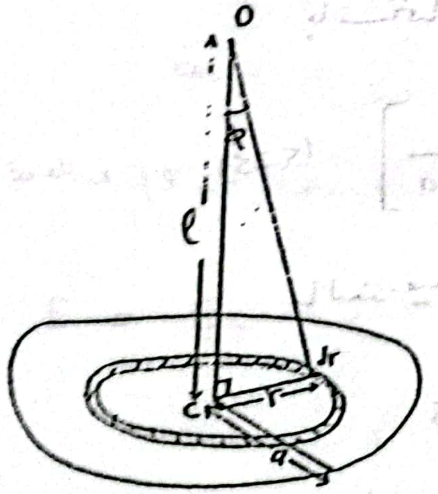
إذا كان أحد السلكين لانهائيا فإن الجذب المتبادل يظل محدودا.

فمثلا إذا كان السلك الأول لانهائيا أي أن $a=\infty$ فإن

$$E = \gamma \sigma \rho \lim_{a\to\infty} \ln\left[\frac{(c+b)(c+a)}{c(a+b+c)} \right]$$

$$= \gamma \sigma \rho \ln\left(\frac{c+b}{c} \right) \qquad (5.28)$$

<u>الجذب بين قرص دائرى ونقطة مادية على محوره.</u>



نقسم القرص الى حلقات ونعتبر

احداها نصف قطرها r وسمكها

dr.

من التماثل يتضح أن الجذب

يكون محوريا أي في اتجاه

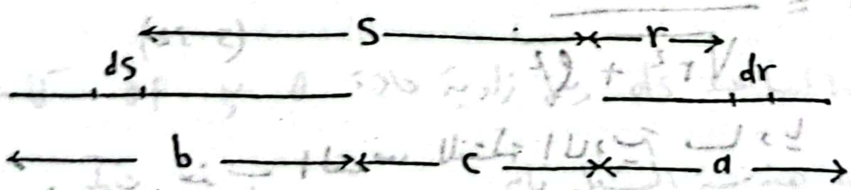
OC ويتعين من

$$= \gamma \sigma \rho \ln\left(\frac{s}{s+a}\right)\Bigg|_{c}^{c+b}$$

$$= \gamma \sigma \rho \left[\ln\left(\frac{c+b}{c+b+a}\right) - \ln\left(\frac{c}{c+a}\right)\right]$$

$$\therefore \quad E = \gamma \sigma \rho \ln\left[\frac{(c+b)(c+a)}{c\,(c+a+b)}\right] \qquad (5.26)$$

ملاحظة: يمكن الحصول على النتيجة (5.26) بطريقة مباشرة ودون الاستعانة بالنتيجة السابقة (5.22) والتي تعين جذب سلك لانهائي لنقطة مادية على امتداده. وذلك باستخدام التكامل الثنائي كالآتي



الجذب المتبادل بين عنصرين طوليهما dr , ds من السلكين يتعين من

$$dE = \frac{\gamma\, \sigma\, dr \cdot \rho\, ds}{(r+s)^2}$$

ويكون الجذب المتبادل بين السلكين مساويا

$$E = \gamma \sigma \rho \int_{s=c}^{s=c+b} \int_{r=0}^{r=a} \frac{dr\, ds}{(r+s)^2} \qquad (5.27)$$

بإجراء التكامل بالنسبة إلى r نجد أن

$$dE = \frac{\gamma \, dm}{r^2 + l^2} \cos\phi \qquad (5.29)$$

حيث dm كتلة الحلقة وتساوي

$$dm = 2\pi r \sigma \, dr \qquad (5.30)$$

بالتعويض عن كتلة العنصر من (5.30) في (5.29) نجد أن

$$dE = \frac{2\pi \gamma \sigma l \, r\,dr}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \qquad (5.31)$$

وذلك باستخدام

$$\cos\phi = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \qquad (5.32)$$

ولكن جذب القرص للنقطة المادية مساويا

$$E = 2\pi \gamma \sigma l \int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \qquad (5.33)$$

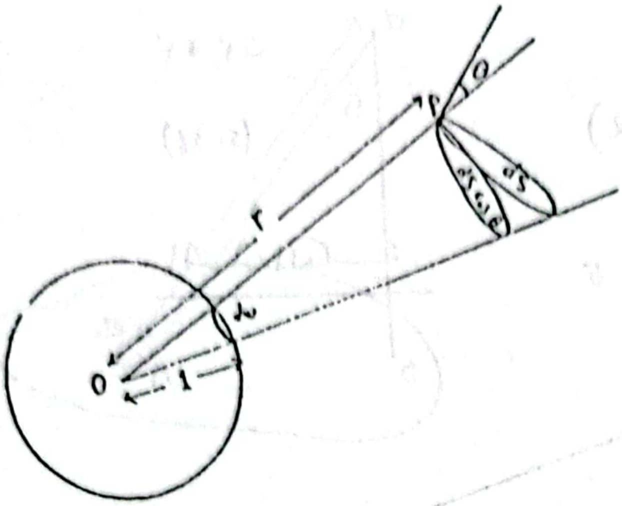
باجراء التكامل في (5.33) نجد أن

$$E = -2\pi \gamma \sigma l \left. (r^2 + l^2)^{-\frac{1}{2}} \right|_0^a$$

$$= -2\pi \gamma \sigma l \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{1}{l} \right]$$

$$= 2\pi \gamma \sigma \left[1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right] \qquad (5.34)$$

الزاوية المجسمة.



نتصور خطوط رأسه عند O .

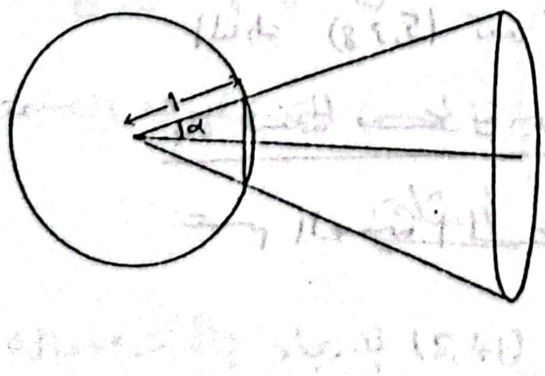
الزاوية المجسمة للمخروط هي المساحة التي يقطعها المخروط على سطح كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها يقع عند رأس المخروط O .

نتصور عنصر مساحة ds يقابل الزاوية المجسمة dw ورأس المخروط على المساحة ds ويميل زاوية حادة θ مع OP كما بالشكل.

من هندسة الشكل نجد

$$\frac{ds\cos\theta}{dw} = \frac{r^2}{1}$$

$$\therefore \quad dw = \frac{ds\cos\theta}{r^2} \qquad (5.35)$$

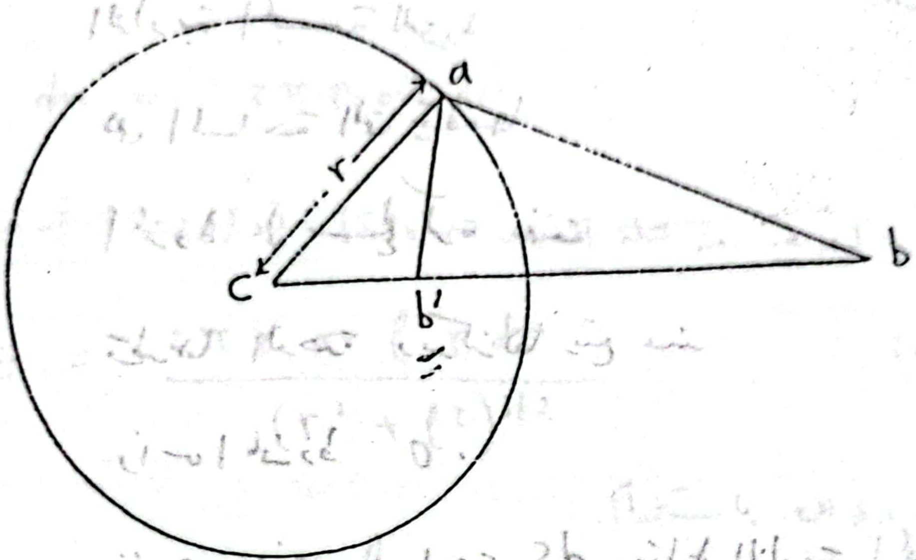


على ذلك تكون الزاوية المجسمة للمخروط الدائري التام الذي زاوية رأسه 2α تساوي مساحة الطاقية التي تساوي $2\pi(1-\cos\alpha)$.

لذا فإن

$$\omega = 2\pi(1-\cos\alpha) \qquad (5.36)$$

النقطة العكسية.



اذا كانت b نقطة خارج كرة نصف قطرها r ومركزها c فانه توجد نقطة b' تسمى النقطة العكسية للنقطة b حيث

$$cb' \cdot cb = r^2 \qquad (5.37)$$

يمكن كتابة (5.37) في الصورة

$$\frac{cb'}{r} = \frac{r}{cb} \qquad (5.38)$$

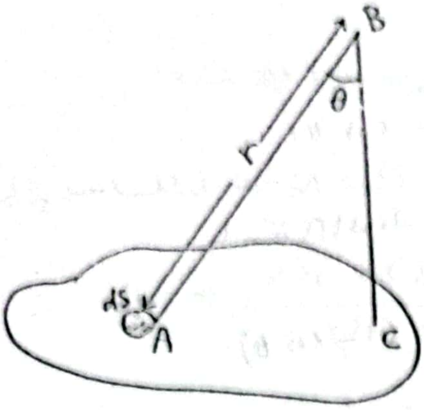
المعادلة (5.38) تعني أن المثلثين cab' ، cba متشابهان.

جهد صفيحة كروية عند نقطة خارجها.

نقسم الصفيحة الكروية الى عناصر ونعتبر احدها الذي مساحته ds

أي العنصر عند B يساوي

$$\frac{\gamma \sigma ds}{r^2}$$



وفي الاتجاه BA

حيث r هو البعد بين B

والعنصر ds عند A

المركبة العمودية للمجال

(أي في الاتجاه العمودي على الصفيحة) تساوي

$$dE = \frac{\gamma \sigma ds}{r^2} \cos\theta \qquad (5.39)$$

باستخدام العلاقة (5.35) فإن (5.39) تأخذ الصورة

البسيطة

$$dE = \gamma \sigma d\omega \qquad (5.40)$$

حيث $d\omega$ هي الزاوية المجسمة التي يحصرها العنصر ds

عند B .

بتكامل (5.40) نحصل على

$$E = \gamma \sigma \omega \qquad (5.41)$$

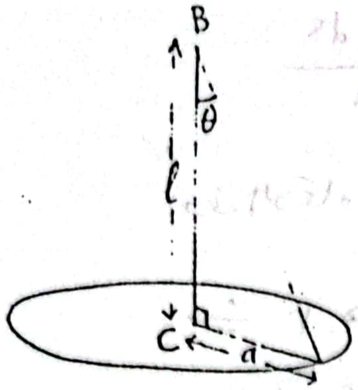
حيث ω هي الزاوية المجسمة التي تحصرها الصفيحة عند B .

أمثلة

مثال (1) استخدم المعادلة (5.41) لإيجاد شدة مجال قرص دائري عند نقطة B الواقعة على العمودي على مستوى القرص والمار بالمركز C .

الحل

حيث إن الزاوية المجسمة التي يحصرها القرص عند B تساوي



$$w = 2\pi(1 - \cos\theta)$$

باستخدام المعادلة (5.41) نجد أن

$$E = 2\pi\gamma\sigma(1 - \cos\theta)$$

حيث أن

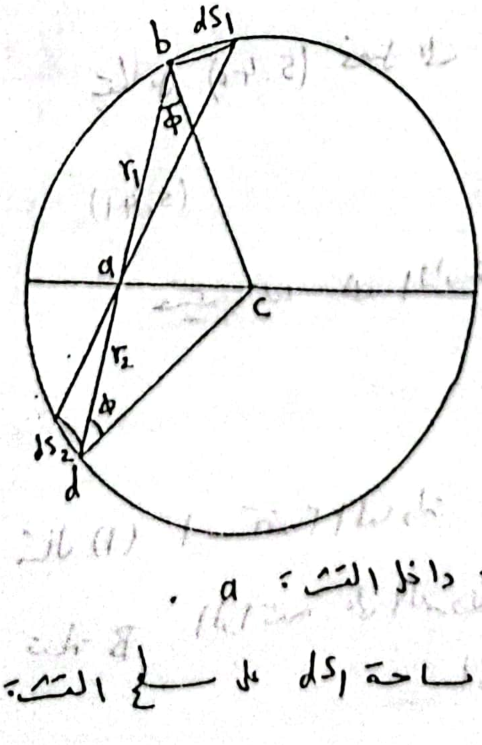
$$\cos\theta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}$$

$$\therefore E = 2\pi\gamma\sigma\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}\right)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها فيما سبق.

مثال (٢). اثبت أن مجال قشرة كروية عند نقطة داخلها يساوي صفر وأن مجال القشرة عند نقطة خارجها هو نفس المجال لجسم عند مركز الكرة وكتلته تساوي كتلة القشرة.

الحل.



أولاً: عند نقطة داخل القشرة a.

نأخذ عنصر مساحة ds_1 على سطح القشرة الكروية يصنع زاوية

بسبب dw عند a المطلوب حساب المجال عندها.

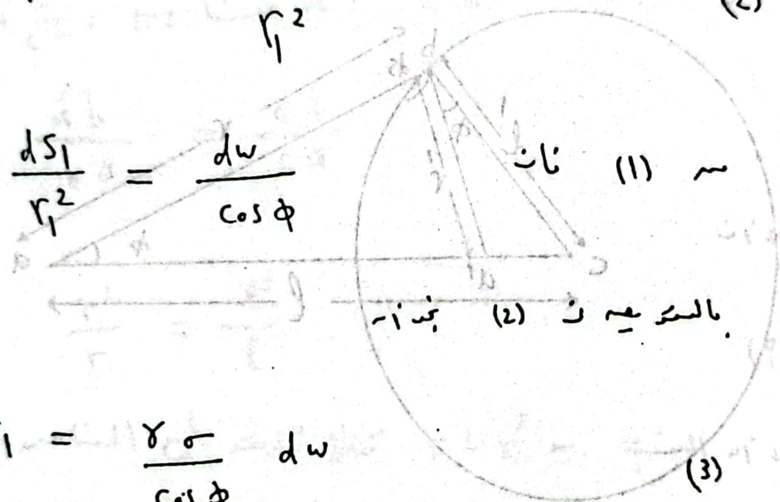
نفرض أن dw تقابل الشحنة الكروية من الجهة الأخرى في المساحة dS_2.

$$\therefore \quad dw = \frac{dS_1 \cos\phi}{r_1^2} = \frac{dS_2 \cdot \cos\phi}{r_2^2} \qquad (1)$$

حيث $r_1 = ab$ ، $r_2 = ad$.

مجال العنصر dS_1 عند a ينتج من

$$dE_1 = \frac{\gamma \ \sigma \ dS_1}{r_1^2} \qquad (2)$$



من (1) نأتي

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dw}{\cos\phi}$$

بالتعويض في (2) نجد أن

$$dE_1 = \frac{\gamma\sigma}{\cos\phi}\, dw \qquad (3)$$

وفي الاتجاه $\underline{ab}$.

بالمثل مجال العنصر dS_2 عند a ينتج من

$$dE_2 = \frac{\gamma \ \sigma \ dS_2}{r_2^2} \qquad (4)$$

باستخدام (1) نجد أن (4) تأخذ الصورة

$$dE_2 = \frac{\gamma\sigma}{\cos\phi}\, dw \qquad (5)$$

وفي الاتجاه $\underline{ad}$.

من (3) ، (5) نجد أن مجال العنصرين dS_1 ، dS_2 عند

نقطة a متساوية في المقدار ومتضادة في الاتجاه ، أي

أن محصلة مجال العنصرين عند a يساوي الصفر

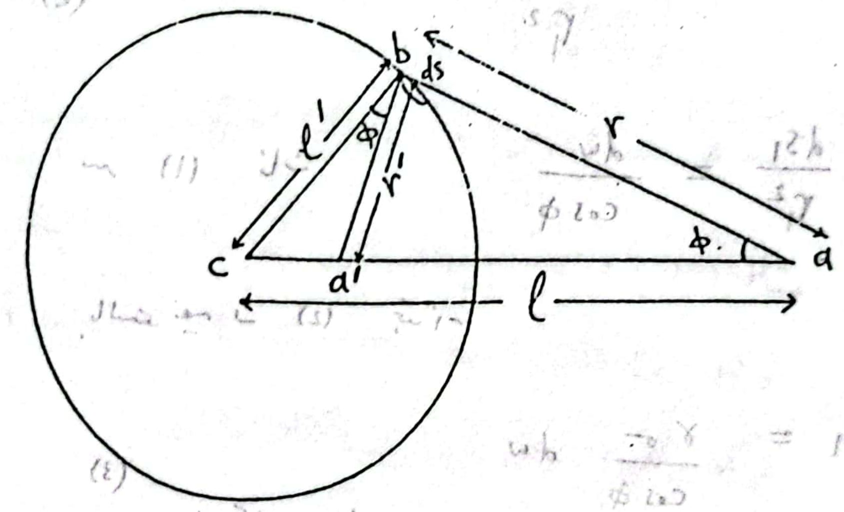
وحيث أنه يمكن تقسيم سطح الشحنة الكروية الى عناصر

ds_1 في جهة وعناصر مقابلة ds_2 في الجهة الأخرى من a

فإننا نستنتج أن المجال الكلي للشحنة عند نقطة داخلها مثل a

يساوي صفر

ثانياً : عند نقطة خارج الشحنة a .



مجال العنصر ds عند a يساوي $\frac{\gamma \sigma \, ds}{r^2}$

وفي الاتجاه ab .

مركبة مجال العنصر ds في الاتجاه ac تساوي

$$dE = \frac{\gamma \sigma \, ds}{r^2} \cos \phi \qquad (6)$$

نفرض أن a' هي النقطة العكسية للنقطة a وأن العنصر ds

يصنع عند a' زاوية مجسمة dw حيث

$$dw = \frac{ds \cos\phi}{r'^2} \qquad (7)$$

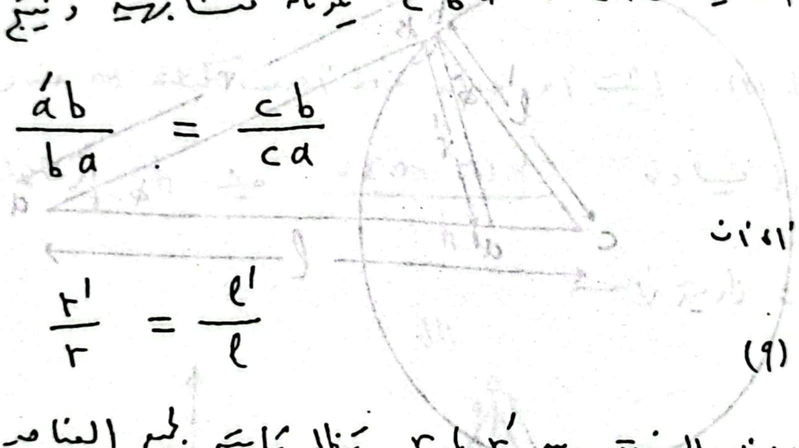
من (6) ، (7) نجد أن

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,r'^2}{r^2}\,dw \qquad (8)$$

بتغير العنصر ds على سطح القشرة الكروية يتغير كل من r ، r'

ولكن من تعريف النقطة العاكسة a' للنقطة a فإن

المثلثين cáb ، cba يكونان متشابهين ونستنتج أن



$$\frac{\acute{a}b}{ba} = \frac{cb}{ca}$$

إذاً

$$\frac{r'}{r} = \frac{l'}{l} \qquad (9)$$

أي أن النسبة بين r' ، r تظل ثابتة لجميع العناصر ds.

بالتعويض من (9) في (8) نجد أن

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,l'^2}{l^2}\,dw$$

بالتكامل نجد أن

$$E = \frac{\gamma\,\sigma\,l'^2\,w}{l^2}$$

حيث w هي الزاوية المجسمة للقشرة الكروية عند a'

وتساوي 4π ونجد أن

$$E = \frac{4\pi\,\gamma\,\sigma\,l'^2}{l^2}$$

نقطة a متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه اذن

أن محصلة مجال العنصرين عند a يساوي الصفر

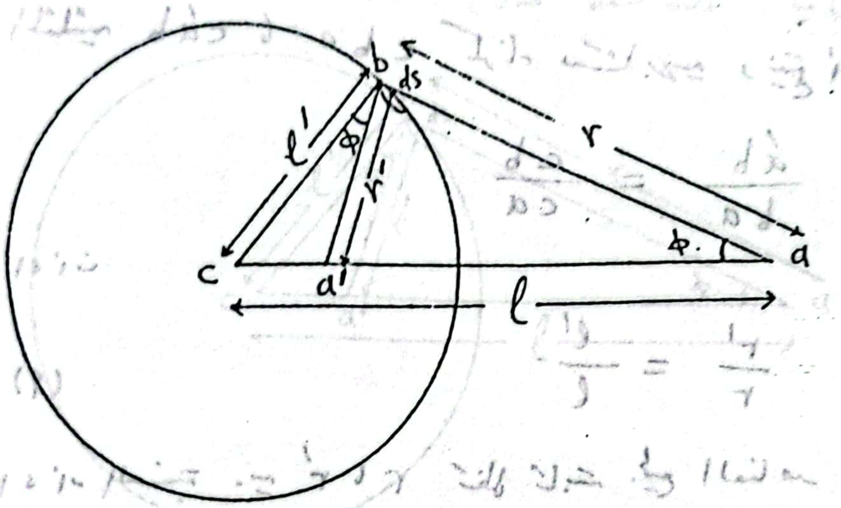
وحيث أنه يمكن تقسيم سطح القشرة الكروية الى عناصر

ds في جهة وعناصر مقابلة ds في الجهة الأخرى من a

فاننا نستنتج أن المجال الكلي للقشرة عند نقطة داخلها مثل a

يساوي الصفر

ثانيا: عند النقطة خارج القشرة a.



مجال العنصر ds عند a يساوي $\frac{\gamma \sigma \, ds}{r^2}$

وفي الاتجاه ab.

مركبة مجال العنصر ds في الاتجاه ac تساوي

$$dE = \frac{\gamma \sigma \, ds}{r^2} \cos \phi \qquad (6)$$

نفرض أن a' هي النقطة العكسية للنقطة a، وأن العنصر ds

يصنع عند a' زاوية مجسمة dw حيث

حيث أن كتلة القشرة الكروية m تساوي

$$m = 4\pi\sigma l^2$$

$$\therefore \quad E = \frac{\gamma m}{l^2} \qquad (15)$$

العلاقة (15) تعين مجال القشرة الكروية عند نقطة خارجها

مثل a ، نستنتج أن مجال القشرة الكروية عند نقطة خارجها يساوي

مجال جسيم كتلته تساوي كتلة القشرة الكروية وموضوع عند مركز

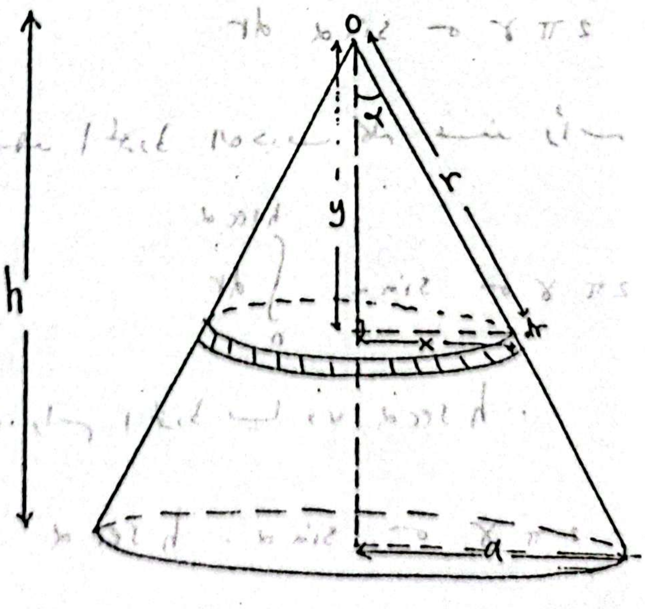
الكرة C .

مثال (2). اثبت أن جهد مخروط أجوف كتلته m عند رأس

المخروط يساوي $\frac{2\gamma m \cos\alpha}{h}$ حيث h ارتفاع المخروط

2α زاوية رأسه

الحل



نقسم المخروط الأجوف الى عناصر كل منها عبارة عن حلقة ونحسب أحدها

هذه الحلقات .

جهد العنصر (الحلقة) عند رأس المخروط O يعطى بـ

$$dV = \frac{\gamma \, dm}{r} \qquad (1)$$

حيث dm كتلة العنصر وتساوي

$$dm = 2\pi x \sigma \, dr \qquad (2)$$

بالتعويض بـ (2) في (1) نجد أن

$$dV = \frac{2\pi \gamma \sigma \, x \, dr}{r} \qquad (3)$$

من الشكل نجد أن

$$\sin\alpha = \frac{x}{r} \qquad (4)$$

من (3) ، (4) نحصل على

$$dV = 2\pi \gamma \sigma \sin\alpha \, dr$$

جهد المخروط الأجوف كله عند رأسه O يعطى بـ

$$V = 2\pi \gamma \sigma \sin\alpha \int_0^{h\sec\alpha} dr$$

حيث طول راسم المخروط يساوي $h \sec\alpha$.

$$\therefore V = 2\pi \gamma \sigma \sin\alpha \cdot h \sec\alpha$$

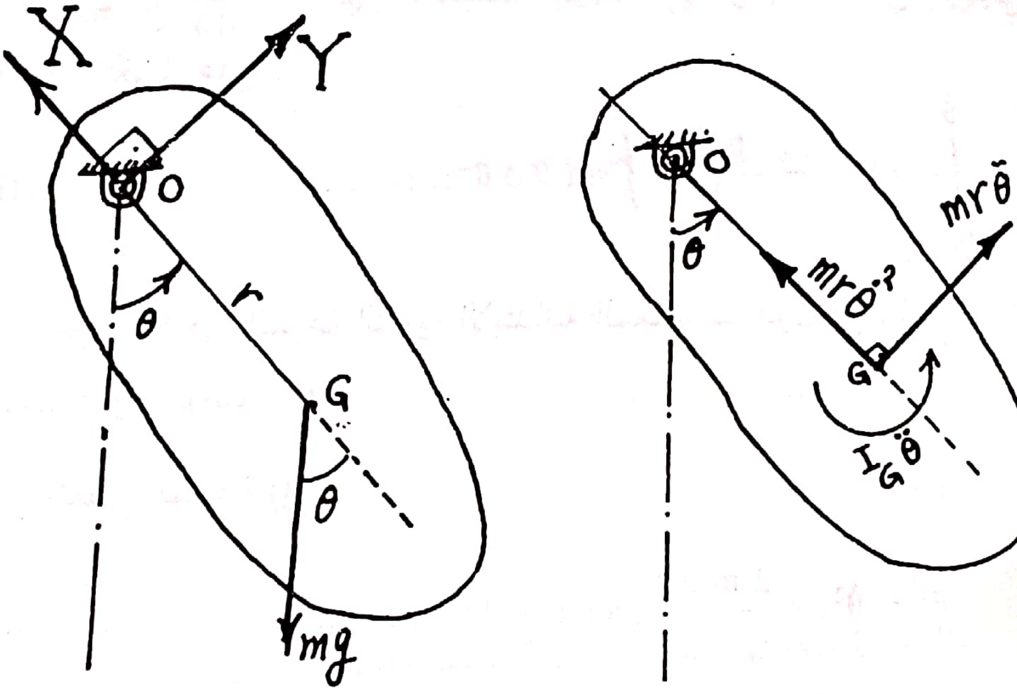
$$V = 2\pi \gamma \sigma h \tan\alpha \qquad (5)$$

البندول المركب ـ الاهتزازات الصغيرة :

البندول المركب هو جسم متماسك قابل للدوران حول نقطة ثابتة فيه . ويطلق على الحركة الدورانية لهذا الجسم حول مركزه الثابت اسم الحركة البندولية .

والحركة البندولية هي إحدى تطبيقات الحركة الدورانية لجسم متماسك حول نقطة ثابتة .

نفرض جسماً متماسك كتلته m يدور حول محور ثابت فيه مثل O ليتخذ وضعاً عاماً يميل فيه الخط المركزي الواصل بين المركز O ومركز ثقل الجسم G زاوية θ على الرأسي المار بنقطة التثبيت O .



القوى الخارجية (أ)　　　　القوى التأثيرية (ب)

شكل (١٦٤)

تتألف القوى الخارجية المؤثرة على البندول من وزنه mg ورد فعل المحور وقد فرض على شكل مركبتين متعامدتين أحدهما X في الاتجاه GO والأخرى في الاتجاه العمودي عليه .

ولوضع القوى التأثيرية توضع أولاً عجلة مركز الثقل G كمركبتين $r\dot{\theta}^2$ في الاتجاه GO والأخرى $r\ddot{\theta}$ في الاتجاه العمودي (للحركة الدائرية لمركز الثقل G حـول O) ثم تضرب كـل من المركبتين في كتلة الجسم m . ويضـاف العزم $I_G\ddot{\theta}$.

بتطبيق قانون معدل التغيـر في كمية الحـركة الـزاوية حـول O (معادلـة العزوم) نحصل على :

$$\sum M_o = I_o \dot{w}$$

$$\therefore -mg\, r \sin\theta = I_o \ddot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{m\, g\, r}{I_o}\sin\theta \quad \text{...(i)}$$

وبوضع $\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}\, d\dot{\theta}}{d\theta}$ في المعـادلة الأخيـرة نحصل بعـد فصل المتغيـرات وإجراء التكامل على :

$$\int_{\dot{\theta}_o}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = -\frac{mgr}{I_o}\int_0^{\theta} \sin\theta\, d\theta \quad \text{..(ii)}$$

حيث $\dot{\theta}_o$ هي السرعة الزاوية الابتدائية المعطاة للبندول في وضـع اتزانـه المستقر (أوطى وضع له) .

وتعطى المعادلة (ii) :

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}^2{}_o + \frac{2\, m\, g\, r}{I_o}(\cos\theta - 1) \quad \text{....................................(iii)}$$

تعين المعادلتان (i) ، (iii) العجلة الزاوية والسرعة الـزاوية للبنـدول في وضع عام له على الترتيب .

لإيجـاد ردود أفعـال المحـور Y و X نـطبق قـانـون التكـافؤ بين القـوى الخارجية والتأثيرية محللاً في :

الاتجاه المركزي $\overrightarrow{GO}$:

$$\therefore X - mg\cos\theta = m\,r\,\dot{\theta}^2$$

$$\therefore X = m\,r\dot{\theta}^2_o + mg\left(1 + \frac{2\,m\,r^2}{I_o}\right)\cos\theta - \frac{2\,m^2\,g\,r^2}{I_o} \quad \ldots\ldots\ldots (iv)$$

الاتجاه المتعامد على $\overrightarrow{GO}$:

$$Y - mg\sin\theta = m\,r\ddot{\theta}$$

$$\therefore Y = mg\left(1 - \frac{mr^2}{I_o}\right)\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots (v)$$

الاهتزازات الصغيرة للبندول المركب :

إذا أزيح البندول المركب إزاحة زاوية صغيرة θ من وضع اتزانه المستقر أمكن تقريب الكمية $\sin\theta$ إلى θ للقيم الصغيرة للزاوية θ :

$$\sin\theta \simeq \theta$$

وبذا تؤول المعادلة (i) للبندول المركب إلى :

$$\ddot{\theta} = -\frac{m\,g\,r}{I_o}\theta$$

أي أن :

$$\ddot{\theta} = -\lambda^2\theta \quad \ldots\ldots\ldots (vi)$$

حيث :

$$\lambda = \sqrt{\frac{m\,g\,r}{I_o}}$$

والمعادلة (vi) تمثل حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري هو ζ حيث :

$$\zeta = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{m\,g\,r}} \quad \ldots\ldots\ldots (vii)$$

ومن المعلوم أن البندول البسيط الذي طول خيطه l يكون زمنه الدوري هو :

$$\zeta = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{(viii)}$$

وعلى ذلك فالبندول البسيط الذي يعطي نفس الزمن الدوري لبندول مركب يجب أن يكون طوله (بمساواة الأزمنة الدورية في المعادلتين الأخيرتين) هو :

$$l = \frac{I_o}{mr}$$

ويسمى هذا البندول البسيط بالبندول المكافىء للبندول المركب وطوله يسمى بطول البندول المكافىء .

خلاصة

١ ـ تتكافأ مجموعتا القوى الخارجية والقوى التأثيرية لجسم متماسك .

٢ ـ تتألف القوى التأثيرية للجسم المتماسك من قوة $m\,\underline{a}_G$ وعزم $I_G\,\dot{\omega}$.

لتعيين مجموعة القوى التأثيرية يراعى أولاً حساب عجلة مركز ثقل الجسم $\underline{a}_G$ والعجلة الزاوية $\dot{\omega}$ للجسم بدراسة كينماتيكا الحركة ثم تضرب $\underline{a}_G$ في الكتلة وتوضع عند مركز ثقل الجسم في شكل القوى التأثيرية ويضاف إليها العزم $I_G\,\dot{\omega}$ في اتجاه $\dot{\omega}$.

٤ ـ يعطي قانون تكافؤ القوى الخارجية والقوى التأثيرية للجسم المتماسك ثلاث معادلات هي معادلتان لتطبيقه محللاً في اتجاهين متعامدين والثالثة هي معادلة تكافؤ العزوم حول نقطة معينة في الجسم .

٥ ـ يستخدم قانون الطاقة لإيجاد سرعة مركز ثقل الجسم أو سرعته الزاوية أو علاقة بينهما لوضع ما للجسم بتطبيقه بين الوضع الابتدائي للجسم وهذا الوضع .

٦ ـ في حالة دوران جسم متماسك حول نقطة ثابتة يراعى أن :

(أ) توضع مركبتي رد الفعل عند النقطة الثابتة في اتجاه مركزي يصل بين مركز ثقل الجسم والنقطة الثابتة والاتجاه العمودي عليه .

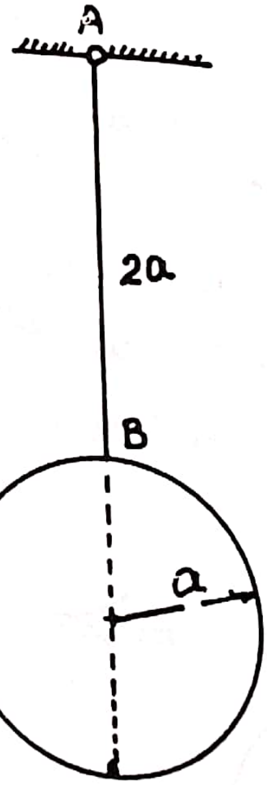
(ب) معدل التغير في كمية الحركة الخطية $m\,\underline{a}_G$ تتألف من مركبتين إحداهما مركزية والأخرى متعامدة .

(جـ) تطبق معادلة العزوم حول النقطة الثابتة ($\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$) .

٧ - يقصد بالاهتزازات الصغيرة للبندول المركب حركته الاهتزازية عندما يعطي إزاحات صغيرة حول وضع اتزانه المستقر .

أمثلة محلولة

١ - بندول مركب يتألف من قضيب منتظم طوله 2a وكتلته m وقرص دائري كتلته m ونصف قطره a معلق من نهاية القضيب في مستوى رأسي في أوطى وضع له . عين أقل سرعة زاوية تعطي للبندول في أوطى وضع له لكي يكمل دورات رأسية كاملة . (شكل ١٦٥) .



شكل (١٦٥)

وإذا أعطى البندول ضعف هذه السرعة في نفس الوضع عين رد الفعل عند نقطة التعليق في الوضع الأفقي للبندول وزمن الاهتزازات الصغيرة وطول البندول البسيط المكافى .

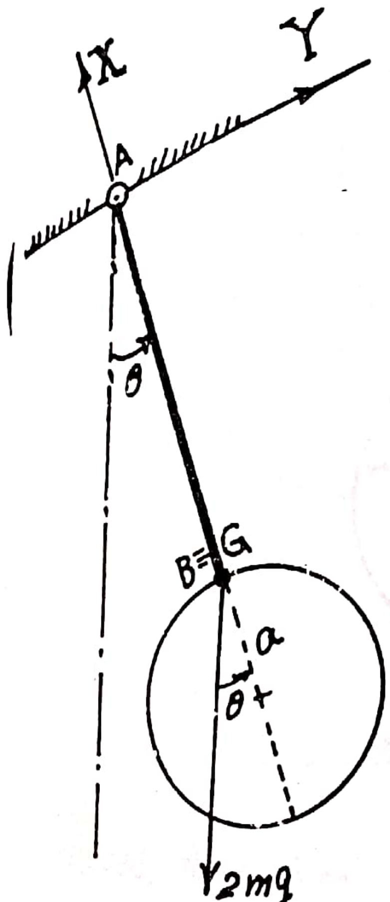
الجواب : أقل سرعة زاوية $\sqrt{\frac{96\ g}{65\ a}}$

وردود الأفعال هي : $X = \frac{1344\ mg}{65}$, $Y = -\frac{34\ mg}{65}$

وزمن الاهتزازات الصغيرة $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{65\ a}{24\ g}}$

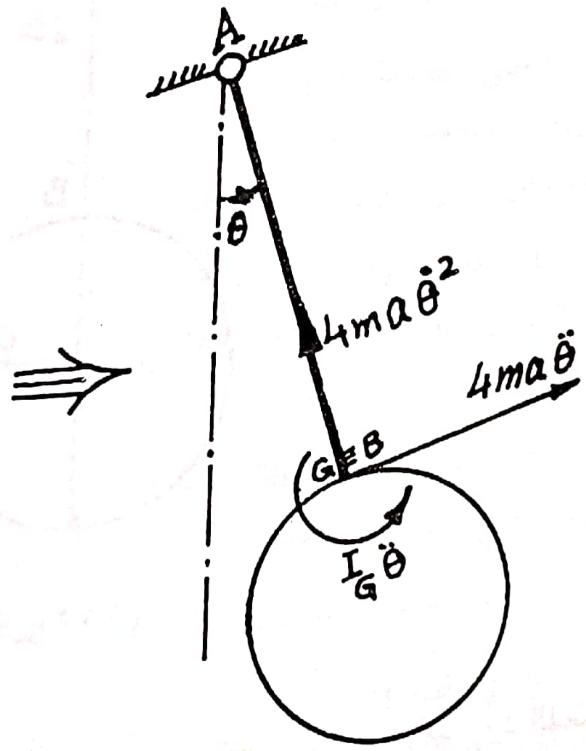
وطول البندول المكافىء $l = \frac{65\ a}{24}$

الحل :



القوى الخارجية

شكل (١٦٦)



القوى التأثيرية

شكل (١٦٧)

بتطبيق قانون كمية الحركة الزاوية حول A :

$$I_A \ddot{\theta} = -4\,mg\,a \sin\theta$$

حيث :

$$I_A = (1/3\,ma^2 + ma^2) + (1/2\,ma^2 + 9\,ma^2) = \frac{65}{6}\,ma^2$$

أي أن :

$$\ddot{\theta} = -\frac{24\,g}{65\,a}\sin\theta \quad \text{.......... (a)}$$

بمكاملة المعادلة (a) بين أوطى موضع والوضع العام نحصل على :

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\frac{24\,g}{65\,a}\int_0^{\theta} \sin\theta\,d\theta$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{48\,g}{65\,a}(\cos\theta - 1) \quad \text{.......... (b)}$$

ولكي يكمل البندول دورات رأسية كاملة يجب أن تزيد سرعته الزاوية عند أعلى موضع $(\theta = \pi)$ عن الصفر وبالتعويض عن $\dot{\theta} > 0, \theta = \pi$ في المعادلة (b) نحصل على الشرط اللازم على النحو الآتي :

$$\dot{\theta}_0^2 > \frac{96\,g}{65\,a} \quad \text{.......... (c)}$$

وتصبح أقل سرعة زاوية عند أوطى موضع تفي بالشرط اللازم هي :

$$\sqrt{\frac{96\,g}{65\,a}}$$

وإذا أعطى البندول ضعف هذه السرعة أي $\dot{\theta}_0 = 2\sqrt{\frac{96\,g}{65\,a}}$ تصير المعادلتان (a) ، (b) على النحو :

$$\ddot{\theta} = -\frac{24\,g}{65\,a}\sin\theta \quad \text{.......... (a')}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{48\ g}{65\ a}(7 + \cos\theta) \quad \text{.......... (b')}$$

ولإيجاد ردود الفعل عند نقطة التعليق في وضع عام نـطبق قانـون تكافؤ القوى الخارجية والتأثيرية وذلك بالتحليل والتكافؤ في الاتجـاه المركـزي AB والعمودي عليه :

$$X - 2mg\cos\theta = ma\,\dot{\theta}^2 \quad \text{.......... (d)}$$

$$Y - 2mg\sin\theta = 4\,ma\,\theta \quad \text{.......... (e)}$$

وبالتعويض من المعادلتين (b′) ، (a′) في المعادلتين (e) ، (d) نحصل على :

$$\therefore X = \frac{2\ mg}{65}(672 + 161\cos\theta) \quad \text{.......... (g)}$$

$$Y = +\frac{34\ mg}{65}\sin\theta \quad \text{.......... (f)}$$

وفي الوضع الأفقي للبندول حيث $\theta = \frac{\pi}{2}$ تعطي ردود الأفعال .

$$X = \frac{1344}{65}\ mg\ ,\ Y = +\frac{34\ mg}{65}$$

وبتقريب المعادلة (a) للزوايا الصغيرة θ نحصل على المعادلة التفاضلية للاهتزازات الصغيرة : ـ

$$\ddot{\theta} = -\frac{24\ g}{65\ a}\theta \quad \text{.......... (h)}$$

ومنها زمن الاهتزازات الصغيرة :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{65\ a}{24\ g}}$$

وطول البندول البسيط المكافىء هو :

$$l = \frac{65}{24}a\ .$$

الحركة الدفعية وتصادم الأجسام (IMPULSE AND COLLISION)

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وفي هذا الباب سنتعرف على نوع آخر من أنواع الحركة تسمى " الحركة الدفعية وتصادم الأجسام ".

الدفع وكمية الحركة– قانون الدفع

إذا بدأنا بقانون نيوتن الأساسي للحركة معوضين عن العجلة بصورتها الاتجاهية نجد أن $F = m\frac{dv}{dt}$ وبضرب طرفي هذه العلاقة في dt وتكاملها بين لحظتين t_1, t_2 تكون سرعة الجسيم فيهما v_1, v_2 على الترتيب فإن :

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv = mv_2 - mv_1$$

يُعرف التكامل الزمني للقوة F بين لحظتين t_1, t_2 الوارد بالطرف الأيسر للمعادلة السابقة بـ دفع القوة خلال الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ ويرمز له بالرمز $\underline{I}$ اختصاراً لكلمة Impulse

أي أن $\underline{I} = \int_{t_1}^{t_2} F dt$. ودفع أي قوة متجه منطبق عليها نظراً لأن الزمن كمية قياسية.

مبدأ ثبوت كمية الحركة

ينص هذا المبدأ على أن كمية الحركة mv في اتجاه خط المركزين ثابتة لا تتغير بعملية التصادم.

قانون نيوتن التجريبي

مركبات السرع في اتجاه خط المركزين تخضع لقاعدة نيوتن التجريبية وتنص على أن السرعة النسبية للجسمين بعد التصادم =معكوس السرعة النسبية لهما قبل التصادم مضروباً في معامل الارتداد e

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

ويطبق هذا القانون في اتجاه خط المركزين ، وتنحصر قيمة معامل الارتداد بين الصفر والواحد يساوى صفر إذا كان الجسمان عديمى المرونة ويساوى واحد إذا كان الجسمان تاما المرونة.

أيضاً حيث أن الكرتين ملساويتان فإنه لا توجد قوة عمودية علـى خـط المركـزين (خـط التصادم) وبالتالي فإنه في حالة التصادم غير المباشر تظل مركبة سرعة كل من الكرتين في اتجاه العمودى على خط المركزين ثابتة لا تتغير.

تصادم الأجسام

عند تصادم جسمان مرنان فإنه يحدث نتيجة لهذا التصادم ردود فعل كبيرة جداً تؤثر على كلا الجسمين لفترة صغيرة ثم يميل بعدها الجسمان للعودة الى حركتهما . وتسمى ردود الأفعال هذه بردود الأفعال الدفعية.

سنعتبر في دراستنا تصادم الأجسام الملساء بحيث أننا سنهمل جميع قوى الأحتكاك ويابقى فقط ردود الأفعال العمودية على الأسطح المشتركة و لسهولة الدراسة سنعتبر تصادم أجسام على هيئة كرات مرنة ملساء كما سنهمل – قوى الأوزان لصغر دفوعهـا– التغير في مواضع الكرات أثناء فترة التصادم باعتبار أن هذه الفترة الزمنية للتـصادم صـغيرة جـداً . أى أن التصادم سوف يغير من سرعات الكرات ولن يغير من مواضعها أثنـاء فـترة حدوثـه. وفي دراستنا سوف نعتبر نوعين من التصادم (تصادم غير مرن ، تصادم مـرن) والتـصادم المرن ينقسم الى التصادم المباشر والتصادم غير المباشر.

التصادم المباشر و غير المباشر (المائل)

نعتبر تصادم كرتين ملساويتين ، الخط الواصل بين المركزين الهندسين للكرتين يـسمى بخط المركزين أو خط التصادم ، وإذا كان التصادم بحيث كانت السرعات قبل التصادم كلـيهما في اتجاه خط المركزين للكرتين سُمي هذا التصادم بـ "التصادم المباشر" أما في حالة التصادم غير المباشر يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كلاهما مائلاً على خط المركزين بزاوية معينـة– نلاحظ أن التصادم المباشر هو حالة خاصة من التصادم غير المباشر–

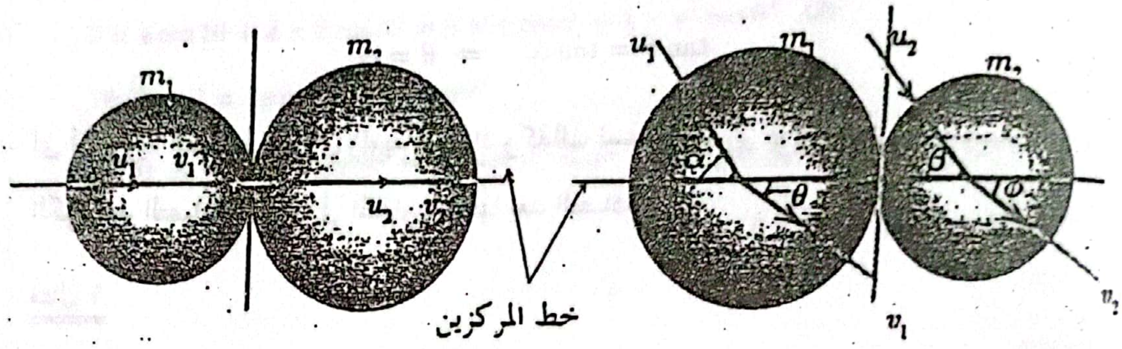
وفي التصادم المرن (المباشر وغير المباشر) يطبق قانونا مبدأ ثبوت كمية الحركة وقانون نيوتن التجريبي. مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية في حالة التصادم المباشر يأخذ الصورة

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

أما في حالة التصادم غير المباشر يكون

$$m_1u_1 \cos\alpha + m_2u_2 \cos\beta = m_1v_1 \cos\theta + m_2v_2 \cos\phi$$

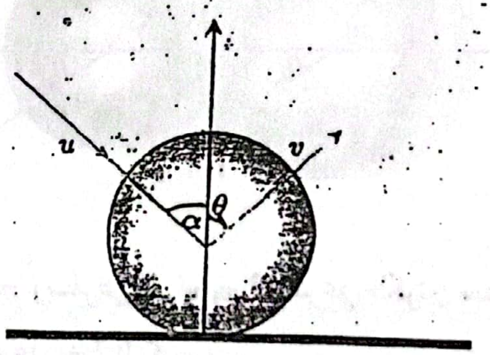
كما أن سرعة أى كرة في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة – لا تتغير – قبل وبعد التصادم.



تصادم مباشر تصادم غير مباشر

تصادم كرة بمستوى ثابت

نفرض كرة ملساء كتلتها m اصطدمت بمستوى ثابت أملس وأن سرعة الكرة قبل التصادم مباشرةً هى u وأن سرعتها بعد التصادم هى v كما بالشكل وظراً لأن كل من الكرة والمستوى أملسين فإن سرعة الكرة في اتجاه المستوى لا تتغيربالتصادم أى أن



$$u \sin\alpha = v \sin\theta \qquad (1)$$

ومن قانون نيوتن التجريبى

$$v \cos\theta = eu \cos\alpha$$

والعلاقتان السابقتان كافيتان لتعيين سرعة الكرة بعد التصادم إذا علمت سرعة الكرة قبل التصادم.

ومن العلاقة الثانية نجد أنه إذا كان $e = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه فى حالة تصادم كرة غير مرنة لا ترتد وإنما تتحرك على المستوى وبسرعة مقدارها $u \sin \alpha$. أما إذا كان $e = 1$ فإنه من قانون نيوتن التجريبي السابق يكون $v \cos \theta = u \cos \alpha$ ومن هذه العلاقة والمعادلة (1) نجد أن

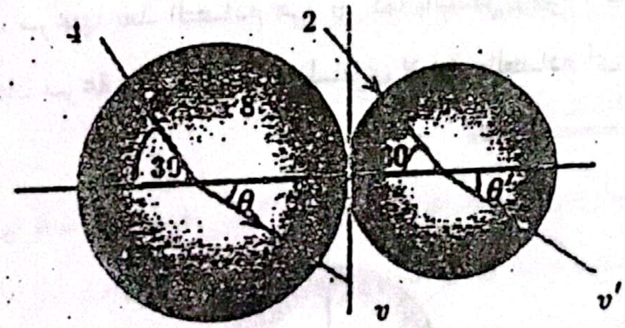
$$\tan \theta = \tan \alpha. \quad \Rightarrow \theta = \alpha$$

أى أن زاوية السقوط تساوى زاوية الأرتداد وكذلك نستنتج أن $v = u$ أى أن سرعة الكرة بعد التصادم تساوى في المقدار سرعتها بعد التصادم.

مثال ١

صدمت كرة ملساء كتلتها $8\ lb$ وسرعتها $4\ ft\sec^{-1}$ كرة أخرى كتلتها $4\ lb$ وسرعتها $2\ ft\sec^{-1}$. وعند لحظة التصادم كانت سرعة الكرة الأولى تميل بزاوية 30^o والثانية بزاوية 60^o على خط المركزين . فإذا عُلم أن معامل الأرتداد هو 0.5 فأوجد سرعتا الكرتين بعد التصادم؟

الحـــل



نفرض أن $m = 8, m' = 4$ وسنفرض أن v, v' هما سرعتى الكرتين بعد التصادم ويميلان بزاويتين θ, θ' على الترتيب على خط المركزين

سرعات الكرتين لا تتغير فى الاتجاه العمودى على خط المركزين

(1) بالنسبة للكرة الأولى

$$4 \sin 30 = v \sin \theta, \quad \Rightarrow v \sin \theta = 2$$

(2) بالنسبة للكرة الثانية $2\sin 60 = v'\sin\theta', \quad \Rightarrow v'\sin\theta' = \sqrt{3}$

قانون نيوتن التجريبي ويطبق في اتجاه خط المركزين

$$v\cos\theta - v'\cos\theta' = -\frac{1}{2}\left(4\cos 30 - 2\cos 60\right) \quad Or$$

$$v\cos\theta - v'\cos\theta' = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \qquad (3)$$

قانون ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط المركزين قبل وبعد التصادم للكرتين

$$8\times 4\cos 30 + 4\times 2\cos 60 = 8\times v\cos\theta + 4\times v'\cos\theta' \quad Or$$

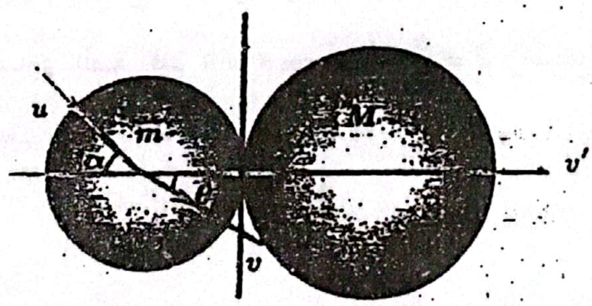
$$16\sqrt{3} + 4 = 8v\cos\theta + 4v'\cos\theta' \qquad (4)$$

المعادلات الأربع السابقة كافية لحل المسألة حيث أنه لدينا أربعة مجاهيل v, v', θ, θ' (وعلى الدارس أن يستكمل الأجابة...)

مثال ٢

كرة كتلتها m تصطدم تصادماً غير مباشر مع كرة أخرى كتلتها M في حالة سكون. اثبت أنه إذا كان $m = eM$ حيث e معامل الأرتداد فإن اتجاهي سرعة الكرتين بعد التصادم متعامدان ؟

الحـــل



نفرض أن سرعة الكرة الأولى والتي كتلتها m قبل التصادم هي u وتميل بزاوية α على خط المركزين وأن سرعتها بعد التصادم v وتميل بزاوية θ ، وسرعة الكرة الثانية والتي كتلتها M بعد التصادم v' وتميل بزاوية ϕ على خط المركزين – لاحظ أن سرعتها قبل التصادم صفر.

وحيث أن سرعة أي كرة في الاتجاه العمودي على خط المركزين تظل ثابتة قبل وبعد التصادم أي أن

بالنسبة للكرة الأولى $u\sin\alpha = v\sin\theta$

بالنسبة للكرة الثانية $v'\sin\phi = 0$

ومن المعادلة الثانية نستنتج أن $\sin\phi = 0. \Rightarrow \phi = 0$ أي أن الكرة الثانية تتحرك في اتجاه خط التصادم

ومن قانون نيوتن التجريبي نجد أن

$$v\cos\theta - v'\cos\phi = -e\left(u\cos\alpha - 0\right) \qquad (1)$$

لاحظ الصفر في المعادلة السابقة يمثل سرعة الكرة الثانية قبل التصادم . ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط المركزين نحصل على

$$e\mathcal{M}u\cos\alpha = e\mathcal{M}v\cos\theta + \mathcal{M}v'\cos\phi.$$

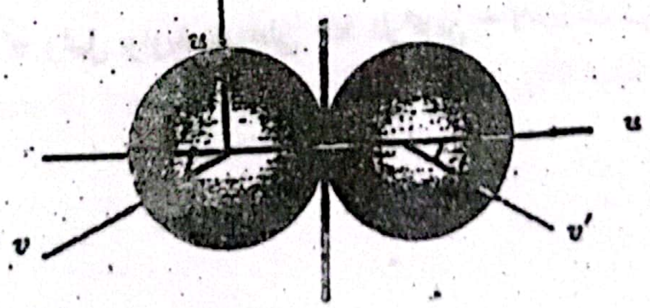
$$\therefore\quad eu\cos\alpha = ev\cos\theta + v'\cos\phi \qquad (2)$$

ومن المعادلتين (1) و (2) – بالجمع – نحصل على $v(1+e)\cos\theta = 0$ وحيث أن المقدار $v(1+e)$ لا يساوي الصفر فإن $\cos\theta = 0$ أي أن $\theta = \frac{\pi}{2}$ ونستنتج من ذلك أن اتجاها سرعتي الكرتين بعد التصادم متعامدان.

<u>مثال ٣</u>

تصطدم كرتان متساويتان تتحركان بنفس السرعة وفي اتجاهين متعامدين . إذا كان خط المركزين لحظة التصادم عمودياً على اتجاه الكرة الثانية وكان معامل الارتداد هو e فاثبت أن الكرة الثانية تنحرف بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ عن الاتجاه الأصلي ؟

الحل



نفرض أن v, v' يمثلا سرعتى الكرتين بعد التصادم وأنهما يصنعان مع خط التصادم زاويتين θ, θ' على الترتيب – مع العلم ان سرعتى الكرتين قبل التصادم وليكن u وانهما متعامدتان– كما بالشكل

من ثبوت مركبات السرعة في الاتجاه العمودى على خط التصادم نجد أن (لاحظ أن مركبة الكرة الأولى العمودية تنعدم)

$$v \sin \theta = 0. \qquad v' \sin \theta' = u \qquad (1)$$

ونلاحظ من المعادلة الأولى أن $\theta = 0$ وهذا يعنى أن الكرة الأولى تواصل حركتها فى اتجاه خط التصادم

من قاعدة ثبوت كمية الحركة الخطية في اتجاه خط المركزين

$$\cancel{m}u + 0 = \cancel{m}v \cos \theta + \cancel{m}v' \cos \theta'.$$

$$\therefore \quad u = v + v' \cos \theta' \qquad (2)$$

وبتطبيق قانون نيوتن التجريبي نجد أن

$$v \cos \theta - v' \cos \theta' = -e(u - 0)$$

أو

$$v - v' \cos \theta' = -eu$$

ومن المعادلة الأخيرة والمعادلة (2) نجد أن – بالطرح–

$$2v' \cos \theta' = (1 + e)u$$

ومن ثانية المعادلة (1) والمعادلة الأخيرة – بالقسمة – نجد أن $\tan \theta' = \dfrac{2}{1+e}$ – لاحظ أن انحراف الكرة عن اتجاهها الأصلي هو $\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta'\right)$ ولكن

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \cot \theta' = \frac{1+e}{2}$$

أي أن انحراف الكرة الثانية عن اتجاهها الأصلي يتعين من

$$\frac{\pi}{2} - \theta' = \tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

مثال ٤

كرة ملساء تتحرك بسرعة $20\ ft\,sec^{-1}$ أصطدمت بمستوى أفقي أملس ثابت وفي اتجاه يصنع زاوية $60°$ مع المستوى فإذا كان معامل الأرتداد يساوي $\frac{1}{2}$ فأوجد سرعة الكرة واتجاهها بعد التصادم؟

الحـــل

نفرض أن سرعة الكرة التي سترتد بها عن المستوى هي v وتصنع زاوية α مع العمودي على المستوى (كما بالشكل)، حيث أن مركبة الكرة في محازاة المستوى لا تتغير فإن

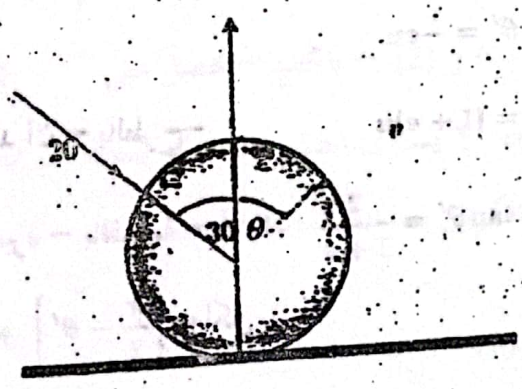
$$v\sin\alpha = 20\cos 60 = 10$$

ومن قانون نيوتن التجريبي نحصل على $v\cos\alpha = -e\left(-20\sin 60\right) = 5\sqrt{3}$ ومن العلاقتين السابقتين – بالتربيع والجمع – نحصل على

$$v^2 = 175 \Rightarrow v = 5\sqrt{7}\ ft\,sec^{-1}$$

وأيضاً بقسمة العلاقتين

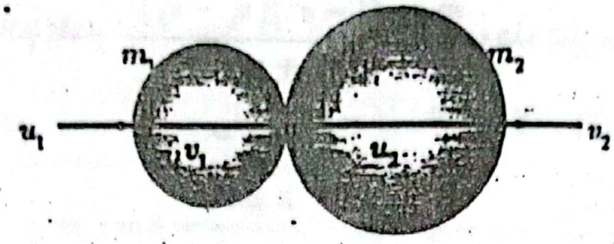
$$\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}, \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



مثال ٥

اثبت أنه في حالة التصادم المباشر يكون مقدار الفقد في طاقة الحركة مساوياً $\frac{\left(1-e^2\right)m_1 m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(u_1-u_2\right)^2$ حيث m_1, m_2 تمثل كتلتا الكرتين و u_1, u_2 سرعتيهما قبل التصادم و e معامل الأرتداد؟

الحــل



من مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية يكون

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (1)$$

حيث افترضنا أن سرعات الكرات بعض التصادم هي v_1, v_2

من قانون نيوتن التجريبي نحصل على

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

الآن بتربيع المعادلة (1) ، (2) وتربيع المعادلة وضربها في m_1m_2 ثم الجمع نحصل على

$$(m_1v_1 + m_2v_2)^2 + m_1m_2(v_1 - v_2)^2 = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

باضافة وطرح $m_1m_2(u_1 - u_2)^2$ الى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة نجد أن

$$(m_1 + m_2)(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) = (m_1u_1 + m_2u_2)^2 + m_1m_2(u_1 - u_2)^2 - m_1m_2(u_1 - u_2)^2 + m_1m_2e^2(u_1 - u_2)^2$$

أى أن

$$(m_1 + m_2)(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) = (m_1 + m_2)(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ نحصل على

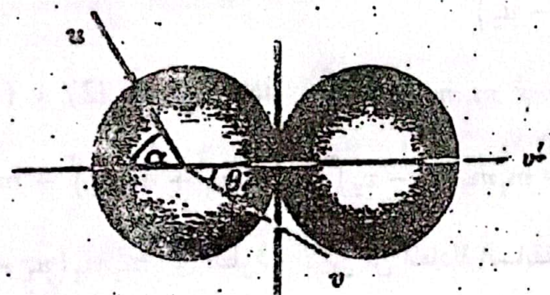
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{m_1m_2(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

من هذه المعادلة يتضح أن مجموع طاقتي حركة الكرتين بعد التصادم أقل من مجموع طاقتي حركة الكرتين قبل التصادم بمقدار $\dfrac{m_1 m_2 (1-e^2)(u_1-u_2)^2}{2(m_1+m_2)}$ وهذا يمثل مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.

مثال ٦

اصطدمت كرة بكرة أخرى ساكنة مساوية لها في الكتلة تصادماً مائلاً . إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع مع خط المركزين زاوية α . وكان e هو معامل الارتداد فاثبت أن اتجاه هذه الكرة بعد التصادم يصنع زاوية مع خط المركزين تتعين من $\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan\alpha}{1-e}\right)$ ؟

الحـــل



من مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية فإن

$$\cancel{m} v\cos\theta + \cancel{m} v' = \cancel{m} u\cos\alpha + 0$$

$$\therefore v\cos\theta + v' = u\cos\alpha \qquad (1)$$

حيث كما رأينا سابقاً فإن سرعة الكرة الساكنة بعد التصادم تكون في اتجاه خط التصادم ، ومن قانون نيوتن التجريبي فإن

$$v\cos\theta - v' = -e\left(u\cos\alpha - 0\right) \qquad (2)$$

وبجمع المعادلتين (1) ، (2) نحصل على

$$2v\cos\theta = (1-e)u\cos\alpha \qquad (3)$$

وحيث أن مركبة السرعة في اتجاه العمودى على خط المركزين لا تتغير فإن

$$v\sin\theta = u\sin\alpha \qquad (4)$$

ومن المعادلتين (3) ، (4) – بالقسمة – نحصل على

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\tan\alpha}{1-e}. \qquad \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\tan\alpha}{1-e}. \qquad Or \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\alpha}{1-e}\right)$$

وهو المطلوب اثباته.

الخلاصة

- [illegible] $\underline{I} = m\underline{v}_2 - m\underline{v}_1$
- [illegible]

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

- [illegible]
- [illegible]

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

- [illegible]
- [illegible] $e = 1$

تمـــارين

(١) كرتان متساويتان في الكتلة تتحرك إحداهما بسرعة u حين أصطدمت تصادماً غير مباشر مع الكرة الأخرى والتي كانت ساكنة لحظة التصادم وكان اتجاه خط الصدمة يصنع زاوية α مع خط المركزين . فإذا كان معامل الأرتداد هو e فاثبت أن اتجاه حركة الكرة المتصادمة ينحرف بزاوية θ تتعين من العلاقة $\tan\theta = \dfrac{(1+e)\tan\alpha}{(1-e)+2\tan^2\alpha}$؟

(٢) أصطدمت كرة ملساء بأخرى ساكنة . إذا كان اتجاها الحركة بعد التصادم متعامدين وكانت الكرتان تامتي المرونة فاثبت أن كتلتيهما متساويتان؟

(٣) تتحرك كرة ملساء كتلتها m بسرعة u . أصطدمت تصادماً مائلاً مع كرة أخرى ملساء ساكنة كتلتها M . اثبت أن اتجاه حركة الكرة الأولى سوف ينحرف بزاوية قائمة إذا تحقق الشرط $\tan^2\alpha = \dfrac{Me-m}{M+m}$ حيث α هي زاوية ميل سرعة الكرة الأولى مع خط المركزين . e معامل الأرتداد؟

(٤) كرتان متساويتان تامتا المرونة تصادمتا وكان اتجاها الحركة قبل التصادم متعامدين اثبت أن اتجاهي الحركة بعد التصادم ايضاً متعامدان ؟

(٥) اصطدمت كرة تصادماً مائلاً مع كرة أخرى ساكنة ولها نفس الكتلة فوجد أن اتجاهي سرعتي الكرتين بعد التصادم متعامدين. أثبت أن التصادم تام المرونة؟

(٦) كرة كتلتها mn وسرعتها $\frac{u}{a}$ أصطدمت بكرة أخرى كتلتها m وسرعتها u وكانت السرعتان في نفس الاتجاه (تصادم مباشر). إذا وقفت الكرة الثانية بعد التصادم فأثبت أن معامل الأرتداد e يساوي $\dfrac{n+a}{na-n}$؟

(٧) تتحرك كرتان متساويتان في الكتلة في اتجاهين متضادين بسرعتين متساويتين فإذا كانت زوايا ميل اتجاه الحركة على خط المركزين يساوي 30° ومعامل الأرتداد يساوي $\frac{1}{3}$ فاثبت أن

اتجاهي حركتيهما يدوران زاوية قائمة؟

(٨) أوجد طاقة الحركة المفقودة في حالة التصادم غير المباشر؟

(٩) كرتان متساويتان في الكتلة تتحرك إحداهما بسرعة u حين أصطدمت تصادماً غير مباشر مع الكرة الأخرى والتي كانت ساكنة لحظة التصادم. إذا كان اتجاه سرعة الكرة المتحركة يصنع زاوية $60''$ مع خط المركزين ، فإذا كان معامل الأرتداد هو e فاثبت أن اتجاه حركة هذه الكرة ينحرف عن اتجاهها قبل التصادم بزاوية تتعين من العلاقة $\tan^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{7-e}\right\}$؟

اختبر نفسك

كتلتان m_1, m_2 تتحركان في نفس خط التصادم. أوجد سرعتي الجسيمين بعد التصادم بدلالة سرعتيهما قبل التصادم إذا كان معمل الارتداد e؟

الحـــل