اسم المقرر : بحتة **1**

استاذ المقرر : د. عيد الناصر صبحي محمد

الفرقـــة : الاولي

الشعبــــة : فيزيائي

Math111- Pure mathematics (I)

Dr. Hussien Shafei
Prof. Assistant,
Faculty of Science

E-mail: hshafei@sci.svu.edu.eg

Facebook: Husien Shafei

youtube: Hussien hs

Wataup:01064884604

Next Back to content

Why we study Mathematics?

Learning math is good for your brain

Practically every career uses math in some way.

Math is all around us and helps us understand the world better

Math is a universal language

[Next](#) [Back to content](#)

Important of Mathematics in Computer science

Why we study Mathematics?

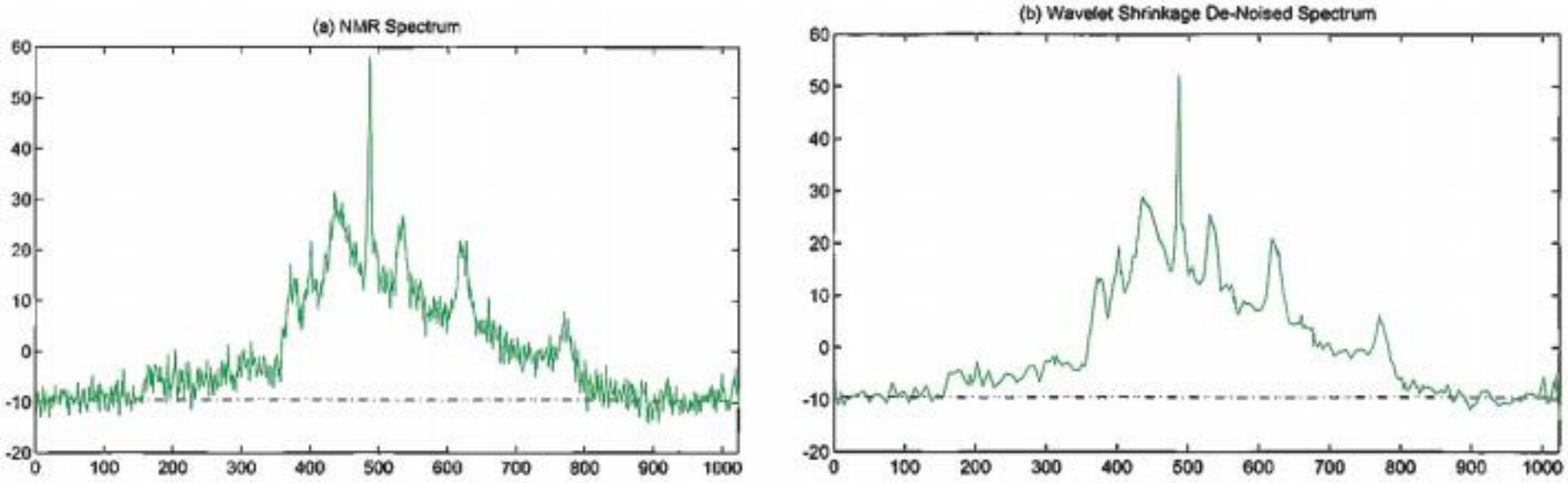
Original

Reconstruction

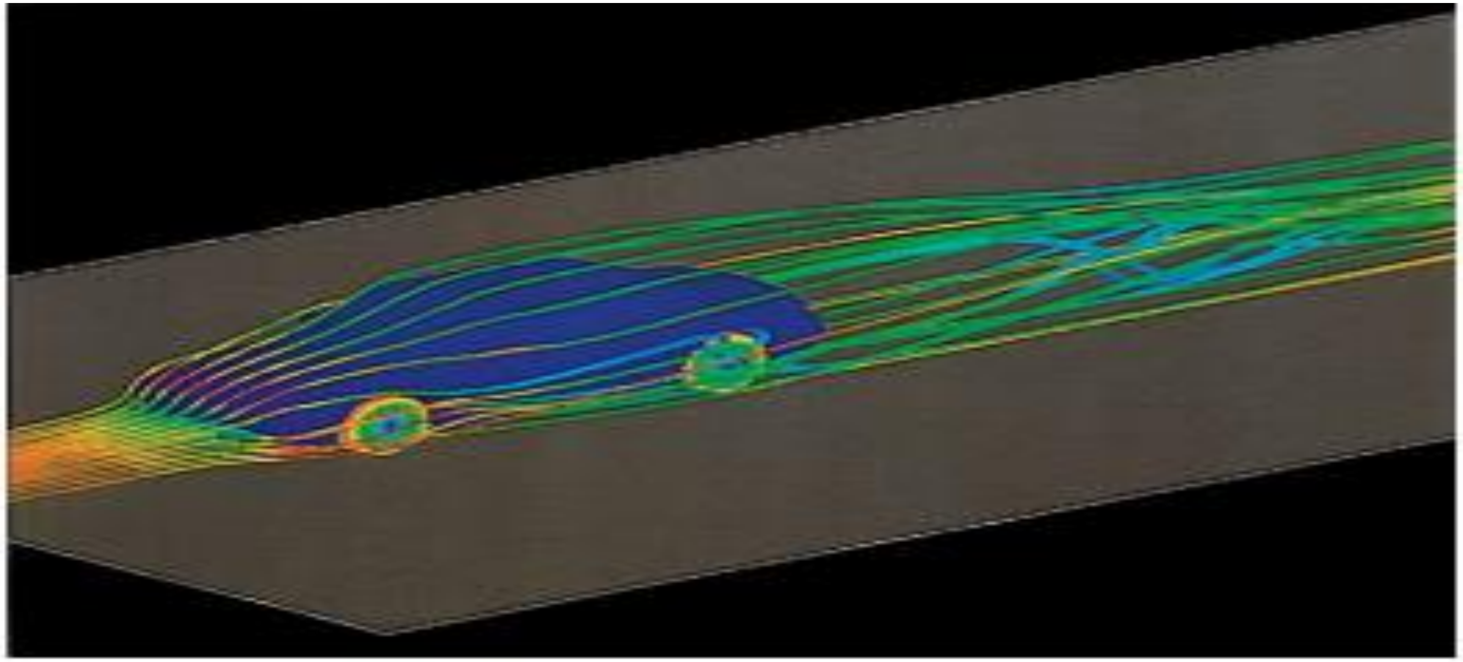
FBI Fingerprint Compression — The U.S. Federal Bureau of Investigation began collecting fingerprints and handprints in 1924 and now has more than 30 million such prints in its files, all of which are being digitized for storage on computer. It takes about 0.6 megabyte of storage space to record a fingerprint and 6 megabytes to record a pair of handprints, so that digitizing the current FBI archive would result in about 200×10^{12} bytes of data to be stored, which is the capacity of roughly 138 million floppy disks. At today's prices for computer equipment, storage media, and labor, this would cost roughly 200 million dollars. To reduce this cost, the FBI's Criminal Justice Information Service Division began working in 1993 with the National Institute of Standards, the Los Alamos National Laboratory, and several other groups to devise compression methods for reducing the storage space. These methods, which are based on wavelets, are proving to be highly successful. Figure 1 is a good example—the image on the left is an original thumbprint and the one on the right is a mathematical reconstruction from a 26:1 data compression.

Original Reconstruction

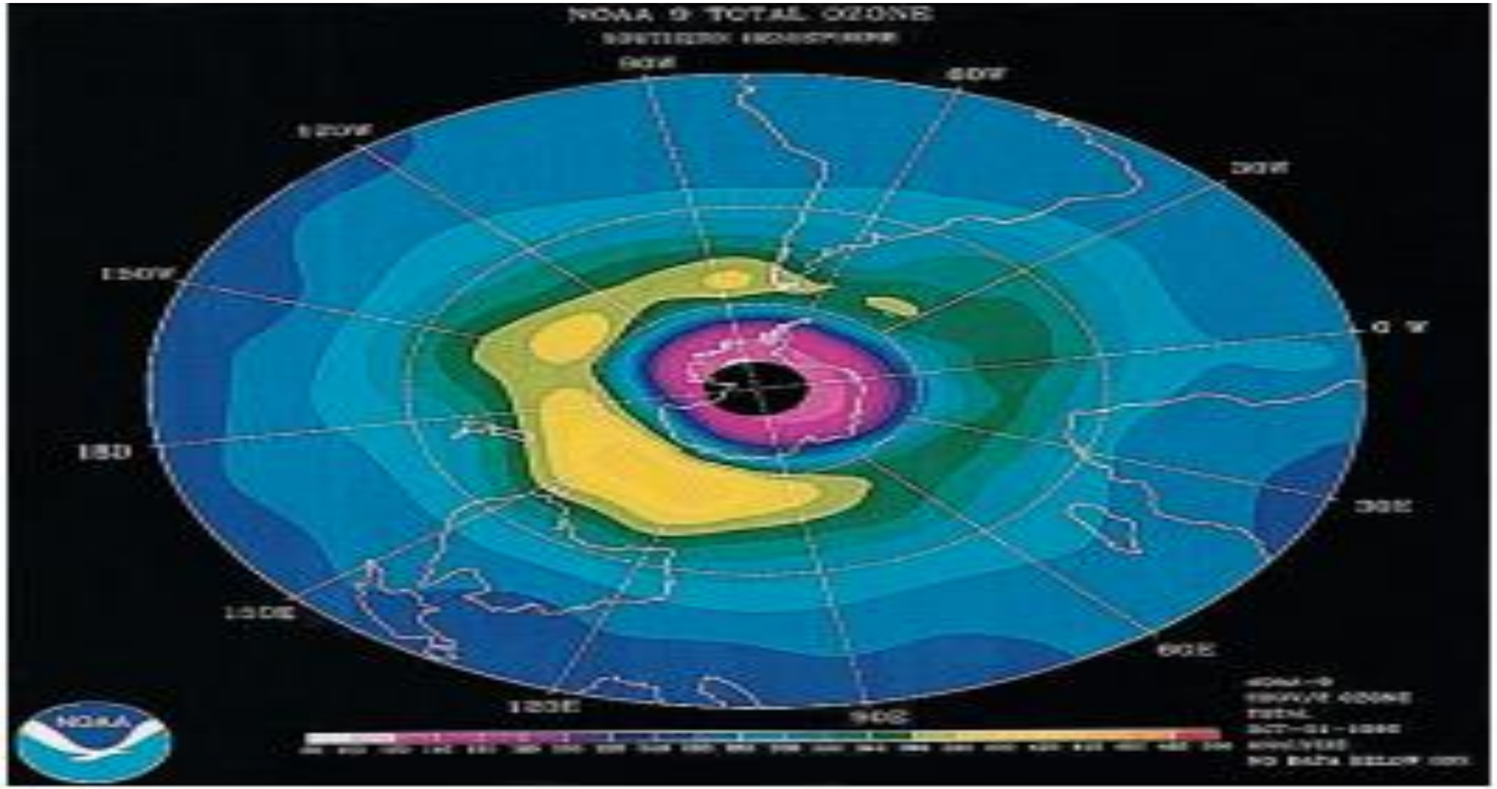
Removing Noise from Data — In fields ranging from planetary science to molecular spectroscopy, scientists are faced with the problem of recovering a true signal from incomplete or noisy data. For example, weak signals from deep space probes are often so overwhelmed with background noise that the signal itself is barely detectable, yet the signal must be used to produce a photograph or provide other information. Researchers at Stanford University and elsewhere have been working for several years on using wavelet methods to filter out such noise. For example, Figure shows a signal from a medical imaging signal that has been cleaned up (de-noised) using wavelets.



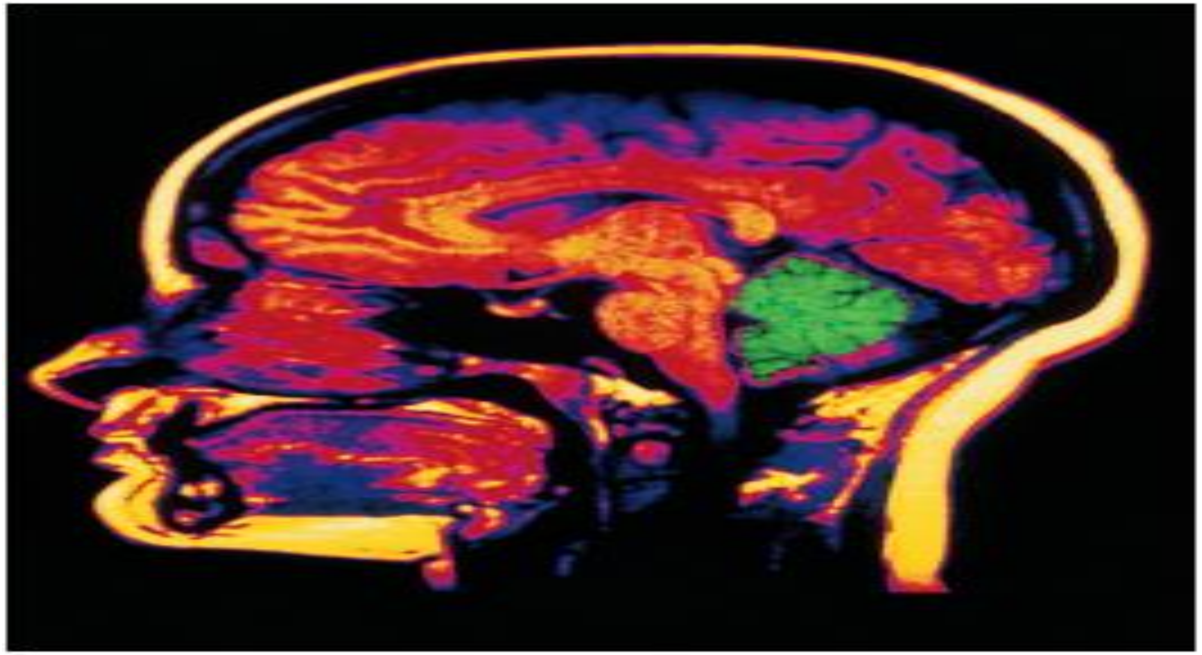
Airflow Past an Automobile— Problems involving fluid flow (air, water, and blood, for example) are a major focus of scientific research. The Army High Performance Computing Research Center (AHPCRC) sponsors numerous unclassified research projects that involve teams of researchers from various science and engineering disciplines. One such project deals with airflow past an automobile (they use a General Motors Saturn SL2). The problem is quite complex since it takes into account the body contours, the wheels, the recessed headlights, and the spoiler. Figure shows a simulation of airflow past an automobile that was produced using state-of-the-art mathematical methods and a Cray T3D supercomputer.



Weather Prediction — Modern meteorology is a marriage between mathematics and physics. Today's meteorologists are concerned with much more than predicting daily weather changes—their research delves into such areas as global warming, holes in the ozone layer (Figure), and weather patterns on other planets.



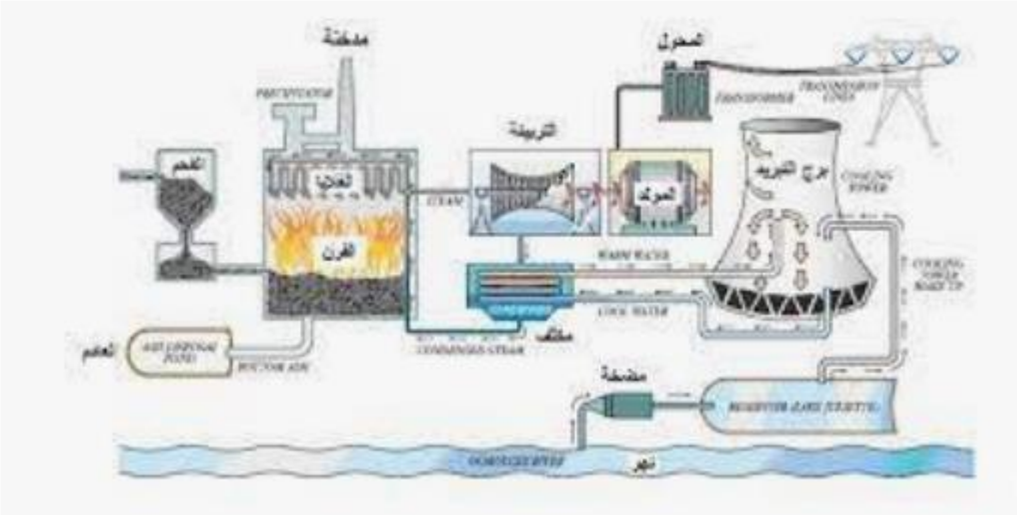
Medical Imaging and DNA Structure — Advances in *nuclear magnetic resonance* (NMR) have made it possible to determine the structure of biological macromolecules, study DNA replication, and determine how proteins act as enzymes and antibodies. Related advances in *magnetic resonance imaging* (MRI) have made it possible to view internal human tissue without invasive surgery and to provide real-time images during surgical procedures (Figure 5). High-quality NMR and MRI would not be possible without mathematical discoveries that have occurred within the last decade.



Important of Mathematics in Engineering

civil engineering Department

Power engineering



Newton's first law

$$\sum \mathbf{F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

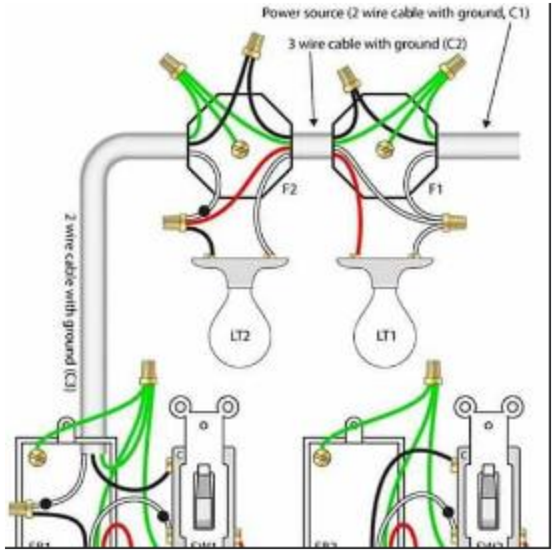
Newton's second law

$$\mathbf{F} = m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

Newton's third law

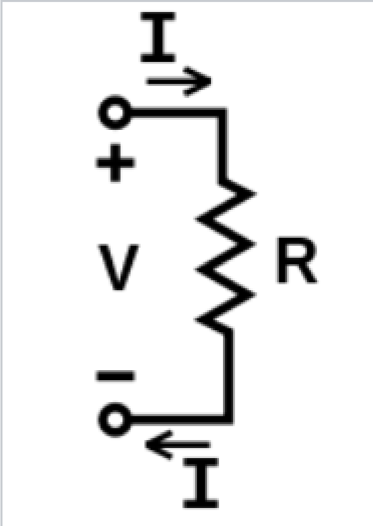
$$A = -\boldsymbol{F} B \boldsymbol{F}$$

electricity department



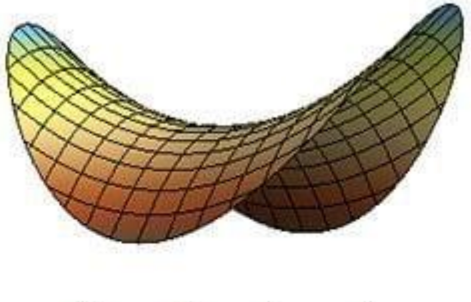
Ohm's Law

$$I = \frac{V}{R},$$



Computer scinces - Mathematics =

Some problems without solutions



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

من قال أن الرياضيات لا تُستخدم في الحياة العملية؟ هناك استخدام يُمكنك حرفيًا تناوله، أو رُبما تناولته بالفعل.

شكل رقائق "البرينجلز" Pringles المُميز ليس مُصادفة.

في عام 1956 تم تكليف الكيميائي - Fredric J. Baur والذي كان يعمل في شركة - Procter & Gamble بتطوير نوع جديد من رقائق البطاطس، وذلك بعد أن تكررت شكاوى العُملاء بشأن تكسُّرها وتدهُّنها في عُبوّاتها.

أنفق الرجل عامين من عُمره في حل هذه المُشكلة، وأنتهى به الأمر باختيار شكل سرج الحصان الشهير كتصميم للبطاطس، والعُبوات الاسطوانية كحاوية لها.

بالمُناسبة، يُعرف هذا الشكل في الرياضيات باسم "السطح المُكافئ الزائدي" أو) Hyperbolic paraboloid. هناك ترجمة أخرى أقرب لتعويذة منها لمصطلح رياضي سأذكرها على أية حال: "سطح شلجمي هذلولي.("

في كل مرة تفتح فيها عُبوة من الشلاجم الهذلولية لتجدها كُلها سليمة فلتتذكر أن الفضل يرجع في ذلك للرياضيات

First Level (Freshman) - Courses of Physical Science programs

Semester	Course code	Course name	Prerequisites	Hours: Theoretical	Hours: Practical	Hours: Exercises	Hours: Credit Hours	Grades: Midterm	Grades: Ongoing evaluation	Grades: Oral exam	Grades: Practical exam	Grades: Final exam	Grades: Total
Compulsory Courses (11 Credit Hours)													
First	Math 111	Pure Mathematics (I)	-	2	-	2	2	20	20	10	-	50	100
	Math 121	Applied Mathematics (I)	-	2	-	2	2	20	20	10	-	50	100
	Chm101	General chemistry (I)	-	2	2	-	3	10	20	10	20	40	100
	Phy101	General Physics (I)	-	2	3	-	3	10	20	10	20	40	100
	Bot 101	General botany		2	-	-	2	20	20	10	-	50	100
	Com101	Computer fundamentals (I)	-	1	2	-	2	10	20	10	20	40	100
	Uni 107	Human rights	-	2	-	-	2	20	20	10	-	50	100
	Uni 109	Information technology	-	2	-	-	2	20	20	10	-	50	100
Total							18						
	Math112	Pure Mathematics (II)	-	2	-	2	2	20	20	10	-	50	100
	Math122	Applied Mathematics (II)	-	2	-	2	2	20	20	10	-	50	100
	Chm 102	General chemistry (II)	Chm101	2	3	-	3	10	20	10	20	40	100
	Phy102	General Physics (II)	Phy101	2	3	-	3	10	20	10	20	40	100
	Zoo 116	General Zoology	-	1	-	-	3	20	20	10	-	50	100
	Com 102	Computer fundamentals (II)	-	2	1	-	2	10	20	10	20	40	100
	Uni 108	English for science	-	2	-	-	2	20	20	10	-	50	100
Total							16						
Total for both semesters							34						

Next

Back to content

Math 111: Pure mathematics (I)-2 Credit (Lecture 2h/w+ tutorial 2h/W)

Contents:

Differentiation:

Functions and Limits: Functions and Their Graphs, Inverse Functions, Trigonometric Functions, Rigorous study of limits, Limit Theorems, Continuity of Functions.
Derivatives: The derivative, Rules for finding derivatives, Derivatives of Trigonometric Functions, Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions, Derivatives of inverse Trigonometric and Hyperbolic functions, The Chain Rule, Higher-Order Derivatives, Implicit Differentiation.
Applications of Derivatives: Maxima and Minima, The Mean Value Theorem, Indeterminate forms and L'Hôspital's Rule.

Algebra

Mathematics induction, Partial fractions, Mathematical logic, Sets, subsets, set operations and inductively definition of sets, Equivalent relations, equivalence classes, partitions and partial order, Maps, composition of maps, kinds of maps and inverse functions, permutation on finite sets, equivalent sets and cardinality of sets, binary operations, examples of groups and fields.

Referances:

Edwin J. Purcell and Dale Varberg, Calculus with Analytical Geometry 4th Edition 1984.

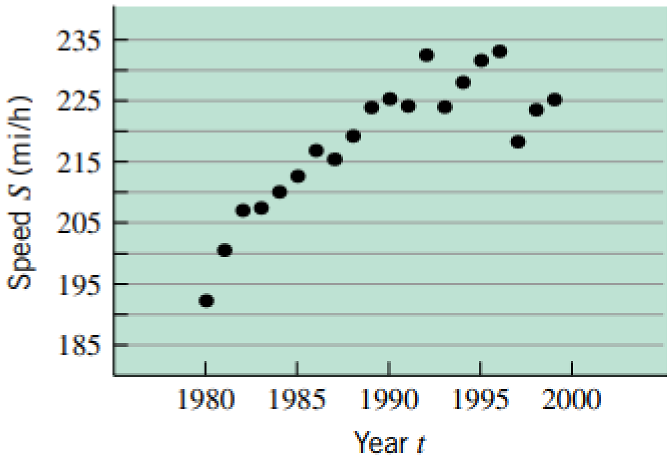
J. Eccles, An Introduction to Mathematical Reasoning: Numbers, Sets and Functions, Cambridge University Press, 1997.

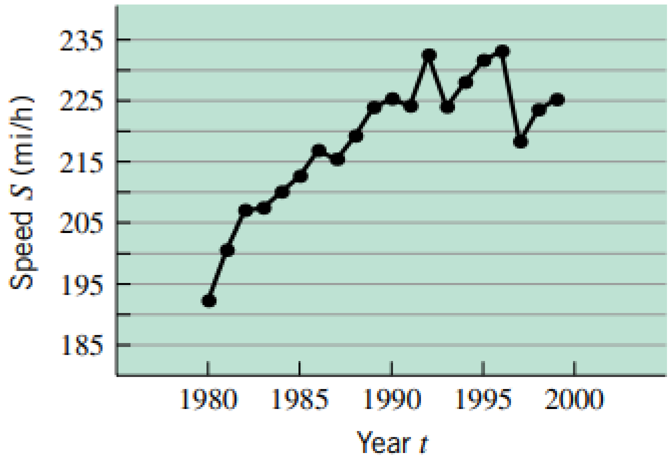
1

FUNCTIONS

QUALIFYING SPEEDS

YEAR t	SPEED S (mi/h)
1980	192.256
1981	200.546
1982	207.004
1983	207.395
1984	210.029
1985	212.583
1986	216.828
1987	215.390
1988	219.198
1989	223.885
1990	225.301



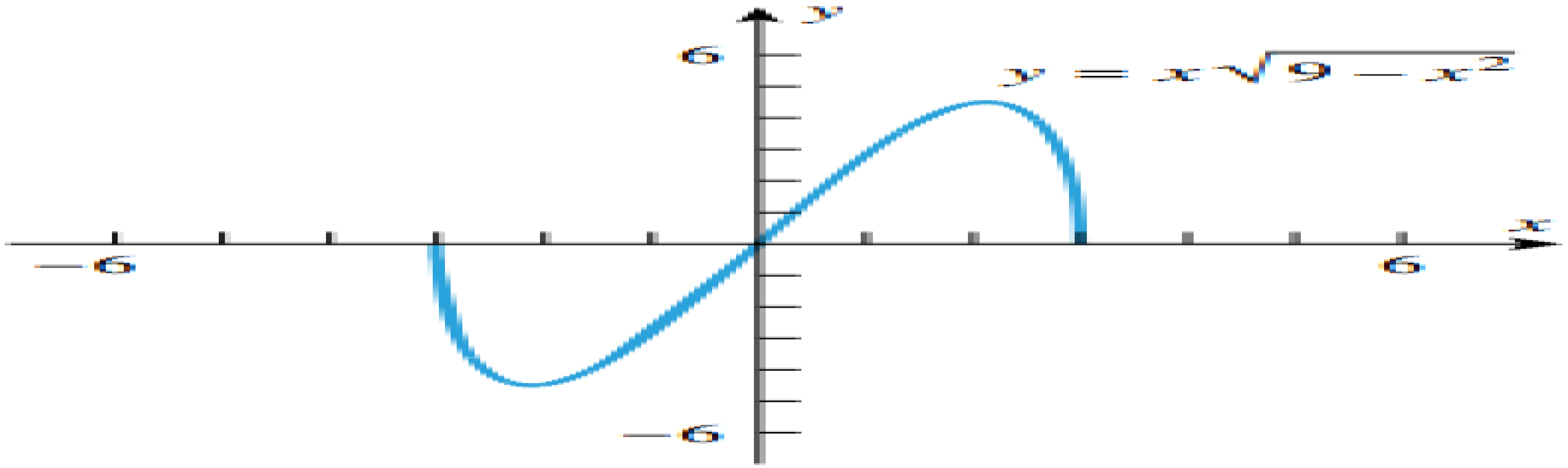


Next Back to content

Graphs can be used to describe mathematical equations as well as physical data. For example, consider the equation

$$y = x\sqrt{x^2 - 9}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	$-2\sqrt{5} \approx -4.47214$	$-2\sqrt{2} \approx -2.82843$	0	$2\sqrt{2} \approx 2.82843$	$2\sqrt{5} \approx 4.47214$	0



FUNCTIONS

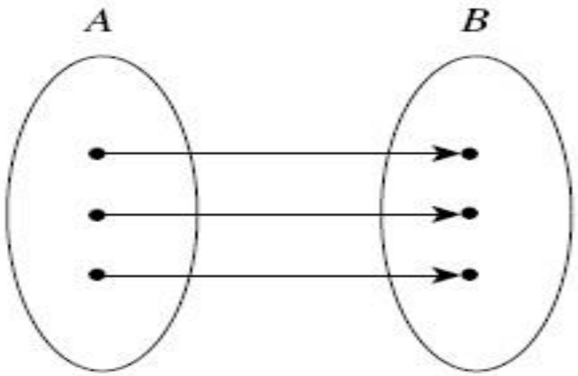
Tables, graphs, and equations provide three methods for describing how one quantity depends on another—numerical, visual, and algebraic. The fundamental importance of this idea was recognized by Leibniz in 1673 when he coined the term *function* to describe the dependence of one quantity on another.

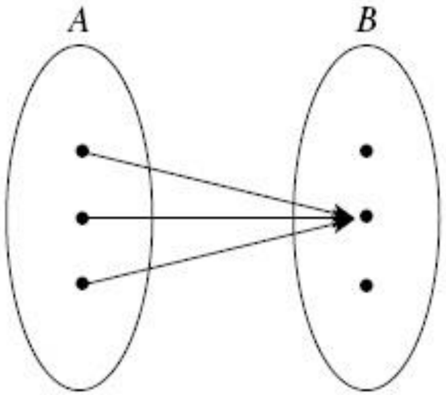
Gottfried Wilhelm Leibniz

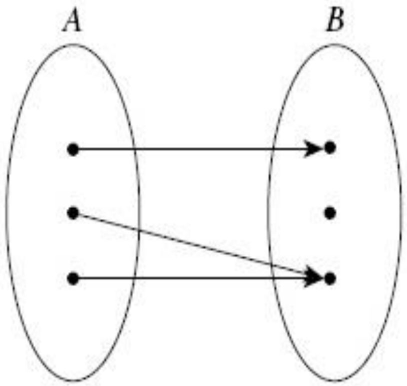
1 DEFINITION. If a variable y depends on a variable x in such a way that each value of x determines exactly one value of y, then we say that ***y is a function of x***.

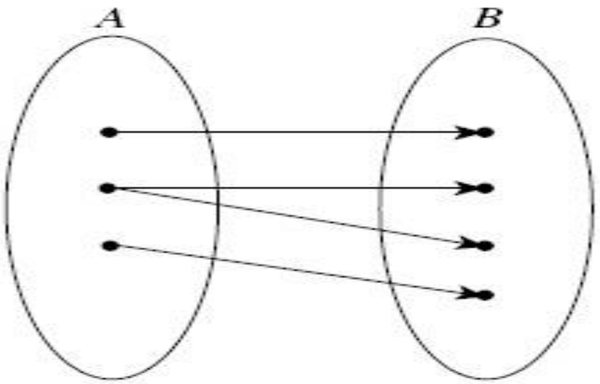
A function f from set A to set B (written as $f : A \to B$) is a rule of correspondence that associates to each element of A, one and only one element of B.

(A function is also called a mapping from A to B.









INDEPENDENT AND DEPENDENT VARIABLES

a function f is a rule that associates a unique output $f(x)$ with each input x. This output is sometimes called the ***value*** of f at x or the ***image*** of x under f. Sometimes we will want to denote the output by a single letter, say y, and write

$$y = f(x)$$

This equation expresses y as a function of x; the variable x is called the ***independent variable*** (or ***argument***) of f, and the variable y is called the ***dependent variable*** of f.

Example (1)

For $f(x) = x^2 - 2x$, find and simplify

(a) $f(4)$, (b) $f(4+h)$, (c) $f(4+h) - f(4)$

(d) $[f(4+h) - f(4)]\,/\,h$, where $h > 0$.

For $f(x) = x^2 - 2x$, find and simplify

(a) $f(4)$, (b) $f(4+h)$, (c) $f(4+h) - f(4)$

(d) $[f(4+h) - f(4)] \,/\, h$, where $h > 0$.

Solution

$$f(4) = 4^2 - 2(4) = 16 - 8 = 8$$

$$\begin{aligned} f(4+h) &= (4+h)^2 - 2(4+h) \\ &= (16 + 8h + h^2) - (8 + 2h) \\ &= 8 + 6h + h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4+h) - f(4) &= 8 + 6h + h^2 - 8 \\ &= 6h + h^2 \end{aligned}$$

$$[f(4+h) - f(4)] \,/\, h = (6h + h^2) \,/\, h = 6 + h$$

Domain and Range of a Function

Definition

Let f be a function from set A to set B ($f: A \to B$), then

- The (entire) set A is called the domain of f.
- The (entire) set B is called the codomain of f.
- An element y of B that corresponds to some element x of A is denoted by $f(x)$, and it is called the image of x under f.
- The set of all images constitute the range of f. The range of f is denoted by $f(A)$ and it is a subset of set B. In other words $f(A) \subseteq B$.

If $y = f(x)$, then the set of all possible inputs (x-values) is called the ***domain*** of f, and the set of outputs (y-values) that result when x varies over the domain is called the ***range*** of f.

For example,

$$y = x^2 \quad \text{and} \quad y = x^2, \quad x \geq 2$$

In the first equation there is no restriction on x, so we may assume that any real value of x is an allowable input. Thus, the equation defines a function $f(x) = x^2$ with domain $-\infty < x < +\infty$. In the second equation, the inequality $x \geq 2$ restricts the allowable inputs to be greater than or equal to 2, so the equation defines a function $g(x) = x^2, x \geq 2$ with domain $2 \leq x < +\infty$.

Find the domain of

(a) $f(x) = x^3$

(b) $f(x) = 1/[(x-1)(x-3)]$

(c) $f(x) = \tan x$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

(a) $f(x) = x^3$

The function f has real values for all real x, so its natural domain is the interval $(-\infty, +\infty)$.

(b) $f(x) = 1/[(x-1)(x-3)]$

The function f has real values for all real x, except $x = 1$ and $x = 3$, where divisions by zero occur. Thus, the natural domain is

$$\{x : x \neq 1 \text{ and } x \neq 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

(c) $f(x) = \tan x$

Since $f(x) = \tan x = \sin x / \cos x$, the function f has real values except where $\cos x = 0$, and this occurs when x is an odd integer multiple of $\pi/2$. Thus, the natural domain consists of all real numbers except

$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

The function f has real values, except when the expression inside the radical is negative. Thus the natural domain consists of all real numbers x such that

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) \geq 0$$

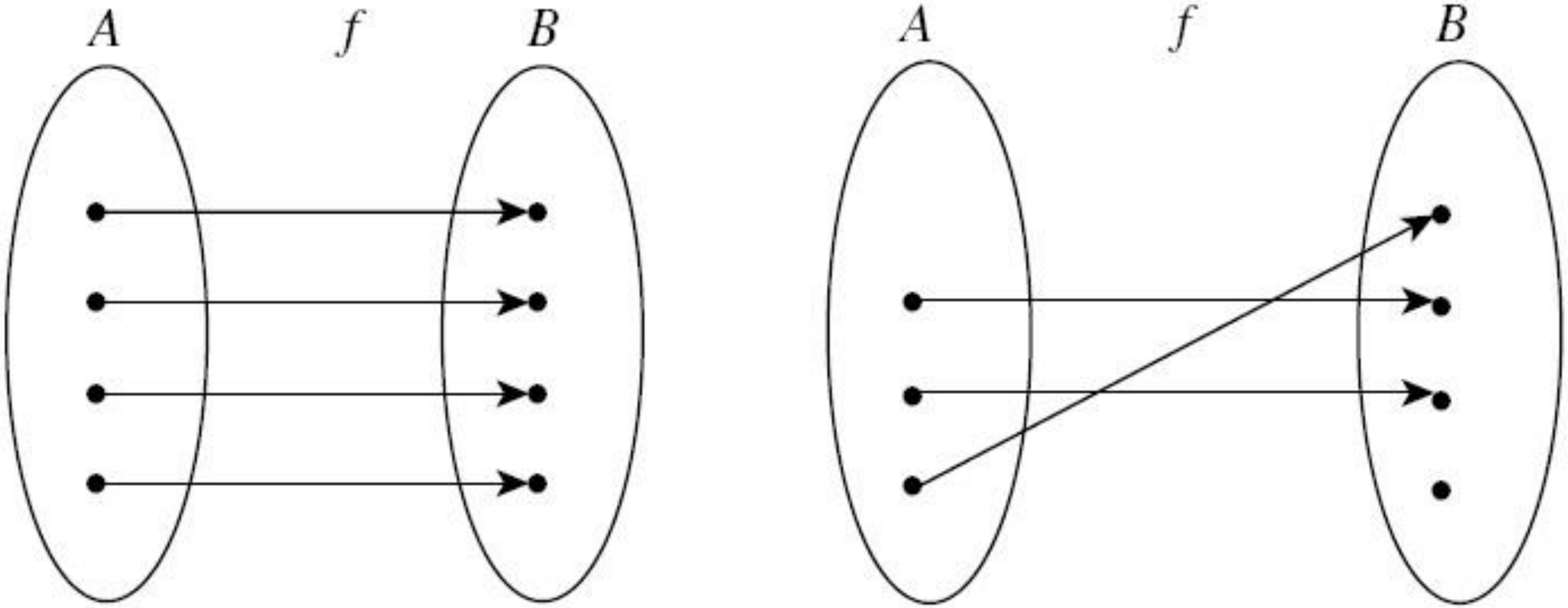
This inequality is satisfied if $x \leq 2$ or $x \geq 3$ (verify), so the natural domain of f is

$$(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Types of Functions

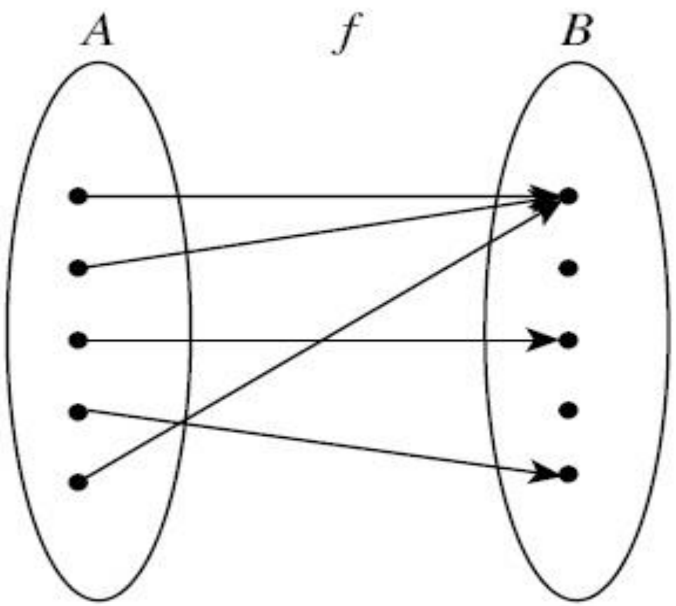
(A)One-One Function

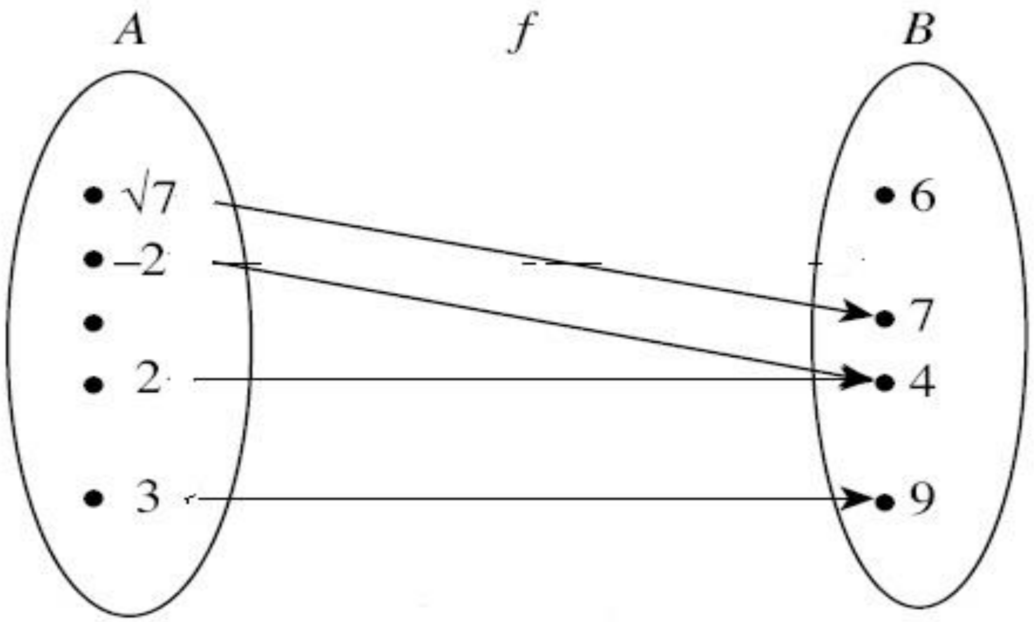
A function is one-one provided deferent elements of the domain are related to deferent element of the range.



(B) Many-One Function

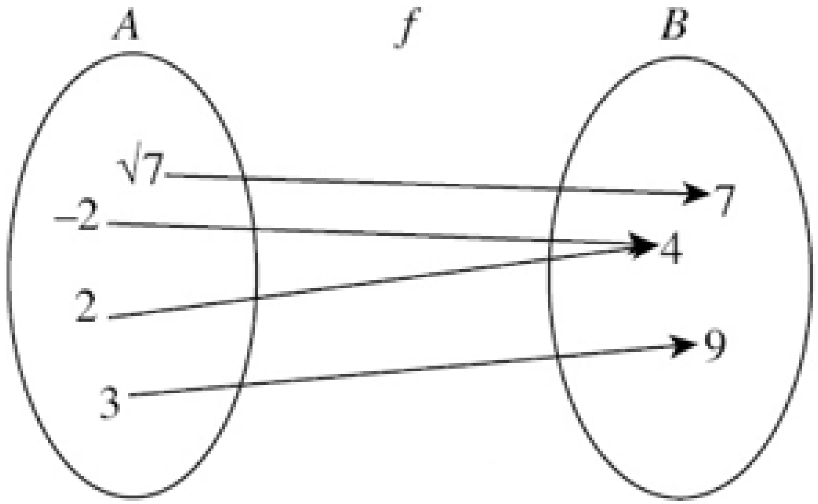
The range of the function has at least one element, which is the image for two or more elements of the domain

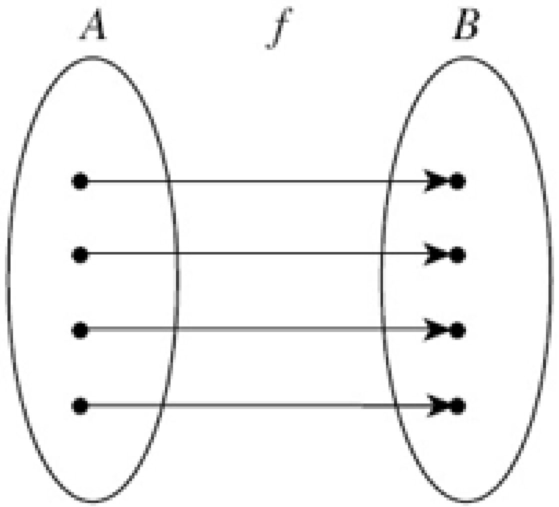




(C) **Onto Function**

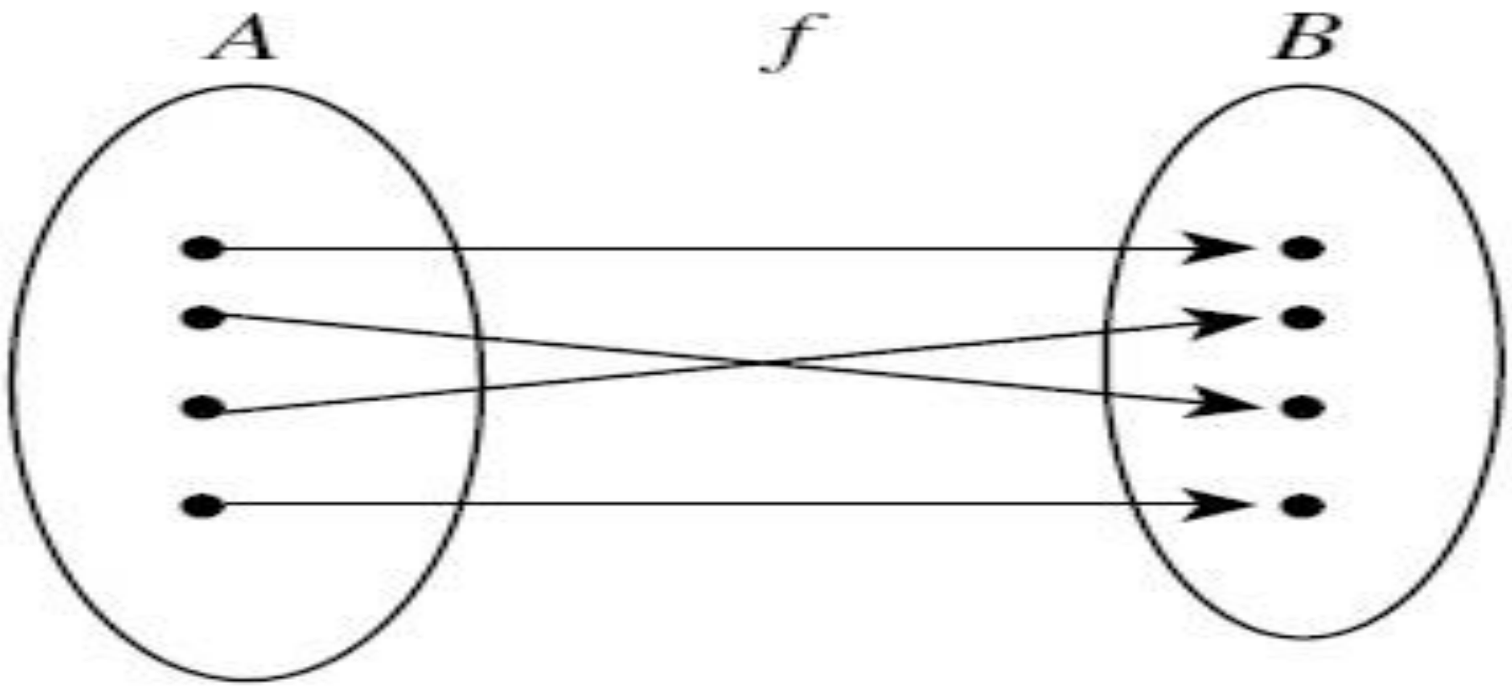
A function $f : A \rightarrow B$ is called an onto function if each element of the codomain is involved in the relation. (Here, range of $f =$ codomain B.) In other words, a function $f : A \rightarrow B$ is said to be onto if every element of B is the image of some element of A, under f, that is, for every $b \in B$, there exist an element $a \in A$ such that $f(a) = b$. Onto function is also called surjective function.





(D) Bijective Function (or One-to-One Correspondence)

If the function is both one-one and onto. In a function that is one-one and onto, each image corresponds to exactly one element of the domain and each element of codomain is involved in the relation. Such a function is also called one-to-one correspondence or a bijective function.



One–one and onto function

Classification of Functions

Even and Odd Functions

(i) A function is an even function if for every x in the domain of f $f(-x) = f(x)$.

(ii) A function is an odd function if for every x in the domain of f $f(-x) = -f(x)$.

Example

1. We have that $\cos(-x) = \cos x$ for all x. Thus, the cosine function is an even function.
2. A constant function is always even (why?).
3. It can be easily verified that the functions $f(x) = x$ and $f(x) = x^3$ are odd functions. In fact, any polynomial function in which the power of each term is an odd integer is an odd function.
4. We have for all x, $\sin(-x) = -\sin x$ and $\tan(-x) = -\tan x$. Thus, the sine and the tangent functions are odd functions.

Period of a Periodic Function

If a function f is periodic, then the smallest $p > 0$, if it exists such that $f(x + p) = f(x)$ for all x, is called the period of the function.

Algebraic operation on functions

(a) Sums, Differences, Products and Quotients of Functions

Let f and g be functions.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x).$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$$

Example

Let $f(x) = \dfrac{1}{x}$ and $g(x) = \sqrt{x}$. Find the domain and rule of $f + g$.

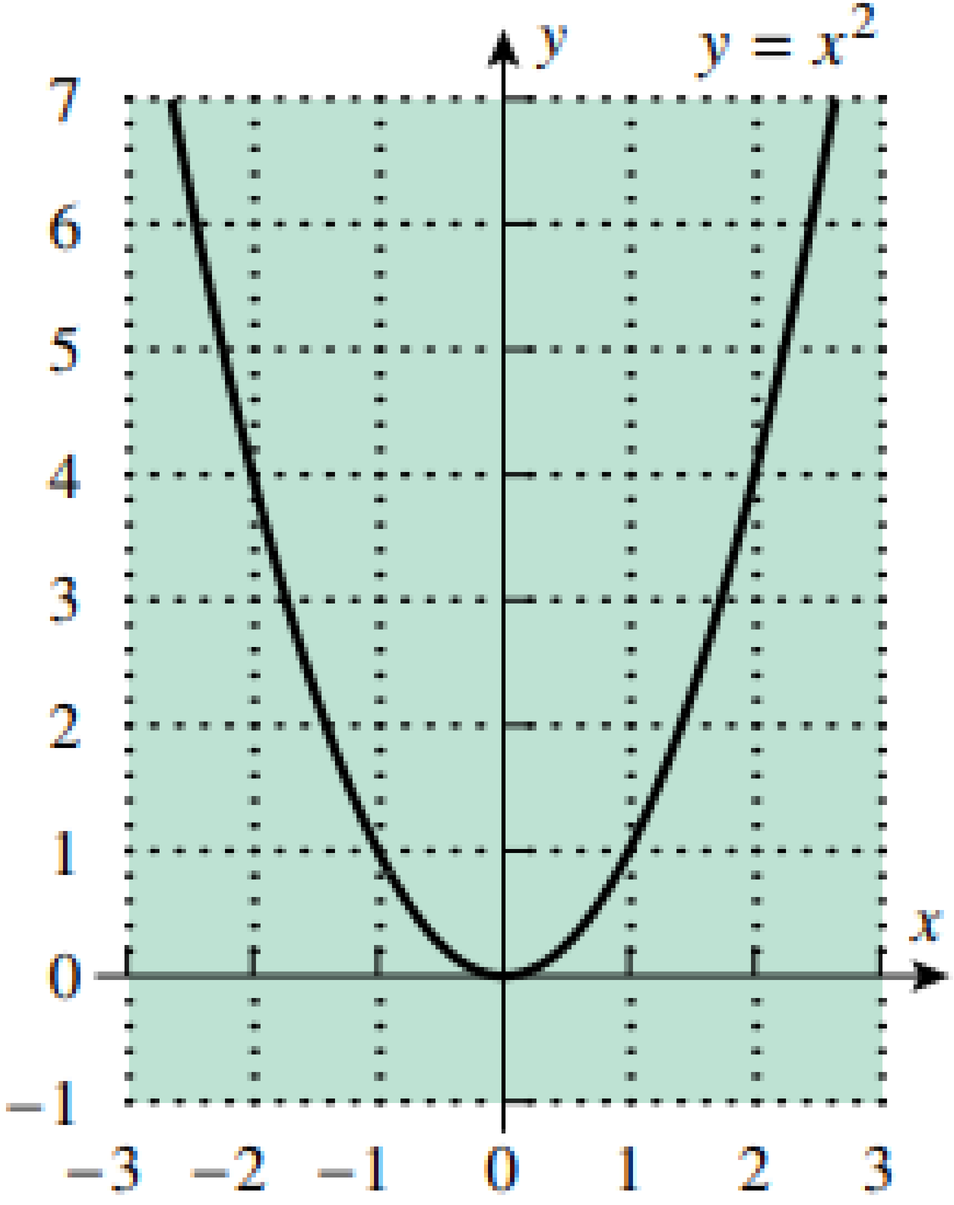
Solution

The domain of f is $\left\{x \in R : x \neq 0\right\}$ and the domain of $g(x)$ $\left\{x \in R : x \geq 0\right\}$.

The only numbers in both domains are the positive numbers, which constitute domain of $f + g$.

For the rule, we have

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x},\ x > 0.$$



y
$y = x^2$
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
x
−3
−2
−1
0
1
2
3

THE ABSOLUTE VALUE FUNCTION

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

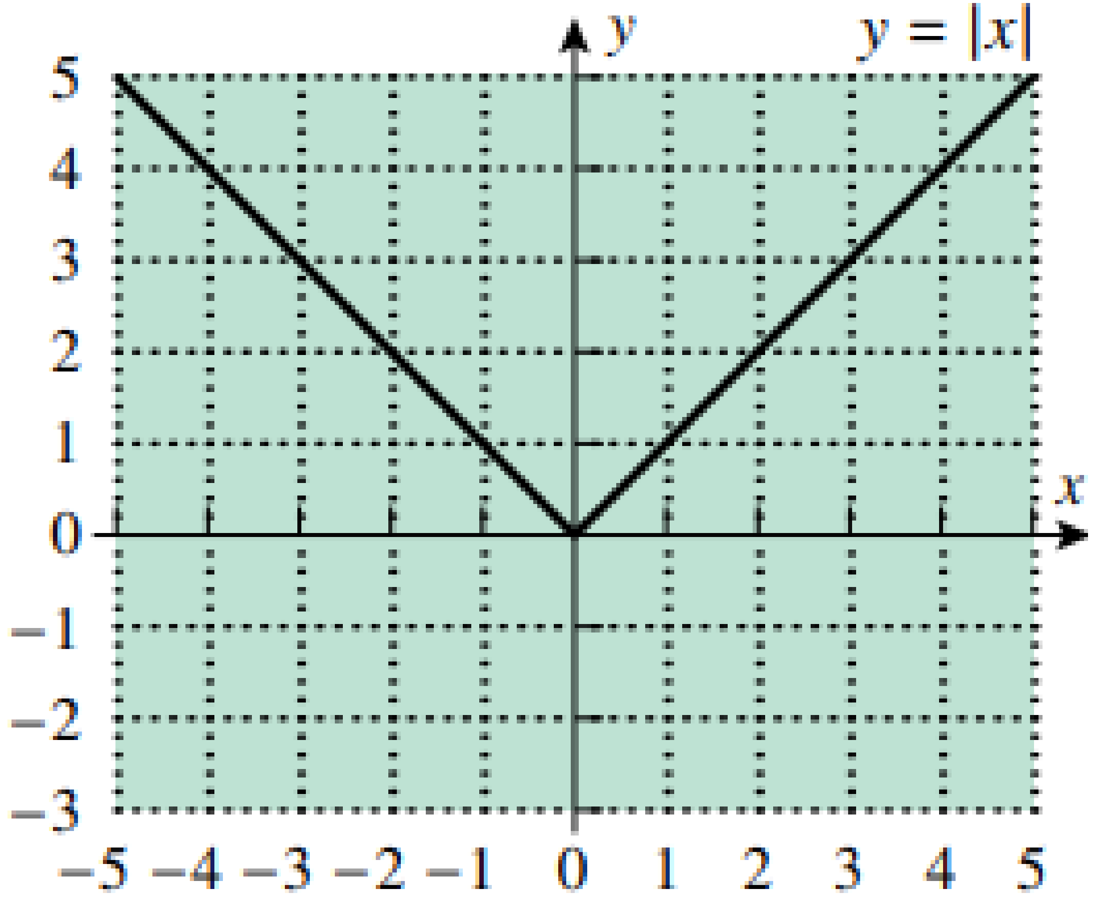
If a and b are real numbers, then

(a) $|-a| = |a|$ A number and its negative have the same absolute value.

(b) $|ab| = |a|\,|b|$ The absolute value of a product is the product of the absolute values.

(c) $|a/b| = |a|/|b|$ The absolute value of a ratio is the ratio of the absolute values.

(d) $|a+b| \leq |a| + |b|$ The ***triangle inequality***



Next Back to content

2

LIMITS AND CONTINUITY

LIMITS (AN INFORMAL VIEW). If the values of $f(x)$ can be made as close as we like to L by taking values of x sufficiently close to a (but not equal to a), then we write

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

which is read "the limit of $f(x)$ as x approaches a is L."

Next Back to content

Example the limit

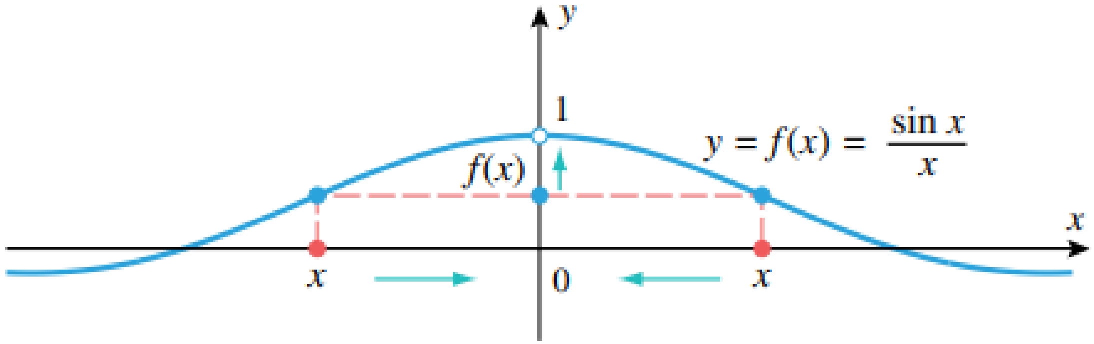
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}\right) = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \sqrt{x+1} + 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2$$

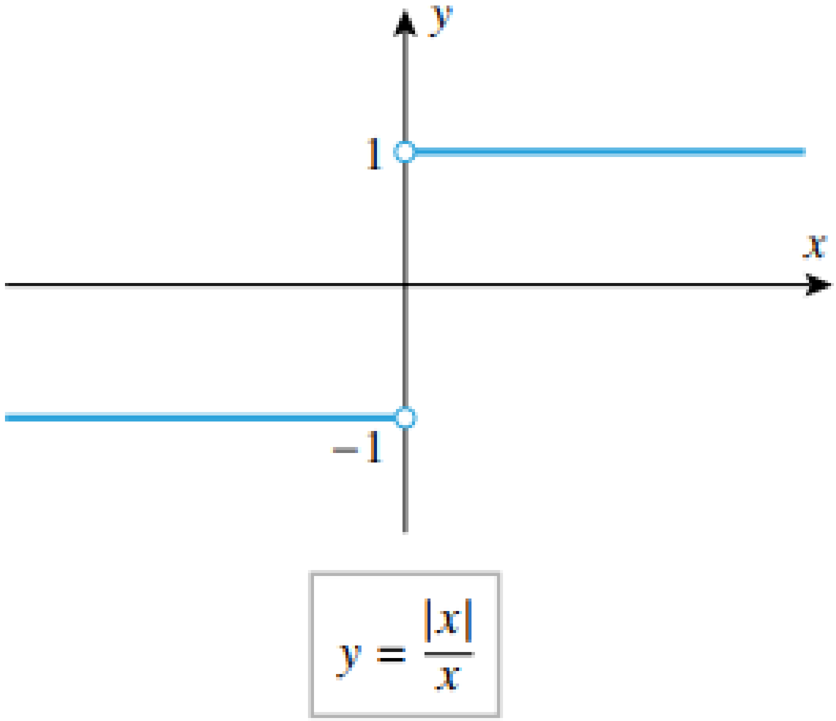
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

x (RADIANS)	$y = \frac{\sin x}{x}$
± 1.0	0.84147
± 0.9	0.87036
± 0.8	0.89670
± 0.7	0.92031
± 0.6	0.94107
± 0.5	0.95885
± 0.4	0.97355
± 0.3	0.98507
± 0.2	0.99335
± 0.1	0.99833
± 0.01	0.99998



As x approaches 0 from the left or right, $f(x)$ approaches 1.

ONE-SIDED LIMITS



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

ONE-SIDED LIMITS . If the values of $f(x)$ can be made as close as we like to L by taking values of x sufficiently close to a (but greater than a), then we write

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

which is read "the limit of $f(x)$ as x approaches a from the right is L." Similarly, if the values of $f(x)$ can be made as close as we like to L by taking values of x sufficiently close to a (but less than a), then we write

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

which is read "the limit of $f(x)$ as x approaches a from the left is L."

COMPUTING LIMITS

SOME BASIC LIMITS

THEOREM. *Let a and k be real numbers.*

$$\lim_{x \to a} k = k \qquad \lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

example,

$$\lim_{x \to -25} 3 = 3, \qquad \lim_{x \to 0} 3 = 3, \qquad \lim_{x \to \pi} 3 = 3$$

Example 2 Find $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x^3 + 4}{x - 3}$.

Solution.

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (5x^3 + 4)}{\lim\limits_{x \to 2} (x - 3)}$$

$$= \frac{5 \cdot 2^3 + 4}{2 - 3} = -44$$

Example 3 Find

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 4^-} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 4^+} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 2)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 2)}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 2)} = -\infty$$

COMPUTING LIMITS: END BEHAVIOR

THEOREM. *Suppose that*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1 \quad \textit{and} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = L_2$$

That is, the limits exist and have values L_1 and L_2, respectively. Then,

(*a*) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x) = L_1 + L_2$

(*b*) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \lim_{x \to +\infty} g(x) = L_1 - L_2$

(*c*) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)\left(\lim_{x \to +\infty} g(x)\right) = L_1 L_2$

(*d*) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} f(x)}{\lim_{x \to +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *provided* $L_2 \neq 0$

(*e*) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to +\infty} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, *provided* $L_1 > 0$ *if* n *is even.*

Moreover, these statements are also true if $x \to -\infty$.

REMARK. As in the remark following Theorem results (a) and (c) can be extended to sums or products of any finite number of functions. In particular, for any positive integer n,

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \right)^n \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) \right)^n$$

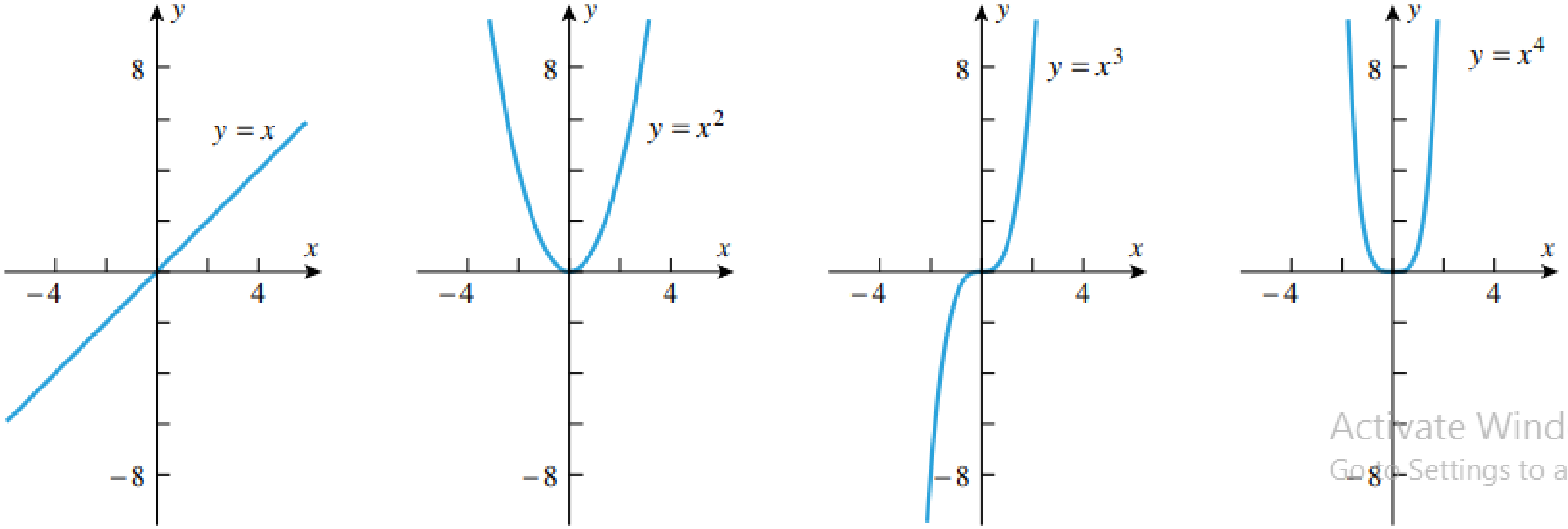
Also, since $\lim_{x \to +\infty}(1/x) = 0$, if n is a positive integer, then

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \right)^n = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \right)^n = 0$$

LIMITS OF x^n AS $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ +\infty, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$



LIMITS OF POLYNOMIALS AS $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n\right) = \lim_{x \to -\infty} c_n x^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n\right) = \lim_{x \to +\infty} c_n x^n$$

Example

$$\lim_{x \to -\infty} (7x^5 - 4x^3 + 2x - 9) = \lim_{x \to -\infty} 7x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-4x^8 + 17x^3 - 5x + 1) = \lim_{x \to -\infty} -4x^8 = -\infty$$

LIMITS OF RATIONAL FUNCTIONS AS $x \to \pm\infty$

Example Find $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+5}{6x-8}$.

Solution. Divide the numerator and denominator by the highest power of x that occurs in the denominator; that is, $x^1 = x$. We obtain

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3+5/x)}{x(6-8/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+5/x}{6-8/x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(3+5/x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(6-8/x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \lim\limits_{x\to+\infty} 5/x}{\lim\limits_{x\to+\infty} 6 - \lim\limits_{x\to+\infty} 8/x} = \frac{3+5\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x}{6-8\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x}$$

$$= \frac{3+(5\cdot 0)}{6-(8\cdot 0)} = \frac{1}{2}$$

◀

Example 4 Find

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5}$

Solution (a). Divide the numerator and denominator by the highest power of x that occurs in the denominator, namely x^3. We obtain

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3(4/x - 1/x^2)}{x^3(2 - 5/x^3)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4/x - 1/x^2}{2 - 5/x^3}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (4/x - 1/x^2)}{\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (2 - 5/x^3)} = \frac{(4 \cdot 0) - 0}{2 - (5 \cdot 0)} = \frac{0}{2} = 0$$

(b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 1}{3x + 5}$

Solution (b). Divide the numerator and denominator by x to obtain

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{3x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1/x}{3 + 5/x} = +\infty$$

where the final step is justified by the fact that

$$5x^2 - 2x \to +\infty, \quad \frac{1}{x} \to 0, \quad \text{and} \quad 3 + \frac{5}{x} \to 3$$

as $x \to -\infty$. ◀

LIMITS INVOLVING RADICALS

Example 5 Find $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}}$.

Solution.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \qquad \boxed{\text{Example 3}}$$

Example 6 Find

$$\text{(a)} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$$

Solution (a). As $x \to +\infty$, the values of x under consideration are positive, so we can replace $|x|$ by x where helpful. We obtain

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}/|x|}{(3x-6)/|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}/\sqrt{x^2}}{(3x-6)/x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+2/x^2}}{3-6/x} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+2/x^2}}{\lim_{x \to +\infty} (3-6/x)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to +\infty} (1+2/x^2)}}{\lim_{x \to +\infty} (3-6/x)} = \frac{\sqrt{\left(\lim_{x \to +\infty} 1\right) + \left(2 \lim_{x \to +\infty} 1/x^2\right)}}{\left(\lim_{x \to +\infty} 3\right) - \left(6 \lim_{x \to +\infty} 1/x\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+(2 \cdot 0)}}{3-(6 \cdot 0)} = \frac{1}{3}$$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$

Solution (b). As $x \to -\infty$, the values of x under consideration are negative, so we can replace $|x|$ by $-x$ where helpful. We obtain

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}/|x|}{(3x-6)/|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}/\sqrt{x^2}}{(3x-6)/(-x)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+2/x^2}}{-3+6/x} = -\frac{1}{3} \qquad \blacktriangleleft$$

[Next](#) [Back to content](#)

Continuity

DEFINITION A function is **continuous at a number *a*** if

1. $f(a)$ is defined (that is, a is in the domain of f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ exists
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

THEOREM. *Polynomials are continuous everywhere.*

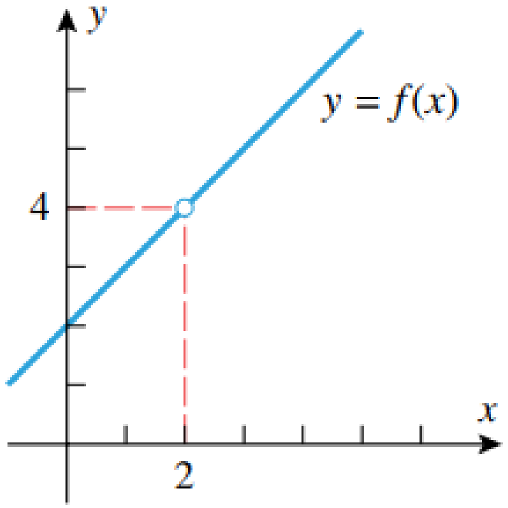
THEOREM. *A rational function is continuous at every number where the denominator is nonzero.*

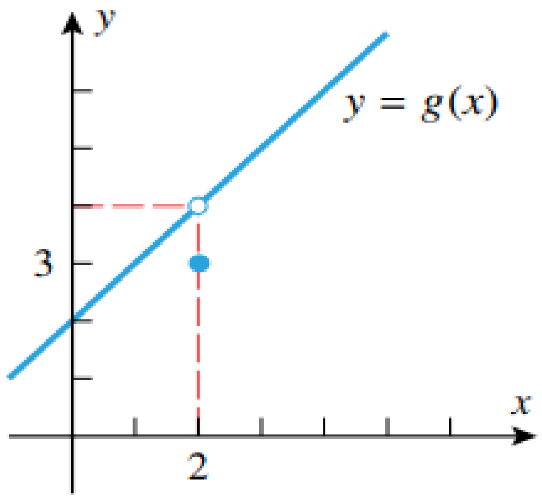
[Next](#) [Back to content](#)

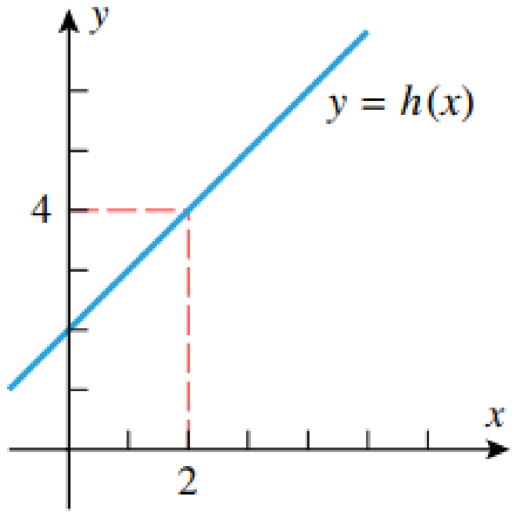
Example Determine whether the following functions are continuous at $x = 2$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

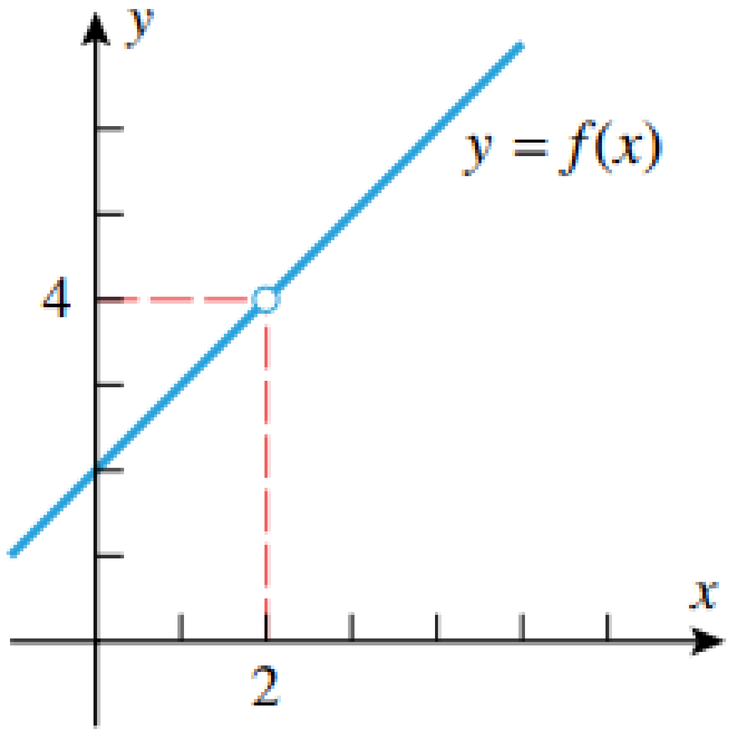
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$







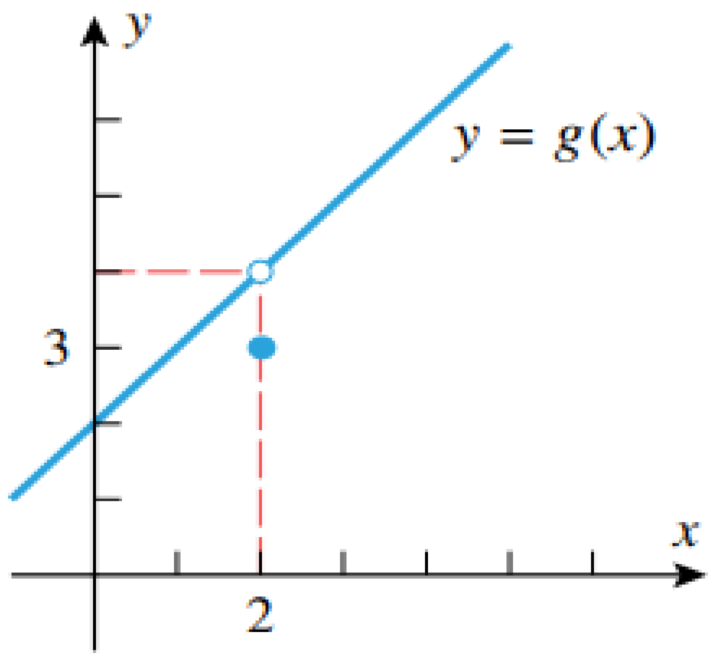
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2},$$



The function f is undefined at $x = 2$,

and hence is not continuous at $x = 2$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2, \end{cases}$$

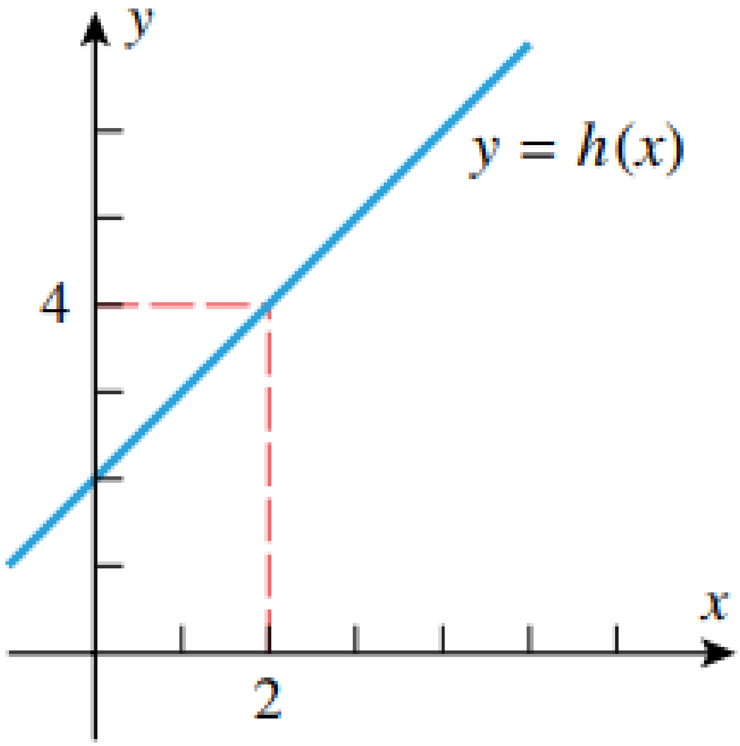


The function g is defined at $x = 2$,

but its value there is $g(2) = 3$,

hence, g is also not continuous at $x = 2$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$



The value of the function h at $x = 2$ is $h(2) = 4$,

h is continuous at $x = 2$

1. $f(a)$ is defined (that is, a is in the domain of f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ exists
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

EXAMPLE Show that there is a root of the equation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$

between 1 and 2

SOLUTION Let

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2.$$

We are looking for a solution of the given equation, that is,
a number ***c*** between 1 and 2 such that

$$f(c) = 0.$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Thus $f(1) < 0 < f(2)$;

Now *f* (x) is continuous since it is a polynomial,

So is, a number ***c*** between 1 and 2 such that there is a root at it

SOME PROPERTIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

THEOREM. *If the functions f and g are continuous at c, then*

(a) $f + g$ *is continuous at* c.

(b) $f - g$ *is continuous at* c.

(c) fg *is continuous at* c.

(d) f/g *is continuous at* c *if* $g(c) \neq 0$ *and has a discontinuity at* c *if* $g(c) = 0$.

THEOREM. *A rational function is continuous at every number where the denominator is nonzero.*

Example 3 For what values of x is there a hole or a gap in the graph of

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}?$$

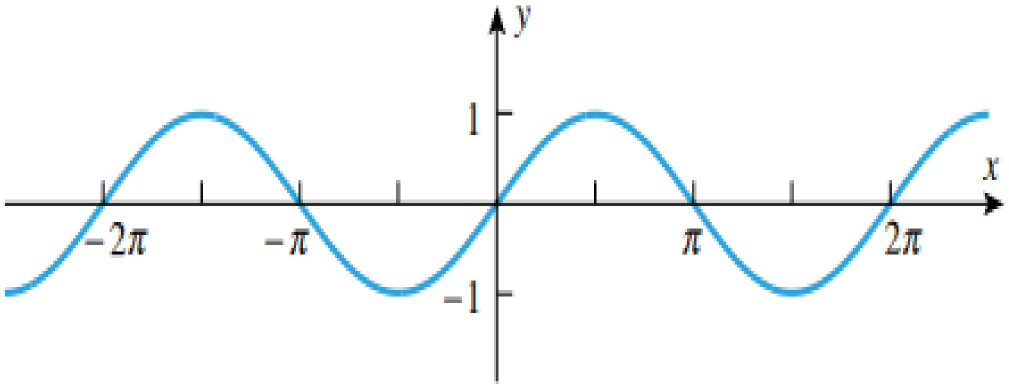
Solution. The function being graphed is a rational function, and hence is continuous at every number where the denominator is nonzero. Solving the equation

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

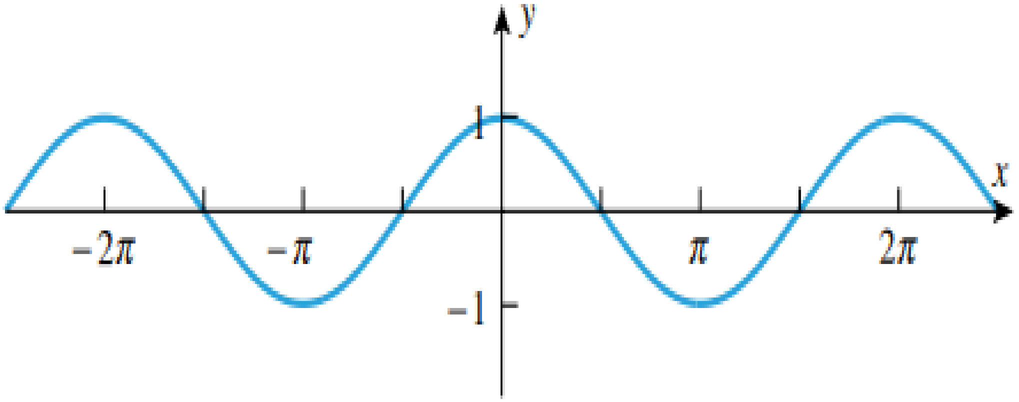
yields discontinuities at $x = 2$ and at $x = 3$. ◀

LIMITS AND CONTINUITY OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\lim_{x \to c} \sin x = \sin c \quad \text{and} \quad \lim_{x \to c} \cos x = \cos c$$



$y = \sin x$



$y = \cos x$

THEOREM. *If c is any number in the natural domain of the stated trigonometric function, then*

$$\lim_{x \to c} \sin x = \sin c \qquad \lim_{x \to c} \cos x = \cos c \qquad \lim_{x \to c} \tan x = \tan c$$

$$\lim_{x \to c} \csc x = \csc c \qquad \lim_{x \to c} \sec x = \sec c \qquad \lim_{x \to c} \cot x = \cot c$$

Example 1 Find the limit

$$\lim_{x \to 1} \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$$

Solution. Recall from the last section that since the cosine function is continuous everywhere,

$$\lim_{x \to 1} \cos(g(x)) = \cos(\lim_{x \to 1} g(x))$$

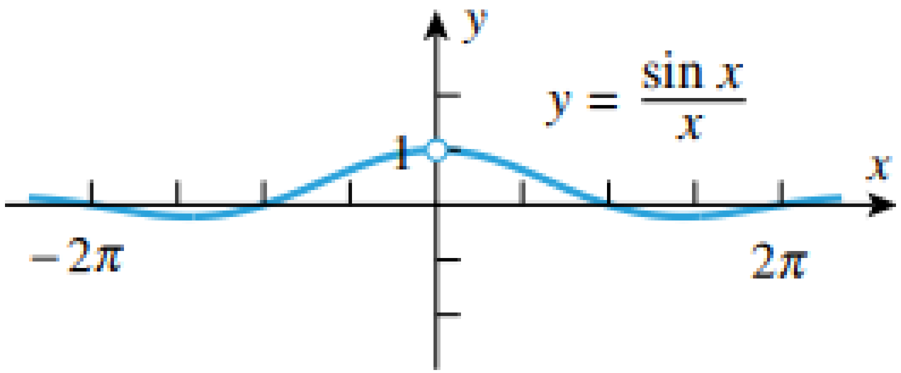
provided $\lim_{x \to 1} g(x)$ exists. Thus,

$$\lim_{x \to 1} \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \lim_{x \to 1} \cos(x + 1) = \cos\left(\lim_{x \to 1} (x + 1)\right) = \cos 2 \qquad ◀$$

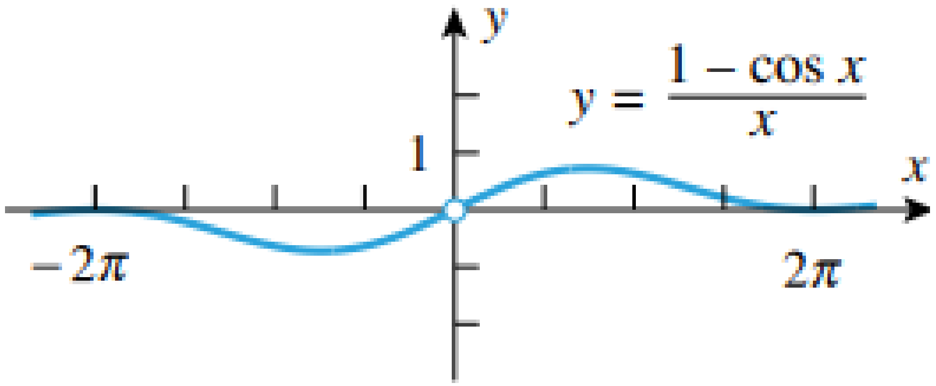
THEOREM.

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(b) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Proof (b). For this proof we will use the limit in part (a), the continuity of the sine function, and the trigonometric identity $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. We obtain

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)x}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

Example 2 Find

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

Solution (a).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=(1)(1)=1$$

Solution (b). The trick is to multiply and divide by 2, which will make the denominator the same as the argument of the sine function [just as in Theorem 2.6.3(*a*)]:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}2\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta}=2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

Now make the substitution $x=2\theta$, and use the fact that $x\to 0$ as $\theta\to 0$. This yields

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}=2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2(1)=2$$

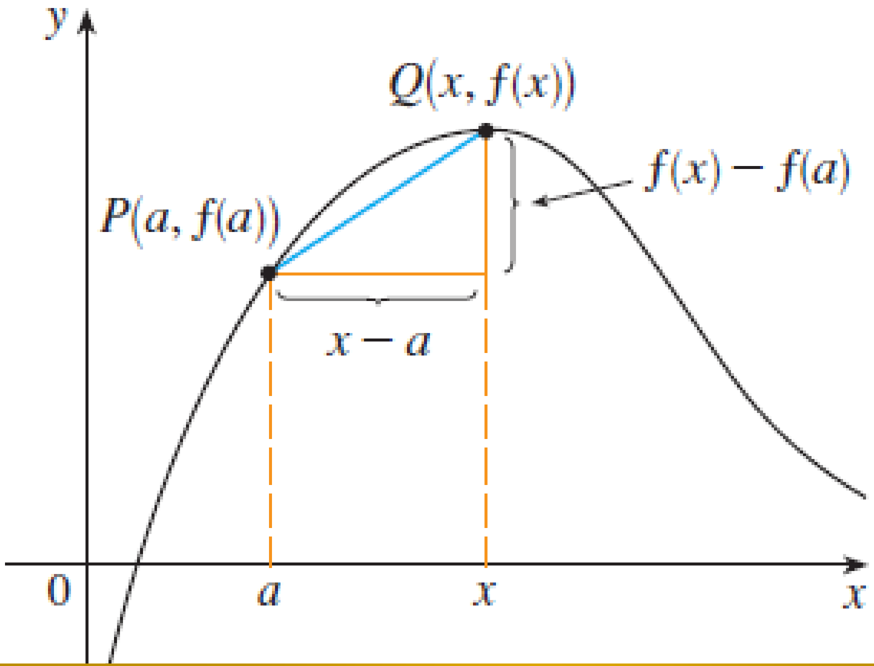
Solution (c).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{3}{5}$$

Derivatives and rates of change

DEFINITION The **tangent line** to the curve $y = f(x)$ at the point $P(a, f(a))$ is the line through P with slope

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



DEFINITION The **derivative of a function** f **at a number** a, denoted by $f'(a)$, is

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

EXAMPLE Find the derivative of the function $f(x) = x^2 - 8x + 9$ at the number a.

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\
&= 2a - 8
\end{aligned}
$$

DERIVATIVE NOTATION

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

$$\left.\frac{d}{dx}[f(x)]\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

Find the derivative with respect to x of $f(x) = x^3 - x$.

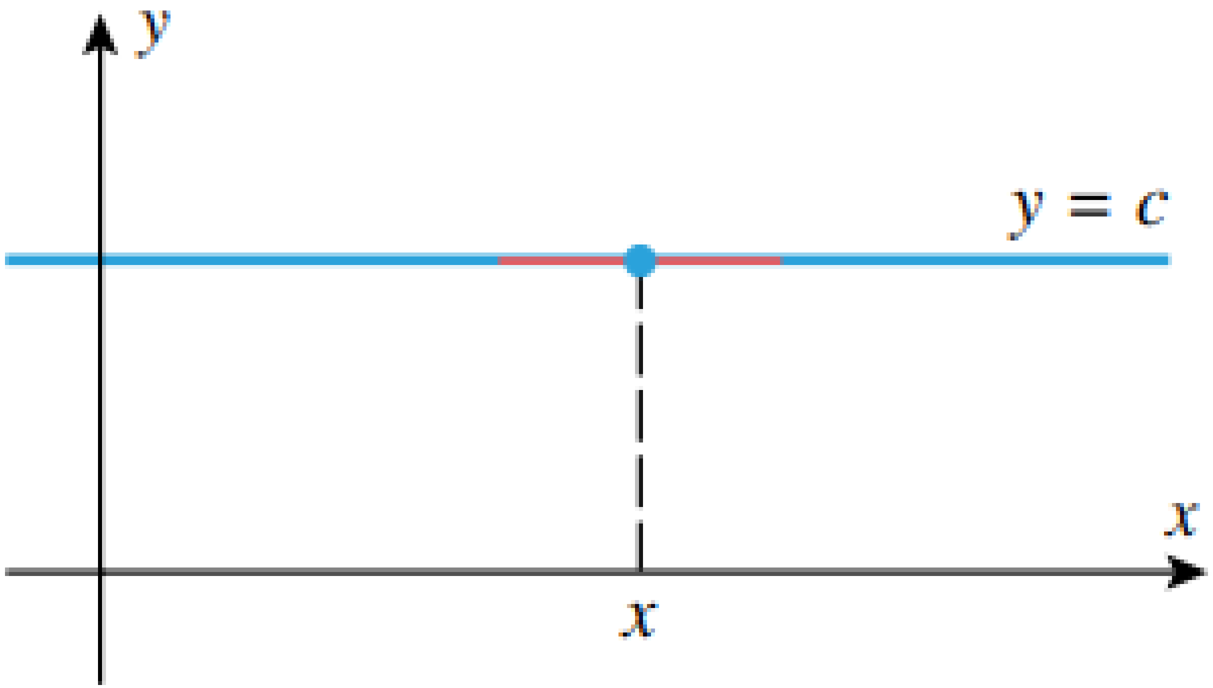
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$\frac{d}{dx}[x^3 - x]\bigg|_{x=1} = 3(1^2) - 1 = 2,$$

TECHNIQUES OF DIFFERENTIATION

THEOREM. *The derivative of a constant function is* 0; *that is, if c is any real number, then*

$$\boxed{\frac{d}{dx}[c] = 0}$$



Example $\frac{d}{dx}[5] = 0$

THEOREM (***The Power Rule***).

If n is any integer, then

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Example

$$\frac{d}{dx}[x^5] = 5x^4, \qquad \frac{d}{dx}[x] = 1 \cdot x^0 = 1, \qquad \frac{d}{dx}[x^{12}] = 12x^{11}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-9}] = -9x^{-9-1} = -9x^{-10}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{d}{dx}[x^{-1}] = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

THEOREM. *If f is differentiable at x and c is any real number, then cf is also differentiable at x and*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Example

$$\frac{d}{dx}[4x^8] = 4\frac{d}{dx}[x^8] = 4[8x^7] = 32x^7$$

$$\frac{d}{dx}[-x^{12}] = (-1)\frac{d}{dx}[x^{12}] = -12x^{11}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}[x] = \frac{1}{\pi}$$

THEOREM. *If f and g are differentiable at x, then so are $f+g$ and $f-g$ and*

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Example

$$\frac{d}{dx}[x^4+x^2] = \frac{d}{dx}[x^4] + \frac{d}{dx}[x^2] = 4x^3+2x$$

$$\frac{d}{dx}[6x^{11}-9] = \frac{d}{dx}[6x^{11}] - \frac{d}{dx}[9] = 66x^{10}-0 = 66x^{10}$$

THEOREM (*The Product Rule*).

If f and g are differentiable at x, then so is the product $f \cdot g$, and

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

The product rule can be written in function notation as

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$$

Example Find dy/dx if $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$.

Method I. (*Using the Product Rule*)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(4x^2 - 1)(7x^3 + x)] \\ &= (4x^2 - 1)\frac{d}{dx}[7x^3 + x] + (7x^3 + x)\frac{d}{dx}[4x^2 - 1] \\ &= (4x^2 - 1)(21x^2 + 1) + (7x^3 + x)(8x) = 140x^4 - 9x^2 - 1\end{aligned}$$

Method II. (*Multiplying First*)

$$y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x) = 28x^5 - 3x^3 - x$$

Thus,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[28x^5 - 3x^3 - x] = 140x^4 - 9x^2 - 1$$

THEOREM (*The Quotient Rule*).

If f and g are differentiable at x and $g(x) \neq 0$, then f/g is differentiable at x and

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

The quotient rule can be written in function notation as

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

Example $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\right] = \frac{(x^4 + 1)\frac{d}{dx}[x^2 - 1] - (x^2 - 1)\frac{d}{dx}[x^4 + 1]}{\left(x^4 + 1\right)^2}$$

$$= \frac{(x^4 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(4x^3)}{\left(x^4 + 1\right)^2}$$

$$= \frac{-2x^5 + 4x^3 + 2x}{\left(x^4 + 1\right)^2} = -\frac{2x(x^4 - 2x^2 - 1)}{\left(x^4 + 1\right)^2}$$

HIGHER DERIVATIVES

$$f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', \quad f^{(5)} = (f^{(4)})', \ldots$$

Example If $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$, then

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4 \\
f''(x) &= 36x^2 - 12x + 2 \\
f'''(x) &= 72x - 12 \\
f^{(4)}(x) &= 72 \\
f^{(5)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Successive derivatives can also be denoted as follows:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x)]\right] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

In general, we write

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}[f(x)]}$$

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}, \ldots$$

or more briefly,

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$$

DERIVATIVES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Example Find $f'(x)$ if $f(x) = x^2 \tan x$.

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}[\tan x] + \tan x \cdot \frac{d}{dx}[x^2] = x^2 \sec^2 x + 2x \tan x$$

Example Find dy/dx if $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \cos x) \cdot \dfrac{d}{dx}[\sin x] - \sin x \cdot \dfrac{d}{dx}[1 + \cos x]}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

Example Find $y''(\pi/4)$ if $y(x) = \sec x$.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sec x \tan x \\
y''(x) &= \sec x \cdot \frac{d}{dx}[\tan x] + \tan x \cdot \frac{d}{dx}[\sec x] \\
&= \sec x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot \sec x \tan x \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
y''(\pi/4) &= \sec^3(\pi/4) + \sec(\pi/4)\tan^2(\pi/4) \\
&= (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})(1)^2 = 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

DERIVATIVE OF THE NATURAL EXPONENTIAL FUNCTION

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

EXAMPLE If $f(x) = e^x - x$, find f' and f''.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

Next Back to content

The chain rule

THEOREM (***The Chain Rule***). *If g is differentiable at x and f is differentiable at $g(x)$, then the composition $f \circ g$ is differentiable at x. Moreover,*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Alternatively, if

$$y = f(g(x)) \quad \text{and} \quad u = g(x)$$

then $y = f(u)$ and

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivative of the outside evaluated at the inside}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivative of the inside}}$$

[Next](#) [Back to content](#)

Find $\frac{d}{dx} e^{sinx}$

$u = sinx$

$$\frac{d}{dx} e^{sinx} = \frac{d}{du} e^{u} \frac{du}{dx}$$

$$= e^{u} \frac{d}{dx}(sinx)$$

$$= \cos x \, e^{u}$$

$$= \cos x \, e^{sinx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivative of the outside evaluated at the inside}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivative of the inside}}$$

For example,

$$\frac{d}{dx}[\cos(x^2+9)] = \underbrace{-\sin(x^2+9)}_{\text{Derivative of the outside evaluated at the inside}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Derivative of the inside}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{Derivative of}\\ \text{the outside}\\ \text{evaluated at}\\ \text{the inside}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{Derivative}\\ \text{of the inside}}}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tan^2 x] = \frac{d}{dx}\left[(\tan x)^2\right] = \underbrace{(2\tan x)}_{\substack{\text{Derivative of}\\ \text{the outside}\\ \text{evaluated at}\\ \text{the inside}}} \cdot \underbrace{(\sec^2 x)}_{\substack{\text{Derivative}\\ \text{of the inside}}} = 2\tan x \sec^2 x$$

IMPLICIT DIFFERENTIATION

An equation of the form $y = f(x)$ is said to define y ***explicitly*** as a function of x because the variable y appears alone on one side of the equation.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad yx + y + 1 = x$$

define y ***implicitly*** as a function of x.

Example 1 Use implicit differentiation to find dy/dx if $5y^2 + \sin y = x^2$.

$$\frac{d}{dx}[5y^2 + \sin y] = \frac{d}{dx}[x^2]$$

$$5\frac{d}{dx}[y^2] + \frac{d}{dx}[\sin y] = 2x$$

$$5\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

The chain rule was used here because y is a function of x.

$$10y\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

Solving for dy/dx we obtain $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y}$$

Example Find the slopes of the curve $y^2 - x + 1 = 0$ at the points $(2, -1)$ and $(2, 1)$.

$$\frac{d}{dx}[y^2 - x + 1] = \frac{d}{dx}[0]$$

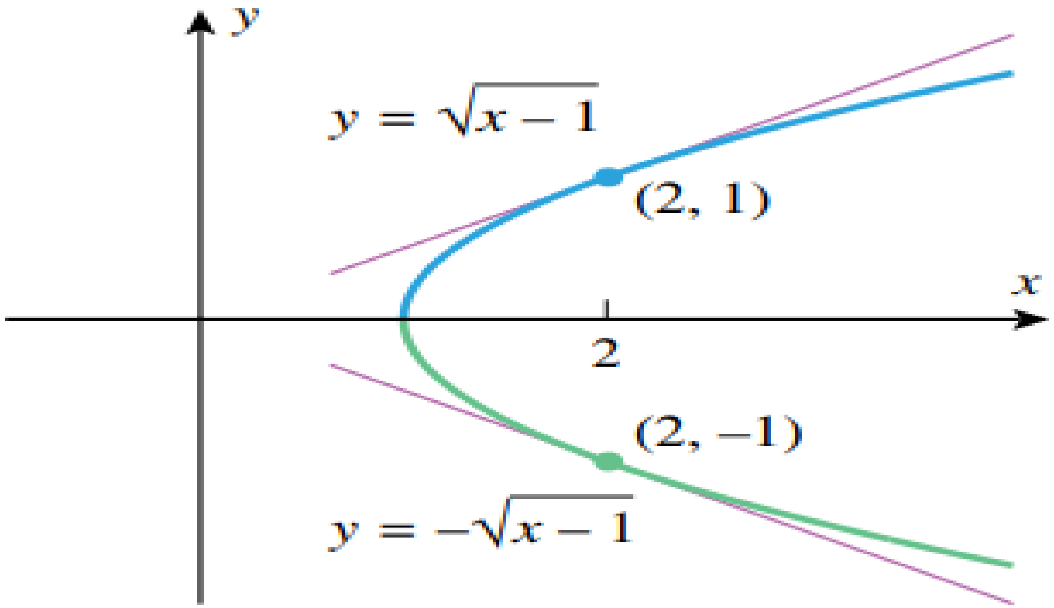
$$\frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[1] = \frac{d}{dx}[0]$$

$$2y\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

At $(2, -1)$ we have $y = -1$, and at $(2, 1)$ we have $y = 1$, so the slopes of the curve at those points are

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = -\frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{1}{2}$$



Next

Back to content

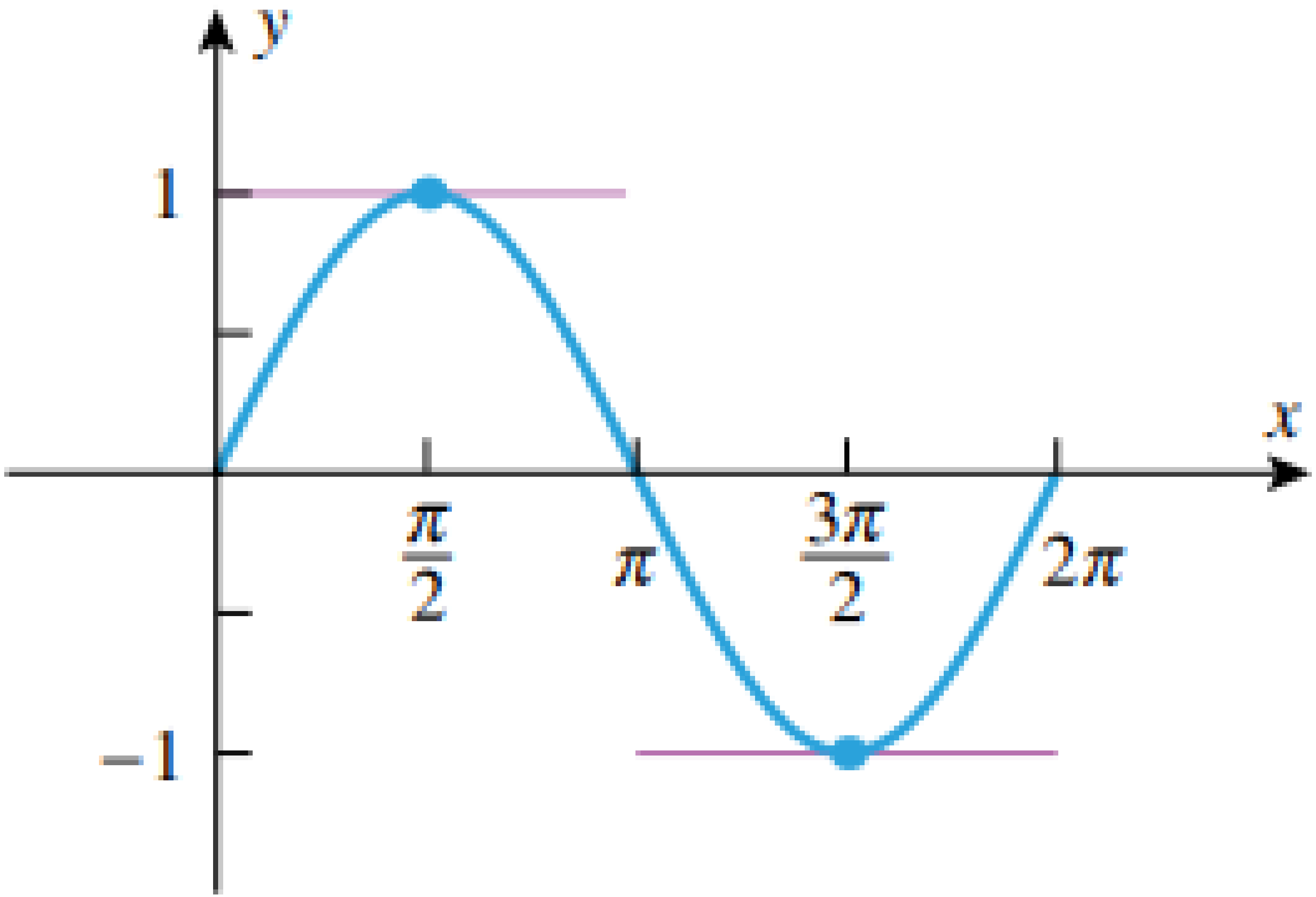
Roll’s theorem and the mean value theorem

THEOREM (***Rolle’s Theorem***). *Let f be differentiable on (a, b) and continuous on $[a, b]$. If $f(a) = f(b) = 0$, then there is at least one number c in (a, b) such that $f'(c) = 0$.*

Example The function $f(x) = \sin x$ has roots at $x = 0$ and $x = 2\pi$. Verify the hypotheses and conclusion of Rolle’s Theorem for $f(x) = \sin x$ on $[0, 2\pi]$.

Solution. Since f is continuous and differentiable everywhere, it is differentiable on $(0, 2\pi)$ and continuous on $[0, 2\pi]$. Thus, Rolle’s Theorem guarantees that there is at least one number c in the interval $(0, 2\pi)$ such that $f'(c) = 0$. Since $f'(x) = \cos x$, we can find c by solving the equation $\cos c = 0$ on the interval $(0, 2\pi)$. This yields two values for c, namely $c_1 = \pi/2$ and $c_2 = 3\pi/2$ (Figure 4.8.2).

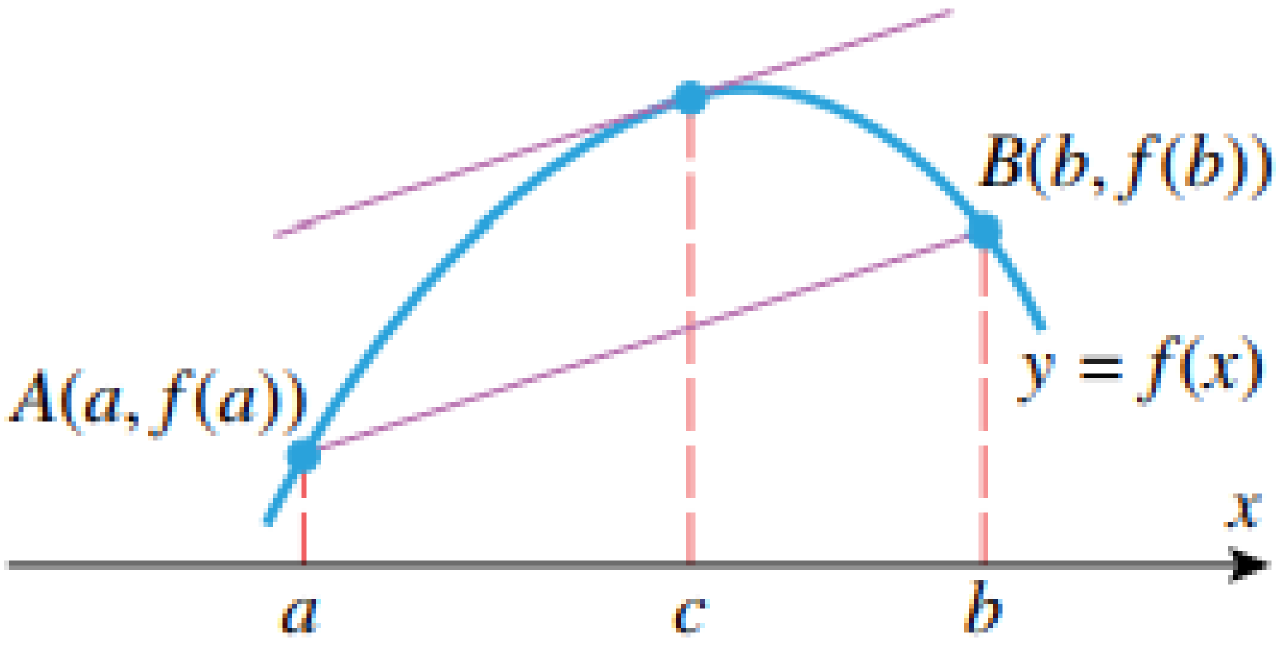
Next Back to content



y
1
−1
x
π/2
π
3π/2
2π

THEOREM (***Mean-Value Theorem***). *Let f be differentiable on (a, b) and continuous on $[a, b]$. Then there is at least one number c in (a, b) such that*

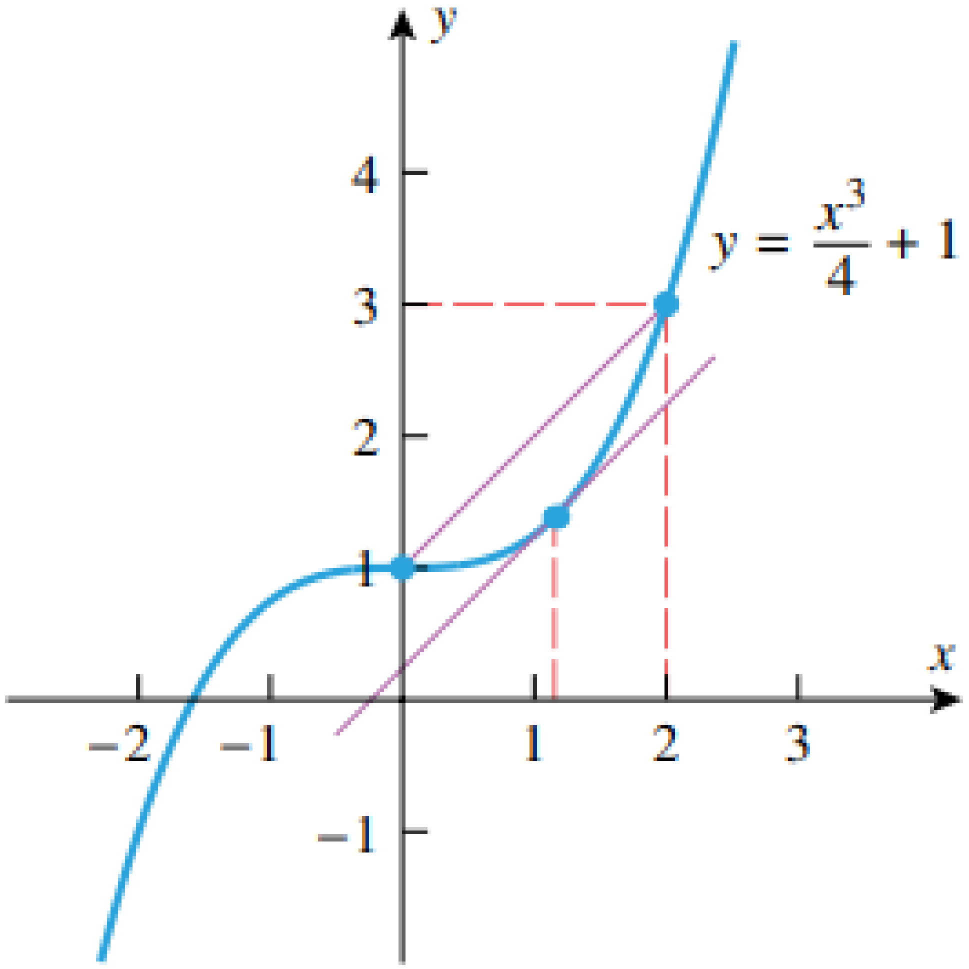
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Example

(a) Generate the graph of $f(x) = (x^3/4) + 1$ over the interval $[0, 2]$, and use it to determine the number of tangent lines to the graph of f over the interval $(0, 2)$ that are parallel to the secant line joining the endpoints of the graph.

(b) Show that f satisfies the hypotheses of the Mean-Value Theorem on the interval $[0, 2]$, and find all values of c in the interval $(0, 2)$ whose existence is guaranteed by the Mean-Value Theorem. Confirm that these values of c are consistent with your graph in part (a).



Solution (a). The graph of f in Figure suggests that there is only one tangent line over the interval $(0, 2)$ that is parallel to the secant line joining the endpoints.

Solution (b). The function f is continuous and differentiable everywhere because it is a polynomial. In particular, f is continuous on $[0, 2]$ and differentiable on $(0, 2)$, so the hypotheses of the Mean-Value Theorem are satisfied with $a = 0$ and $b = 2$. But

$$f(a) = f(0) = 1, \quad f(b) = f(2) = 3$$
$$f'(x) = \frac{3x^2}{4}, \qquad f'(c) = \frac{3c^2}{4}$$

so in this case Equation (1) becomes

$$\frac{3c^2}{4} = \frac{3-1}{2-0} \quad \text{or} \quad 3c^2 = 4$$

which has the two solutions $c = \pm 2/\sqrt{3} \approx \pm 1.15$. However, only the positive solution lies in the interval $(0, 2)$; this value of c is consistent with Figure

Next Back to content

In general, an **exponential function** is a function of the form

$$f(x) = a^x$$

where a is a positive constant. Let's recall what this means.

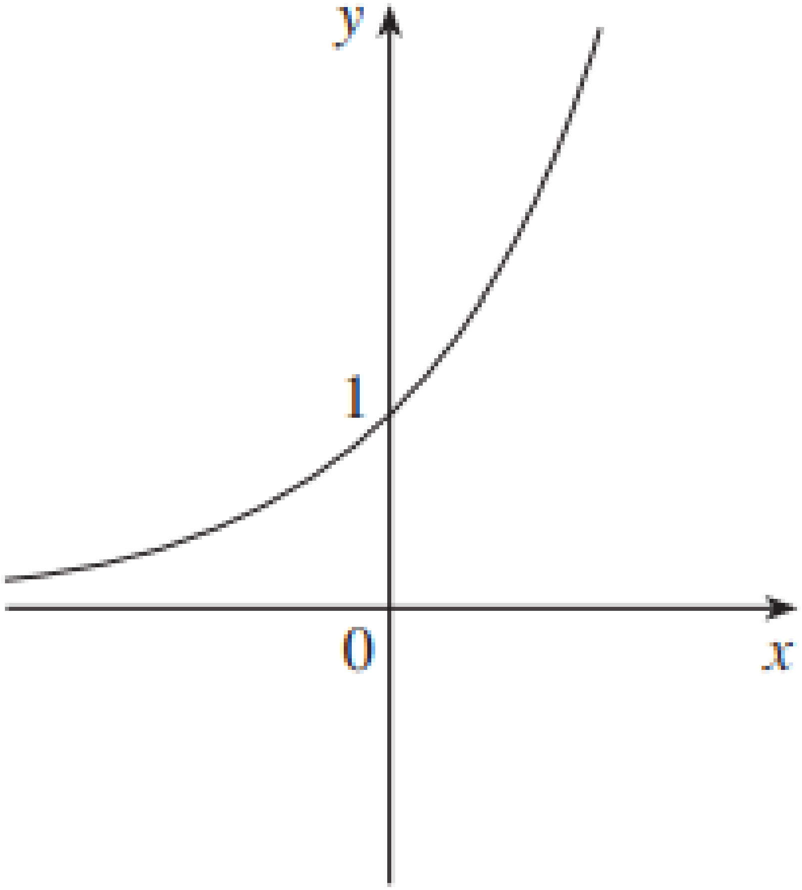
If $x = n$, a positive integer, then

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factors}}$$

Next Back to content

LAWS OF EXPONENTS If a and b are positive numbers and x and y are any real numbers, then

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$



$y = e^x$

INVERSE FUNCTIONS AND LOGARITHMS

the formulation of an inverse function given by

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{for every } x > 0$$

LAWS OF LOGARITHMS If x and y are positive numbers, then

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (where r is any real number)

the **natural logarithm** and has a special notation:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

$$\boxed{\ln x = y \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x}$$

$$\ln e = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ln(e^x) = x & x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} = x & x > 0 \end{array}}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

$$\boxed{\sin^{-1}x = y \iff \sin y = x \quad \text{and} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

EXAMPLE Evaluate (a) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ and (b) $\tan(\arcsin \frac{1}{3})$.

SOLUTION

(a) We have

$$\sin^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$$

because $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ and $\pi/6$ lies between $-\pi/2$ and $\pi/2$.

(b) Let $\theta = \arcsin \frac{1}{3}$, so $\sin \theta = \frac{1}{3}$. Then we can draw a right triangle with angle θ as in Figure 19 and deduce from the Pythagorean Theorem that the third side has length $\sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. This enables us to read from the triangle that

$$\tan(\arcsin \tfrac{1}{3}) = \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

DERIVATIVE OF THE NATURAL EXPONENTIAL FUNCTION

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

DERIVATIVES OF LOGARITHMIC FUNCTIONS

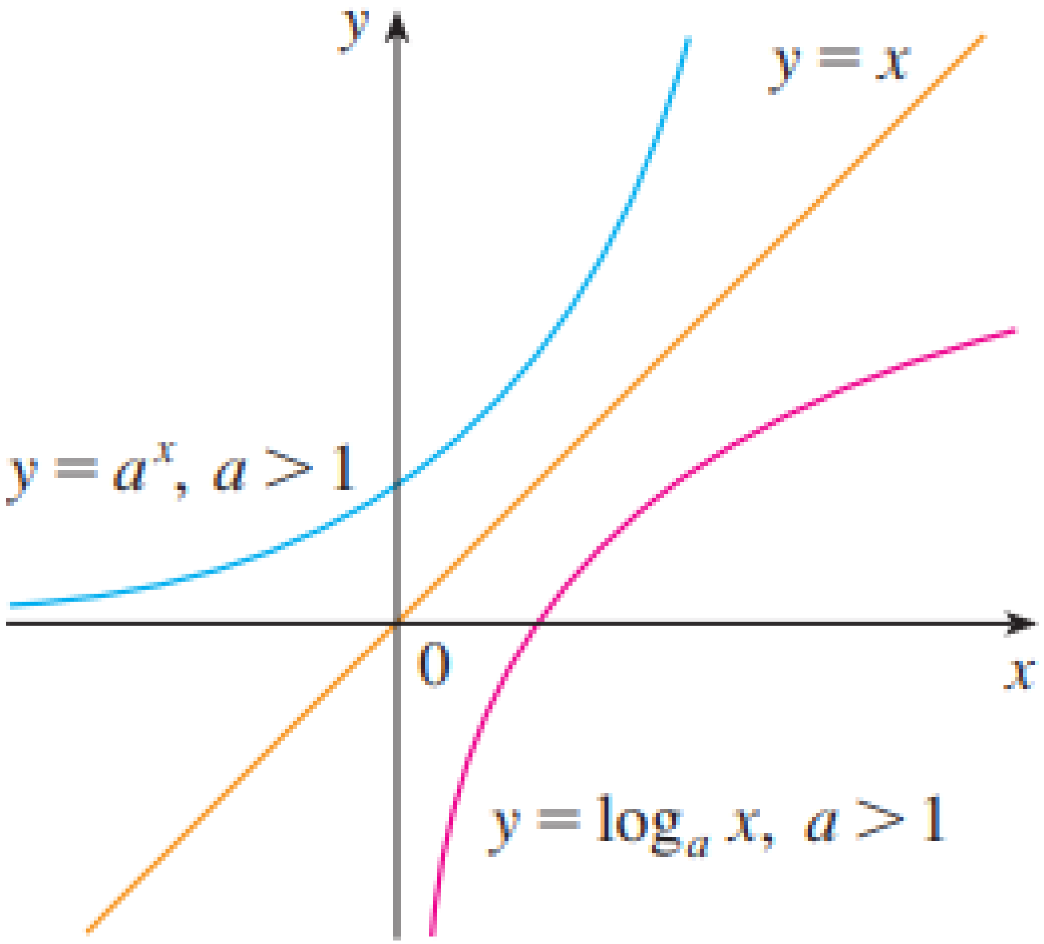
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

EXAMPLE Differentiate $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUTION To use the Chain Rule, we let $u = x^3 + 1$. Then $y = \ln u$, so

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$



y
y = x
y = a^x, a > 1
0
x
y = log_a x, a > 1

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

DERIVATIVES OF INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

EXAMPLE Find $\dfrac{d}{dx}\ln(\sin x)$.

SOLUTION
$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \cot x$$

EXAMPLE Differentiate $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUTION This time the logarithm is the inner function, so the Chain Rule gives

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

LOGARITHMIC DIFFERENTIATION

EXAMPLE Differentiate $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUTION 1 Using logarithmic differentiation, we have

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUTION 2 Another method is to write $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(as in Solution 1)}$$

THE NUMBER e AS A LIMIT

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

If we put $n = 1/x$, then $n \to \infty$ as $x \to 0^+$ and so an alternative expression

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Next Back to content

Hyperbolic and inverse Hyperbolic functions

DEFINITION OF THE HYPERBOLIC FUNCTIONS

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

HYPERBOLIC IDENTITIES

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

1 DERIVATIVES OF HYPERBOLIC FUNCTIONS

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

INVERSE HYPERBOLIC FUNCTIONS

$$y = \sinh^{-1}x \iff \sinh y = x$$

$$y = \cosh^{-1}x \iff \cosh y = x \quad \text{and} \quad y \geqslant 0$$

$$y = \tanh^{-1}x \iff \tanh y = x$$

$$\sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

$$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

DERIVATIVES OF INVERSE HYPERBOLIC FUNCTIONS

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

EXAMPLE Prove that $\dfrac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUTION Let $y = \sinh^{-1}x$. Then $\sinh y = x$. If we differentiate this equation implicitly with respect to x, we get

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Since $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ and $\cosh y \geqslant 0$, we have $\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y}$, so

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Next Back to content

MACLAURIN AND TAYLOR POLYNOMIAL APPROXIMATIONS

DEFINITION. If f can be differentiated n times at 0, then we define the ***nth Maclaurin polynomial for f*** to be

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

This polynomial has the property that its value and the values of its first n derivatives match the values of f and its first n derivatives at $x = 0$.

Example Find the Maclaurin polynomials p_0, p_1, p_2, p_3, and p_n for e^x.

Next Back to content

Example Find the Maclaurin polynomials p_0, p_1, p_2, p_3, and p_n for e^x.

Solution. Let $f(x) = e^x$. Thus,

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

and

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Therefore,

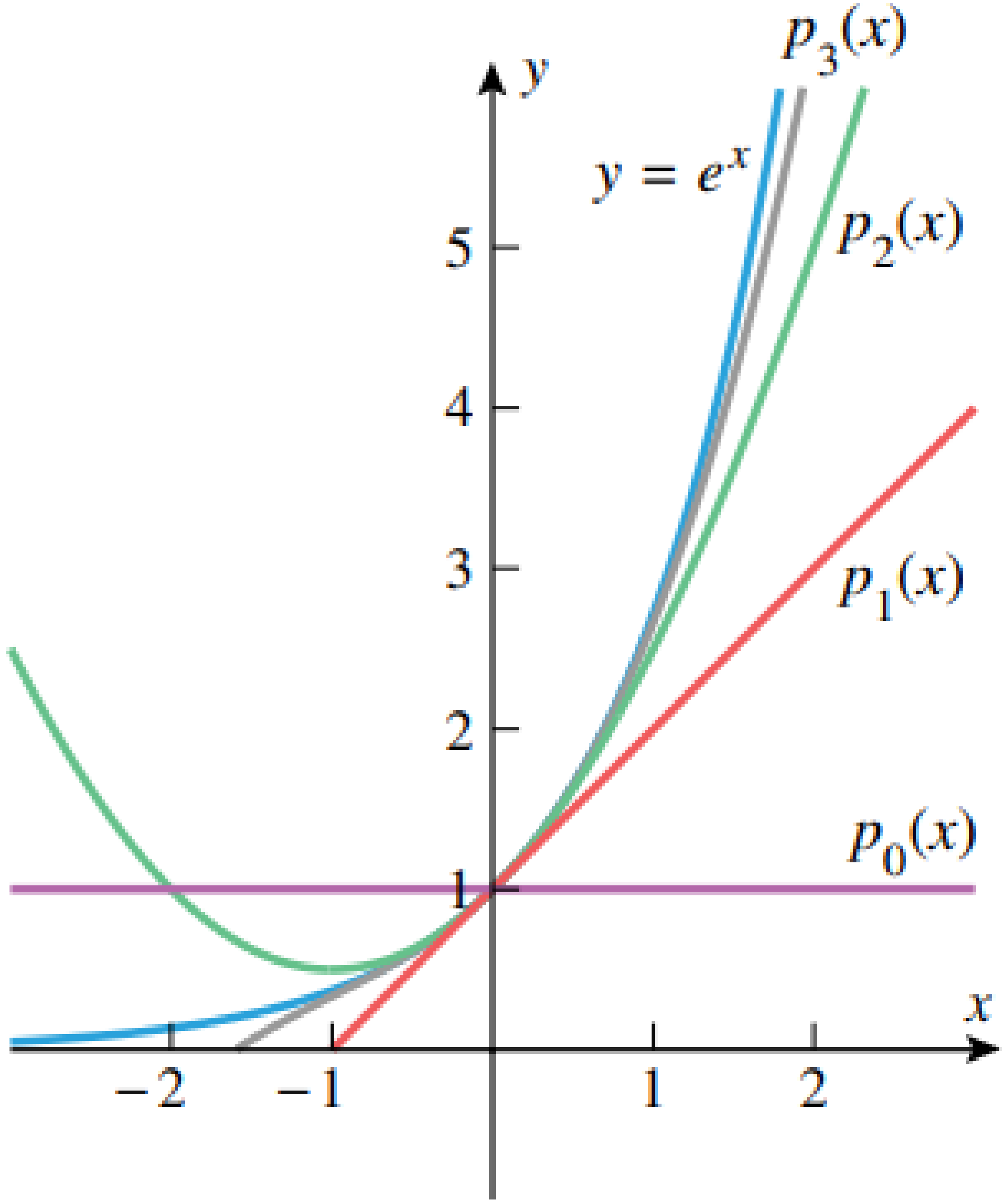
$$p_0(x) = f(0) = 1$$

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$



y
$p_3(x)$
$y = e^x$
$p_2(x)$
5
4
3
$p_1(x)$
2
$p_0(x)$
1
x
−2
−1
1
2

DEFINITION. If f can be differentiated n times at x_0, then we define the ***nth Taylor polynomial for f about x = x₀*** to be

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

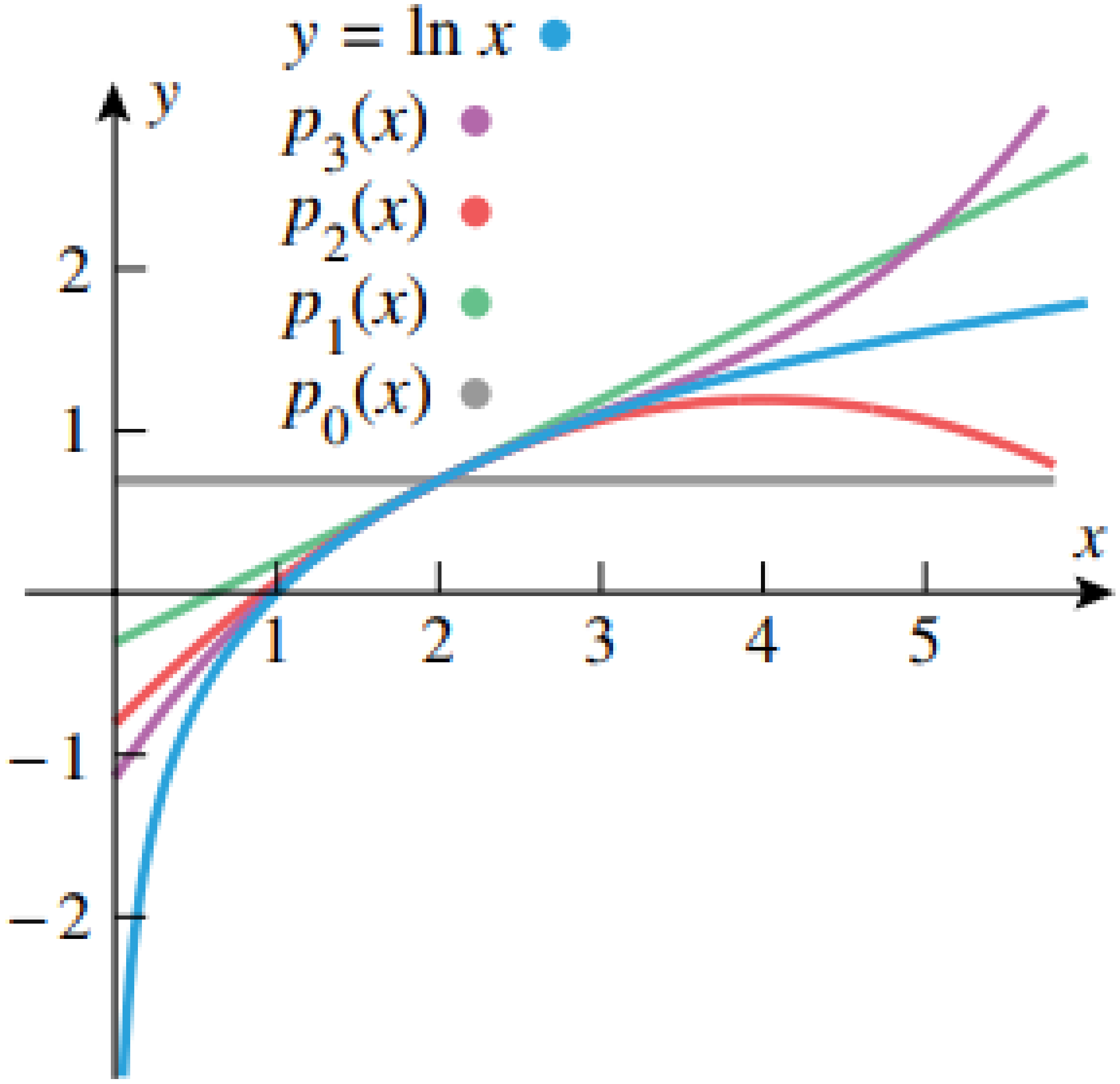
Example Find the first four Taylor polynomials for $\ln x$ about $x = 2$.

Example Find the first four Taylor polynomials for $\ln x$ about $x = 2$.

Solution. Let $f(x) = \ln x$. Thus,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(2) &= \ln 2 \\
f'(x) &= 1/x & f'(2) &= 1/2 \\
f''(x) &= -1/x^2 & f''(2) &= -1/4 \\
f'''(x) &= 2/x^3 & f'''(2) &= 1/4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= f(2) = \ln 2 \\
p_1(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2) \\
p_2(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2) - \tfrac{1}{8}(x-2)^2 \\
p_3(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 \\
&= \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2) - \tfrac{1}{8}(x-2)^2 + \tfrac{1}{24}(x-2)^3
\end{aligned}
$$



$y = \ln x$
$p_3(x)$
$p_2(x)$
$p_1(x)$
$p_0(x)$
y
x
2
1
−1
−2
1
2
3
4
5

SIGMA NOTATION FOR TAYLOR AND MACLAURIN POLYNOMIALS

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

In particular, we can write the nth-order Maclaurin polynomial for $f(x)$ as

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Example Find the nth Maclaurin polynomials for

(a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) $\dfrac{1}{1-x}$

Solution (a). In the Maclaurin polynomials for $\sin x$, only the odd powers of x appear explicitly. To see this, let $f(x) = \sin x$; thus,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \qquad f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

Since $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, the pattern 0, 1, 0, -1 will repeat as we evaluate successive derivatives at 0. Therefore, the successive Maclaurin polynomials for $\sin x$ are

$$p_0(x) = 0$$

$$p_1(x) = 0 + x$$

$$p_2(x) = 0 + x + 0$$

$$p_3(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!}$$

$$p_4(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0$$

$$p_5(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!}$$

$$p_6(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0$$

$$p_6(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0$$

$$p_7(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!}$$

Because of the zero terms, each even-order Maclaurin polynomial [after $p_0(x)$] is the same as the preceding odd-order Maclaurin polynomial. That is,

$$p_{2k+1}(x) = p_{2k+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Example Find the nth Maclaurin polynomials for

(a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) $\dfrac{1}{1-x}$

Solution (b). In the Maclaurin polynomials for $\cos x$, only the even powers of x appear explicitly; the computations are similar to those in part (a). The reader should be able to show that

$$p_0(x) = p_1(x) = 1$$

$$p_2(x) = p_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$p_4(x) = p_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$p_6(x) = p_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

In general, the Maclaurin polynomials for $\cos x$ are given by

$$p_{2k}(x) = p_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Example Find the nth Maclaurin polynomials for

(a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) $\dfrac{1}{1-x}$

Solution (c). Let $f(x) = 1/(1-x)$. The values of f and its first k derivatives at $x = 0$ are as follows:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} & f(0) &= 1 = 0! \\
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & f'(0) &= 1 = 1! \\
f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} & f''(0) &= 2 = 2! \\
f'''(x) &= \frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4} & f'''(0) &= 3! \\
f^{(4)}(x) &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{(1-x)^5} & f^{(4)}(0) &= 4! \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} & f^{(k)}(0) &= k!
\end{aligned}
$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{(1-x)^5} \qquad f^{(4)}(0) = 4!$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad f^{(k)}(0) = k!$$

Thus, substituting $f^{(k)}(0) = k!$ into Formula (12) yields the nth Maclaurin polynomial for $1/(1-x)$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Example Find the nth Taylor polynomial for $1/x$ about $x = 1$.

Solution. Let $f(x) = 1/x$. The computations are similar to those in part (c) of Example . We leave it for you to show that

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -1, \quad f''(1) = 2!, \quad f'''(1) = -3!,$$

$$f^{(4)}(1) = 4!, \ldots, \quad f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$$

Thus, substituting $f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$ into Formula (11) with $x_0 = 1$ yields the nth Taylor polynomial for $1/x$:

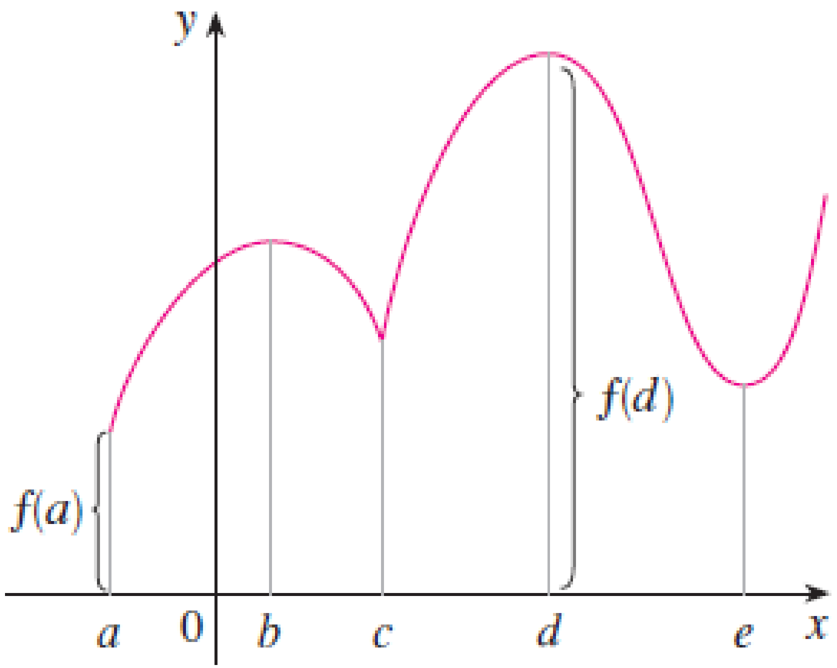
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots.3(2)1$$

5!=5(4)3(2)1

Maximum and Minimum Values

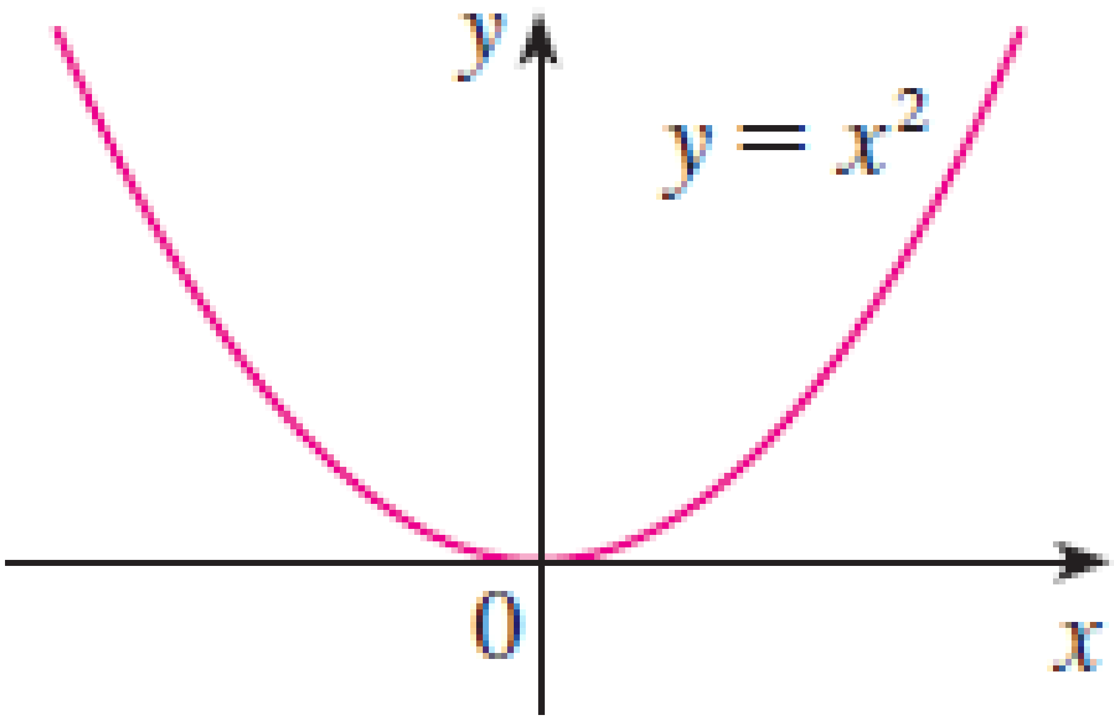
1 DEFINITION A function f has an **absolute maximum** (or **global maximum**) at c if $f(c) \geqslant f(x)$ for all x in D, where D is the domain of f. The number $f(c)$ is called the **maximum value** of f on D. Similarly, f has an **absolute minimum** at c if $f(c) \leqslant f(x)$ for all x in D and the number $f(c)$ is called the **minimum value** of f on D. The maximum and minimum values of f are called the **extreme values** of f.



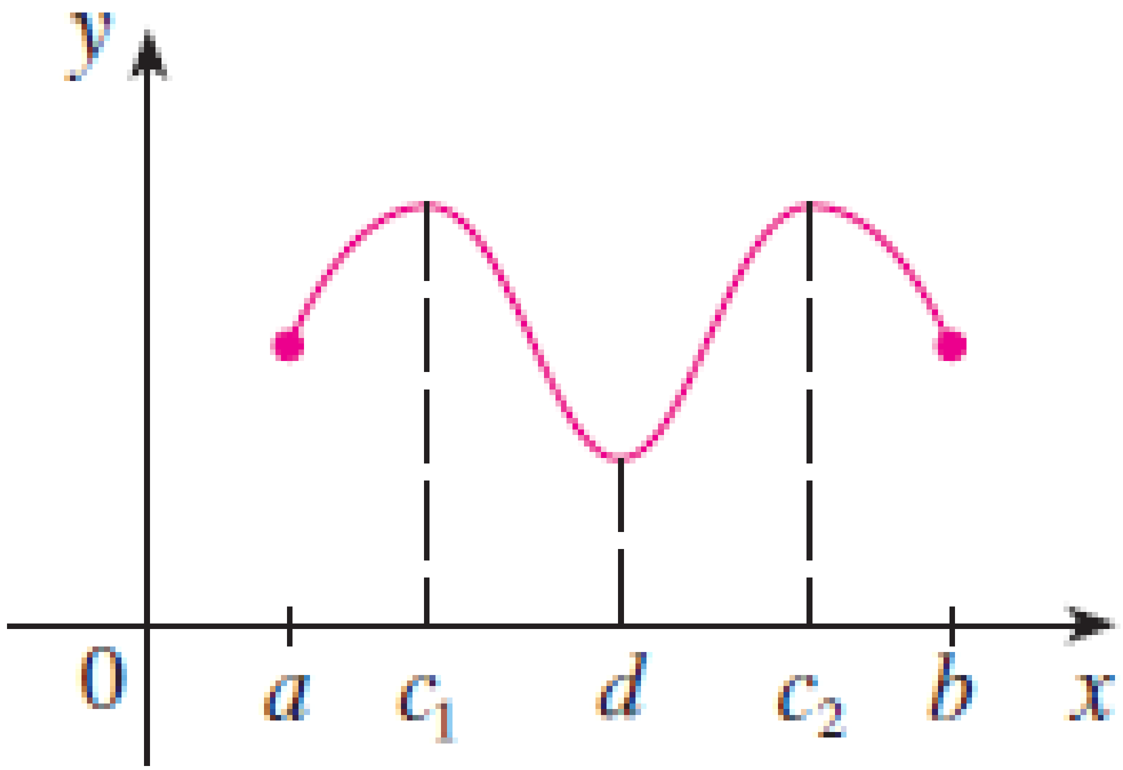
Back to content

EXAMPLES

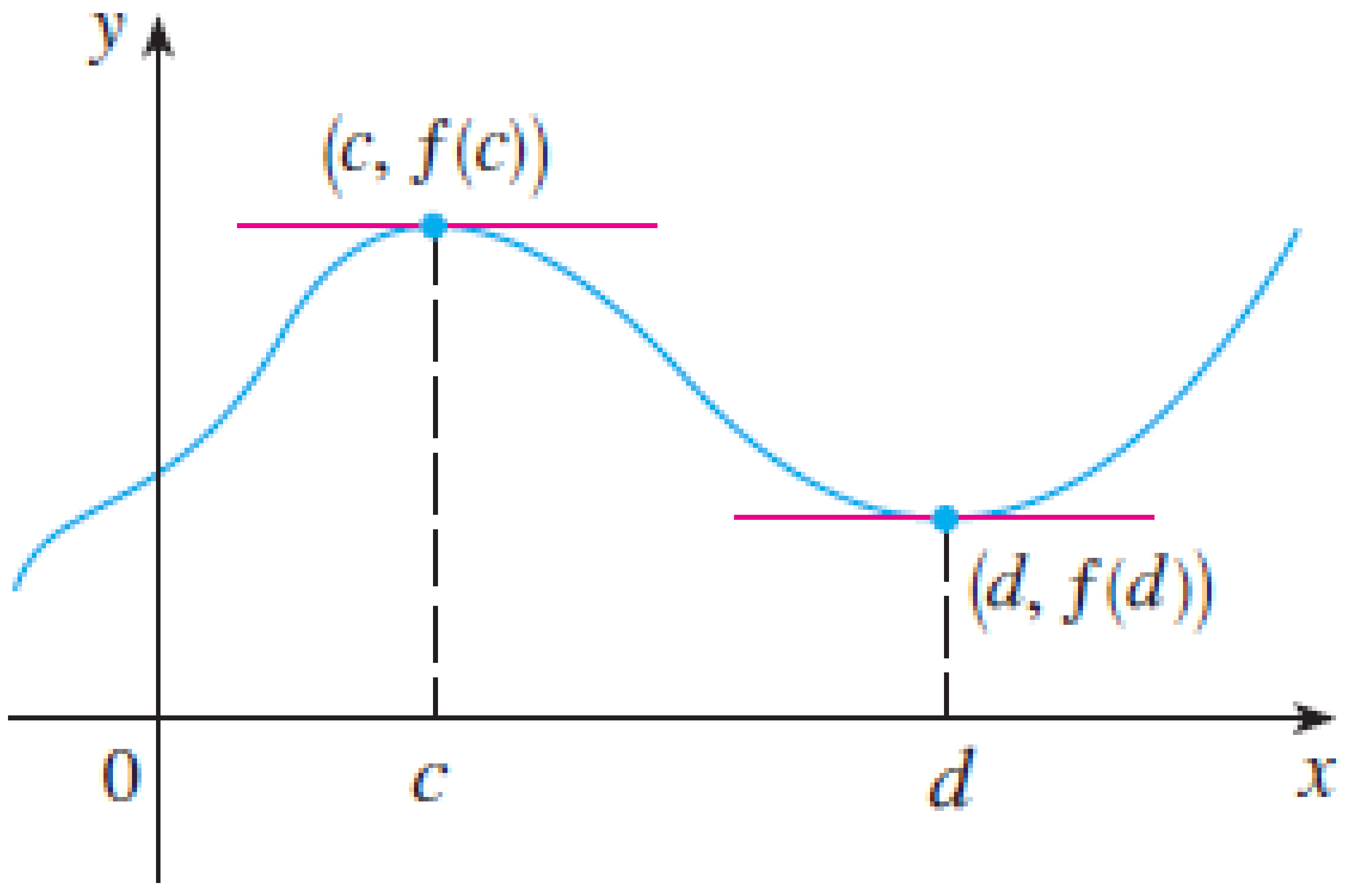
If $f(x) = x^2$, then $f(x) \geqslant f(0)$ because $x^2 \geqslant 0$ for all x. Therefore $f(0) = 0$ is the absolute (and local) minimum value of f. This corresponds to the fact that the origin is the lowest point on the parabola $y = x^2$.



THE EXTREME VALUE THEOREM If f is continuous on a closed interval $[a, b]$, then f attains an absolute maximum value $f(c)$ and an absolute minimum value $f(d)$ at some numbers c and d in $[a, b]$.



FERMAT'S THEOREM If f has a local maximum or minimum at c, and if $f'(c)$ exists, then $f'(c) = 0$.



A **critical number**

DEFINITION A **critical number** of a function f is a number c in the domain of f such that either $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ does not exist.

V EXAMPLE Find the critical numbers of $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

V EXAMPLE Find the critical numbers of $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUTION The Product Rule gives

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[The same result could be obtained by first writing $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Therefore $f'(x) = 0$ if $12 - 8x = 0$, that is, $x = \frac{3}{2}$, and $f'(x)$ does not exist when $x = 0$. Thus the critical numbers are $\frac{3}{2}$ and 0. □

If f has a local maximum or minimum at c, then c is a critical number of f.

To find an absolute maximum or minimum of a continuous function on a closed interval, we note that either it is local [in which case it occurs at a critical number by (7)] or it occurs at an endpoint of the interval. Thus the following three-step procedure always works.

THE CLOSED INTERVAL METHOD To find the *absolute* maximum and minimum values of a continuous function f on a closed interval $[a, b]$:

1. Find the values of f at the critical numbers of f in (a, b).
2. Find the values of f at the endpoints of the interval.
3. The largest of the values from Steps 1 and 2 is the absolute maximum value; the smallest of these values is the absolute minimum value.

V EXAMPLE Find the absolute maximum and minimum values of the function

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUTION Since f is continuous on $[-\frac{1}{2}, 4]$, we can use the Closed Interval Method:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Since $f'(x)$ exists for all x, the only critical numbers of f occur when $f'(x) = 0$, that is, $x = 0$ or $x = 2$. Notice that each of these critical numbers lies in the interval $(-\frac{1}{2}, 4)$. The values of f at these critical numbers are

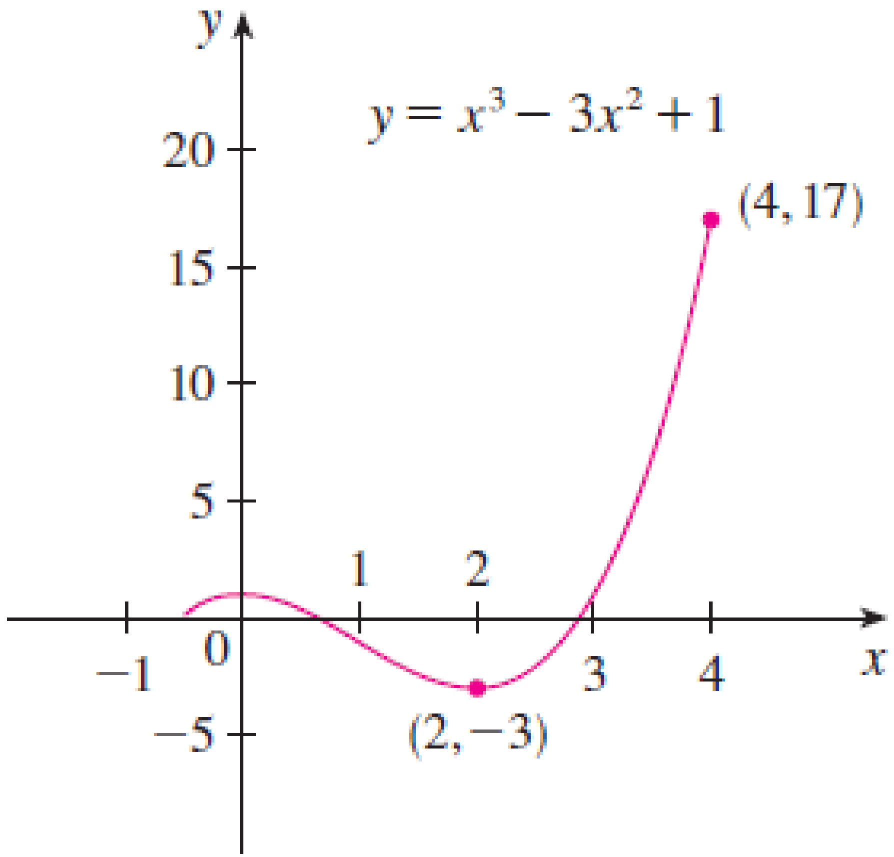
$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

The values of f at the endpoints of the interval are

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparing these four numbers, we see that the absolute maximum value is $f(4) = 17$ and the absolute minimum value is $f(2) = -3$.

Note that in this example the absolute maximum occurs at an endpoint, whereas the absolute minimum occurs at a critical number. The graph of f is sketched in Figure 12. □



EXAMPLE The Hubble Space Telescope was deployed on April 24, 1990, by the space shuttle *Discovery*. A model for the velocity of the shuttle during this mission, from liftoff at $t = 0$ until the solid rocket boosters were jettisoned at $t = 126$ s, is given by

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(in feet per second). Using this model, estimate the absolute maximum and minimum values of the *acceleration* of the shuttle between liftoff and the jettisoning of the boosters.

SOLUTION We are asked for the extreme values not of the given velocity function, but rather of the acceleration function. So we first need to differentiate to find the acceleration:

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083)$$

$$= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61$$

We now apply the Closed Interval Method to the continuous function a on the interval $0 \leqslant t \leqslant 126$. Its derivative is

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

The only critical number occurs when $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Evaluating $a(t)$ at the critical number and at the endpoints, we have

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

So the maximum acceleration is about 62.87 $\mathrm{ft/s^2}$ and the minimum acceleration is about 21.52 $\mathrm{ft/s^2}$. □

Back to content

جبر عام

اعداد
د عمرو محمد الراوى

المحتوى :

الباب الأول

مقدمة في المنطق الرياضي

المنطق هو العلم الذي يبحث فـــي القواعد التي تتبع في التفكير وطرق الاستدلال الصحيح. وهو بذلك أداة للتفكير لأنه يعنى بتحليل طرق التفكير وصيانته من الخطأ. والعملية المنطقية تهتم بفئة من الصيغ أو القضايا.

وبشكل عام يمكن القول عن المنطق الرياضي بأنه الأداة الفاصلة بين الحقيقة والخطأ. وقد ظهر في أواسط القرن التاسع عشر الميلاد نتيجة أبحاث العالم الإنجليزي جورج بول(1815-1884 م).

أنوع المنطق منطق كلاسيكي- منطق المكممات- منطق الاسناديات- المنطق الترجيحي- المنطق البوليان.

ويعتبر الفيلسوف الإغريقي أرسطو (384- 332ق.م) أول من وضع قواعد الاستنتاج والذي يقوم على ثلاث مبادئ أساسية وهي:

1. ثنائية القيمـــة: أي أن قيمة القضية اما ان تكون صواب او خطأ.
2. عدم التناقـض: أي ألا تكون القضية صواب وخطأ في ان واحد.
3. الثالث المستبعد: أي ألا تكون القضية غير صحيحه وغير خاطئة.

(1-1) العبارات المنطقية:

تعريف:
القضية أو التقرير (A statement or proposition) هي جملة تحمل خبرا ولا تأخذ الا واحدة من قيمتين منطقتين صحيحة (T) أو خاطئة (F).

مثال:

1- لينا تدرس في كلية العلوم. "جملة تمثل تقرير"

2- تونس عاصمة تونس. " جملة تمثل تقرير "

3- $x+2=8$ "لا تمثل تقرير لأنها صحيحة لبعض القيم فقط"

جدول الصدق أو الحقيقة

كل تقرير يمكن تمثيلة بجدول يسمي بجدول الصدق فمثلا

- إذا كان P تقريرا فأنه يأخذ احدى القمتين
  T أو F
  ويمكن وضع ذلك في جدول الصدق.

P
T
F

- إذا كان هناك n من التقارير فان القيم تكون 2^n.

فمثلا إذا كان لدينا ثلاث تقارير p ,q ,r فان جدول الصدق

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

(2-1) أدوات الربط المنطقية *Compound Statement*

إذا كان التقرير يحمل خبر واحد فانه يسمي تقريرا بسيطا مثل "لينا في كلية الطب".

أما إذا كان يحمل أكثر من خبر فانه يسمي تقريرا مركبا مثل "صبا في كلية العلوم وتمتلك سيارة ". وللتعبير عن هذه الجملة لابد من ادخال اداه ربط "و" وهذه الاداة تسمي بأداة الربط المنطقية.

وسنختصر في دراستنا على خمس ادوات ربط:

1- أداة النفي (Negative):

يرمز بالرمز (-) وتعريف كالاتي إذا كان التقرير pهو صواب فان p–يكون خطأ.
فمثلا ليكن p هو التقرير "x عدد طبيعي زوجي " فيكون p– هو " xليس عدد طبيعي زوجي".

P	-p
T	F
F	T

ملحوظة:
يجب التفريق بين النفي والنقيض ففي المثال يمثل النفي اما إذا قلنا نقيض التقرير pهو " xعدد طبيعي فردى".

2- أداة الوصل "and " conjunction

يرمز لها بالرمز ∧ وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \wedge q$ هو تقرير صواب في حالة واحدة فقط عندما يكونp, q كلا هما صواب وخلاف ذلك يكون خطأ.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية" لينا طالبة في كلية الطب وعضوة بالنادي الأهلي" فلو رمزنا للتقرير "لينا طالبة في كلية الطب" بالحرف p ورمزنا للتقرير "لينا عضوة بالنادي الأهلي" بالحرف q فان الجملة تصبح $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**F**

3- أداة الفصل "Or" disjunction

يرمز لها بالرمز ∨ وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \vee q$هو تقرير خطأ في حالة واحدة فقط عندما يكون p, q كلا هما خطأ وخلاف ذلك يكون صواب.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية" صبا ذاهبة لكلية الطب أو تشاهد مباره الأهلي" فلو رمزنا للتقرير "صبا ذاهبة لكلية الطب

p	q	$p \vee q$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

" بالحرف p ورمزنا للتقرير "صبا تشاهد مباره الأهلي" بالحرف q فان الجملة تصبح $p \vee q$

4- أداة الشرط "if ...,then"

يرمز لها بالرمز → وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \to q$هو تقرير خطأ في حالة واحدة فقط عندما يكون p صائب و q خاطئ وخلاف ذلك يكون صواب.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية "إذا نجحت صبا في الامتحان فان والدها سوف يقدم لها هدية" فلو رمزنا للتقرير "نجحت صبا في الامتحان " بالحرف p ورمزنا للتقرير " والدها سوف يقدم لها هدية " بالحرف q فان الجملة تصبح $p \to q$ وتكون خاطئة في حالة واحدة إذا نجحت صبا ولم يقدم لها والدها هدية.

p	q	$p \to q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**T**
F	F	**T**

5-أداة ثنائي الشرط "if and only if":

يرمز لها بالرمز ↔وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \leftrightarrow q$هو تقرير صائب في حالة واحدة عندما يكون p,qكلاهما صائب أو خاطئ وخلاف ذلك يكون خطأ.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية "المثلث يكون متساوي الساقين إذا كان وكان فقط يوجد فيه زاويتا متساويتان" فلو رمزنا للتقرير "المثلث يكون متساوي الساقين " بالحرف p ورمزنا للتقرير "المثلث يوجد فيه زاويتا متساويتان " بالحرف q فان الجملة تصبح $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**T**

تعريف:
العبارة المنطقية هي جملة تتكون من عدة تقارير تربط بينهم بعض الروابط المنطقية.

مثال (1):

عبر عن الجمل التالية بصورة رمزية:

1- قنا مدينة مصرية ونهر النيل يمر في أثيوبيا.
2- قنا ليست مدينة مصرية أو نهر النيل لا يمر في أثيوبيا.
3- إذا كانت قنا مدينة مصرية فان نهر النيل يمر في أثيوبيا.
4- قنا مدينة مصرية إذا كان وكان فقط نهر النيل يمر في أثيوبيا.

الحل:

إذا فرضنا p تقريرا يمثل " قنا مدينة مصرية "و q تقريرا يمثل " نهر النيل يمر في أثيوبيا " فان:

1- تمثل: $p \wedge q$
2- تمثل: $-p \vee q -$
3- تمثل: $p \rightarrow q$
4- تمثل: $p \leftrightarrow q$

مثال (2):

عبر بجدول الصدق عن العبارة المنطقية التالية:

$$A = (p \vee -q) \wedge r$$

الحل:

p	q	r	$-q$	$p \vee -q$	A
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F

F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F

(3-1) تكافؤ العبارات المنطقية *Logical Equivalence*

تعريف
يقال لعبارتين منطقيتين A,B أنهما متكافئتان منطقيا إذا كانت قيم الصواب لهما متطابقة لجميع قيم الصواب. ويرمز لذلك بالرمز $A \equiv B$.

مثال (3):

اثبت أن $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

الحــــل:

p	p	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

نلاحظ أن العمود الاخير والعمود الأول متطابقين.

تعريف
يقال للعبارة المنطقية A أنها صحيحة منطقيا أو استدلال إذا كانت قيم الصواب لها دائما الصواب.
وتكتب $A \equiv T$.

مثال (4)

اثبت أن العبارة التالية استدلال $p \vee -p$.

الحل:

$\boldsymbol{p}$	$-\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p \vee -p}$
$\boldsymbol{T}$	F	T
$\boldsymbol{F}$	T	T

نلاحظ أن $p \vee -p \equiv T$

تعريف

يقال للعبارة المنطقية A أنها خاطئة منطقيا أو تناقض إذا كانت قيم الصواب لها دائما خاطئة. وتكتب $\boldsymbol{A \equiv F}$.

مثال (5)

اثبت أن العبارة التالية تناقض $p \wedge -p$.

الحل:

$\boldsymbol{p}$	$-\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p \wedge -p}$
$\boldsymbol{T}$	F	F
$\boldsymbol{F}$	T	F

نلاحظ أن $p \wedge -p \equiv F$.

تمارين

1-اثبت أن

i. $-(p \wedge q) \equiv -p \vee -q$
ii. $-p \vee q \equiv p \longrightarrow q$
iii. $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$

2- لأي ثلاث تقارير r, p, q اثبت العلاقات الاتية:

i. $-(-p) \equiv p.$
ii. $-(p \wedge -p) \equiv T.$
iii. $-(p \vee -p) \equiv F.$
iv. $p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p.$
v. $p \wedge q \equiv q \wedge p, p \vee q \equiv q \vee p.$
vi. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r, p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
vii. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$
viii. $-(p \wedge q) \equiv -p \vee -q, -(p \vee q) \equiv -p \wedge -q.$
ix. $p \vee (p \wedge q) \equiv p,\ p \wedge (p \vee q) \equiv p.$

.

(4-1) العلاقات في المنطق الرياضي

تعريف
بفرض أن A,B عبارتين منطقيتين يحويا نفس التقارير المنطقية. نقول إن A تقضى B إذا كانت $A \to B \equiv T$ وتكتب $A \Longrightarrow B$.

مثال (6)

برهن أن $(p \vee q) \wedge -p \Rightarrow q$.

الحل:

لنبرهن أن العبارة $(p \vee q) \wedge -p \longrightarrow q \equiv T$

p	q	$-p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge -p$	$(p \vee q) \wedge -p \longrightarrow q$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

تعريف
بفرض أن A,B عبارتين منطقيتين يحويا نفس التقارير المنطقية. نقول إن A تكافئ B إذا كانت $A \leftrightarrow B \equiv T$ وتكتب $A \Longleftrightarrow B$.

ملحوظة:
حيث $A \leftrightarrow B$ استدلال يعني صائبة منطقيا وهذا لا يتحقق الا عندما يكون لهم A,B نفس قيم الصواب في جدول الصواب ولهذا نكتب $A \Longleftrightarrow B$ أو $A \equiv B$.

مثال (6)

إذا كانت $A \equiv p \leftrightarrow q$ و $B \equiv (p \wedge q) \vee (-p \wedge -q)$ فبرهن أن $A \equiv B$

الحل:

p	q	A	$-p$	$-q$	$p \wedge q$	$-p \wedge -q$	B	$A \leftrightarrow B$
T	T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T

تمارين

1-اثبت أن

i. $A \Rightarrow A \vee B, \;\; B \Rightarrow A \vee B.$

ii. $A \wedge B \Rightarrow A, \;\; A \wedge B \Rightarrow B.$

iii. $(A \longrightarrow B) \wedge A \Rightarrow B, \; (A \longrightarrow B) \wedge -B \Rightarrow -A.$

iv. $(-A \vee B) \wedge A \Rightarrow B, \;\; (-B \vee A) \wedge B \Rightarrow A.$

v. $B \Rightarrow (A \longrightarrow B), -A \Rightarrow (A \longrightarrow B).$

vi. $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \Rightarrow (A \longrightarrow C).$

(5-1) أنواع التقارير

إذا نظرنا الي العبارة "كلية العلوم احدى كليات جامعة جنوب الوادي" نجد أنها عبارة صحيحة ولكن إذا نظرنا الي الجملة "x احدى كليات جامعة جنوب الوادي " لا يمكننا التحدث عن صحتها أو خطئها الا أنه يمكننا أن نضع بدلا من x كلمة مناسبة بحيث تصبح لدينا عبارة صحيحة وتسمي الجملة السابقة جملة مفتوحة ويرمز لها بالرمز "F(x)" ويسمى متغيرا. ومجموعة الكلمات التي توضع بدلا من "x" حتى يصبح لدينا عبارة صحيحة تسمى مجموعة الحل للجملة المفتوحة.

تعريف

نفرض أن x متغير مجالة D. يسمى F(x) تقرير مفتوح مجاله D إذا كان F(a) تقرير لكل $\boldsymbol{a \in D}$

مثال:

نفرض أن $F(x)$ هو التقرير المفتوح $x^3 > x^2$ حيث $D = \mathbb{R}$. اكتب التقارير $F(2), F(-1)$ وأي من هذه التقارير صائبة وأيها خاطئة؟.

الحل:

$F(-1) = -1 > 1 \qquad false$

$F(2) = 8 > 4 \qquad True$

تعريف

إذا كان_$\boldsymbol{F(x)}$ هو تقرير مفتوح مجاله D فان مجموعة الحل "صواب" للتقرير $\boldsymbol{F(x)}$ هي مجموعة العناصر الموجودة في D وتجعل $\boldsymbol{F(x)}$ صواب أي أن:

$$\boldsymbol{S = \{x \in D : F(x)\ is\ true\}}$$

مثال:

نفرض أن $F(x)$ هو التقرير المفتوح "x is a factor of 9" أوجد مجموعة الصواب ل $F(x)$ في الحالات الاتية:

(1) إذا كان $x \in D\ and\ D = \mathbb{Z}^+$.

(2) إذا كان $x \in D\ and\ D = \mathbb{Z}$.

الحل:

(1) $S = \{1,3,9\}$

(2) $S = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

تحدد التقارير المفتوحة بأسوار يمكننا أن نحكم بصحة أو خطأ التقرير أي أنها تحول القضية الي صيغة منطقية سنذكر منها الاتي:

أولا: التقرير الشمولي أو سور الشمول $\forall$

تعريف:
نفرض أن_ $\boldsymbol{F(x)}$ هو تقرير مفتوح مجاله D. تسمي الجملة
$\boldsymbol{\forall x \in D, F(x)}$
"لكل x يكون التقرير F(x)" تقرير شمولي ويكون التقرير الشمولي صائبا اذا كان S=D ويكون خاطئا اذا كان خلاف ذلك.

مثال:

هل التقريران الشموليان الاتيان صائبان منطقيا:

$$(1)\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1.$$

$$(2)\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

الحل:

$$(1)\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 1\} \neq \mathbb{R}.$$

وبالتالي القرير خاطئ منطقيا

$$(2)\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

وبالتالي القرير صواب منطقيا

ثانيا: التقرير الوجودي أو سور الوجود $\exists$

تعريف:
نفرض أن_ $\boldsymbol{F(x)}$ هو تقرير مفتوح مجاله D. تسمي الجملة
$\boldsymbol{\exists x \in D, F(x)}$
"يوجد x بحيث F(x) صواب" تقرير وجودي ويكون التقرير الوجودي صائبا إذا كان $\boldsymbol{S \neq \Phi}$ ويكون خاطئا إذا كان خلاف ذلك.

مثال:

هل التقرير

$$\exists x \in \mathbb{Z}^+, x^2 = x$$

صائب منطقيا.

الحل:

$S = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x^2 = 0\} = \{0,1\} \neq \Phi.$

وبالتالي التقرير صواب.

ملاحظات:

1- نفي التقرير الشمولي هو تقرير وجودي أي أن:

$$-\left(\forall x \in D, F(x)\right) \equiv \exists x \in D, -F(x)$$

2- نفي التقرير الوجودي هو تقرير شمولي أي أن:

$$-\left(\exists x \in D, F(x)\right) \equiv \forall x \in D, -F(x)$$

مثال:

أوجد نفي التقارير الاتية:

(1)كل عدد أولي p يكون عدد زوجي.

(2) يوجد مثلث T مجموع زوايا تكون 190 درجة.

الحل:

(1)يوجد عدد اولي p بحيث p تكون عدد غير زوجي. (هذا التقرير صواب حيث يوجد $p = 3$)

(2)كل مثلث T مجموع زوايا لا تساوي 190 درجة. (هذا التقرير صواب)

ثالثا: التقرير الشرطي الشمولي

تعريف:

نفرض أن_ $F(x) and\ P(x)$ هو تقريران مفتوحان مجالهما D. تسمي الجملة

$$\forall x \in D;\ F(x) \to P(x)$$

يسمي تقرير شرطي شمولي.

مثال:

نفرض أن $\forall x \in \mathbb{Z}, if\ x > 2, then\ x > 6$ هل التقرير صائب منطقيا؟

الحل:

نفرض ان

$$F(x) = \forall x \in \mathbb{Z}, x > 2\ and\ P(x) = x > 6$$

أي أن

$$\forall x \in \mathbb{Z}, F \to P$$

ليس منطقيا بينما

$$\forall x \in \mathbb{Z}, P \to F$$

صائب.

(6-1) طرق البراهين

تعريف:
نقول ان العبارة المنطقية A انها نظرية إذا كانت صحيحة منطقيا. ونعبر عن النظرية A على النحو التالي:
إذا كانت الفرضيات $p_1, p_2, \dots, p_n$ صحيحة فان النتيجة q صحيحة.

الأن سوف نستعرض طرق البرهان

أولا: طريقة البرهان المباشر

وفي هذه الطريقة نفرض صحة p ونثبت أن q صحيحة.

مثال:

برهن أنه إذا كان n عدد صحيح فرديا فان n^2 عدد صحيح فردى.

الحل:

نفرض أن p هي " n عدد صحيح فردى" وأن q " n^2 عدد صحيح فردى " ويكون المطلوب

هو صحة $p \to q$

بفرض صحة p وبالتالي فان

$$n = 3m$$
$$n^2 = 9m^2$$
$$= 3(3m^2)$$
$$= 3k$$

حيث k عدد صحيح موجب والذي يؤدى الي أن n^2 عدد صحيح فردى أي أن q صحيحة.

ثانيا: البرهان بطريقة المثال المعاكس

إذا كان لدينا عبارة منطقية " $\forall x \in D, P(x)$" لكي نبرهن صحة هذه العبارة باستخدام المثال المعاكس أي أن يتم العثور على عنصر على الأقل $x \in D$ بحيث تكون العبارة التالية صحيحة $\exists x \in D, -P(x)$.

مثال:

هل العبارة التالية والتي تمثل $P(x)$" أي عدد صحيح موجب x هو مجموع مربع أو مربعين أو ثلاث مربعات لأي عداد صحيحة موجبة".

الحل:

$1 = 1^2$
$2 = 1^2 + 1^2$
$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$
$4 = 2^2$
$5 = 1^2 + 2^2$
$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$

لكن $\exists 7 \in \mathbb{Z}^+ \ but \ P(7) \equiv F$ وبالتالي العبارة خاطئة.

ثالثا: البرهان بطريقة الحالات

في هذا النوع يتم تقسيم المسألة الي عدد صغير من الحالات.

مثال:

برهن أنه لكل عدد طبيعي n فان $n + n^2$ عدد زوجي.

الحل:

نفرض أن $P(n)$ تعني $n + n^2$ عدد زوجي وبالتالي سوف يكون المطلوب

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \equiv T$. من المفيد فرض $\mathbb{N} = A \cup B$ حيث A, B تعني مجموعة الأعداد الفردية والزوجية على الترتيب وبالتالي تصبح المسألة كالتالي $\forall n \in A, P(n), \forall n \in B, P(n)$.

الحالة الأولي: إذا كان n عدد صحيح فردي فان مربعها يكون فردي وبما أن مجموع أي عددين فرديين يكون زوجي فان $P(n) \equiv T$.

الحالة الثانية: إذا كان n عدد صحيح زوجي فان مربعها يكون زوجي وبما أن مجموع أي عددين زوجيين يكون زوجي فان $P(n) \equiv T$.

رابعا: البرهان بالتناقض

إذا كان P عبارة منطقية وكان الفرض $-P$ صحيح فان هذا تناقض وبالتالي النظرية غير صحيحة.

مثال:

برهن أن $\sqrt{5}$ عدد غير نسبي.

الحل:

نفرض أن P تعني $\sqrt{5}$ عدد غير نسبي وأن $-P$ صحيحة أي أن $\sqrt{5}$ عدد نسبي فان

$$\sqrt{5} = \frac{n}{m}, \qquad (n, m) = 1$$

$$\therefore 5 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow n^2 = 5m^2$$

وهذا يعني 5 عامل من عوامل n^2 وعند وضع $n = 5a$ فان هذا يؤدي الي $m^2 = 5n^2$ وبالتالي 5 عامل من عوامل m وهذا يؤدى الي أنm, n ليس أوليين فيما بينهما وبالتالي فان $-P$ خطأ وهذا تناقض وبالتالي P تكون صحيحة.

خامسا: البرهان بنقض الفرض

نفرض اننا أردنا برهان صحة العبارة المنطقية $p \longrightarrow q$ سوف نستخدم القاعدة

$$p \longrightarrow q \equiv -q \longrightarrow -p$$

أي أننا نفرض أن q خاطئة ونبرهن أن p خاطئة.

مثال:

برهن أنه إذا كان n عدد صحيح زوجي فان n^2 عدد صحيح زوجي.

الحل:

نفرض أن q هي " n عدد صحيح زوجي" وأن p " n^2 عدد صحيح زوجي " بفرض ان q تقرير خطأ وأن $-q$ تقرير صائب وهذا يعني n عدد صحيح فردى وهذا يقتضي n^2 عدد صحيح فردى من المثال الذي تم ذكره سابقا أي أن $-q \Rightarrow -p$.

تمارين

1- برهن بالطريقة المباشرة إذا كان n عدد صحيح زوجي فان n^2 عدد صحيح زوجي.
2- برهن بالتناقض أنه إذا كان $x^2+y^2=z^2, x, y, z \in \mathbb{Z}$ فان x أو y أو z عدد زوجي.
3- برهن أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي.
4- هل العبارة المنطقية التي تمثل "أي مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تصلح لكي تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية " صحيحة؟

الباب الثاني

نظرية المجموعات

الحاجة لكتابة الأنظمة والاشكال الرمزية والأرقام...الخ في شكل رمزي أو وصفى يختزل أو يوجد هذه الأشياء معا ضرورة حتمية نتيجة التطور السريع في علوم الرياضيات ومع تقدم علوم الجبر ونظرية الأعداد والتحليل الرياضي وغيرها من العلوم تبلورت الحاجة الي قاعدة أساسية مشتركة تبني عليها كل هذه العلوم من فروع الرياضيات وظهرت نظرية المجموعات كأساس قوى تبدأ منه كل هذه العلوم في دراسات وبحوث الكثير من العلماء في القرن التاسع عشر وكان على رأسهم جالو وها ميلتون وكانتور....

1- المفاهيم الأساسية

تعريف المجموعة Set

هي تجمع من الأشياء المعرفة تعريفا جيدا ولها صفات مشتركة.

سوف نرمز لها بالحروف capital letters بينما عناصرها سوف نرمز لها بالرمز small letters وتوضع بين أقواس {}.

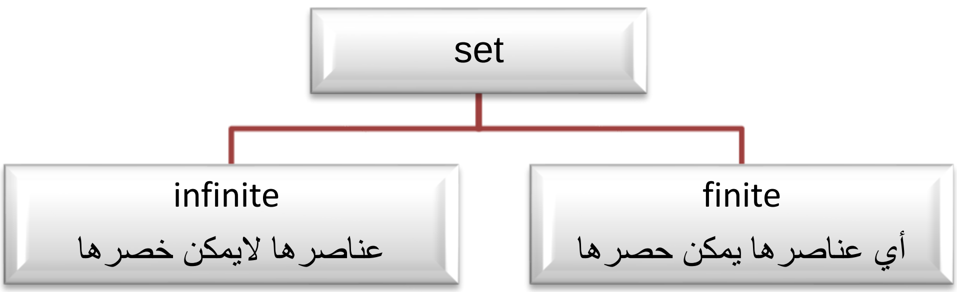
أمثلة:

(1) مجموعة محافظات جمهورية مصر العربية.

(2) $\mathbb{N} = \{1,2, \dots\}$

رتبة المجموعة: هي عدد عناصر المجموعة ويرمز لرتبة المجموعة A.بالرمز $|A|$

وبالتالي يمكن تصنيف المجموعات من حيث عدد عناصرها الي



طرق تمثيل المجموعات:

أ-طريقة السرد: وفيها يتم سرد عناصر المجموعة على سبيل المثال $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$.

ب-طريقة الصفة المميزة: وفيها يتم ذكر صفة مميزة للعناصر على سبيل المثال

$\mathrm{A} = \{x: x\ is\ odd\ number\}$.

المجموعة الخالية هي المجموعات التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ.

المجموعة الشاملة هي المجموعات التي ل تحوي جميع العناصر التي تملك خاصية ما ويرمز لها بالرمز U.

2- العلاقات على المجموعات:

- **علاقة الانتماء:**

إذا كان لدينا a عنصر من عناصر المجموعة A فأننا نقول:

- a ينتمي الي A أي العنصر موجود في A وتكتب $a \in A$.
- a لا ينتمي الي Aأي العنصر موجود في A وتكتب $a \notin A$

- **علاقة الاحتواء:**

إذا كان لدينا A, B مجموعتين غير خاليتين فإننا نقول

- $A \subset B$ أي أن B تحتوي A بمعني كل عنصر من عناصر المجموعة A موجود في المجموعة B والعكس ليس بالضرورة وتكتب $A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$.
- $A \not\subset B$ أي أن B لا تحتوي A بمعني يوجد عنصر على الأقل من عناصر المجموعة A غير موجود في المجموعة B وتكتب $A \not\subset B \Leftrightarrow \exists b \in A \Rightarrow b \notin B$.

ملاحظات:

أ- $\forall A \Rightarrow \phi \subset A$ ويمكن اثبات ذلك بالتناقض

$$Let\ \phi \not\subset A \Rightarrow \exists b \notin \phi, b \notin A$$

و هذا تناقض.

ب- $\forall A \Rightarrow A \subset A$

ج- $.A = B \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$

3- قوى المجموعة Power set

تعريف:

قوى المجموعة A هي جميع المجموعات الجزئية من A ويعبر عنها $P(A) =$ $.\{S: S \subset A\}$

نظرية:

إذا كانت A مجموعة رتبتها n فان $.2^n = |P(A)|$

البرهان: يترك للطالب

4- العلميات على المجموعات:

أ- الاتحاد

$$A \cup B = \{a: a \in A \vee a \in B\}$$

ب- التقاطع

$$A \cap B = \{a: a \in A \wedge a \in B\}$$

ج- الفرق

$$A - B = \{a: a \in A \wedge a \notin B\}$$

د- الفرق المتماثل

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

هـ - الضرب الديكارتي "الكرتيزى"

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$$

و- مكملة المجموعة

$$A^c = U - A = \{a: a \notin A\}$$

5- التجزئة:

بفرض أن لدينا المجموعة A وأن لدينا عائلة من المجموعات الجزئية $\{B_i\}_{i\in I}$. تسمي هذه العائلة تجزئة للمجموعة A إذا حققت الشرطين التاليين:

$1-B_i\cap B_j=\phi\ \forall i\neq j.$

$2-\cup_{i\in I}B_i=A.$

ملحوظة:

إذا كانت U المجوعة الشاملة و A مجموعة جزئية من U فان A و A^c تشكل تجزئة للمجموعة U.

جداول الانتماء:

- كما ذكرنا سابقا أن علاقة عناصر المجموعة بالمجموعة اما تنتمي أو لا تنتمي فأننا يمكننا التعبير عن ذلك باستخدام جداول الانتماء وفي حالة انتماء العنصر فأننا نعطيها 1 وفي حالة عدم الانتماء تأخذ 0.

A
1
0

- وفي حالة كون لدينا مجموعتين A و B يكون جدول الانتماء المناظر لهما بالنسبة للعنصر a

A	B
1	1
1	0
0	1
0	0

- يمكن تمثيل جدول الانتماء مع العمليات على المجموعات بالجدول التالي:

A	B	A^c	$A\cup B$	$A\cap B$	$A-B$	$A\Delta B$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0

تمارين

اثبت العلاقات الاتية

$1 - A \cup B = B \cup A.$

$2 - A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

$3 - A \cup A = A.$

$4 - A \cup \emptyset = A.$

$5 - A \subset A \cup B \&\ \ B \subset A \cup B.$

$6 - A \cap B = B \cap A.$

$7 - A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

$8 - A \cap A = A.$

$9 - A \cap \emptyset = \emptyset.$

$10 - A \cap B \subset A \&\ \ A \cap B \subset B.$

2- إذا كانت $A \subset B$ و $B \subset C$ فبرهن أن $A \subset C$

3- برهن $A - B = A \cap B^c$

5- برهن $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

الباب الثالث

العـــــــــلاقات

ضرب المجموعات:

بفرض أن لدينا المجموعتين A, B الغير خاليتين فان حاصل الضر الديكارتي لهما يكون

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}}.$$

ملاحظات:

1- إذا كانت $A = B$ فان حاصل الضر الديكارتي في هذه الحالة يكون كالتالي:

$$A^2 = A \times A = \{(a, b): a, b \in A\}.$$

2-حاصل ضرب عائلة منتهية من المجموعات:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_i \in A_i\}.$$

3-حاصل ضرب عائلة غير منتهية من المجموعات:

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(a_1, a_2, \dots): a_i \in A_i\}.$$

مثال:

إذا كانت $A = \mathbb{R}$ فان:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\}.$$

تمثل نقاط المستوي.

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c): a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

تمثل نقاط الفراغ.

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots): a_i \in A_i\}.$$

تمثل نقاط الفراغ ذو البعد النوني.

ملاحظات:

1- إذا كانت $|A| = n$ و $|B| = m$ فان $|A \times B| = |A| \times |B| = nm$.

2- بصفة عامة $(a, b) \neq (b, a)$.

العلاقة:

تعريف:
العلاقة R هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي أي أن $R \subseteq A \times B$ وعناصرها عبارة عن أزواج مرتبة وقد تكتب كالتالي aRb وتعني العنصر a مرتبط بالعنصر b. وتسمي العناصر التي تظهر كمسقط أول في العلاقة R بنطاق العلاقة $Dom(R)$ والمسقط الثاني بمدى العلاقة $Rang(R)$.

تعريف:
إذا كانت لدينا علاقتين $R_1 = \{(x, y): x, y \in A\}$ و $R_2 = \{(z, x): x, z \in A\}$ فان تحصليهما يكون كالتالي

$$R_1 \circ R_2 = \{(z, y): z, y \in A\}$$

بصفة عامة $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

مثال:

لتكن $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,5,6\}$ وبفرض أن

$$R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,0)\}$$
$$R_2 = \{(2,2), (3,3), (3,5)\}$$

نلاحظ أن R_1 لا تمثل علاقة (اذكر السبب) بينما R_2 تمثل علاقة.

العلاقة العكسية:

إذا كانت $R \subseteq A \times B$ فان العلاقة العكسية تكون $R^{-1} \subseteq B \times A$ وتعرف بالشكل التالي:

$$R^{-1} = \{(y, x): y \in B, x \in A, (x, y) \in R\}$$

وفيها يكون $Rang(R) = Dom(R^{-1})$ و $Rang(R^{-1}) = Dom(R)$.

مثال:

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ وبفرض أن $R = \{(x, y): x, y \in A, x > y\}$ فأوجد:

1-تعرف العلاقة R وكذلك نطاقها ومدها؟

2- تعرف العلاقة R^{-1} وكذلك نطاقها ومدها؟

3- $R \circ R^{-1}$؟ وكذلك مثل R^{-1} و R بالأسهم؟

الحل:

1- $R = \{(2,1), (3,1), (4,1), (3,2), (4,2), (4,3)\},$

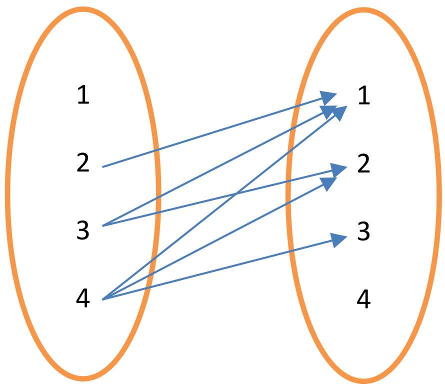
$Dom(R) = \{2,3,4\}, Rang(R) = \{1,2,3\}.$

2-$R^{-1} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\},$

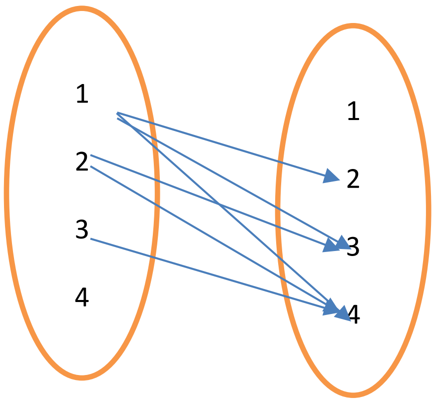
$Dom(R^{-1}) = \{1,2,3\}, Rang(R^{-1}) = \{2,3,4\}.$

3-$R^{-1} \circ R =$

$\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$



R



R^{-1}

خواص العلاقات:

1- العلاقة العاكسة Reflexive Relation

يقال للعلاقة $R \subseteq A \times A$ أنها عاكسة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in A \Longrightarrow (x, x) \in R.$$

2- العلاقة متماثلة Symmetric Relation

يقال للعلاقة $R \subseteq A \times B$ أنها متماثلة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R.$$

3- العلاقة متخالفة Antisymmetric Relation

يقال للعلاقة $R \subseteq A \times B$ أنها متخالفة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall (x,y),(y,x) \in R \Rightarrow x = y.$$

4- العلاقة ناقلة Transitive Relation

يقال للعلاقة $R \subseteq A \times B$ أنها ناقلة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall (x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R.$$

5- العلاقة مترابطة

يقال للعلاقة $R \subseteq A \times B$ أنها مترابطة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x,y \in A \ \Rightarrow (x,y) \in R \vee (y,x) \in R.$$

مثال:

لتكن $A = \{a,b,c,d\}$ وبفرض أن لدينا العلاقة

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,b),(b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

ادرس خواص هذه العلاقة.

الحل:

1- R عاكسة حيث

$$(a,a),(b,b),(c,c),(d,d) \in R.$$

2- R ليست متماثلة حيث

$$(b,c) \in R \ but \ (c,b) \notin R$$

3- R متخالفة لعدم وجود ما يمنع ذلك.

يمكن اثبات ذلك بفرض أن R ليست متخالفة وبالتالي نفي الشرط يكون صحيح أي أن

$$-[\forall (x,y),(y,x) \in R \Rightarrow x = y] \equiv \exists (x,y),(y,x) \in R \Rightarrow x \neq y$$

وهذا الشرط غير محقق في R.

4- R ناقلة من تعريف العلاقة.

سوف نثبت صحة هذه الخاصية عن طريق نقض الشرط أي أن نفرض أن العلاقة ليست ناقلة وبالتالي

$$-[\forall (x,y),(y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R] \equiv \exists (x,y),(y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \notin R$$

وهذا غير محقق في العلاقة وبالتالي العلاقة ناقلة.

5- العلاقة مترابطة لان الشرط محقق.

- **علاقة الترتيب Ordered relation**

إذا كانت $R \subseteq A \times A$ فأننا نقول إن R انها علاقة ترتيب إذا تحقق:
1- عاكسة.
2- متخالفة.
3- ناقلة.
وتسمي (A,R) مجموعة مرتبة جزئيا.

- **علاقة الترتيب الكلي**

إذا كانت $R \subseteq A \times A$ فأننا نقول إن R انها علاقة ترتيب كلي إذا تحقق:
1- علاقة ترتيب.
2- مترابطة.
وتسمي (A,R) مجموعة مرتبة كليا.

مثال:

لتكن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وأن R علاقة معرفة عليها كالتالي

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}^+, aRb \Leftrightarrow a \backslash b \ (b = na, n \in \mathbb{Z}^+)$$

ادرس العلاقة من حيث كونها علاقة ترتيب ولكنها ليست علاقة ترتيب كلي.

الحل:

1- العلاقة عاكسة حيث

$$\forall a \in \mathbb{Z}^+ \Longrightarrow a = 1(a) \Longrightarrow a \backslash a \Longrightarrow aRa.$$

2- العلاقة متخالفة حيث

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}^+, aRb, bRa \Longrightarrow a\backslash b, b\backslash a$$
$$\Longrightarrow b = na, a$$
$$= mb\ \forall m,n \in \mathbb{Z}^+$$
$$\Longrightarrow b = n(mb)$$
$$\Longrightarrow 1 = nm$$
$$\Longrightarrow 1 = n\ or\ 1 = m$$
$$\Longrightarrow a = b.$$

3- العلاقة ناقلة حيث

$$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}^+, aRb, bRc \Longrightarrow a\backslash b\ and\ b\backslash c$$
$$\Longrightarrow b = na\ and\ c = mb$$
$$\Longrightarrow c = m(na)$$
$$\Longrightarrow c = mna$$
$$\Longrightarrow aRc.$$

وبالتالي تكون العلاقة ترتيب.

4- العلاقة ليست مترابطة حيث

$$2,3 \in \mathbb{Z}^+, (2,3) \notin R\ \ or\ (3,2) \notin R.$$

مثال:

لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية وأن R علاقة معرفة عليها كالتالي

$$\forall a,b \in\ \mathbb{N}\ , aRb \Leftrightarrow a \leq b$$

فان هذه العلاقة تكون علاقة ترتيب كلي (تحقق من ذلك).

علاقة التكافؤ Equivalent relation

نقول إن R علاقة تكافؤ إذا حققت الخواص الأتية:
1- عاكسة.
2- متماثلة.
3- ناقلة.

فصول التكافؤ

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A وليكن $x \in A$ نسمي مجموعة العناصر في A والمرتبطة مع x بعلاقة التكافؤ بفصول تكافؤ العنصر x ويرمز له بالرمز $\overline{x}$ or $[x]$ or $cl[x]$ ويكون

$$\overline{x} = \{y \in A : xRy\}$$

بعض خواص فصول التكافؤ

نظرية:

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A فان:

1-$\forall x \in A \Longrightarrow x \in \overline{x}$.

2-$xRy \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

3--$\forall y \in \overline{x} \Longrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

4-$\forall x, y \in A,\ then\ \overline{x} = \overline{y}\ or\ \overline{x} \cap \overline{y} = \Phi$.

5-صفوف التكافؤ تشكل تجزئه للمجموعة A.

البرهان: متروك للطالب.

علاقة التطابق قياس n:

بفرض أن $n \in \mathbb{Z}^+$ و أن العلاقة

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \mathrm{xRy} \Leftrightarrow \frac{x-y}{n} \in \mathbb{Z}$$

تسمي هذه العلاقة بعلاقة تطابق قياس n وتكتب $x \equiv y(mod\ n)$ هذه العلاقة تمثل علاقة تكافؤ حيث

1-$let\ \ x \in \mathbb{Z}, \frac{x-x}{n} = 0 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow xRx.$

2- $let\ \ x, y \in \mathbb{Z}, \mathrm{xRy} \Longrightarrow \frac{x-y}{n} = \frac{-(y-x)}{n} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow yRx.$

3- $\mathrm{xRy\ and\ yRx} \Longrightarrow \frac{x-y}{n} \mathrm{and} \frac{\mathrm{y-z}}{n} \Longrightarrow \frac{x-y+y-z}{2} \Longrightarrow \frac{x-z}{2} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$
$xRz.$

نظرية:

عدد عناصر المجموعة $\mathbb{Z}_n$ هو n عنصر وتكون

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}, \dots, \overline{\boldsymbol{n-1}}\}$$

البرهان: متروك للطالب.

مثال:

إذا كانت n=2 فان

$$\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$$

$$\overline{0} = \{0, \mp 2, \mp 4, \dots, \mp 2k, \dots\}$$
$$\overline{1} = \{\mp 1, \mp 3, \dots, \mp(2k+1), \dots\}$$

إذا كانت n=3 فان

$$\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

$$\overline{0} = \{y \in \mathbb{Z}: \mathrm{y} = 3\mathrm{k} + 0\} = \{0, \mp 3, \mp 6, \dots\}$$
$$\overline{1} = \{y \in \mathbb{Z}: \mathrm{y} = 3\mathrm{k} + 1\} = \{\dots, -5, -2,1,4,7, \dots\}$$
$$\overline{2} = \{y \in \mathbb{Z}: \mathrm{y} = 3\mathrm{k} + 2\} = \{\dots, -4, -1,2,5,8, \dots\}$$

تمارين

1- ادرس العلاقات الاتية:

I. $\forall a,b\in\mathbb{Z}^+, aRb \Leftrightarrow b=5a.$

II. $\forall a,b\in\mathbb{Z}^+, aRb \Leftrightarrow a\neq b.$

III. $\forall a,b\in\mathbb{Z}, aRb \Leftrightarrow a^2=b^2.$

IV. $\forall a,b\in\mathbb{Z}, aRb \Leftrightarrow ab\geq 0.$

2- بفرض أن R_1, R_2 علاقتان على المجموعة الغير خالية A ناقش صحة العبارات التالية:

(a) R_1, R_2 علاقتان عاكستان إذا كان وفقط $R_1 \cup R_2$ علاقة عاكسة.

(b) R_1, R_2 علاقتان عاكستان إذا كان وفقط $R_1 \cap R_2$ علاقة عاكسة.

3- بفرض أن R علاقة معرفة على $\mathbb{Z}^+$ وكانت معرفه كالتالي:

$$R=\{(a,b): a,b\in\mathbb{Z}^+, a+5y=15\}$$

-اكتب عناصر R.

-أوجد نطاق ومدي كلا من $R, R^{-1}, R\circ R^{-1}, R^{-1}\circ R$.

4- أعطي مثال لكل مما يأتي:

- علاقة عاكسة وناقلة وليست متماثلة.
- علاقة عاكسة ومتماثلة وليست ناقلة.
- علاقة متماثلة وناقلة وليست عاكسة.

الباب الرابع

الرواسم

تعريف :
إذا كانت لدينا A,B مجموعتان غير خاليتان فان الراسم "الدالة" $f: A \to B$ هي علاقة من A الي B وفيه كل عنصر من عناصر A يرتبط بعنصر وحيد من عناصر B. وتسمي عناصر المجموعة A بالمجال في حين عناصر المجموعة B تسمي بالمجال المقابل وصور عناصر A $f(A)$ تسمي بالمدى $Im\ f \subseteq A$.

<u>مثال :</u>

1- بفرض أن $f: A \to A, f(a) = a\ \forall a \in A$ يسمي هذا الراسم براسم الوحدة أو دالة الواحدة أو راسم التطابق.

2- بفرض أن $f: A \times B \to A, f(a,b) = a\ \forall a \in A, a \in B$ يسمي هذا الراسم بمسقط $A \times B$ على A.

3- بفرض أن $S \subseteq A$ وبتعريف الراسم

$$f_S: A \to \{0,1\}, f_S(x) = \begin{cases} 1\ if\ x \in S \\ 0\ if\ x \in A - S \end{cases}$$

و هذا الراسم يسمي بالراسم المميز للمجموعة S.

تحصيل أو تركيب الرواسم

تعريف :
إذا كانت لدينا A,B مجموعتان غير خاليتان وكان $g: A \to B$ وكذلك $f: B \to C$ فان تحصيل الراسمان يكون كالتالي

$$f \circ g: A \to C, (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \forall x \in A$$

وبصفة عامة $f \circ g \neq g \circ f$.

<u>مثال:</u>

بفرض أن $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 4$ وأن $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}, g(y) = \sqrt{y}$ أوجد $f \circ g, g \circ f, f^2, g^2$.

<u>الحل:</u>

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 3(3x+4) + 4 = 9x + 16.$$

$$g^2(y) = (g \circ g)(y) = g\big(g(y)\big) = \sqrt{\sqrt{y}}.$$

$$(f \circ g) = ?$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{3x+4}.$$

Well define mapping

تعريف :

يقال للراسم $f: A \to B$ معرف تعريفا جيدا إذا تحقق:

$$\forall x, y \in A, x = y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

أنواع الرواسم

1-الراسم الفوقي "الشامل" Surjective or onto mapping

تعريف :

يقال للراسم $f: A \to B$ أنه فوقي إذا تحقق:

$$\forall y \in B, \exists\, x \in A: y = f(x), i.e., Im\, f = B.$$

مثال:

بفرض أن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4\ \forall x \in \mathbb{R}$ اثبت أن f يكون راسم فوقي.

الحل:

$$let\ y \in \mathbb{R}, y = f(x) \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = x + 4$$

$$\Longrightarrow x = y - 4 \in \mathbb{R}.$$

وبالتالي الراسم سوف يكون فوقي.

مثال :

بفرض أن $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4\ \forall x \in \mathbb{N}$ اثبت أن f لا يكون راسم فوقي.

الحل:

نلاحظ أن $Im\, f \subseteq \mathbb{R}$ وبالتالي الراسم لا يكون فوقي.

2-الراسم الأحادي "المتباين" Injective mapping or 1-1

تعريف :
يقال للراسم $f: A \to B$ أنه احادي إذا تحقق:

$$\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

أو

$$\forall x, y \in A, x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

مثال:

بفرض أن $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{N}$ اثبت أن f يكون راسم احادي.

الحل:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, f(x) = f(y) \Longrightarrow x^2 = y^2 \Longrightarrow x = y.$$

اذن الراسم احادي.

مثال:

بفرض أن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$ اثبت أن f لا يكون راسم احادي.

(تحقق من ذلك).

3-الراسم تناظر احادي "التقابل" Bijective mapping or 1-1 correspondence

تعريف :
يقال للراسم $f: A \to B$ أنه تناظر احادي إذا كان الراسم احادي وفوقي.

معكوس الراسم:

تعريف :
يقال للراسم $g: B \to A$ أنه معكوس للراسم $f: A \to B$ ويرمز له بالرمز $g = f^{-1}$ إذا تحقق

$$\forall y \in B, x \in A, (f \circ g)(x) = x \ and \ , (g \circ f)(y) = y.$$

نظرية :
الراسم $f: A \to B$ يكون له معكوس f^{-1} إذا وإذا كان فقط f راسم تناظري احادي.

البرهان:

(الاتجاه الأول) بفرض أن الراسم f له معكوس f^{-1} وبالتالي

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \Longrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

وبفرض أن f ليس احادي وبالتالي:

$$\forall x, y \in A, x \neq y \Longrightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Longrightarrow f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(f(y)\right)$$
$$\Longrightarrow x = y.$$

و هذا تناقض وبالتالي الراسم أحادي.

لأثبات أن الراسم فوقى

$$let\ b \in B, f\left(f^{-1}(b)\right) = b$$

وبالتالي فان b هي صورة $f^{-1}(b)$ تحت تأثير f وبالتالي فان الراسم فوقي.

(الاتجاه الاخر) بفرض أن $f: A \to B$ راسم تناظري احادي وبالتالي:

$$\forall y \in B, \exists\ x \in A: y = f(x)$$

الان سوف نعرف الراسم $g: B \to A$ كما يلي

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

وبالتالي

$$g\left(f(x)\right) = x\ and\ f\left(g(y)\right) = y$$

اذن g هو معكوس f.

نظرية :
بفرض أن الراسم $f: A \to B$ و $S \subseteq A$ فان:
1- $S \subseteq f^{-1}\left(f(S)\right)$.
2- $S = f^{-1}\left(f(S)\right)$ بشرط أن يكون الراسم أحادي.

البرهان:

1- $\forall x \in S \Longrightarrow f(x) = y \in f(S) \Longrightarrow f^{-1}(y) \subseteq f(S).$

وحيث $x \in f^{-1}(y)$ وبالتالي $x \in f^{-1}\left(f(S)\right)$ ومنه يكون قد اثباتنا $S \subseteq f^{-1}\left(f(S)\right)$.

2- لكي نثبت التساوي يكفي ان نثبت أن $f^{-1}\left(f(S)\right) \subseteq S$ كالتالي:

$$\forall x \in f^{-1}(f(S)) \Longrightarrow f(x) = y \in f(S) \Longrightarrow x = f^{-1}(y) \in S$$

وحيث الراسم أحادي.

نظرية :

بفرض أن الراسم $f: A \to B$ و $H \subseteq B$ فان:

1- $f^{-1}(f(H)) \subseteq H$.

2- $f^{-1}(f(H)) = H$ بشرط أن يكون الراسم فوقي.

البرهان:

(متروك للطالب).

نظرية :

1- تركيب راسمين أحاديين هو راسم أحادي.

2- تركيب راسمين فوقيين هو راسم فوقي.

3- تركيب راسمين تناظر أحادي هو راسم تناظر أحادي.

البرهان:

(متروك للطالب).

مثال :

بفرض أن $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\}, f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ أوجد f^{-1}.

الحل:

نلاحظ أن الراسم هو تناظر احادي (تحقق من ذلك) لإيجاد قاعدة الراسم العكسي

$$Let\ y \in \mathbb{R} - \{3\}, y = f(x) = \frac{3x-2}{x-1} \Longrightarrow y(x-1) = 3x - 2$$

$$\Longrightarrow x(y-3) = y - 2$$

$$\Longrightarrow x = \frac{y-2}{y-3} \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

وبالتالي الراسم العكسي يكون

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}, f^{-1}(y) = \frac{y-2}{y-3} \forall y \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

تمارين

1- بفرض أن $f:\mathbb{R}-\{5\}\to\mathbb{R}-\{3\}, f(x)=\frac{3x-1}{x-5}\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$
اثبت أن الراسم احادي وفوقي ثم أوجد f^{-1}.

2- بفرض أن $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, f(x)=3x+4$ وأن $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, g(x)=\frac{3x+1}{5}$ أوجد
$f\circ g, g\circ f, f^2, g^2, f^{-1}, g^{-1}$.

3- إذا كان لدينا الراسم $f:X\to Y$ وكانت $A,B\subseteq X$ فاثبت كلا من

(i) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(ii) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

(iii) $f(A)-f(B)\subseteq f(A-B)$.

(iv) $f(A)-f(B)=f(A-B)$ بشرط أن الراسم أحادي

الباب الخامس

العملية الثنائية والزمرة

تعريف :
بفرض أن A مجموعة غير خالية يسمي الراسم $f: A \times A \to A$ عملية ثنائية على A ونرمز عادة للعملية الثنائية بدلا من f بالرموز $*, \circ, \dots$.

تعريف :
إذا كانت $*$ عملية ثنائية على المجموعة A فإننا نسمي الزوج $(A,*)$ نظاما ثنائيا.

تعريف :
إذا كانت $*$ عملية ثنائية على المجموعة A فإننا نسمي الزوج $(A,*)$ نظاما ثنائيا إذا تحقق شرط الأغلاق.

مثال :

1- الأنظمة التالية أنظمة ثنائية $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{C},-), (\mathbb{R},\times)$.
2- الأنظمة التالية ليست أنظمة ثنائية $(\mathbb{Z},\div), (\mathbb{R},\div), (\mathbb{C},\div), (\mathbb{N},-)$.

- **خواص العملية الثنائية:**

تعريف :
إذا كان $(A,*)$ نظاما ثنائيا فإننا نقول إن العملية $*$ إبداليه إذا تحقق شرط:
$$\forall x, y \in A \Longrightarrow x * y = y * x.$$

تعريف :
إذا كان $(A,*)$ نظاما ثنائيا فإننا نقول إن العملية $*$ دامجة "تجمعية" إذا تحقق شرط:
$$\forall x, y, z \in A \Longrightarrow (x * y) * z = x * (y * z).$$

تعريف :
إذا كان $(A,*)$ نظاما ثنائيا وإذا وجد العنصر $e_r \in A$ فإننا نقول e_r عنصر محايد يميني بالنسبة للعملية $*$ إذا تحقق شرط:
$$\forall x \in A \Longrightarrow x * e_r = x.$$
وإذا وجد العنصر $e_l \in A$ فإننا نقول e_l عنصر محايد يساري بالنسبة للعملية $*$ إذا تحقق شرط:
$$\forall x \in A \Longrightarrow e_l * x = x.$$

وإذا وجد العنصر $e \in A$ فإننا نقول e عنصر محايد بالنسبة للعملية $*$ إذا تحقق شرط:

$$\forall x \in A \Longrightarrow e * x = x * e = x.$$

تعريف :

إذا كان $(A,*)$ نظاما ثنائيا وإذا وجد العنصر $e_r \in A$ عنصر محايد يميني بالنسبة للعملية $*$ فإننا نقول إن العنصر x_r^{-1} معكوس أيمن للعنصر $x \in A$ إذا تحقق شرط:

$$x * x_r^{-1} = e_r.$$

وإذا وجد العنصر $e_l \in A$ عنصر محايد يساري بالنسبة للعملية $*$ فإننا نقول إن العنصر x_l^{-1} معكوس أيسر للعنصر $x \in A$ إذا تحقق شرط:

$$x_l^{-1} * x = e_l.$$

وإذا وجد العنصر $e \in A$ عنصر محايد بالنسبة للعملية $*$ فإننا نقول إن العنصر x^{-1} معكوس للعنصر $x \in A$ إذا تحقق شرط:

$$x^{-1} * x = x * x^{-1} = e.$$

مثال :

ادرس $(\mathbb{R},*)$ حيث $\forall x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x * y = x - y + 3$.

الحل:

1- العملية $*$ عملية ثنائية على المجموعة $\mathbb{R}$ لأنه

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x * y = x - y + 3 \in \mathbb{R}.$$

2- العملية $*$ ليست إبداليه لأنه

$$1,0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow 1 * 0 = 4 \; but \; 0 * 1 = 2.$$

3- العملية $*$ ليست دامجة (تحقق).

4- نفرض $e_r \in \mathbb{R}$ عنصر يحقق:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x * e_r = x$$
$$\Longrightarrow x - e_r + 3 = x$$
$$\Longrightarrow e_r = 3.$$

5- نفرض $e_l \in \mathbb{R}$ عنصر يحقق:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow e_l * x = x$$
$$\Longrightarrow e_l - x + 3 = x$$

$$\Longrightarrow e_l = 2x - 3.$$

وهذا يعني لا يوجد عنصر محايد يساري.

6- نفرض $x_r^{-1} \in \mathbb{R}$ عنصر يحقق:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x * x_r^{-1} = e_r$$
$$\Longrightarrow x - x_r^{-1} + 3 = 3$$
$$\Longrightarrow x = x_r^{-1}.$$

أي أن المعكوس الأيمن للعنصر هو نفسه.

7- المعكوس الأيسر لا يوجد لعدم وجودي معكوس أيسر.

تعريف :
يقال للنظام الثنائي $(A,*)$ أنه شبه زمرة إذا حقق خاصية الدمج.

مثال :

النظام الثنائي $(\mathbb{N},+)$ يمثل شبه زمرة.

تعريف :
يقال للنظام الثنائي $(A,*)$ أنه نظام منوئيد monoid إذا حقق خاصية الدمج وكان به العنصر المحايد.

مثال :

بفرض أن F هي مجموعة الرواسم من المجموعة A الي نفسها وكانت العملية هي تحصيل الرواسم فان النظام $(F,\circ)$ يمثل منوئيد.

تعريف :
يقال للنظام الثنائي $(A,*)$ أنه زمرة إذا حقق خاصية الدمج وكان به المحايد وكل عنصر له معكوس ويكون زمرة إبداليه إذا تحقق شرط الابدال مع الشروط السابقة.

مثال :

الأنظمة التالية $(\mathbb{R}^*,\times), (\mathbb{C},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{Z},+)$ تمثل زمر.

تمارين

1- أذا كانت $G = \{i, -i, 1, -1\}$ تحقق من أن $(G,\times)$ تمثل عملية ثنائية وأيضا تمثل زمرة إبداليه.

2- ادرس النظام الجبري $(S,\times)$ حيث $S = \{a + b\sqrt{2}: a, b \in Q\}$.

3- ادرس النظام الجبري $(P(X), \Delta)$.

4- ادرس النظام الجبري $(\mathbb{R},*)$ حيث $x * y = y - x + 1 \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

5- ادرس النظام الجبري $(2\mathbb{Z},\times)$.

الباب السادس

الاستنتاج الرياضي

الاستنتاج الرياضي هي طريقة لإثبات صحة علاقة ما أو نظرية أو قانون تعتمـــد على الأعـــداد الطبيعية ونلجـأ لهذه الطريقة لعدم استطاعتنا إثبات صحة هذه العلاقة أو القانون بطريقة مباشـــرة، ويرجع تاريخها الى محاورة أفلاطون سنة 370 قبل الميلاد والتي حوت أول إثبــات بالاستقـــراء الرياضي على الإطلاق. أيضا يمكن ملاحظـــة اثار الاستقراء الرياضي المبكرة في إثبات إقليدس بأن عدد الأعداد الأولية لانهائي. كما أن أول إثبات ضمــني بالاستقراء الرياضي للمتوالية الحسابية كان على يد العربي البغدادي الكرخي حوالي سنة 1000 ميلاديـــة، والذي استخدمـها لإثبـــات نظرية ذات الحدين، مثلث باسـكال، وصيغة المجموع لتكامل المكعبات. كان إثباته هو الأول الـذي استخدم المبدأين الأساسـيين في الإثبات الاستقرائي، "وهما صواب التعبير عند $n = 1$ واشتقـاق الصواب من أجل $n = k$ من تلك القيمة $n = k - 1$ ومن بعده مباشرة جـــاء الحسن ابن الهيثم لإثبات مجموع قوى الـدرجة الرابعة بطريقة الاســـتقراء. لقد قام بإثبات ذلك على أعداد صحيحة معينه فقط ولكن إثباته لهذه الأعـــداد كان بالاستقراء وشاملا. كمـــا أن السموأل بن يحيى بن عباس كان أقرب إلى الإثبات الحديث بالاستقراء الرياضي عندما استخدمه في توسـيع إثبات مثلث باسكال وذات الحدين.

وعند إثبات صحة العلاقة أو القانون باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي يُتبع الخطوات التالية:

(1) نتحقق من صحة العلاقة عندما تكون $n = 1$." ليس بالضرورة أن يكون 1"

(2) نفترض صحة العلاقة عندما تكون $n = k$(حيث kعدد صحيح موجب).

(3) نثبت صحة العلاقة عندما $n = k + 1$ وبالتالي ستكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

<u>مثال (1-1):</u>

أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن:

$$\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \qquad (1)$$

<u>الحل:</u>

<u>عندما $n = 1$</u>

$$L.H.S = 1 \; and \; R.H.S = 1$$

وبالتالي العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

نفرض صحة العلاقة (1) عندما $n = k$ (k عدد صحيح موجب) أي أن:

$$\sum_{r=1}^{k} r = 1+2+3+\ldots+k = \frac{1}{2}k(k+1) \qquad (2)$$

في حالة $n = (k+1)$

$$L.H.S = 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)[k+2]$$

وهذه العلاقة نحصل عليها فيما لو عوضنا عن $n = k+1$ فى (1).

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

مثال (1-2):

أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad (1)$$

الحل:

عندما $n = 1$

$$L.H.S = 1 \; and \; R.H.S = 1$$

وبالتالي العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

نفرض صحة العلاقة (1) عندما $n = k$ (k عدد صحيح موجب) أي أن:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \qquad (2)$$

في حالة $n = (k+1)$

$$L.H.S = 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right] \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

العلاقة (3) هي نفسها العلاقة (1) فيما لو عوضنا عن $n = k + 1$.
$\therefore$ العلاقة (1) صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

مثال (1-3):
أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن:

$$1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad (1)$$

الحل:
عندما $n = 1$

$$L.H.S = 2 \text{ and } R.H.S = 2$$

وبالتالي العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.
نفرض صحة العلاقة (1) عندما $n = k$ (k عدد صحيح موجب) أي أن:

$$1\times 2+2\times 3+\ldots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \qquad (2)$$

في حالة $n = (k + 1)$ بالتعويض في الطرف الايسر

$$1\times 2+2\times 3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \qquad (3)$$

العلاقة (3) هي نفسها العلاقة (1) فيما لو عوضنا عن $n = k + 1$.
$\therefore$ العلاقة (1) صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

مثال (1-4):
أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن:

$$1!+2(2!)+3(3!)+\ldots+n(n!)=(n+1)!-1 \qquad (1)$$

الحل:
عندما $n = 1$

$$L.H.S = 1 \text{ and } R.H.S = 1$$

وبالتالي العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.
نفرض صحة العلاقة (1) عندما $n = k$ حيث k عدد صحيح موجب أي أن:

$$1!+2(2!)+3(3!)+\ldots+k(k!)=(k+1)!-1 \qquad (2)$$

في حالة $n = (k + 1)$ بالتعويض في الطرف الايسر

$$1!+2(2!)+3(3!)+\ldots+k(k!)+(k+1)((k+1)!)=(k+1)!-1+(k+1)((k+1)!)$$

$$= (k+1)![1+(k+1)]-1$$
$$= (k+2)(k+1)!-1$$
$$= (k+2)!-1$$

وهذه العلاقة هي نفسها العلاقة (1) فيما لو عوضنا عن $n = k + 1$.
∴ العلاقة (1) صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

مثال (1-5):
أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

الحل:
عندما $n = 1$

$$L.H.S = \frac{1}{2} \text{ and } R.H.S = \frac{1}{2}$$

وبالتالي العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.
نفرض صحة العلاقة (1) عندما $n = k$ حيث k عدد صحيح موجب أي أن:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \qquad (2)$$

في حالة $n = (k + 1)$ بالتعويض في الطرف الايسر

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1))k+2)}=\frac{(k+1)}{(k+2)}$$

وهذه العلاقة هي نفسها العلاقة (1) فيما لو عوضنا عن $n = k + 1$.
∴ العلاقة (1) صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

مثال (1-6):
أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن $x^n - y^n$ تقبل القسمة على $x - y$.

الحل:

عندما $n = 1$

$\because$ $x - y$ تقبل القسمة على $x - y$، إذن التقرير صحيح عندما $n = 1$.

نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ حيث k عدد صحيح موجب أي أن:

$x^k - y^k$ تقبل القسمة على $x - y$.

والمطلوب إثبات أن $x^{k+1} - y^{k+1}$ تقبل القسمة على $x - y$.

$$\therefore\ x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1}$$

$$= x\,(x^k - y^k) + y^k\,(x - y)$$

ولكن $x^k - y^k$ تقبل القسمة على $x - y$ من الفرض وكذلك $y^k\,(x - y)$ يقبل القسمة على $x - y$

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

مثال (1-7):

أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن $2^{2n} + 5$ تقبل القسمة على 3لأى عدد صحيح موجب n.

الحل:

يمكن كتابة العلاقة التي سوف نثبتها على الصورة $2^{2n} + 5 = 3M_n$

عندما $n = 1$

$$2^2 + 5 = 9 = 3 \times 3(i.e., M_1 = 3)$$

وبالتالي العلاقة صحيحة

عندما $n = k$

$$2^{2k} + 5 = 3M_k$$

العلاقة صحيحة

عندما $n = k+1$

$$2^{2(k+1)} + 5 = 2^{2k+2} + 5$$
$$= 4.(2^{2k} + 5) - 15$$
$$= 3(4.M_k - 5)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

مثال (8-1):
أثبت أن $|\sin nx| \le n|\sin x|$ لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n ولكل قيم x الحقيقية.

الحل:
(1) نثبت صحة الخاصية عندما $n=1$:

$$|\sin(1)x| \le (1)|\sin x|.$$

وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n=1$.
(2) نفرض صحة الخاصية عندما $n=k$ أي أن

$$|\sin kx| \le k|\sin x|$$

(3) نثبت صحة الخاصية عندما $n=k+1$:

$$|\sin(k+1)x| = |\sin(kx+x)| = |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x|.$$

وبتطبيق متباينة المثلث وخواص القيمة القياسية (المطلقة) فإننا نحصل على:

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx||\cos x| + |\cos kx||\sin x|.$$

وبما أن $|\cos x| \le 1$ لكل قيم x الحقيقية فإنه ينتج أن:

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx| + |\sin x| \le k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|.$$

فتكون الخاصية صحيحة عندما $n=k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n=k$
وحيث إنها صحيحة عندما $n=1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة ولجميع قيم x الحقيقية.

تمارين

[1] أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن:

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
2. $1 + 7 + 13 + \ldots + (6n - 5) = n(3n - 2)$
3. $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{1}{2} n(3n-1)$
4. $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
5. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
6. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}\ , (n > 1).$
7. $(cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta$.
8. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n - 1)(2n + 1)$
9. $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$, n is positive number.

[2] إذا كانـت $y = \frac{1}{ax+b}$ فـإن $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

[3] إذا كانـت $y = \sin(ax + b)$ فـإن $\frac{d^n y}{dx^n} = a^n \sin(ax + b + \frac{n\pi}{2})$.

[4] مجموع مكعبات أيه ثلاثة أعداد طبيعية متتالية يقبل القسمة على 9.

[5] لأى عدد صحيح $n \geq 0$، يقبل $(11)^{n+2} + (12)^{2n+1}$ القسمة على 133.

[6] اثبت صحة العلاقة $n! > 3^n \ \forall n > 7$.

[7] لأى عدد صحيح $n \geq 0$ اثبت صحة

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \cdots + nxa^{n-1} + a^n.$$

[8] لأى عدد صحيح $n \geq 0$ اثبت أن أي عدد علي الصورة التالية يكون زوجي $n(n+1)$

الباب السابع

الكسور الجزئية

يقال للدالة

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

أنها كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير x وأن الاعداد a_i تسمى معاملات كثيرة الحدود حيث $a_i, i = 0,1, \dots, n \in \mathbb{R}\ or\ \mathbb{C}$.

وفي حالة $f(x) = 0$ تسمى كثيرة الحدود بمعادلة جبرية من الدرجة n في المتغير x. وقيم x التي تحقق المعادلة تسمى بجذور المعادلة.

ليكن لدينا كثيرتي الحدود التاليتين

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

فإن الدالة $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تسمي دالة كسرية بشرط $g(x) \neq 0$.

(1) الكسور الجزئية:

اعتبر عملية الجمع

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2x+1} = \frac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$$

أي أنه يمكن القول بأن الكسر $\frac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$ يمكن التعبير عنه كمجموع كسرين أبسط منه وفى هذه الحالة يقال إن الكسر حلل إلى كسوره الجزئية وهي $\frac{1}{(2x+1)}$ ، $\frac{2}{(x-3)}$
وبوجه عام إذا أمكن بطريقة ما التعبير عن الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ بدلالة المجموع الجبري لكسور أبسط منه، فإنه يقال إن هذا الكسر قد حلل إلى كسوره الجزئية.
عملية تحليل الكسر إلى كسور جزئية لها قواعد تتوقف على نوع الكسر المراد تحليله وفيما يلي سنوجز هذه القواعد.

(2) قواعد تحليل الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ إلى كسور جزئية:

يتم تقسيم الكسر الي نوعين:

أ- النوع الأول "الكسر العادي أو الحقيقي" :

الكسر العادي هو الكسر الذى فيه تكون درجة البسط $f(x)$ أقل من درجة المقام $g(x)$.

يتم تحليل المقام الي أبسط صورة وتكون قواعد التحليل طبقا للحالات الاتية:

1- اذا كانت عوامل المقام عوامل خطية مختلفة أو مكرره يتم التحويل طبقا للاتي:

العامل	التحويل
كل عامل خطى مختلف $(ax+b)$	$\frac{\alpha}{(ax+b)}$, α is constant
كل عامل خطى مكرر $(ax+b)^n$	$\frac{\alpha}{(ax+b)}+\frac{\beta}{(ax+b)^2}+\frac{\gamma}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{\varepsilon}{(ax+b)^n}$

2- اذا كانت عوامل المقام عوامل من الدرجة الثانية وغير قابلة للتحليل يتم تحويلا طبقا للحالات الاتية

العامل	التحويل
كل عامل من الدرجة الثانية (ax^2+bx+c)	$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)}$, α, β are constant
كل عامل مكرر $(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{ax^2+bx+c}+\frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots \frac{\alpha_n x+\beta_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

ب- النوع الثاني "الكسر الغير عادي أو الغير حقيقي"

الكسر الغير العادي هو الكسر الذى فيه تكون درجة البسط $f(x)$ أكبر من أو تساوى درجة المقام $g(x)$.

ويكون لدينا طريقتين للتحويل كالتالي:

- **الطريقة الأولى:**

1- إذا كانت درجة $f(x)$ تساوى درجة $g(x)$ فإننا نضيف ثابت وليكن λ إلى الكسور
الجزئية الموجودة في الحالة الأولى.
2- إذا كانت درجة $f(x)$ أعلى بمقدار درجة واحدة من درجة $g(x)$ فإننا نضيف المقدار
$\lambda_1 x + \lambda_2$ إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى.
3- إذا كانت درجة $f(x)$ أعلى بمقدار درجتين عن درجة $g(x)$ فإننا نضيف المقدار
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$ الى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى. وهكذا

- **الطريقة الثانية:**

باستخدام القسمة المطولة ويتم ايجاد الكسور الجزئية لباقي القسمة.

(3) طرق تعيين الثوابت:

نطابق الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ بمجموع الكسور الجزئية المقابلة له ثم نضرب المتطابقة في $g(x)$ وبذلك نحصل على متطابقة جديدة يمكن منها تعيين الثوابت وذلك باستخدام الطرق الآتية:

1- نعطى قيم مناسبة للمتغير x.
2- نساوى المعاملات المتناظرة في الطرفين لقوى x المختلفة.

مثال (2-1):

حلل الكسر الاتي الي كسوره الجزئية: $\frac{2x^2-3}{x^3-x^2-4x+4}$.

الحل:

نلاحظ أن الكسر المعطي كسر حقيقي (لماذا) وبتحليل المقام الي أبسط صوره نحصل على $\frac{2x^2-3}{(x-2)(x+2)(x-1)}$ وبالنظر نجد أن عوامل المقام من الدرجة الأولي ومختلفة وبالتالي التحويل يصبح:

$$\frac{2x^2-3}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \frac{\propto}{(x-2)} + \frac{\beta}{(x+2)} + \frac{\gamma}{(x-1)}$$

وبتوحيد المقامات نحصل علي

$$\frac{2x^2-3}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \frac{\propto (x+2)(x-1) + \beta(x-2)(x-1) + \gamma(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)}$$

وبمساواة البسط في الطرفين

$$2x^2-3=\propto(x+2)(x-1)+\beta(x-2)(x-1)+\gamma(x+2)(x-2)$$

وبالتعويض عن $x=2,-2,1$ نحصل $\propto=\frac{5}{4},\beta=\frac{5}{12},\gamma=\frac{1}{3}$

وبالتعويض نحصل علي

$$\frac{2x^2-3}{(x-2)(x+2)(x-1)}=\frac{\frac{5}{4}}{(x-2)}+\frac{\frac{5}{12}}{(x+2)}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)}$$

مثال (2-2):

حلل الكسر الاتي الي كسوره الجزئية: $\frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2-5x+3}$.

الحل:

نلاحظ أن الكسر المعطي كسر حقيقي (لماذا) وبتحليل المقام الي أبسط صوره نحصل على $\frac{x^2+3x+1}{(x+3)(x-1)^2}$ وبالنظر نجد أن عوامل المقام من الدرجة الأولي وبعضها مكرر وبالتالي التحويل يصبح:

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{\propto}{(x+3)}+\frac{\beta}{(x-1)}+\frac{\gamma}{(x-1)^2}$$

وبتوحيد المقامات نحصل علي

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{\propto(x-1)^2+\beta(x+3)(x-1)+\gamma(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$$

وبمساواة البسط في الطرفين

$$x^2+3x+1=\propto(x-1)^2+\beta(x+3)(x-1)+\gamma(x+3)$$

ومساواه معاملات قوى x في الطرفين نحصل على نظام المعادلات التالي:

$1=\propto+\beta$

$3=-2\propto+2\beta+\gamma$

$1=\propto-3\beta+3\gamma$

وبحل هذا النظام نحصل على $\propto=\frac{1}{16},\beta=\frac{15}{16},\gamma=\frac{5}{4}$

وبالتعويض نحصل علي

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{\frac{1}{16}}{(x+3)}+\frac{\frac{15}{16}}{(x-1)}+\frac{\frac{5}{4}}{(x-1)^2}$$

مثال (2-3):

حلل الكسر الاتي الي كسوره الجزئية: $\frac{x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

الحل:

نلاحظ أن الكســـر المعطي كســـر حقيقي (لماذا) وأن المقام في أبســـط وبالتالي التحويل يصبح:

$$\frac{x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{\propto x+\beta}{(x^2+1)}+\frac{\gamma x+\delta}{(x^2+x+1)}$$

وبتوحيد المقامات نحصل علي

$$\frac{x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{(\propto x+\beta)(x^2+x+1)+(\gamma x+\delta)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

وبمساواة البسط في الطرفين

$$x^3+2x+1=(\propto x+\beta)(x^2+x+1)+(\gamma x+\delta)(x^2+1)$$

ومساواه معاملات قوى x في الطرفين نحصل على نظام المعادلات التالي:

$$1=\propto+\gamma$$
$$0=\propto+\beta+\delta$$
$$2=\propto+\beta+\gamma$$
$$1=\beta+\delta$$

وبحل هذا النظام نحصل على $\propto=-1,\beta=1,\gamma=2,\delta=0$

وبالتعويض نحصل علي

$$\frac{x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{-x+1}{(x^2+1)}+\frac{2x}{(x^2+x+1)}$$

مثال (2-4):

ضع الكسر $\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

نلاحظ أن الكســـر المعطي كســـر حقيقي (لماذا) وأن المقام في أبســـط وبالتالي التحويل يصبح:

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{(x^2+2x+3)}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(x^2+2x+3)^2}.$$

$$\therefore x^2+x+2=(\alpha_1 x+\alpha_2)(x^2+2x+3)+(\alpha_3 x+\alpha_4)$$

وبمقارنة معاملات x,x^2,x^3 والحد المطلق في الطرفين نحصل على:

$$\begin{aligned}
&0=\alpha_1 \Rightarrow`\alpha_1=0,\\
&1=2\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=1,\\
&1=3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3=-1,\\
&2=3\alpha_2+\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4=-1
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{1}{x^2+2x+3}-\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

<u>مثال (5-2):</u>

حلل الكسر الاتي الي كسوره الجزئية: $\frac{2x^3+3x^2-3}{(2x-1)(x+3)}$.

<u>الحل:</u>

نلاحظ أن الكسر المعطي كسر غير حقيقي (لماذا) وأن المقام في أبسط ولكي نحول لكسوره الجزئية سوف نستخدم الطرقتين:

الطريقة الأولي: نجري عملية القسمة المطولة المعتادة

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x-1 \\
\hline
2x^2+5x-3 & 2x^3+3x^2-3 \\
 & 2x^3+5x^2-3x \\
\hline
 & -2x^2+3x-3 \\
 & -2x^2-5x+3 \\
\hline
 & \quad 8x-6
\end{array}$$

$$\frac{2x^3+3x^2-3}{(2x-1)(x+3)}=x-1+\frac{8x-6}{(2x-1)(x+3)}$$

وبما أن $\frac{8x-6}{(2x-1)(x+3)}=\frac{a}{(2x-1)}+\frac{b}{(x+3)}$

وبتوحيد المقامات نحصل علي

$$\frac{8x-6}{(2x-1)(x+3)}=\frac{a(x+3)+b(2x-1)}{(2x-1)(x+3)}$$

وبمساواة البسط في الطرفين

$$8x-6=a(x+3)+b(2x-1)$$

وبالتعويض عن $x=\frac{1}{2},-3$ نحصل $a=\frac{-4}{7}, b=\frac{30}{7}$

وبالتعويض نحصل علي

$$\frac{2x^3+3x^2-3}{(2x-1)(x+3)}=x-1+\frac{(\frac{-4}{7})}{(2x-1)}+\frac{\frac{30}{7}}{(x+3)}$$

<u>الطريقة الثانية:</u> سوف نستخدم العلاقات التي تم ذكرها سابقا وبما أن درجة البسط تزيد بمقدار 1 عن درجة المقام فان التحويل يكون

$$\frac{2x^3+3x^2-3}{(2x-1)(x+3)}=cx+d+\frac{a}{(2x-1)}+\frac{b}{(x+3)}$$

وبتوحيد المقامات نحصل علي

$$\frac{2x^3+3x^2-3}{(2x-1)(x+3)}=\frac{(cx+d)(2x-1)(x+3)+a(x+3)+b(2x-1)}{(2x-1)(x+3)}$$

وبمساواة البسط في الطرفين

$$2x^3+3x^2-3=(cx+d)(2x-1)(x+3)+a(x+3)+b(2x-1)$$

ومساواه معاملات قوى x في الطرفين نحصل على نظام المعادلات التالي:

$$2=2c \Rightarrow c=1$$

$$3=5c+2d \Rightarrow d=-1$$

$$0=-3-5+a+2b$$

$$-3=3+3a-b$$

ومنها نحصل على $a=\frac{-4}{7}, b=\frac{30}{7}$

وبالتعويض نحصل علي

$$\frac{2x^3+3x^2-3}{(2x-1)(x+3)}=x-1+\frac{\left(\frac{-4}{7}\right)}{(2x-1)}+\frac{\frac{30}{7}}{(x+3)}$$

تمارين

1- حلل الكسور الاتية الي كسورها الجزئية:

i- $\dfrac{x^3}{(2x-1)(x-3)}$

ii- $\dfrac{x^3}{(2x-1)(x^2-3)}$

iii- $\dfrac{32}{(x^6-x^3)(x+3)}$

iv- $\dfrac{6x-4}{(x^3+1)(x+1)}$

v- $\dfrac{2x+18}{x^5+3x^3-4x}$

vi- $\dfrac{4+8x^{-1}}{x^3-2x}$

vii- $\dfrac{x^2-16x}{x^3-4x}-\dfrac{2x^2+7x+26}{x^3-8}$

viii- $\dfrac{1}{x^3+2x^2-4x-8}$

ix- $\dfrac{x^5}{x^3+2x^2-4x-8}$