محاضرات
في
الـهـنـدسـة الـتـحـلـيـلـيـة
(المستوى الثاني)

إعداد
قسم الرياضيات ـ كلية العلوم بقنا
جامعة جنوب الوادي

بسم الله الرحمن الرحيم

- مقدمة:

الحمد لله الذي علم بالقلم،علم الإنسان مالم يعلم،والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد ﷺ وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد ٠٠٠

الهندسة هي علم دراسة خصائص الشكل (أبعاد – أركان – زوايا – ٠٠٠).

وتُعتبر الهندسة من أقدم العلوم الرياضية على الاطلاق ثم يليها علم الجبر.

وأول من مارس الهندسة هم قدماء المصريين ثم الرومان ثم العرب ، ويُعتبر العلامة **عمر الخيام (١٠٤٢-١١٢٣م)** أول من أسس علم الهندسة من علماء المسلمين الأوائل.

والممارسة الحقيقية للهندسة تتمثل الآن فيما يُسمى بالهندسة الوصفية ، أما الهندسة التحليلية فتتمثل في تحليل الخصائص الهندسية باستخدام علم الجبر. فمثلاً النقطة وهي اللبنة الصغرى في بناء الشكل الهندسي يُستعاض عنها بكميات عددية تُسمى احداثيات النقطة ، والخط المستقيم يُعبر عنه بمعادلة جبرية في متغيرين إذا كان الخط المستقيم يقع في المستوى ، ويُعبر عنه بمعادلتين في ثلاث متغيرات إذا كان الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي ، والدائرة والقطع المخروطي يُستعاض عنهما بمعادلة جبرية من الدرجة الثانية في متغيرين ، وهكذا ٠٠٠

وكما نعلم فإن ممارسة الهندسة بالعين المجردة (كما كان في القديم) عملية مضنية وشاقة ، وكما إن جُل أو معظم الأشكال الهندسية في الكون غير مستوية لذلك لجأ الانسان منذ القدم إلى صُنع أشكال مستوية يقيس بها مثل المستقيم – المثلث – المربع – المستطيل – الدائرة – القطوع المخروطية – الأسطوانة - الكرة – ٠٠٠

ومن ثم وُضعت القوانين الخاصة بهذه الأشكال الهندسية.

ونقدم هذه المذكرة والتي تشـتمل على مجموعة المحاضرات في الهندسـة التحليلية في المستوى ، والتي قمت بتدريسـها في الجامعات والمعاهد وهي مقسـمة إلى أربعة أبواب.

تناولنا في الباب الأول نظام الإحداثيات في المسـتوى (الإحداثيات الكارتيـزية والإحداثيات القطبية والعلاقة بينـهما) ، والمعادلات القطبية للخط المستقيم وللدائرة في المستوى ، وفي الباب الثاني تناولنا تغيير المحاور في المستوى (نقل ودوران المحاور) ،
وفي الباب الثالث تناولنا شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في المتغيرين x,y خطين مستقيمين ، ومعادلة أي خط مسـتقيم يمر بنقطة تقاطع خطين مسـتقيمين معلومين ، وأقصر بُعد بين مسـتقيمين متوازيين في المستوى ، الزاوية المحصورة بين المسـتقيمين اللذين تمثلهما المعادلة المتجانسـة $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ، ومعادلة الخطين المسـتقيمين المنصـفين للزاويتين بين الخطين الممثلين بالمعادلة المتجانسـة $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.
وفي الباب الرابع تناولنا القطوع المخروطية وصفاتها (القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد) .

ونسأل الله عز وجل أن ينفعنا بما علمنا وأن يعلمنا مـا ينفعنـا ، وأن يجعـل أعمالنـا خالصـة لوجهـه الكـريم ، وأخـر دعوانـا أن الحمـد لله رب العالمين.

د. سعد شرقاوي
عضو هيئة التدريس بقسم الرياضيات
كلية العلوم بقنا
جامعة جنوب الوادي

▪ المحتويات:

▪ الباب الأول (الهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد):

طرق تعيين النقطة في الفضاء الثلاثي (الإحداثيات الكرتيزيةوالإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الكرية) – المساقط - البعد بين نقطتين-نقطة التقسيم - زوايا الاتجاه - الزاوية بين مستقيمين - نسب اتجاه العمودي على مستقيمين معلومين.

▪ الباب الثاني (المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي):

المستوى في الفضاء الثلاثي -الزاوية بين مستويين - معادلة المستوى المار بثلاث نقاط معلومة - معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من المحاور - معادلة المستوى في الصورة العمودية - طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة - المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين - معادلة أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين - وضع ثلاث مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي - الصورة العامة لمعادلات الخط المستقيم - معادلات الخط المستقيم بدلالة نسب اتجاهه ونقطة عليه - معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين - طول العمود النازل من نقطة على مستقيم- تقاطع مستقيمين -معادلة الكرة - العمودي على سطح الكرة- المستوى المماس للكرة - طول المماس المرسوم للكرة - المستوى الأساسي لكرتين-تقاطع كرتين.

▪ الباب الثالث(نظرية السطوح في الفضاء الثلاثي):

السطوح الجبرية – السطوح الأسطوانية والمخروطية والدورانية.

الباب الأول
الهندسة التحليلية فى ثلاثة أبعاد
١ ـ طرق تعيين النقطة فى الفضاء الثلاثي:

رأينا في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد تماماً بواسطة كميتين عدديتين وهذا هو السبب في أن الهندسة التحليلية المستوية تُسمى بالهندسة التحليلية في بعدين.

ولتحديد موضع النقطة في الفضاء الثلاثي يلزمنا ثلاث كميات عددية، ولذلك فإن الهندسة التحليلية الفراغية تسمى أيضاً بالهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد.

رأينا أيضاً في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد بطريقتين إحداهما طريقة الإحداثيات الكرتيزية (x, y) حيث $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$

والثانية طريقة الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث $o \le r < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi$

والعلاقة بين (x, y) ، (r, θ) تكون كما يلي:

$$x = r\cos\theta.$$
$$y = r\sin\theta.$$

أو تكون:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

أما في الفضاء الثلاثي فتوجد ثلاث طرق مختلفة ـ ولكنها أيضا مرتبطة- سنوضحها فيما يلي:

▪ **الطريقة الأولى: الإحداثيات الكرتيزية (x, y, z)**

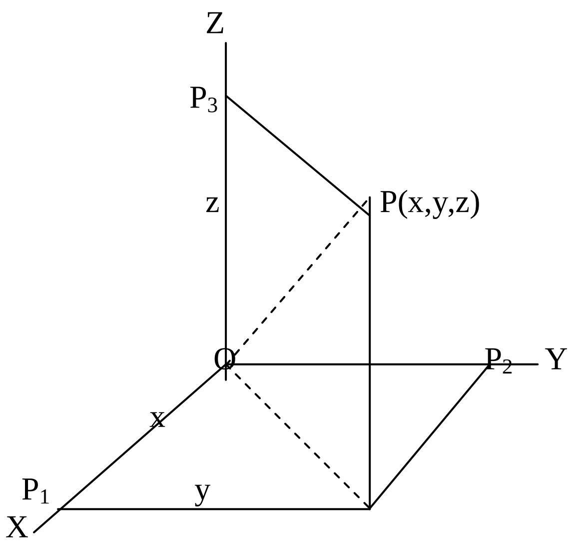
من نقطة الأصل O في الفضاء الثلاثي نرسم ثلاث مستقيمات OX, OY, OZ
بحيث يكون كل اثنان منهما متعامدان.
تُسمى المستقيمات OX, OY, OZ محاور الإحداثيات فإذا تخيلنا الرسم
فإن محاور الإحداثيات الثلاث تقسّم الفضاء الثلاثي إلى ثمانية مناطق كما يلي:

المنطقة الأولى	$X > 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة الثانية	$X > 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة الثالثة	$X > 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الرابعة	$X > 0, Y < 0, Z < 0$
المنطقة الخامسة	$X < 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة السادسة	$X < 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة السابعة	$X < 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الثامنة	$X < 0, Y < 0, Z < 0$

وعلى ذلك فإن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط.
وبفرض P نقطة في الفضاء الثلاثي ، نوجد مساقطها على المحاور OX, OY, OZ ولتكن على الترتيب P_1, P_2, P_3 واضح أن النقط P_1, P_2, P_3 تتحدد تماما بالنقطة P
وبالتالى فإن $x = OP_1, y = OP_2, z = OP_3$ وتُسمى الكميات x, y, z بإحداثيات النقطة P في الفضاء الثلاثي ويُرمز لها بالرمز P(x,y, z) ، وكذلك العكس صحيح

أي أنه إذا عرفنا الإحداثيات (x, y, z) فإنه يمكن تحديد النقطة p التي لها هذه الإحداثيات تحديداً تاماً بمعنى أنه توجد نقطة واحدة فقط p إحداثياتها x, y, z .

انظر الشكل التالي:



ملاحظة: واضح أن محاور الإحداثيات OX, OY, OZ تكوّن في الفضاء ثلاث مستويات XOY, YOZ, ZOX تُسمى هذه المستويات بمستويات الإحداثيات

ويُطلق على المستوى XOY بالمستوى $z = 0$ والمستوى YOZ بالمستوى $x = 0$ والمستوى ZOX بالمستوى $y = 0$.

بينما على المحور OX تكون $y = 0, z = 0$ وعلى المحور OY تكون $x = 0, z = 0$ وعلى المحور OZ تكون $x = 0, y = 0$.

وكما ذكرنا سابقا أن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط:

- ثلاث نقاط بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ
- وثلاث نقاط بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY, YOZ, ZOX
- ونقطة واحدة بالنسبة لنقطة الأصل (القطب) O .

مثال(١): أوجد النقط المتماثلة الوضع مع النقطة (a, b, c) بالنسبة:

١ ـ لمحاور الإحداثيات.

٢- لمستويات الإحداثيات.

٣ ـ لنقطة الأصل (القطب) O .

الحل:

١- النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ

تكون (a, -b, -c) , (-a, b, -c) , (-a, -b, c) على الترتيب.

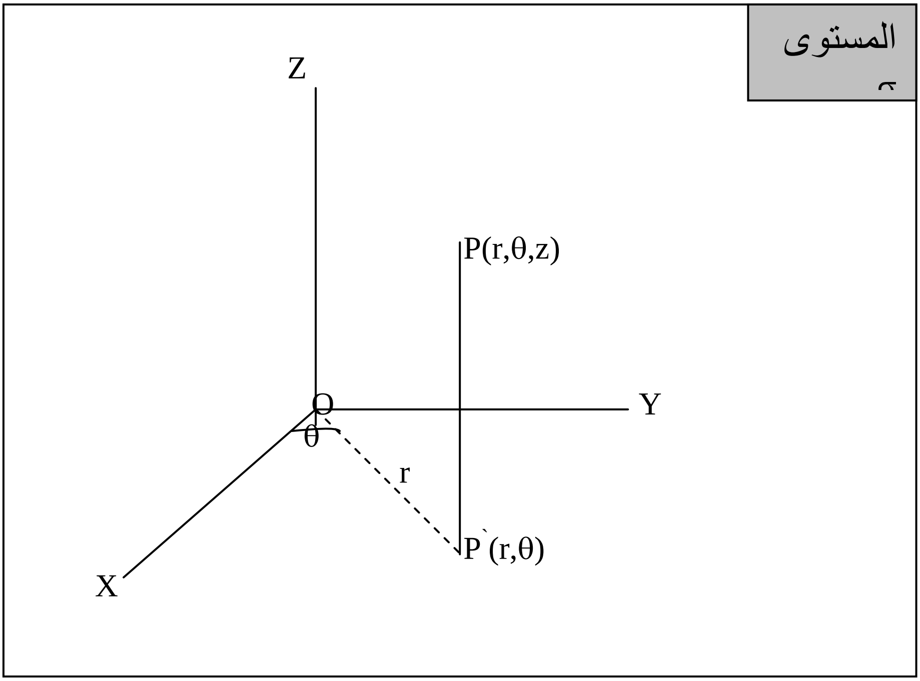
٢- النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY,YOZ,ZOX

تكون (a, b, -c) , (-a, b, c) , (a, -b, c) على الترتيب.

٣- النقطة المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة للقطب O تكون (-a, -b, -c)

▪ **الطريقة الثانية: الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z)**

نفرض أن لدينا مستوى ما وليكن σ محدد به مجموعة إحداثيات قطبية (قطب O وخط ابتدائي OX) وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي نحسب الكميات r, θ, z حيث r, θ الإحداثيات القطبية لمسقط P على المستوى σ والمقدار z هو بعد النقطة P عن المستوى σ

حيث $0 \le r < \infty, \ 0 \le \theta \le 2\pi , - \infty < z < \infty$

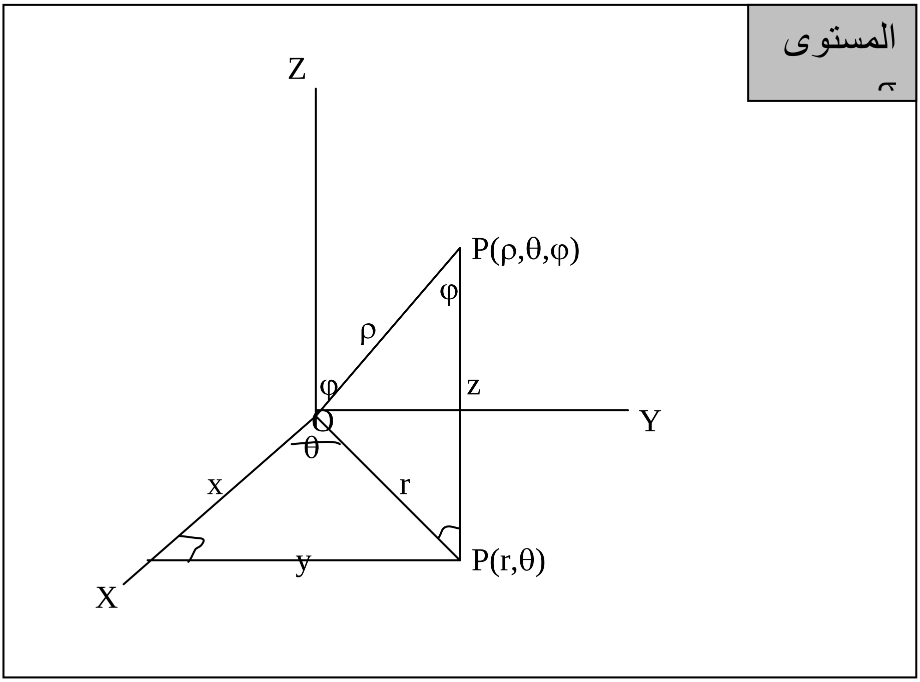
وتُسمى الكميات الثلاثة r, θ, z بالإحداثيات الأسطوانية للنقطة P ويُرمز لها بالرمز $P(r, \theta, z)$.

تُفضل الإحداثيات الأسطوانية لدراسة السطوح في الفضاء الثلاثي وذلك عندما تكون مقاطع هذه السطوح بمستويات توازي المستوى σ عبارة عن منحنيات معادلاتها معطاة بالإحداثيات القطبية أنسب للدراسة عما لو كانت هذه المعادلات معطاة بالإحداثيات الكارتيزية.

▪ **<u>الطريقة الثالثة: الإحداثيات الكريه (ρ, θ, φ)</u>**

تتحدد هذه الإحداثيات أيضاً كما في حالة الإحداثيات الأسطوانية فإذا كان لدينا مستوى ما σ محدد عليه مجموعة إحداثيات قطبية (قطب O وخط ابتدائى OX)

وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي يمكن أن تحدد تحديداً تاماً الكميات ρ, θ, φ حيث $0 \le \rho < \infty , 0 \le \theta \le 2\pi , 0 \le \varphi \le 2\pi$

وتُسمى الكميات ρ,θ,φ بالإحداثيات الكريه للنقطة P ويرمز لها بالرمز $P(\rho, \theta, \varphi)$ والعكس صحيح أي أن الكميات ρ,θ,φ تحدد نقطة وحيدة في الفضاء الثلاثي.

▪ **العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية والأسطوانية والكريه:**

لتكن P نقطة ما في الفضاء الثلاثي فإن إحداثياتها الكارتيزية (x,y,z) وإحداثياتها الأسطوانية هي (r, θ, z) وإحداثياتها الكريه هي (ρ,θ,φ) ومن الرسم السابق يتضح أن:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (1).$$

$$r = \rho\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi \qquad (2).$$

العلاقة (1) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كرتيزية.

والعلاقة (2) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (1) نستنتج أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (3).$$

العلاقة (3) تحول الإحداثيات الكرتيزية إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (2) نستنتج أن:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}\ , \ \ \varphi = \tan^{-1}\frac{r}{z} \qquad (4).$$

العلاقة (4) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كريه.

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$\mathbf{x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi. \qquad (5).}$$

العلاقة (5) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات كرتيزيه.

وبالتعويض من (3) في (4) نحصل على:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad (6).$$

العلاقة (6) تحول الإحداثيات الكرتيزيه إلى إحداثيات كريه.

مثال(٢): إذا كانت $(1,-\sqrt{3},2)$ هي الإحداثيات الكرتيزية لنقطة في الفضاء الثلاثي.
فأوجد إحداثياتها الأسطوانية والكريه.
الحل:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\theta=\tan^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1})=-\frac{\pi}{3}.$$

(حيث θ تقع في الربع الرابع من المستوىXOY).

∴ الإحداثيات الأسطوانية للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2,-\frac{\pi}{3},2)$.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+3+4}=2\sqrt{2},$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan^{-1}\frac{2}{2}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

∴ الإحداثيات الكريه للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

مثال(٣): أوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX

مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

الحل:

نوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}) \equiv (\rho,\theta,\varphi)$

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta = (2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2}) = 1$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta = (2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$$

$$z = \rho\cos\varphi = (2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2$$

$\therefore$ الإحداثيات الكرتيزيه للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX

مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$ تكون $(1,-\sqrt{3},2)$.

مثال(٤): حول المعادلة $\rho^2 (1+3 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) = 4$ إلى الصورة الكارتيزية.

الحل:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[1+3\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right] = 4$$

$$\therefore \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4} = 1.$$

تماريــن

١ ـ أوجـد الإحداثيـات الكرتيزية للنقطـة المتماثلة بالنسـبة للقطب مع كل من النقط الآتية:

$$P_1(2,\frac{-\pi}{2},0),\; P_2(1,\frac{-\pi}{3},1),\; P_3(3,\frac{\pi}{4},1)$$

٢ ـ أوجد الإحداثيـات الكريه للنقطة المتماثلة بالنسـبة للمحور OX مع كل من النقط الآتية:

$$P_1(-1,\sqrt{3},-2)\;,\; P_2(\sqrt{3},1,\;2).$$

٣ ـ حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الأسطوانية ثم إلى الصورة الكريه

(i) $x^2 + y^2 = 6.$ (ii) $xy = z.$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 16.$ (iv) $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4.$

(v) $x^2 + y^2 = 8\,xy.$ (vi) $x^2 + y^2 - \frac{1}{2} z^2 = 0.$

(vii) $x^2 + y^2 + z^2 = 6z.$

٤ ـ حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية.

(i) $z \sin\theta = r.$ (ii) $z^2 \cos\theta = r^2.$

(iii) $r = a(1 - \cos\theta).$ (iv) $y = z(1 + \cos\theta).$

(v) $\rho = a \cot\varphi / \cos\varphi.$ (vi) $\rho = z\, a \sin\theta \sin\varphi.$

----

٢ ـ المساقط:

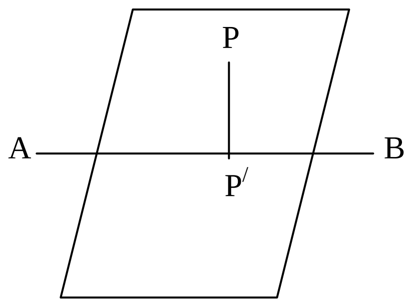
أ ـ مسقط نقطة في الفضاء الثلاثي:

١ ـ لإيجاد مسقط نقطة ما P في الفضاء الثلاثي على المستقيم AB نرسم المستوى σ المار بالنقطة P وعموديا على AB انظر (شكل١).

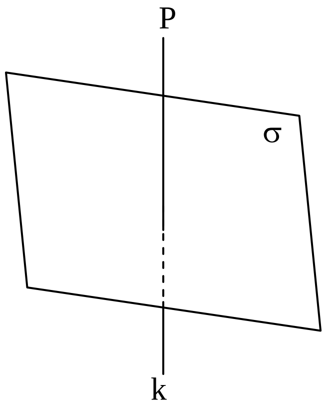
فتكون $P^{/}$ نقطة تقاطع المستوى σ مع AB هى مسقط P على AB.

٢ ـ ولإيجاد مسقط نقطة P على المستوى σ نرسم من P مستقيم PKعمودياً على المستوى σ فتكون نقطة تقاطع العمود PK مع المستوى σ هى مسقط P

على المستوى σ انظر (شكل٢).



(شكل١)

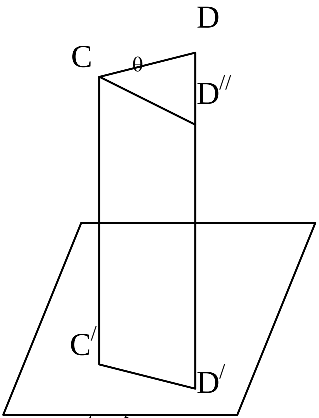


(شكل٢)

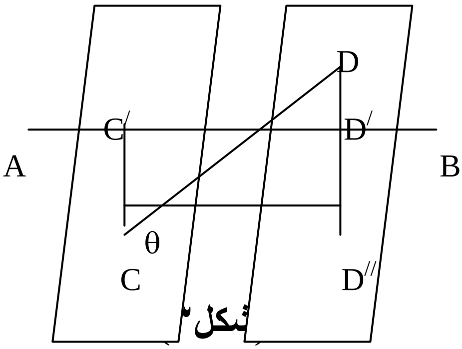
ب ـ مسقط مستقيم في الفضاء الثلاثي:

١ـ مسقط المستقيم CD على المستقيم AB هو الجزء $C'D'$ من المستقيم AB حيث C', D' هما مسقط C, D على المستقيم AB على الترتيب انظر (شكل٣).

٢ـ وبالمثل مسقط المستقيم CD على المستوى σ هو المستقيم $C'D'$ حيث C', D' هما مسقط كل من C, D على المستوى σ على الترتيب انظر (شكل٤).



(شكل٤)



(شكل٣)

في (شكل٣) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيمين الغير مستوين AB, CD فإن θ تقاس بالزاوية بين مستقيمين مرسومين من أي نقطة موازيين لـ AB, CD ولذلك نرسم من C مستقيم $CD'' // AB$ كما بالرسم.

$\therefore\ CD'' = C'D' = CD\ \cos\theta.$ (1)

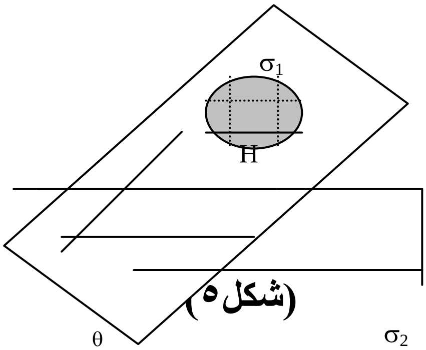
وفي (شكل٤) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيم CD والمستوى σ أي بين المستقيم CD ومسقطه $C'D'$ ثم رسمنا $CD'' // C'D'$ ويقطع DD' في C''

$\therefore\ C'D' = CD'' = CD\cos\theta.$ (2)

من (1),(2) يتضح أن طول مسقط المستقيم CD على المستقيم AB (على المستوى σ) يكون مساوياً لحاصل ضرب CD في جيب تمام الزاوية بين CD والمستقيم AB (أو المستوى σ).

ج – مسقط مساحة مستوية على مستوى في الفضاء الثلاثي:

نفرض في المستوى $\sigma 1$ مساحة مستوية H يراد إيجاد مسقطها على المستوى $\sigma 2$ ونفرض أن الزاوية بين المستويين $\sigma 1, \sigma 2$ هي θ تقسم المساحة H إلى عدد كبير من المستطيلات انظر (شكل٥)



(شكل٥)

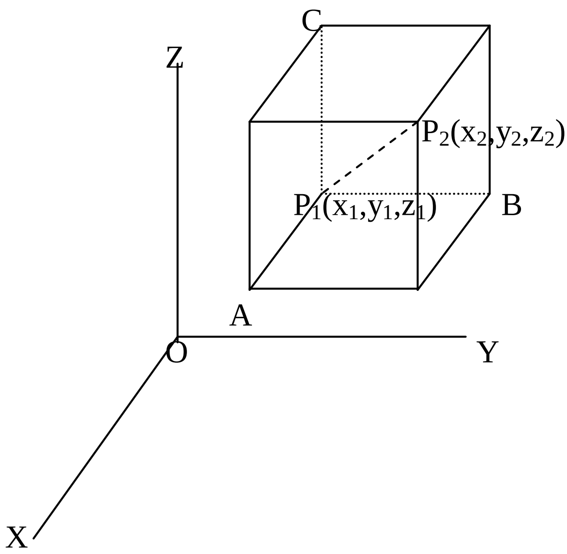
وحيث إن مساحة المستطيل = حاصل ضرب طولى ضلعيه.
فإن مسقط مساحة كل مستطيل يكون مساوياً مساحة هذا المستطيل مضروبة في
جيب تمام الزاوية θ ومن ثم يكون مسقط المساحة الكلية H مساوياً حاصل ضرب H في جيب تمام الزاوية θ أي أن:

$$H_{\sigma 2}= H \cos \theta.$$

حيث $H_{\sigma 2}$ هى مساحة مسقط H على المستوى σ_2.

٣ ـ البعد بين نقطتين في الفضاء الثلاثي:

لتكن $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين في الفضاء الثلاثي والمطلوب إيجاد الطول P_1P_2 لذلك نرسم من P_1 ثلاث مستويات توازي مستويات الإحداثيات ،ثم نرسم أيضاً من P_2 ثلاثة مستويات توازي مستويات الإحداثيات فتكوّن هذه المستويات الست متوازي مستطيلات فيه P_1P_2 قطراً كما يتضح من الرسم التالي:



$$\therefore P_1A = x_2 - x_1 \ , \ P_1B = y_2 - y_1 \ , \ P_1C = z_2 - z_1 \ ,$$

$$\therefore \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{P_1B}^2 + \overline{P_1C}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\therefore P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

١- بُعد النقطة $P(x, y, z)$ عن نقطة الأصل O يكون $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

٢- وإذا كان P_1P_2 يوازي أحد المستويات فلن نتمكن من رسم متوازي المستطيلات المشار إليه ورغم ذلك يظل القانون صحيحاً كما يلي:

نفرض مثلا أن P_1P_2 يوازي المستوى XOY عندئذ يكون $z_1=z_2$

وبالتالي يكون طول P_1P_2 هو:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

٣- إذا كان P_1P_2 يوازي أحد المحاور مثلا $P_1P_2 \parallel OX$ فإن $y_1=y_2,\ z_1=z_2$

وبالتالي يكون طول P_1P_2 يساوي $x_2 - x_1$

٤ _ نقطة التقسيم:

لتكن $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتان معلومتان في الفضاء الثلاثي.
فإن إحداثيات النقطة P التى تقسم المسافة بين النقطتين P_1,P_2 من الداخل بحيث:

(نسبة التقسيم)

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

- **ملاحظات ونتائج:**

١ _ نقطة منتصف المسافة بين P_1,P_2 تكون $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

٢ _ إذا كانت نقطة التقسيم P بين P_1,P_2 تقسم من الخارج كامتداد للمسافة بين P_1,P_2 سواء من ناحيةP_2 أو من ناحيةP_1 بحيث (نسبة التقسيم)

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

فإن إحداثيات النقطة P تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right).$$

- **أمثلة:**

مثال(١): تحقق من أن المثلث الذى رؤوسه $P_1(1, -2, 1)$, $P_2(3, -3, -1)$, $P_3(4, 0, 3)$

يكون قائم الزاوية وأوجد مساحته.

الحل:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 4 + 1 + 4 = 9.$$

$$\overline{P_2P_3}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 1 + 9 + 16 = 26.$$

$$\overline{P_1P_3}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 9 + 4 + 4 = 17.$$

$$\therefore \overline{P_2P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_3}^2$$

أي أن المثلث $P_1P_2P_3$ يكون قائم الزاوية في P_1 .

$$\Delta\, P_1P_2P_3 = ½\,(P_1P_2)\,(P_3P_1) = \frac{1}{2}(3)\left(\sqrt{17}\right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

مثال(٢): أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تظل دائماً على بعدين متساويين من النقطتين $P_1(2, -1, 3)$, $P_2(1, 0, 2)$.

الحل:

نفرض أن النقطة هي $P(x, y, z)$

$$\therefore \overline{PP_1} = \overline{PP_2} \Rightarrow \overline{PP_1}^2 = \overline{PP_2}^2 .$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2.$$

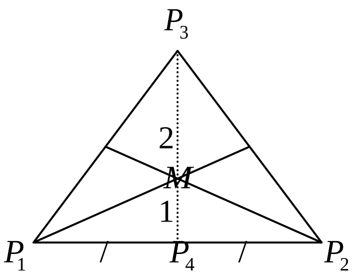
$$2x - 2y + 2z - 9 = 0.$$

وهذه تمثل معادلة مستوى في الفضاء الثلاثي.

مثال(٣): تحقق من أن احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:
$P_1(-1,0,1)\,,\,P_2(-3,-2,-1)\,,\,P_3(7,8,9)$.

تكون $(1,2,3)$

الحل:
نقطة تلاقي منصفات أضلاع المثلث (منصفات زوايا رؤوس المثلث) تكون هي المركز المتوسط للمثلث ، (وتُسمى أيضاً مركز ثقل المثلث) وهذه النقطة تقسم المستقيم الذي بصل بين أي رأس من رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل بنسبة تقسيم $2:1$
انظر الشكل:



واضح أن النقطة M تكون هي المركز المتوسط للمثلث وهذه النقطة تقسم P_3P_4

من الداخل بنسبة تقسيم $\dfrac{2}{1} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{\overline{P_3M}}{\overline{P_4M}}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1 y_2+\lambda_2 y_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1 z_2+\lambda_2 z_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right).$$

واحداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_1, P_2 تكون:

$$\left(\frac{(-1)+(-3)}{2},\frac{(0)+(-2)}{2},\frac{(1)+(-1)}{2}\right)=(-2,-1,0)\ ,$$

$$\therefore M\left(\frac{(2)(-2)+(1)(7)}{1+2},\frac{(2)(-1)+(1)(8)}{1+2},\frac{(2)(0)+(1)(9)}{1+2}\right)\equiv(1,2,3)$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): إذا قُسم المستقيم P_1P_2 من ناحية P_2 بالنقطة P_3
بحيث $\overline{P_1P_2} = 2\overline{P_2P_3}$
علماً بأن $P_1(-1,0,1), P_2(1,2,3)$ فأوجد إحداثيات P_3

الحل:

$$P_1 \;\overset{2}{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}\; P_2 \;\overset{1}{\overline{\qquad\qquad}}\; P_3$$

واضح من المعطيات أن النقطة $P_3(x,y,z)$ تقسم P_1P_2 من الخارج بنسبة
$\dfrac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}} = \dfrac{3}{1}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الخارج تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)$$

$$\therefore x = \frac{3(1) - 1(-1)}{3-1} = 2,\; y = \frac{3(2) - 1(0)}{3-1} = 3,\; z = \frac{3(3) - 1(1)}{3-1} = 4$$

وإذاً إحداثيات نقطة التقسيم تكون $P_3(2,3,4)$

مثال(٥): أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم P_1P_2 مع المستوى XOZ حيث:

$P_1(3,-1,5)\,, P_2(-1,3,-3)$.

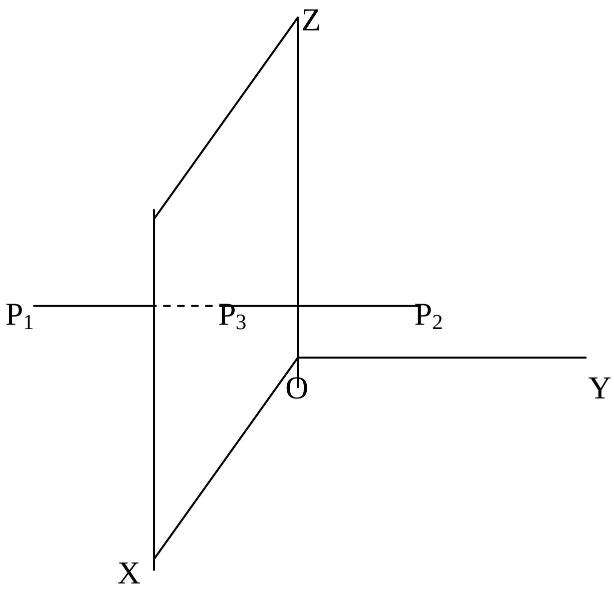
الحل:

لتكن نقطة التقاطع P_3 وهي نقطة تقسيم من الداخل تقع على المستوى XOZ ومن ثم تكون $P_3(x,0,z)$.

ونفرض أن P_3 تقسم المسافة بين P_1, P_2 من الداخل بنسبة $\lambda_1 : \lambda_2$ أي أن

$$\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

كما يضح من الرسم التالي:



$$\therefore x=\frac{\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1}{\lambda_1+\lambda_2},\ 0=\frac{\lambda_1 y_2+\lambda_2 y_1}{\lambda_1+\lambda_2},\ z=\frac{\lambda_1 z_2+\lambda_2 z_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\therefore 0=\frac{\lambda_1(3)+\lambda_2(-1)}{\lambda_1+\lambda_2}\Rightarrow 3\lambda_1-\lambda_2=0\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x=\frac{1(-1)+3(3)}{4}=2,\ \ z=\frac{1(-3)+3(5)}{4}=3.$$

وإذاً احداثيات نقطة التقاطع تكون $P_3(2,0,3)$.

مثـال(٦): أوجـد احـداثيات النقطتـين P_3, P_4 اللتـين تقسـمان المسـافة بـين النقطتين:

$P_1(1,5,3), P_2(7,2,9)$.

إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

الحل:

$$P_1 \text{———————} P_3 \text{———————} P_4 \text{———————} P_2$$

واضح أن النقطة P_3 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}$.

وأن النقطة P_4 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_2P_4}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2}{1}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

$$\therefore P_3\left(\frac{(1)(7)+(2)(1)}{1+2}, \frac{(1)(2)+(2)(5)}{1+2}, \frac{(1)(9)+(2)(3)}{1+2}\right) = (3,4,5) \quad ,$$

$$\therefore P_4\left(\frac{(2)(7)+(1)(1)}{2+1}, \frac{(2)(2)+(1)(5)}{2+1}, \frac{(2)(9)+(1)(3)}{2+1}\right) = (5,3,7)$$

(**ملاحظة:** بعد حساب احداثيات P_3 يمكن حساب احداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_2, P_3).

تمارين

١ ـ تحقق من أن أبعاد النقطة $P(x, y, z)$ عن محاور الاحداثيات OX, OY, OZ
تكون هي $\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, \sqrt{x^2+y^2}$ على الترتيب.

٢ ـ تحقق من أن $(6, 2, 1), (6, 6, 0), (2, 2, 0)$ تكون رؤوس مثلث متساوي الساقين
وأوجد مساحته.

٣ ـ إذا كان $P_1P_2P_3$ مثلث متساوي الأضلاع وكانت $P_1(1, 2, 6), P_2(1, 6, 2)$
فأوجد نقطة P_3 علما بأن الإحداثي y لها يساوي 2 ثم احسب مساحة المثلث.

٤ ـ أوجد نقطة على محور السينات تكون متساوية البعد عن النقطتين $(4, 3, 1), (-2, -6, 2)$.

٥ ـ أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تكون متساوية البعد عن النقطتين $(2, 5, 1), (8, 1, 6)$.

٦ ـ أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة $(1, -2, 3)$ مساوياً بعدها عن المحور OY.

٧ ـ أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة $(1, -1, 2)$ دائماً مساوياً 3 وماذا يكون هذا المحل الهندسي؟ .

٨- استنتج احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذى رؤوسه:
$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$.

٩- احسب احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:
$(0,7,-5), (-1,5,-6), (4,0,3)$.

١٠ ـ أوجد احداثيات النقطتين اللتين تقسمان المسافة بين النقطتين:
$P_1(3, -5, -2), P_2(7, 1, -6)$
إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

---

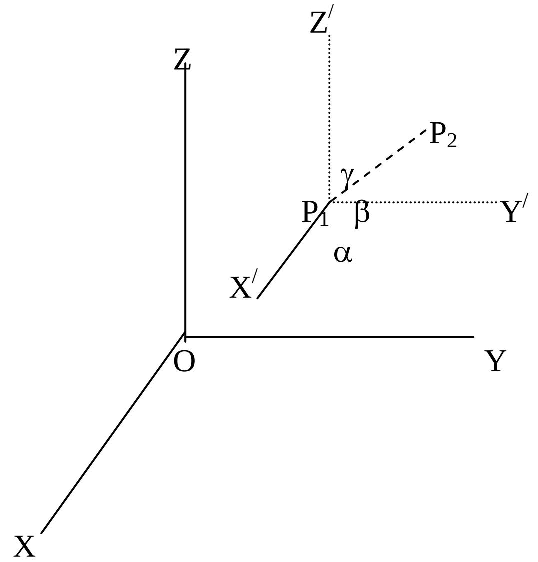
٥ ـ زوايا الاتجاه:

اتفقنا على أن الزاوية بين مستقيمين فى الفضاء الثلاثي تُقاس بالزاوية
بين أى مستقيمين فى نفس المستوى ومرسومان من أى نقطة
ويوازيان المستقيمان المعطيان
فى الفضاء الثلاثي.

ولذلك لإيجاد الزوايا التى يصنعها المستقيم P1P2 مع الاتجاهات الموجبة
للمحاور OX, OY, OZ نرسم من P1 المستقيمات /P1X/, P1Y/, P1Z
توازي محاور الإحداثيات فتكون الزوايا α,β,γ الموضحة بالرسم هى
الزوايا التى يصنعها المستقيم P_1P_2 مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

تُسمى الزوايا α,β,γ بزوايا الاتجاه للمستقيم P1P2 وتُسمى جيوب تمام هذه
الزوايا
$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ بجيوب تمام الاتجاه للمستقيم P1P2.

انظر الشكل:



ومن المهم جداً عند حساب زوايا اتجاه المستقيم P1P2 أن نعتبر P1P2 متجهاً بدايته P1 ونهايته P2 ثم نحسب الزوايا α,β,γ بين الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات والاتجاه الموجب للمستقيم P1P2 باعتبار هذا الاتجاه من P1 إلى P2

ولذلك إذا كانت α,β,γ زوايا اتجاه المستقيم P1P2 فإن زوايا الاتجاه للمستقيم P2P1 تكون هي $\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$ على الترتيب ، وتكون جيوب تمام اتجاه P2P1 هي

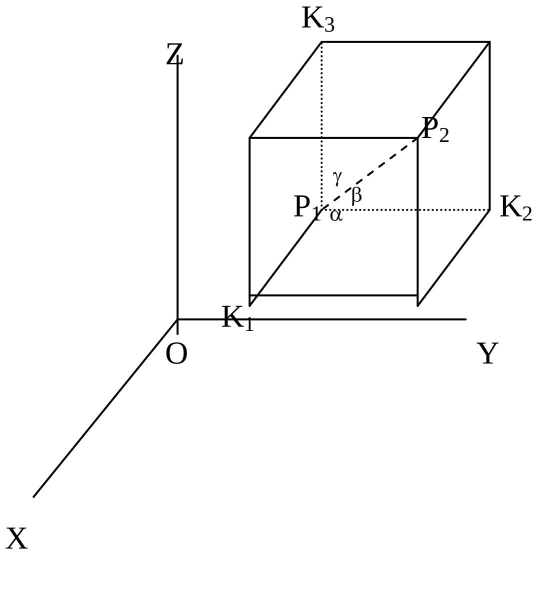
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha\ ,\ \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta\ ,\ \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma.$$

وواضح أن زوايا اتجاه المحور OX تكون هي $0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ وجيب تمام اتجاه المحور OX تكون $(1, 0, 0)$ وبالمثل تكون جيوب تمام اتجاه المحور OY هي $(0, 1, 0)$ وجيوب تمام اتجاه المحور OZ هي $(0, 0, 1)$

ومجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي من محاور الإحداثيات يكون مساوياً الواحد الصحيح.

نتيجة(١): مجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي مستقيم فى الفضاء الثلاثي يكون مساوياً الواحد الصحيح.

البرهان: ليكن P1P2 مستقيما زوايا اتجاهه هي α,β,γ نرسم متوازي مستطيلات بحيث يكون P1P2 قطراً فيه:



من الرسم يتضح ما يلي:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{P_1K_1}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\beta = \frac{\overline{P_1K_2}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\gamma = \frac{\overline{P_1K_3}}{\overline{P_1P_2}}.$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{\overline{P_1K_1}^2 + \overline{P_1K_2}^2 + \overline{P_1K_3}^2}{\overline{P_1P_2}^2} = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\overline{P_1P_2}^2} = 1.$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

وسوف نرمز اختصاراً لجيوب تمام اتجاه المستقيم فى الفضاء الثلاثي بالرموز L, M, N أي أن :

L = cos α , M = cos β , N = cos γ.

وسوف نقول أن الكميات الثلاثة a, b, c هي نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه L, M, N عندما وعندما فقط يتحقق الشرط:

$$L : M : N = a : b : c$$

نتيجة(٢): إذا كانت a, b, c هى نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه هي L, M, N فإن:

$$L = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

البرهان: حيث إن $L : M : N = a : b : c$ فيكون:

$$\mathbf{L = \lambda a,\quad M = \lambda b,\quad N = \lambda c \qquad (*)}$$

وبالتالي يكون:

$$\mathbf{L^2 + M^2 + N^2 = \lambda^2a^2 + \lambda^2b^2 + \lambda^2c^2 = \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2).}$$

$$\therefore 1 = \lambda^2(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

وبالتعويض عن λ فى العلاقات (*) نحصل على

$$L = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

ملاحظات:

١ ـ واضح أن قيم λ تُعطينا مجموعتين من جيوب تمام الاتجاه أحداهما L1, M1, N1 والأخرى –L1, -M1, -N1 وهذا أمر طبيعي حيث إنه إذا كانت a, b, c نسب اتجاه المستقيم P1P2 الذي جيوب تمام اتجاهه L1, M1, N1 فإن نفس الكميات a, b, c تكون أيضاً نسب اتجاه المستقيم P2P1 الذي جيوب تمام اتجاهه –L1, -M1, -N1.

٢ ـ إذا كانت P2(x2, y2, z2), P1(x1, y1, z1) نقطتان فى الفضاء الثلاثي فإن نسب اتجاه OP1 تكون هي x1, y1, z1 ونسب اتجاه P1P2 هي x2 – x1, y2 – y1, z2 – z1.

٣ ـ إذا كانت المستقيمات متوازية فإنها تشترك فى زوايا الاتجاه وبالتالي يكون لها نفس نسب الاتجاه (جيوب تمام الاتجاه).

٤ ـ لا يمكن أن تنعدم في آن واحد جميع جيوب تمام الاتجاه للمستقيم في الفضاء الثلاثي حيث $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

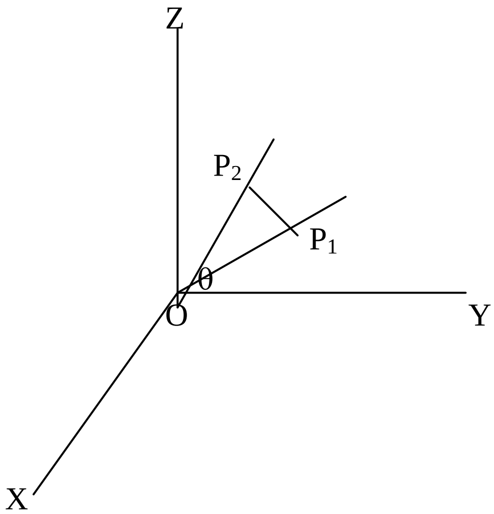
٥ ـ إذا كانت P1(x1, y1, z1), P2(x2, y2, z2) فإن جيوب تمام اتجاه P1P2 تكون هي:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\overline{P_1P_2}}.$$

وكذلك جيوب تمام اتجاه P2P1 تكون هي $\frac{x_1 - x_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{y_1 - y_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{z_1 - z_2}{\overline{P_1P_2}}$.

٦_الزاوية بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي:

نفرض مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L1, M2, N2 وجيوب تمام اتجاه الآخر L2, M2, N2 نرسم من القطب O مستقيمين OP1, OP2 يوازيان المستقيمان المعلومان كما بالرسم:



فإن الزاوية θ بين المستقيمين تُعطى من النتيجة الآتية:

نتيجة(٣): $\cos\theta = L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2$

البرهان: باعتبار أن $\mathbf{P_2(x_2, y_2, z_2), P_1(x_1, y_1, z_1)}$ نقطتان من المثلث OP1P2 فيكون:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta .$$

وحيث إن:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 .$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta .$$

$$\therefore -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 = -2(OP_1)(OP_2)\cos\theta \quad ,$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{(OP_1)(OP_2)} = \left(\frac{x_1}{OP_1}\right)\left(\frac{x_2}{OP_2}\right) + \left(\frac{y_1}{OP_1}\right)\left(\frac{y_2}{OP_2}\right) + \left(\frac{z_1}{OP_1}\right)\left(\frac{z_2}{OP_2}\right)$$

$$= L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2 .$$

ملاحظات:

١ ـ شرط تعامد مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L1, M1, N1 وجيوب تمام اتجاه الآخر L2, M2, N2 هو:

$$L1L2 + M1M2 + N1N2 = 0.$$

٢ ـ إذا كانت a1, b1, c1 نسب اتجاه مستقيم ما وكانت a2, b2, c2 نسب اتجاه مستقيم آخر فإن الزاوية بينهما θ تُعطى بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

٧– نسب اتجاه العمودي على مستقيمين معلومين:

نفرض مستقيمين معلومين نسب اتجاه أحدهما a1, b1, c1 ونسب اتجاه الأخر a2, b2, c2 ويُراد إيجاد نسب اتجاه العمودي عليهما ولتكن a, b, c واضح أنه يجب أن نشترط عدم توازي المستقيمين المعلومين أى أن:

$$a1 : b1 : c1 \neq a2 : b2 : c2$$

ومن شرط التعامد يكون:

$$\mathbf{a_1a + b_1b + c_1c = 0,}$$
$$\mathbf{a_2a + b_2\, b + c_2c = 0.}$$

وهاتان العلاقتان كافيتان لإيجاد النسبة بين الكميات a, b, c .

ومن شرط عدم التوازي نستنتج أنه على الأقل أحد المحددات:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

يكون مختلفاً عن الصفر وليكن المحدد الأول هو المختلف عن الصفر فبالتالي يكون:

$$\mathbf{a_1a + b_1b = - c_1c.}$$
$$\mathbf{a_2a + b_2b = - c_2c.}$$

$$\therefore a = \frac{\begin{vmatrix} -c_1c & b_1 \\ -c_2c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -c\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

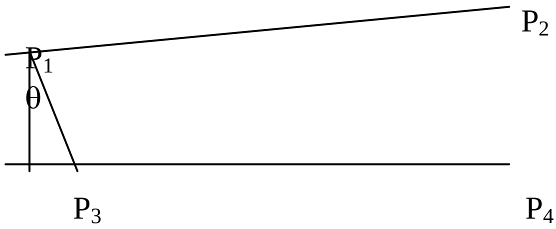
وبالمثل يمكن إثبات أن $\mathrm{b} = \mathrm{c}\frac{\begin{vmatrix} \mathrm{c}_1 & \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{c}_2 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}}$ وباعتبار $\mathrm{c} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$ ينتج:

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

وهذه هي نسب الاتجاه العمودي على المستقيمين المعلومين.

٨ _طول أقصر بُعد بين مستقيمين معلومين غير متقاطعين في الفضاء الثلاثي:

طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين P1P2, P3P4 يساوي طول مسقط المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين على العمودي عليهما ، ومن ثم يساوي حاصل ضرب طول المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين في جيب تمام الزاوية بين هذا المستقيم الواصل وبين المستقيم العمودي على المستقيمين(انظر الشكل):



وإذا كان K هو طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين P1P2, P3P4 فإن:

$$K = \left|\overline{P_1P}_3 \cos\theta\right| = \left|\overline{P_1P_3}(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2)\right|$$

حيث L_1, M_1, N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_3 (أو جيوب تمام اتجاه P_2P_4) ،
وحيث L_2, M_2, N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

- أمثلة:

مثال(١): في أى الحالات الآتية يوجد مستقيم في الفضاء الثلاثي زوايا اتجاهه α,β,γ ؟

(i) $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{2\pi}{3}$.

(ii) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

الحل:

- الشرط اللازم لكي تكون α,β,γ عبارة عن زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي هو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

(i) $\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{2\pi}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 1$

- وإذاً α,β,γ تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{4} \neq 1$

وإذاً α,β,γ لا تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

مثال(٢): أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم المار بالنقطتين $P1(1, -2, 3)$, $P2(2, -3, 5)$

الحل:

لتكن نسب اتجاه المستقيم P1P2 هي a,b,c

$$\therefore a = 2-1 = 1 \ , \ b = -3-(-2) = -1 \ , \ c = 5-3 = 2$$

وبالتالي تكون جيوب تمام اتجاه المستقيم P1P2 هي:

$$L = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

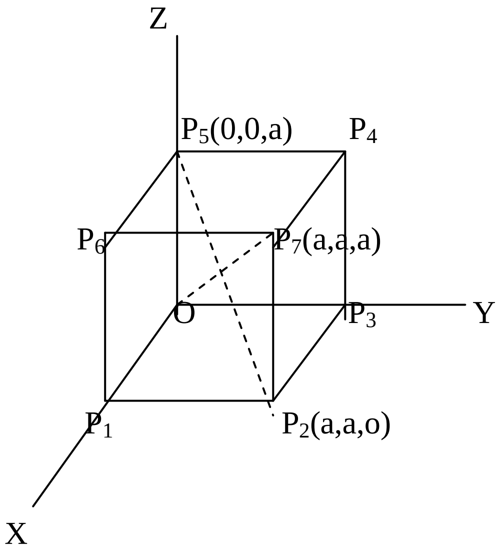
$$M = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$N = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

مثال(٣): أوجد الزاوية بين قطرين من أقطار المكعب.

الحل:

نفرض أن طول ضلع المكعب a وبأخذ ثلاثة أوجه متعامدة من المكعب منطبقة على
مستويات الإحداثيات كما بالرسم:



وبالتالي تكون أقطار المكعب هي كالتالي P1P4, P3P6, P2P5, OP7

ونوجد الزاوية بين القطرين OP7, P2P5 كما يلي:

نسب اتجاه OP7 هي a, a, a ،ونسب اتجاه P2P5 هي –a, -a, a

وبالتالي الزاوية بين قطري المكعب تُعطى من:

$$\theta = \cos^{-1}[\pm \frac{a(-a)+a(-a)+a(a)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\ \sqrt{a^2+a^2+a^2}}] = \cos^{-1}[\pm \frac{-a^2}{3a^2}] = \cos^{-1}[\mp \frac{1}{3}].$$

وواضح أنه نحصل على قيمتين(موجبة وسالبة)إحداهما للزاوية الحادة والثانية للمنفرجة.

مثال(٤): أوجد جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقط:

P1(2, 3, -2), P2(1, -1, -1), P3(0, 1, 2)

الحل:

المستقيم العمودي على المستوى المار بالنقط المعطاه يكون هو العمودي على المستقيمين P1P2 , P1P3 حيث أنهما يقعا في نفس المستوى المار بالنقط P1,P2,P3

ولتكن نسب اتجاه هذا العمودي هي a,b,c ونسب اتجاه P1P2 هي a_1,b_1,c_1

ونسب اتجاه P1P3 هي a_2,b_2,c_2

$$\therefore a_1 = 1-2 = -1 \,,\; b_1 = -1-3 = -4 \,,\; c_1 = -1-(-2) = 1 \quad ,$$

$$a_2 = 0-2 = -2 \,,\; b_2 = 1-3 = -2 \,,\; c_2 = 2-(-2) = 4 \quad ,$$

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

$$b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى تكون:

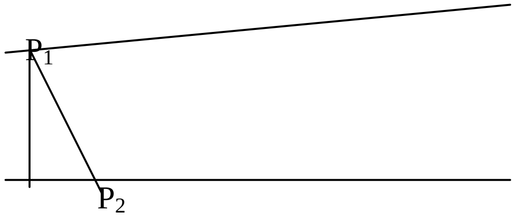
$$L = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-14}{\sqrt{196+4+36}} = \frac{-14}{\sqrt{236}} \,,$$

$$M = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{236}} \,,$$

$$N = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-6}{\sqrt{236}}.$$

مثال(٥): أوجد طول أقصر بُعد بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي نسب اتجاه أحدهما $3,2,1$ ويمر بالنقطة $(3,4,5)$ ونسب اتجاه الأخر $3,6,-2$ ويمر بالنقطة $(4,6,3)$

الحل: لتكن $P_1(3,4,5)\ ,\ P_2(4,6,3)$



طول أقصر بُعد K بين المستقيمين المعلومين يُعطى من العلاقة:

$$K=\left|\overline{P_1P_2}(L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2)\right|.$$

حيث L_1,M_1,N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_2 ، وحيث L_2,M_2,N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(4-3)^2+(6-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3\,,$$

$$\therefore L_1=\frac{4-3}{3}=\frac{1}{3}\ ,\ M_1=\frac{6-4}{3}=\frac{2}{3}\ ,\ N_1=\frac{3-5}{3}=\frac{-2}{3}\ ,$$

ولتكن نسب اتجاه العمودي على المستقيمين هي a,b,c

ولتكن $a_1,b_1,c_1\equiv 3,2,1\ ,\ a_2,b_2,c_2\equiv 3,6,-2$ وإذاً:

$$a=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}=-10\ ,\ b=\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}=9\ ,$$

$$c=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=12\,,$$

$$L_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{-10}{\sqrt{100+81+144}}=\frac{-10}{\sqrt{325}}=\frac{-10}{\sqrt{(13)(25)}}=\frac{-10}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$M_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9}{\sqrt{325}}=\frac{9}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$N_2=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{12}{\sqrt{325}}=\frac{12}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$\therefore K = \left|\overline{P_1P_2}\left(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2\right)\right|$$

$$= \left|3\left[(\frac{1}{3})(\frac{-10}{5\sqrt{13}}) + (\frac{2}{3})(\frac{9}{5\sqrt{13}}) + (\frac{-2}{3})(\frac{12}{5\sqrt{13}})\right]\right|.$$

$$= \left|\frac{-16}{5\sqrt{13}}\right| = \frac{16}{5\sqrt{13}}.$$

مثال(٦): أوجد طول أقصر بعد بين المستقيمين P_1P_2 , P_3P_4 حيث:

$P_1(-4,-1,2)$, $P_2(2,-3,5)$, $P_3(0,3,-5)$, $P_4(2,4,-4)$.

الحل:

لتكن نسب اتجاه P_1P_2 هي a_1,b_1,c_1 ونسب اتجاه P_3P_4 هي a_2,b_2,c_2

ونسب اتجاه العمودي على P_1P_2 , P_3P_4 هي a,b,c

$\therefore a_1 = 2-(-4) = 6$, $b_1 = -3-(-1) = -2$, $c_1 = 5-2 = 3$,

$a_2 = 2-0 = 2$, $b_2 = 4-3 = 1$, $c_2 = -4-(-5) = 1$,

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين تكون:

$$L_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-5}{\sqrt{25+0+100}} = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} ,$$

$$M_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{0}{5\sqrt{5}} = 0 ,$$

$$N_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} ,$$

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9 ,$$

وجيوب تمام اتجاه P_1P_3 تكون:

$$L_1 = \frac{0-(-4)}{9} = \frac{4}{9} \ , \ M_1 = \frac{3-(-1)}{9} = \frac{4}{9} \ , \ N_1 = \frac{-5-2}{9} = \frac{-7}{9} \ ,$$

وإذاً طول أقصر بُعد بين المستقيمين يُعطى من العلاقة:

$$\left|\overline{P_1P_3}\left(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2\right)\right| = \left|9\left[(\frac{4}{9})(\frac{-1}{\sqrt{5}}) + (\frac{4}{9})(0) + (\frac{-7}{9})(\frac{2}{\sqrt{5}})\right]\right|$$

$$= \left|\frac{-18}{\sqrt{5}}\right| = \frac{18}{\sqrt{5}}.$$

<u>المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي</u>

<u>أولاً ـ المستوى في الفضاء الثلاثي:</u>

<u>١- تعريف المستوى:</u>

المستوى هو السطح الذى إذا أُخذت عليه نقطتان P_1, P_2 فإن جميع نقط المستقيم P_1P_2 تكون واقعة على السطح أيضاً.

<u>نظرية:</u> أي معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z تدل على مستوى ، والعكس صحيح بمعنى أن معادلة أي مستوى تكون من الدرجة الأولى في x, y, z.

<u>البرهان:</u> نفرض أن معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z بالصورة العامة:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

ولتكن $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين على المحل الهندسي للمعادلة (1) إذاً:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

ولتكن P نقطة ما على المستقيم P_1P_2 بحيث $\dfrac{P_1P}{P_2P} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P(x, y, z) \equiv \left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

وباستخدام العلاقة (2) نجد أن النقطة P تحقق المعادلة (1) وعلى ذلك وطبقا للتعريف فإن المعادلة (1) تمثل مستوى.

ولإثبات العكس نفرض مستوى يمر بنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ونفرض أن P_0K عمودي على المستوى وأن نسب اتجاه العمودي هي a,b,c

ولإيجاد معادلة المستوى نفرض $P(x, y, z)$ أي نقطة عليه.واضح أن المستوى يكون هو المحل الهندسي للنقطة P التى تحقق الشرط $P_0P \perp P_0K$.

وحيث إن نسب اتجاه P_0P تكون $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$.

$$\therefore a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \; . \qquad (3)$$

$$\therefore ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

وواضح أن (3) معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتتحقق فقط بجميع نقط المستوى وبالتالي فهي معادلة المستوى.

- **ملاحظات ونتائج:**

١- المعادلة (1) تشتمل على أربعة ثوابت يمكن اختزالها إلى ثلاثة ثوابت مستقلة ، وهذا يعني أن المستوى في الفضاء الثلاثي يتحدد بثلاث شروط مستقلة.

٢- معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

٣- شرط توازي المستقيم الذي نسب اتجاهه a_1, b_1, c_1 (جيوب تمام اتجاهه L,M,N)

للمستوى $ax+by+cz+d=0$ هو: $aa_1+bb_1+cc_1=0$ ($aL+bM+cN=0$).

٤- الزاوية θ بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تكون:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right).$$

٥- شرط توازي المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:
$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$

والمسافة بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تساوي:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

٦- شرط تعامد المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:
$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

٧- إذا كانت $\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}$ نسب اتجاه مستقيمين معلومين ،

وكانت $\{a, b, c\}$ نسب اتجاه العمودي عليهما ومن شرط التعامد يكون:

$a_1a + b_1b + c_1c = 0$,

$a_2a + b_2b + c_2c = 0$.

ويكون: $a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

- **<u>أمثلة:</u>**

<u>مثال(١)</u>: أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (0, 1, -1) ويكون عمودياً على المستقيم P_1P_2 حيث $P_1(1, -1, 2), P_2(3, -4, 1)$.

<u>الحل:</u>

معادلة المستوى يمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

ونسب اتجاه العمودي P_1P_2 تكون:

$$a = 3 - 1 = 2,\ b = -4 + 1 = -3,\ c = 1 - 2 = -1.$$

فتكون معادلة المستوى المطلوبة:

$$2(x-0)+(-3)(y-1)+(-1)(z-(-1)) = 0.$$

$$\therefore 2x-3y-z+2=0.$$

<u>مثال(٣)</u>: أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 حيث:

$$P_1(0, 1, 0), P_2(2, 0, 1), P_3(3, 0, 0), P_4(0, 2, 2).$$

<u>الحل:</u>

حيث إن المستوى يمر بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 فيكون العمودي على المستوى هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_3P_4

ونسب اتجاه P_1P_2 تكون 2,-1,1

ونسب اتجاه P_3P_4 تكون 2 ,2 ,3–

وبالتالي تكون نسب اتجاه العمودي عليهما (العمودي على المستوى) هي:

$$a = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ b = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7,\ c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب بمعلومية نسب اتجاه العمودي عليه 1 ,7- , 4 – ويمر بالنقطة $P_1(0, 1, 0)$ هي:

$$-4(x - 0) - 7(y - 1) + 1(z - 0) = 0.$$

$$\therefore 4x + 7y - z - 7 = 0.$$

مثال(٣): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ويكون عمودياً على المستويين $2x - y + 3z - 1 = 0,\quad x + 2y + z = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ونسب اتجاه العمودي عليه a,b,c تكون:

$$a(x-1) + b(y+1) + c(z-5) = 0.$$

وحيث إن المستوى عمودي على كل من المستويين المعطيين فيكون العمودي على المستوى المطلوب موازياً لكل من المستويين المعطيين وشرط ذلك هو:

$$2a - b + 3c = 0.$$

$$a + 2b + c = 0.$$

$$\therefore a = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7,\ \ b = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\ \ c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

وعلى ذلك تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$-7(x-1) + (y+1) + 5(z-5) = 0.$$

$$\therefore -7x + y + 5z - 17 = 0.$$

٢ ـ صور خاصة لمعادلة المستوى:

أ ـ معادلة المستوى المار بثلاث نقط معلومة:

نفرض النقط الثلاث $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$

معادلة أي مستوى يمر بالنقطة P_1 تكون بالصورة :

$$a(x- x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطتين P_2, P_3 فنحصل على:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$
$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0.$$

وبحذف المعاملات الثلاثة a, b, c بين المعادلات نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

وهذه هي معادلة المستوى المار بالنقط P_1, P_2, P_3 (حيث إنها معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتحققها النقط P_1, P_2, P_3).

<u>نتيجة</u>: شرط وقوع النقط:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$

في مستوى واحد هو:

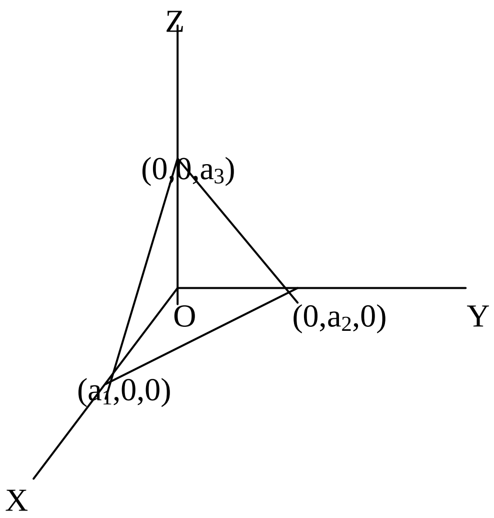
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

ب ـ معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من محاور الإحداثيات:

نفرض أن الأجزاء المقطوعة من المحاور هي a_1, a_2, a_3 أي أن المستوى يمر بالنقط:

$(a_1,0,0), (0,a_2,0), (0,0,a_3)$

كما بالرسم:



وبذلك تكون معادلة المستوى هي:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-0 & z-0 \\ 0-a_1 & a_2-0 & 0-0 \\ 0-a_1 & 0-0 & a_3-0 \end{vmatrix} = 0.$$

أي أن:

$$a_2a_3x + a_1a_3y + a_1a_2z = a_1a_2a_3 .$$

فإذا كانت $a_1a_2a_3 \neq 0$ فإن المعادلة السابقة تصبح على الصورة:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

١- إذا كان أحد الأجزاء a_1, a_2, a_3 لا يساوى الصفر ، وكان الجزءان الآخران مساويان للصفر ، وبالتالي يمر المستوى بنقطة الأصل ومعادلة المستويات التي تمر بنقطة الأصل تكون على الصورة:

$$ax + by + cz = 0\ .$$

٢- إذا وازى المستوى أحد المحاور وليكن المحور OX فإن $a_1 \to \infty$ وعندئذ $\frac{x}{a_1} \to 0$ لجميع قيم x المحدودة ، ومن ثم تصبح المعادلة السابقة على الصورة:

$$\frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1.$$

وهذه المعادلة تمثل مستوى يوازي المحورOX ويقطع المحاور OY,OZ بأجزاء a_2, a_3 على الترتيب ، وبالمثل تكون المعادلتين:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{z}{a_3} = 1, \qquad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} = 1.$$

تمثلان معادلة مستوى يوازي المحور OY ويقطع المحاور OX,OZ بأجزاء a_1, a_3 على الترتيب ، ومعادلة مستوى يوازي المحور OZ ويقطع المحاور OX,OY بأجزاء a_1, a_2 على الترتيب.

٣- المعادلة $x = a_1$ تمثل في الفضاء الثلاثي مستوى يوازي المستوى YOZ ويقطع المحور OX في جزء طوله a_1.

ج - معادلة المستوى في الصورة العمودية:

نفرض أن R طول العمود النازل من نقطة الأصل على المستوى وأن L, M, N جيوب تمام اتجاه هذا العمود ، وبفرض أن a_1, a_2, a_3 هي الأجزاء التى يقطعها المستوى من المحاور OX,OY,OZ (انظر الرسم السابق) نجد أن:

$$L = \frac{R}{a_1},\ M = \frac{R}{a_2},\ N = \frac{R}{a_3}.$$

وبالتعويض في المعادلة $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1$ عن قيم a_1, a_2, a_3 نحصل على:

$$\frac{\mathrm{Lx}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{My}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{Nz}}{\mathrm{R}} = 1.$$

أي أن:

$$Lx + My + Nz = R.$$

وهذه هي معادلة المستوى في الصورة العمودية حيث $0 < R$.

- **ملاحظات ونتائج:**

١- إذا وقعت نقطة الأصل في منتصف البعد بين مستويين متوازيين وكانت معادلة أحدهما في الصورة العمودية $Lx + My + Nz = R$ فإن المستوى الأخر يُعطى بالمعادلة $Lx - My - Nz = R$

٢- الصورة العمودية لمعادلة المستوى $ax + by + cz + d = 0$ تكون :

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

ويكون طول العمود النازل من نقطة الأصل على هذا المستوى مساوياً:

$$\left| \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

مثال(٤): أوجد أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور بمستوى يمر بالنقطة (1, -1, 1) ، ويوازي المستوى 3x – 4y + 5z + 2 = 0 .

الحل:

معادلة المستوى الذى يوازي المستوى المُعطى تكون بالصورة:

3x – 4y – 5z + d = 0.

فإذا مر هذا المستوى بالنقطة (1, -1, 1) فإن d = - 12

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

3x - 4y + 5z – 12 = 0.

$$\therefore \frac{x}{4}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{\frac{12}{5}}=1.$$

وبالتالي تكون أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور هي $4,-3,\frac{12}{5}$.

مثال(٥): أوجد الصورة العمودية للمستوى الذى يقطع محاور الاحداثيات بأجزاء أطوالها على الترتيب هي 1- ,1 ,2-

الحل:

معادلة المستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة تكون:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-1}=1.$$

$$\therefore x-2y+2z=-2.$$

وبذلك تكون الصورة العمودية للمستوى هي:

$$\frac{x-2y+2z}{\pm\sqrt{1+4+4}}=\frac{-2}{\pm\sqrt{1+4+4}}\,.$$

وباختيار الإشارة السالبة ليكون الطرف الأيمن موجب:

$$\therefore -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=\frac{2}{3}.$$

أي أن جيوب تمام اتجاه وطول العمود النازل على المستوى من نقطة الأصل تكون هي على الترتيب: $L=-\frac{1}{3}, M=\frac{2}{3}, N=\frac{2}{3}, R=\frac{2}{3}$.

٣ – طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة:

نفرض أن المستوى $Lx + My + Nz = R$ حيث $R > 0$ مُعطى بالصورة العمودية ، ونفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ النقطة المعلومة.

فإذا كانت $P_0(x_0, y_0, z_0)$ إحدى نقط المستوى فإن طول العمود النازل من النقطة P على المستوى وليكن R_1 يكون مساوياً للقيمة العددية لمسقط P_0P_1 على العمود على المستوى أي أن:

$$R_1 = \pm[L(x_1 - x_0) + M(y_1 - y_0) + N(z_1 - z_0)] = \pm(Lx_1 + My_1 + Nz_1 - R).$$

نظرية: الدالة $ax + by + cz + d$ تكون موجبة لجميع النقط الواقعة على أحد جانبي المستوى $ax + by + cz + d = 0$ وتكون سالبة لجميع النقط في الجانب الآخر.

البرهان: نفرض النقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ تقعان على جانبى المستوى:

$ax + by + cz + d = 0$.

ونفرض أن P_1P_2 يقطع المستوى في نقطة P بحيث $\frac{P_1P}{P_2P} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)..$$

وحيث إن P تقع على المستوى فإنها تحقق معادلته أي أن:

$$a(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) + b(\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1) + c(\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1) + d(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

$$\therefore \lambda_1(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) + \lambda_2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = 0.$$

$$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}\right).$$

ولكي تكون النسبة $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ موجبة ، لابد أن تكون الكميتان:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d \;,\; ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

مختلفان في الإشارة.

مثال(٦): أوجد طولي العمودين النازلين من النقطتين $(1,0,2)$, $(0,0,0)$ على المستوى $x-2y+2z-4=0$ ووضح أن هاتين النقطتين تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى.

الحل:

نفرض أن R_0, R_1 هما أطوال العمودين من النقطتين $(1, 0, 2)$, $(0, 0, 0)$ على المستوى

$$\therefore R_o = \mp \frac{1(0)-2(0)+2(0)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp \frac{-4}{3} = \frac{4}{3},$$

$$R_1 = \mp \frac{1(1)-2(0)+2(2)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

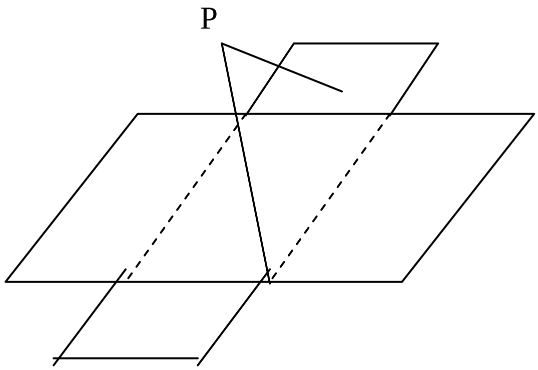
وواضح أن R_o, R_1 مختلفتين في الإشارة أي أن النقطتين $(1, 0, 2)$, $(0, 0, 0)$ تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى المعُطى.

٤ ـ المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين.

المستوى المنصف للزاوية الزوجية بين هذين المستويين يكون هو المحل الهندسي لنقطة في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى الأول يساوي بعدها عن المستوى الثاني.

(انظر الشكل):



أي أنه إذا كانت $P(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة على المستوى المنصف فإن:

$$\frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

أي أن النقطة $P(\alpha,\beta,\gamma)$ دائماً تحقق إحدى المعادلتين:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2x+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

وهما معادلتى المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعلومين.

وواضح أن هذين المستويين يكونا متعامدان لأن نسب اتجاه أحدهما هي:

$$a_1k_2-a_2k_1\ ,\ b_1k_2-b_2k_1\ ,\ c_1k_2-c_2k_1.$$

ونسب اتجاه الآخر هي:

$$a_1k_2+a_2k_1\ ,\ b_1k_2+b_2k_1\ ,\ c_1k_2+c_2k_1.$$

حيث $k_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2},\ \ k_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

مثال(٧): أوجد معادلتى المستويين المنصفين للزاوية الزوجية بين المستويين:

$x + 2y - 2z + 3 = 0 , \quad 2x - y + 2z = 4.$

الحل:

معادلتى المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعطيين تُعطيان من:

$$\frac{x+2y-2z+3}{\sqrt{1+4+4}} = \pm \frac{2x-y+2z-4}{\sqrt{4+1+4}} .$$

وإذاً المعادلتين تكونا $3x + y - 1 = 0 \ , \ x - 3y + 4z - 7 = 0$

<u>٥ – معادلة أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين معلومين:</u>

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\ ,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ **مستويين معلومين وغير متوازيين.**

معادلة المستوى المار بخط تقاطعهما تكون على الصورة:

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

حيث λ_1,λ_2 ثابتان لا يساويان الصفر في آن واحد.

<u>مثال(٨):</u> أوجد المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$x + y + z - 3 = 0\ ,\quad x - 2y + 3z + 4 = 0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الثاني.

<u>الحل:</u>

معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين تكون على الصورة:

$$\lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0. \qquad (*)$$

$$\therefore (\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (\lambda_1 - 2\,\lambda_2)\, y + (\lambda_1 + 3\,\lambda_2)\, z + (-3\lambda_1 + 4\lambda_2) = 0.$$

ولكي يكون هذا المستوى عمودياً على المستوى $x - 2y + 3z + 4 = 0$ يجب أن يتحقق الشرط:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) -2\,(\lambda_1 - 2\lambda_2) + 3\,(\lambda_1 + 3\lambda_2) = 0.$$

وبالتالي نحصل على $\lambda_1 = -7\lambda_2$ ، وبالتعويض في المعادلة (*) نحصل على:

$$-7\lambda_2(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0.$$

وبوضع $\lambda_2 = 1$ **تكون معادلة المستوى المطلوب هي:**

$$6x + 9y + 4z - 25 = 0.$$

مثال(٩): أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$3x + 2y - 5z + 1 = 0\,, \quad x - 5y - z - 3 = 0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الأول.

الحل:

معادلة المستوى المطلوب تكون على الصورة:

$$\lambda_1(3x + 2y - 5z + 1) + \lambda_2(x - 5y - z - 3) = 0.$$

$$\therefore (3\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (2\lambda_1 - 5\lambda_2)\, y + (-5\lambda_1 - \lambda_2)\, z + (\lambda_1 - 3\lambda_2) = 0.$$

ومن شرط التعامد نحصل على:

$$3(3\lambda_1 + \lambda_2) + 2(2\lambda_1 - 5\lambda_2) - 5\,(-5\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

$$\therefore\ 38\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 19\lambda_1.$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\lambda_1[(3 + 18)\, x + (2 - 72)\, y + (-5 - 18)\, z + (1 - 54)] = 0.$$

وباختيار $\lambda_1 = 1$ تكون المعادلة المطلوبة هي:

$$21\, x - 70\, y - 23\, z - 53 = 0.$$

٦ ـ وضع ثلاثة مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي:

نفرض أن لدينا ثلاثة مستويات:

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$
$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$
$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$

تُوجد خمس حالات مختلفة ممكنة لوضع هذه المستويات لبعضها في الفضاء الثلاثي:

أ ـ انطباق المستويات الثلاثة على بعضها إذا تحقق الشرط:

$a_1:b_1:c_1:d_1= a_2:b_2:c_2:d_2 = a_3:b_3:c_3:d_3.$

ب ـ تتوازى المستويات الثلاثة إذا تحقق الشرط:

$a_1:b_1:c_1= a_2:b_2:c_2 = a_3:b_3:c_3 .$

ج ـ تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم في الجزء المحدد من الفضاء الثلاثي ويكون شرط التقاطع هو وجود قيمة عددية λ تجعل المستوى:

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$

ينطبق مع المستوى الثالث أي أن:

$$\frac{a_1+\lambda a_2}{a_3}=\frac{b_1+\lambda b_2}{b_3}=\frac{c_1+\lambda c_2}{c_3}=\frac{d_1+\lambda d_2}{d_3}.$$

د ـ تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة إذا تحقق الشرط:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

هـ ـ ليس للمستويات الثلاثة أي نقطة مشتركة ويحدث ذلك إذا كان خط تقاطع مستويان من المستويات الثلاثة يوازي المستوى الثالث.

مثال(١٠): تحقق من أن المستويات الثلاثة:

$2x - y + 5z - 1 = 0,$
$x + 3y + z - 4 = 0,$
$6x + 11y + 9z - 17 = 0.$

تتقاطع في خط مستقيم.

الحل:

معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين الأول والثاني تكون:

$2x - y + 5z - 1 + \lambda(x + 3y + z - 4) = 0$

$\therefore (2 - \lambda)\,x + (-1 + 3\lambda)\,y + (5 + \lambda)\,z + (-1 - 4\lambda) = 0. \qquad (*)$

ولكي تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم يجب أن تنطبق المعادلة (*) مع معادلة المستوى الثالث أي يتحقق:

$$\frac{2+\lambda}{6} = \frac{-3+3\lambda}{11} = \frac{5+\lambda}{9} = \frac{1+4\lambda}{17}. \qquad (**)$$

وواضح أن القيمة العددية $\lambda = 4$ تحقق العلاقة (**)
وبالتالي تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم.

تمارين

١- أوجد معادلة المستوى العمودي على P_1P_2 من منتصفه علماً بأن
$P_1(-3, -1, 4), P_2(1, 5, 6)$.

٢- إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ زاويتين من زوايا اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقطة $(3, 1, 2)$ فاوجد معادلة المستوى.

٣- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $2x - y + z = 0$ ويقطع من المحور OY جزء طوله 3 وحدات.

٤- تحقق من أن النقط $(0, 2, -4), (-1, 1, -2), (-2, 3, 3), (-3, -2, 1)$ تقع في مستوى واحد ، وأوجد معادلته.

٥- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $4x + y + 8z + 39 = 0$ ويبعد عنه 7 وحدات.

٦- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى $x + 2y + 2z - 6 = 0$ ضعف بعدها عن المستوى $4x - 8y + z - 9 = 0$.

٧- أوجد الزاوية الحادة بين كل من المستويين فيما يلي:

(i) $2x - y + 2z - 10 = 0, \quad 4x + y + z - 7 = 0$.

(ii) $5x + 3y - 4z + 14 = 0, \quad x - 4y - z + 12 = 0$.

(iii) $3x + 4y - 16 = 0, \quad 4y - 2z - 5 = 0$.

٨- أوجد معادلات المستويات التى تمر بالنقطتين $(8, 0, 1), (0, 4, 2)$ وتصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المستوى $2x - y + 2z - 7 = 0$.

٩- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(3, -2, 1)$ والمار بخط تقاطع المستويين:

$3y - 2z - 4 = 0, \quad x + y + 4z + 6 = 0.$

١٠- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(1, -2, 2)$ وعمودي على كل من المستويين:

$3x - 3y + z = 0, \quad 2x + 4y - 5z + 1 = 0.$

١١- أوجد معادلة المستوى العمودي على المستوى $x - y + z = 0$ ويمر بالنقطة $(2, -1, 1)$ ويوازي المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة $(2, 3, -1)$.

ثانياً ـ الخط المستقيم فى الفضاء الثلاثى

أـ الصورة العامة لمعادلات الخط المستقيم:

الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي ينتج من تقاطع مستويين غير متوازيين في الفضاء الثلاثي ، وبالتالى فإن الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي يُمثل بمعادلتين من الدرجة الأولى في x, y, z أي أن:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$
$$(*)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

حيث $a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$ والعكس صحيح كل نقط (*) تكون واقعة في آن واحد على خط تقاطعهما ، وحيث إنه يوجد عدد لا نهائي من المستويات التى تمر بالمستقيم (*) فإنه يمكن اختيار أي مستويين منهما ليدلان على المستقيم مثلاً المعادلة:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0. \qquad (1)$$

تمثل مستوى يمر بخط تقاطع المستويين (*)

ويكفي أن نُعطى الكمية العددية λ قيمتين مختلفتين لنحصل على مستويين يمران بالمستقيم (*).

مثال(١): أوجد معادلة الخط المستقيم الناتج من تقاطع المستويين:

$$4x - 2y + z + 1 = 0, \quad 2x + 3y - z - 5 = 0.$$

الحل:

المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين يُعطى من:

$$4x - 2y + z + 1 + \lambda\,(2x + 3y - z - 5) = 0. \qquad (**)$$

وبوضع معامل x بالصفر في (**) فنحصل على:

$$4 + 2\lambda = 0, \qquad \therefore \lambda = -2.$$

وبالتعويض عن λ في المعادلة (**) نحصل على $8y - 3z - 11 = 0$

وبوضع معامل y بالصفر في (**) نحصل على:

$$-2 + 3\lambda = 0 \qquad \therefore \lambda = 2/3.$$

وبالتعويض عن λ في المعادلة (**) نحصل على $15x + z - 7 = 0$

وبذلك يمكن التعبير عن المستقيم الناتج من تقاطع المستويين المعطيين بالمعادلتين:

$8y - 3z - 11 = 0 \quad , \quad 15x + z - 7 = 0.$

ب- معادلات الخط المستقيم بدلالة نسب اتجاهه ونقطة عليه:

نفرض أن a, b, c هى نسب اتجاه المستقيم ويمر بالنقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$
ولإيجاد معادلة هذا الخط نفرض أن $P(z, y, z)$ أي نقطة عليه فيكون:

$a : b : c = x - x_1 : y - y_1 : z - z_1.$

أي أن:

$\lambda a = x - x_1, \quad \lambda b = y - y_1, \quad \lambda c = z - z_1.$

$x = \lambda a + x_1, \quad y = \lambda b + y_1, \quad z = \lambda c + z_1. \qquad (2)$

حيث λ كمية عددية.

من العلاقة (2) نحصل على إحداثيات أي نقطة تقع على المستقيم بدلالة البارامتر λ والقيم المعطاة a, b, c, x_1, y_1, z_1 وتُسمى (2) بالمعادلات البارامترية للخط المستقيم.

وحيث إنه لا يمكن أن تنعدم a, b, c في آن واحد
فبحذف البارامتر λ من (2) نحصل على:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \qquad (3)$$

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلات الخط المستقيم.

وإذا أُعطيت نسب اتجاه المستقيم ونقطة عليه فإن معادلاته تُكتب مباشرة بالصورة (3) وإذا كان $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ فإن المعادلة (3) تؤول إلى المستويين:

$$x = x_1 \;, \; \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

وإذا كان $a = 0, b = 0, c \neq 0$ فإن المعادلة (3) تؤول إلى المستويين:

$$x = x_1 \;, \; y - y_1.$$

<u>ج- معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين:</u>

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ وكانت نسب اتجاهه هي a, b, c فيكون:

$$a:b:c = x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1$$

وبذلك تصبح الصورة القياسية (3) في الصورة:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

وهذه تمثل معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$.

<u>مثال(٢):</u> أوجد الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم:

$2x - 3y + z + 5 = 0, \quad x + 2y - 3z - 8 = 0.$

<u>الحل:</u>

نعين نقطتين P_1, P_2 على المستقيم وذلك بوضع معامل x بالصفر في المعادلتين المعطيتين فنحصل على:

$-3y + z + 5 = 0, \ \ 2y - 3z - 8 = 0.$

وبحل هاتين المعادلتين في y, z نحصل على $y = 1, \ z = -2$.

وبالتالي تكون $P_1(0, 1, -2)$.

ثم بوضع معامل y بالصفر نحصل على:

$2x + z + 5 = 0, \ \ x - 3z - 8 = 0.$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $x = -1, z = -3$.

وبالتالي تكون $P_2(-1, 0, -3)$.

وبالتالي تكون معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(0,1,-2), P_2(-1,0,-3)$ هي:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z+2}{-3+2} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow x = y - 1 = z + 2.$$

مثال(٣): أوجد نقط تقـاطع المستقيم $\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+4}{2}$ مـع المستـوى $3x + 4y + 12z + 19 = 0$ وأوجد أيضا الزاوية بين المستقيم والمستوى.

الحل:

Put $\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+4}{2}=\lambda.$

$\therefore x = \lambda - 2,\ y = -2\lambda + 4,\ z = 2\lambda - 4 \quad (*).$

وبالتعويض في معادلة المستوى نحصل على:

$3(\lambda - 2) + 4(-2\lambda + 4) + 12(2\lambda - 4) + 19 = 0.$

$\therefore \lambda = 1.$

وبالتعويض في العلاقة (*) تكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى هي $(-1, 2, -2)$.

وحيث إن نسب اتجاه المستقيم هي $1, -2, 2$ ونسب اتجاه العمودي على المستوى هي $3, 4, 12$ فإذاً الزاوية θ بين المستقيم والعمودي على المستوى تُعطى من العلاقة:

$$\cos\theta = \frac{(1)(3)+(-2)(4)+(2)(12)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+16+144}} = \frac{19}{(3)(13)}.$$

وبذلك تكون الزاوية التى يصنعها المستقيم مع المستوى هي $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

د- طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم:

طول العمود R النازل من النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على المستقيم:

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}.$$

حيث L, M, N هي جيوب تمام الاتجاه الفعلية للمستقيم ، ويمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) يُعطى من العلاقة:

$$\overline{R}^2 = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-[L(x_1-x_0)+M(y_1-y_0)+N(z_1-z_0)].$$

مثال(٤): أوجد طول العمود النازل من النقطة P(1, -1, 2) على المستقيم المار بالنقطة $P_1(-1, 2, -1)$ وعمودي على المستوى $2x + y - 2z + 3 = 0$.

الحل:

نسب اتجاه العمودي على المستوى هي 2- ,1 ,2 وتكون هي نفس نسب اتجاه المستقيم (حيث إنه عمودي على المستوى)

وعلى ذلك تكون معادلة المستقيم القياسية هي:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}.$$

ومن ثم فإن طول العمود R النازل من النقطة P(1, -1, 2) على المستقيم يُعطى من:

$$\overline{R}^2 = (1+1)^2+(-1-2)^2+(2+1)^2-\left[\frac{2}{3}(1+1)+\frac{1}{3}(-1-2)-\frac{2}{3}(2+1)\right]^2$$

$$=4+9+9-\left(\frac{-5}{3}\right)^2=\frac{173}{9}.$$

$$\therefore \overline{R}=\left|\frac{173}{9}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

هـ تقاطع مستقيمين فى الفضاء الثلاثي:

شرط تقاطع المستقيمين (وهو شرط وقوعهما في مستوى واحد):

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}\ ,\ \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}.$$

يكون:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

ومعادلة المستوى الذي يقعان فيه تكون:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \ \vee\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 .$$

<u>مثال(٥):</u> تحقق من أن المستقيمين:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-1},\quad \frac{x-4}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{3}.$$

يقعان في مستوى واحد .ثم أوجد معادلة هذا المستوى.

<u>الحل:</u>

شرط تقاطع مستقيمين (وقوعهما في مستوى واحد) هو:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1 & \mathrm{z}_2-\mathrm{z}_1 \\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{c}_2 \end{vmatrix}=0.$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 4-1 & 3-2 & -2-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

أي أن المستقيمين متقاطعان.

وتكون معادلة المستوى الواقعان فيه هي:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

أي تكون:

$10x + 3y + 11z - 27 = 0.$

مثال(٦): تحقق من أن المستقيمين:

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

يكونا غير متقاطعتين .ثم أوجد معادلتى العمود المشترك بينهما.

الحل:

شرط تقاطع المستقيمين يكون:

$$\begin{vmatrix} 2+3 & 4+1 & -1-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46 \neq 0.$$

وإذاً المستقيمان غير متقاطعين.

وبفرض أن PQ هو العمود المشترك بينهما وأن a, b, c هي نسب اتجاهه فإن:

$-a + 2b + c = 0, \quad 3a + b + c = 0.$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على (تحقق من ذلك؟):

$a = 1, b = 4, c = -7.$

والمستقيم PQ يُعطى بالمستويين P_1PQ, P_2PQ

وحيث إن المستوى P_1PQ معادلته يمكن كتابتها بالصورة:

$L(x+3) + M(y+1) + N(z-2) = 0.$

لأنه يمر بالنقطة $P_1(-3, -1, 2)$

والمستقيمان P_1P, PQ واقعان في هذا المستوى فيكون:

$-L + 2M + N = 0, \quad L + 4M - 7N = 0.$

وبحذف L, M, N من المعادلتين السابقتين نحصل على معادلة المستوى P_1PQ بالصورة:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 3x = y + z + 8 = 0 .$$

وبنفس الطريقة نجد أن معادلة المستوى P_2PQ تكون على الصورة:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = x - 2y - z + 5 = 0 .$$

تمارين

١ – أوجد قيمة d التي تجعل المستقيم $3x - y + 2z - 6 = 0,\ x + 4y - z + d = 0$ يقطع المحور OX.

٢ – أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z-1}{3}$.

٣ – أوجد الزاوية بين المستقيمين (i), (ii) حيث:

(i) $2x - 2y - z + 8 = 0,\quad x + 2y - 2z + 1 = 0.$

(ii) $4x + y + 3z - 21 = 0,\quad 2x + 2y - 3z + 15 = 0.$

٤ – هل يقع المستقيمان (i), (ii) في مستوى واحد؟

(i) $4x + y + 3z = 0,\quad 2x + 3y + 2z - 9 = 0.$

(ii) $3x - 2y + z + 5 = 0,\quad x - 3y - 2z - 3 = 0.$

٥ – أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ مع المستوى:

$2x + 3y + 3z - 8 = 0.$

٦ – أوجد الزاوية بين المستقيم $3x - 2y = 24,\ 3x - y = -4$ والمستوى:

$6x + 15y - 10z + 31 = 0.$

٧ – أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (3, -2, 1) وعمودي على المستقيم:

$\frac{2x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}.$

٨– تحقق من أن المستقيم $x + y - z = 1,\ 2x + z = 3$ والمستقيم $x = y = z - 1$ يكونا غير واقعان في مستوى واحد ، وأوجد معادلات العمود المشترك عليهما ، وأوجد أيضاً طول أقصر بُعد بينهما.

٩ – أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (-1, -2, 3) ويوازي المستقيمان:

$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6},\quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}.$

١٠– أوجد معادلة المستوى المار بالمستقيم $x + y = 0,\ x - y + z - 2 = 0$ ويكون موازياً للمستقيم $x = y = z$.

ثالثاً: الكره

أ- تعريف: تُعرف الكره بأنها المحل الهندسي لنقطة تتحرك فى الفضاء الثلاثي بحيث تظل دائماً على بعد ثابت من نقطة ثابتة فى الفضاء الثلاثي.

وتُسمى النقطة الثابتة مركز الكره ، ويُسمى البعد الثابت نصف قطر الكره.

والصورة الكرتيزية لمعادلة الكره في تكون:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 . \qquad (1)$$

حيث $M(\alpha, \beta, \gamma)$ مركز الكره ، R نصف قطرها.

وواضح أنها معادلة من الدرجة الثانية في x, y, z وتحقق الشرطين:

(١) كلاً من معامل x^2 ومعامل y^2 ومعامل z^2 لا يساوي الصفر.

(٢) كلاً من معامل xy ومعامل zy ومعامل zx يساوي الصفر.

ومن ثم فإن أي معادلة من الدرجة الثانية في x, y, z تحقق الشرطين السابقين تمثل كره أي أن:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0. \qquad (2)$$

تمثل كره فى الفضاء الثلاثي.

- **ملاحظات ونتائج:**

١ ـ إذا كان مركز الكره هو نقطة الأصل (القطب) فإن معادلتها تُصبح:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 . \qquad (3)$$

٢ ـ المعادلة (2) يمكن تحويلها إلى المعادلة (1) ويكون مركز الكره هو $(-a, -b, -c)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

وتكون الكره حقيقة إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 > d$

وتكون الكره تخيلية إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 < d$

وتُصبح الكره نقطة عندما يكون $a^2 + b^2 + c^2 = d$.

٣ ـ المعادلة (2) تشمل على أربعة ثوابت a, b, c, d ولذلك فإن الكرة تتحدد بأربعة شروط مستقلة.

▪ **أمثلة:**

مثال(١): أوجد مركز ونصف قطر الكره:

$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y + 8z + 15 = 0.$

الحل:

نكتب المعادلة في الصورة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + \frac{15}{4} = 0.$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 - 1 - 4 - 1 + \frac{15}{4} = 0.$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \frac{9}{4}.$$

وعلى ذلك يكون مركز الكره ونصف قطرها هما على الترتيب:

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -2, -1), \quad R = \frac{3}{2}.$$

مثال(٢): بطريقتين مختلفتين أوجد معادلة كره معلومة بالنسبة لنهاية أقطارها .

الحل:

الطريقة الأولى: نفرض أن $P_1(x_1, y_1, z_1), P_1(x_2, y_2, z_2)$ نهايتا القطر في الكره .

وإذاً مركز الكرة M يكون هو (منتصف المسافة بين P_1, P_2):

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

وبالتالي تكون معادلة الكره:

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)^2 = R^2 .$$

وحيث إن P_2 تقع على سطح الكره فإنها تحقق معادلتها أي يكون:

$$\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(z_2 - \frac{z_1 - z_2}{2}\right)^2 = R^2.$$

$$\therefore \tfrac{1}{4}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] = R^2 .$$

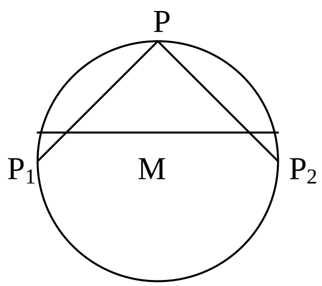
ومن ثم تكون معادلة الكره المطلوبة هي:

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2=$$
$$\tfrac{1}{4}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right].$$

وهذه تؤول إلى الصورة:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0. \qquad (4)$$

<u>الطريقة الثانية</u>: هي أبسط وتتلخص في أخذ أي نقطة $P(x, y, z)$ على سطح الكره فيكون PP_1 عمودياً على PP_2 (انظر الشكل):



وحيث إن نسب اتجاه PP_1 هي $x-x_1, y-y_1, z-z_1$

ونسب اتجاه PP_2 هي $x-x_2, y-y_2, z-z_2$

وإذاً من التعامد يكون:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في x,y,z وهي تمثل معادلة الكره المطلوبة.

مثال(٣): أوجد معادلة الكره التي تمر بالنقط:

$P_1(1, -1, -1), P_2(3, 3, 1), P_3(-2, 0, 5), P_4(-1, 4, 4,)$.

الحل:

الصورة العامة لمعادلة الكره هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

وبالتعويض بالنقط المعطاة نحصل على:

$$3 + 2a - 2b - 2c + d = 0, \qquad 29 - 4a + 10c + d = 0,$$
$$19 + 6a + 6b + 2c + d = 0, \qquad 33 - 29 + 8b + 8c + d = 0.$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على:

$$a = 0, b= -1, c = -2, d = -9.$$

(تحقق من ذلك؟)

وبالتالي فإن معادلة الكره تكون هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 9 = 0.$$

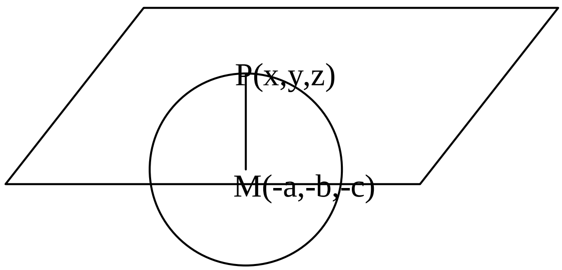
ب- العمودى على سطح كره:

إذا كانت p نقطة ما على سطح كره فإن العمودي على سطح الكره عند p يكون هو العمودي على المستوى المماس للكرة عند p .

وبفرض أن $P(z_1, y_1, z_1)$ ومعادلة الكره فى الصورة العامة (2) فيكون مركز الكره

هو $M(-a, -b, -c)$ ويكون MP هو العمودي على سطح الكره عند النقطة p .

(انظر الشكل):



وإذاً معادلة العمودي على سطح الكره عند النقطة p تكون:

$$\frac{x-x_1}{-a-x_1}=\frac{y-y_1}{-b-y_1}=\frac{z-z_1}{-c-z_1}.$$

أي تكون:

$$\frac{x-x_1}{a+x_1}=\frac{y-y_1}{b+y_1}=\frac{z-z_1}{c+z_1}. \qquad (5).$$

ج- المستوى المماس للكره:

من المعادلة (5) نستنتج مباشرة أن المستوى المماس للكره (1) عند النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ يُعطى مباشرة بالمعادلة:

$$(x_1 + a)(x - x_1) + (y_1 + b)(y - y_1) + (z_1 + c)(z - z_1) = 0 .$$

أي أن:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c(z + z_1) = 0. \qquad (6)$$

د- طول المماس المرسوم للكره:

نفرض أن النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ خارج الكره (2) فإنه يمكن من P رسم عدد لانهائي من المستقيمات المماسة للكرة. وتكون أطوال هذه المماسات متساوية.

وبفرض أن أحد هذه المماسات يمس الكرة في النقطة N فيكون مربع طول المماس PN هو:

$$\overline{PN}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{R}^2 = (x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2 + (z_1 + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - d).$$

$$\therefore \overline{PN}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + 2cz_1 + d . \qquad (7)$$

هــ المستوى الأساسي لكرتين:

نفرض كرتين معادلاتهما معطاة بالصورة:

$F_1(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0,$
$F_2(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2a_2x + 2b_2y + 2c_2z + d_2 = 0.$

نوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك فى الفضاء الثلاثي بحيث تكون النسبة بين طول المماس المرسوم منها للكره $F_1(x, y, z)$ إلى طول المماس المرسوم منها للكرة $F_2(x, y, z)$ نسبة ثابتة دائماً ولتكن λ فتكون معادلة هذا المحل الهندسي بالصورة:

$$\frac{F_1(x,y,z)}{F_2(x,y,z)} = \lambda^2 .$$

أي أن:

$$F_1(x, y, z) - \lambda^2 F_2(x, y, z) = 0. \qquad (*)$$

وهذه المعادلة تمثل كره لأن:

معامل x^2 = معامل y^2 = معامل z^2 = $(1 - \lambda^2)$ لا يساوي الصفر .

ومعامل yx = معامل yz = معامل zx = الصفر.

وكحالة خاصة عندما يكون $\lambda = 1$ أي أن المحل الهندسي لنقطة تتحرك فى الفضاء الثلاثي بحيث يكون طول المماسين المرسومين منها للكرتين متساويين فإن (*) تُعطى في هذه الحالة مستوى معادلته هي:

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(c_1 - c_2)z + d_1 - d_2 = 0. \qquad (8)$$

ويُسمى هذا المستوى (8) بالمستوى الأساسي للكرتين .

ويجب أن نلاحظ أن المستوى الأساسي للكرتين يكون عمودي على خط مركزي الكرتين لأن نسب اتجاه M_1M_2 (المستقيم الواصل بين مركزي الكرتين) تكون هي:

$$-a_1 + a_2,\ -b_1 + b_2,\ -c_1 + c_2.$$

أي تكون:

$$a_1 - a_2,\ b_1 - b_2,\ c_1 - c_2 .$$

وهذه هي نسب اتجاه العمودي على المستوى الأساسي (8) للكرتين.

وواضح كذلك أن المستوى الأساسي للكرتين يمر بالنقط المشتركة للكرتين، ولذلك إذا تماست الكرتان فإن المستوى الأساسي يكون مماساً للكرتين عند نقطة تماسهما.

مثال(٤): أوجد طول المماس المرسوم من النقطة (1, -1, 2) للكرة:

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 4y + 5z - 4 = 0.$

الحل:

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{2}x - 2y + \frac{5}{2}z - 2 = 0.$$

$$\therefore\ P(1, -1, 2) = 1 + 1 + 4 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} - 2 = \frac{25}{2}.$$

وإذاً طول المماس من النقطة (1, -1, 2) للكرة يكون $\overline{PN} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

مثال(٥): أوجد المستوى الذي يمر بالمستقيم $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ ويمس الكره:

$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 10x - 10y - 30z + 51 = 0.$

الحل: نكتب معادلة المستقيم المُعطى بالصورة $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$

$\therefore\ 2x = y + 1 = 0,\quad 3x - z = 0.$

وإذاً معادلة أي مستوى يمر بالمستقيم المُعطى تكون بالصورة:

$\lambda_1(2x - y + 1) + \lambda_2(3x - 2) = 0.$

$\therefore (2\lambda_1 + 3\lambda_2)\,x - \lambda_1 y - \lambda_2 z + \lambda_1 = 0. \qquad (**)$

ومن معادلة الكره المعطاه يكون مركزها النقطة (1, 1, 3)

ومربع نصف قطرها يكون $R^2 = \frac{4}{5}$.

ولكي يكون المستوى (**) مماساً للكره يجب أن يتحقق الشرط:

$$\frac{4}{5} = \frac{\left[(2\lambda_1 + 3\lambda_2) - \lambda_1 - 3\lambda_2 + 1\right]^2}{(2\lambda_1 + 3\lambda_2)^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{4\lambda_1^2}{5\lambda_1^2 + 12\lambda_1\lambda_2 + 10\lambda_2^2}..$$

$$\therefore 20\lambda_1^2 + 48\lambda_1\lambda_2 + 40\lambda_2^2 = 20\lambda_1^2 \Rightarrow 5\lambda_2^2 + 6\lambda_1\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0,\ \lambda_2 = \frac{-6}{5}\lambda_1.$$

وبالتعويض في (**) نحصل على:

$$\lambda_1(2x - y + 1) = 0\ ,\ \lambda_1(2x - y + 1) - \frac{6}{5}\lambda_1(3x - z) = 0.$$

ومن ثم يكون $2x - y + 1 = 0\ ,\ 8x - 5y - 6z - 5 = 0$

وإذاً يوجد مستويان يمران بالمستقيم المُعطى يمسان الكره .

مثال(٦): أوجد المستوى الأساسي للكرتين:

$x^2 + y^2 \; z^2 - 2x + 2y - 4z + 5 = 0,$

$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 8z - 1 = 0.$

الحل:

معادلة المستوى الأساسي للكرتين تكون هي:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 5 - \frac{1}{4}(4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 8z - 1) = 0.$

أي أن:

$$\mathbf{8x - 16y + 24z - 21 = 0.}$$

و- تقاطع كرتين:

نفرض كرتين معادلاتهما معطاة بالصورة:

$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0,$
$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a_2x + 2b_2y + 2c_2z + d_2 = 0.$

وإذاً مركزي ونصف قطري الكرتين يكونا:

$M_1(-a_1,-b_1,-c_1)$, $M_2(-a_1,-b_1,-c_1)$.
$R_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1$, $R_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - d_2$.

فإذا كان $M_1M_2 > R_1 + R_2$ ففي هذه الحالة يكون للكرتين نقط مشتركة ، أما إذا كان $M_1M_2 = R_1 + R_2$ فإن الكرتين يكون لهما نقطة واحدة مشتركة أي تكون الكرتان متماستان ، أما إذا كان $M_1M_2 < R_1 + R_2$ فإن الكرتان تتقاطعان في دائرة مستواها هو المستوى الأساسي للكرتين ، وفي هذه الحالة إذا أخذنا أي نقطة P على دائرة التقاطع هذه ورسمنا مستويين يمسان الكرتين عند P فإن الزاوية بين هذين المستويين تُسمى زاوية تقاطع الكرتين ، وحيث إن العمودين على المستويين المماسين هما PM_1, PM_2 إذاً زاوية تقاطع الكرتين تكون هي $\theta = \angle M_1PM_2$.

ومن المثلث M_1PM_2 نحصل على:

$$\overline{M_1M_2^2} = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos\theta. \qquad (9)$$

ومن هذه العلاقة يمكن إيجاد زاوية التقاطع θ .

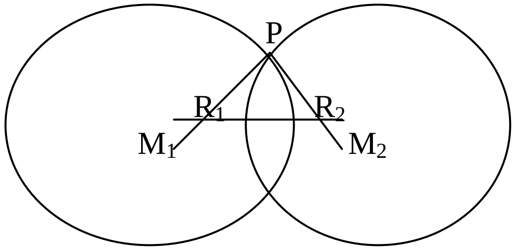
وإذا كان التقاطع على التعامد أي أن $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن العلاقة (9) تُصبح:

$$\overline{M_1M_2^2} = R_1^2 + R_2^2.$$

$\therefore (a_1-a_2)^2+(b_1- b_2)^2+(c_1- c_2)^2 = (a_1)^2+(b_1)^2+(c_1)^2-d_1+(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2-d_2.$

$$\therefore\ 2a_1a_2 + 2b_1b_2 + 2c_1c_2 = d_1 + d_2. \qquad (10)$$

العلاقة (10) هذه هي شرط تقاطع الكرتين على التعامد (انظر الشكل):



تماريــن

١ ـ أوجـد معادلـة الكرة التـى تمر بـالنقطـة $(6, -1, 0)$ والمستوى المماس لـها عند النقطـة $(2, -8, 3)$ هو $4x - 8y - z - 69 = 0$.

٢ ـ أوجد معادلة الكرة التـى تمر بالنقطة $(-7, 4, 12)$ وبدائرة تقاطع الكرتين:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 11 = 0 , \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z - 151 = 0.$

٣ ـ أوجد معادلة الكرة التـى تمر بدائرة تقاطع الكرتين:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y + 1 = 0 , \quad x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 34y - 30z + 37 = 0.$

٤ ـ أوجد زاوية تقاطع الكرتين:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x + 7 = 0.$

ثم أوجد المستوى الأساسي لهما . واستنتج معادلة الكرة التي تشترك معهما في المستوى الأساسي وتقطع الكرة الأولى على التعامد.

الباب الثالث

نظرية السطوح في الفضاء الثلاثي

أي سطح في الفضاء الثلاثي يحقق خاصية معينة تميزه عن غيره من سطوح الفضاء الثلاثي.

فإذا نسبنا هذا السطح إلى مجموعة الإحداثيات الكارتيزية OXYZ ، وفرضنا نقطة ما

$P(x, y. z)$ على السطح فإن الخاصية المشار إليها يُعبر عنها جبرياً بالمعادلة:

$$\mathbf{F(x, y, z) = 0.} \qquad \mathbf{(1)}$$

في المتغيرات x,y,z حيث تتحقق هذه المعادلة بكل نقطة من نقط السطح ولا تتحقق بأي نقطة أخرى غير واقعة على السطح.

والعكس صحيح بمعنى أن أي معادلة في المتغيرات x, y, z على صورة المعادلة (1) تعبر عن سطح في الفضاء الثلاثي مكون من جميع نقط الفضاء الثلاثي المحققة للمعادلة (1).

فمثلا معادلة الدرجة الثانية في $x; y; z$ والتي على الصورة:

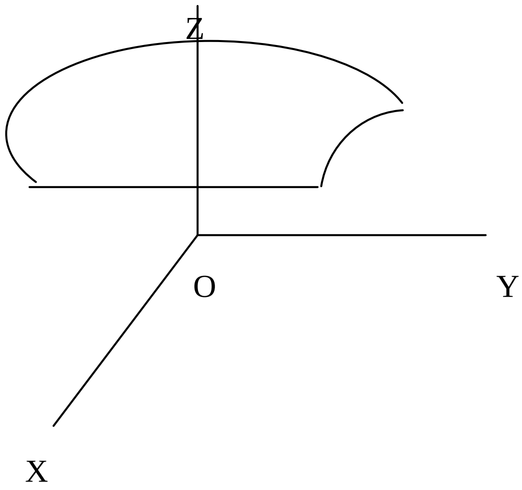
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0. \qquad (2)$$

تمثل في الفضاء الثلاثي سطحاً.

والسطح (2) يمثل كره عندما $a^2 + b^2 + c^2 > d$ وإذا كان $a^2 + b^2 + c^2 = d$ فإن السطح (2) يكون عبارة عن نقطة حقيقية واحدة وهي $(-a, -b, -c)$ ، أما إذا كان $a^2 + b^2 c^2 < d$ فإن (2) يكون عبارة عن كره تخيلية.

١ ـ السطوح الجبرية:

المعادلة $F(x, y, z) = 0$ تمثل سطحاً جبرياً من الدرجة النونية إذا كانت $F(x,y,z)$ عبارة عن دالة جبرية صحيحة من الدرجة النونية.



والمستوى في الفضاء الثلاثي يُعتبر سطح جبري من الدرجة الأولى ،

والكره سطح جبري من الدرجة الثانية.

وُيلاحظ أن درجة السطح لا تتوقف على مجموعة الإحداثيات الكارتيزية OXYZ وذلك لأنه إذا أُعطى السطح بالمعادلة (1) في مجموعة الإحداثيات OXYZ وحصل تغيير في المحاور لتُصبح مثلاً $O'X'Y'Z'$ فإننا نحصل على معادلة في x',y',z' من نفس صورة ودرجة المعادلة الجبرية (1) والمعادلتين:

$$F_1(x, y, z) = 0 , \quad F_2(x, y, z) = 0. \qquad (3)$$

تحددان في الفضاء الثلاثي سطحين ، والنقط المشتركة لهذين السطحين تحدد في الفضاء الثلاثي منحنى. وواضح أن المعادلتين (3) تتحققان في آن واحد بكل نقطة من النقط المشتركة للسطحين المذكورين ولا تتحققان بأي نقطة أخرى.

ولذلك فإن المعادلتين (3) تدلان معاً على منحنى تقاطع سطحين في الفضاء الثلاثي ، والعكس صحيح أي منحنى في الفضاء الثلاثي يمكن اعتباره ناشئ من تقاطع سطحين في الفضاء الثلاثي.

مثال(١): المعادلتان $2x - y + 3z - 5 = 0,\ \ x+y-z+1=0$ (وهما معادلتا مستويين) تدلان على منحنى في الفضاء الثلاثي (ويكون عبارة عن مستقيم).

مثال(٢): المعادلتان $x = 1,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (وهما معادلتا مستوى وكره) تدلان على منحنى في الفضاء الثلاثي (ويكون عبارة عن دائرة).

مثال(٣): المعادلتان $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$ (وهما معادلتا كرتين) تدلان على منحنى في الفضاء الثلاثي (ويكون أيضاً عبارة عن دائرة).

٢ ـ السطوح الأسطوانية والمخروطية والدورانية:

نُعطي فيما يلي فكرة مختصرة عن السطوح الأسطوانية والمخروطية والدورانية مع ملاحظة أن هذه السطوح من الممكن أن تكون سطوح جبرية أو غير جبرية.

أولاً: السطوح الأسطوانية

يُعرف السطح الأسطواني بأنه السطح الذي يرسمه مستقيم يتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل دائماً قاطعاً لمنحنى معين وموازياً لمستقيم ما في الفضاء الثلاثي.

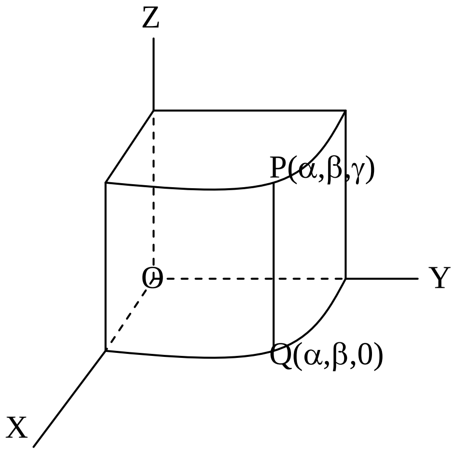
ويُسمى المستقيم المتحرك راسم السطح الأسطواني ، ويُسمى المنحنى المُعطى
دليل السطح الأسطواني.

وإيجاد معادلة السطح الأسطواني توجد حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان دليل السطح الأسطواني واقع في إحدى مستويات الإحداثيات وليكن مثلاً المستوى OXY وراسم السطح الأسطواني يوازي المحور OZ ودليل السطح الأسطواني مُمثل بالمعادلة:

$$F(x,y) = 0. \qquad (4)$$

فلإيجاد معادلة السطح الأسطواني نفرض أن $P(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة ما على السطح وأن Q هي مسقط P على المستوى OXY وبالتالي تكون $Q(\alpha,\beta,0)$ (انظر الشكل):



وحيث إن Q تحقق معادلة الدليل (4) فبالتعويض يكون:

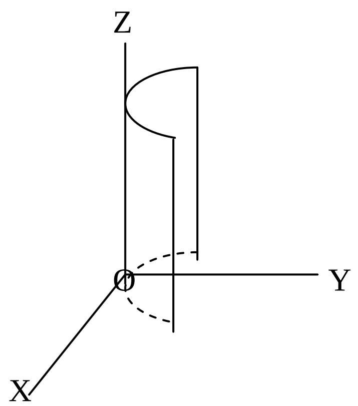
$$F(\alpha,\beta) = 0. \qquad (5)$$

أي أن P تحقق المعادلة (4) وبذلك نستنتج أن المعادلة (4) تمثل في الفضاء الثلاثي سطحاً أسطوانياً وهو المطلوب.

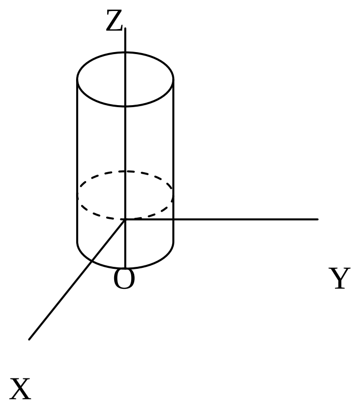
وبنفس الطريقة يمكن توضيح أن المعادلة $F(y,z) = 0$ تمثل في الفضاء الثلاثي سطحاً أسطوانياً رواسمه توازي المحور OX ، وأن المعادلة $F(x,z) = 0$ تمثل سطحاً أسطوانياً رواسمه توازي المحور OY.

<u>مثال:</u> المعادلات $y^2 = 4ax,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ تمثل سطح أسطواني رواسمه توازي المحور OZ

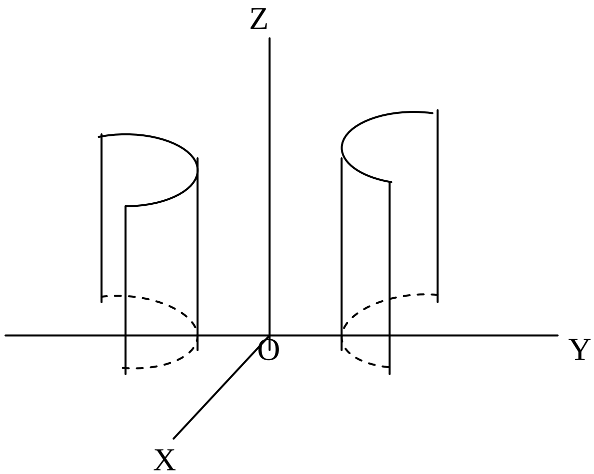
وتكون على الترتيب أسطوانة قائمة مكافئة ، وأسطوانة قائمة ناقصية ، وأسطوانة قائمة زائدية (انظر الشكل):



(أسطوانة قائمة مكافئة)



(أسطوانة قائمة ناقصية)



(أسطوانة قائمة زائدية)

الحالة الثانية: إذا كان دليل السطح الأسطواني مُعطى بالمعادلتين:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \qquad (6)$$

وأن نسب اتجاه راسم السطح هي L, M, N .

لإيجاد معادلة السطح نفرض أن $P(\alpha, \beta, \gamma)$ أي نقطة على الدليل (6) فتكون معادلات راسم السطح هي:

$$\frac{x-\alpha}{L} = \frac{y-\beta}{M} - \frac{z-\gamma}{N}. \qquad (7)$$

وحيث إن النقطة(α, β, γ) واقعة على الدليل فهي تحقق (6) أي أن:

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad F_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \qquad (8)$$

وبحذف α, β, γ بين المعادلات (7) ,(8) نحصل على معادلة السطح الدوراني.

مثال: أوجد معادلة السطح الأسطواني الذى دليله المستقيم:

$$x + y - z - 1 = 0 , \quad x - y + z = 0.$$

ورواسمه توازي المستقيم $x = y = z$.

الحل: نأخذ نقطة (α, β, γ) على الدليل فتكون معادلة الراسم المار بهذه النقطة هي:

$$\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z-\gamma}{1}. \qquad (*)$$

وحيث إن (α, β, γ) واقعة على الدليل فتحقق معادلاته أي أن:

$$\boldsymbol{\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0 , \quad \alpha - \beta + \gamma = 0. \qquad (**)}$$

وبحذف α, β, γ من العلاقات (**) , (*) وذلك بوضع:

$$\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z-\gamma}{1} = \lambda .$$

أي أن $\alpha = x - \lambda , \beta = y - \lambda , \gamma = z - \lambda$ وبالتعويض في (**) نحصل على:

$$(x - \lambda) + (y - \lambda) - (z - \lambda) - 1 = 0 , \quad (x - \lambda) - (y - \lambda) + (z - \lambda) = 0.$$

$$\therefore x + y - z - 1 = \lambda , \quad x - y + z = \lambda.$$

$$\therefore x + y - z - 1 = x - y + z.$$

$$\therefore 2y - 2z - 1 = 0.$$

وهذه هي معادلة السطح الأسطواني المطلوبة ، وواضح أنها تمثل مستوى عمودي على المستوى YOZ.

ثانياً: السطوح المخروطية

تعريف: يُعرف السطح المخروطي بأنه السطح الذي يرسمه مستقيم يتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يقطع دائماً منحنى معين ، ويمر دائماً بنقطة ثابتة غير واقعة على المنحنى.

وتُسمى النقطة الثابتة رأس السطح المخروطي ، ويُسمى المنحنى المُعطى دليل السطح المخروطي ، والمستقيم المتحرك راسم السطح المخروطي.

ونُوجد معادلة السطح المخروطي بنفس الطريقة التى أُتبعت سابقاً لإيجاد معادلة السطح الأسطواني:

لذلك نفرض أن دليل السطح المخروطي بالصورة:

$F_1(x, y, z) = 0 , \quad F_2(x, y, z) = 0.$

وأن رأس السطح المخروطي هي النقطة (x_0, y_0, z_0)، وبأخذ أي نقطة $P(\alpha, \beta, \gamma)$ على دليل السطح المخروطي فتكون معادلة راسم السطح المخروطي المار بالنقطة P هي

$$\frac{x - x_0}{\alpha - x_0} = \frac{y - y_0}{\beta - y_0} = \frac{z - z_0}{\gamma - z_0} . \qquad (*)$$

وحيث إن P واقعة على الدليل فهى تحقق معادلاته أي أن:

$F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0 , \quad F_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \qquad (**)$

وبحذف α, β, γ بين $(*),(**)$ نحصل على معادلة السطح المخروطي.

نتيجة: معادلة السطح المخروطي الذي رأسه النقطة (x_0, y_0, z_0) تكون متجانسة بالنسبة للفروق: $x - x_0, \; y - y_0, \; z - z_0$.

مثال: أوجد معادلة المخروط الذي رأسه النقطة $(1, -1, 2)$ ودليله المنحنى:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \; , \; x + y + z = 1 .$$

الحل: نأخذ أي نقطة (α, β, γ) على دليل المخروط فتكون معادلات الراسم المار بهذه النقطة هي (معادلة مستقيم يمر بنقطتين):

$$\frac{x - 1}{\alpha - 1} = \frac{y + 1}{\beta + 1} = \frac{z - 2}{\gamma - 2} . \qquad (*)$$

وحيث إن (α, β, γ) واقعة على الدليل فتحقق معادلاته أي أن:

$$\alpha^2 + 2\beta^2 = 2\,,\quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \qquad (**)$$

وبحذف α, β, γ بين $(*)$,$(**)$ وذلك بوضع:

$$\frac{x-1}{\alpha-1} = \frac{y+1}{\beta+1} = \frac{z-2}{\gamma-2} = \lambda.$$

$$\therefore \alpha = \frac{x-1+\lambda}{\lambda},\ \beta = \frac{y+1-\lambda}{\lambda},\ \gamma = \frac{z-2+2\lambda}{\lambda}.$$

وبالتعويض في $(**)$ نحصل على:

$$(x-1+\lambda)^2+2(y+1-\lambda)^2 = 2\lambda^2\,,\quad (x-1+\lambda)+(y+1-\lambda)+(z-2+2\lambda) = \lambda\,.$$

$$\therefore [(x-1)+\lambda]^2+2[(y+1)-\lambda]^2 = 2\lambda^2\,,\quad x+y+z-2 = -\lambda\,.$$

$$\therefore [(x-1)-(x+y+z-2)]^2+2[(y+1)+(x+y+z-2)]^2 = 2(x+y+z-2)^2.$$

وبذلك تكون معادلة المخروط المطلوبة هي:

$$7y^2 + z^2 + 4xy + 6yz + 4x - 2y + 2z - 5 = 0.$$

ثالثاً: السطوح الدورانية

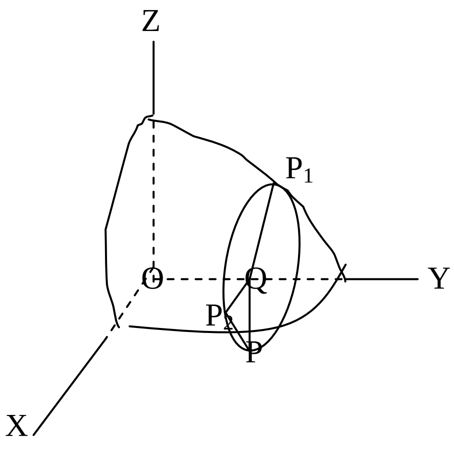
تعريف: يُعرف السطح الدوراني بأنه السطح الناشئ من دوران منحنى مستوي حول محور في مستواه دورة كاملة، ويُسمى هذا المنحنى بالمنحنى الراسم للسطح ، ويُسمى المستوى الموجود فيه المنحنى بمستوى الزوال للسطح الدوراني.

ولإيجاد معادلة السطح الدوراني:

نفرض أن المنحنى الراسم للسطح الدوراني واقع في المستوى YOZ ومُعطى بالمعادلة:

$$\mathbf{F(y, z) = 0.} \qquad \mathbf{(10)}$$

لإيجاد معادلة السطح الناشئ من دوران هذا المنحنى حول المحور OY نفرض P(x,y z) أي نقطة على السطح الدوراني ، ثم نرسم مستوى يمر بالنقطة P وعمودياً على المحور OY فإذا كانت P, Q نقطتا تقاطع هذا المستوى مع المحور OY والمنحنى (10) على الترتيب فواضح أن مقطع السطح بالمستوى المشار إليه يكون دائرة مركزها النقطة Q (انظر الشكل):



ومن الشكل يتضح أن:

$P_1(y,z)$, $Q(0,y,0)$.

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{x^2 + z^2},\ QP_1 = \pm z_1.$$

وحيث إن النقطة P_1 تحقق المعادلة (10) إذاً يكون:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0. \qquad (11)$$

هي معادلة السطح الدوراني حيث إنها تتحقق بكل النقطة الواقعة على السطح.

مما سبق يتضح أنه للحصول على معادلة السطح الدوراني الناشئ من دوران المنحنى (10) في المستوى YOZ حول المحور OY يجب أن نضع $\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)$ في المعادلة (10) بدلاً من z .

<u>مثال</u>: بدوران القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ حول المحور OX نحصل على السطح:

$$y^2 + z^2 = 4ax. \qquad (12)$$

ويُسمى هذا السطح بالسطح المكافئ الدوراني .

وبدوران القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول المحور OX نحصل على السطح:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1. \qquad (13)$$

وبدورانه حول المحور OY نحصل على السطح:

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (14)$$

وكل من السطحين (13), (14) يُسمى سطح ناقص دوراني .

كذلك بدوران القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ حول المحور OX نحصل على السطح:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1. \qquad (15)$$

وحول المحور OZ نحصل على السطح:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (16)$$

ويُسمى السطح الدوراني (15) سطح زائد دوراني ذو طيتين ، بينما السطح الدوراني (16) يُسمى سطح زائد دوراني ذو طية واحدة.

رابعاً: نقل ودوران محاور الإحداثيات في الفضاء الثلاثي

أـ نقل نقطة الأصل دون تغيير اتجاه المحاور:

نفرض أن OXYZ مجموعة الإحداثيات الكارتيزية في الفضاء الثلاثي ثم نُقلت نقطة الأصل O إلى النقطة O' دون تغيير اتجاه المحاور فنحصل بذلك على مجموعة إحداثيات جديدة ولتكن $O'X'Y'Z'$ ، ولنفرض أن إحداثيات O' هي (a, b, c) بالنسبة إلى الإحداثيات OXYZ ،وأن P(x, y, z) نقطة ما في الفضاء الثلاثي إحداثياتها بالنسبة إلى الإحداثيات الجديدة $O'X'Y'Z'$ هي (x', y', z').

فتكون العلاقة بين الإحداثيات الأصلية (x, y, z) للنقطة P والإحداثيات الجديدة (x', y', z') للنقطة P هي:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \\ z &= z' + c \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

ب- دوران المحاور مع بقاء نقطة الأصل:

نفرض أن النقطة P(x, y, z) بالنسبة إلى الإحداثيات الأصلية OXYZ ، وإحداثياتها (x', y', z') بالنسبة إلى الإحداثيات الجديدة $O'X'Y'Z'$ ،ولإيجاد العلاقة بين(x, y, z)، (x', y', z') . نفرض أن L_1, M_1, N_1 هي جيوب تمام اتجاه OX' بالنسبة إلى المحاور OXYZ ، وأن L_2, M_2, N_2 هي جيوب تمام اتجاه OY' بالنسبة إلى OXYZ ، وأن L_3, M_3, N_3 هي جيوب تمام الاتجاه OZ' بالنسبة إلى OXYZ.

فتكون العلاقة بين الإحداثيات الأصلية (x, y, z) للنقطة P والإحداثيات الجديدة (x', y', z') للنقطة P هي:

$$\left.\begin{aligned} x &= L_1 x' + L_2 y' + L_3 z' \\ y &= M_1 x' + M_2 y' + M_3 z' \\ z &= N_1 x' + N_2 y' + N_3 z' \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

ويمكن استنتاج العلاقة العكسية فتكون:

$$\left.\begin{aligned} x' &= L_1 x + M_1 y + N_1 z \\ y' &= L_2 x + M_2 y + N_2 z \\ z' &= L_3 x + M_3 y + N_3 z \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

مثال: بنقل نقطة الأصل إلى نقطة جديدة احذف حدود الدرجة الأولى من المعادلة:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2x - 16y - 18z + 1 = 0.$$

الحل:

نفرض أن نقطة الأصل الجديدة هي (a, b, c) ونعوض عن x,y,z من العلاقة (1) في المعادلة المُعطاة فنحصل على:

$$(x'+a)^2+4(y'+b)^2+9(z'+c)-2(x'+a)-16(y'+b)-18(z'+c)+1= 0.$$

وبمقارنة المعاملات كما يلي:

x' معامل $\therefore 2a - 2 = 0. \quad \Rightarrow \quad a = 1.$

y' معامل $\therefore 8b - 16 = 0. \ \Rightarrow b = 2.$

z' معامل $\therefore 18c - 18 = 0. \ \Rightarrow c = 1.$

وبذلك تكون نقطة الأصل الجديدة هي $(1, 2, 1)$ وتصبح المعادلة في الإحداثيات الجديدة على الصورة $x'^2 + 4y'^2 + 9z'^2 = 25$ وواضح أنها خالية من حدود الدرجة الأولى وهو المطلوب.

تماريـن

١ ـ بنقل نقطة الأصل إلى نقطة جديدة احذف حدود الدرجة الأولى في كل من المعادلتين الآتيتين:

$$16x^2 + z^2 - 4y^2 - 32x + 24y + 8y - 20 = 0.$$
$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 6x + 20y - 6z - 50 = 0.$$

٢ ـ أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة $(3, -2, 4)$ إذا دارت المحاور بحيث أصبحت جيوب تمام اتجاه المحاور الجديدة هي على الترتيب $OX^{/}$, $OY^{/}$, $OZ^{/}$ حيث:

$$OX^{\backslash} = \left[\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right],\ OY^{\backslash} = \left[\frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}\right],\ OZ^{\backslash} = \left[\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}\right].$$

٣ ـ أوجد صورة المعادلة $x^2+y^2+z^2-16xy+8xz+8yz = 0$ بعد دوران المحاور بحيث تصبح جيوب تمام اتجاه المحاور الجديدة $OX^{/}$, $OY^{/}$, $OZ^{/}$ هي على الترتيب:

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right],\ \left[\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right],\ \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right].$$

٤ ـ تحقق من أن:

$$L_1 = M_2N_3 - M_3N_2.$$
$$M_1 = N_2L_3 - N_3L_2.$$
$$N_1 = L_2M_3 - L_3M_2.$$

حيث L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2, L_3, M_3, N_3 هي على الترتيب جيوب تمام المحاور الجديدة $O^{/}X^{/}Y^{/}Z^{/}$ بالنسبة إلى المحاور الأصلية $OXYZ$.

٢- سطوح الدرجة الثانية:

تعريف: يُعرف سطح الدرجة الثانية بأنه المحل الهندسي لنقطة في الفضاء الثلاثي تحقق إحداثياتها الكارتيزية معادلة في الصورة:

$$ax^2+by^2+cz^2+2h_1xy+2h_2xz+2h_3yz+2g_1x+2g_2y+2g_3z+d = 0. \qquad (1)$$

ومن هذا التعريف يتضح أن الكره تُعتبر حاله خاصة من سطوح الدرجة الثانية حيث إن في معادلة الكره يكون:

$$a = b = c \neq 0\ ,\quad h_1 = h_2 = h_3 = 0. \qquad (2)$$

ولإيجاد مقطع سطح الدرجة الثانية بمستوى نفرض أن السطح (1) قُطع بمستوى معادلته:

$$Lx + My + Nz = d. \qquad (3)$$

وبنقل نقطة الأصل O إلى النقطة $O^{\backslash}$ على المستوى (3) واختيار المحورين $O^{/}X^{/}, O^{/}Y^{/}$

في المستوى (3) عندئذ تصبح المعادلة (1) على الصورة:

$$a^{/}x^{/2}+b^{/}y^{/2}+c^{/}z^{/2}+2h^{/}_1x^{/}y^{/}+2h^{/}_2x^{/}z^{/}+2h^{/}_3y^{/}z^{/}+2g^{/}_1x^{/}+2g^{/}_2y^{/}+2g^{/}_3z^{/}+d^{\backslash} = 0.$$

ويُصبح المستوى (3) هو المستوى $Z^{/} = 0$ وبذلك يكون مقطع السطح (1) بالمستوى (3) هو عبارة عن منحنى معادلته:

$$a^{/}x^{/2}+b^{/}y^{/2}+2h^{/}_1x^{/}y^{/}+2g^{/}_1x^{/}+2g^{/}_2y^{/}+d^{\backslash} = 0. \qquad (4)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية.

وبالتالي يكون مقطع سطح من الدرجة الثانية بمستوى عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية (مثل أي قطع مخروطى:مكافئ-ناقص-زائد-دائرة-خطان مستقيمان).

- **سطوح خاصة من الدرجة الثانية:**

فيما يلي أمثلة لبعض السطوح الخاصة التي تمثلها معادلات من الدرجة الثانية في x,y,z:

١ ـ المخروط : هو سطح مخروطي دليله قطع مخروطي.

ومعادلة المخروط الذي رأسه النقطة (x_0, y_0, z_0) تكون متجانسة من الدرجة الثانية في $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ أما إذا كانت رأس المخروط هي نقطة الأصل (0, 0, 0) فإن معادلته تكون متجانسة في x, y, z من الدرجة الثانية .

والعكس صحيح أي معادلة متجانسة من الدرجة الثانية في x, y, z تمثل مخروطاً من الدرجة الثانية رأسه نقطة الأصل.

مثال: أوجد معادلة المخروط الذي رأسه (x_0, y_0, z_0) ودليله القطع المخروطي:

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + d = 0.$$

الحل: نفرض أن $P(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة على دليل المخروط وإذاً تحقق معادلته أي أن:

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + 2h\alpha\beta + 2g\alpha + 2f\beta + d = 0 , \quad \gamma = 0. \quad (1)$$

وتكون معادلة الراسم المار بالنقطة P هي:

$$\frac{x - x_0}{\alpha - x_0} = \frac{y - y_0}{\beta - y_0} = \frac{z - z_0}{\gamma - z_0}. \qquad (2)$$

وبحذف α, β, γ بين المعادلتين (1), (2) يكون:

$$\frac{x - x_0}{\alpha - x_0} = \frac{z - z_0}{-z_0}, \ \frac{y - y_0}{\beta - y_0} = \frac{z - z_0}{-z_0}.$$

$$\therefore \alpha = \frac{x_0 z - x z_0}{z - z_0}, \ \beta = \frac{y_0 z - y z_0}{z - z_0}.$$

وبالتعويض في المعادلة (1) يكون:

$$a\left(\frac{x_0 z - x z_0}{z - z_0}\right)^2 + b\left(\frac{y_0 z - y z_0}{z - z_0}\right)^2 + 2h\frac{(x_0 z - x z_0)(y_0 z - y z_0)}{(z - z_0)^2}$$
$$+ 2g\,\frac{x_0 z - x z_0}{z - z_0} + 2f\,\frac{y_0 z - z_0 y}{z - z_0} + d = 0.$$

وبالضرب في $(z - z_0)$ نحصل على معادلة المخروط المطلوبة.

٢ ـ السطح الناقص:

اتضح مما سبق أن المعادلة:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

تمثل سطح ناقص دوراني ينشأ من دوران القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

حول المحور OZ.

ومقطع هذا السطح بالمستوى z = k يكون هو المنحنى:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\,,\ z=k \qquad (2)$$

وهذه العلاقة (2) تمثل معادلة دائرة نصف قطرها $\left|a\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}\right|$ ، وبتغير قيمة k من c – إلى c + فإن الدائرة تتحرك في اتجاه رأسي(اتجاه المحور OZ) وهو راسم السطح. ونحصل على معادلة السطح (1) بحذف k بين المعادلتين في (2)

وإذا بدلنا الدائرة في (2) بمعادلة قطع ناقص على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\,,\ z=k \qquad (3)$$

وسمحنا لهذا القطع بالتحرك رأسياً إلى أعلى بتغير k من c- إلى c+ فإننا نحصل على سطح معادلته تنتج بحذف k من معادلتى القطع الناقص (3) وتكون على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (4)$$

وتُسمى هذه المعادلة بمعادلة السطح الناقص ، وتُسمى a,b,c أنصاف محاوره.

وواضح أن المعادلة (4) تشمل على مربعات x,y,z فقط ،ولذلك فإن السطح الناقص يكون متماثل بالنسبة إلى مستويات الإحداثيات ،وبالنسبة إلى محاور الإحداثيات ونقطة الأصل أيضاً. (والسطح الناقص يُصبح كره عندما يكون $a=b=c$).

٣ ـ السطح الزائد ذو الطية الواحدة:

اتضح مما سبق أن المعادلة:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (5)$$

تمثل سطح زائد ذو طية واحدة ينتج من دوران القطع الزائد:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

حول المحور OZ والمستوى $z=k$ يقطع السطح في منحنى معادلته:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{k^2}{c^2}\ ,\ z=k\ . \qquad (6)$$

وهذه تمثل معادلة دائرة.

فإذا تغيرت k من t- إلى t+ فإن الدائرة (6) تتحرك رأسياً إلى أعلى في اتجاه راسم السطح (5). والمعادلة (5) تنشأ بحذف k من بين المعادلتين في (6) وبنفس الطريقة

كما سبق إذا استبدلنا الدائرة (6) بالقطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ z=k\ . \qquad (7)$$

فإن القطع الناقص (7) يتحرك رأسياً في اتجاه راسم السطح وبحذف k من بين المعادلتين في (7) نحصل على معادلة بالصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (8)$$

وهذه هى معادلة السطح الزائد ذو الطية الواحدة.

وواضح أن معادلة السطح الزائد ذو الطية الواحدة (8) تكون متماثلة بالنسبة إلى مستويات الإحداثيات،ومحاور الإحداثيات ونقطة الأصل، وفي هذه الحالة تكون نقطة الأصل هى مركز القطع حيث إنها تنصف جميع أوتار السطح المارة بها.

٤ ـ السطح الزائد ذو الطيتين:

اتضح مما سبق أن المعادلة:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1. \qquad (9)$$

تمثل سطح زائد دورانى ذو طيتين ينتج من دوران القطع الزائد:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

حول المحور OZ والمستوى $z=k$ حيث $|k|\geq c$ يقطع السطح (9) في الدائرة:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{k}{c}-1\,,\; z=k\,. \qquad (10)$$

فإذا تغيرت k من c إلى t فإن الدائرة (10) ترسم الطية العليا من السطح ، وعندما تتغير k من t- إلى c- فإن الدائرة (10) ترسم الطية السفلى للسطح.
فإذا أخذنا بدلاً من الدائرة (10) القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1\,,\; z=k\,. \qquad (11)$$

والذي يقع في المستوى $z=k$ فإذا تغيرت k من t- إلى c - ثم من c إلى t فإن القطع الناقص (11) يرسم سطح تنتج معادلته بحذف k بين المعادلتين في (11) وتكون:

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (12)$$

هي معادلة السطح الزائد ذو الطيتين.
وتُسمى a,b,c أنصاف محاوره ، ونقطة الأصل هي مركزه.

٥ ـ السطح المكافئ الناقصي:

اتضح مما سبق أن المعادلة:

$$x^2 + y^2 = 4kz. \qquad (13)$$

تمثل سطح مكافئ دوراني ينشأ من دوران القطع المكافئ:

$y^2 = 4kz. \quad ; k > o$

حول المحور OZ وأن مقطع السطح (13) بالمستوى $z = H$ حيث $H > o$ يكون دائرة معادلتها هي $x^2 + y^2 = 4\ kH\ , \quad z = H$.

وعندما تأخذ H القيم من 0 إلى ∞+ فإن الدائرة ترسم السطح (13).

فإذا أخذنا بدلاً من الدائرة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4kH, \quad z = H. \qquad (14)$$

وسمحنا للكمية H أن تأخذ القيم من 0 حتى ∞+ فإن القطع الناقص (14) يرسم سطح تكون معادلته هي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4kH. \qquad (15)$$

وهي تمثل معادلة السطح المكافئ الناقصي ومقطعه مع المستويات $X = 0, Y = 0, Z = 0$ يكون عبارة عن القطعين المكافئين ونقطة الأصل على الترتيب:

$y^2 = 4a^2kz\ , \ \ x^2 = 4a^2kz\ , \ \ z = 0.$

وواضح أن السطح (15) يكون متماثلاً بالنسبة إلى المستويين $X = 0 \ \ , Y = 0$.

٦ ـ السطح المكافئ الزائدي:

معادلته في أبسط صورة هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4kz .$$

وهي تختلف عن معادلة السطح المكافئ الناقصي في إشارة y^2 فقط.

تمارين

١ـ استنتج معادلة الكرة كسطح دورانى ناتج من دوران الدائرة:
$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0.$

حول المحور OX.

٢ـ أوجد معادلة السطح الدوراني الناتج من دوران المنحنى المُعطى حول المحور المذكور

(i) $x^2 = 2ax , \quad z = 0.$ (حول المحور OX)

(ii) $x^2 - y^2 = 1 , \quad z = 0.$ (حول المحور OX)

(iii) $x^2 - y^2 = 1 , \quad z = 0.$ (حول المحور OY)

(iv) $4x + y^2 = 8 , \quad z = 0.$ (حول المحور OX)

(v) $xy = 1 , \quad z = 0.$ (حول المحور OY)

٣ـ أوجد معادلة السطح الأسطواني بمعرفة دليله ونسب اتجاه راسمه:

(i) $8y - x^2 = 0 , \quad z = 0.$ (نسب اتجاه الراسم 1,1,1)

(ii) $y^2 + z^2 = 4 , \quad x = 0.$ (نسب اتجاه الراسم 1,2,3)

(iii) $4y^2 + z^2 = 16 , \quad y = 0.$ (نسب اتجاه الراسم 1,-1,0)

(iv) $y^2 + 4z = 8 , \quad x = 0.$ (نسب اتجاه الراسم 2,3,-2)

(v) $4x^2 - y^2 = 12 , \quad z = 0.$ (نسب اتجاه الراسم 3,0,-1)

٤ـ إذا علمت أن المعادلة $F(x,y,z) = 0$ تمثل مخروط عندما تكون الدالة $F(x,y,z)$ دالة متجانسة من الدرجة الثانية بالنسبة إلى x,y,z فإذا كان $\frac{x}{L} = \frac{y}{M} = \frac{z}{N}$ راسم لهذا المخروط فتحقق من أن $F(L,M,N) = 0$.
