الباب الأول

المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الاولي و الدرجة الاولي

مقدمة

المعادلات التفاضلية من الموضوعات الهامة لورودها في كثير العلوم مثل الرياضيات البحتة و التطبيقية وفي الطبيعة و الكيمياء وفي كثير من العلوم الهندسية فكثير من مسائل الانحناء تعتمد في حلها علي المعادلات التفاضلية وكذلك تذبذب الاجسام و الذبذبات الكهربية وانتقال الحرارة وانتشار الاجسام الذائبة وسرعة التفاعلات الكيميائية.

١.١ تعريف المعادلات التفاضلية

نفرض أن y دالة في المتغير x وأن $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ المشتقات التفاضلية من الرتبة الاولي و الثانية حتي المشتقة النونية للمتغير y بالنسبة إلي x فإن إي علاقة تربط بين x, y وأحد المشتقات السابقة تسمي "معادلة تفاضلية عادية" أما إذا كانت y دالة في اكثر من متغير ولها مشتقات جزئية فإنها تسمي "معادلة تفاضلية جزئية " ونذكر الان بعض الامثلة المختلفة للمعادلات التفاضلية العادية .

$$\frac{d^2y}{dx^2} + w^2 y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} - 5x = \cos 2x \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2yx = 5 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (5)$$

٢.١ رتبة و درجة المعادلة التفاضلية

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلي مشتقة موجوده في المعادلة التفاضلية. درجة المعادلة التفاضلية هي الاس الذي يرفع الية أعلي معاملي تفاضلي المحدد لرتبة المعادلة. فمثلاً المعادلة (١) هي معادلة من الرتبة الثانية والدرجة الاولي . والمعادلة (٢) من الرتبة الرابعة والدرجة الأولي. والمعادلة (٣) معادلة من الرتبة الثالثة و الدرجة الثانية .والمعادلات (٤)، (٥) معادلات تفاضلية جزئية.

٣.١ تكوين المعادلة التفاضلية

يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية نفرض أن لدينا العلاقة

$$f\,(x\,,y\,,c\,)=0 \qquad (1)$$

هذه المعادلة تمثل مجموعة المنحنيات المستوية ذات البارامتر الواحد وبتفاضل العلاقة (١) بالنسبة إلي x نحصل علي معادلة تحتوي علي $x\,,y\,,y'\,,c$ ولتكن

$$\phi\left(x\,,y\,,y'\,,c\,\right)=0 \qquad (2)$$

وبحذف c من (١) ، (٢) نحصل علي علاقة في الصورة

$$\psi(x\,,y\,,y')=0 \qquad (3)$$

و العلاقة (٣) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الاولي حصلنا عليها نتيجة لحذف ثابت اختياري واحد وتسمي هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات (١) .

ولتوضيح ذلك نعتبر المثال الاتي

$$y^2=4a\left(x-c\right)$$

فهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة التي محورها المحور السيني و وترها البؤري العمودي $4a$. بالتفاضل نحصل علي

$$y\,\frac{dy}{dx}=2a$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لمجموعة القطاعات المكافئة.

و في الحالة العامة اذا اعتبرنا العلاقة

$$f\,(x\,,y\,,c_1,c_2,...,c_n)=0 \qquad (4)$$

وهذه العلاقة تحتوي علي n من البارامترات $c_1,c_2,...,c_n$. للحصول علي المعادلة التفاضلية المناظرة نفاضل هذه العلاقة n من المرات المتتالية بالنسبة الي x فنحصل علي n من العلاقات في الصورة

$$\left.\begin{aligned}&\phi_1(x\,,y\,,y',c_1,c_2,...,c_n)=0\\&\phi_2(x\,,y\,,y',y'',c_1,c_2,...,c_n)=0\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\phi_n(x\,,y\,,y',...,y^{(n)},c_1,c_2,...,c_n)=0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

من العلاقات (٤)، (٥) وعددها $n+1$ يمكن حذف الثوابت $c_1,c_2,...,c_n$ وتكون النتيجة هي الحصول علي معادلة تفاضلية عادية و رتبتها n علي الصورة

$$f\,(x\,,y\,,y',y',...,y^{(n)})=0$$

مثال (١) كون المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات

$$\mathrm{c}_1x+(y-c_2)^2=0 \qquad (1)$$

الحل

حيث ان معادلة مجموعة المنحنيات تحتوي علي بارا مترين فإننا نفاضل مرتين باعتبار ان

$$\mathrm{c}_1+2\left(y-c_2\right)y'=0 \qquad (2)$$

$$2y'^2+2\left(y-c_2\right)y''=0 \qquad (3)$$

بحذف c_1 من المعادلة (٢) نحصل علي

$$c_1=-2\left(y-c_2\right)y' \qquad (4)$$

نعوض من (٤) في(١) نجد ان

$$-2xy'(y-c_2)+(y-c_2)^2=0 \qquad (5)$$

بحذف C_2 من المعادلة (٣) نحصل علي

$$y-c_2=-y'^2/y'' \qquad (6)$$

بالتعويض من (٦) في (٥) نحصل علي المعادلة التفاضلية المطلوب وهي

$$y'+2xy''=0$$

مثال(٢): أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور.

الحل

المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور هي

$$x^2=\alpha x+\beta y+c$$

و حيث ان هذه المعادلة تحتوي علي ثلاث ثوابت α,β,C. بالتالي نفاضل ثلاث مرات متتالية

$$2x=\alpha+\beta\frac{dy}{dx}, \quad 2=\beta\frac{d^2y}{dx^2}, \quad 0=\beta\frac{d^3y}{dx^3}$$

المعادلة التفاضلية المطلوبة هي $\frac{d^3y}{dx^3}=0$

مثال (٣) إذا كانت

$$y=ae^{2x}+be^{-x} \qquad (1)$$

فاثبت إن

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0$$

الحل

بالتفاضل نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} - be^{-x} \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4ae^{2x} + be^{-x} \qquad (3)$$

بجمع (١) ، (٢) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} + y = ae^{2x}$$

وبجمع (٢) ، (٣) ينتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6ae^{2x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2(\frac{dy}{dx} + y)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

وهو المطلوب.

٤.١ حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية هو عملية الحصول علي الأصل الكامل للمعادلة التفاضلية إي عملية عكس عملية تكوين المعادلة و التي درسناها. ويمكن تقسيم هذه المعادلات من حيث طرق حلها إلي الانواع الاتية

١. المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال.
٢. المعادلات التفاضلية المتجانسة.
٣. المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية.
٤. المعادلات التفاضلية التامة.
٥. المعادلات التفاضلية الخطية.
٦. معادلات برنولي.
٧. معادلات ريكاتي.

و سوف ندرس كل نوع علي حدة

١.٤.١ المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال

يمكن كتابة المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات علي الشكل الاتي

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (1)$$

$$M(y)dx + N(x)dy = 0 \qquad (2)$$

و المعادلة (٢) يمكن تحويلها إلي صورة المعادلة (١) وذلك بالقسمة علي $N(x)M(y)$ أي

$$\frac{dx}{N(x)} + \frac{dy}{M(y)} = 0$$

و هذ النوع من المعادلات يمكن حلها بإجراء التكامل مباشرة.

مثال (١) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0 \qquad (1)$$

الحل

بالقسمة علي $\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}$ نحصل علي

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy = 0$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = c$$

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = c$$

وهي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (١).

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy^3\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2 \qquad (1)$$

الحل

نضع المعادلة علي الصورة

$$xy^3\frac{dy}{dx}=(1-x^2)+y^2(1-x^2)\Rightarrow xy^3\frac{dy}{dx}=(1-x^2)(1+y^2)$$

$$xy^3dy=(1-x^2)(1+y^2)dx$$

بقسمة طرفي المعادلة علي $x(1+y^2)$

$$\frac{y^3}{1+y^2}dy=\frac{1-x^2}{x}dx$$

وبالتكامل نحصل علي

$$\int\frac{y^3}{1+y^2}dy=\int\frac{1-x^2}{x}dx+c,\quad \int(y-\frac{y}{y^2+1})dy=\int\frac{dx}{x}-\int xdx+c$$

$$\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\ln x-\frac{x^2}{2}+c,\quad x^2+y^2=2\ln(x\sqrt{y^2+1})+c$$

وهذا يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (١)

مثال (٣) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\left(8x+2y+1\right)^2 \qquad (1)$$

الحل: **بوضع** $u=8x+2y+1$

ثم بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل علي

$$u'=8+2y',\quad y'=\frac{1}{2}\left(u-8\right)$$

بالتعويض عن قيمة y' في المعادلة (١) نحصل علي

$$u'-8=2u^2,\qquad \frac{du}{dx}=2u^2+8$$

بالتكامل نحصل علي

$$\int \frac{du}{u^2+4} = 2\int dx + c, \qquad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} = 2x + c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي

$$\tan^{-1}\frac{8x+2y+1}{2} = 4x + c$$

٢.٤.١ المعادلات التفاضلية المتجانسة

يقال للدالة $f(x,y)$ إنها متجانسة من درجة n إذا امكن وضعها علي الصورة

$$f(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad f(x,y) = x^n g(x,y)$$

حيث g دالة للمتغير $\frac{y}{x}$.

ويقال للمعادلة التفاضلية الآتية

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

انها متجانسة إذا كانت كل من الدالتين $g(x,y), f(x,y)$ متجانسة من نفس الدرجة إي إن

$$f(x,y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad g(x,y) = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

المعادلة السابقة تكون علي الصورة

$$\phi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \qquad (1)$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلي معادلة من النوع الأول أي ذات متغيرات قابلة للانفصال وذلك بفرض أن

$$z = \frac{y}{x}, \qquad y = xz, \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

وبوضع المعادلة (١) علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi(\frac{y}{x})}{\psi(\frac{y}{x})}, \qquad x\frac{dz}{dx}+z=-\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

$$x\frac{dz}{dx}=-\left[z+\frac{\phi(z)}{\psi(z)}\right]$$

وهذه معادلة قابلة للانفصال يمكن حلها كما سبق

مثال (١) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

وبوضع $y=xz$ نجد أن

$$x\frac{dz}{dx}+z=\frac{z^2-1}{2z}, \qquad x\frac{dz}{dx}=-\frac{1+z^2}{2z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2z}{1+z^2}dz\,, \qquad \ln x+\ln c=-\ln(1+z^2)$$

$$x(1+z^2)=c, \qquad x(1+\frac{y^2}{x^2})=c$$

$$x^2+y^2-cx=0$$

وهي معادلة مجموعة من الدوائر نصف قطرها C .

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

تحدى

$$(2ye^{\frac{y}{x}}-x)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{x-2ye^{\frac{y}{x}}}$$

نضع $y = zx$ نجد أن

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2+z}{1-2ze^{z}}, \qquad x\frac{dz}{dx} = \frac{2(1+z^{2}e^{z})}{1-2ze^{z}}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-2ze^{z}}{2(1+z^{2}e^{z})}dz, \qquad 2\ln x = \int \frac{e^{-z}-2z}{e^{-z}+z^{2}}dz$$

$$2\ln x = -\ln(z^{z}+e^{-z}) + \ln c, \qquad x^{2}(z^{z}+e^{-z}) = c$$

$$x^{2}\left(\frac{y^{2}}{x^{2}} + \frac{y}{e^{x}}\right) = c, \qquad y^{2} + x^{2}e^{-\frac{y}{x}} = c$$

مثال(٣) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy' = \sqrt{x^{2}-y^{2}} + y'$$

الحل

$$y' = \sqrt{1-\frac{y^{2}}{x^{2}}} + \frac{y'}{x}$$

نضع $y = zx$ أي إن

$$y' = xz' + z, \qquad xz' + z = \sqrt{1-z^{2}} + z$$

$$xz' = \sqrt{1-z^{2}}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin^{-1} z = \ln cx, \qquad y = x\sin\ln cx$$

٣.٤.١ المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية.

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية تكون علي كصورة الآتية

$$(a_{1}x + b_{1}y + c_{1})dx + (a_{2}x + b_{2}y + c_{2})dy = 0 \qquad (1)$$

أو تكتب علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_{1}x + b_{1}y + c_{1}}{a_{2}x + b_{2}y + c_{2}}$$

وهذه المعادلات ذات المعاملات الخطية يمكن تحويلها إلي

(١) معادلات متجانسة.

(٢) معادلات ذات متغيرات قابلة للانفصال.

أولا: المعادلات ذات المعاملات الخطية والتي يمكن تحويلها إلي معادلات متجانسة.

في هذه الحالة المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يتلاقيان في نقطة ولتكن $\left(\alpha, \beta\right)$ وهذا يعني إن محدد المعاملات لا يساوي الصفر.

نضع $x = u + \alpha \ , \ y = y + \beta$. فيكون $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dv}$. و المعادلة (١) تصبح

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فيمكن حلها كما سبق.

ثانيا: معادلات يمكن تحويلها إلي متغيرات منفصلة

ففي هذه الحالة يكون محدد المعاملات يساوي الصفر أي أن $a_1b_2 = a_2b_1$ والمستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ , \ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يكونان متوازيان ويكون

$$a_1x + b_1y = \alpha(a_2x + b_2y)$$

نضع

$$u = a_1x + b_1y \, , \qquad \frac{du}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{du}{dx} - a_1\right)$$

والمعادلة (١) تصبح

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{du}{dx} - a_1\right) = \frac{u + c_1}{\alpha u + c_2}$$

وهذه معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال فيمكن حلها كما سبق.

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$$

$a_1 = 2 \quad , b_1 = -1$

$2x - y + 4$

$a_2 = 1 \quad x - 2y + 5$

$b_2 = -2$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 \neq 0$

الحل

نلاحظ أن محدد المعاملات $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

وبالتالي المعادلة يمكن تحويلها إلي معادلة متجانسة.

أولا : نوجد نقطة التقاطع للمستقيمين

$$2x - y + 4 = 0, \quad x - 2y + 5 = 0$$

وهي $(-1, 2)$ باستخدام التعويض

$$x = u - 1 \quad , \quad y = v + 2$$

$$dx = du \quad , \quad dy = dv$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$(2u - 2 - v - 2 + 4) + (u - 1 - 2v - 4 + 5)du = 0$$

باستخدام التعويض $v = uz$

$$\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}, \qquad (2 - z)(z + u\frac{dz}{du}) + (1 - 2z) = 0$$

$$2z' + 2v\frac{dz}{du} - z^2 - uz\frac{dz}{du} + 1 - 2z = 0, \qquad u(2 - z)\frac{dz}{du} = z^2 - 1$$

$$\frac{2 - z}{z^2 - 1}dz = \frac{1}{u}du, \qquad \left(\frac{1}{2(z - 1)} - \frac{3}{2(z + 1)}\right)dz = \frac{1}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\ln(z - 1) - \frac{3}{2}\ln(z + 1) = \ln u + \ln c, \qquad \ln\frac{z - 1}{(z + 1)^3} = 2\ln cu$$

بالتعويض عن قيم u, v نحصل علي

$$\frac{y-x-3}{(y+x-1)^3}=c$$

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx}+x-2y+3=0$$

الحل : نلاحظ إن محدد المعاملات يساوي الصفر

نضع

$$x-2y=u, \qquad 1-2\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1-\frac{du}{dx})$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=-\frac{u+3}{2u+5}, \qquad \frac{du}{dx}=\frac{4u+11}{2u+5}$$

$$\int dx=\int\frac{2u+5}{4u+11}du=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{4u+11})du$$

$$2x+\frac{c}{4}=u-\frac{1}{4}\ln(4u+11), \qquad 8x+c=4x-8y-\ln(4x-8y+11)$$

$$4x+8y+\ln(4x-8y+11)+c=0$$

٤.٤.١ المعادلات التفاضلية الكاملة (التامة)

يقال للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

أنها كاملة (تامة) إذا تحقق للدالتين M, N المتصلتين العلاقة

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

حيث كل من $\frac{\partial N}{\partial x},\frac{\partial M}{\partial y}$ دالة متصلة وبذلك يكون الطرف الأيسر للمعادلة (١) عنصراً تفاضليا تاما لدالة ما $f\ (x\ ,y\ )$ بالنسبة للمتغيرين $x\ ,y$ إي أن

$$df\ (x\ ,y\ )=M\ (x\ ,y\ )dx\ +N\ (x\ ,y\ )dy$$

والشرط الضروري و الكافي لذلك هو إن تحقق العلاقة (٢).

اولا : لإثبات ان الشرط الضروري

نفرض إن الطرف الأيسر للمعادلة (١) يمثل تفاضلاً تاماً للدالة $f\ \left(x\ ,y\ \right)$

$$df\ \left(x\ ,y\ \right)=\frac{\partial f}{\partial x}dx\ +\frac{\partial f}{\partial y}dy\ =M\ \left(x\ ,y\ \right)dx\ +N\ \left(x\ ,y\ \right)dy$$

و بمقارنة المعاملات نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M\ (x\ ,y\ )\quad ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=N\ (x\ ,y\ )\qquad\qquad (3)$$

وبتفاضل العلاقة الأولي من (٣) بالنسبة إلي y و الثانية بالنسبة إلي x نحصل علي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

وبمعني ذلك أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية (١) تامة فإنه الشرط (٢) يجب أن يتحقق إي أن هذا الشرط ضروري.

ثانيا : لإثبات ان الشرط الكافي

نفرض إن العلاقة (٢) صحيحة ويكون المطلوب أثبات أن المعادلة التفاضلية (١) تكون تامة أي أن توجد دالة $f\ (x\ ,y\ )$ وبحيث يكون

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M\ (x\ ,y\ ),\ \frac{\partial f}{\partial y}=N\ (x\ ,y\ )\qquad\qquad (4)$$

و العلاقة الأولي في (٤) تحقق إذا كان

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\phi(y)=\psi(x,y)+\phi(y) \quad (5)$$

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية لا تحتوي علي x

وبتفاضل العلاقة (٥) بالنسبة إلي y نجد ان

$$N=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial y}+\phi'(y) \qquad (6)$$

ومن العلاقة (٦) نحصل علي $\phi(y)$ وذلك بالتكامل بالنسبة إلـي y و بـالتعويض في العلاقـة (٥) عن $\phi(y)$ وبذلك تتعين الدالة $f(x,y)$ تاماً وهذا يثبت أن الشرط كافي.

مثال (١) اثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة و أوجد أصلها التام.

$$(2y^2+4xy-x^2)dx+(2x^2+4xy-y^2)dy=0 \qquad (1)$$

الحل : نفرض أن

$$M(x,y)=2y^2+4xy-x^2 \quad , \quad N(x,y)=2x^2+4xy-y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y+4x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+4y$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=2y^2+4xy-x^2 \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة (٣) بالنسبة إلي x

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x3}{3}+\phi(y) \qquad (4)$$

وبتفاضل العلاقة (٤) بالنسبة إلي y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=2x^{2}+4xy-y^{2}=4xy+2x^{2}+\phi'(y)$$

$$\phi'(y)=-y^{2}(y),\qquad \phi(y)=-\frac{y^{3}}{3}+c$$

$$f(x,y)=2y^{2}x+2x^{2}y-\frac{x^{3}}{3}-\frac{y^{3}}{3}=c$$

مثال(٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(\cos x e^{\sin x}+\sin y\cos x)dx+\cos y\sin x\,dy=0\qquad(1)$$

الحل بوضع

$$M=\cos x e^{\sin x}+\sin y\cos x$$

$$N=\sin x\cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y\cos x\qquad(2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\cos x\cos y\qquad(3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

بالتالي المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=\cos x\, e^{\sin x}+\sin y\cos x\qquad(4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=\sin x\cos y\qquad(5)$$

بتكامل العلاقة (٤) بالنسبة إلي x نحصل علي

$$f(x,y) = -e^{\sin x} + \sin x \sin y + \phi(y) \qquad (6)$$

و بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y + \phi'(y) \qquad (7)$$

من (٥)، (٧) نحصل علي

$$\sin x \cos y = \phi'(y) + \sin x \cos y$$

$$\phi'(y) = 0, \qquad \phi(y) = c$$

بالتعويض في المعادلة (٦) عن قيم $\phi(y)$

$$f(x,y) = e^{\sin x} + \sin x \sin y + c$$

العوامل المكاملة

إذا كانت المعادلة التفاضلية التي من الدرجة الأولى والرتبة الأولى

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

غير تامة أي يكون

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فإن يمكن تحويلها إلي معادلة تامة وذلك بضربها في عامل مكامل M والعامل المكامل M يكون غالبا دالة في (x,y) ولكن الحصول علي العامل المكامل في الحالة العامة هي مسألة رياضية غير بسيط لذلك سوف نعتبر أن M دالة في y فقط أو M دالة في y فقط.

بضرب المعادلة (١) في العامل المكامل $M(x,y)$ لكي تصبح تامة وبذلك يكون

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0. \qquad (2)$$

المعادلة (٢) اصبحت تامة إذا يكون

$$\frac{\partial x}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0 \qquad (3)$$

ومن هذه المعادلة يتعين العامل المكاملة μ كدالة في x, y

أولا : شرط وجود عامل مكامل دالة في x فقط.

نفرض أن المعادلة (١) لها عامل مكامل $\mu = \mu(x)$ وبذلك تصبح المعادلة (٣) علي الصورة

$$N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right), \qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة الأخيرة دالة في x فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن دالة في x فقط .

الشرط الضروري والكافي كي يكون للمعادلة (١) عامل مكامل دالة في x فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$ دالة في x فقط .

$$\frac{1}{\mu}d\,\mu = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

وبالتكامل يكون

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,, \;\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

ثانيا: شرط و جود عامل دالة في y فقط .

نفرض أن المعادلة (١) لها عامل مكامل في y وبذلك تصبح المعادلة (٣) علي الصورة

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة هو دالة في y فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن يكون كذلك دالة في y فقط.

الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمعادلة (١) عامل مكامل دالة في y فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في y فقط .

وبتكامل هذه المعادلة

$$\ln\mu(y)=-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy\Rightarrow\mu(y)=e^{-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$$

وهذه العلاقة تعطي العامل المكامل بصورة صريحة.

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل

$$xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$$

$$M(x,y)=xy^3\ ,\ N(x,y)=x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2\quad,\quad\frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2,\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=xy^2$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{y}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في y فقط يتعين من

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة.

$$xy^{2}dx+\left(x^{2}y-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

ولإيجاد حل المعادلة التفاضلية (١) نفرض الحل العام لها علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=xy^{2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^{2}y-\frac{1}{y} \qquad (3)$$

يتكامل المعادلة (٢) نحصل علي

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^{2}y^{2}+\phi(y) \qquad (4)$$

ثم نفاضل المعادلة بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^{2}y-\frac{1}{y}=x^{2}y+\phi'(y), \qquad \phi'(y)=\frac{1}{y}$$

$$\phi(y)=\ln y+\ln c$$

بالتعويض في (٤) نحصل علي الحل العام

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^{2}y^{2}+\ln cy$$

مثال (٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1-xy)dx+(xy-x^{2})dy=0$$

الحل

$$M=1-xy \quad , \quad N=xy-x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=y-2x\,, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x-y\,, \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{x-y}{x\left(y-x\right)}=-\frac{1}{x}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في x فقط يتعين من

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة.

$$\left(\frac{1-xy}{x}\right)dx+\left(\frac{xy-x^2}{x}\right)dy=0$$

واضح أن حل المعادلة التفاضلية التامة السابقة هو

$$\ln x-xy+\frac{y^2}{2}=c$$

١.٤.٥ المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كانت y ومشتقاتها التفاضلية بالنسبة إلي x من الدرجة الأولي وغير مضروبة ببعضها و الصورة العامة لها

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

حيث أن $a_0,a_1,\ldots\ldots,a_n,f(x)$ دوال في x.

والمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=\phi(x) \qquad (1)$$

Or

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=\phi(y) \qquad (2)$$

ولحل هذه المعادلة نقوم بتحويلها إلي صورة معادلة تامة وذلك يضرب المعادلة (١) في عامل مكامل $\mu=\mu(x)$ فتصبح المعادلة (١) علي الصورة

$$\mu(x)dy+[\mu(x)p(x)y-\mu(x)\phi(x)]dx=0 \qquad (3)$$

و المعادلة (٣) تكون تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)p(x)y-\mu(x)\phi(x)\right]$$

ومنها يكون

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu(x)p(x) \qquad (4)$$

$$\therefore \frac{d\mu}{\mu(x)}=p(x)dx \Rightarrow \mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

وبالتعويض من (٤) في (٣) نحصل علي الصورة

$$\mu(x)dy+y\,d\mu=\mu(x)\phi(x)dx$$

$$d[\mu(x)y]=\mu(x)\phi(x)dx$$

و بتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\mu(x)y=\int\mu(x)\phi(x)dx+c \Rightarrow y=\frac{1}{\mu(x)}\int\mu(x)\phi(x)dx+\frac{c}{\mu(x)}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (١).

وبالمثل يمكن إيجاد حل المعادلة التفاضلية (٢) علي الصورة

$$x(y)=\frac{1}{\mu(y)}\int \mu(y)\phi(y)\,dy+\frac{c}{\mu(y)}$$

مثال (١) : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$$

الحل : نوجد أولا عاملاً مكاملاً يعتمد علي x

$$\mu(x)=e^{\int \cot x\,dx}=\sin x$$

الحل العام للمعادلة يصبح علي الصورة

$$\frac{d}{dx}(y\sin x)=\tan x,\qquad y\sin x=\int \tan x\,dx+c$$

$$y=\operatorname{cosec}x\ln\sec x+c\operatorname{cosec}x$$

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\frac{dy}{dx}+(x+1)y=3x^2e^x$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+\left(1+\frac{1}{x}\right)y=3x^2e^x,\qquad \mu=e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}=xe^x$$

$u = x^2,\ dv = e^x dx$

$$\frac{d}{dx}(yxe^x)=3x^3e^{2x},\qquad yxe^x=3\int x^3e^{2x}dx+c$$

$du = 2x\,dx,\ e^x$

$$xy=(x^3+c)e^{-x}$$

$\int x^2 e^x$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

٦.٤.١ معادلة برنولي

هي المعادلة تكون علي الصورة

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=Q(x)\cancel{y^n}\qquad(1)$$

$z = y^{1-n}$

حيث n عدد حقيقي لا يساوي 1

لحل هذه المعادلة يتم تحويلها أولاً إلي معادلة خطية وذلك بالقسمة علي y^{n}

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=Q(x) \qquad (2)$$

ثم نفرض أن $u=y^{1-n}$. فيكون

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

وبالتعويض من (٣) في (٢) نحصل علي

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+p(x)u=Q(x)\Rightarrow\frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)Q(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها كما سبق.

مثال (١) : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=5x^{2}y^{5} \qquad (1)$$

الحل

بقسمة المعادلة (١) علي y^{5} نجد أن

$$y^{-5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y^{-4}=5x^{2} \qquad (2)$$

نفرض أن $u=y^{-4}$ فيكون $-4y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$ و بالتعويض في (٢)

$$-\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-\frac{u}{2x}=5x^{2}\Rightarrow\frac{du}{dx}+\frac{2u}{x}=-20x^{2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية. يتك حلها كالتالي

$$\mu = e^{\int \frac{2dx}{x}} = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(ux^2) = -20x^4$$

$$ux^2 = -4x^5 + c \Rightarrow u = -4x^3 + \frac{c}{x^2} = \frac{c-4x^5}{x^2} = y^{-4}$$

الحل العام المعادلة (١) هو

$$y^4 = \frac{x^2}{c-4x^5}$$

٦.٤.١ معادلة ريكاتي

معادلة ريكاتي هي المعادلة التي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (1)$$

حيث R, Q, P دوال في x فقط ويمكن حل هذه المعادلة إلي علم أحد الحلول الخاصة لها $y = y_1$ حيث y_1 دالة في x . وفي هذه الحالة فالأصل التام للمعادلة(١) يعطي بالتعويض

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \qquad (2)$$

حيث أن z دالة في x يمكن ايجادها علي النحو التالي:

حيث أن $y = y_1$ حل للمعادلة (١) فبالتالي هو يحققها

$$\frac{dy_1}{dx} = p(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) \qquad (3)$$

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (١) ينتج أن

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) = p(x)(y^2 - y_1^2) + Q(x)(y - y_1) \qquad (4)$$

من المعادلة (٢) نحصل علي

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

المعادلة (٤) تصبح علي

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(y_1^2+\frac{1}{z^2}+\frac{2y}{z}+y_1^2)p(x)+\frac{1}{z}Q(x)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}+\left[2y_1p(x)+Q(x)\right]z=-p(x)}$$

وهذه معادلة خطية يمكن حلها كما سبق.

مثال (١) اثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)}$$

الحل

بوضع المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=(x-1)y^2+(1-2x)y+x \qquad (1)$$

وهذه معادلة تمثل معادلة ريكاتي

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل علي

$$x-1+(1-2x)+x=0$$

ولذلك فإن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (١).

نفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية علي الصورة $y=1+\frac{1}{z}$ و بالتالي $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل علي

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(x-1)(1+\frac{1}{z})^2+(1-2x)(1+\frac{1}{z})+x$$

$$\frac{dz}{dx}+(x-1)(z+1)^2+(1-2x)(z^2+z)+z^2x=0$$

$$\frac{dz}{dx}+z^{2}(x-1+2x+x)+z(2x-2+1-2x)+x-1$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}-z=1-x} \qquad (2)$$

وهذه معادلة خطية عاملها المكامل هو $\mu(x)=e^{-\int dx}=e^{-x}$

و يمكن حل هذه المعادلة كما يلي

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}z)=(1-x)e^{-x} \Rightarrow e^{-x}z=\int(1-x)e^{-x}+c=xe^{-x}+c$$

$$z=x+ce^{x}$$

إي أن الحل العام لمعادلة (١) هو

$$\frac{1}{y-1}=x+ce^{x}$$

تمارين (١)

(١) كون المعادلات التفاضلية لمجموعة المنحنيات الآتية

$(i)\ y=(x-c)^3 \qquad (ii)\ y=\sin(x+c)$

$(iii)\ x^2+cy^2=2y \qquad (iv)\ y=c(x-2)^2$

$(iiv)\ y=ax^2+be^x \qquad (vi)\ y=ax^3+bx^2+cx$

$(vii)\ y=\alpha\cos(\ln x)+\beta\sin(\ln x)$

$(viii)\ y=a\{x+\sqrt{x^2-1}\}^n+b\{x-\sqrt{x^2-1}\}^n$

حيث n ثابت مطلق.

$(ix)\ \ y=(a+bx)\cosh mx$

حيث m ثابت مطلق.

$(x)\ y=a(\sin^{-1}x)+b(\sin^{-1}x)^2$

$(xi)\ y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

$(xii)\ y=\alpha e^{\beta x}$

$(xiii)\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

(٢) أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة التي محورها هو المحور السيني.

(٣) كون المعادلة التفاضلية للدوائر التي نصف قطرها الواحد الصحيح ومركزها تقع علي المستقيم $y=2x$

(٤) اوجد الحل العام المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات

$(i)\ \dfrac{dy}{dx}=\cos(y-x) \qquad (ii)\ \tan x\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\cot y\,dy=0$

$(iii)\ x\dfrac{dy}{dx}-y=y^2 \qquad (iv)\ xy\dfrac{dy}{dx}=1-x^2$

$(iiv)\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1}$ $\quad (v)x^2\dfrac{dy}{dx}+y=a$

$(vi)xy^3\dfrac{dy}{dx}=1-x^2+y^2-x^2y^2$

$(vii)x(1-x^2)dy=(x^2-x+1)ydx$

$(viii)(x+y)^2(x\dfrac{dy}{dx}+y)=xy(1+\dfrac{dy}{dx})$

(٥) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية المتجانسة الآتية

$(i)(x+2y)dx-xdy=0 \quad (ii)xy'=y-xe^{y/x}$

$(iii)xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x} \quad (iv)xy'=y\cos(\ln\dfrac{y}{x})$

$(v)xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x} \qquad (vi)(x^2-2xy-y^2)\dfrac{dy}{dx}=x^2+2xy-y^2$

$(vii)(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=x^2-2xy+5y^2 \quad (viii)x\dfrac{dy}{dx}=y-x\cos^2(\dfrac{y}{x})$

(٦) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية الاتية

$(i)y'=\dfrac{4x-y+7}{2x+y-1} \quad (ii)(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$

$(iii)\ (x-y-1)+(y-x+2)y'=0$

$(iv)(3y-x)y'=3x-y+4$

$(v)(x-5y+5)dy+(5x-y+1)dx=0$

$(vi)x^2\dfrac{dy}{dx}=(2x-y+1)^2 \quad (vii)(y+ax+b)\dfrac{dy}{dx}=y+ax-b$

(٧) بين أن المعادلات الاتية تامة واوجد الحل العام لها

$(i)\, 2xydx + (x^2 - y^2)dy \quad (ii)\,(2-9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$

$(iii)\,(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^3 y)dy = 0$

$$(iv)\, xdx + ydy = a^2\left(\frac{xdx - ydy}{x^2 + y^2}\right)$$

$(v)\,(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$

$(vi)\,(\cos x - x\cos y)dy - (\sin y + y\sin x)dx = 0$

$$(vii)\, e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 \quad (viii)\,\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$$

$$(ix)\,\frac{2x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$$

$(x)\,(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$

$$(xi)\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$$

$(xii)\,\sin x\cos y\,dy + \cos x\sin y\,dx + \cos x\, e^{\sin x}dx = 0$

$(xiii)\left[3ax^2 + 2(a+2h)xy + (b+2h)y^2\right]dx$

$+\left[(a+2h)x^2 + 2(b+2h)xy + 3by^2\right]dy = 0$

(٨) أوجد عامل مكامل يعتمد علي x فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد اصلها التام

$(i)\,(x^3 + y^4)dx + 8xy^3dy = 0$

$(ii)\,(1 - xy)dx + (1 - x^2)dy = c$

$(iii)\,(x^3 + 2y^3 - 3xy)dx + 3x(y^2 + x)dy = 0$

$(iv)\,(2x^2 + xy + a^2)ydx + (x + 2y)(x^2 + a^2)dy = 0$

(٩) أوجد عامل مكامل يعتمد علي y فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد اصلها التام

$(i)\ xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$

$(ii)\ y^2dx+(xy+1)dy=0$

$(iii)\ (y+1)dx+(xy+y^2+y+1)dy=0$

$(iv)\ dx+\{1+(x+y)\tan y\}dy=0$

(١٠) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الخطية الآتية

$(i)\ (x+1)\frac{dy}{dx}-y=3x^4+4x^5$ $\quad (ii)\ \left\{2x\frac{dy}{dx}+y\right\}\sqrt{1+x}=1+2x$

$(iii)\ 2(x^2+x+1)\frac{dy}{dx}+(2x+1)y=8x^2+1$

$(iv)\ 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}-(1+x)y=\sqrt{1-x^2}$

$(v)\ (1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+(1+x)(1-x^2)y=2$ $\quad (vi)\ \frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$

$(vii)\ \frac{dy}{dx}\sin x\cos^3 x+y\cos 2x\cos^2 x=0$

$(viii)\ \frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=y\tan 2x+1+\sec 2x$ $\quad (ix)\ \frac{dy}{dx}+2y=x^2+3\cosh x$

$(x)\ \frac{dy}{dx}+2y\,\mathrm{cosec}\,2x=2\cot^2 x\cos 2x$

$(xi)\ \frac{dy}{dx}\cot x-y=\mathrm{cosec}\,2x+\cos 2x$

$(xii)\ (1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x\sin^{-1}x+(1-x)\sqrt{1-x^2}$

(١١) حول المعادلات التفاضلية الاتية إلي معادلات خطية ثم أكمل حلها

$$(i)\,(xy-y^2)\frac{dy}{dx}=y^2-1 \qquad (ii)\left\{x\left(\frac{1-y^2}{1ty^2}\right)-1\right\}\frac{dy}{dx}=y$$

$$(iii)\left\{(2y^2-1)x+y^3\right\}\frac{dy}{dx}=y(1-y^2)^2 \qquad (iv)\,\mathrm{x}\frac{dy}{dx}=4y-4\sqrt{y}$$

$$(v)\,2x\frac{dy}{dx}-y=\frac{2x^3-1}{y} \qquad (vi)\,x^3\frac{dy}{dx}=2x^2y+y^3$$

$$(vii)\,\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x+y^3=0$$

$$(viii)\,2(1+x)y\frac{dy}{dx}+2x-3x^2+y^2=0$$

(١٢) أثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)$$

(١٣) اثبت أن $y=\frac{x+1}{x^2}$ حل خاص للمعادلات التفاضلية الآتية واوحد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{1}{x\,4}$$

(١٤) أثبت أن $y=x$ حل خاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام

$$(i)\,x\frac{dy}{dx}+(n-1)ax^n(y-x)^2+y-2x=0$$

$$(ii)\,\frac{dy}{dx}+xy^2-(2x^2+1)y+x^3+x-1=0$$

$$(iii)\,(x^2+a)\frac{dy}{dx}+2y^2-3xy-a=0$$

الفصل الاول

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا

درسنا في الباب الأول كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي وفي هذا الباب سوف ندرس كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات الأعلى و المعادلات التي سوف ندرسها يمكن تقسيمها الي

(١) معادلات قابلة للحل في p **(٢) معادلات قابلة للحل في** x

(٣) معادلات قابلة للحل في y

وكذلك سوف ندرس الحلول الشاذة لبعض المعادلات التي من درجة أعلي من الأولي.

(١) المعادلات القابلة للحل في p

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا هي:

$$L_0(\frac{dy}{dx})^n + L_1(\frac{dy}{dx})^{n-1} + ... + L_{n-1}\frac{dy}{dx} + L_n = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $L_0, L_1, ..., L_n$ دوال في x, y

نفرض أن $p = \frac{dy}{dx}$ المعادلة (١) تصبح علي الصورة

$$p^n + L_1 p^{n-1} + ... + L_{n-1}p + L_n = 0 \qquad (2)$$

الطرف الأيسر لهذه المعادلة عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n فاذا أمكن حلها بالنسبة إلي p علي الصورة.

$$(p-\varphi_1)(p-\varphi_2)......(p-\varphi_n) = 0$$

حيث $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ دوال في x, y

و هذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي.

$$p = \varphi_1, p = \varphi_2, ..., p = \varphi_n$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x, y), \quad ....., \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_n(x, y)$$

حلول هذه المعادلات يمكن فرضها علي الصورة

$$f_1(x, y, c_1) = 0, f_2(x, y, c_2) = 0, ..., f_n(x, y, c_n) = 0$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$f_1(x, y, c_1) f_2(x, y, c_2)....f_n(x, y, c_n) = 0 \qquad (3)$$

المعادلة (٣) تمثل مجموعات من المنحنيات

$$f_1(x, y, c_1) = 0, f_2(x, y, c_2) = 0, ..., f_n(x, y, c_n) = 0$$

إذا استبدلنا $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بالثابت الاختياري C ورسمنا المنحنيات

$$f_1(x,y,c)=0, f_2(x,y,c)=0, \ldots, f_n(x,y,c)=0$$

وجعلنا C تتغير من $-\infty$ إلي $+\infty$ فإننا نحصل علي نفس المنحنيات.

الحل العام للمعادلة (١) هو :

$$f_1(x,y,c) f_2(x,y,c) \ldots f_n(x,y,c)=0$$

وهو يحتوي علي ثابت اختياري واحد لآن المعادلة من الرتبة الأولي.

مثال (١) اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\cosh x + 1 = 0$$

الحل : بوضع $\frac{dy}{dx} = p$

$$p^2 - p(e^x + e^{-x}) + e^x e^{-x} = 0$$

بالتحليل

$$(p - e^x)(p - e^{-x}) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x}$$

$$y = e^x + c, \quad y = e^{-x} + c$$

هو الأصل التام للمعادلة هو

$$(y - e^x - c)(y + e^{-x} - c) = 0$$

مثال (٢) أوجد الحل المعادلة التفاضلية

$$p^2 - (x+y)p + xy = 0$$

(حيث $p = \frac{dy}{dx}$)

الحل : بالتحليل

$$(p-x)(p-y)=0 \qquad p = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$p = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \qquad y = c_2 e^x$$

يكون الحل العام هو

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 - c\right)(y - ce^x) = 0$$

(٢) المعادلات القابلة للحل في x

المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x تأخذ الصورة

$$x = f(y, p) \qquad (1)$$

$P = \frac{dy}{dx}$

حيث $p = \dfrac{dy}{dx}$

وبمفاضلة المعادلة (١) بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية في المتغيرين p , y فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$y = \psi(p, c) \qquad (2)$$

فإنه بالتعويض عن y في المعادلة (٢) نحصل علي

$$x = f(p, c) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة **(١)** ينتج بحذف p من المعادلتين **(٢)**، **(٣)** وإذا لم يمكن حذف p من المعادلتين فإن المعادلتين **(٢)**، **(٣)** تسميان بالمعادلات البارا مترية للحل.

مثال (١) حل المعادلة التفاضلية

$$x - y = 2ap - ap^2$$

الحل:

$$x = y + 2ap - ap^2 \qquad (1)$$

بالتفاضل بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{1}{p} = 1 + (2a - 2ap)\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \frac{1}{p}(1-p) = 2a(1-p)\frac{dp}{dy}$$

$$dy = 2ap\,dp$$

و منها نحصل علي

$$y = ap^2 + c \qquad (2)$$

وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة (١) نحصل علي

$$x = 2ap + c \qquad (3)$$

فلأخظ أن يمكن حذف p من المعادلة (٢)، (٣) وذلك كما يلي :

$$p^2 = \frac{y-c}{a} \quad , \quad p = \frac{x-c}{2a}$$

$$\frac{(x-a)^2}{4a^2} = \frac{y-c}{a}$$

$$(x-c)^2 = 4a(y-c)$$

وهي مجموعة من القطاعات المكافئة

مثال (٢) حل المعادلة التفاضلية

$$x = yp - p^2$$

حيث $p = \dfrac{dy}{dx}$

الحل : بالتفاضل بالنسبة إلي y

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy} \qquad \Rightarrow \frac{dp}{dy}(y-2p) = \frac{1}{p} - p$$

$$y - 2p = (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} \qquad \Rightarrow (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} - y = -2p$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}y = -\frac{2p^2}{1-p^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي، العامل المكامل لها

$$\mu(p) = e^{\int \frac{p}{p^2-1}dp} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2-1}dp} = e^{\ln\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$

$$\frac{d}{dp}(y\sqrt{p^2-1}) = \frac{-2p^2}{1-p^2}\sqrt{p^2-1} = \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp + c$$

و لإيجاد هذا التكامل نستخدم التعويض

$$p = \cosh\theta \qquad dp = \sinh\theta d\theta$$

$$\int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp = \int \frac{2\cosh^2\theta}{\sinh\theta} \,.\, \sinh\theta d\theta = \int 2\cosh^2\theta d\theta$$

$$= \int (1+\cosh 2\theta) d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$$

$$= \theta + \sinh\theta \cosh\theta$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \theta + \sinh\theta\cosh\theta + c$$

$$= \cosh^{-1} p + p\sqrt{p^2-1} + c$$

ومنها نجد

$$y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) \qquad (1)$$

بالتعويض عن y في المعادلة الأصلية

$$x = yp - p^2$$

$$= p^2 + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) - p^2$$

وتكون

$$x = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) \qquad (2)$$

المعادلتان (١)،(٢) تمثلان الحل البارا متري للمعادلة المطلوبة.

(٣) المعادلات القابلة للحل في y

المعادلات القابلة للحل في y يمكن كتابتها علي الصورة

$$y = f(x, p) \qquad (1)$$

بتفاضل بالنسبة إلي x

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

وهذه معادلة تفاضلية في x و p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$x = \phi(p, c) \qquad (2)$$

فأنه بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (١) نحصل علي

$$y = \psi(p, c) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة (١) ينتج بحذف p من المعادلتين (٢)، (٣) و إذا تغدر الحذف تسمي المعادلتين (٢)، (٣) بالمعادلات البارا مترية للحل.

مثال (١) حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$y = p + p^3 \qquad (1)$$

الحل

بالتفاضل بالنسبة إلي x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}(1+3p^2)$$

$$\int dx = \int \frac{1+3p^2}{p} dp + c$$

لذلك يكون

$$x = \ln p + \frac{3}{2} p^2 + c \qquad (2)$$

المعادلتين (١)،(٢) تمثل المعادلات البارا مترية للحل.

مثال (٢) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y = xp^2 + p \qquad (1)$$

الحل

بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$p(1-p) = (2xp+1)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{1}{p(1-p)}$$

وهذه معادلة خطية .

$$\mu(p) = e^{\int -\frac{2dp}{1-p}} = e^{2\ln(1-p)} = (1-p)^2$$

$$\frac{d}{dp}[x(1-p)^2] = \frac{1-p}{p}$$

وبالتكامل نحصل علي

$$x(1-p)^2 = \int \frac{1-p}{p} dp + c$$

$$x(1-p)^2 = \ln p - p + c$$

ويكون

$$x = \frac{\ln p - p + c}{(1-p)^2} + p \qquad (2)$$

بالتعويض من (٢) عن قيم X في (١) نحصل علي

$$y = \frac{p^2 \ln p - p^3 + p^2 c}{(1-p)^2} + p \qquad (3)$$

و المعادلتين (٢)، (٣) تمثلان الحل العام في الصورة البارا مترية.

(٤) معادلة كليروت +لاجرانج

معادلة كليروت تكون على الصورة

$$y = xp + f(p) \qquad (1)$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ بالتفاضل بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

أما $\frac{dp}{dx} = 0$ ومنها $p = c$ وبالتعويض في (١) نحصل علي

$$y = cx + f(c) \qquad (2)$$

وهى معادلة مجموعة من الخطوط المستقيمة

وأما

$$x + f'(p) = 0$$

ومنها

$$x = -f'(p) \qquad (3)$$

وبالتعويض في (١) عن x

$$y = -f'(p)p + f(p) \qquad (4)$$

بحذف p بين (٣) ، (٤) نحصل على علاقة بين (x, y) على الصورة الاتية

$$\phi(x, y) = 0 \qquad (5)$$

المعادلة (٥) تمثل حل أخر للمعادلة (١) وتكون المعادلتين (٣)، (٤) هما المعادلتين البارامتريتين لهذا الحل. المعادلة (٥) لا تحتوى على ثابت اختياري فهي حل خاص وعلى العموم لا يمكـن اسـتنتاج هذا الحل من الحل العام بوضع قيمة خاصة للثابت c .

الحل الخاص (٥) هو "حل شاذ " أو حل "مفرد" للمعادلة التفاضلية.

المعادلة (٢) تمثل الحل العام وهى معادلة مجموعة من المستقيمات ذات البارامتر c.

مثال(١) : أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية الأتية

$$y = xp + ap(1-p) \qquad (1)$$

الحل :

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (a - 2ap)\cancel{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + a - 2ap) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام للمعادلة هو

$$y = cx + ac - ac^2$$

أو

$$x + a - 2ap = 0 \qquad (2)$$

بحذف p من المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن

$$y = \frac{(x + a)^2}{4a}$$

أي أن

$$(x - a)^2 = 4ay$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف مجموعة المستقيمات المثلة بالحل العام.

مثال (٢) أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$$

الحل: بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dp}{dx}$$

بذلك يكون

$$[x + \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}]\frac{dp}{dx} = 0$$

منها يكون أما $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = xc + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} \qquad (2)$$

وهي تمثل مجموعة من المستقيمات.

أو

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

بالتعويض من (٣) في (١) عن قيمة x نجد أن

$$y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

المعادلتان (٣)، (٤) هما المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد وبحذف p بين (٣)، (٤) نحصل علي المعادلة الكارتيزية للحل المفرد من (٣) نجد أن

$$p^2 = (-\frac{a}{x})^{2/3}, \quad y = -xp^3$$

$$y^{2/3} = (-x)^{2/3} p^2 = (-x)^{2/3}[(-\frac{a}{x})^{2/3} - 1]$$

$$y^{2/3} = a^{2/3} - (-x)^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}$$

و يكون الحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

وهو غلاف مجموعة المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

مثال (٣) أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$$

الحل: نكتب المعادلة على الصورة

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y = p$$

$$\sin(px - y) = p$$

$$px - y = \sin^{-1} p$$

و بالتالي يكون

$$y = xp - \sin^{-1} p \qquad (1)$$

وهذه صورة معادلة كليروت.

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}] = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام هو

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

ومن الناحية الأخرى

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$p = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

بالتعويض في (١) نجد أن

$$y = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1} x^{-1}\sqrt{x^2-1}$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف المستقيمات.

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية من الرتب العليا

الصورة العامة للمعادلات التفاضلية من الرتب العليا هي

$$f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ولا يوجد حتى الأن طريقة مباشره لحل هذه المعادلة .

و سوف ندرس في الأبواب القادمة طرق لحل حالات خاصة من هذه المعادلات وهي التي تكون فيها المعادلة (١) خطية. و ايضا حتى في مثل هذه الحالات الخاصة لن نستطيع أن نحصل على طريقة مباشرة نوجد بها الحل العام لأى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n إلا في الحالات التي تكون فيها المعاملات مقادير ثابتة.

وسوف ندرس الأن بعض الحالات للمعادلة (١) التي يمكن فيها باستخدام تعويض مناسب تحويلها الى معادلة تفاضلية أخرى ذات رتبة أقل.

أولا : المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى على y بصورة صريحة

الصورة العامة لها هي

$$f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

وفى هذه الحالة فإن رتبة المعادلة يمكن أن تؤول الي $n-k$ وذلك بوضع $y^{(k)} = p$ المعادلة (١) تأخذ الصورة

$$f(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0 \qquad (2)$$

وهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة $(n-k)$ في المتغيرين x, p فإذا أمكن حلها على الصورة

$$p = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-k}) = 0 \qquad (3)$$

وبأجراء التكامل k من المرات للمعادلة (٣) نحصل على الحل العام للمعادلة (١).

مثال(١) حل المعادلة

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{1}{x}\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \qquad (1)$$

الحل

$$\text{let } \frac{d^3y}{dx^3} \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dp}{dx}$$

و بذلك تصبح المعادلة التفاضلية (١) على الصورة

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \ln p = \ln x + \ln c_1 \quad \Rightarrow p = c_1 x$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = cx \quad \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{c_1}{24} x^4 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 x + c_4$$

وهذا هو الحل العام.

مثال(٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$2x \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} = (\frac{dy}{dx})^2 - 1 \qquad (1)$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

المعادلة (١) تصبح على الصورة

$$2xp \frac{dp}{dx} = p^2 - 1 \Rightarrow \frac{pdp}{p^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(p^2 - 1) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln c_1$$

$$p^2 - 1 = c_1 x \quad \Rightarrow (\frac{dy}{dx})^2 = c_1 x + 1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1 x + 1}$$

$$y = \pm\int \sqrt{c_1 x + 1}\, dx \quad \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3c_1} (c_1 x + 1)^{3/2} + c_2$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (١)

$$9c_1^2 (y - c_2)^2 = 4(c_1 x + 1)^3$$

ثانيا: المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى x بصورة صريحة

هذه المعادلات تكون على الصورة.

$$f(y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

وباستخدام التعويض $y' = p$ يمكن تخفيض رتبة المعادلة كما يلى

$$\frac{dy}{dx} = p \ , \ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(p \frac{dp}{dy}) = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p (\frac{dp}{dy})^2$$

و هكذا بالنسبة لباقي المشتقات من الرتب الأعلى. بالتعويض عن قيم $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ فإن المعادلة (١) تصبح على الصورة

$$\phi(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}) = 0 \qquad (2)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-1)$ في المتغيرين y, p فإذا أمكن حل المعادلة (٢) وإيجاد p كدالة في y فإنه باستخدام الفرض $y' = p$ نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وبحلها نوجد y.

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأتية

$$y(y-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 = 0 \qquad (1)$$

الحل: نضع

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$y(y-1)p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad \Rightarrow y(y-1)\frac{dp}{dy} + p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y(y-1)} = -[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}]dy$$

$$\ln p = \ln\frac{y}{y-1} + \ln c_1 \quad \Rightarrow p = \frac{c_1 y}{y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{c_1 y}{y-1} \quad \Rightarrow \int\frac{y-1}{y}dy = \int c_1 dx$$

$$y - \ln y = c_1 x + c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة (١).

ملحوظة: إذا كانت المعادلة التفاضلية خالية من x, y فإن يمكن حل المعادلة بأخذ أحد التعويضين السابقين.

ولكن نلاحظ أن استخدام التعويض $y' = p,\ y'' = p\frac{dp}{dy}$ يكون أسهل في الحل.

مثال(٢): حل المعادلة التفاضلية

$$\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = m\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1)$$

الحل: سوف ندرس حل هذه المعادلة باعتبارها معادلة لا تحتوى على x بصورة صريحة (ويترك دراستها باعتبارها معادلة لا تحتوى على y بصورة صريحة كتمرين) .

باستخدام التعويض

$$\frac{dy}{dx}=p \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$\sqrt{1+p^2}=mp\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \int\frac{mpdp}{\sqrt{1+p^2}}=\int dy$$

$$m\sqrt{1+p^2}=y+c_1 \quad \Rightarrow 1+p^2=\frac{1}{m^2}(y+c_1)^2$$

$$p^2=\frac{(y+c_1)^2}{m^2}-1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{(y+c_1)^2-m^2}}{m}$$

$$\int\frac{mdy}{\sqrt{(y+c_1)^2-m^2}}=\pm\int dx \quad \Rightarrow m\cosh^{-1}(\frac{y+c_1}{m})=\pm(x+c_2)$$

$$y=m\cosh\frac{x+c_2}{m}-c_1$$

وهو الحل العام.

ثالثاً : المعادلات المتجانسة

تعريف : المعادلة التفاضلية تكون متجانسة إذا كانت كل حدودها من نفس البعد.

إذا اعتبرنا x, y من البعد الواحد فإن

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

و بالتالي فان $\frac{dy}{dx}$ من البعد صفر

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{dy}{dx}}{\Delta x}$$

المشتقة $\frac{d^2y}{dx^2}$ من البعد -1

وهكذا نلاحظ أن $\frac{d^3y}{dx^3}$ من البعد -2 ، $\frac{d^ny}{dx^n}$ تكون من البعد $(1-n)$

فمثلاً المعادلة التفاضلية

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 4x^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y^2 = 0$$

هي معادلة متجانسة من البعد ٢.

و المعادلة التفاضلية

$$(x^2 - 4xy)\frac{d^2y}{dx^2} + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

هي معادلة متجانسة من البعد ١.

و لحل المعادلات المتجانسة نعتبر الحالات الاتية

(ا) إذا كانت المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الصورة الأتية

$$\phi(x\frac{dy}{dx}, x^2\frac{d^2y}{dx^2}, ..., y) = 0 \qquad (1)$$

يمكن حل هذه المعادلة باستخدام التعويض $t = \ln x \text{ or } x = e^t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}.\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

وهكذا يمكن إيجاد بقية الحدود وبالتعويض تصبح المعادلة (١) على الصورة

$$\phi(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ...) = 0$$

هذه المعادلة لا تحتوى على t بصفة صريحة ويمكن حلها باستخدام التعويض

$$\frac{dy}{dt} = p, \; \frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{dp}{dy}$$

وبذلك يمكن تخفيض رتبة المعادلة بمقدار الواحد.

مثال(١) أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y(x^2\frac{d^2y}{dx^2}) + (\frac{dy}{dx})^2 = 3y(x\frac{dy}{dx}) \qquad (2)$$

الحل: هذه المعادلة متجانسة وتكون على الصورة

$$f\left(y, x\frac{dy}{dx}, x^2\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

باستخدام التعويض $x = e^t$ نجد أن

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

و بالتالي المعادلة (٢) تصبح على الصورة

$$y\frac{d^2y}{dt^2} - 4y\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0 \qquad (3)$$

بوضع

$$\frac{dy}{dt} = p, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{dp}{dy}$$

تصبح المعادلة (٣) علي الصورة

$$yp\frac{dp}{dy} - 4yp + p^2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = 4$$

وهذه معادلة خطية يكون عاملها المكامل هو

$$\mu(y) = e^{\int\frac{dy}{y}} = y \quad \Rightarrow \frac{d}{dy}(py) = 4y \quad \Rightarrow yp = 2y^2 + c_1$$

$$p = 2y + \frac{c_1}{y} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{4y\,dy}{2y^2 + c_1} = \int dt + \ln c_2 \quad \Rightarrow \frac{1}{4}\ln(2y^2 + c_1) = \ln x + \ln c_2,$$

$$\sqrt[4]{2y^2 + c_1} = xc_2 \quad \Rightarrow 2y^2 + c_1 = x^4c_2^4 \quad \Rightarrow y^2 = \frac{x^4c_2^4}{2} - \frac{c_1}{2}$$

وهو الحل العام

(ب) إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}, x\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0 \qquad (4)$$

أي تكون هذه المعادلة متجانسة من البعد صفر.

وفى هذه الحالة نضع $y = zx, \; x = e^t$

فيكون

$$\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx} \quad \text{and} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dz}{dx}+x\frac{d^2z}{dx^2}$$

ولكن

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt}, \quad x^2\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dt}, \qquad (5)$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=2x\frac{dz}{dx}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}=2\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt} \qquad (6)$$

وبالتعويض عن (٥)، (٦) تتحول المعادلة (٤) الى الصورة

$$\phi(z,\frac{dz}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},.....)=0$$

وهى معادلة خالية من t ويمكن حلها كما سبق.

مثال(٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الأتية

$$(x^2+y^2)(y-xy')+x^2y^2y''=0 \qquad (7)$$

الحل : بالقسمة علي x^3 نجد أن

$$(1+\frac{y^2}{x^2})(\frac{y}{x}-y')+\frac{y^2}{x^2}xy''=0$$

بوضع

$$y=zx,\ x=e^t$$

تتحول المعادلة التفاضلية (٧) الى الصورة

$$(1+z^2)(z-z-\frac{dz}{dt})+z^2(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt})=0$$

$$-\frac{dz}{dt}-z^2\frac{dz}{dt}+z^2\frac{d^2z}{dt^2}+z^2\frac{dz}{dt}=0$$

$$z^2\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dz}{dt} \qquad (8)$$

بوضع

$$\frac{dz}{dt}=p \quad , \frac{d^2z}{dt^2}=p\frac{dp}{dz}$$

تتحول المعادلة التفاضلية (٨)

$$z^2p\frac{dp}{dt}=p \qquad \Rightarrow \int dp=\int\frac{dz}{z^2}$$

$$p=\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{a}=\frac{z-a}{az}$$

$$\int\frac{az\,dz}{z-a}=\int dt \qquad \Rightarrow t-\ln b=a\int[1+\frac{a}{z-a}]dz=az+a^2\ln(z-a)$$

$$\mathrm{t=az+a^2ln(z-a)+lnb} \qquad \Rightarrow \mathrm{lnx=a}\frac{y}{x}+a^2\ln(\frac{y}{x}-a)+\ln b$$

و يكون

$$x=b(\frac{y}{x}-a)^{a^2}e^{a\frac{y}{x}}$$

وهو الحل العام

ثانياً

رابعاً: المعادلات التفاضلية يمكن كتابتها علي صورة مشتقة لمقدار تفاضلي اقل من رتبة المعادلة بمقدار الوحدة

الطرف الأيسر للمعادلة

$$f(x,y,y',y'',\ldots\ldots,y^{(n)})=0 \qquad\qquad (1)$$

هو عبارة عن مشتقة لمقدار تفاضلي ما من الرتبة $(n-1)$ وليكن مثلاً:

$$\phi=\phi(c,x,y,y',\ldots\ldots,y^{(n-1)})$$

هنا يمكن كتابة المعادلة (١) علي الصورة $\frac{d\phi}{dx}=0$ ومنها $\phi=c$

مثال(١) حل المعادلة التفاضلية

$$yy''+y'^2=0$$

الحل: هذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة

$$d(yy')=0$$

ومنها يكون

$$yy'=c$$

$$y^2=c_1x+c_2$$

ملحوظة : أحيانا للحصول على دالة مشتقتها تساوى الطرف الأيسر للمعادلة فإن ذلك لا يتحقق إلا بعد ضرب طرفي المعادلة في دالة ما.

مثال(٢) حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' = y'^2$$

الحل : بالقسمة على yy' نحصل على

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \Rightarrow \int \frac{y''}{y'} = \int \frac{y'}{y} \Rightarrow \ln y' = \ln y + \ln c$$

$$y' = yc \Rightarrow \frac{dy}{dx} = yc$$

$$\frac{dy}{y} = cdx \Rightarrow \ln y = cx + c_1$$

$$y = e^{cx + c_1} = c_1 e^{cx}$$

وهو الحل العام

مثال (٣) حل المعادلة التفاضلية الاتية:

$$y'y''' = 2y''^2$$

الحل: بالقسمة على $y'y''$ نحصل على

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'} \Rightarrow \int \frac{y'''}{y''} = 2\int \frac{y''}{y'}$$

$$\ln y'' = 2\ln y' + \ln c \Rightarrow y'' = cy'^2$$

وبوضع $y' = p$

$$\frac{dp}{dx} = cp^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = cdx \Rightarrow -\frac{1}{p} = cx + c_1$$

$$p = -\frac{1}{cx + c_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$y = \frac{1}{c}\ln(cx + c_1) + c_2$$

وهو الحل العام.

تمارين (٢)

(١) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية بحلها بالنسبة إلى $p = \frac{dy}{dx}, p$

$(i)\ y^2p^2 - 3xyp + 2x^2 = 0$
$(ii)\ p^2 - (xy + 2x)p + 2x^2y = 0$
$(iii)\ p^2 - p - 6 = 0$
$(iv)\ p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$
$(v)\ p^2 - 2\cos x - 1 = 0$
$(vi)\ x + yp^2 = p(1 + xy)$

(٢) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في x

$(i)\ x = 4p + 4p^3$
$(ii)\ p^2 - 2xp + 1 = 0$
$(iii)\ 2y + p^2 + 2p = 2x(p + 1)$
$(iv)\ p = \tan(x - \frac{p}{1 + p^2})$
$(v)\ p^3 - p(y + 3) + x = 0$

(٣) أوجد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في y

$(i)\ y = xp^2 + p \quad (ii)\ y = x + p^3 \quad (iii)\ p^2 + p = e$
$(iv)\ y = p\sin p + \cos p \quad (v)\ y = p\tan p + \log\cos p$
$(vi)\ e^{p-y} = p^2 - 1$

(٤) أوجد الحل العام والحل المفرد لمعادلة كليروت التفاضلية لكل من المعادلات الآتية

$(i) y = xp + p^2 \quad (ii) y = xp + p^3 \quad (iii) y = xp + \cos p$
$(iv) y = xp + \sqrt{a^2p^2 + b^2} \quad (v) p = \log(xp - y)$
$(vi) \cosh xp \cosh y = \sinh px \sinh y + p \quad (vii) y = xp + \frac{p}{p + 1}$
$(viii) y = xp + \sqrt{p^2 - 1} \quad (ix) y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$
$(x) y = xp + \sqrt{p^2 + 1} - p\log(p + \sqrt{p^2 + 1})$

(٥) حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من y

$(i) 2xy'y'' = y'^2 - 1 \qquad (ii) x^2y'' = y'^2$

$(iii) y''^2 + y' = xy'' \qquad (iv) y'' \cos ecx = 1$

$(v) x(a-x)y'' + 2(1-x)y' = 1 \quad (vi) y^{(n)} - 2y^{(n-1)} = e^x$

(٦) حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من x

$(i)\ yy'' = y'^2y'' \qquad (ii)\ y'^2 - (3y - 2y')y'' = 0$

$(iii)\ yy'' + 1 = y'^2 \qquad (iv)\ y'' + y'^2 = 1$

$(v)\ 2yy'' = y'^2 \qquad (vi)\ yy'' = y'^2 - y'^3$

$(vii)\ yy'' + y'^2 + 2ay^2 = 0$

(٧) حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الأتية

$(i)\ xy'' - xy' + y = 0 \qquad (ii)\ x^2y'' - xy' + 5y = 0$

$(iii)\ 2x^2yy'' + y^2 = x^2y'^2 \qquad (iv)\ (2yy'' - y'^2)x^2 + y^2 = 0$

الفصل الاول

دوال جـاما وبيتـا

Gamma and Beta Functions

مقـدمة:

في القرن الثامن عشر، تحدث العالم الألماني أويلر (١٧٠٧–١٧٨٣) عن وجود مشكلة عند وضع الأرقام السالبة بالنسبة لدالة المضروب **factorial function** الذي عرفها في الصورة

$$n! = \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, t^{n}\, dt; \quad n = 0,1,2,... \qquad (1.1)$$

هذه المشكلة أدت بالعالم أويلر **"Euler"** عام ١٧٢٩م الي تعريف دالة جاما كتعميم لدالة المضروب ليعطي **x!** عندما **x** يكون اي رقم موجب ويمكن تمديد ذلك النتيجة ببعض الأرقام السالبة، ثم وسع هذا النطاق لدالة جاما بحيث تكون معرفة عند جميع الأعداد المركبة باستثناء الأعداد الصحيحة السالبة وذلك تم تقديمه في ١٨٠٩م بواسطة العالم الفرنسي لا جندر **"Legendre"** (١٧٥٢–١٨٣٣)، الذي كان مسؤلاً أيضا عن تعريف صيغة التضعيف لدالة جاما **Legendre Duplication Formula** وبعد١٥٠ عاما تقريباً من اكتشاف أويلر، قدم العالم فيرشتراس **"Weierstrass"** (١٨١٥–١٨٩٧) نظرية تتعلق بدالة جاما وذلك خلال دراسته للدوال الشاملة ذات المتغير المركب، ومن ثم عرفت صيغة جديدة لدالة جاما سميت بصيغة فيرشتراس.

ولأن دالة جاما هي تعميم لدالة المضروب لذلك تظهر كوسيلة لتعميم دوال معينة كان يتم تعريفها من خلال دالة المضروب، وتستخدم في حلول عديد من التكاملات التي كان يصعب ايجادها من قبل، كما تظهر دالة جاما في العديد من دوال التوزيعات الاحتمالية، مما يجعلها مهمة في مجالات الاحتمال والإحصاء و كثير من العلوم الطبيعية و الهندسية. وينطبق نفس الأهتمام علي دالة بيتا التي عرفها أويلر بعد ثلاثة وأربعين عاما من أكتشافه لدالة جاما بأنها مزيج معين من دالة جاما. ثم عرفت دوال اخري مرتبطة بدالة جاما من أشهرها علي سبيل دوال مكملة جاما **Incomplete Gamma functions** ودالة التـفاضل اللوغـارتمي لـدالة جاما **logarithmic derivative of the gamma function** ودالة ريمان زيتا **Riemann zeta function**.

وفي هذا الباب سوف نعرف الصيغ المختلفة لدالة جاما ونوضح عديد من خصائصها بالبراهين، وكذلك سوف نعرف دالة بيتا ومدي ارتباطها بدالة جاما مع ذكر بعض الخصائص الهامة لها، ثم نعطي كثير من الأمثلة التي توضح أهمية تلك الدوال ومدي الأستفادة منها في أيجاد حلول لمسائل كان يصعب حلها من قبل.

دالة جاما Gamma Function

تتميز دالة جاما بعدة أشكال يمكن الانتقال من شكل إلى آخر منها بإثباتات رياضية وسوف نوضح ذلك كما يلي:

صيغة أويلر من النوع الأول Euler Form of The first Kind

وتعرف هذه الصيغة بدالة جاما كنهاية حاصل ضرب ويرمز لها بالرمز $\Gamma(t)$ وتعطي في الصورة الأتية:-

$$\Gamma(t) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1.2.3...n}{t(t+1)(t+2)...(t+n)}.n^t = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\ n^t}{\prod\limits_{k=0}^{n}(t+k)} \qquad (1.2)$$

وتوضح هذه الصيغة النقاط الشاذة لدالة جاما حيث $t \neq 0, -1, -2, -3, ...$.

وقد عدلت هذه الصيغة بواسطة العالم جاوس **Gauss** (١٧٧٧-١٨٥٥) لتصبح في الشكل التالي:

$$\Gamma(t) = \frac{1}{t} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^t \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-1} \right] \qquad (1.3)$$

صيغة أويلر من النوع الثاني Euler Form of The Second Kind

تعتبر هذه الصيغة من أشهر الصيغ لدالة جاما والتي تفيد كثيراً في استنتاج خواصها وتعرف دالة جاما هنا بالرمز $\Gamma(x)$ علي أنها التكامل المعتل (تكامل أويلر) المعطي في الشكل الاتي:

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1} dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-t}\, t^{x-1} dt\ ; \quad x > 0. \qquad (1.4)$$

وهذا التكامل تقاربي (**Convergent Integral**) لكل قيم $x > 0$ ، بمعني أنه يعطي قيم حقيقية وليس مالانهاية لكل $x > 0$ بشرط وجود النهاية في المعادلة السابقة. أذن فأن دالة جاما تكون ايضاً تقاربية لكل $x > 0$ وتباعديه لكل $x < 0$

صيغة فيرشتراس لدالة جاما Weierstrass Infinite Product Form

عرفت دالة جاما كحاصل الضرب اللانهائي بواسطة العالم فيرشتراس في الصورة الأتية:-

$$\Gamma(x) \equiv \left[x\, e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \right]^{-1} ; \quad x > 0. \qquad (1.5)$$

حيث γ يسمي بثابت أويلر-ماسكيروني **Euler-Mascheroni constant** . ويعرف في الصورة الأتية:-

$$\gamma = \lim_{n \to \infty}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right] \simeq 0.577$$

والأن سوف نثبت أن صيغ دالة جاما الثلاثة السابقة متكافئة لجميع قيم **x** ماعدا عند الأعداد الصحيحة السالبة والصفر:

<u>البرهان</u>:-

والأن سوف نثبت صيغة أويلر من النوع الأول لدالة جاما عن طريق تكامل أويلر حيث أن

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1} dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-t}\, t^{x-1} dt\,; \quad x > 0 \qquad (1.6)$$

وبالتعبير عن الدالة الأسية بالنهاية الأتية

$$e^{-t} = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \qquad (1.7)$$

بالتعويض من (**1.7**) في (**1.6**) نحصل علي

$$\therefore \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} t^{x-1} dt$$

بوضع $z = \frac{t}{n} \Rightarrow dt = n\,dz$ ينتج

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^{1} (1-z)^{n} (nz)^{x-1}\, n\,dz$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^{1} (1-z)^{n} n^{x-1} z^{x-1}\, n\,dz \qquad (1.8)$$

$$= \lim_{n \to \infty} n^{x} \int_0^{1} (1-z)^{n} z^{x-1}\, dz = \lim_{n \to \infty} n^{x}\, \mathrm{T}_{n}$$

وحيث ان هذا التكامل في المعادلة الأخيرة يمثل **n** من التكاملات فبأستخدام التكامل بالتجزئ عدة مرات نحصل علي

$$\mathrm{T}_n = \int_0^1 (1-z)^n z^{x-1}\, dz = \frac{1}{x}\int_0^1 (1-z)^n dz^x$$

$$= \frac{1}{x}\Big[(1-z)^n z^x\Big]_0^1 - \frac{1}{x}\int_0^1 z^x d(1-z)^n$$

$$= \frac{n}{x}\mathrm{T}_{n-1} = \frac{n}{x}\int_0^1 (1-z)^{n-1} z^x\, dz$$

$$\therefore \mathrm{T}_n = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}\mathrm{T}_{n-2} = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}\int_0^1 (1-z)^{n-2} z^{x+1}\, dz$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}\int_0^1 z^{x+n-1}\, dz$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}\left[\frac{z^{x+n}}{x+n}\right]_0^1 \tag{1.9}$$

$$= \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

بالتعويض من (1.9) في (1.8) نحصل علي

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\; n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\; n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$$

$$= \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]; \qquad x>0.$$

وهذه تسمي صيغة أويلر من النوع الأول لدالة جاما بعد تعديل جاوس لها وهي صحيحة لجميع قيم X ماعد عند $x = 0, -1, -2, -3, \dots$

والأن سوف نثبت صيغة فيرشتراس لدالة جاما من خلال صيغة أويلر من النوع الأول حيث أن

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1.2.3....n.n^{x}}{x(x+1)(x+2)(x+3)...(x+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[x^{-1}\left(1+\frac{x}{1}\right)^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}....\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}n^{x}\right]$$

$$\therefore\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\left[x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right).....\left(1+\frac{x}{n}\right).e^{-x\ln n}\right]$$

$$=x\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k}).e^{-x\ln n}$$

وبضرب وقسمة المعادلة السابقة بواسطة المقدار

$$\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)x\right]=\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{x}{k}}$$

نحصل علي النتيجة المطلوبة كما يلي:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=x\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k}).e^{-x\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[x\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x/2}...\left(1+\frac{x}{n}\right).e^{-x/n}e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right).x}]$$

$$\therefore\Gamma(x)\equiv\left[x\,e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right]^{-1};\qquad x>0.\qquad(1.10)$$

وهذه هي صيغة دالة جاما لحاصل الضرب اللانهائي للعالم فرشتراس وهي ايضا صحيحة لجميع قيم **X** ماعد عند $x=0,-1,-2,-3,...$.

وبهذا يتضح لنا تكافئ ااالصيغ المختلفة لدالة جاما وكيفية الوصول من تعريف لأخر عن طريق الأثباتات الرياضية.

والأن علينا توضيح الصفات النوعية والخصائص التي تتميز بها دالة جاما عن غيرها من الدوال الأخرى وذلك من خلال الخصائص التالية:

خصائص دالة جاما Properties of Gamma Function

الخاصية١:

$$\boxed{\Gamma(1)=1}$$

البرهان: من الصيغة الثانية لدالة جاما بوضع $x=1$ نحصل علي

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{1-1}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty=1$$

الخاصية٢: خاصية الأختزال لدالة جاما **Recurrence Formula**

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x);\qquad x>0.}$$

البرهان: بأستخدام تكامل أويلر لدالة جاما نحصل علي

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x}\,dt=-\int_0^\infty t^{n}d\,e^{-t}$$

بتطبيق التكامل بالتجزئ ينتج الأتي

$$\Gamma(x+1)=-\Big[e^{-t}\,t^{x}\Big]_0^\infty+x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

$$=x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt=x\,\Gamma(x)$$

تعتبر هذه الخاصية من الخصائص الهامة لدالة جاما حيث تفيد في إيجاد قيم دالة جاما عندما $x<0$ بشرط أن $x\neq-1,-2,-3,\ldots$ وذلك بوضعها في الصورة الأتية:

$$\boxed{\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}; \quad \forall\ x<0, \quad x\neq -1,-2,-3,\ldots \qquad (1.11)}$$

وبذلك يكون لدينا علي سبيل المثال

$$\Gamma(-\frac{1}{2})=\frac{1}{(\frac{-1}{2})}\Gamma(\frac{-1}{2}+1)=-2\Gamma(\frac{1}{2})$$

أيضاً نري أن

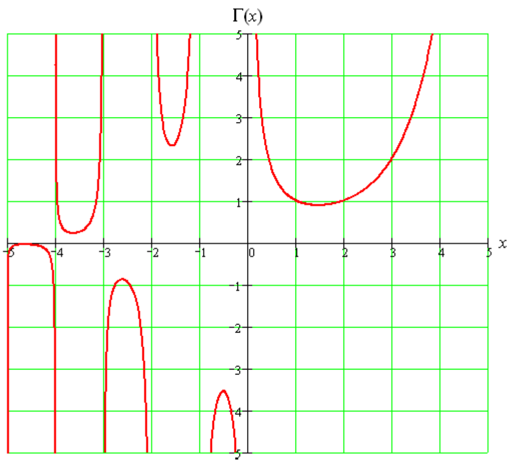
$$\Gamma(-\frac{5}{2})=\frac{1}{(\frac{-5}{2})}\Gamma(\frac{-5}{2}+1)=-\frac{2}{5}\Gamma(\frac{-3}{2})$$
$$=-\frac{2}{5}(\frac{1}{\frac{-3}{2}})\ \Gamma(\frac{-3}{2}+1)=\frac{4}{15}\Gamma(-\frac{1}{2})$$

وكذلك نجد أن $\Gamma(x)\to\infty$ عندما $x\to 0$ حيث أن

$$x=0:\ \Gamma(0)=\frac{\Gamma(1)}{0}=\infty, \qquad x=-1:\Gamma(-1)=\frac{\Gamma(0)}{-1}=\infty,$$
$$x=-2:\ \Gamma(-2)=\frac{\Gamma(-1)}{-2}=\infty, \quad x=-3:\Gamma(-3)=\frac{\Gamma(-2)}{-3}=\infty$$

ملحوظة:

يجب التأكيد علي أن قيم دالة جاما لقيم **x** السالبة لاتستنتج من الصيغة التكاملية لدالة جاما وتحسب قيم $\Gamma(x)$ من العلاقة (**1.11**) لقيم **x** الكسرية السالبة. وبصورة عامة يمكن أعطاء رسماً بيانياً يوضح قيم $\Gamma(x)$ لقيم **x** الموجبة والسالبة كما يلي:



الخاصية٣: خاصية دالة المضروب **Factorial Function**

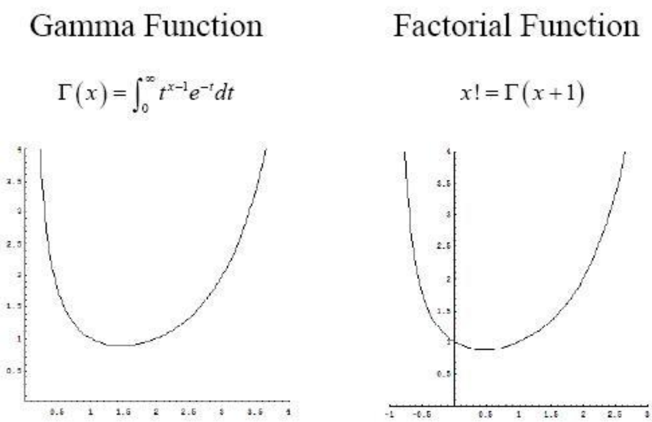
$$\boxed{\Gamma(x+1)=x!; \quad x>-1}$$

البرهان: بأستخدام الخاصية ٢ مع التكرار نحصل علي

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)=x(x-1)\Gamma(x-1)$$
$$=x(x-1)(x-2)......3.2.1.\Gamma(1)$$
$$\therefore\ \Gamma(x+1)=x! \qquad (1.12)$$

العلاقة (**1.12**) تعرف بدالة المضروب **(the factorial function for all x>-1)** ودالة جاما

تعتبر هنا كتعميم لمفهوم دالة المضروب النوني والشكل الأتي يبين الفرق بينهم



وبناءا على العلاقة **(1.12)** فانه عندما **x=0** فأن

$$\Gamma(0+1)=0!=\Gamma(1)=1$$

ونعرف هنا دالة باي لجاوس **Gauss's pi function** كما يلي:

$$\Pi(x)=\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$$
$$=x.(x-1)!=x!$$

ملحوظة:- يمكن أثبات الخصائص السابقة بأستخدام صيغة أويلر من النوع الأول

الخاصية٤ :

$$\boxed{\Gamma(x)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2x-1}\,dt}$$

<u>البرهان:</u> بوضع $t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$ في العلاقة (**1.4**) نحصل علي

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} (u^2)^{x-1}.2u\,du = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du \qquad (1.13)$$

<u>الخاصيةه :</u>

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

<u>البرهان:</u> من العلاقة **(1.13)** نحصل علي

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

ولأن متغير التكامل **u** هو متغير حر (**Dummy Variable**)، أذن يمكن استبداله بالمتغير **v**، وعلي ذلك يمكن أعتبار أن

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv$$

وبالتالي نجد أن

$$\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du\,dv$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية

$$u = r\cos\theta,\ \ v = r\sin\theta;\ \ dudv = rdr\,d\theta$$

نحصل علي

$$\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}.r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,dr^2\right] d\theta = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

وهكذا نجد أن

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad (1.14)$$

ومن ذلك نستنتج ان

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \qquad (1.15)$$

الخاصية ٦ :

$$\boxed{\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta \quad ,x>0, y>0.}$$

البرهان: من العلاقة (**1.13**) نحصل علي

$$\because \Gamma(x) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du, \quad \Gamma(y) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-v^2} v^{2y-1} dv$$

$$\therefore \Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u^{2x-1} v^{2y-1} e^{-(u^2+v^2)} du\, dv$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\sin\theta; \quad dudv = rdr\, d\theta$$

نحصل علي

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} r^{2x-1}\cos^{2x-1}\theta \; r^{2y-1}\sin^{2y-1}\theta \; e^{-r^2} rdrd\theta$$

$$= 4\int_{0}^{\infty} r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$= 2\left(2\int_{0}^{\infty} r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\Gamma(x+y)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$\therefore \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta; \quad x>0, \quad y>0.$$

<u>الخاصية٧ :</u> **قاعدة التضعيف لدالة جاما**

***Duplication formula* of gamma function**

$$\boxed{2^{2x-1}\,\Gamma(x)\;\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)}$$

<u>البرهان:</u> من الخاصية ٦ بوضع $x=y$ نحصل علي

$$\therefore\ \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{2\Gamma(x+x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2x-1}\theta\,d\theta$$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{2\Gamma(2x)}=2^{1-2x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\ 2\theta\,d\theta$$

بو ضع $\Phi=2\theta \Rightarrow d\Phi=2d\theta$ نجد أن

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{2\Gamma(2x)}=2^{-2x}\int_0^{\pi}\sin^{2x-1}\Phi\ d\Phi$$

$$\because\ 2^{1-2x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\Phi\,d\Phi=\frac{2^{1-2x}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{2\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore\frac{\cancel{\Gamma}(x)\Gamma(x)}{\cancel{2}\,\Gamma(2x)}=\frac{2^{1-2x}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cancel{\Gamma}(x)}{\cancel{2}\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

وحيث أن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ فأن

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(x)\;\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\qquad(1.16)$$

وحيث أن **x** عدد صحيح غير سالب فيمكن كتابة العلاقة (**1.16**) في الصورة

$$(2x-1)!=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,(x-1)!\;\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$2x\,(2x-1)!=\frac{2^{2x-1}\,2}{\sqrt{\pi}}x\,(x-1)!\;\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$(2x)!=\frac{2^{2x}}{\sqrt{\pi}}\,x\,!\;\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2x)!}{x\,!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x}} \qquad (1.17)$$

الخاصية ٨ : خاصية الأنعكاس لدالة جاما

Reflection property of gamma function

$$\boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}}$$

البرهان: بأستخدام تعريف العالم فيرشترس لدالة جاما نجد أن

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-x)}=\left[x\,e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right]\left[-x\,e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{x/n}\right]$$

$$=-x^{2}e^{\gamma x}\,e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{x/n}=-x^{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^{2}}{n^{2}}\right)$$

و من الخاصية ٢ يمكننا كتابة

$$\Gamma(-x)=-\frac{\Gamma(1-x)}{x}$$

$$\therefore \frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{\cancel{-}x}{\Gamma(1-x)} = \cancel{-}x\,\cancel{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-x)} = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

وحيث أن

$$\sin(n\pi) = \pi n\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2}{k^2}\right)$$

نحصل علي

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{\sin\pi x}{\pi}$$

$$\therefore \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}; \quad x \neq 0,-1,-2,\ldots$$

<u>الخاصية ٩ :</u> خاصية التقريب لدالة جاما ***Sterling's formula***

إذا كانت x كبيرة فأن الصعوبة الحسابية الكامنة في الحساب المباشر للقيمة $\Gamma(x)$ تكون ظاهرة، وكنتيجة مفيدة في مثل هذه الحالة نعطي العلاقةالأتية:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\; x^{x}\, e^{-x}\, e^{\theta/12(x+1)}; \quad 0<\theta<1,$$

ولقيم **X** الكبيرة بدرجة كافية يكون $e^{\theta/12(x+1)} \simeq 1$ وبذلك نحصل علي

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x! \simeq \sqrt{2\pi x}\; x^{x}\, e^{-x}}$$

وهذه الصيغة تسمي صيغة سترالنج **Sterling's form**

<u>البرهان:</u>

$$\because\ \Gamma(x+1)=\int_{0}^{\infty} t^{x}\ e^{-t}\,dt=\int_{0}^{\infty} e^{x\ln t-t}\ dt$$

وحيث أن الدالة $x\ln t-t$ لها قيمة عظمي نسبية عندما $x=t$ ، بالتعويض $t=x+u$ نحصل علي

$$\Gamma(x+1)=e^{-x}\int_{-x}^{\infty} e^{x\ln(x+u)-u}\ du$$

$$=e^{-x}\int_{-x}^{\infty} e^{x\ln(x+u)-u}\ du$$

$$=e^{-x}\int_{-x}^{\infty} e^{x\ln x+x\ln(1+\frac{u}{x})-u}\ du$$

$$=\ x^{x}\ e^{-x}\int_{-x}^{\infty} e^{x\ln(1+\frac{u}{x})-u}\ du$$

وحيث أن

$$\ln(1+\frac{u}{x})=\frac{u}{x}-\frac{1}{2}(\frac{u}{x})^{2}+\frac{1}{3}(\frac{u}{x})^{3}-\ldots$$

فأننا نجد أن

$$\Gamma(x+1)=\ x^{x}\ e^{-x}\int_{-x}^{\infty} e^{-u^{2}/2x+u^{3}/3x-\ldots}\ du$$

$$=x^{x}\ e^{-x}\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{-v^{2}/2+u^{3}/3\sqrt{x}-\ldots}\ dv$$

ولقيم **x** الكبيرة بدرجة كافية يكون لدينا الاتي:

$$\Gamma(x+1)=x^{x}\ e^{-x}\sqrt{x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{2}/2}\ dv$$

ومن العلاقة (**1.15**) نحصل علي

$$\Gamma(x+1) = x^{x}\ e^{-x}\ \sqrt{x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{2}/2}\ dv$$

$$= \sqrt{2\pi x}\ \ x^{x}\ e^{-x}$$

$$\therefore\ x! \approx \sqrt{2\pi x}\ \ x^{x}\ e^{-x}$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi}\ \ x^{x+\frac{1}{2}}\ e^{-x}$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\ \ (\frac{x}{e})^{x}$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi e}\ \ (\frac{x}{e})^{x+\frac{1}{2}}$$

Or

$$x! = x(x-1)(x-2)\ldots 3.2.1$$

$$\ln x! = \ln x + \ln(x-1) + \ln(x-2) + \ldots$$

$$\ln x! \approx x\ln x - x + O(\ln x)$$

أمثلة:

أوجد القيم الأتية:-

$$(i)\ \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$$

$$(ii)\ \Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}.\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$(iii)\ \Gamma(\frac{7}{3})\Gamma(\frac{5}{3}) = \left[\frac{4}{3}.\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})\right].\left[\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\right] = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}.\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{2}{3})$$

$$\because \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \Gamma(\frac{7}{3})\Gamma(\frac{5}{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{81}\pi$$

$$(iv)\ \Gamma(\frac{5}{6})\left[\Gamma(\frac{1}{3})\right]^2$$

باستخدام الخاصية ٧ بوضع $x=\frac{1}{3}$ نحصل علي

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2^{\frac{-1}{3}}}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\ \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2^{\frac{-1}{3}}}{\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2\ \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\sqrt{\pi}\ \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=2^{\frac{-1}{3}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2\ \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\sqrt{\pi}\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}=2^{\frac{-1}{3}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2\ \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\therefore\ \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2=2\sqrt[3]{2}\ \sqrt{\frac{\pi^3}{3}}$$

أحسب قيم التكاملات الأتية:

$$(i)\int_0^\infty t^4 e^{-t}\,dt \qquad (ii)\int_0^\infty t^3 e^{-2t}\,dt \qquad (iii)\int_0^\infty \sqrt{t}\,e^{-t^3}\,dt \qquad (iv)\int_0^\infty 2^{-3t^2}\,dt$$

$$(v)\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\ln t}} \qquad (vi)\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)^3 dt \qquad (vii)\int_0^\infty e^{-\sqrt[3]{y}}\,dy \qquad (viii)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{1}{2}}\theta\,d\theta$$

<u>الحـل:–</u>(i) بأستخدام العلاقة (1.4)

والخاصية٢ نحصل علي

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t}\,dt=\Gamma(5)=4!=24$$

(ii) بأستخدام العلاقة (1.14) وبوضع $2t = x$ نحصل علي

$$\int_0^\infty t^3 e^{-2t}\, dt = \frac{1}{2^4}\Gamma(4) = \frac{1}{16}3! = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(iii) بأستخدام العلاقة (1.4) وبوضع $t^3 = u$ فأن

$$3t^2 dt = du \;\rightarrow dt = \frac{1}{3}t^{-2}\, du \rightarrow dt = \frac{1}{3}u^{-2/3}\, du$$

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t^3}\, dt = \int_0^\infty u^{1/6} e^{-u}\, \frac{1}{3}u^{-2/3}\, du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty u^{-1/2}\, e^{-u}\, du = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

(iv)

$$\int_0^\infty 2^{-3t^2}\, dt = \int_0^\infty \left(e^{\ln 2}\right)^{-3t^2} dt = \int_0^\infty e^{-(3\ln 2)t^2} dt$$

بوضع $3\ln 2 = a, \quad at^2 = z$ فأن $2at\, dt = dz$ يصبح التكامل في الصورة

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^\infty z^{-1/2} e^{-z}\, dz = \frac{1}{2\sqrt{a}}.\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\therefore \int_0^\infty 2^{-3t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3\ln 2}}$$

(v) بفرض $-\ln t = u, \;\Rightarrow t = e^{-u}$ نحصل علي

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\ln t}} = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u}\, du = \sqrt{\pi}$$

(vi) بوضع $u = e^{-t} \Rightarrow \ln \frac{1}{u} = t \Rightarrow dt = -\frac{du}{u}$ في التكامل (1.4) نحصل علي

$$\Gamma(x) = -\int_1^0 u\,(\ln \frac{1}{u})^{x-1}\,\frac{du}{u} = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u}\right)^{x-1} du$$

وبتطبيق العلاقة السابقة نجد أن

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)^3 dt = \Gamma(4) = 3! = 6$$

(vii) بوضع

$t^x = y \Rightarrow t = y^{1/x} \Rightarrow dt = \frac{1}{x} y^{-1+1/x} dy$ في تكامل أويلر من النوع الثاني نجد

أن

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt = \int_0^\infty e^{-y^{1/x}} \left(y^{1/x}\right)^{x-1} . \frac{1}{x} y^{-1+1/x} dy$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-y^{1/x}}\, dy$$

$$\therefore\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y^{1/x}}\, dy$$

وبتطبيق العلاقة السابقة نجد أن

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt[3]{y}} dy = 3\Gamma(3) = 6$$

(viii) بأستخدام الخاصية ٦ والخاصية ٨ نحصل علي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{1}{2}}\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta \ \cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

دالة بيتا Beta Function

تعرف دالة بيتا، ويرمز لها بالرمز $B(x,y)$ علي أنها التكامل المعتل

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ ; \quad x>0,\ y>0 \qquad (1.18)$$

والذي يعرف أيضاً – تكامل أويلر من النوع الأول (**Euler integral of the first kind**)

خصائص دالة بيتا Properties of Beta Function

الخاصية١ : خاصية التماثل

$$\boxed{B(x,y) = B(y,x)}$$

البرهان: بوضع $1-t=z$ في (**1.18**) نحصل علي

$$B(x,y) = -\int_1^0 (1-z)^{x-1} z^{y-1}dz$$

$$= \int_0^1 z^{y-1}(1-z)^{x-1}dy = B(y,x)$$

الخاصية٢: تعرف دالة بيتا من خلال الدوال المثلثية في الشكل

$$\boxed{B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta}$$

البرهان: نستخدم التعويض $t=\sin^2\theta$ فنجد أن

$$\Rightarrow dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta, \quad \theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$$

وتتحول دالة بيتا في (**1.18**) إلي الأتي:

$$B(x,y)=\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\theta\right)^{x-1}\left(\cos^2\theta\right)^{y-1}.2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta \qquad (1.19)$$

<u>الخاصية٣:</u> العلاقة بين دالة جاما ودالة بيتا يمكن وضعها في الشكل

$$\boxed{B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};\quad x>0,\quad y>0.}$$

<u>البرهان:</u> بأستخدام الخاصية ٦ لدالة جاما والعلاقة (**1.19**) نجد أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}=;\quad x>0,\quad y>0.$$

$$2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta=B(x,y)$$

$$\therefore B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};\quad x>0,\quad y>0. \qquad (1.20)$$

من هذه الخاصية نستنتج أن

$$(i)\ B(1,1)=1,\qquad (ii)\ B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$$

<u>الخاصية٤:</u> تعرف دالة بيتا في شكل آخر هو

$$\boxed{B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du}$$

<u>البرهان:</u> باستخدام التعويضات $t=\frac{1}{1+u}\Rightarrow dt=-\frac{du}{(1+u)^2},\ u:0\to\infty$

في دالة بيتا فتتحول إلي

$$B(x,y)=-\int_{\infty}^{0}\frac{1}{(1+u)^{x-1}}.\left(\frac{u}{1+u}\right)^{y-1}\frac{du}{(1+u)^{2}}$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{u^{y-1}du}{(1+u)^{x+y}}$$

<u>الخاصية٥ :</u>

$$\boxed{\begin{array}{l}(i)\ \dfrac{B(x,y+1)}{y}=\dfrac{B(x+1,y)}{x}=\dfrac{B(x,y)}{x+y}\\(ii)\,B(x,y+1)+B(x+1,y)=B(x,y)\\(iii)\,B(p,n)=\dfrac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)};\quad n>0\\(iv)\,B(x,y-1)=B(x,y)+B(x+1,y)+B(x+2,y)+\ldots\end{array}}$$

<u>البرهان:</u> (i) بأستخدام الخاصية ٣ نجد أن

$$\frac{B(x,y+1)}{y}=\frac{\Gamma(y+1)\Gamma(x)}{y\Gamma(x+y+1)}$$

$$=\frac{y\Gamma(y)\Gamma(x)}{y(x+y)\Gamma(x+y)}$$

$$\therefore\ \frac{B(x,y+1)}{y}=\frac{B(x,y)}{x+y}\qquad(1.21)$$

بالمثل نحصل علي

$$\frac{B(x+1,y)}{x}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1)}{x\,\Gamma(x+y+1)}$$

$$=\frac{x\,\Gamma(x)\Gamma(y)}{x(x+y)\Gamma(x+y)}$$

$$\therefore\ \frac{B(x+1,y)}{x}=\frac{B(x,y)}{x+y} \qquad (1.22)$$

من العلاقة (**1.21**) و (**1.22**) ينتج المطلوب

(ii بأستخدام العلاقات (**1.21**) و (**1.22**) نجد أن

$$B(x+1,y)+B(x,y+1)=\frac{y\,B(x,y)}{x+y}+\frac{x\,B(x,y)}{x+y}=B(x,y)$$

(iii بتطبيق العلاقة (**1.20**) نجد أن

$$B(p,n)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(n)}{\Gamma(p+n)};\ n>0$$

$$=\frac{\Gamma(p)(n-1)!}{(p+n-1)\Gamma(p+n-1)}$$

$$=\frac{\Gamma(p)(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)p\Gamma(p)}$$

$$\therefore\ B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n-2)(p+n-1)}$$

(iv

$$\because\ B(x,y-1)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2}\,dt \qquad (1.23)$$

وباستخدام نظرية ذات الحدين نلاحظ الأتي

$$(1-t)^{-1}=1+t+t^2+\ldots. \qquad (1.24)$$

من (**1.24**) في (**1.23**) نحصل علي

$$B(x,y-1)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1-t)^{-1}dt$$
$$=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1+t+t^2+\dots)dt$$
$$=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt+\int_0^1 t^{x}\,(1-t)^{y-1}dt+\dots$$
$$=B(x,y)+B(x+1,y)+B(x+2,y)+\dots$$

أمثلــة

أحسب قيم التكاملات الأتية:

$(i)\int_0^1 x^4(1-x)^3dx$ $\quad(ii)\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\cos^7\theta\,d\theta$ $\quad(iii)\int_0^{\pi/2}\cos^8\theta\,d\theta$

$(iv)\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\quad(v)\int_0^2\frac{t^2}{\sqrt{2-t}}dt$ $\quad(vi)\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}\,dy$

$(vii)\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}\,d\theta$ $\quad(viii)\int_0^\infty\frac{x^{3/2}}{(1+x)^{7/2}}dx$ $\quad(ix)\frac{\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{\sqrt{2}+1}d\theta}{\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{\sqrt{2}-1}d\theta}$

<u>الحـل:</u>

$$(i)\int_0^1 x^4(1-x)^3dx=B(5,4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)}=\frac{4!3!}{8!}=\frac{1}{280}$$

$$(ii)\ \int_0^{\pi/2} \sin^6\theta \cos^7\theta \, d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{7}{2}, 4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{7}{2}).\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{15}{2})} = \frac{16}{3003}$$

$$(iii)\ \int_0^{\pi/2} \cos^8\theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(5)} = \frac{105\pi}{768}$$

$$(iv)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{u^{-3/4}\, du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{4} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}); \qquad t^4 = u$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$(v)\ \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{2-t}} dt = 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du; \qquad t = 2u$$

$$= 4\sqrt{2}\, B(3, \frac{1}{2}) = 4\sqrt{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

$$(vi)\ \int_0^a y^4 \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \frac{a^6}{2} \int_0^a z^{3/2} (1-z)^{1/2} dz; \qquad y^2 = a^2 z$$

$$= \frac{a^6}{2} B(5/2, 3/2) = \frac{a^6}{2} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)} = \frac{\pi a^6}{32}.$$

$$(vii)\ \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}\ d\theta=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u^{-1/4}\,du}{\sqrt{1-u}};\qquad u=\sin^2\theta$$

$$=\frac{1}{2}B(3/4,1/2)=\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(5/4)}=2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}=1.198$$

$$(viii)\ \because B(p,q)=\int_0^\infty\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,du$$

$$\therefore\int_0^\infty\frac{x^{3/2}}{(1+x)^{7/2}}dx=B(\frac{5}{2},1)=\frac{\Gamma(2.5)\Gamma(1)}{\Gamma(3.5)}=\frac{1}{2.5}=0.4$$

(ix) نفرض أن $\sin\theta=z$ فأن

$$dz=\cos\theta\,d\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}\ d\theta=\sqrt{1-z^2}\ d\theta$$

$$\Rightarrow d\theta=(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}dz\ ,\ \theta=0\to z=0,\ \ \theta=\tfrac{\pi}{2}\to z=1$$

$$\therefore\ \frac{\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{\sqrt{2}+1}d\theta}{\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{\sqrt{2}-1}d\theta}=\frac{\int_0^1 z^{\sqrt{2}+1}(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}\ dz}{\int_0^1 z^{\sqrt{2}-1}(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}\ dz}$$

بوضع $z^2=t\Rightarrow z=\sqrt{t}\Rightarrow dz=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$ نجد أن

$$\frac{\int_0^1 z^{\sqrt{2}+1}(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}\ dz}{\int_0^1 z^{\sqrt{2}-1}(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}\ dz}=\frac{\int_0^1(t^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}+1}(1-t)^{\frac{-1}{2}}\ (\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})dt}{\int_0^1(t^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}-1}(1-t)^{\frac{-1}{2}}\ (\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})dt}$$

$$=\frac{\int_0^1 t^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{-1}{2}}\ dt}{\int_0^1 t^{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2)}(1-t)^{\frac{-1}{2}}dt}=\frac{\int_0^1 t^{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\ dt}{\int_0^1 t^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\ dt}$$

وذلك بمقارنة الأسس مع دالة بيتا حيث أن

$$t^{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1-1} = t^{\frac{\sqrt{2}+2}{2}-1} = t^{x-1}$$

$$(1-t)^{\frac{-1}{2}+1-1} = (1-t)^{\frac{1}{2}-1} = (1-t)^{y-1}$$

$$\therefore \quad \frac{\int_0^1 t^{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,dt}{\int_0^1 t^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,dt} = \frac{B(\frac{\sqrt{2}+2}{2},\frac{1}{2})}{B(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+3}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+1}{2})}{\Gamma(\frac{\sqrt{2}}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+2}{2})}{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+3}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+1}{2})}{\Gamma(\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\sqrt{2}}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+1}{2}+1)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+1}{2})}{\Gamma(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma(\frac{\sqrt{2}}{2})}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\Gamma(\frac{\sqrt{2}+1}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\sqrt{2}+1}{2})}{\Gamma(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

تمـارين (١)

١. أحسب التكاملات الأتية:

$$(i)\int_0^1 x^7(1-x)^8\,dx \qquad (ii)\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta \qquad (iii)\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

$$(iv)\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \qquad (v)\int_0^1 x^3(1-\sqrt{x})\,dx \qquad (vi)\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^4}$$

$$(vii)\int_0^3 x\sqrt[3]{27-x^3}\,dx \qquad (viii)\int_0^{2\pi}\sin^8\theta\,d\theta \qquad (ix)\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x\ln(1/x)}}$$

٢. تحقق من صحة التكاملات الأتية:

$$(i)\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})} \qquad (ii)\int_0^{\pi/2}\tan^n x\,dx=\frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2},|n|<1$$

$$(iii)\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\frac{1.3.5.............(n-1)}{2.4.6........n}.\frac{\pi}{2} & n\ \ even\\ \frac{2.4.6..........(n-1)}{1.3.5.........n} & n\ \ odd\end{cases} \qquad (iv)\int_0^2 x(8-x^3)\,dx=\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$$

$$(v)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sec 2\theta}\,d\theta=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{4}) \qquad (vii)\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

٣. أثبت الخاصية ٥ لدالة جاما بأستخدام الخاصية ٦ و الخاصية ٨ بأستخدام صيغة أويلر من النوع الأول لدالة جاما أثبت قاعدة التضعيف لدالة جاما

٤. عبر عن التكاملات الأتية بدلالة دالة بيتا

$$\text{(i)}\int_a^b(\text{b}-\text{x})^{m-1}(\text{x}-\text{a})^{n-1}dx\ ;\ \text{b}>\text{a},\ \ \text{m}>0,\ \ \text{n}>0. \quad \text{(ii)}\int_{-a}^{a}(\text{a}+\text{x})^{m-1}(\text{a}-\text{x})^{n-1}dx$$

٥. أثبت ان $B(n,n+1)=\dfrac{\{\Gamma(n)\}^2}{2\Gamma(2n)}$ ثم استنتج أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^3\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\theta\,d\theta=\frac{\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{dz}{k\,z}$$

يمكن حلها علي الصورة

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\frac{x_2}{x_n}=c_2,\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},\ \frac{z}{x_n^k}=c_n$$

وبالتالي فإن الحل العام z للمعادلة الأصلية يحدد من المعادلة

$$\phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n},\ \frac{z}{x_n^k}\right)=0$$

ومنها نجد أن

$$z=x_n^k\psi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

وهذه دالة متجانسة من درجة k .

مثال (٩) : أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}+1=\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}$$

ثم أوجد الحل الخاص إذا كان $x_2^2+x_1x_2=0$ عندما $z=0$.

الحل : المعادلات المساعدة لهذه المعادلة هي

$$\frac{dx_1}{-1}=\frac{dx_2}{1}=\frac{dx_3}{1}=\frac{dz}{1}$$

واضح أنه من النسبة الرابعة وكلا من النسب الثلاث الأولى يمكن الحصول علي

إحدى النسب $=\dfrac{dx_1+dz}{0}$

$$dx_1+dz=0$$

$$x_1+z=c_1 \qquad (1)$$

بالمثل :

$$z-x_2=c_2 \qquad (2)$$

$$z-x_3=c_3 \qquad (3)$$

الحل العام z للمعادلة يحدد من المعادلة

$$F\left(x_1+z\ ,z-x_2,z-x_3\right)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

لإيجاد الحل الخاص نختار الثوابت c_1,c_2,c_3 بحيث تحقق الشرط $z=0,\ x_2^2+x_1x_3=0$.

عندما $z=0$ نجد أن

$$c_1=x_1,c_2=-x_2,c_3=-x_3$$

بالتعويض في المعادلة $x_2^2+x_1x_3=0$ نجد أن $c_2^2+c_1c_3=0$

بالتعويض عن c_1,c_2,c_3 من العلاقات (١)، (٢)، (٣) نحصل علي الحل النهائي

$$\left(z-x_2\right)^2+\left(x_1+z\right)\left(z-x_3\right)=0$$

مثال (١٠) حل المعادلة التفاضلية

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=x_1x_2x_3$$

الحل :

المعادلات المساعدة هي

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}=\frac{dz}{x_1x_2x_3}$$

من النسبتين الأولي و الثانية نحصل علي $\frac{x_1}{x_2}=c_1$ **، كذلك من النسبتين الثانية و الثالثة يكون** $\frac{x_2}{x_3}=c_2$

و بضرب النسبة الأولي في x_2x_3 **والثانية في** x_1x_3 **و الثالثة في** x_1x_2 **و الرابعة في** -3 **و الجمع نحصل علي**

إحدى النسب $=\dfrac{x_2x_3dx_1+x_1x_3dx_2+x_1x_2dx_3-3dz}{0}$

و منها يكون

$$x_1x_2x_3-3z=c_3$$

والحل العام z **للمعادلة الأصلية يمكن أن يحدد من المعادلة**

$$\psi\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},x_1x_2x_3-z\right)=0$$

حيث ψ **دالة اختيارية و منها يكون الحل العام علي الصورة**

$$z=x_1x_2x_3-\phi\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3}\right)$$

مثال (١١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(x_2+x_3+z\right)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\left(x_1+x_3+z\right)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\left(x_1+x_2+z\right)\frac{\partial z}{\partial x_3}=x_1+x_2+x_3$$

ثم أوجد الحل الخاص إذا كان $x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ **عندما** $z=0$

الحل :

المعادلات المساعدة

$$\frac{dx_1}{x_2+x_3+z}=\frac{dx_2}{x_1+x_3+z}=\frac{dx_3}{x_1+x_2+z}=\frac{dz}{x_1+x_2+x_3}$$

بالجمع نحصل علي

إحدى النسب $=\dfrac{dx_1+dx_2+dx_3+dz}{3\left(x_1+x_2+x_3+z\right)}$

وبضرب النسبة الأول في -1 **وجمعها مع النسبة الرابعة نحصل علي**

إحدى النسب $=\dfrac{dz-dx_1}{-(z-x_1)}$

$$\frac{dx_1+dx_2+dx_3+dz}{3\left(x_1+x_2+x_3+z\right)}=\frac{dz-dx_1}{-(z-x_1)}$$

بالتكامل نحصل علي

بنفس الطريقة نحصل علي

$$(z-x_2)(x_1+x_2+x_3+z)^{1/3}=c_2 \qquad (2)$$

$$(z-x_3)(x_1+x_2+x_3+z)^{1/3}=c_3 \qquad (3)$$

من (١)، (٢)، (٣) يمكن إيجاد الحل العام من الدالة الضمنية

$$F\left((z-x_1)(x_1+x_2+x_3+z)^{1/3},(z-x_2)(x_1+x_2+x_3+z)^{1/3},(z-x_3)(x_1+x_2+x_3+z)^{1/3}\right)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

لإيجاد الحل الخاص نختار الثوابت c_1,c_2,c_3 بحيث يتحقق الشرط $x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ عندما $z=0$.

عندما $z=0$ نجد أن

$$c_1=-x_1(x_1+x_2+x_3)^{1/3}$$

$$c_2=-x_2(x_1+x_2+x_3)^{1/3}$$

$$c_3=-x_3(x_1+x_2+x_3)^{1/3}$$

منها يكون

$$c_1+c_2+c_3=-(x_1+x_2+x_3)^{4/3} \qquad (4)$$

وبجمع مكعبات الثوابت c_1,c_2,c_3 نجد أن

$$c_1^3+c_2^3+c_3^3=-(x_1+x_2+x_3)(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=-(x_1+x_2+x_3) \qquad (5)$$

من (٤)، (٥) ينتج أن

$$(c_1+c_2+c_3)^3=-(c_1^3+c_2^3+c_3^3)^4$$

بالتعويض في هذه العلاقة عن c_1,c_2,c_3 من العلاقات (١)، (٢)، (٣) نجد أن

$$\left[(3z-x_1-x_2-x_3)(x_1+x_2+x_3+z)^{1/3}\right]^3$$
$$=-\left[\left\{(z-x_1)^3+(z-x_2)^3+(z-x_3)^3\right\}(x_1+x_2+x_3+z)\right]^4$$

ومنها نجد أن الحل الخاص المطلوب يتحدد من المعادلة

$$(x_1+x_2+x_3-3z)^3=(x_1+x_2+x_3+z)^3\left[(z-x_1)^3+(z-x_2)^3+(z-x_3)^3\right]^4$$

تمارين (٢)

١. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $pz + x = 0$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يمر بالمنحني $\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1,\ z = 0$ حيث a, b ثوابت مطلقة.

٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $p + q = 1$

ثم أوجد الحل الخاص إذا كانت العلاقة $x^2 + y^2 = 4$ تتحقق عندما $z = 0$.

٣. حل المعادلة التفاضلية $xp + yq = z$

وعندما يكون $z = 1$, $x^2 + y^2 = 3x^2 y$ أوجد الحل الخاص.

٤. أوجد حل المعادلة $(y + z)p + (x + z)q = x + y$

٥. أوجد الحل العام للمعادلة $(p - q)z = z^2 + (x + y)^2$

٦. أوجد معادلة المخروط التي تحقق معادلة لاجرانج $xp + yq = z$ ويمر بالمنحني

$$x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

٧. أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية :

$(i)\ x_1 p_1 + 2x_2 p_2 + 3x_3 p_3 + 4x_4 p_4 = 0$

$(ii)\ x_2 x_3 p_1 + x_1 x_3 p_2 + x_1 x_2 p_3 + x_1 x_2 x_3 = 0$

$(iii)\ p_1 + p_2 + p_3\left[1 + (z - x_1 - x_2 - x_3)^{1/2}\right] = 3$

$(iv)\ p_1 + x_1 p_2 + x_1 x_2 p_3 = x_1 x_2 x_3 \sqrt{z}$