الباب الأول
تحليل المتجهات

مقدمة عن المتجهات :

في كثير من فروع الرياضة التطبيقية أو الطبيعية النظرية عندما ندرس ظاهرة طبيعية ما دراسة رياضية نجد أنه من الأنسب استخدام مفهوم المتجهات عند الصياغة الرياضية للنظريات التي تتحكم في الظاهرة. لذلك يجدر بنا أولا قبل الدراسة الرياضية لأي ظاهرة أن نضيف بعض المعلومات المتعلقة بالمتجهات التي تفيد في دراستنا في المستقبل. وسوف نفترض العلم بجبر المتجهات مثل الجمع والطرح وحاصل الضرب القياسي والاتجاهي لمتجهين وحاصل الضرب الثلاثي القياسي والاتجاهي الثلاثي لثلاث متجهات.

المشتقة التفاضلية العادية لمتجه دالة في متغير قياسي :

نفرض أن $\vec{R} = \vec{R}(u)$ **متجه دالة في المتغير القياسي** u **وان** $\vec{R} = R_1\vec{i} + R_2\vec{j} + R_3\vec{k}$ **فتكون مركباته أيضا دوال في** u **.**

$$\therefore \frac{d\vec{R}}{du} = \frac{dR_1}{du}\vec{i} + \frac{dR_2}{du}\vec{j} + \frac{dR_3}{du}\vec{k}$$

وتنطبق هنا قواعد التفاضل العادي بخصوص تفاضل مجموع أو ضرب أكثر من دالة متجهه.

$$\frac{d}{du}\left[\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}\right] = \vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\frac{d\vec{C}}{du} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}\wedge\vec{C} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}.$$

$$\frac{d}{du}\left[\vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C}\right] = \vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\frac{d\vec{C}}{du}\right) + \vec{A}\wedge\left(\frac{d\vec{B}}{du}\wedge\vec{C}\right) + \frac{d\vec{A}}{du}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C}.$$

المشتقة التفاضلية الجزئية لمتجه دالة في أكثر من متغير قياسي :

إذا كان $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$ **دالة متجهه في المتغيرات القياسية** (x,y,z) **فان :**

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial x}\vec{k},$$

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y\partial x}.$$

وبالمثل لبقية المتغيرات القياسية. وتنطبق هنا أيضا قواعد التفاضل المعروفة.

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\right] = \vec{A}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + \vec{B}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x\partial y}.$$

كذلك إذا تغيرت (x, y, z) بالمقادير (dx , dy , dz) علي الترتيب فان التغير الذي ينشأ في الدالة المتجهه $\vec{A}$ يتعين من :

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz .$$

١ـ المؤثر التفاضلي الاتجاهي ∇ (نابلا) وميل الدالة القياسية $\varphi\nabla$ (نابلا φ) أو تدرج φ أو انحدار φ :

إذا كانت φ دالة قياسية في الموضع بمعني إنها دالة في (x, y, z) وهم إحداثيات نقطة في هذا الفراغ أي أن $\varphi(x, y, z)$ فإذا تغيرت إحداثيات النقطة بالمقادير (dx , dy , dz) فان :

$$\varphi(x + dx , y + dy , z + dz) - \varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}),\ldots\ldots\ldots .(1)$$

بإيجاد مفكوك الطرف الأيسر باستخدام مفكوك تيلور :

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + o\left(\partial \vec{r}^{\,-2}\right)$$

وبإهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz ,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

المعادلة (2) يمكن كتابتها كحاصل ضرب قياسي لمتجهين :

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right),\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ ..(3)$$

المتجه الأول $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$ يمكن كتابته بدوره كالتالي $\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi$ الكمية داخل القوس هي مؤثر تفاضلي اتجاهي نرمز له بالرمز ∇ (نابلا) أي :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots.(4)$$

وبالتعويض عن القوس السابق نستطيع كتابته في الصورة :

$$\nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k},\ldots\ldots\ldots .(5)$$

وهي دالة متجهه في الموضع وتقرأ نابلا φ وتسمي أيضا ميل φ أو تدرج φ أو $grad\ \varphi$ اختصار لكلمة $gradient$. المتجه الثاني $dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ هو في الحقيقة التغير الذي نشأ في المتجه موضع النقطة $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ أي أن

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k},\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots .(6)$$

نستطيع بذلك كتابة التغير في الدالة القياسية φ في صورة بسيطة كالآتي :

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{r} ,......... ....(7)$$

مركبة المتجه $\nabla\varphi$ في اتجاه متجه وحدة $\vec{e}$ وتعطي من $\nabla\varphi \cdot \vec{e}$ وتسمي بالمشتقة الاتجاهية للدالة φ في اتجاه $\vec{e}$ وتكتب في الصورة :

$$\frac{d\varphi}{dS} = \nabla\varphi \cdot \vec{e} ,......... ....(8)$$

حيث أن $dS = |d\vec{r}|$

لاحظ أن :

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dS} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dS} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dS} ,......... ...(9)$$

$$\frac{d\varphi}{dS} = \nabla\varphi \cdot \frac{d\vec{r}}{dS} = \nabla\varphi \cdot \vec{e} ,......... ....(10)$$

$$\vec{e} = \frac{d\vec{r}}{dS} ,......... .... (11)$$

ملحوظة :

وحيث أن اكبر قيمة لمركبة (أو مسقط) متجه ما هو مقدار المتجه نفسه فيمكن القول أن اتجاه المتجه $\nabla\varphi$ هو اتجاه اكبر معدل تغير للدالة φ ، أي أن $\frac{d\varphi}{dS}$ يكون اكبر ما يمكن إذا كانت $\vec{e}$ في اتجاه $\nabla\varphi$.

مثال(١):

اثبت أن $\nabla\varphi$ يكون متجه عمودي علي السطح $\varphi(x,y,z) = C$ حيث C ثابت.

الحل:

نفرض أن $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ يقع علي المستوي الذي يمس السطح عند P حيث أن :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) = 0$$

أي أن :

$$\nabla\varphi \cdot d\vec{r} = 0$$

وحيث أن حاصل الضرب القياسي لمتجهين $\nabla\varphi$ ، $d\vec{r}$ يساوي صفر ، لذلك فان $\nabla\varphi$ يكون عموديا علي $d\vec{r}$ ، أي $\nabla\varphi$ عموديا علي السطح $\varphi(x,y,z) = C$.

ملحوظة:

يمكن اخذ نتيجة هذا المثال كقاعدة في حل التمارين.

مثال (٢):

اوجد $\nabla\varphi$ عندما $\varphi = \ln|\vec{r}|$.

الحل:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \ln|\vec{r}| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$\nabla\varphi = \frac{1}{2}\nabla\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}.$$

٢ـ تباعد الدالة الاتجاهية $\nabla\cdot\vec{A}$ أو (نابلا دوت ِ $\vec{A}$) :

نفرض أن $\vec{A}$ دالة متجهه في الموضع أي :

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$$

وحيث أن المؤثر ∇ هو متجه.

$\therefore$ يمكننا تكوين حاصل الضرب القياسي له وللمتجه $\vec{A}$ كالآتي :

$$\nabla\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right), \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$\nabla\cdot\vec{A}$ هو دالة قياسية في الموضع وتسمي تباعد أو $divA$ اختصار لكلمة $divergnce$.

تباعد الميل والمؤثر ∇^2:-

حيث أن $\nabla\varphi$ دالة متجه ، يمكن التأثير عليها بالتباعد أي تكوين الدالـة القياسية في الموضع $\nabla\cdot\nabla\varphi$ أو تباعد ميل φ أو $div\ \ grad\ \varphi$

$$\therefore\ \nabla\cdot\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\nabla\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\cdot\varphi, \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

يعرف المؤثر التفاضلي ∇^2 كالآتي :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},......... .(3)$$

ويسمي ∇^2 **مؤثر لابلاس .**

مثال:

اثبـت أن : $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{A} + \varphi (\nabla \cdot \vec{A})$ **، ثـم اسـتخدمها فـي إثبـات أن :** $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$

حيث $r = |\vec{r}|$ **.**

الحل :

نفرض أن :

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \nabla \cdot \left[\varphi A_1 \vec{i} + \varphi A_2 \vec{j} + \varphi A_3 \vec{k} \right] = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_3)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_1 + \varphi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_2 + \varphi \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_3 + \varphi \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_3 + \varphi \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right)$$

$$\therefore \nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{A} + \varphi (\nabla \cdot \vec{A}),......... .(1)$$

لإثبات أن : $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$ **نضع** $\vec{A} = \vec{r}$ **،** $\varphi = \frac{1}{r^3}$ **فنجد أن :**

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = (\nabla r^{-3}) \cdot \vec{r} + r^{-3} \nabla \cdot \vec{r},......... .(1)$$

يمكن إثبات أن :

$$\nabla r^n = n r^{n-2} \vec{r},......... .(2)$$

ونجد أن :

$$\nabla r^{-3} = -3 r^{-5} \vec{r},......... .(3)$$

ونجد أن :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -3r^{-5}\vec{r} \cdot \vec{r} + r^{-3}(3), \ldots\ldots\ldots .(4)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

٣- دوران المتجه $\vec{A}$ أو $\nabla \wedge \hat{A}$:

يمكننا أيضا تكوين حاصل الضرب الاتجاهي للمؤثر ∇ والمتجه $\vec{A}$ كالآتي :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

$\nabla \wedge \vec{A}$ هو دالة متجه في الموضع وتقرأ نابلا كروس A وتسمي دوران A أو $Curl\ \vec{A}$.

مثال(١):

أ- اثبت أن دوران الميل يساوي الصفر دائما مهما كانت الدالة القياسية.
ب- اثبت أن تباعد الدوران يساوي الصفر دائما مهما كانت الدالة المتجهه.

الحل:

أ- نستطيع أن نؤثر بالدوران علي ميل الدالة القياسية φ.

$$\nabla \wedge \nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\nabla \wedge \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = 0$$

$\therefore$ دائما لأي دالة φ يكون $\nabla \wedge \nabla\varphi = 0$.

ب- نستطيع أيضا أن نؤثر بالتباعد علي دوران الدالة المتجهه $\vec{A}$ أي نكون الدالة القياسية
$\nabla \cdot \nabla \wedge A$

$$\therefore\ \nabla\cdot\nabla\wedge A=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right]$$

$$\nabla\cdot\nabla\wedge A=\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}=0$$

هذا يعني انه دائما لأي دالة متجهه $\vec{A}$ يكون $\nabla\cdot\nabla\wedge A=0$.

<u>مثال (٢):</u>

إذا كانت $\vec{V}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}$ فاثبت أن $\vec{\omega}=\frac{1}{2}Curl\left(\vec{V}\right)$ حيث $\vec{\omega}$ متجه ثابت في الفراغ.

<u>الحل:</u>

$$Curl\left(\vec{V}\right)=\nabla\wedge\vec{V}=\nabla\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)=\nabla\wedge\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$Curl\left(\vec{V}\right)=\nabla\wedge\left[(\omega_2 z-\omega_3 y)\vec{i}+(\omega_3 x-\omega_1 z)\vec{j}+(\omega_1 y-\omega_2 x)\vec{k}\right]$$

$$Curl\left(\vec{V}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_2 z-\omega_3 y & \omega_3 x-\omega_1 z & \omega_1 y-\omega_2 x\end{vmatrix}=2\left(\omega_1\vec{i}+\omega_2\vec{j}+\omega_3\vec{k}\right)$$

$$\therefore\ Curl\left(\vec{V}\right)=2\vec{\omega}\Rightarrow\vec{\omega}=\frac{1}{2}Curl\left(\vec{V}\right).$$

تمارين

١- اثبت أن $\nabla \wedge (\varphi\vec{A}) = \varphi(\nabla \wedge \vec{A}) + (\nabla\varphi) \wedge \vec{A}$.

٢- اثبت أن $\nabla \cdot (r^3\vec{r}) = 6r^3$ حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

٣- اثبت أن $\nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \nabla \wedge \vec{A})$ حيث $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ ، $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

٤- اوجد قيمة $\nabla\varphi$ إذا كانت $\varphi = \frac{1}{r}$.

٥- اثبت أن

أ- $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$

ب- $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

٦-

ا- إذا كانت $\vec{A} = xz^3\vec{i} - 2x^2yz\vec{j} + 2yz^4\vec{k}$ فاحسب $\nabla \wedge \vec{A}$ عند النقطة $(1,-1,1)$.

ب- إذا كانت $\vec{A} = x^2y\vec{i} - 2xz\vec{j} + 2yz\vec{k}$ اوجد $Curl\ Curl\ \vec{A}$.

٧- احسب قيمة $Curl\ (\vec{r}f(r))$ حيث $f(r)$ دالة تفاضلية.

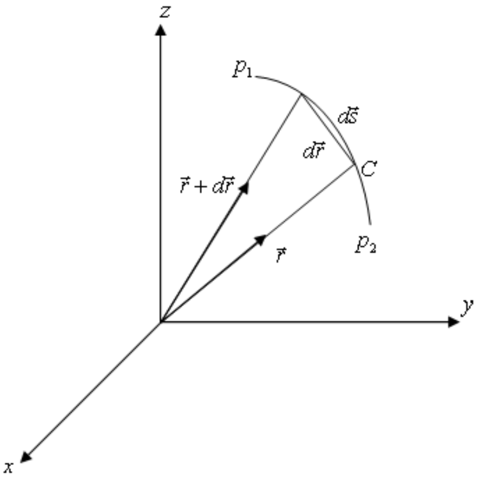
٨- إذا كانت معادلات ماكسويل في النظرية الكهرومغناطيسية هي كالآتي :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{H} = 0, \nabla \wedge \vec{E} = \frac{-\partial\vec{H}}{\partial t}, \nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

فاثبت أن $\vec{E}, \vec{H}$ تحقق المعادلة الموجية $\nabla^2\vec{u} = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$.

الباب الثانى

تكامل المتجهات والنظريات التكاملية



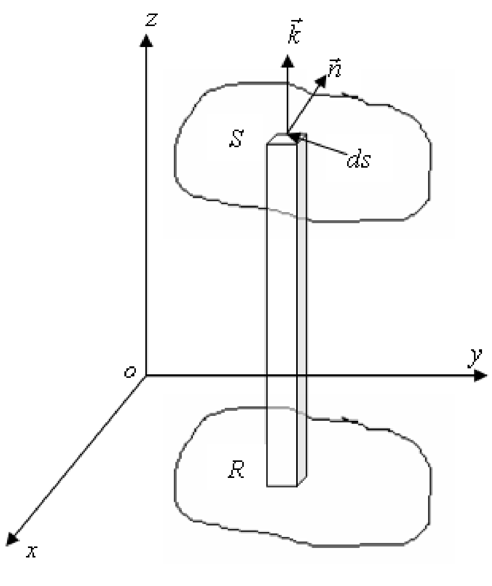
١- التكامل الخطى حول منحنى C :

إذا كـان $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ دالـة متجهـه فـي الموضـع (x, y, z) ومعرفة ومتصلة عند جميع نقط المنحنـى C فـان التكامل :

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{p_1}^{p_2} (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

يسمي بالتكامل الخطي للمتجه $\vec{A}$ من النقطة p_1 إلي النقطة p_2 علـــي المنحنـــي C. إذا كـــان C منحنـــي مقفـــل فـــان $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ هـو التكامـل الخطـي حـول المنحنـي C ، التكامـل حول المنحني المقفل يسمي باللف للمتجه $\vec{A}$.

٢- التكامل السطحى على سطح S :



إذا كـان لـدينا سطح مقفل S لـه جانبـان (كمـا بالشكل) ونـأخـذ الجانـب الـذي يكـون نحـو الخـارج هـو الجانـب الموجـب والجانـب الآخـر هـو الجانـب السـالب. إذا كـان المتجـه $\vec{n}$ هو متجه وحدة عمودي علي الجانب الموجب لسطح S ويكون نحو الخارج في حالـة إذا كـان السطح مقفل أمـا إذا كـان السطح غير مقفل يكون اتجـاه العمـود اختياري.

المتجـه $d\vec{s}$ يمثـل عنصـر مسـاحة اتجـاهي عمـودي علـي السطح S مقداره ds واتجاهـه فـي اتجـاه المتجـه $\vec{n}$ أي أن :

$$d\vec{s} = \vec{n}\, ds$$

وإذا كـان A ، φ دوال معرفـة ومتصـلة عنـد جميـع نقـط السطح S فـان صـور من التكامـل السطحي علـي السـطح هي :

$$\iint_s \varphi ds\,,$$

$$\iint_s \varphi d\vec{s} = \iint_s \varphi \vec{n}\, ds\,,$$

$$\iint_s \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint_s \vec{A}\cdot \vec{n}\, ds\,,$$

$$\iint_s \vec{A}\wedge d\vec{s} = \iint_s \vec{A}\wedge \vec{n}\, ds\,,$$

وإذا كان السطح مقفلا نستخدم الرمز $\oiint$. التكامل $\iint_s \vec{A} d\vec{s}$ نسميه فيض $\vec{A}$ خلال السطح S.

لحساب تكاملات السطح يكون من الملائم التعبير عنها كتكامل ثنائي مأخوذ علي المساحة المسقطة للسطح S علي احد مستويات الإحداثيات هذا ممكن لو أن خطا متعامدا علي مستوي الاحداثي المختار يلاقي السطح في نقطة واحدة . علي كل حال فهذا لا يمثل مشكلة حقيقية حيث يمكن عموما تقسيم السطح S إلي أسطح تحقق هذا التحديد.

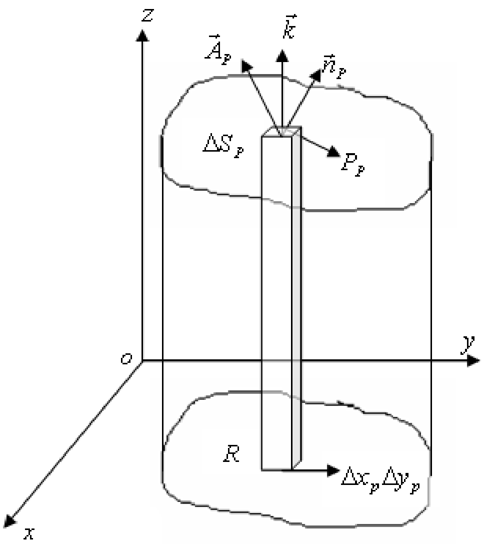
٣- التكامل الحجمي علي حجم V :

نفرض سطح مقفل في الفراغ يحتوي الحجم V بعض صور من التكامل الحجمي هي :

$$\iiint_V \varphi dV \quad ، \quad \iiint_V \vec{A} dV$$

حيث dV عنصر حجم من V .

تعريف للكمية $\iint_s \vec{A}\cdot\vec{n}\, ds\,,$ علي سطح S بدلالة نهاية المجموع :



نقسم المساحة S إلي M من عناصر المساحة ΔS_P حيث $P = 1,2,\ldots\ldots, M$ نختار نقطة ما ولتكن P_P في نطاق ΔS_P والتي إحداثياتها (x_p, y_p, z_p).

نعرف المتجه $\vec{A}_P = \vec{A}(x_p, y_p, z_p)$ ونفرض أن المتجه $\vec{n}_P$ متجه وحدة عمودي في الاتجاه إلي الخارج (الاتجاه الموجب) لعنصر المساحة ΔS_P عند P.

من المجموع :

$$\sum_{P=1}^{M} \vec{A}_P \cdot \vec{n}_P \wedge S_P$$

حيث $\vec{A}_p \cdot \vec{n}_p$ هي المركبة العمودية للمقدار $\vec{A}_P$ عند P_p.

بأخذ النهاية لهذا المجموع عندما $\Delta S_P \to 0$ ، $M \to \infty$ وهذه النهاية إذا وجدت تسمي بالمركبة العمودية السطحية للمتجه $\vec{A}$ علي السطح S ويعرف كالآتي :

$$\iint_s \vec{A}\cdot\vec{n}\, ds$$

وبافتراض أن السطح S له الإسقاط R علي المستوي xy بين أن :

$$\iint_s \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_R \vec{A}\cdot\vec{n}\frac{dxdy}{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}$$

من التعريف السابق . يكون التكامل السطحي هو نهاية المجموع

$$\sum_{P=1}^{M}\vec{A}\cdot\vec{n}_p\Delta S_p \,,.........\ .(1)$$

مسقط ΔS_p علي المستوي xy يكون $\left|(\vec{n}_p\cdot\Delta S_P)\cdot\vec{k}\right|$ أو $\left|(\vec{n}_p\cdot\vec{k})\right|\Delta S_P$ والذي يساوي $\Delta x_p\Delta y_p$ حيث أن $\Delta S_P = \frac{\Delta x_p\Delta y_p}{\left|\vec{n}_p\cdot\vec{k}\right|}$ لذا تصبح المعادلة (1) في الصورة :

$$\sum_{P=1}^{M}\vec{A}\cdot\vec{n}_p\frac{\Delta x_p\Delta y_p}{\left|\vec{n}_p\cdot\vec{k}\right|}\,,.........\ .(2)$$

من مبادئ نظريات حساب التكامل نهاية هذا المجموع الذي فيه $M\to\infty$ ، $\Delta x_P\to 0$ ، $\Delta y_P\to 0$ فيكون :

$$\iint_R \vec{A}\cdot\vec{n}\frac{dxdy}{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}$$

وبالتالي يكون :

$$\iint_s \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_R \vec{A}\cdot\vec{n}\frac{dxdy}{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

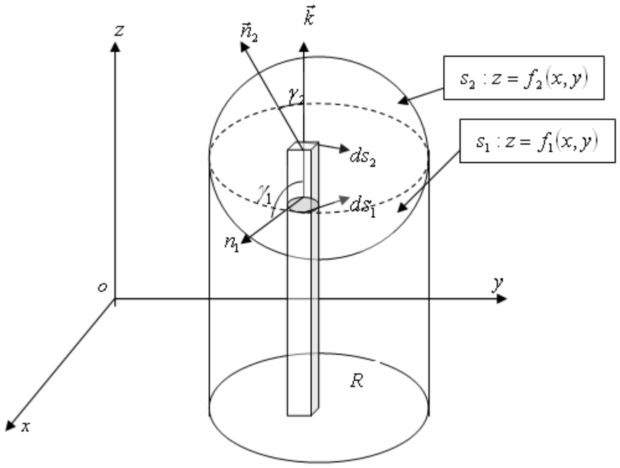
نظرية جاوس (نظرية التباعد) :

وهي نظرية تحول التكامل السطحي إلي آخر حجمي وبالعكس . وتنص علي انه إذا كانت $\vec{A}$ دالة متجهه في الموضع (x,y,z) معرفة ومتصلة هي ومشتقاتها التفاضلية عند كل نقط السطح S والحجم V المحصور بداخله فان :

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \oiint_s \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\vec{s}$$

البرهان :

نفرض سطح مقفل S بحيث أن خط مواز لمحاور الإحداثيات يقطع S في أكثر من نقطتين ويقسمها إلي جزأين S_1, S_2 جزء علوي S_2 ونفرض أن معادلته $z = f_2(x,y)$ وجزء سفلي S_1 ونفرض أن معادلته $z = f_1(x,y)$ ونرمز لمسقط السطح S



علي المستوي xy بالرمز R ، n_2 متجه وحدة عمودي علي S_2 يصنع زاوية حادة γ_2 مع المحور z أي مع متجه الوحدة $\vec{k}$. n_1 متجه وحدة عمودي علي S_1 يصنع زاوية منفرجة حادة γ_1 مع $\vec{k}$ باعتبار أن :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dxdydz$$

نعتبر التكامل الأخير في الجانب الأيمن :

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right] dxdy = \iint_R A_3(x,y,z) \Big|_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dydx$$

$$\therefore \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz = \iint_R \left[A_3(x,y,f_2) - A_3(x,y,f_1) \right] dxdy$$

<u>بالنسبة للجزء العلوى S_2 :</u>

مسقط عنصر المساحة ds_2 علي المستوي xy يكون مساويا :

$$dxdy = Cos\, \gamma_2 ds_2 = \vec{k} \cdot \vec{n}_2 ds_2$$

<u>بالنسبة للجزء السفلي S_1 :</u>

مسقط عنصر المساحة ds_1 علي المستوي xy يكون مساويا :

$$dxdy = -Cos\, \gamma_1 ds_1 = -\vec{k} \cdot \vec{n}_1 ds_1$$

$$\therefore \iint_R A_3(x,y,f_2) \Big| dydx = \iint_{s_2} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_2 ds_2$$

$$\iint_R A_3(x,y,f_1) \Big| dydx = -\iint_{s_1} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_1 ds_1$$

$$\therefore \iint_R A_3(x,y,f_2) \Big| dydx - \iint_R A_3(x,y,f_1) \Big| dydx = \iint_{s_2} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_2 ds_2 + \iint_{s_1} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_1 ds_1$$

ومن ثم :

$$\iiint_V \frac{dA_3}{dz} dV = \iint_S A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds ,\ldots\ldots\ldots .(1)$$

وبالمثل بإسقاط S علي محاور المستويات الآخري.

$$\iiint_V \frac{dA_1}{dx} dV = \iint_S A_1 \vec{i} \cdot \vec{n}\, ds ,\ldots\ldots\ldots .(2)$$

$$\iiint_V \frac{dA_2}{dy} dV = \iint_S A_2 \vec{j} \cdot \vec{n}\, ds ,\ldots\ldots\ldots .(3)$$

بجمع المعادلات $(1), (2), (3)$ نجد أن :

$$\iiint_V \left(\frac{dA_1}{dx} + \frac{dA_2}{dy} + \frac{dA_3}{dz} \right) dV = \iint_S \left(A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \right) \cdot \vec{n}\, ds$$

$$\therefore \iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \oiint_s \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\vec{s}$$

نتائج :

(١) إذا كانت φ دالة قياسية في الموضع معرفة ومتصلة عند النقط V, S السابقة فان :

$$\iiint_V \nabla \varphi dV = \oiint_s \varphi d\vec{s}$$

الإثبات :

نفرض أن $\vec{A} = \varphi \vec{C}$ حيث $\vec{C}$ متجه ثابت

$$\therefore \iiint_V \nabla \cdot \left(\varphi \vec{C} \right) dV = \oiint_s \varphi \vec{C} \cdot \vec{n}\, ds$$

ولكن

$$\nabla \cdot \left(\varphi \vec{C} \right) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{C} + \varphi \nabla \cdot \vec{C} = (\nabla \varphi) \cdot \vec{C} + 0$$

حيث $\vec{C}$ متجه ثابت

$$\therefore \iiint_V (\nabla \varphi) \cdot \vec{C} dV = \oiint_s \varphi \vec{C} \cdot \vec{n}\, ds$$

بأخذ $\vec{C}$ خارج التكاملات

$$\therefore \vec{C} \cdot \iiint_V (\nabla \varphi) dV = \vec{C} \cdot \oiint_s \varphi \vec{n}\, ds$$

حيث أن $\vec{C}$ متجه ثابت اختياري

$$\iiint_V \nabla \varphi dV = \oiint_s \varphi d\vec{s}$$

(٢) إذا كانت $\vec{B}$ دالة متجهه في الموضع معرفة ومتصلة عند جميع نقط V, S السابقة فان :

$$\iiint_V \nabla \wedge \vec{B} dV = \oiint_s \left(\vec{n} \wedge \vec{B} \right) ds = \oiint_s d\vec{s} \wedge \vec{B}$$

الإثبات :

نفرض أن $\vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{C}$ حيث $\vec{C}$ متجه ثابت اختياري

$$\therefore \iiint_V \nabla \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) dV = \oiint_s \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) \cdot \vec{n}\, ds$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(B_2 C_3 - B_3 C_2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_3 C_1 - B_1 C_3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(B_1 C_2 - B_2 C_1\right).$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = C_3 \frac{\partial B_2}{\partial x} - C_2 \frac{\partial B_3}{\partial x} + C_1 \frac{\partial B_3}{\partial y} - C_3 \frac{\partial B_1}{\partial y} + C_2 \frac{\partial B_1}{\partial z} - C_1 \frac{\partial B_2}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = C_1 \left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) + C_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}\right) + C_3 \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j} + C_3 \vec{k}\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \vec{C} \cdot \left(\nabla \wedge \vec{B}\right)$$

وكذلك

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{n} \wedge \vec{B}\right)$$

$$\therefore \iiint_V \vec{C} \cdot \left(\nabla \wedge \vec{B}\right) dV = \oiint_s \vec{C} \cdot \left(\vec{n} \wedge \vec{B}\right) ds$$

وبأخذ $\vec{C}$ خارج التكاملات

$$\vec{C} \cdot \iiint_V \left(\nabla \wedge \vec{B}\right) dV = \vec{C} \cdot \oiint_s \left(\vec{n} \wedge \vec{B}\right) ds$$

وحيث أن $\vec{C}$ متجه ثابت اختياري

$$\iiint_V \nabla \wedge \vec{B}\, dV = \oiint_s \left(\vec{n} \wedge \vec{B}\right) ds$$

نظرية جرين :

لأي دالتين قياسيتين في الموضع (x, y, z) هما u, v معرفتين ومتصلتين عند جميع نقط V, S فان :

$$\iiint_V \left(u \nabla^2 v - v \nabla^2 u\right) dV = \oiint_s \left(u \nabla v - v \nabla u\right) \cdot d\vec{s}$$

البرهان :

نضع في نظرية جاوس $\vec{A} = u \nabla v$

$$\therefore \iiint_V \nabla \cdot \left(u \nabla v\right) dV = \oiint_s \left(u \nabla v\right) \cdot d\vec{s}$$

$$\because \nabla \cdot \left(u \nabla v\right) = \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v, \ldots\ldots\ldots \ . \otimes$$

$$\therefore \iiint_V \left(\nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v\right) dV = \oiint_s \left(u \nabla v\right) \cdot d\vec{s}, \ldots\ldots\ldots \ .(1)$$

وبالمثل نضع في نظرية جاوس $\vec{A} = v\nabla u$

$$\therefore \iiint_V \nabla\cdot(v\nabla u)dV = \oiint_s (v\nabla u)\cdot d\vec{s}$$

$$\because \nabla\cdot(v\nabla u) = \nabla v\cdot\nabla u + v\nabla^2 u, \ldots\ldots\ldots \otimes\otimes$$

$$\therefore \iiint_V \left(\nabla v\cdot\nabla u + v\nabla^2 u\right)dV = \oiint_s (v\nabla u)\cdot d\vec{s}, \ldots\ldots\ldots (2)$$

وبطرح معادلة (2) من (1) نجد أن :

$$\iiint_V \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)dV = \oiint_s (u\nabla v - v\nabla u)\cdot d\vec{s}$$

يمكن كتابة نظرية جرين السابقة في الصورة :

$$\iiint_V \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)dV = \oiint_s (u\nabla v\cdot\vec{n} - v\nabla u\cdot\vec{n})d\vec{s}$$

وأيضا يمكن كتابتها في الصورة :

$$\iiint_V \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)dV = \oiint_s \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\vec{s}$$

حيث أن $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ ترمز للمشتقات التفاضلية الجزئية في الاتجاه العمودي نحو الخارج للسطح المقفل S.

ملحوظة :

نظرية جاوس يمكن أن تفيد في حالة صعوبة إجراء احد التكاملين السطحي أو الحجمي فيمكن بواسطتها تحويل التكامل الصعب إلي آخر الأسهل في إجرائه.

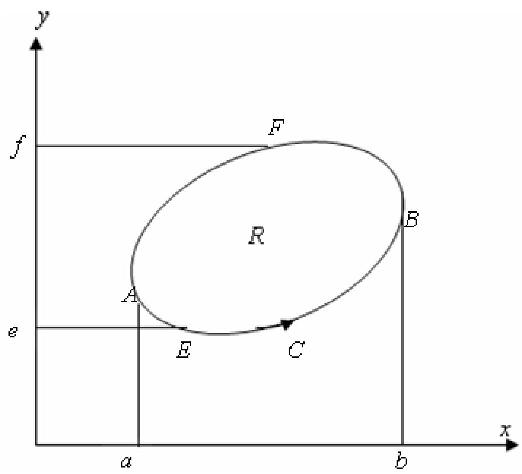
نظرية جرين في المستوى :

إذا كانت R منطقة في المستوي xy محددة بمنحني مغلق بسيط C وإذا كانت M, N دوال معرفة ومتصلة هي ومشتقاتها التفاضلية في المنطقة R فان :

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

حيث C في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة).

البرهان :



إذا كان C منحني مغلق له الخاصية أن أي خط مستقيم يوازي محاور الإحداثيات يقطع C في نقطتين علي الأكثر. لتكن معادلات المنحنيات BFA, AEB هي $y = Y_2(x), y = Y_1(x)$ علي الترتيب. إذا كانت R هي

منطقة محددة ب C يكون لدينا :

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=Y_1(x)}^{y=Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy\right]dx = \int_{x=a}^{b} M(x,y)\Big|_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx = \int_a^b [M(x,Y_2) - M(x,Y_1)]dx$$

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = -\int_a^b M(x,Y_1)dx + \int_a^b M(x,Y_2)dx = -\int_a^b M(x,Y_1)dx - \int_b^a M(x,Y_2)dx$$

$$\therefore \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = -\oint_C M dx \quad ,.........\ .(1)$$

وبالمثل لتكن معادلات المنحنيات FAE , EBF هي $x = X_2(y), x = X_1(y)$ علي الترتيب.

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dxdy = \int_{y=e}^{y=f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{x=X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx\right]dy = \int_{y=e}^{y=f}[N(X_2,y) - N(X_1,y)]dy = \int_f^e N(X_1,y)dy + \int_e^f N(X_2,y)dy$$

$$\therefore \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dxdy = \oint_C N dy \quad ,.........\ .(2)$$

بجمع المعادلتين $(2),(1)$ نحصل علي :

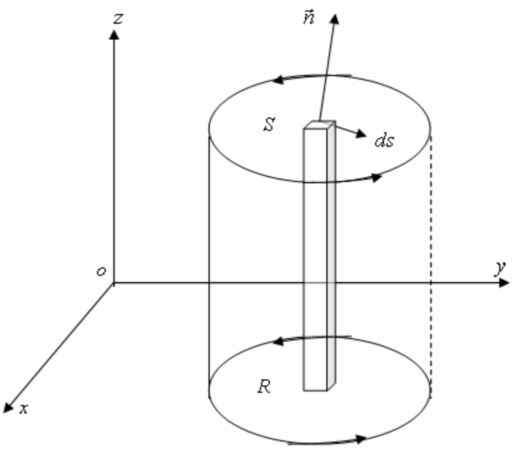
$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

نظرية ستوكس:

هي نظرية تحول التكامل السطحي إلي آخر خطي وبالعكس . وتنص علي انه إذا كانت $\vec{A}$ دالة متجهه في الموضع (x,y,z) معرفة ومتصلة هي ومشتقاتها التفاضلية عند جميع نقط السطح غير المقفل (المفتوح) S والمنحني المقفل C الذي يحد (أو يحصر) هذا السطح فان :

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_s (\nabla \wedge \vec{A})\cdot d\vec{s} = \iint_s (\nabla \wedge \vec{A})\cdot \vec{n}\, ds$$

البرهان :



نفرض S سطح حيث أن إسقاطه علي المستويات xz, yz, xy تكون مناطق محدودة بمنحنيات بسيطة مغلقة ونفرض أن S يمكن تمثيلها بالمعادلات $x = g(y,z)$ أو $z = f(x,y)$ أو $y = h(x,z)$ حيث f,g,h دوال متصلة قابلة للتفاضل لابد أن نبين أن :

$$\iint_s (\nabla \wedge \vec{A})\cdot \vec{n}\, ds = \iint_s \left[\nabla \wedge \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)\right]\cdot \vec{n}\, ds = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

حيث $\vec{C}$ هي حدود السطح S. نعتبر أولا :

$$\iint_s \left(\nabla \wedge A_1\vec{i}\right)\cdot \vec{n}\,ds$$

حيث

$$\nabla \wedge A_1\vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec{k}, \ldots\ldots\ldots (3)$$

hence

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

المعادلة (3) **تصبح في الصورة :**

$$\left[\nabla \wedge A_1\vec{i}\right]\cdot \vec{n}\,ds = -\frac{\partial F}{\partial y}dxdy$$

$$\therefore \iint_s \left[\nabla \wedge A_1\vec{i}\right]\cdot \vec{n}\,ds = \iint_R -\frac{\partial F}{\partial y}dxdy$$

حيث R **هي إسقاط** S **علي المستوي** xy **. من نظرية جرين للمستوي فان التكامل الأخير يساوي** $\oint_\Gamma Fdx$ **حيث** Γ **حدود** R **. حيث انه عند كل نقطة** (x,y) **للحدود** Γ **قيمة** F **هي نفس قيمة** A_1 **عند كل نقطة** (x,y,z) **من** C **وحيث** dx **لها نفس القيمة لكل من المنحنيين وبذلك يجب أن يكون :**

$$\oint_\Gamma Fdx = \oint_C A_1 dx$$

$$\therefore \iint_s \left(\nabla \wedge A_1\vec{i}\right)\cdot \vec{n}\,ds = \oint_C A_1 dx, \ldots\ldots\ldots (4)$$

وبالمثل وبالإسقاط علي محاور المستويات الآخري :

$$\iint_s \left(\nabla \wedge A_2\vec{j}\right)\cdot \vec{n}\,ds = \oint_C A_2 dy, \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\iint_s \left(\nabla \wedge A_3\vec{k}\right)\cdot \vec{n}\,ds = \oint_C A_3 dz, \ldots\ldots\ldots (6)$$

بالجمع $(4),(5),(6)$ **نحصل علي :**

$$\iint_s \left(\nabla \wedge \vec{A}\right)\cdot \vec{n}\,ds = \iint_s \left[\nabla \wedge \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)\right]\cdot \vec{n}\,ds = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

نتائج :

(أ) باستخدام نظرية ستوكس أثبت أن :

$$\oint d\vec{r} \wedge \vec{B} = \iint_s \left(\vec{n} \wedge \nabla\right) \wedge \vec{B}\,ds$$

الإثبات :

نضع في نظرية ستوكس $\vec{A}=\vec{B}\wedge\vec{C}$ **حيث** $\vec{C}$ **متجه ثابت اختياري .**

$$\oint d\vec{r}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\iint_s\left[\nabla\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\right]\cdot\vec{n}\,ds$$

$$\oint\vec{C}\cdot\left(d\vec{r}\wedge\vec{B}\right)=\iint_s\left[\left(\vec{C}\cdot\nabla\right)\vec{B}-\vec{C}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)\right]\cdot\vec{n}\,ds=\iint_s\left[\left(\vec{C}\cdot\nabla\right)\vec{B}\right]\cdot\vec{n}\,ds-\iint_s\left[\vec{C}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)\right]\cdot\vec{n}\,ds$$

$$\vec{C}\cdot\oint\left(d\vec{r}\wedge\vec{B}\right)=\iint_s\vec{C}\cdot\left[\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{n}\right)\right]ds-\iint_s\vec{C}\cdot\left[\vec{n}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)\right]ds=\vec{C}\cdot\iint_s\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{n}\right)ds-\vec{C}\cdot\iint_s\vec{n}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)ds$$

$$\vec{C}\cdot\oint\left(d\vec{r}\wedge\vec{B}\right)=\vec{C}\cdot\iint_s\left[\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{n}\right)-\vec{n}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)\right]ds=\vec{C}\cdot\iint_s\left[\left(\vec{n}\wedge\vec{\nabla}\right)\wedge\vec{B}\right]ds$$

$$\therefore\oint d\vec{r}\wedge\vec{B}=\iint_s\left(\vec{n}\wedge\nabla\right)\wedge\vec{B}\,ds$$

(ب) باستخدام نظرية ستوكس أثبت أن :

$$\oint_C\varphi\,d\vec{r}=\iint_s d\vec{s}\wedge\nabla\varphi$$

الإثبات :

نضع في نظرية ستوكس $\vec{A}=\vec{C}\varphi$ **حيث** $\vec{C}$ **متجه ثابت اختياري ،** φ **دالة قياسية .**

$$\therefore\oint_C\left(\vec{C}\varphi\right)\cdot d\vec{r}=\iint_s\left[\nabla\wedge\left(\vec{C}\varphi\right)\right]\cdot\vec{n}\,ds,\dots\dots\dots.(1)$$

$$\because\oint_C\vec{C}\varphi\cdot d\vec{r}=\oint_C\varphi\vec{C}\cdot d\vec{r}=\vec{C}\cdot\oint_C\varphi\,d\vec{r},\dots\dots\dots.(2)$$

$\because$ $\vec{C}$ **متجه ثابت**

$$\therefore\nabla\wedge\left(\vec{C}\varphi\right)=\left(\nabla\varphi\right)\wedge\vec{C}+\varphi\left(\nabla\wedge\vec{C}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\wedge\vec{C}$$

$$\therefore\iint_s\left[\nabla\wedge\left(\vec{C}\varphi\right)\right]\cdot\vec{n}\,ds=\iint_s\left[\left(\nabla\varphi\right)\wedge\vec{C}\right]\cdot\vec{n}\,ds,\dots\dots\dots.(3)$$

وباستخدام الحقيقة $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$ **فان المعادلة** (3) **يمكن كتابتها في الصورة :**

$$\iint_s\left[\left(\nabla\varphi\right)\wedge\vec{C}\right]\cdot\vec{n}\,ds=\iint_s\vec{C}\cdot\left[\vec{n}\wedge\left(\nabla\varphi\right)\right]ds=\vec{C}\cdot\iint_s\left[\vec{n}\wedge\left(\nabla\varphi\right)\right]ds,\dots\dots\dots.(4)$$

وبالتعويض من المعادلتين $(2),(4)$ **في المعادلة** (1) **نحصل على :**

$$\vec{C}\cdot\oint_C\varphi\,d\vec{r}=\vec{C}\cdot\iint_s\left[\vec{n}\wedge\left(\nabla\varphi\right)\right]ds=\vec{C}\cdot\iint_s d\vec{s}\wedge\left(\nabla\varphi\right)$$

حيث أن $d\vec{s}=\vec{n}\wedge\nabla\varphi$ **، وحيث أن** $\vec{C}$ **متجه ثابت اختياري.**

$$\therefore\oint_C\varphi\,d\vec{r}=\iint_s d\vec{s}\wedge\nabla\varphi$$

(ج) باستخدام نظرية ستوكس أثبت أن :

$$\oint_C \varphi \nabla \psi \cdot d\vec{r} = \iint_s [\nabla \wedge (\varphi \nabla \psi)] \cdot \vec{n}\, ds$$

الإثبات :

نضع في نظرية ستوكس $\vec{A} = \varphi \nabla \psi$

$$\therefore \oint_C (\varphi \nabla \psi) \cdot d\vec{r} = \iint_s [\nabla \wedge (\varphi \nabla \psi)] \cdot \vec{n}\, ds ,.........\ .(1)$$

وباستخدام العلاقة :

$$\nabla \wedge (\varphi \vec{F}) = \varphi \nabla \wedge \vec{F} + \nabla \varphi \wedge \vec{F}$$

نستطيع كتابة :

$$\nabla \wedge (\varphi \nabla \psi) = \varphi \nabla \wedge \nabla \psi + \nabla \varphi \wedge \nabla \psi ,.........\ .(2)$$

وحيث أن :

$$\nabla \wedge \nabla \psi = Curl \quad grad \ \psi = 0$$
$$\therefore \nabla \wedge (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \wedge \nabla \psi ,.........\ .(3)$$

وبالتعويض من (3) **في** (1) **نجد أن :**

$$\oint_C \varphi \nabla \psi \cdot d\vec{r} = \iint_s [\nabla \wedge (\varphi \nabla \psi)] \cdot \vec{n}\, ds$$

(د) يمكن من نظرية ستوكس السابقة استنتاج صيغة تكاملية للدوران كالآتـي :

إذا كان Δs ***تمثل سطحا محدد بمنحني مقفل*** C ***وكانـت*** p ***نقطـة علـي هذا السطح لا تقـع علـي*** C ***وكان*** $\vec{n}$ ***متجه وحدة عمودي علي*** Δs ***عند*** p ***فانه عند*** p ***يكون :***

$$(\nabla \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}}{\Delta s} \right]$$

والنهاية مأخوذة بحيث تظل p **علي السطح** Δs **عندما ينكمش السطح إلي الصفر.**

الإثبات :

من نظرية ستوكس :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_s [\nabla \wedge \vec{A}] \cdot \vec{n}\, ds$$

وباستخدام القيمة المتوسطة للتكامل :

$$\overline{\left(\nabla \wedge \vec{A}\right)\cdot \vec{n}} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \Big/ \Delta s$$

وبأخذ النهاية عندما تؤول Δs إلي الصفر مع بقاء ال p عليها نحصل علي :

$$\left(\nabla \wedge \vec{A}\right)\cdot \vec{n} = \lim_{\Delta s \to 0}\left[\frac{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}}{\Delta s}\right]$$

ويمكن اعتبار هذه الصيغة كتعريف للدوران. ومنها نستنتج أن مركبة الدوران عند نقطة ما في اتجاه عمودي علي سطح صغير حول النقطة هو نهاية اللف لوحدة المساحات عندما يؤول السطح إلي الصفر.

ملحوظة :

نظرية ستوكس يمكن أن تغير في حالة صعوبة إجراء احد التكاملين الخطي أو السطحي فيمكن بواسطتها تحويل التكامل الصعب إلي آخر الأسهل في إجرائه.

تمــارين

١- إذا كــان $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$ احســب $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ مــن النقطــة $(0,0,0)$ إلــي $(1,1,1)$ علي المسارات الآتية :

أ- $x = t$ ، $y = t^2$ ، $z = t^3$.

ب- الخطوط المستقيمة من $(0,0,0)$ إلي $(1,0,0)$ ثم إلي $(1,1,0)$ إلي $(1,1,1)$.

ج- الخط المستقيم الذي يربط $(0,0,0)$ ، $(1,1,1)$.

٢- اوجد الشغل المبذول لتحريك جسيم مرة واحدة حول الدائرة C في المستوي xy . إذا كان مركـز الـدائرة عنـد نقطـة الأصـل ونصـف قطرهـا 3 وإذا كانـت قـوة المجـال المعطـاه هـي $\vec{F} = (2x - y + z)\vec{i} + (x + y - z^2)\vec{j} + (3x - 2y + 4z)\vec{k}$.

٣- احسب التكامل السطحي للدالة $\vec{F}$ حيث $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ علي السطح المكعب الـذي أوجهه هي المستويات $x = 0, x = 1$ ، $y = 0, y = 1$ ، $z = 0, z = 1$.

٤- احسب التكامل $\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$ حيث S سطح مقفل يحوي بداخله حجما V .

٥- إذا كانت $\vec{F} = xy\vec{i} - z\vec{j} + x^2\vec{k}$ ، $\varphi = 2xyz^2$ ، C هي المنحني $x = t^2, y = 2t, z = t^3$ مـن $t = 0$ إلي $t = 1$ احسب التكاملات الخطية الآتية :

أ- $\int_C \varphi d\vec{r}$ ، ب- $\int_C \vec{F} \wedge d\vec{r}$

٦- احسب التكامل السطحي $\iint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$ حيث $\vec{A} = 18z\vec{i} - 12\vec{j} + 3y\vec{k}$ حيث S جزء المستوى $2x + 3y + 6z = 12$ الموجود في الثمن الأول .

٧- احسب تكامل المركبـة العموديـة للمتجـه $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ علي السطح الكلـي للمخـروط الدائري القائم الذي قاعدته الدائرة $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$ ورأسه النقطة $(0,0,h)$.

٨- احســب التكامــل الســطحي $\iint_s (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{s}$ حيــث S هــي ســطح نصــف الكــرة العلــوي $x^2 + y^2 = a^2$ والدالة $\vec{F}$ هي $\vec{F} = \dfrac{x^2 + y^2}{y}\vec{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\vec{j} + xy^2\vec{k}$.

الباب الثالث

الإحداثيات المنحنية المتعامدة

الإحداثيات المنحنية :

في كثير من المسائل تتبسط الحسابات الرياضية إذا اخترنا مجموعة من الإحداثيات غير الإحداثيات الكرتيزية عند الصياغة الرياضية للمسألة . نفرض أن (x, y, z) إحداثيات نقطة ما ونفرض أن كلا من هذه الإحداثيات دالة في ثلاثة متغيرات (u_1, u_2, u_3) أي أن :

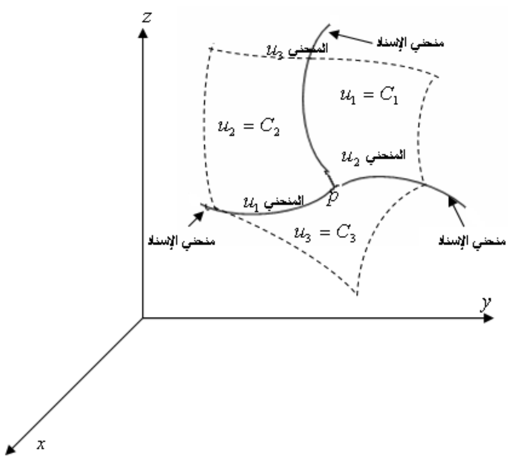
$$\left.\begin{aligned} x &= x(u_1, u_2, u_3) \\ y &= y(u_1, u_2, u_3) \\ z &= z(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots \quad .(1)$$

نفرض أن المعادلات الثلاثة يمكن أن تحل في (u_1, u_2, u_3) بدلالة (x, y, z) أي أن :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_1(x, y, z) \\ u_2 &= u_2(x, y, z) \\ u_3 &= u_3(x, y, z) \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots \quad .(2)$$

فإذا كانت هناك نقطة p في الفراغ إحداثياتها (x, y, z) يمكن من العلاقات السابقة (الصيغة (2)) تحديد موضعها بثلاث أعداد آخري (u_1, u_2, u_3) التي نسميها بالإحداثيات المنحنية للنقطة p . مجموعة المعادلات (1) أو (2) تعرف بإحداثيات التحول.

الإحداثيات المنحنية المتعامدة :



إذا ساوينا (u_1, u_2, u_3) السابقة بثلاث ثوابت (C_1, C_2, C_3) علي الترتيب ينتج عن ذلك ثلاث سطوح هي :

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= C_1 \\ u_2(x, y, z) &= C_2 \\ u_3(x, y, z) &= C_3 \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots \quad .(3)$$

تسمي بسطوح الإسناد وأي اثنين من هذه السطوح يتقاطعان في منحني نسميه بمنحني الإسناد . وإذا تقاطعت هذه السطوح الثلاث علي التعامد أي كانت المماسات الثلاث للمنحنيات عند p فإننا نسمي هذه المجموعة بمجموعة الإحداثيات المنحنية المتعامدة.

متجهات الوحدة في المجموعات المنحنية المتعامدة :

نفـرض أن $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ هـو متجـه موضـع النقطـة p منسـوبا إلـي المحـاور الكرتيزيـة العادية. بالتالي فان المعادلة (1) يمكن كتابتها علي الصورة :

$$\vec r = \vec r(u_1, u_2, u_3)$$

$\therefore$ متجـه المماس للمنحنـي u_1 عند p (عليـه u_2, u_3 ثوابـت) هـو $\frac{\partial \vec r}{\partial u_1}$ بالتـالي فـان وحـدة متجـه المماس للمنحنـي u_1 فـي هذا الاتجـاه يكـون $\vec e_1 = \frac{\partial \vec r}{\partial u_1} \Big/ \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_1}\right|$ حيـث أن $\frac{\partial \vec r}{\partial u_1} = \vec e_1 \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_1}\right|$ وذلك يكون مساويا $\frac{\partial \vec r}{\partial u_1} = h_1 \vec e$ حيث $h_1 = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_1}\right|$.

$\therefore$متجـه المماس عنـد u_2 عند p (عليـه u_1, u_3 ثوابـت) هـو $\frac{\partial \vec r}{\partial u_2}$ بالتـالي فـان وحـدة متجـه المماس للمنحنـي u_2 فـي هذا الاتجـاه يكـون $\vec e_1 = \frac{\partial \vec r}{\partial u_2} \Big/ \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_2}\right|$ حيـث أن $\frac{\partial \vec r}{\partial u_2} = \vec e_1 \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_2}\right|$ وذلـك يكون مساويا $\frac{\partial \vec r}{\partial u_2} = h_2 \vec e$ حيث $h_2 = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_2}\right|$.

$\therefore$متجـه المماس عند u_3 عند p (عليه u_1, u_3 ثوابت) هو $\frac{\partial \vec r}{\partial u_3}$ بالتالي فان وحدة متجه المماس للمنحنـي u_1 فـي هـذا الاتجـاه يكـون $\vec e_1 = \frac{\partial \vec r}{\partial u_3} \Big/ \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_3}\right|$ حيـث أن $\frac{\partial \vec r}{\partial u_3} = \vec e_1 \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_3}\right|$ وذلـك يكـون مساويا $\frac{\partial \vec r}{\partial u_3} = h_3 \vec e$ حيث $h_3 = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u_3}\right|$.

عنصر الحجم في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$dV = \left|(h_1 du_1 \vec e_1)\cdot(h_2 du_2 \vec e_2)\wedge(h_3 du_3 \vec e_3)\right| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

وذلك لان $\left|\vec e_1 \cdot (\vec e_2 \wedge \vec e_3)\right| = \left|\vec e_1 \cdot \vec e_1\right| = 1$

صيغة الميل $\nabla\varphi$ في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

حيث $\nabla\varphi$ دالة متجهه . نفرض انه يمكن وصفها في الصورة الآتية :

$$\nabla\varphi = f_1 \vec e_1 + f_2 \vec e_2 + f_3 \vec e_3$$

حيث f_1, f_2, f_3 ثلاثة مركبات مجهولة مطلوب إيجادها وحيث أن :

$$d\vec r = \frac{\partial \vec r}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec r}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec r}{\partial u_3} du_3$$

$$d\vec r = h_1 \vec e_1 du_1 + h_2 \vec e_2 du_2 + h_3 \vec e_3 du_3$$

$$\because\ d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec r$$

$$\therefore\ d\varphi = (f_1 \vec e_1 + f_2 \vec e_2 + f_3 \vec e)\cdot(h_1 \vec e_1 du_1 + h_2 \vec e_2 du_2 + h_3 \vec e_3 du_3)$$

$$\therefore d\phi = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3 ,..........(1)$$

$$\because \phi = \phi(u_1, u_2, u_3)$$

$$\therefore d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3} du_3 ,..........(2)$$

وبمساواة طرفي المعادلة $(2),(1)$ **نجد أن :**

$$h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3} du_3 ,..........(3)$$

وحيث أن u_1, u_2, u_3 **متغيرات مستقلة نستطيع أن نساوي معاملات التفاضلات المناظرة في الطرفين فنحصل علي :**

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1},\ f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2},\ f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u_3},.........\ .(4)$$

ومن ذلك تصبح صيغة $\nabla \varphi$ **كالآتي :**

$$\nabla \varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\vec{e}_3 ,.........\ \otimes$$

وبذلك يصبح المؤثر التفاضلي الاتجاهي ∇ **في الإحداثيات المنحنية المتعامدة كالآتي :**

$$\nabla = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\vec{e}_3 ,.........\ .\otimes\otimes$$

نتائج :

نستطيع من صيغة ∇ **السابقة استنتاج ما يلي :**

-١

$$\nabla u_1 = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \ ، \ \nabla u_2 = \frac{\vec{e}_2}{h_2} \ ، \ \nabla u_3 = \frac{\vec{e}_3}{h_3}$$

-٢

$$\nabla u_2 \wedge \nabla u_3 = \frac{\vec{e}_2}{h_2} \wedge \frac{\vec{e}_3}{h_3} = \frac{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3}{h_2 h_3}$$

$$\therefore \nabla u_2 \wedge \nabla u_3 = \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}, \nabla u_3 \wedge \nabla u_1 = \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}, \nabla u_1 \wedge \nabla u_2 = \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}$$

-٣

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{e}_1) = \nabla \cdot (\varphi h_2 h_3 \nabla u_2 \wedge \nabla u_3),.........\ .(1)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{A} + \varphi (\nabla \cdot \vec{A})$$ **قاعدة**

$$\because \nabla \cdot (\varphi h_2 h_3 \nabla u_2 \wedge \nabla u_3) = (\nabla \varphi h_2 h_3) \cdot (\nabla u_2 \wedge \nabla u_3) + \varphi h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla u_2 \wedge \nabla u_3)$$

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{e}_1)=(\nabla\varphi h_2h_3)\cdot(\nabla u_2\wedge\nabla u_3)+\varphi h_2h_3(0)=(\nabla\varphi h_2h_3)\cdot(\nabla u_2\wedge\nabla u_3)$$

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{e}_1)=\left[\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(\varphi h_2h_3)+\frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(\varphi h_2h_3)+\frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(\varphi h_2h_3)\right]\cdot\frac{\vec{e}_1}{h_1h_2}$$

$$\therefore\ \nabla\cdot(\varphi\vec{e}_1)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(\varphi h_2h_3),.........\ .(i)$$

وبالمثل :

$$\therefore\ \nabla\cdot(\varphi\vec{e}_2)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(\varphi h_3h_1),.........\ .(ii)$$

$$\therefore\ \nabla\cdot(\varphi\vec{e}_3)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(\varphi h_1h_2),.........\ .(iii)$$

٤-

$$\nabla\wedge(\phi\vec{e}_1)=\nabla\wedge(h_1\phi\nabla u_1)$$

$$\because\ \nabla\wedge\phi\vec{A}=(\nabla\phi)\wedge\vec{A}+\phi\nabla\wedge\vec{A}$$ $\boxed{\text{قاعدة}}$

$$\therefore\ \nabla\wedge(\phi\vec{e}_1)=\nabla\wedge(h_1\phi\nabla u_1)=\nabla(h_1\phi)\wedge\nabla u_1+h_1\phi\nabla\wedge\nabla u_1=\nabla(h_1\phi)\wedge\nabla u_1+0$$

$$\nabla\wedge(\phi\vec{e}_1)=\nabla(h_1\phi)\wedge\frac{\vec{e}_1}{h_1}=\left[\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_1\phi)+\frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1\phi)+\frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1\phi)\right]\wedge\frac{\vec{e}_1}{h_1}$$

$$\therefore\ \nabla\wedge(\phi\vec{e}_1)=-\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1\phi)+\frac{\vec{e}_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1\phi)=\frac{\vec{e}_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1\phi)-\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1\phi)$$

$$\therefore\ \nabla\wedge(\phi\vec{e}_2)=\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2\phi)-\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2\phi)$$

$$\therefore\ \nabla\wedge(\phi\vec{e}_3)=\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3\phi)-\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3\phi)$$

صيغة التباعد $\nabla\cdot\vec{A}$ في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)=\nabla\cdot(A_1\vec{e}_1)+\nabla\cdot(A_2\vec{e}_2)+\nabla\cdot(A_3\vec{e}_3)$$

ومن النتيجة (3) نحصل علي :

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\vec{A}_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(\vec{A}_2h_1h_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(\vec{A}_3h_1h_2)\right]$$

صيغة الدوران $\nabla\wedge\vec{A}$ في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$\nabla\wedge\vec{A}=\nabla\wedge(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)=\nabla\wedge(A_1\vec{e}_1)+\nabla\wedge(A_2\vec{e}_2)+\nabla\wedge(A_3\vec{e}_3)$$

ومن النتيجة (4) نحصل علي :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1) + \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2) - \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)$$

$$+ \frac{\vec{e}_1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\vec{e}_2}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3)$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{\vec{e}_1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\right] + \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3)\right]$$

$$+ \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\right]$$

$$\therefore \nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} & \dfrac{\vec{e}_2}{h_3 h_1} & \dfrac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

مؤثر لابلاس $\nabla^2 \psi$ في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \nabla \psi$$

$$\nabla \psi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial u_3}$$

إذا كان $\vec{A} = \nabla \psi$

$$A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_2}, A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial u_3}$$

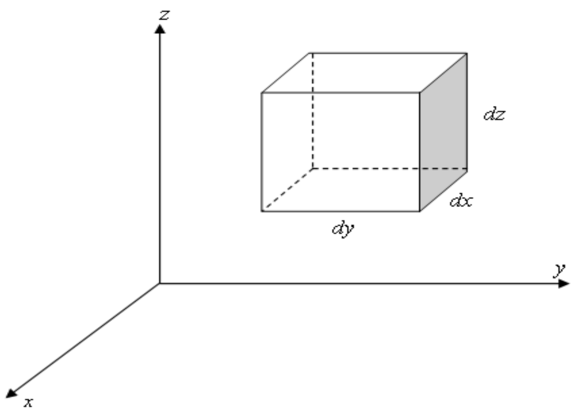
$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

حالات خاصة من الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

١ ـ الإحداثيات الكرتيزية :

تعتبر أنظمة الإحداثيات الكرتيزية هي ابسط أنظمة الإحداثيات وفي هذه الحالة :

$$u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z$$



سطوح الإسناد هي عبارة عن مستويات :

أ- المستوي $x = 0$ **وهو المستوي** yz

ب- المستوي $y = 0$ **وهو المستوي** xz

ج- المستوي $z = 0$ **وهو المستوي** xy

منحنيات الإسناد هي عبارة عن خطوط مستقيمة :

أ- المحور x **أي** $y = z = 0$.

ب- المحور y أي $x = z = 0$.
ج- المحور z أي $x = y = 0$.
عنصر الطول في الإحداثيات الكرتيزية :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

بالمقارنة بالإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$(ds)^2 = h_1^2 (dx)^2 + h_2^2 (dy)^2 + h_3^2 (dz)^2$$

أي أن $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ ، أي نظام الإحداثيات الكرتيزية ينفرد بأن كل من h_1, h_2, h_3 ثوابت وهي ميزة ذات أهمية حيث أن $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ تناظر متجهات الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ علي الترتيب والتي لها اتجاهات ثابتة .

عنصر المساحة في الإحداثيات الكرتيزية :

$$ds_1 = dydz$$
$$ds_2 = dxdz$$
$$ds_3 = dxdy$$

عنصر الحجم في الإحداثيات الكرتيزية :

$$dV = dxdydz$$

وبفرض أن φ دالة قياسية في الموضع وبفرض أن $\vec{A}$ دالة اتجاهية في الموضع ومما سبق نجد أن :

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

٢- الإحداثيات الاسطوانية :

في نظام الإحداثيات الاسطوانية نجد أن المعادلات الخطية المنحنية الثلاث u_1, u_2, u_3 تناظر ρ, φ, z علي الترتيب $u_1 = \rho, u_2 = \varphi, u_3 = z$ حيث $-\infty \le z \le \infty$ ، $0 \le \varphi \le 2\pi$ ، $0 \le \rho \le \infty$.

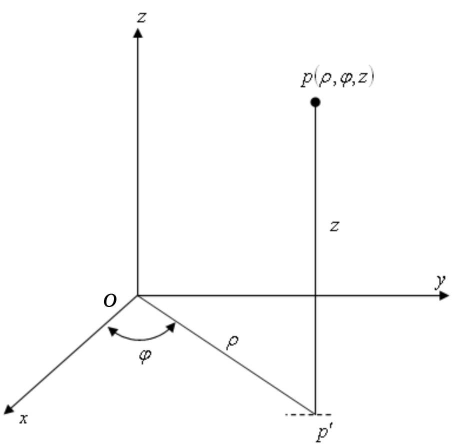
وسطوح الإسناد في الإحداثيات الاسطوانية (أسطح الإحداثيات)

$\rho = const = C_1$ وهي تمثل جميع الاسطوانات الدائرية التي لها محور z مشترك أو محور z إذا كان $\rho = 0$.

$\varphi = const = C_2$ وهو يمثل جميع المستويات الرأسية التي تمر بمحور z .

$z = const = C_3$ وهي تمثل جميع المستويات المتوازية التي توازي xy (المستويات العمودية علي z).

(١) العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية والاسطوانية :



$$\varphi = x\hat{o}p'$$
$$\rho = op'$$
$$z = p'p$$

حيث p' هي المسقط العمودي للنقطة p علي المستوي oxy.

معادلات التحويل مع الإحداثيات الكرتيزية هي :

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho Cos\ \varphi \\ y &= \rho Sin\ \varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\},.........\ .(1)$$

والتحويلات العكسية وذلك بتربيع معادلة (1), (2) والجمع :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = Tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

منحنيات الإسناد هي :

١- تقاطع الاسطوانة $\rho = C_1$ مع المستوي $\varphi = C_2$ هو المنحني z هو عبارة عن خط مستقيم.

٢- تقاطع الاسطوانة $\rho = C_1$ مع المستوي $z = C_3$ هو دائرة أفقية أي منحني φ (الذي تتغير عليه φ فقط).

٣- تقاطع المستوي $\varphi = C_2$ مع المستوي $z = C_3$ هو عبارة عن خط مستقيم أفقي أي منحني ρ (الذي تتغير عليه ρ فقط).

متجهات الوحدة في الإحداثيات الاسطوانية :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{r} = \rho Cos\ \varphi\vec{i} + \rho Sin\ \varphi\vec{j} + z\vec{k}$$

متجهات المماس للمنحنيات ρ, φ, z تعطي من :-

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$$

حيث أن :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = Cos\ \varphi \vec{i} + Sin\ \varphi \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho Sin\ \varphi \vec{i} + \rho Cos\ \varphi \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$$

متجه الوحدة في اتجاه متجهات المماس للمنحنيات

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right|} = \frac{Cos\phi \vec{i} + Sin\phi \vec{j}}{\sqrt{Cos^2\phi + Sin^2\phi}} = Cos\phi \vec{i} + Sin\phi \vec{j}.$$

في اتجاه نصف القطر ρ.

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|} = -Sin\ \varphi \vec{i} + Cos\ \vec{j}.$$

في اتجاه تزايد φ.

$$\vec{e}_z = \vec{k}$$

في اتجاه تزايد z.

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = \left(Cos\ \varphi \vec{i} + Sin\ \varphi \vec{j}\right) \cdot \left(-Sin\ \varphi \vec{i} + Cos\ \varphi \vec{j}\right)$$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = -Sin\ \varphi Cos\ \varphi + Sin\ \varphi Cos\ \varphi = 0, (\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \left(Cos\ \varphi \vec{i} + Sin\ \varphi \vec{j}\right) \cdot \vec{k} = 0, \left(\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_z\right)$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \cdot\left(-Sin\ \varphi \vec{i} + Cos\ \varphi \vec{j}\right) \cdot \vec{k} = 0, \left(\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_z\right)$$

وبالتالي تكون $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ مجموعة يمينية متعامدة من المتجهات.

عنصر الطول في الإحداثيات الاسطوانية :

$$x = \rho Cos\ \varphi, y = \rho Sin\ \varphi, z = z$$

$$\vec{r} = \rho Cos\ \varphi \vec{i} + \rho Sin\ \varphi \vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = \left(Cos\ \varphi \vec{i} + Sin\ \varphi \vec{j}\right) d\rho + \left(-\rho Sin\ \varphi \vec{i} + \rho Cos\ \varphi \vec{j}\right) d\varphi + dz\,\vec{k}$$

$$d\vec{r} = \left(Cos\ \varphi d\rho - \rho Sin\ \varphi d\varphi\right)\vec{i} + \left(Sin\ \varphi d\rho + \rho Cos\ \varphi d\varphi\right)\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \left(Cos\ \varphi d\rho - \rho Sin\ \varphi d\varphi\right)^2 + \left(Sin\ \varphi d\rho + \rho Cos\ \varphi d\varphi\right)^2 + (dz)^2$$

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2$$

بالمقارنة بالإحداثيات المنحنية المتعامدة

$$(ds)^2 = h_1^2 (d\rho)^2 + h_2^2 \rho^2 (d\varphi)^2 + h_3^2 (dz)^2$$

$$\therefore\ h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$$

$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 , \longrightarrow$ **" في الإحداثيات المنحنية المتعامدة "**

$dV = \rho d\rho d\varphi dz , \longrightarrow$ **" في الإحداثيات الاسطوانية "**

مثال (١):

عبر عن الكمية الآتية في الإحداثيات الاسطوانية :

أ- $\nabla \Phi$ ، **ب-** $\nabla \cdot \vec{A}$ ، **ج-** $\nabla \wedge \vec{A}$ ، **د-** $\nabla^2 \psi$

الحل:

أ- في الإحداثيات الاسطوانية (ρ, φ, z)

$u_1 = \rho$	$u_2 = \varphi$	$u_3 = z$
$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$	$\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_3 = \vec{e}_z$
$h_1 = h_\rho = 1$	$h_2 = h_\varphi = \rho$	$h_3 = h_z = 1$

$\nabla \Phi$ **في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :**

$$\nabla \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \vec{e}_3$$

$\therefore$ $\nabla \Phi$ **في الإحداثيات الاسطوانية :**

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

ب- $\nabla \cdot \vec{A}$ **في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :**

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(h_2 h_3 A_1 \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(h_1 h_3 A_2 \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(h_1 h_2 A_3 \right) \right]$$

$\therefore$ $\nabla \cdot \vec{A}$ **في الإحداثيات الاسطوانية :**

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho A_\rho\right)\right]$$

حيث أن

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$$

ج- $\nabla \wedge \vec{A}$ في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ $\nabla \wedge \vec{A}$ في الإحداثيات الاسطوانية :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

د- $\nabla^2 \psi$ في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$\therefore$ $\nabla^2 \psi$ في الإحداثيات الاسطوانية :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right]$$

تمــارين

١ - مثل المتجه $\vec{A} = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$ في الإحداثيات الاسطوانية ثم اوجد A_ρ , A_φ , A_z .

٢ - اثبت أن مجموعة الإحداثيات u_1 , u_2 , u_3 التي ترتبط بالإحداثيات الكرتيزية بالعلاقات :

$$x = \frac{1}{2}\left(u_1^2 - u_2^2\right) \quad ، \quad y = u_1 u_2 \quad ، \quad z = u_3$$

هي مجموعة متعامدة واوجد أيضا :

أ- عنصر الحجم وعنصر المساحة.

ب- u_1 , u_2 , u_3 بدلالة الإحداثيات الاسطوانية.

٣- إذا كانت $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + 2yz\vec{j} + (x+z)\vec{k}$ فاحسب قيمة كلا من $\nabla \cdot \vec{F} , \nabla \wedge \vec{F}$ في كلا من الإحداثيات الكرتيزية والإحداثيات الاسطوانية.

المــراجع

1- Hurray R. Spiegel, Schum's outline Series, "Theory and Problem Of Theoretical Mechanics"

2- Analytical Dynamics of Particle and of Rigid Bodies by S.R.Gypta,1964.

3- Analytical Dynamics of Particle and of Rigid Bodies by S. R.Gypta,1969.

4- Dynamics by H. Lamb, 1951.

5- Vector Analysis by N. M. Queen, 1967.

6- Dynamics by H. Lamb, 1960.

7- R.S. Ktturmi and J. K. Gupta, "Theory of Machines.

8- Bruce j. Torby "Advanced Dynamics for Engineers".

9- Analytical Mechanics, Part II, by S.R. Gupta, 1963.

10- Mechanics for Engineering by Beer, 1968.

11- Classical Mechanics, by H .Gold Stein, 1972.

الباب الرابع
إستاتيكا الموائع (الهيدرواستاتيكا)

مقدمة

من المعروف ان جميع المواد تتحمل تشويهات (deformation) تحت تاثير القوى الخارجية وهذا التشويه يسمى مرن (Elastic) اذا اختفى بعد ازالة تاثير القوى ويسمى صلب (plastic) اذا احتفظ بنفسة بعد ازالة القوى ويسمى انسياب Flow اذا استمر التشوية يزداد بدون حد تحت تاثير القوى مهما كانت صغيرة.
وتعرف الموائع Fluids بانها مواد قابلة للانسياب وعلى التشكل بشكل الاوعية المحتوية لها ولا تظل الموائع ساكنة اذا اثرت عليها قوة مماسية.
وتنقسم الموائع الى سوائل وغازات:

السوائل:

اذا ضغطت فى حيز فانها تتحمل ضغوطا عالية دون تغيير يذكر فى حجمها وكثافتها (اى انها غير قابلة للانضغاط) بعكس الغازات فانها قابلة للانضغاط ويتغير حجمها وكثافتها.
والموائع حقيقية لا تملا تماما الحيز الذى يشغلة فهى عبارة عن جزئيات المسافة بينهما فى السوائل اصغر كثيرا منها فى الغازات وانضغاط الموائع ما هو إلا نقصان فى حجم الفرغات الموجودة بين الجزيئات .
ودراسة الموائع بهذه الصوره خارجة عن نطاق هذا الباب وفي واقع الأمر ليس هناك مايدعو لإعتبار المائع بهذةالصورة إذا اقتصرنا فى دراستنا على السوائل أوحتي الغازات ما دامت غير مخلخله صغيرة الكثافة ولهذا الهدف يمكن أن نفترض أن المائع منتشر انتشارا متصلا فى الحيزالذى يشغلة بمعنى أن أية عنصر حجمة $\delta\tau$ من هذا الحيز يشغلة تماما جزء من هذا المائع .

القوى فى الموائع:

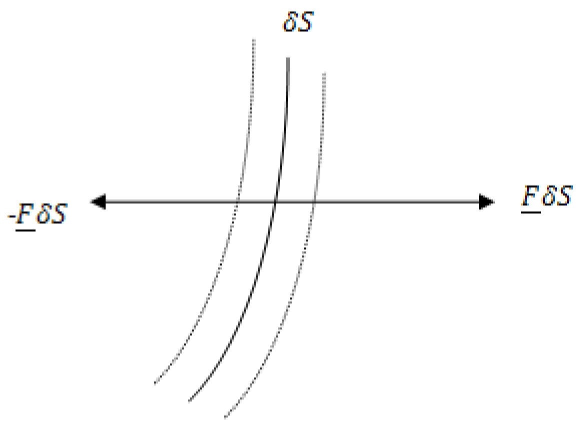
القوى التى تؤثر فى الموائع سواء عند إتزانها أو حركتها يمكن تقسيمها إلى نوعين :

١-قوى حجمية (Body or Valume Forces):

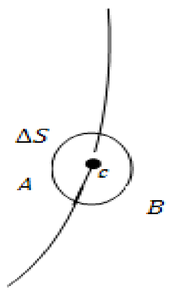
وهذه ناتجة من مؤثرات خارجية عن المائع وتؤثر على جميع جزيئاتة مثل قوى الجاذبية .
ولعنصر $\delta\tau$ من المائع عند نقطة ما فإن قوة من هذا النوع تؤثر علية يمكن كتابتها على الصوره $\vec{F}\rho\delta\tau$ وفيها F هى القوة لكل وحدة كتل من الموائع عند هذه النقطه.

٢-قوى سطحية surface forces:

وهى تمثل تاثير جزء من المائع الاخر (او على جدار السطح المحتوى) فهى نوع من قوى الفعل ورد الفعل.
بفرض ان سطحا δS عند نقطة A داخل المائع. جزئيات المائع على احد جانبى δS تؤثر على جزئياته على الجانب الاخر بقوة يمكن كتابتها على الصورة $\overrightarrow{F}\delta S$ والجزيئات الاخيرة تؤثر على الاولى بنفس القوة ولكن فى الاتجاه المضاد F اذن هى القوة لكل وحدة مساحات عند A اى الاجهاد عند A .



اذا قسمنا المائع الى جزئين A, B وبفرض ان $\vec{F}$ هى القوة المحصلة التى يؤثر بها الجزء B على مساحة ΔS حول النقطة c فان الاجهاد عند c هو نهاية $\frac{F}{\Delta S}$ عندما تؤول ΔS الى الصفر ويمكن تحليل الاجهاد عند اية نقطة



بالنسبة الى مستوى معلوم الى مركبتين مركبة فى اتجاه المماس للسطح ΔS ويسمى الاجهاد القاص ويقاوم المستويات المختلفة من الانزلاق بسهولة على بعضها حتى يمنع تغير الشكل ومركبة اخرى عمودية وتسمى بالاجهاد العمودى. نلاحظ ان المركبة الاولى تكون كبيرة نسبيا للسوائل اللزجة.

الضغط فى المائع

عندما يكون السائل فى حالة سكون (حالة اتزان)يتلاشى الاجهاد القاص عند اى نقطة بالنسبة لاى مستوى مار بها واذا تحرك المائع فان الاجهاد القاص يبدا بالظهور ويعتمد على سرعة الحركة. وفى حالة السوائل المتزنة وهى موضوع دراستنا فان سنعتبر فقط الاجهاد العمودى على المستوى الفاصل . وعلى هذا فان الضغط لمائع فى حالة سكون الواقع على اى سطح مار بنقطة معينة تكون عموديا على ذلك السطح .

شدة الضغط P

اذا كانت ΔN هى مقدار القوة الناتجة من ضغط المائع على المساحة ΔS عند A فان العلاقة

$$P = \frac{\Delta N}{\Delta S} \tag{4.1}$$

تعطى متوسط شدة الضغط P على المساحة ΔS وباخذ النهاية عندما تؤل ΔS الى الصفر فان العلاقة

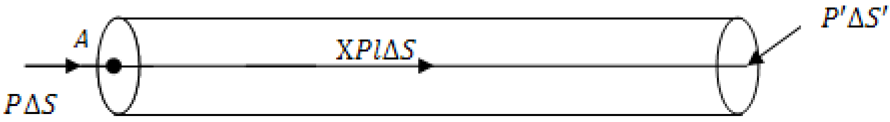
$$P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} \tag{4.2}$$

تعطى شدة ضغط المائع عند النقط A .

نلاحظ من العلاقة (4.١)او (4.2) ان P تتوقف ليس فقط على موضع A بل ايضا على اتجاه ΔS فى المائع ولكن هذا غير صحيح فى الموائع المتزنة عموما. ويمكن اثبات ذلك كما يلى

اعتبر إتزان جزء من المائع على شكل اسطوانة طولها l وقاعدتها ΔS عند النقطة A عمودية على محور الاسطوانة اما القاعدة الاخرى ΔS فتميل على المحور بزاوية α .
اى ان

$$\Delta S = \Delta S' \cos \alpha$$



هذه الاسطوانة متزنة تحت تاثير
١-القوى الخارجية. بفرض ان مركبتها فى اتجاه المحور هى $X\rho\, l\, \Delta S$.
٢-ضغط المائع على الجوانب المنحنية وهذه لتعامدها على هذه الجوانب ليس لها مركبة فى اتجاه المحور.
٣-ضغط المائع على القاعدتين مقدارة $P'\Delta S', P\Delta S$.
∴ معادلة الاتزان فى اتجاه محور الاسطوانة تعطى

$$X\rho\, l\Delta S - P'\Delta S' \cos \alpha + P\Delta S = 0$$

$$P' - P = X\rho\, l \qquad (4.3)$$

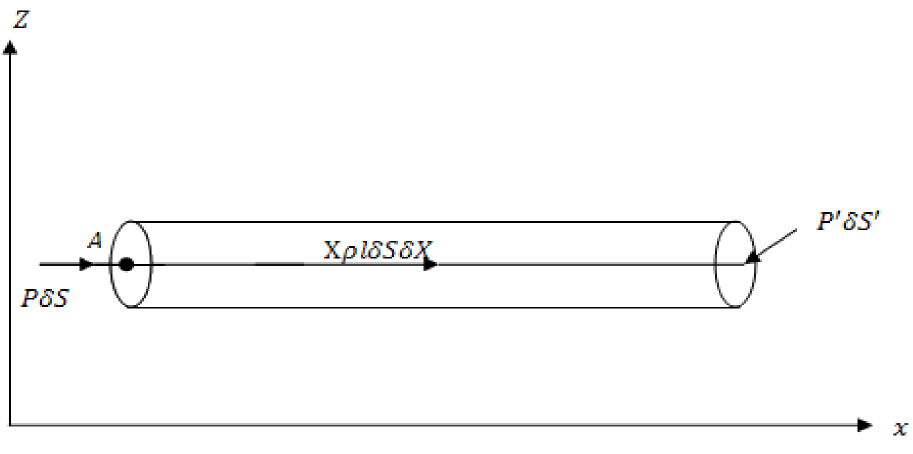
اذا انكمش العنصر حتى انطبقت القاعدتان عند $A(l \to 0)$ ينتج ان

$$P' = P$$

اى ان شدة الضغط لاتتوقف على اتجاة المساحة.
اذن شدة الضغط P دالة قياسية تتوقف على الموضع فقط

المعادلات العامة لاتزان مائع:

نعتبر إتزان جزء من المائع على شكل اسطوانة قائمة محورها AB فى اية اتجاه وليكون فى اتجاه المحور x نفرض ان مساحة قاعدة الاسطوانة ΔS وطول محورها Δx .



كما فى البند السابق يمكننا كتابة معادلة الاتزان فى اتجاه المحور على الصورة

$$P' - P = X\rho . \Delta x \qquad (4.4)$$

وحيث ان شدة الضغط دالة فى الموضع فقط واذا إفترضنا ان مفكوك تيلور لهذه الدالة صحيح عند A ، والمنطقة حولها فإن

$$P' = P + \Delta P = P + \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x \qquad (4.5)$$

بالتعويض فى المعادلة الاتزان واخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ ينتج ان

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho X \qquad (4.6)$$

وبالمثل فى الاتجاهين y, z نحصل على

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho Y \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho Z \tag{4.8}$$

اى ان معادلات الاتزان لمانع يمكن كتابتها فى الصوره الاتجاهية

$$\nabla P = \rho \vec{F} \tag{4.9}$$

إتزان سائل متجانس:

فى الحالة تكون ρ مقدار ثابت ويتعين شدة الضغط p عند اية موضع A فى السائل من معادلات الاتزان ولما كانت p دالة للموضع ووحيدة القيمة ومتصلة فان

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \tag{4.10}$$

$$= \rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right)$$

إذن الكمية بين القوسين يجب ان تكون تفاضل تام وكما هو معلومة فان هذا يتحقق اذا كانت

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

اى ان

$$\nabla \wedge \vec{F} = 0 \tag{4.11}$$

هذه المعادلة تعطى الشرط الازم تحققه حتى يمكن للسائل أن يتزن تحت تاثير مجال القوى $\vec{F}$
بتكامل المعادلة (٤.١٠) نحصل على

$$P - P_o = \rho\int_o^A (Xdx + Y\,dy + Zdz) \tag{4.12}$$

حيث p_o هى شدة الضغط عند نقطة ما o .

ويحسب التكامل على اى منحنى يصل بين A, o ونتيجة للشرط (4.11.) فاننا نحصل على نفس الدالة لشدة الضغط مهما كان اختيارنا لمنحنى التكامل .

عندما يكون المائع متزنا تحت تاثير الجاذبية فان $F = (o, o, g)$ وذلك عند إتخاذ المحور z راسيا الى اسفل .

واذا كانت نقطة الاصل عند o فان المعادلة (٤.١٢) تعطى

$$p - p_o = \rho\int_o^z g\,dz$$

$$= \rho\, g\, z$$

$$\therefore\; p = p_o + \rho\, g\, z \tag{٤.13}$$

من الواضح انه اذا كانت o عند السطح الحر للسائل فان p_o تكون مساوية للضغط الجوى .

من العلاقة (4.13) نرى ان السطوح متساوية الضغط (اى ان السطوح التى يتساوى عليها شدة الضغط عند كل نقطة منها) هى المستويات الافقية

$$Z = \cos\tan t$$

وعلى ذلك فان السطح الحر للسائل هو الأخر افقى اذن هو احد هذه المستويات شدة الضغط عليها مساوية للضغط الجوى.

مثال:

إسطوانة دائرية نصف قطرها a وارتفاعها h بها كمية من سائل متجانس ، وضعت الاسطوانة ومحورها راسى فى مجال للقوى اثر على السائل بقوة طاردة عمودية على محور الاسطوانة ومقدارها

$\frac{2hg}{c^2}r$ لكل وحدة كتل ، r هى البعد عن محور الاسطوانة . اوجد شدة الضغط عند اية نقط من السائل اذا كانت p_o هو الضغط الجوى. اوجد ايضا حجم اكبر كمية من السائل يمكن ان تحتويها الاسطوانة.

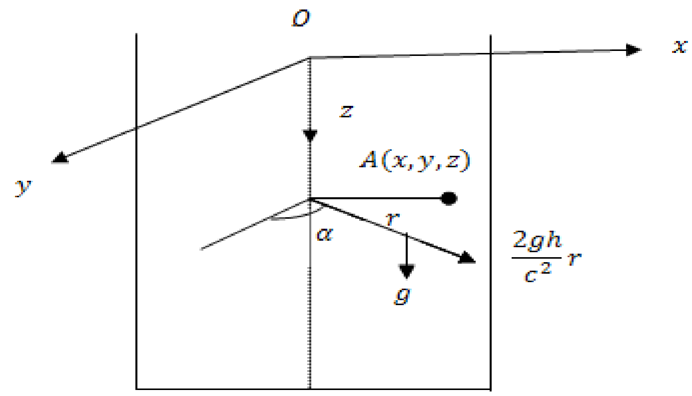
الحل

باتخاذ المحور oz راسيا الى اسفل منطبقا على محور الاسطوانة فان القوى المؤثرة على السائل فى اتجاه محاور الاحداثيات عند النقطه (x, y, z) هى

$$X = \frac{2gh}{c^2} r \sin \propto$$

$$\therefore X = \frac{2gh}{c^2} x$$

$$Y = \frac{2gh}{c^2} r \cos \propto$$



$$\therefore Y = \frac{2gh}{c^2} y$$

$$Z = g$$

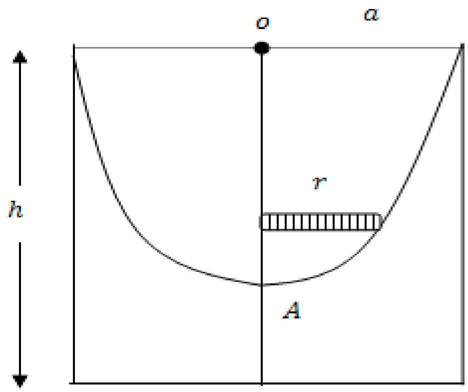
ومن معادلة الاتزان للسائل

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2gh\rho}{c^2} x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2gh\rho}{c^2} y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

$$\therefore dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$



(أ)

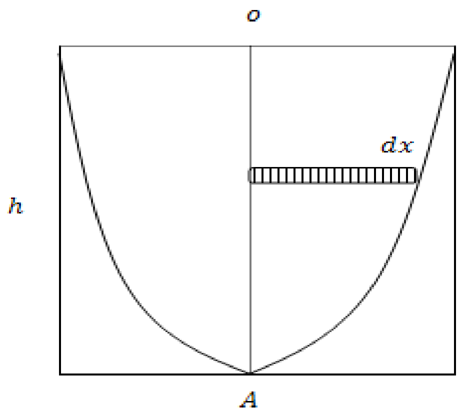
$$dp = \rho\left[\frac{2gh}{c^2}(xdx + ydy) + gdz\right]$$

$$\therefore\ p = \rho\left[\frac{2gh}{c^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) + gz\right] + c$$

$$p = \rho\left[\frac{gh}{c^2}r^2 + gz\right] + c$$

فاذا اتخذنا نقطة الاصل o عند مركز حافة الاسطوانة فان $p = p_o$ عند $r = a, z = 0$ اى ان

$$c = p_o - \frac{\rho\, gh\, a^2}{c^2}$$



(ب)

$$\therefore\ p = p_o + \rho\left[\left(\frac{gh}{c^2}\left(r^2 - a^2\right) + gz\right)\right]$$

عند السطح الحر للسائل $p = p_o$ فتكون معادلتة

$$z = \frac{h}{c^2}\left(a^2 - r^2\right)$$

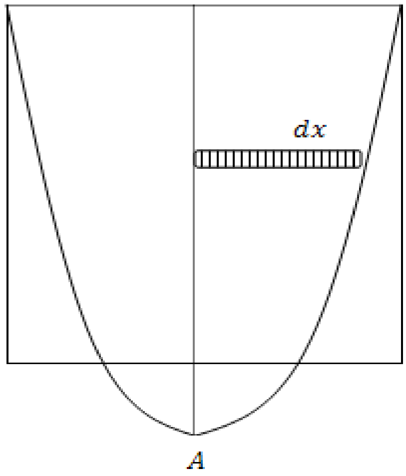
وهو قطع مكافئ دورانى حول محور الاسطوانة اكبر كمية من السائل يمكن ان تحتويها الاسطوانة عندما يمر هذا القطع بحافة الاسطوانة.

بوضع $r = 0$ يكون ارتفاع القطع

$$oA = \frac{a^2}{c^2}h$$

عند إيجاد حجم السائل هناك حالتان ينبغى التعويض لها.

(أ) $a \le c \;\; , \; oA \le h$ كما بالشكل (أ) او(ب)الحجم المطلوب V



(ج)

$$V = \pi a^2 h - \int_{r=a}^{r=0} \pi r^2 dz = \pi a^2 h - \int_o^a \frac{2\pi h}{c^2} r^3 dr$$

$$= \pi a^2 h - \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^a = \pi a^2 h - \frac{\pi h a^4}{2c^2}$$

$$V = \pi a^2 h\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)$$

(ب) $a \ge c \;\; , \; oA \ge h$ كما بالشكل (ج) او(ب) حجم السائل فى هذه الحالة

$$V = \pi a^2 h - \int_o^h \pi r^2 dz = \pi a^2 h - \int_o^h \pi \left(a^2 - \frac{c^2}{h} z\right) dz$$

$$V = \frac{\pi a^2 h}{2}$$

إتزان غاز:

لما كان الغاز قابلا للانضغاط اى ان ρ كمية متغيرة فان لحساب p يلزمنا معادلة أخرى بالاضافة الى معادلة الاتزان . هذه المعادلة نستمدها فى كثير من الاحيان من معادلات علم الديناميكا الحرارية المعروف بمعادلات حالة الغاز مثل

$$p = k\rho \tag{4.13}$$

عندما تظل درجة الحرارة ثابتة للغاز
او

$$p = k\rho^{\gamma}$$

(حيث γ مقدار ثابت) عندما تظل كمية الحرارة ثابتة وفى أحيان اخرى تكون ρ معلومة كدالة فى الموضع .
بضرب طرفى معادلة الاتزان فى $\nabla \wedge$ نحصل على

$$\nabla \wedge \nabla p = \nabla \wedge \rho \vec{F}$$

$$o = \nabla \wedge \rho \vec{F} \tag{4.14}$$

$$\because \nabla \wedge \phi \vec{A} = \nabla \phi \wedge \vec{A} + \phi \nabla \wedge \vec{A}$$

حيث ϕ كمية قياسية و A كمية متجهة وبذلك يمكن كتابة المعادلة (٥.١٤) فى الصورة

$$o = \nabla \rho \wedge \vec{F} + \rho \nabla \wedge \vec{F} \tag{4.15}$$

وبضرب هذه المعادلة قياسيا فى $\vec{F}$

$$o = \vec{F} \cdot \nabla \rho \wedge \vec{F} + \rho \vec{F} . \nabla \wedge \vec{F}$$

وبالقسمة على ρ

$$\therefore \vec{F} . \nabla \wedge \vec{F} = 0 \tag{4.16}$$

وهذا هو الشرط اللازم تحققه حتى يمكن للغاز ان يتزن تحت تاثير مجال القوى $\vec{F}$.
كما اثبتنا فى السوائل فإن شدة الضغط p عند اية نقطة A مثلا تتعين بتكامل المعادلة

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) \tag{4.17}$$

اذا إتزن الغاز تحت تاثير الجاذبية الارضية فإن

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \frac{\partial p}{\partial y} = 0 , \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{4.18}$$

وفى هذه المعادلات اتخذنا المحور oz رأسيا الى أعلى اذن p دالة للمتغير z
وبفرض ان العلاقة بين ρ , p معطاه فى الصوره

$$p = k\rho^{n} \tag{4.19}$$

حيث k ثابت . إذن

$$\frac{dp}{dz} = -g\left(\frac{p}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.20}$$

بفضل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\left(\frac{n}{n-1}\right) p^{(\frac{n-1}{n})} = \frac{-g}{k^{\frac{1}{n}}} z + c_1 \qquad n \neq 1$$

واذا كانت $p = P_o$ عندما $z = o$ فان

$$c_1 = \left(\frac{n}{n-1}\right) p_o^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)\left[p^{\frac{n-1}{n}} - p_o^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{-g}{k^{\frac{1}{n}}} z \qquad (4.21)$$

ومن معادلة (٥.١٩) يمكن ايجاد الثابت k عندما
$\rho = \rho_o , p = p_o , z = o$

$$\therefore \rho_o = k\rho_o^n$$

$$k = \frac{p_o}{\rho_o^n} \qquad (422)$$

$$\therefore \left(\frac{n}{n-1}\right)\left[p^{\frac{n-1}{n}} - \rho_o^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{-g\ \rho_o}{p_o^{1/n}} z$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right) p_o^{\frac{n-1}{n}}\left[\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] = \frac{-g\rho_o z}{p_o^{\frac{1}{n}}}$$

$$\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 = \frac{-g\rho_o z}{p_o^{\frac{1}{n}} p_o^{\frac{n-1}{n}}}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{-g\ p_o z}{p_o}\left(\frac{n-1}{n}\right) + 1$$

$$\frac{p}{p_o} = \left[1 - \frac{g\ \rho_o z}{p_o}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\frac{p}{p_o} = \left[1 - \frac{gz}{RT_o}\left(\frac{n-1}{n}\right) z\right]^{\frac{n}{n-1}} \qquad (4.23)$$

ه

اذا ان $p_o = \rho_o RT_o$ كما هو معروف من القانون العام للغازات وللقيمة الخاصة $n = 1$

$$\frac{p}{\rho} = K = RT_o = \frac{p_o}{\rho_o}$$

وتعطى معادلات الاتزان العلاقة

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{k} p = -\frac{g}{RT_o}\rho$$

$$\frac{p}{p_o} = \exp\left(-\frac{g}{k} z\right) = \exp\left(-\frac{g}{RT_o} z\right) \qquad (4.24)$$

ولقيم z الصغيرة فانه باستخدام مفكوك تيلور يمكن تقريب المعادلتين (4.23)،(4.24) لتصبحا على الصورة

$$p = p_o - \rho_o gz \qquad (4.25)$$

وبقارنة هذه العلاقة بالعلاقة (4.13) فى البند السابق للسوائل يمننا القول انة لقيم z الصغيرة اى فى المنطقة المحيطة بالنقطة o يمكن معاملة الغاز كما لو كان مائعا ذات كثافة ثابتة ρ .

هذه النتائج لها اهمية خاصة عند دراسة الغلاف الجوى فالعلاقة $p = k\rho^{n}$ صحيحة للهواء وتاخذ n فيما تختلف باختلاف الارتفاع عن سطح الارض فهى تساوى 1.238 حتى ارتفاع ١١ كيلو متر ثم ناخذ القيمة ١ حتى ارتفاع ٣٢ كيلو متر عن سطح الارض.

مثال:

على ارتفاع z من سطح الارض كانت كثافة الهواء ρ وشدة ضغطه p وعند سطح الارض كانت قيمتها ρ_o , p_o اذا كانت $\rho = \rho_0 e^{-\lambda z}$ حيث λ ثابت واعتبرت الجاذبية الارضية ثابتة اوجد p عند ايه ارتفاع z.

اذا اتزن فى هذا الجو بالون كردى نصف قطرة a عندما كان ارتفاع مركزه عن سطح الارض h

أوجد وزن البالون.

الحل

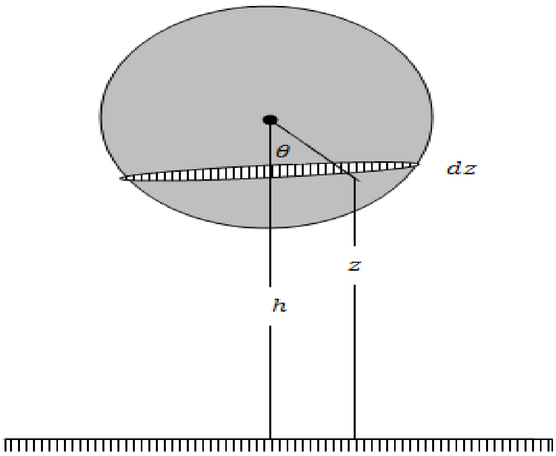
معادلتا اتزان الهواء فى الاتجاهين الافقيين x, y هما

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

اى ان p لا يتوقف على x او y .

$\therefore$ معادلة إتزان الهواء فى الاتجاة الراسى تصبح

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g = -\rho_o e^{-\lambda z} g \qquad (2)$$



$$\therefore\ p = \frac{\rho_o g}{\lambda} e^{-\lambda z} + c$$

ولكن $\rho_o = p_o$ عندما $z = 0$ اذن

$$c = p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda}$$

$$\therefore\ p = p_o - \frac{g\rho_o}{\lambda}(1 - e^{-\lambda z}) \qquad (3)$$

ضغط الهواء على العنصر ΔS من سطح البالون عمودى علية ويساوى $p\Delta S$.
من التماثل محصلة القوى الناتجه من ضغط الغاز على سطح البالون كله راسيا ومقدارها

$$P = \int p \cos\theta\, dS$$

$$= \int \left[p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda z}\right) \right] \cos\theta\, dS$$

على سطح البالون

$$dS = 2\pi\, a\, dz$$

$$z = h - a\cos\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = o + a\sin\theta$$

$$dz = a\sin\theta\, d\theta$$

بالتعويض نحصل على

$$P = -2\pi a \int_{h-a}^{h+a} \left[p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda z}\right) \right] \left(\frac{z-h}{a} \right) dz$$

ضع

$$Z = z - h$$

$$dZ = dz$$

$$\therefore\ P = -2\pi \int_{-a}^{a} \left[p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda} + \frac{\rho_o g e^{-\lambda h}}{\lambda} e^{-\lambda h} \right] Z dz$$

$$\therefore\ P = -\frac{2\pi\rho_o}{\lambda} e^{-\lambda h} \left[\frac{-ze^{-\lambda z}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda^2} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{4\pi\rho_o}{\lambda^3} e^{-\lambda h} \left[a\lambda \cosh\ \lambda a + \sinh\ \lambda a \right]$$

البالون متزن تحت تاثير وزنة W ومحصلة ضغط الهواء P

$$\therefore\ W - P = 0$$

$$\therefore\ W = \frac{4\pi\rho_o}{\lambda^3} e^{-\lambda h} \left[a\,\lambda \cosh\ \lambda a + \sinh\ \lambda a \right]$$

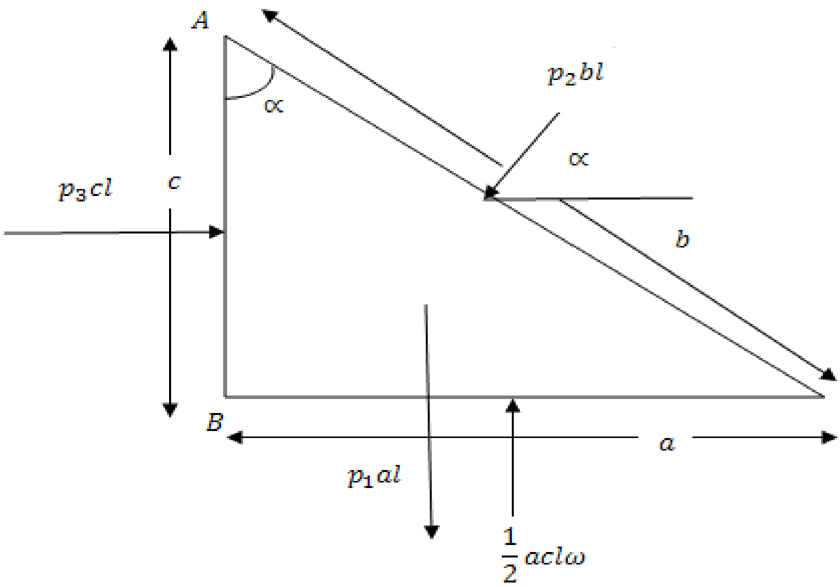
.

نظريات:

نظرية (١):

الضغط عند اى نقطة ثابت بالنسبة لجميع المستويات المارة بها .

لاثبات هذه النظرية . نعتبر منشور ثلاثى من المانع طولة l ومقاطعة كما بالشكل ممثل بالمثلث ABC الذى اطواله a, b, c فى حالة الاتزان.



نفرض ان الضغط المؤثر على الاضلاع المنشور هى p_1, p_2, p_3 اجهادات عمودية وتؤثر على الاوجه الثلاثة

$$p_2 = \frac{F_1}{bl}$$ (الاجهاد العمودى المؤثر على الضلع Ac)

$$p_1 = \frac{F_2}{al}$$ (الاجهاد العمودى المؤثر على الوجه الممثل بالضلع Ac)

$$p_3 = \frac{F_3}{cl}$$ (الاجهاد المؤثر على الوجه الممثل بالضلع AB)

اذن $F_3 = p_3 cl \;,\; F_1 = p_1 al \;,\; F_2 = p_2 bl$

هذا المنشور من المانع متزن تحت تاثير وزنة راسيا لاسفل وهذه القوى الثلاثة.

بتحليل القوى فى الاتجاهين الافقى والراسى فان معادلتى الاتزان هما

$$p_3 lc = p_2 lb \cos \propto \qquad (4.26)$$

$$p_1 la = p_2 lb \sin \propto + \frac{1}{2} acl\,\omega \qquad (4.27)$$

حيث ω هى الوزن النوعى للمائع ووحداتها هى قوة على وحدة الحجم.
من هندسة الشكل نلاحظ ان

$$\cos \propto = \frac{c}{b} \;,\; \sin \propto = \frac{a}{b} \qquad (4.28)$$

بالتعويض من (4.28) فى (4.26)،(4.٢٧) نحصل على

$$p_3 = p_2 , \qquad (4.29)$$

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} c\,\omega \qquad (4.30)$$

العلاقة (4.30) صحيحة لاى ابعاد للمنشور.
اذا كانت أبعاد المنشور صغيرة جدا تؤول الى الصفر فان المعادلة (4.30) تعطى

$$p_1 = p_2 \qquad (4.31)$$

من المعادلات (4.29)،(4.31) نحصل على

$$p_1 = p_2 = p_3$$

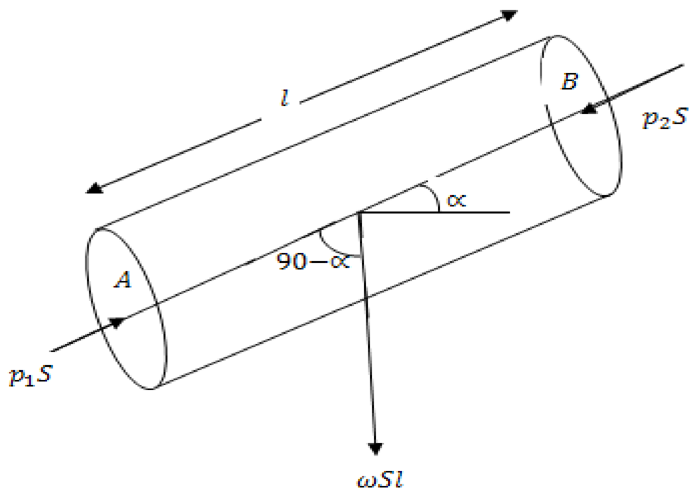
إنتقال الضغط:

اذا اثر ضغط اضافى عند اى جزء من مائع فى حالة سكون فان هذا الضغط ينتقل الى جميع اجزاء المائع بنفس القيمة .

ولاثبات ذلك نعتبر اسطوانة من المائع كما بالشكل
الاسطوانة فى حالة اتزان تحت تاثير وزنها $\omega\, S\, l$ والقوى الناتجة من الضغطين على المقطعين عند A, B وهما $p_1 S, p_2 S$ على الترتيب. حيث S مساحة مقطع الاسطوانة، l طولها ، ω الوزن النوعى للمائع.

من شروط الاتزان نجد انه بالتحليل فى اتجاه محور الاسطوانة AB فان

$$p_1 S - \omega\, Sl \sin \propto - p_2 S = 0 \qquad (4.36)$$



بفرض حدوث إضافة عند A فى الضغط وليكن مقداره p_1^1 وان الضغط الاضافى الناتج B هو p_2^1 من شروط الاتزان والتحليل فى اتجاه AB نجد ان

$$\left(p_1 + p_1^1\right)S - \left(p_2 + p_2^1\right)S - \omega\, sl \sin \propto = 0 \qquad (4.37)$$

بطرح (4.36)من(4.37) نحصل على

$$P_1^1 = P_2^1 \qquad (4.38)$$

النتيجة (4.38) تعنى ان الضغط الاضافى p_1^1 عند A ينتقل كما هو عند B . وحيث ان النتيجة السابقة لا تعتمد على طول الاسطوانة فان الضغط الاضافى p_1^1 عند A ينتقل على الفور الى جميع نقط السائل .

ملحوظة:

نلاحظ انة اذا اعتبرنا الاسطوانة افقية ، اى ان $\propto = 0$ فان من معادلة (١) نحصل على

$$p_1 = p_2$$

اى ان الضغط عند نقطتين فى مستوى افقى واحد يكون متساوى.

الضغط على السطوح المستوية:

نفرض سطح مستوى مغمور فى سائل. والمطلوب إيجاد القوى الناتجة من الضغط المحصل على هذا السطح المستوى.

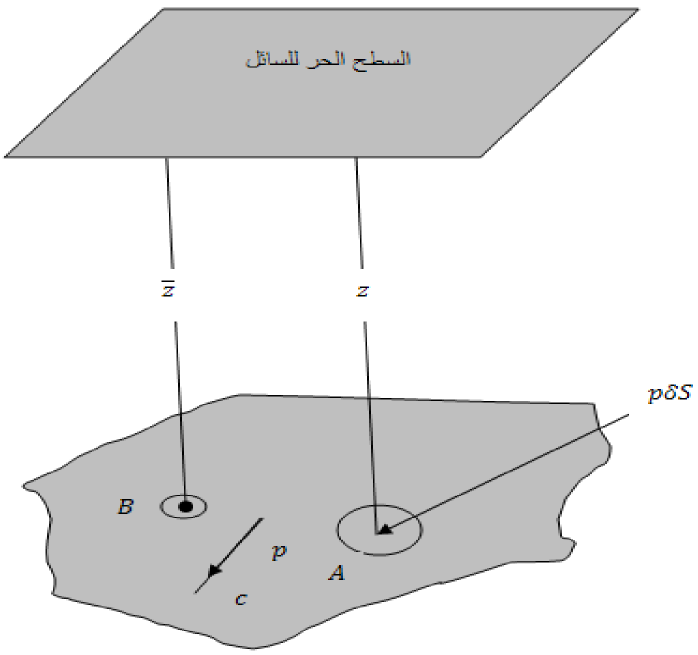
النظرية التالية توضح لنا كيفية حساب القوى الناتجة من الضغط المحصل على الصفائح المستوية المغمورة فى سوائل.

نظرية(٢):

القوى الناتجة من الضغط المحصل على صفيحة مستوية مغمورة فى سائل يساوى حاصل ضرب الضغط عند مركز كتلى الصحيفة x مساحة الصحيفة.

لاثبات هذة النظرية نفرض اننا قسمنا الصحيفة الى عناصر صغيرة وتعتبر عنصر مساحة δS عند A على عمق z من سطح السائل.

شدة الضغط عند A هو p القوى الواقعة على هذا العنصر الناتجة من الضغط هى $p\,\delta S$ وتكون عمودية على العنصر وحيث ان القوى على العناصر المختلفة المكونة للسطح متوازية ، فمحصلتها اذن توازيها اى عمودية على مستوى السطح ومقدارها



$$P = \lim_{\delta S \to 0} \sum p\,\delta S = \int_S p\,dS \qquad (4.39)$$

ولما كان السائل متزنا تحت تاثير الجاذبية فان

$$P = p_o + \rho g z$$

$$= p_o + \omega z \qquad (4.40)$$

حيث $\omega = \rho g$ الوزن النوعى للسائل

$$\therefore P = \int_S (p_o + \omega z) dS$$

$$= p_o S + \omega \int_S z dS \qquad (4.41)$$

حيث S مساحة الصحيفة المستوية

حيث ان B مركز كتلة الصحيفة فان

$$\overline{Z} = \frac{\int z dS}{\int dS}$$

$$\int z dS = \overline{Z} S \qquad (4.42)$$

بالتعويض من (4.42) فى (4.41.) ينتج ان

$$P = p_o S + \omega \overline{Z} S$$

$$P = \left(p_o + \omega \overline{Z}\right) S \qquad (5.43)$$

وحيث ان مركز كتلة الصحيفة عند B الضغط عند B يكون مساويا $p_o + \omega \overline{Z}$ فان المعادلة (4.43) تعنى ان القوى الناتجة من الضغط المحصل لسائل على صحيفة مستوية يساوى حاصل ضرب الضغط عند مركز كتلة الصحيفة فى مساحة الصحيفة .

عند اهمال الضغط الجوى فان

$$P = \omega \overline{Z} S$$

$$P = \rho g \overline{Z} S \qquad (4.44)$$

مثال (١):

اذا كان الضغط المحصل لسائل على صفيحة دائرية راسية نصف قطرها a يساوى ضعف وزن كرة من نفس السائل نصف قطرها a . فادا خفضت الدائرة فى السائل مسافة $2a$ راسيا. فاثبت ان ضغط السائل الجديد على الصفيحة يساوى $\frac{7}{4}$ من الضغط الاول مع اهمال الضغط الجوى.

الحل

نفرض ان الضغط الواقع على الصفيحة الدائرية فى الواضع الاول يساوى p_1 وان P_2 هو الضغط الجديد الواقع على الصفيحة بعد ان خفضت مسافة راسية $2a$.

وزن كرة من السائل نصف قطرها a يساوى

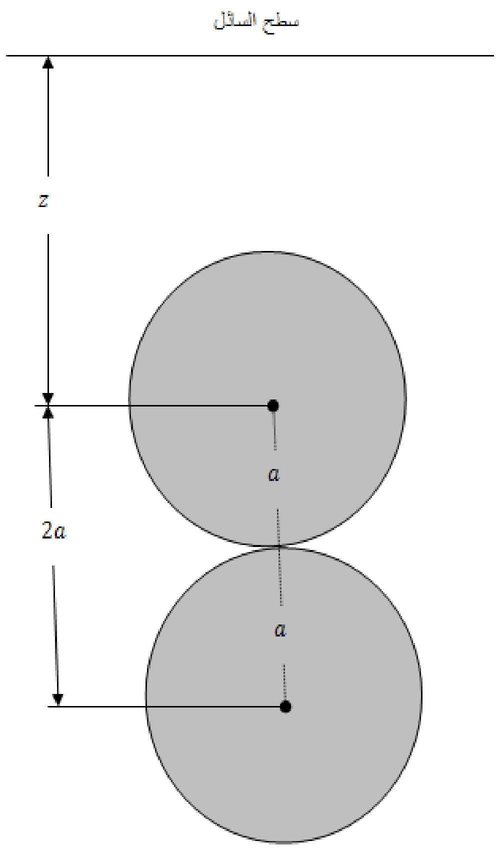
$$W = \frac{4}{3}\pi a^3 \omega$$

حيث ω الوزن النوعى للسائل او وزن وحدة الحجوم من السائل

$$p_1 = \pi a^2 \omega z \qquad (1)$$

حيث z بعد مركز ثقل الصفيحة الدائرية عن سطح السائل وحيث ان

$$P_1 = 2W$$



$$\pi a^3 \omega z = \frac{8}{3} \pi a^3 \omega$$

$$\therefore Z = \frac{8}{3} a \qquad (2)$$

وحيث ان

$$P_2 = \pi a^2 \omega (z + 2a) \qquad (3)$$

بالتعويض عن z نجد ان

$$p_2 = \frac{14}{3} \pi a^3 \omega \qquad (4)$$

$$p_1 = \frac{8}{3} \pi a^3 \omega \qquad (5)$$

بقسمة (٥) على (٤) نجد ان

$$\frac{p_1}{P_2} = \frac{\frac{8}{3} \pi a^3 \omega}{\frac{14}{3} \pi a^3 \omega} = \frac{4}{7}$$

اى ان

$$p_2 = \frac{7}{4} p_1$$

مثال(٢)

صفيحة على شكل مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعة l غمرت الصفيحة راسيا فى سائل بحيث كان راس المثلث عند سطح السائل وقاعدة المثلث المناظرة لهذا الراس افقية . فاذا قسمت الصفيحة بمستقيم يوازى القاعدة الى جزئيين بحيث كانت نسبة الضغط على الجزء العلوى الى الضغط على الجزء السفلى كنسبة $\lambda : \mu$

فاثبت ان المستقيم يبعد عن سطح السائل مسافة $\frac{\sqrt{3}}{2} l \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}}$ مع إهمال الضغط الجوى .

الحل

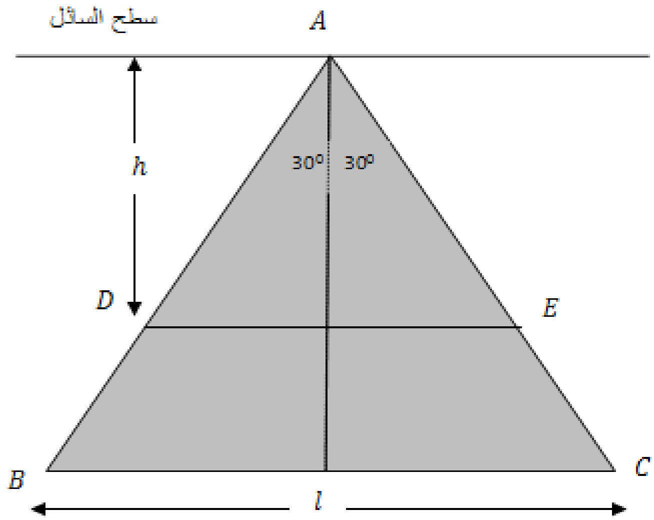
نفرض ان p_1, p_2, p_3 هى الضغوط على المثلث ADE ، وشبة المنحرف $BECB$ ، المثلث ABC على الترتيب (انظر الشكل) وحيث ان

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda}{\mu} \tag{1}$$

$$\therefore \frac{p_1}{p_1 + p_2} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

اى ان

$$\therefore \frac{p_1}{p_3} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tag{2}$$



حيث ان p_1, p_3 يتعينان من

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} DEh \right) \left(\frac{2}{3} h\, \omega \right) \tag{3}$$

$$p3 = \left(\frac{1}{2} l \frac{\sqrt{3}}{2} l \right) \left(\frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} l\, \omega \right) \tag{4}$$

حيث h هو ارتفاع المثلث DE المناظر للقاعدة DE

بقسمة (٣)على (٤) نجد ان

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{4 DE . h^2}{3 l^3} \tag{5}$$

من هندسة الشكل نجد ان

$$DE = 2h \tan 30 = \frac{2h}{\sqrt{3}} \tag{6}$$

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{8h^3}{3\sqrt{3}l^3} \qquad (7)$$

من (٢)، (٧) نحصل على

مركز الضغط:

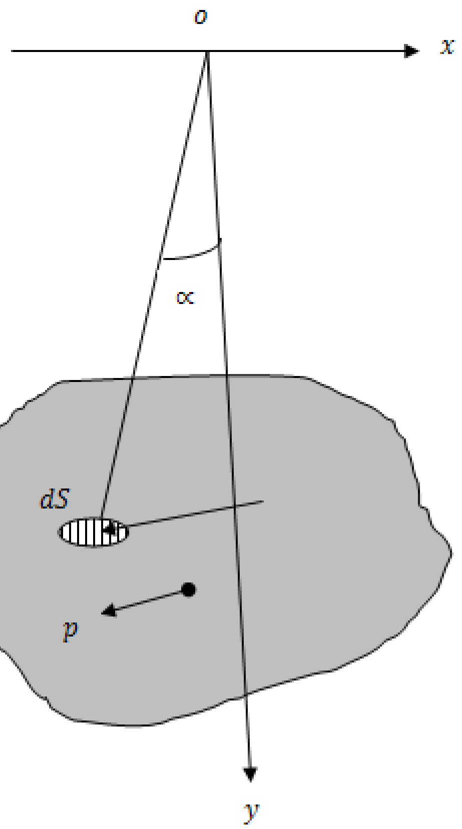
الضغط على اى صفيحة مستوية مغمورة فى سائل هو محصلة ضغوط عمودية متوازية عند كل نقطة من الصفيحة وتؤثر هذه المحصلة فى نقطه ***تعرف بمركز الضغط*** .

لتعين مركز الضغط:

نفرض ان خط تقاطع صفيحة مستوية مغمورة فى سائل مع سطح السائل هو المحور ox وان العمودى علية فى مستوى الصفيحة هو المحور oy الضغط dp على عنصر من الصفيحة dS يتعين من

$$dp = \omega\, y \cos \propto ds \qquad (4.45)$$

مع إهمال الضغط الجوي وحيث α زاوية ميل الصفيحة علي الرأسي .



الضغط الكلي علي الصفيحة P يساوي

$$\underline{P} = \int dp = \omega \cos \int_s ydS \qquad (4.46)$$

بأخذ العزوم حول المحور ox فإن

$$Py_p = \int ydp \qquad (4.47)$$

حيث y_p هو الأحداثي y لمركز الضغط

بالتعويض من (4.54) في (4.47) فإن

$$Py_p = \int y\omega y \cos\propto dS$$
$$= \omega \cos\propto \int y^z dS$$
$$= \omega \cos\propto I_x \qquad (4.48)$$

حيث I_x عزوم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور ox

$$y_p = \frac{\omega \cos I_x}{\omega \cos \int ydS}$$

$$y_p = \frac{I_x}{\int ydS} \qquad (4.49)$$

بفرض أن مركز كتلة الصفيحة عند $\bar{x}, \bar{y}$ فإن

$$\bar{y} = \frac{\int ydS}{\int dS} = \frac{\int ydS}{S} \qquad (4.50)$$

حيث S مساحة الصفيحة
بالتعويض من(4.50) في (4.49)

$$y_p = \frac{I_x}{\bar{y}S} \qquad (4.51)$$

يمكن كتابة عزم القصور الذاتي I_x في الصوره

$$I_x = k_x^2 S \qquad (4.52)$$

حيث k_x نصف قطر القصور الذاتي للصفيحة حول المحور ox
من (4.51),(4.52) نحصل علي

$$y_p = \frac{k_x^2}{y} \qquad (4.53)$$

بإستخدام نظرية المحاور المتوازية لعزم القصور الذاتى فان

$$k_x^2 = k_x^2 + d^2 \qquad (4.54)$$

حيث k_xنصف قطر القصور الذاتى حول محور موازى للمحور ox ومار بمركز الكتلة ، d المسافة بين المحورين المتوازيين فى هذه الحالة $d = \bar{y}$ ونجد ان

$$y_p = \frac{k_{x'}^2 + \bar{y}^2}{\bar{y}}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{k_{x'}^2}{\bar{y}} \qquad (4.55)$$

اى ان

$$y_p - \bar{y} = \frac{k_{x'}^2}{\bar{y}}$$

اى ان مركز الضغط يقع اسفل مركز الكتلة و نلاحظ ما يلى

١- مركز الضغط لا يتوقف مكانه على الزاوية $\propto$ وهذا يعنى ان هذا المركز لن يتغير اذا دار السطح حول خط تقاطعة مع السطح الحر

٢- مركز الضغط يقع على المحور الرئيسى لقصور السطح المغمور العمودى على خط التقاطع اسفل مركز الثقل بمسافة $\frac{k_1^2}{\bar{y}}$.

٣- اذا كانت $\alpha = 0$ بحيث يكون السطح المغمور مواز للسطح الحر فان مركز الضغط ينطبق على مركز الثقل اذ ان شدة الضغط فى هذه الحالة تكون واحدة عند جميع النقط المساحة المغمورة.

أمثلة:-

مثال(١):-

صفيحة على شكل قطع ناقص مغمورة فى سائل ومحورها الاكبر راسيا ونهاية المحور الاكبر عن السطح السائل فاذا انطبق مركز الضغط على البؤرة. اثبت ان الاختلاف المركزى للقطع يساوى $\frac{1}{4}$.

الحل

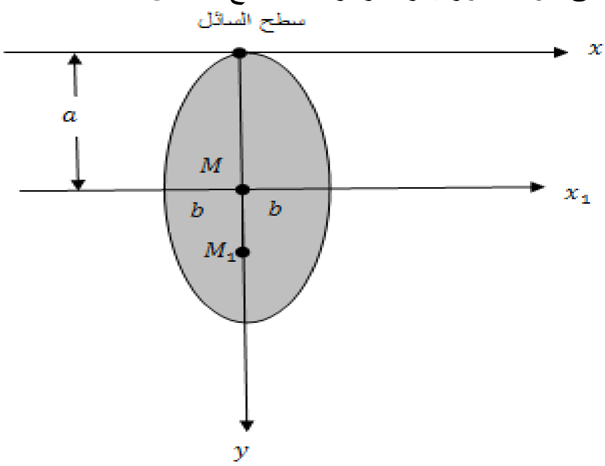
نفرض ان

M_1, M

هما مركز الكتلة ومركز الضغط على الترتيب حيث ان

$$M_1 M = \frac{k_1^2}{\bar{y}} \qquad (1)$$

وحيث ان عزم القصور الذاتى حول محور يمر بمركز ثقل القطع الناقص



$$I_{x'} = \frac{1}{4} a^2 S$$

$$\therefore\ k_1^2 = \frac{1}{4} a^2 \qquad (2)$$

$$\bar{y} = a \qquad (3)$$

$$MM_1 = \frac{\frac{1}{4} a^2}{a} = \frac{a}{4}$$

لكن من خواص القطع الناقص نعلم ان

$$MM_1 = ae$$

حيث e الاختلاف المركزى الناقص

$$\therefore\ ae = \frac{1}{4} a$$

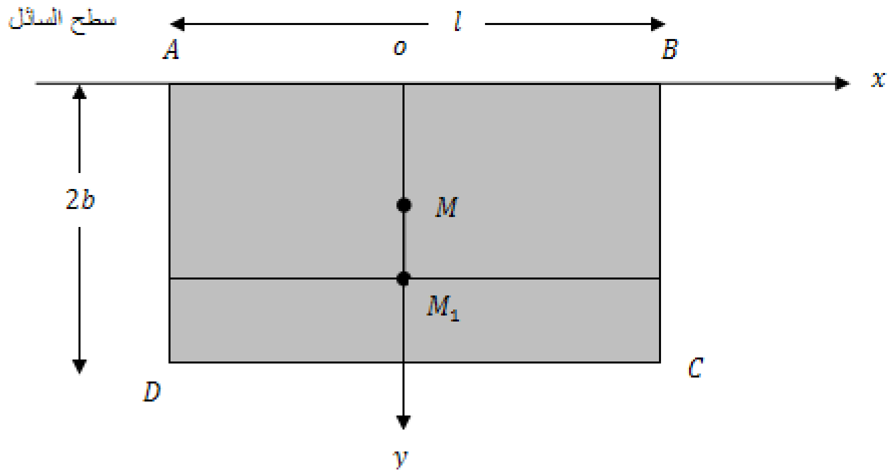
$$\therefore\ e = \frac{1}{4}$$

مثال (٢):

مسطيل مغمور فى سائل واحد اضلاعة عند سطح السائل. إثبت ان الخط الافقى المار بمركز الضغط يقسم المستطيل الى جزئيين الضغط عليهما يكون بنسبة $5:4$ مع إهمال الضغط الجوى.

الحل

نفرض ان المستطيل ابعادة هما $2b, l$ اى ان $Bc = 2b, AB = l$.



بفرض ان مركز الضغط عند M_1 ومركز الكتلة عند M . وبفرض ان FE هو الخط الافقى المار بمركز الضغط M_1 .

عزم القصور الذاتى للمستطيل $ABCD$ حول محور يوازى المحور ox ويمر بمركز كتلتة M يساوى $\frac{1}{3}mb^2$ حيث m كتلة المستطيل

$$\therefore k_1^2 = \frac{1}{3}b^2$$

$$\therefore MM_1 = \frac{k_1^2}{y_c} = \frac{\frac{1}{3}b^2}{b} = \frac{1}{3}b$$

وحيث ان p_1, p_2 هما الضغطين على الجزئيين (المستطيلين) $FECD$, $ABEF$ على الترتيب

$$\therefore p_1 = \omega \bar{z} S$$

$$p_1 = \left(l.\frac{4}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}b\right)\omega \qquad (1)$$

$$p_2 = \left(l.\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{5}{3}b\right)\omega \qquad (2)$$

بقسمة (١) على (٢) نحصل على

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{5}$$

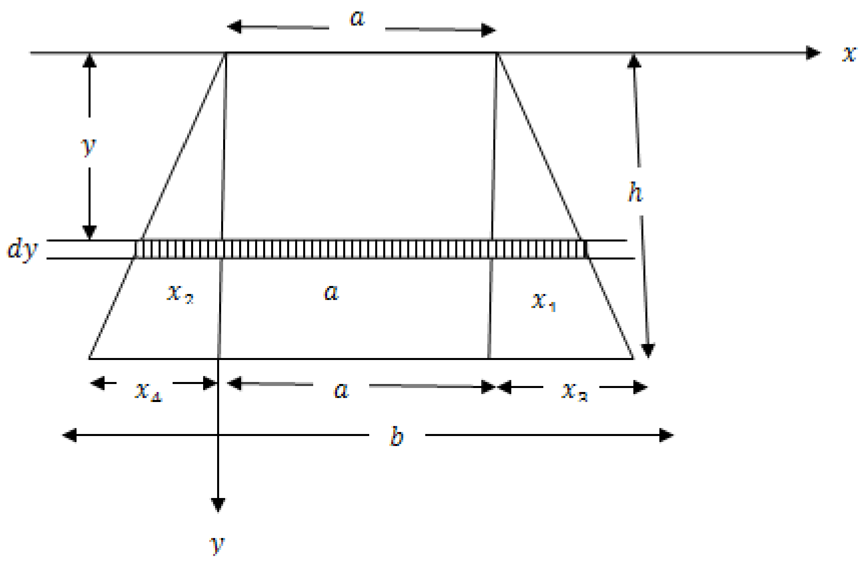
مثال (٣):

غمرت صفيحة راسيا على شكل شبة منحرف فى سائل بحيث كان احد الضلعين المتوازيين الذى طوله a عند سطح السائل وكان طول الضلع الاخر b والمسافة بينهما h.

إثبت ان مركز الضغط يقع على عمق يساوى $\dfrac{a+3b}{2(a+2b)}h$ من سطح السائل.

الحل

مركز الضغط يقع على عمق y_p من سطح السائل حيث



$$y_p = \frac{\int y^2 dS}{\int y dS}$$

طول العنصر الذى على عمق y من سطح السائل يساوى $x_1 + x_2 + a$ وسمكة dy واضح من الشكل ان

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{y}{h}, \frac{x_2}{x_4} = \frac{y}{h}$$

$$\therefore (x_1 + x_2) = \frac{y}{h}(x_3 + x_4)$$

$$= \frac{y}{h}(b-a)$$

وتكون مساحة العنصر ds تساوى

$$\left[a + \frac{y}{h}(b-a)\right]dy$$

$$\therefore y_p = \frac{\int_o^h y^2\left[a + \frac{y}{h}(b-a)\right]dy}{\int_o^h y\left[a + \frac{(b-a)}{h}y\right]dy}$$

$$= \frac{\left[\frac{ay^3}{3} + \frac{y^4}{4h}(b-a)\right]_o^h}{\left[\frac{ay^2}{2} + \frac{b-a}{h}\frac{y^3}{3}\right]_o^h}$$

$$= \frac{\frac{ah^3}{3} + \frac{b-a}{h}\frac{h^4}{4}}{\frac{ah^2}{2} + \frac{b-a}{h}\frac{h^3}{3}}$$

$$y_p = \frac{a+3b}{2(a+2b)}h.$$

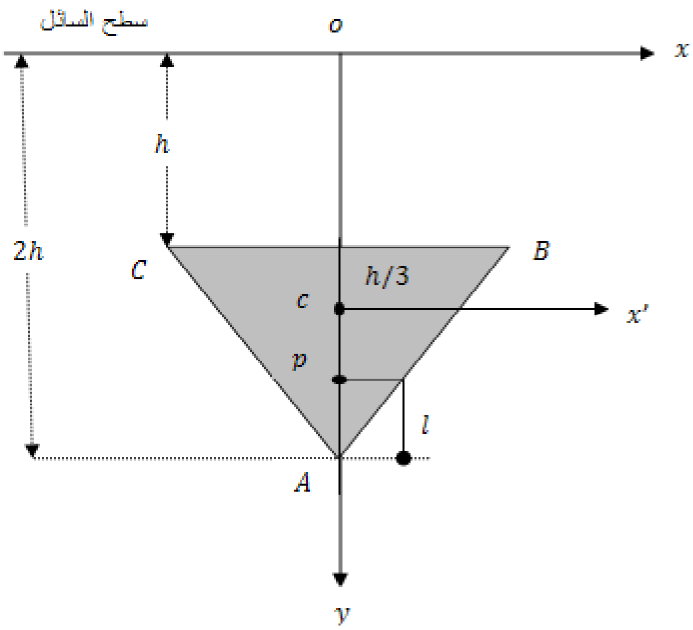
مثال (٤):

صفيحة مستوية على شكل مثلث ABC فية $AB = AC$ وارتفاعة من A هو h. فاذا غمرت هذه الصفيحة راسيا فى سائل بحيث كان A على عمق $2h$ من سطح السائل فاثبت ان الفرق بين بعدى مركزى الضغط عند A فى الحالتين التى يكون فيها BC افقيا فوق A او افقيا اسفل A يساوى $\frac{h}{16}$.

الحل

باخذ المحورين ox, oy كما بالشكلين، فان من الواضح ان محور oy فى كلا الحالتين يمر بمركز ثقل الصفيحة. لذا فانه فى كلا الحالتين $x_p = o$

نوجد الان y_p فى كلا الحالتين



(أ) عندما يكون BC فوق A فان

$$y_p = \frac{I_x}{\bar{y}S} \tag{1}$$

من الواضح ان

$$\bar{y} = \frac{4}{3}h \tag{2}$$

كما انه باستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد ان

$$I_x = I_{x'} + S\left(\frac{h}{3} + h\right)^2$$
$$= \frac{1}{18} Sh^2 + S\left(\frac{16}{9} h^2\right)$$
$$= \frac{11}{6} Sh^2$$

بالتعويض من (٢)،(٣)فى (١) نحصل على

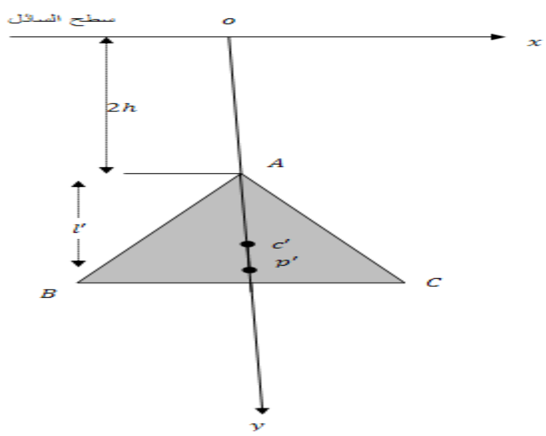
$$y_p = \frac{\frac{11}{6} Sh^2}{\frac{4}{3} Sh} = \frac{11}{6} \times \frac{3}{4} h$$

$$y_p = \frac{11}{8} h \quad (4)$$

وبالتالي فإن مركز الضغط يبعد عن A مسافة l حيث

$$l = 2h - \frac{11}{8} h = \frac{5}{8} h \quad (5)$$

(ب)عندما يكون BC أسفل A فإن



$$y'_p = \frac{I'_x}{S \overline{y'}} \quad (6)$$

ولكن من الواضح ان

$$\overline{y'} = 2h + \frac{2}{3} h$$
$$\overline{y'} = \frac{8}{3} h \quad (7)$$

وباستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد ان

$$I_x^1 = \frac{1}{18}Sh^2 + \left(\frac{8}{3}h\right)^2 S$$
$$= \frac{43}{6}Sh^2 \qquad (8)$$

بالتعويض من (٧)، (٨) فى (٦) نجد ان

$$y'_p = \frac{43}{16}h \qquad (9)$$

وبالتالى فان الضغط يبعدعن A مسافة l'حيث

$$l' = \frac{43}{16}h - 2h = \frac{11}{16}h \qquad (10)$$

$\therefore$ الفرق بين بعدى مركزى الضغط عن A فى الحالتين يكون مساويا

$$l' - l = \frac{11}{16}h - \frac{5}{8}h = \frac{h}{16}. \qquad (11)$$

مثال (٥):

اذا غمرت صفيحة مستوية على شكل مربع $ABCD$ فى سائل بحيث كان الراس A عند سطح السائل والقطر BD أفقيا ، فاثبت ان مركز الضغط يقع على القطر AC وبقسمة بنسبة $7:5$.

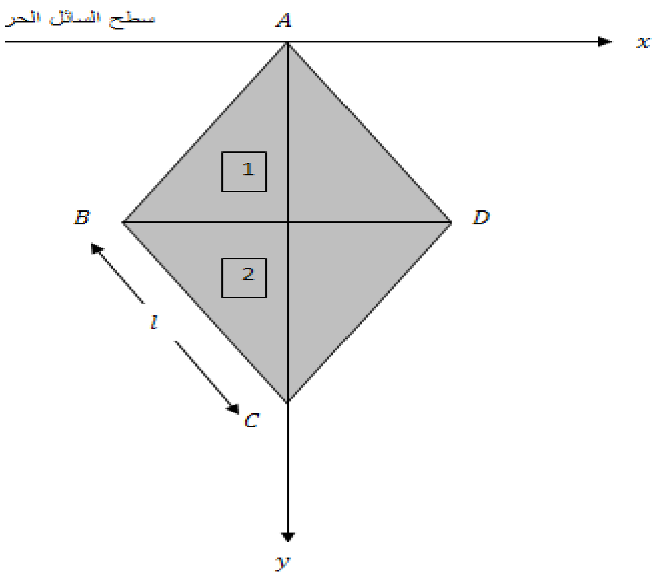
الحل

باخذ المحاور كما بالشكل فانة من الواضح ان المحور oy يمر بمركز ثقل الصحيفة، لذا فان إحداثيات مركز الثقل $\bar{x} = 0$? $\bar{y} =$ واضح ان

$$\bar{y} = \sqrt{2}l \qquad (1)$$

حيث l طول ضلع المربع .

$$y_p = \frac{I_x}{S\bar{y}} \qquad (2)$$



نوجد I_x لذلك سوف نعتبر الصفيحة مكونة من المثلثين BDC , ABD .

بالنسبة للمثلث ABD نعلم ان

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{8} S l^2 \qquad (3)$$

حيث S مساحة المربع .

وبالنسبة للمثلث BDE فانه من نظرية المحاور المتوازية

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{18}\left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 + S/2\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{11}{24} S l^2 \qquad (4)$$

وحيث ان

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{2}$$

$$= \frac{1}{8} S l^2 + \frac{11}{24} S l^2 = \frac{7}{12} S l^2 \qquad (5)$$

والان بالتعويض من (١) ،(٥) فى (٢) ينتج ان

$$y_p = \frac{7}{6\sqrt{2}} l \qquad (6)$$

وبالتالى يكون

$$AC - y_p = \frac{2l}{\sqrt{2}} - \frac{7}{6\sqrt{2}} l = \frac{5l}{6\sqrt{2}} \qquad (7)$$

لذا فان

$$\frac{y_p}{AC - y_p} = \frac{7}{5}.$$

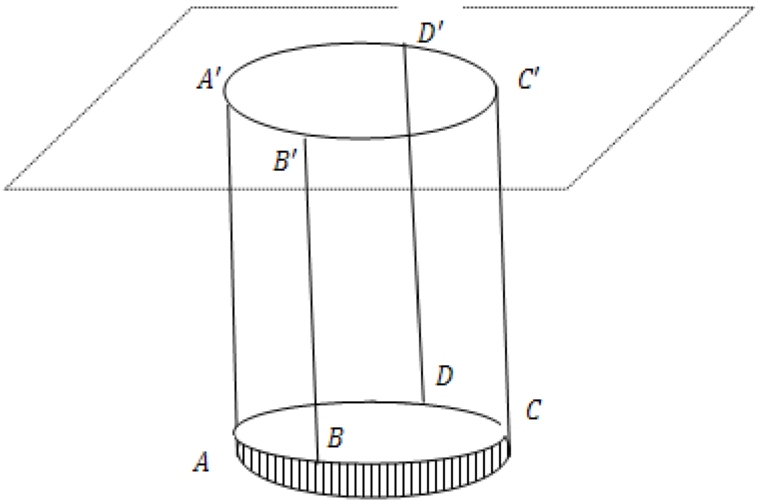
الضغط الكلى على السطوح المنحنيية المغمورة فى سائل ما:

اذا لم يكن السطح المغمور فى السائل مستويا فان الضغوط عند نقاطة المختلفة لن تكون متوازية ، وبالتالى فان الضغط المحصل سيكون محصلة القوى غير متوازية . لذا فاننا نوجد مركبات هذا الضغط المحصل فى إتجاه ثلاث محاور متعامدة احدهما راسى . اى ان الضغط المحصل هو محصلة للقوى الثلاث المتعامدة الاتية :

١ـ ضغط محصل رأسى :

لايجادة نسقط اعمدة من نقاط السطح المنحنى المغمورة $ABCD$ على مستوى سطح السائل فترسم هذه الاعمدة منحنى $A'B'C'D'$ على سطح السائل .من دراسة إتزان اسطوانة ذات المقطع العمودى $A'B'C'D'$ والتى يحدها من اعلى سطح السائل ومن اسفل السطح المعطى نجد ان وزن اسطوانة السائل هده يجب ان يتعادل مع محصلة الضغط على السطح المنحنى فى الاتجاه الرأسى .
اى ان

المركبة الراسية للضغط المحصل = وزن عمود السائل المقام على هذا السطح ويمر بمركز ثقل هذا العمود من السائل



.

٢ـ ضغط محصل فى اتجاه افقى:

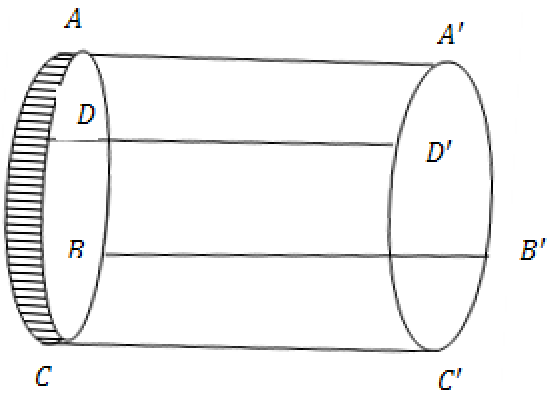
لايجاده نسقط السطح المنحني المعطي علي مستوي راسي بواسطة خطوط افقية فنحصل علي منحني ما $A'B'C'D'$ من اتزان اسطوانة المشكلة من الخطوط الافقية نجد ان محصلة الضغط علي السطح المنحني في اتجاه الخطوط الافقية يجب ان يتعادل مع الضغط الافقي علي المساحة المستوية الراسية $A'B'C'D'$.
أي ان مركبة الضغط المحصل في اتجاه افقي ما =محصلة الضغط علي مسقط السطح المنحني المعطى علي مستوى راسى عمودي علي هذا الاتجاه الافقي وتؤثر في مركز ضغط هذا المسقط .

٤. ضغط محصل في اتجاه افقي عمودي علي الاتجاه السابق :

ويمكن ايجاده ينفس الطريقة التي اوجدنا بها الضغط الافقي المحصل السابق .

الضغط المحصل على السطوح المقفله (قاعدة ارشميدس) . مركز الطفو

تنص قاعدة ارشميدس على انة اذا غمر جسم فى سائل ساكن فانة يعانى ضغطا من اسفل الى اعلى مقداره يساوي وزن السائل المزاح وخط عملة يمر بمركز ثقل السائل المزاح .



ولاثبات ذلك نفترض ان الحيز الذي يشغلة الجسم قد شغل بحجم مماثل من السائل . هذا الحجم من السائل يكون متزنا تحت تاثير وزنة لاسفل ومحصلة الضغوط من السائل الخارجى . اى ان المركبة الراسية لمحصلة الضغوط تساوى فى المقدار وزن السائل المزاح وتؤثر فى الاتجاه من اسفل لاعلى (عكس اتجاه وزن السائل المزاح) .

من هذا نستنتج انة اذا طفا الجسم فوق سائل وكان الجسم في حالة سكون فانة وزن السائل المزاح يساوى الوزن الكلى للجسم ويقع مركز السائل المزاح (الذي يسمى مركز الطفو) علي الخط الراسي المار بمركز ثقل الجسم .

امثلة :-

مثال (١) :-

اذا كان عمق الماء على جانبى بوابة هاويس هو h_2 , h_1 حيث $h_1 > h_2$ فاثبت ان الضغط المحصل على جانبي هذه البوابة يساوى $\frac{1}{2}\omega\, a\left(h_1^2 - h_2^2\right)$. حيث ω هو الوزن النوعى للماء a, عرض البوابة .

اثبت كذلك ان نقطة تاثير الضغط المحصل تقع على عمق c من السطح المتوسط حيث

$$c = \frac{h_2^1 + h_2^2 + 4h_1h_2}{6(h_1 + h_2)}$$

الحل

باخذ مقطع راسى عمودى على البوابة ومار بمركز ثقلها ، فننا نحصل على الشكل المبين حيث AB البوابة ، D, E سطح الماء على جانبيها .

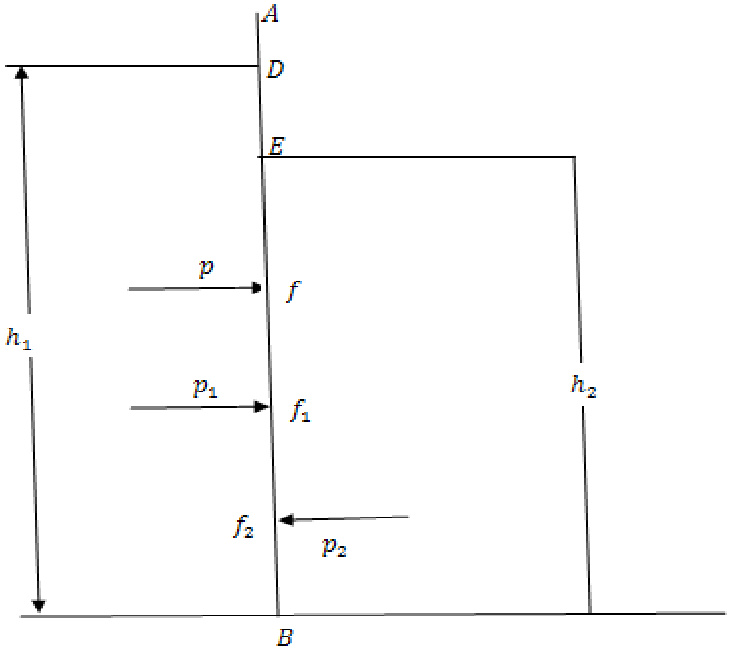
فاذا فرض ان الضغط على BD هو p_1 والضغط على BE هو p_2

$$p_1 = \omega \bar{Z} S$$

وباهمال الضغط الجوى

$$\bar{Z} = \frac{1}{2} h_1$$

$$S = a h_1$$



$$\therefore\ p_1 = \omega\, a h_1 \left(\frac{1}{2} h_1\right)$$

$$p_1 = \frac{1}{2} a\, \omega\, h_1^2 \qquad (1)$$

وبالمثل

$$p_2 = \frac{1}{2} a\, \omega\, h_2^2 \qquad (2)$$

ويكون الضغط المحصل

$$p = p_1 - p_2$$

$$= \frac{1}{2} \omega\, a \left(h_1^2 - h_2^2\right) \qquad (3)$$

بفرض ان f_1, f_2 هما نقطتى تاثير p_1, p_2 على الترتيب

$$\therefore\ DF_1 = \frac{Ix}{Sy} = \frac{Sk_x^2}{s\bar{y}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} h_1\right)^2}{\frac{1}{2} h_1} = \frac{2}{3} h_1 \qquad (4)$$

وبالمثل

$$\therefore\ DF_2 = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} h_2\right)^2}{\frac{1}{2} h_2} = \frac{2}{3} h_2$$

وبالتالى فان

$$\therefore\ BF_1 = \frac{h_1}{3},\ \ BF_2 = \frac{h_2}{3}$$

(٥)

لايجاد نقطة تاثير F للضغط المحصل p ناخذ العزوم حول B فيكون

$$pxBF = p_1 xBF_1 - p_2 xBF_2$$

$$\therefore\ BF = \frac{\frac{1}{2}\omega\, a h_1^2\, x\, \frac{1}{3} h_1 - \frac{1}{2}\omega\, a h_2^2\, x\, \frac{1}{3} h_2}{\frac{1}{2}\omega\, a\left(h_1^2 - h_2^2\right)}$$

$$= \frac{h_1^3 - h_2^3}{3\left(h_1^2 - h_2^2\right)} = \frac{\left(h_1 - h_2\right)\left(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2\right)}{3\left(h_1 - h_2\right)\left(h_1 + h_2\right)}$$

$$= \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3\left(h_1 + h_2\right)}$$

$$\therefore\ C = \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{h_1^2\, 2h_1 h_2 + h_2^2}{3\left(h_1 + h_2\right)}$$

$$= \frac{3\left(h_1^2\, 2h_1 h_2 + h_2^2\right) - h_1^2\, 2h_1 h_2 + 2h_2^2}{6\left(h_1 + h_2\right)}$$

$$\therefore\ C = \frac{h_1^2\, 2h_1 h_2 + h_2^2}{6\left(h_1 + h_2\right)}$$

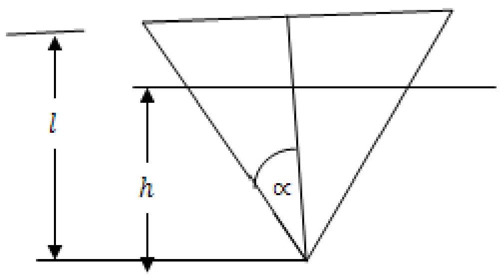
<u>مثال (٢):</u>

يطفو اناء مخروطى فى الماء بحيث كان محوره راسيا وراسه الى اسفل وجزء h من المحور مغمور فى الماء. اذا سكب ماء داخل المخروط حتى اصبح ارتفاعة h فان الاناء يغوص حتى تصبح فوهته عند سطح السائل . اثبت ان $h = \frac{l}{\sqrt[3]{2}}$ حيث l ارتفاع المخروط .

<u>الحل</u>

في الحالة الاولي :

المخروط يتزن تحت تأثير وزنة ω رأسيا ألي اسفل ودفع السائل رأسيا إلي اعلي والذي يساوي وزن السائل المزاح حسب قاعدة ارشميدس .



$$\therefore\ W = v_1 \sigma \qquad (1)$$

حيث σ كثافة الماء ، v_1 حجم المخروط (الجزء المغمور) الذي ارتفاعة h

في الحالة الثانية:

عند إضافة ماء وزنة W لان ارتفاع الماء داخل الاناء ارتفاعة (h) فإن من الاتزان يكون مجموع وزني المخروط والماء المسكوب داخلة والمؤثر رأسيا لاسفل مساويا دفع الماء لاعلي والمؤثر رأسيا لاعلي

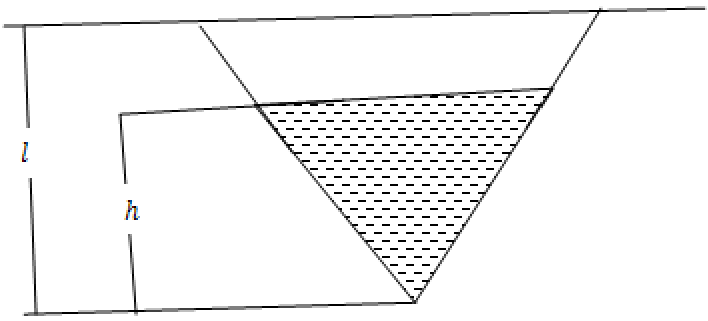
$$W + W = v_2 \sigma \qquad (2)$$

حيث V_2 هو حجم المخروط الذي ارتفاع l .
بقسمة (1) علي (2)نحصل علي

$$\frac{1}{2} = \frac{V_1}{V_2} \qquad (3)$$

حيث أن

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h^3}{l^3} \qquad (4)$$



من(3)،(4)نجد أن

$$\frac{h^3}{l^3} = \frac{1}{2}$$

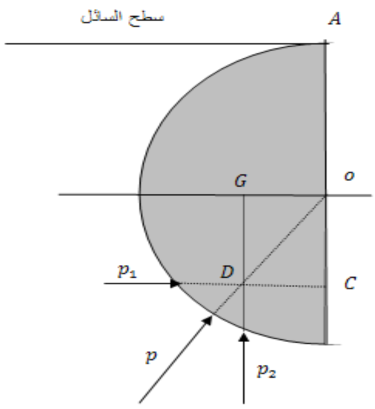
$$\therefore\ h = \frac{l}{\sqrt[3]{2}}$$

مثال (٣):

أوجد مقدار واتجاه الضغط المحصل علي السطح المنحني لنصف كره مصمته نصف قطرها a مغموره في سائل وزنة النوعي ω بحيث تكون قاعدتها المستوية رأسيا ومركز هذه القاعدة علي عمق a من سطح السائل.

الحل

لناخذ مقطعا راسيا فى مستوى عمودى على القاعدة المستوية ومارا بمركزها فنحصل على الشكل المبين .



الضغط المحصل p على السطح المنحنى ينشا من

١- ضغط محصل افقى p_1 يتعادل مع الضغط الافقى الواقع على القاعدة المستوية ، من هذا يتضح ان

$$p_1 = \omega \bar{z} s$$

وذلك باهمال الضغط الجوى

$$p1 = \omega \pi a^2 (a)$$

$$= \omega \pi a^3 \qquad (1)$$

وخط عمل p_1 افقى يقطع القاعدة المستوية فى مركز الضغط لها c ، اى ان

$$oc = \frac{\frac{1}{4} a^2}{a} = \frac{1}{4} a. \qquad (2)$$

٢- ضغط محصل رأسى p_2 بتعادل مع وزن السائل المزاح بنصف الكرة اى ان:

$$p_2 = \frac{2}{3} \pi a^3 \omega \qquad (3)$$

وخط عمل رأسى يمر بمركز ثقل نصف الكرة G اى ان

$$oG = \frac{3}{g} a.$$

ومن هذا يتضح ان

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

$$= \sqrt{\left(\pi a^3 \omega\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \pi a^3 \omega\right)^2}$$

$$p = \pi a^3 \omega \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{B}}{3} \pi a^3 \omega \qquad (5)$$

ويميل على p_2 بزاوية $\propto$ حيث

$$\tan \propto = \frac{p_1}{p_2}$$

$$= \frac{\pi a^3 \omega}{\frac{2}{3} \pi a^3 \omega} = \frac{3}{2} = \frac{Go}{oc}$$

اى ان p يمر بمركز الكرة o.

مثال (٤):

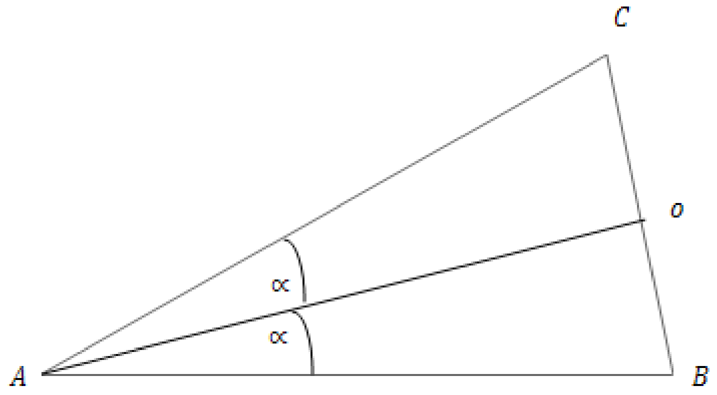
وضع مخروط دائرى قائم زاوية رأسه $2 \propto$ بحيث كان اسفل رأسى افقيا فاذا كان المخروط مفرغا ومهمل الوزن ومملوء بسائل فاثبت ان الضغط المحصل على سطحة المنحنى يساوى $\sqrt{1 + 15 \sin^2 \propto}$ من المرات من وزن السائل .

الحل

لناخذ مقطعا راسيا مارا بمركز القاعدة المستوية o فنحصل على الشكل المبين .
بفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط هو a وارتفاعة h وان ω هو الوزن النوعى للسائل . نجد ان عمق o اسفل c يساوى $a \cos \propto$ وبالتالى فان الضغط المحصل على القاعدة المستوية هو p حيث

$$p = \pi a^2 . a \omega \cos \propto = \pi a^2 \omega \cos \propto \qquad (١)$$

ويؤثر عموديا على هذه القاعدة .



الضغط المحصل p^1 على السطح المنحنى له مركبتان احدهما افقية p_1^1 وتتعادل مع المركبة الافقية ل p ، اى ان

$$p_1^1 = p\cos\propto = \pi a^3\omega\cos^2\propto \tag{2}$$

والاخرى p_2^1 راسية وتتعادل مع وزن السائل والمركبة الراسية ل p ، اى ان

$$p_2^1 = \frac{1}{13}\pi a^2 h\omega + \pi a^3\omega\cos\propto\sin\propto \tag{3}$$

وبالتالى فان الضغط المحصل p^1 على السطح المنحنى يساوى

$$p^1 = \sqrt{p_1^{1^2} + p_2^{1^2}}$$

$$p' = \pi a^3\omega\left[\cos^4\propto + \left(\frac{1}{3}\cot\propto + \sin\propto\cos\propto\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cot\propto\frac{1}{3}\pi a^3\omega\left[9\sin^2\propto\cos^2\propto + (1+3\sin^2\propto)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3\omega\cot\propto\left[9\sin^2\propto\cos^2\propto + 1 + 6\sin^2\propto + 9\sin^4\propto\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3\omega\cot\propto\sqrt{1+15\sin^2\propto}$$

$$p' = W\sqrt{1+15\sin^2\propto} \tag{4}$$

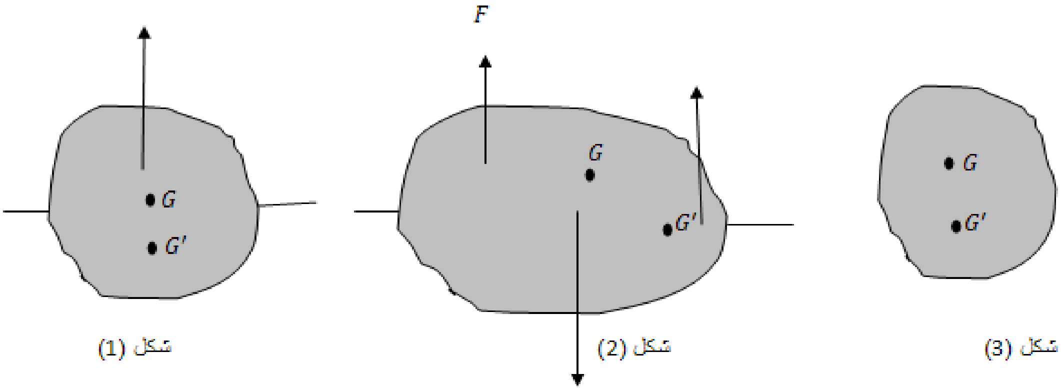
حيث

$$W = \frac{1}{3}\pi a^3\omega\cot\propto$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 h\omega. \tag{5}$$

w هو وزن السائل

إتزان الاجسام فى السوائل:



شكل (1) شكل (2) شكل (3)

عندما يتزن جسم فى سائل سواء كان مغمورا فيه او طافيا فان القوى المؤثرة علية هى وزن الجسم وتؤثر عند مركز ثقله G ومحصلة الضغط السائل علية وتؤثر عند مركز ثقل السائل المزاح بالاضافة الى ايه قوة خارجية اخرى تكون موجودة .
ولما كانت القوة الاولى والثانية رأسيتين فان نتيجة للاتزان يتحتم ان تكون محصلة القوى الخارجية F راسية هى الاخرى وهذا عادة ينتج للجسم وضعين للاتزان. فى احدهما تكون القوى الثلاثة على خط رأسى واحد اى ان GG' رأسى (شكل (١)) وفى الاخر تكون القوى الثلاث غير منطبقة اى ان GG' مائل على الراسى (شكل ٢) ومن الواضح إنه فى حالة عدم وجود قوى خارجية غير الوزن $(F = 0)$ لا يتزن الجسم الا فى الواضح الاول (شكل٣)

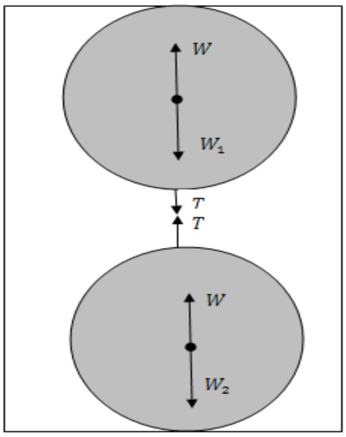
امثلة :-

مثال(١):-

كرة نصف قطرها $\frac{1}{2}\,ft$ وكثافتها النوعية $\frac{3}{2}$ يربطها خيط خفيف الى كرة اخرى نصف قطرها $\frac{1}{2}\,ft$ وكثافتها النوعية $\frac{2}{3}$. تركت الكرتان وهما مغمورتان فى خزان عميق للمياه . اثبت انه فى وضع الاتزان ترتكز الكرة الاولى على قاع الخزان. ثم احسب الشد فى الخيط فى هذا الموضع.

الحل

نعتبر أولا الكرتين معا . القوى المؤثرة عليهما هى



(أ) وزن الكرة الاولى

$$W_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{3}{2}\int g \qquad (1)$$

$\int$ كثافة الماء gl عجلة الجاذبية الارضية .

(ب)وزن الكرة الثانية

$$W_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{3}{2}\int g \qquad (2)$$

(ج) محصلة ضغط الماء W وهو واحد على الكرتين لتساوى حجمها .

$$W = \frac{4}{3}\pi a^3 \int g \qquad (3)$$

$$W_1 + W_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 . \frac{13}{6}\int g$$

$$W_1 + W_2 > 2W \qquad (4)$$

$\therefore$ تهبط الكرتان حتى ترتكز الاولى على قاع الخزان وعند الاتزان تكون الكرة الثانية فوقها. نعتبر اتزان الكرة العليا . المؤثرة عليها W_2 , W_1 وتمران بمركز الكرة والشد فى الخيط T.

$\therefore$ الخيط فى وضع الاتزان راسى مارا بمركز الكرتين.

معادلة الاتزان تعطى من

$$T = W - W_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{1}{3}\int g \qquad (5)$$

$$T = \frac{4}{3}\pi . \frac{1}{8} . \frac{1}{3} . \frac{125}{2} g \quad poundals$$

$$T = \frac{125}{36}\pi \qquad Ib.wt$$

مثال (٢):-

صفيحة منتظمة سميكة على شكل مستطيل $ABCD$ يمكنها التحرك بسهولة فى مستوى راسى محور افقى مثبت عند الراس A . اذا اتزنت الصفيحة ونصفها الاسفل BCD مغمور فى ماء . اثبت ان كثافتها النوعية $\frac{2}{3}$.

الحل

نفرض ان كثافة الماء النوعية p والكثافة النوعية للصفيحة S وحجمها V والقوى المؤثرة على الصفيحة هى

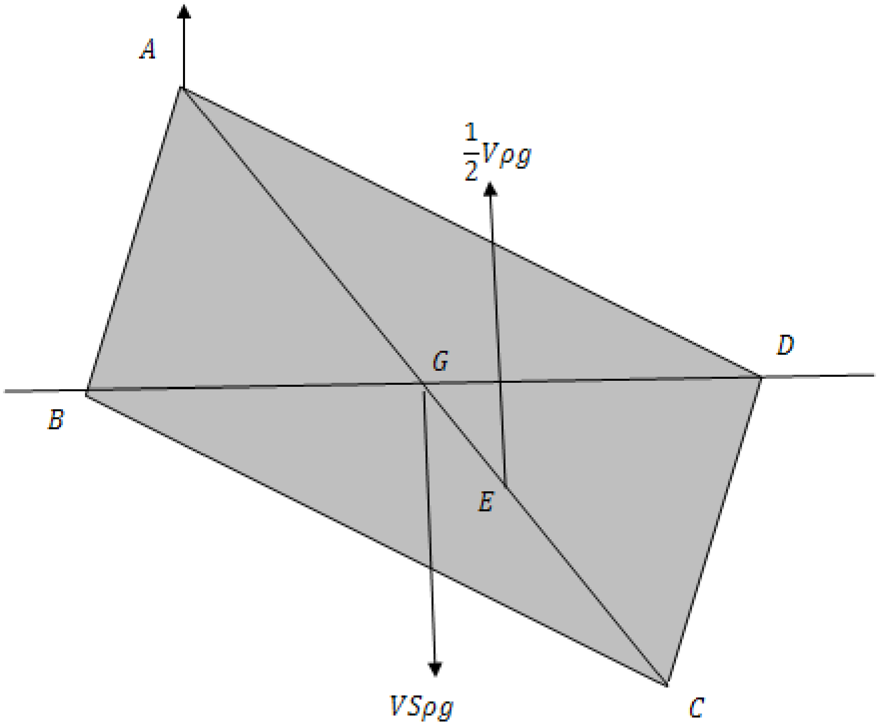
(أ) وزنها $VSpg$وتؤثر عند مركز ثقل الصفيحة G رأسيا الى اسفل .

(ب)محصلة الضغط الماء $\frac{1}{2}Vpg$ ويؤثر عند E راسيا الى اعلى حيث $GE = \frac{1}{3}Gc$.

(ت)رد الفعل عند A وهذا من شرط الاتزان راسى الى اعلى باخذ العزوم حول A ينتج ان

$$VSpg . AG = \frac{1}{2}Vpg . AE = \frac{1}{2} pg \frac{4}{3} AG$$

$$\therefore S = 2/3$$

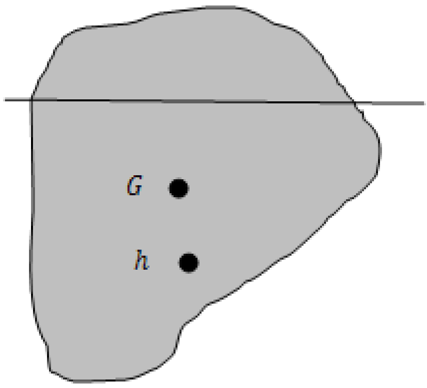


استقرار الاجسام الطافية :

اذا طفا جسم فى سائل فانه يقع تحت تاثير

(أ) وزنه ويمر بمركز ثقلة G.

(ب) محصلة ضغط السائل وهى قوة رأسية الى اعلى تساوى وزن السائل المزاح وتمر بمركز ثقلة H . والجسم يتزن فى وضع تكون فيه هاتان القوتان متساويتين وتقع G ، H على خط راسى واحد . نعرف H بمركز الطفو (التعويم) أما مقطع الجسم بواسطة مستوى سطح السائل فيعرف بمستوى الطفو .



وفيما يلى سوف نتعرض لدراسة استقرار هذا الاتزان والمقصود بالاستقرار ان الجسم يعود نحو موضع اتزانة اذا اعطى ازاحة صغيرة من هذا الموضع .

باتخاذ مركز ثقل مستوى الطفو o كنقطة اساس فان اية ازاحة تعطى للجسم يمكن اعتبارها مكونة من ازاحتين احداهما انتقالية مع o والاخرى دورانية حول محور عند o ولما كانت هذه الازاحات صغيرة فانة يمكن دراسة الاستقرار لكل ازاحة على حده.

إستقرار الاتزان للازاحات الانتقاليه:-

اية ازاحة انتقالية يمكن تحليلها الى ازاحتين احداهما أفقية والاخرى راسية

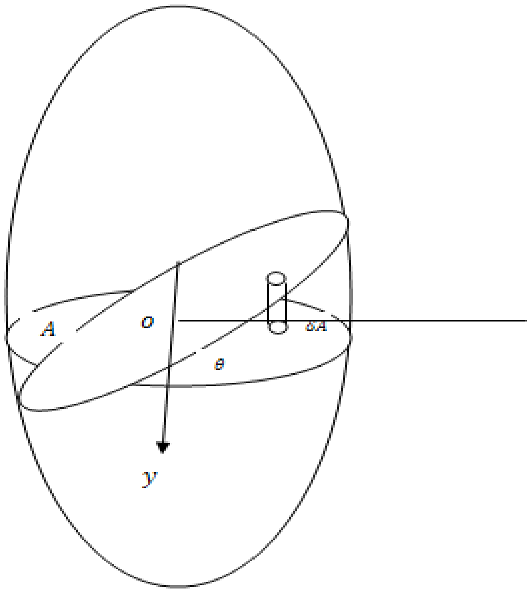
(أ) للازاحة الافقية :

حيث ان مركبة ضغط الماء فى الاتجاه الافقى بعد الازاحة تساوى صفر فان الجسم يتزن فى وضعه الجديد اى ان الاتزان بالنسبة للازاحات الافقية للجسم الطافى يكون اتزانا متعادلا

(ب) الازاحة الراسية:

اذا كانت الازاحة الى اسفل فان محصلة ضغط الماء تزداد وبذلك تكون محصلة الوزن وضغط الماء قوة راسية الى اعلى تعمل على اعادة الجسم الى وضع الاتزان مرة اخرى . واذا كانت الازاحة الى اعلى فان ضغط الماء يقل وبذلك تكون محصلة وزن الجسم وضغط الماء قوة راسية الى اسفل تعمل على اعادة الجسم الى وضع الاتزان اى ان الاتزان يكون مستقرا بالنسبة للازاحات الراسية – وعلى دلك فان اتزان الاجسام الطافية يكون مستقرا بالنسبة للازاحات الانتقالية عموما.

اذا قطع مستوى جسم ودار حول محورما بزاوية صغيرة بحيث يقسمة دائما الى حجمين ثابتين هذا المحور يمر بمركز المقطع.



ناخذ اى وضعين للمستوى بينهما زاوية θ وناخذ خط التقاطع محورا للاحداثى y أما محور x فواقع فى المستوى عند احد الوضعين فى الرسم المستوى A هو مستوى الاحداثيات oxy .

نفرض ان عنصر عند (x, y) مساحته δA عند دوران المستوى هذا العنصر يعطى حجما $x\theta SA$ $x\theta\delta A$

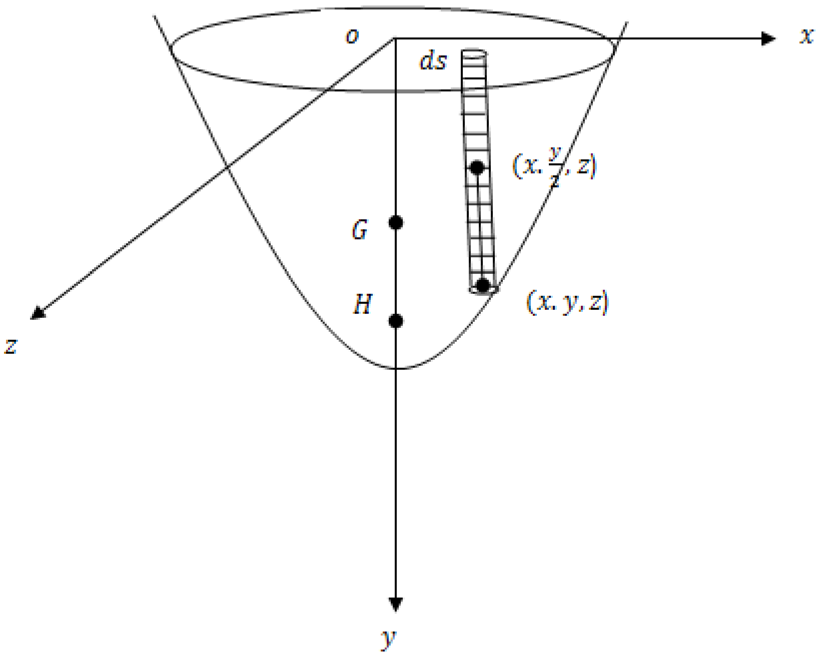
$\therefore$ الزيادة الكلية فى الحجم تساوى $\int \theta x dA$ =صفر

$$\therefore\ A\bar{x} = 0$$

اى ان مركز ثقل المساحة A يقع على المحور y اى محور الدوران.

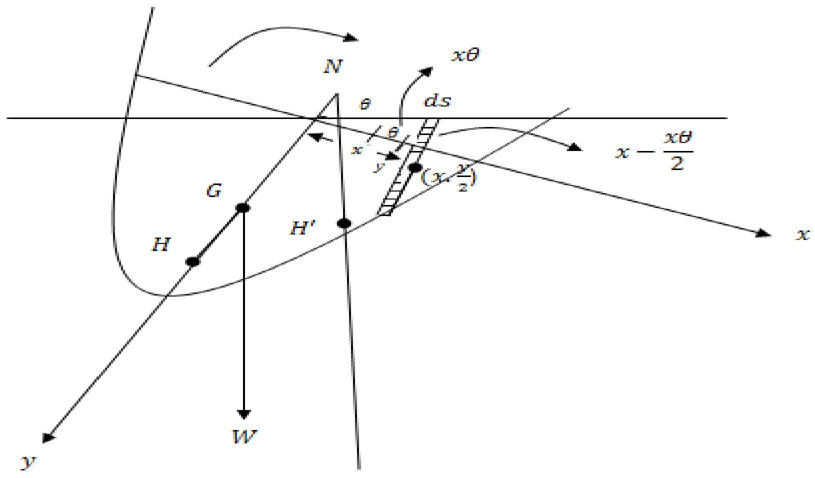
إيجاد شرط الاتزان المستقر للازاحة الدورانية للاجسام الطافية:

نعتبر الجسم الطافى متماثل حول مستوى وفى حلة الاتزان يكون مستوى التماثل راسى. نأخذ مركز كتلة مستوى الطفو (تقاطع الجسم مع سطح السائل) تقع فى مستوى التماثل.



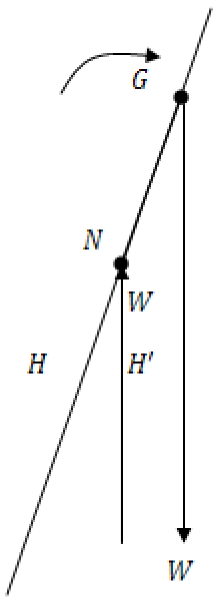
نفرض ان G هى مركز كتلة الجسم وان H هى مركز التعويم (اى مركز كتلة السائل المزاح) نفرض ازاحة دورانية صغيرة للجسم بدون تغيير حجم السائل المزاح وان H' هو الموضع الجديد لمركز التعويم . نفرض ان المستقيم الرأسى المار بالنقطة H' يقابل HG او امتداده فى نقطة N والتى تسمى بالمركز الافقى . عند دوران الجسم بزاوية صغيرة θ مع الرأسى فان الجسم يقع تحت تاثير قوتين هما وزنة W راسيا لاسفل ويؤثر فى مركز الكتلة G وقوة دفع السائل W ايضا راسيا لاعلى (حجم السائل المزاح لم يتغير) ويؤثر فى مركز التعويم H' فتكونان إزدواج. اذا كانت النقط N تقع اعلى المستوى الافقى المار بالنقط G فان هذا الازدواج يعمل على دوران الجسم وابعادة عن موضع الاتزان الاصلى وفى هذه الحالة يكون **<u>الاتزان غير المستقر</u>**. اذا انطبقت N على G فان **<u>الاتزان يكون متعادل</u>** لذلك يجب تعين المركز الاقصى N لمعرفة نوع الاتزان.

نفرض ان مستوى الطفو هو المستوى zox وان oy هو العمودى على هذا المستوى الذى تقع H, G علية فى وضع الاتزان الاصلى.



نعتبر عنصر حجم من السائل المزاح قبل الدوران يكون حجمة $dV = ydS$ واحداثيات مركز كتلة $(x, y/2, z)$ فيكون حجم السائل المزاح $V = \int ydS$ وبعد الازاحة الدورانية الصغيرة θ فان حجم العنصر $dV = (y + x\theta)dS$ ويكون حجم السائل المزاح $V = \int (y + x\theta)dS$ حيث ان حجم السائل المزاح لم يتغير بعد الازاحة الدورانية الصغيرة فان $V = V$
اى ان

$$V = \int ydS = \int (y + x\theta)dS = V \tag{1}$$



$$\therefore \int xdS = 0 \tag{2}$$

نفرض ان مركز التعويم H' فى المستوى xoy هما $\bar{x}, \bar{y}$ وباخذ العزوم حول المحورين ox, oy نجد ان

$$\bar{x} = \frac{\int (y + x\theta)dS \,.x}{\int (y + x\theta)dS}$$

$$\bar{y} = \frac{\int ydS \,. y/2 + \int x\theta \, dS\left(-\frac{x\theta}{2}\right)}{\int (y + x\theta)dS} \tag{4}$$

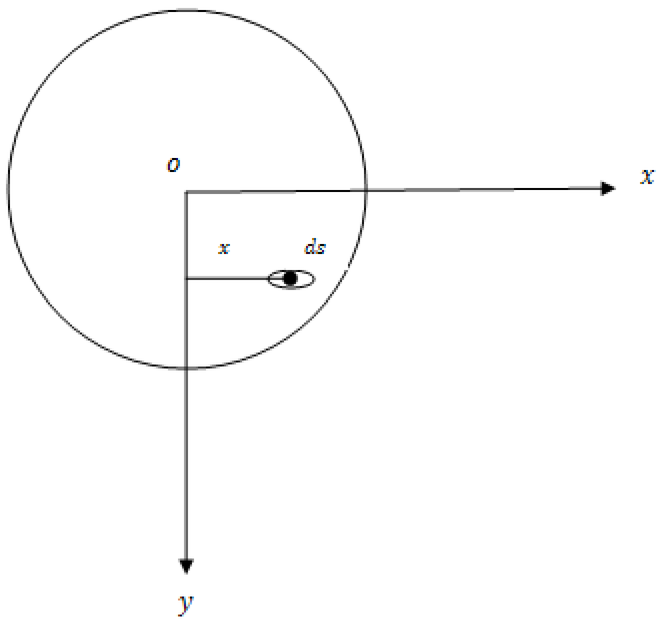
من التماثل واستخدام المعادلة (٢) واهمال الحد الذى يحتوى على θ^2 نحصل على

$$\bar{x} = \frac{\theta \int x^2 \, dS}{\int y \, dS} \tag{5}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y^2 \, dS}{\int y \, dS} \tag{6}$$

$$\therefore HH' = \bar{x} = \frac{\theta I}{V} \tag{7}$$

حيث I عزم القصور الذاتى لمستوى الطفو حول محور التماثل V, oz حجم السائل المزاح.
لكن



$$HH^1 = HN.\theta$$

$$HN = \frac{HH^1}{\theta} = \frac{I}{V} \qquad (8)$$

وذلك باستخدام (٧) حيث ان

$$HN = HG + GN$$

$$GN = \frac{I}{V} - HG \qquad (9)$$

لكى يكون الاتزان مستقرا يجب ان يكون $GN > 0$. اى ان

$$\frac{I}{V} - HG > 0$$

$$HG < \frac{I}{V} \qquad (10)$$

وهذا هو شرط الكافى لكى يكون الاتزان مستقرا.

مثال(١):

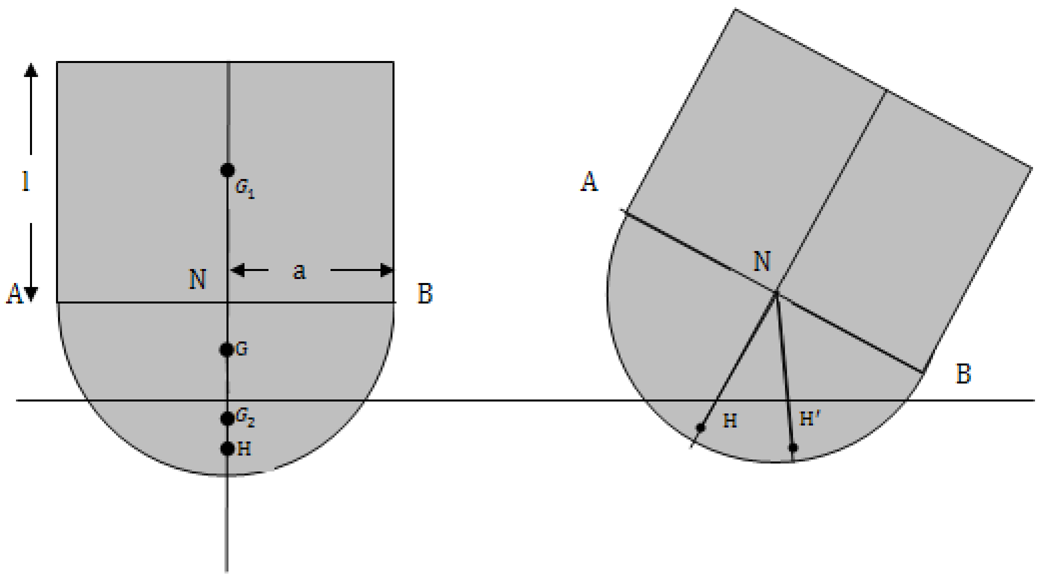
جسم مكون من اسطوانه مصمتة ارتفاعها l فى نهايتها نصف كرة مصمتة نصف قطرها a. اذا طفا الجسم وجزء من نصف الكرة مغمور فى سائل فاثبت ان الاتزان يكون مستقرا اذا كان $l < \frac{a}{\sqrt{2}}$.

الحل

واضح ان المركز الاقصى N هو القاعدة المستوية لنصف الكرة نعين مركز ثقل الجسم الطافى G باخذ العزوم حول القطر AB فنجد ان

$$\frac{2}{3}\pi a^3 . \frac{3}{8} a + \pi a^2 l . \left(- \frac{1}{2} l \right) = \left(\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 l \right) GN$$

$$\therefore GN = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 - \frac{1}{2}\pi a^2 l^2}{\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 l}$$



$$= \frac{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}l^2}{\frac{2}{3}a + l}$$

يكون الاتزان مستقرا اذا كان

$$GN > 0$$

ای اذا كان

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}l^2 > 0$$

$$l^2 < 1/2\, a^2$$

$$l < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ای ان الاتزان مستقرا اذا كان

$$l < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

تمارين على الباب الخامس

١- غمر مثلث فى سائل . اثبت ان مجموع الضغوط عند الضغوط عند رؤوس المثلث يساوى ثلاثة امثال الضغط عند مركز كتلة المثلث.

٢- انبوبة رفيعة منتظمة فى مستوى راسى تحتوى على اربعة سوائل مختلفة متساوية الاحجام ولا تختلط السوائل ببعضها وكثافتها كنسبة $1:2:4:3$ اثبت ان زاوية ميل القطر بين نقط انفصال السوائل الاربعة مع الرأسى تساوى $\tan^{-1}\frac{1}{2}, \tan^{-1}2$.

٣- صفيحة على شكل نصف دائرة مغمورة رأسيا فى سائل وقطرها عند سطح السائل . اثبت ان مركز الضغط يبعد مسافة $\frac{3\pi a}{16}$ عن سطح السائل حيث a نصف قطر نصف الدائرة.

٤- مثلث متساوى الساقين abc فية النقطة a ثابتة وارتفاع المثلث من a يساوى h والنقط a على بعد $2h$ من سطح السائل. اثبت ان الفرق بين مركز الضغط عن a عندما يكون bc افقى فوق a او تحت a يساوى $\frac{h}{16}$.

٥- مخروط دائرى قائم قسم الى جزئين بمستوى يمر بالمحور والمحور رأسى . اثبت ان الضغط المحصل على السطح المنحنى للمخروط يساوى $\frac{1}{6}a^3\int g\cot\alpha\sqrt{\pi^2+4\cot^2\alpha}$ فى اتجاه يصنع زاوية θ مع الافقى حيث $\tan\theta=\frac{\pi}{2}\tan\alpha$ حيث 2α زاوية راس المخروط.

٦- علقت صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها $2a$ من احد رؤوسها عند السطح الحر لسائل متجانس كثافتة $\int$. عين محصلة الضغط ومركزة .

٧- لوح مثلث الشكل قاعدته $2a$ وارتفاعة h غمر فى ماء كثافته ρ بحيث كان مستواه رأسي وقاعدته عند سطح الحر للماء. أوجد محصلة ضغط الماء وعين مركزه.

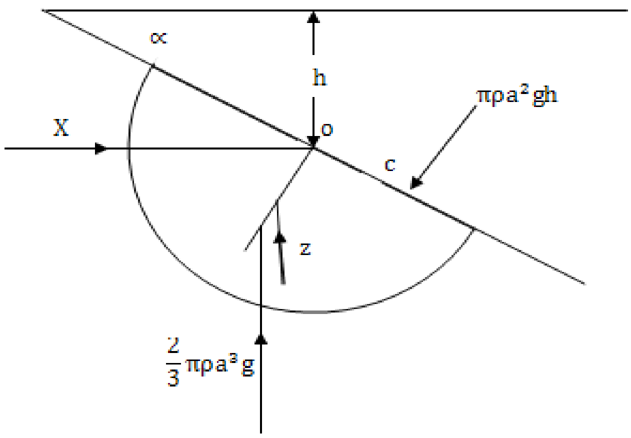
٨- لوح على شكل ربع دائرة نصف قطرها a غمرت فى سائل بحيث كان مستواة رأسي واحد حدية المستقيمين عند السطح الحر للسائل. اوجد محصلة الضغط على اللوح ونقطة تاثيرها .

٩- غمرت صفيحة مساحتها S رأسيا فى سائل وكان مركز ثقلها G يقع على عمق h أسفل السطح الحر للسائل. اذا كان Gy, Gx هما المحوران الراسيان لقصور الصفيحة عند G
اثبت ان المحل الهندسى لمركز الضغط (X, Y) على الصفيحة بالنسبة لهذين المحورين عندما تدورالصفيحة فى مستويهما حول مركز ثقلها G هو القطع الناقص.

$$\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{b^4}=\frac{1}{h^2}.$$

١٠- ثمن كرة مصمتة نصف قطرها a غمر فى سائل كثافتة ρ بحيث كان احد اوجهة المستوية عند سطح السائل .عين تماما محصلة الضغط على سطح المنحنى.

١١-جسم نصف كروي مصمت نصف قطره a غمر تماما فى سائل كثافتة ρ الشكل يوضح مقطع الجسم بواسطة مستوى التماثل الرأسي فيه h هو انخفاض مركز السطح الكروى للجسم عن السطح الحر للسائل، α الزاوية التى يصنعها القاعدة المستوية مع الافقى . اوجد محصلة ضغط السائل على السطح الكروى للجسم.



١٢-مخروط اجوف خفيف ارتفاعة $2a$ وزاوية رأسة $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ملئ تماما بسائل وزنة W ثم علق من نقطة ثابتة على قاعدته . عين تماما محصلة ضغط السائل على سطح المنحنى للمخروط .

١٣-جسم على شكل اسطوانة مائلة غمرت تماما فى سائل بحيث كانت قاعدتها افقيتين . اثبت ان محصلة الضغط على السطح المنحنى ازدواج عزمة $Wd\ \tan\alpha$ حيث W هو وزن السائل المزاح ، d عمق مركز ثقلة ، α ميل رواسم الجسم على الراس.

١٤-قشرتان نصف كرويتان قطرهما متساويان. ربط ببعضهما بمفصل من نقطة على حافتيهما بحيث يكونان معا كرة ملئت تماما بالماء من فتحة بجانب المفصل وحتى لا يتسرب الماء عند الحافتين دهنت هاتين الحافتين بمادة دهنية وعلقت الكرة من المفصل . اثبت ان نصفى الكرة لن ينفصلا اذا كان وزن القشرتين معا اكثر من ثلاثة امثال وزن الماء بالداخل .

١٥-اسطوانة ارتفاعها h ونصف قطرها a وكثافتها النوعية s تطفو فوق ماء بحيث كان محور الاسطوانة راسي . اوجد شرط الاتزان المستقر .

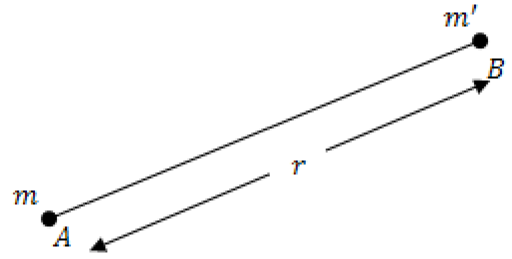
١٦-اسطوانة مصمتة منتظمة ارتفاعها $2h$ ومقطعها قطع ناقص طول محورية $(a>b)2a,2b$ وكثافتها النوعية $\frac{1}{2}$. تطفو الاسطوانة فوق ماء بحيث كان ارتفاعها راسيا . اثبت ان الاتزان يكون دائما مستقرا اذا كانت $\sqrt{2h}<b$.

١٧-اذا غمرت صفيحة مستوية على شكل متوازى اضلاع فى سائل بحيث كان الرأس A عند سطح السائل والقطر BD افقيا ، فاثبت ان مركز الضغط يقع على القطر AC ويقسمة بنسبة $5:7$.

١٨ـغمرت صفيحة مستوية على شكل مثلث ABC فى سائل بحيث كان الرأس عند سطح السائل . اوجد موضع الخط DE الموازى ل BC والذى يقسم الصفيحة الى جزئين بحيث يكون الضغط على المساحة ADE مساويا للضغط على المساحة $DBCE$ ، ثم بين ان موضع هذا الخط DE لا يعتمد على ميل مستوى الصفيحة على الراس .

١٩ـاناء على شكل متوازى مستطيلات طولة $4\ ft.$ وعرضة $4\ ft.$ وعمقه $3\ ft.$ ومفتوح من اعلى . فاذا سكب فى هذا الاناء ماء حتى اصبح عمقه $2\ ft.$ ثم دار الاناء حول احد احرف قاعدته السفلى حتى اصبح الماء على وشك الانسكاب من الاناء فاوجد النسبة التى يتغير بها الضغط على القاعدة السفلى وكذلك على كل من جوانبة الغير راسية .

الباب الخامس
المجال والجهد



نفرض ان نقطتين ماديتين عند B, A كتلتهما m^1, m على الترتيب والمسافة بينهما r فتكون قوة الجذب بينهما F تتعين من قانون الجذب العام لنيوتن

$$F = \frac{rmm^1}{r^2} \tag{6.1}$$

حيث γ ثابت الجاذبية لنيوتن .

يعرف **المجال** E عند النقطة B الناتج من وجود الكتلة m عند A بانه القوة التى تؤثر على وحدة الكتل عند B اى ان

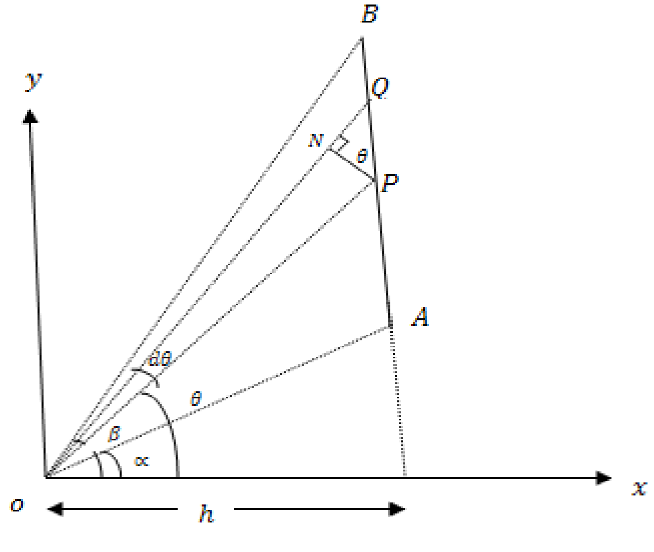
$$E = \frac{\gamma m}{r^2} \tag{6.2}$$

العلاقة(6.2) تعين مقدار المجال واتجاهة يكون فى الاتجاه BA . يعرف **الجهد** v عند B من العلاقة

$$v = \frac{\gamma m}{r} \tag{6.3}$$

الجذب بين سلك رفيع ونقطة مادية:

نفرض سلك AB والمطلوب ايجاد الجذب عند نقطة o التى تبعد h عن AB ناخذ المحور ox عموديا على السلك AB ، oy وموازيا للسلك حيث oB, oA يصنعان زاويتين β, α مع المحور ox .



ناخذ عنصر من السلك pQ حيث oQ , op يصنعان زاويتين $\theta + d\theta, \theta$ مع المحور ox على الترتيب.
المجال عند o بسبب العنصر pQ يتعين مقداره من

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma . pQ}{(op)^2} \qquad (6.4)$$

حيث σ كتلة وحدة الطول من السلك .
نزل العمود pN على oQ فتكون الزاوية NpQ مساوية θ ونجد ان

$$pQ = pN . \sec\theta \qquad (6.5)$$

حيث ان

$$pN = op . d\theta \qquad (6.6)$$

بالتعويض من (6.6) فى (6.5) نجد ان

$$pQ = op . \sec\theta\, d\theta \qquad (6.7)$$

ويكزن مقدار مجال العنصر مساويا

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma . op . \sec\theta\, d\theta}{(op)^2}$$

$$= \frac{\gamma\,\sigma \sec\theta\, d\theta}{op}$$

$$= \frac{\gamma\,\sigma}{h} d\theta \qquad (6.8)$$

وذلك لان $op = h\sec\theta$.
مركبتا المجال dE_y , dE_x فى اتجاهى oy , ox يتعينان من

$$dE_y = \frac{\gamma\,\sigma}{h} \cos\theta\, d\theta, \qquad (6.9)$$

$$dE_x = \frac{\gamma\,\sigma}{h} \sin\theta\, d\theta, \qquad (6.10)$$

مركبة المجال للسلك AB فى اتجاه ox نحصل عليها بتكامل (6.9) ونجد ان

$$E_x = \frac{\gamma\,\sigma}{h} \int_{\alpha}^{\beta} \cos\theta\, d\theta,$$

$$\therefore\ E_x = \frac{\gamma\,\sigma}{h} (\sin\beta \approx \sin\alpha) \qquad (6.11)$$

بالمثل مركبة المجال E_y للسلك AB فى اتجاه oy يتعين من

$$E_y = \frac{\gamma\,\sigma}{h} \int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta\, d\theta,$$

$$\therefore\ E_y = \frac{\gamma\,\sigma}{h} (\cos\alpha - \cos\beta)$$

ويكون مقدار المجال E هو محصلة المركبتين E_y , E_x اى ان

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_x^2} \qquad (6.13)$$

بالتعويض عن قيمتى E_y , E_x من (6.11)(6.12) فى (6.13) نجد ان

$$E = \frac{\gamma\,\sigma}{h} \sqrt{(\sin\beta - \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2}$$

$$= \frac{\gamma\,\sigma}{h} \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha)}$$

$$= \frac{\gamma\,\sigma}{h}\sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\therefore\ E = \frac{\gamma\,\sigma}{h}\sqrt{2\left[2\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{2\gamma\,\sigma}{h}\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \qquad (6.14)$$

وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$
$$\cos(\phi - \psi) = \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi,$$
$$\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi$$

اتجاه المجال يصنع زاوية ψ مع ox حيث

$$\tan\psi = \frac{E_y}{E_x} \qquad (6.15)$$

بالتعويض عن قيمتى E_y, E_x من(6.11)(6.12)فى (6.15) نجد ان

$$\tan\psi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \qquad (6.16)$$

باستخدام المتطابقتين المثلثية

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$
$$\sin\beta - \sin\alpha = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

فان (6.16) تصبح على الصورة

$$\tan\psi = \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \qquad (6.17)$$

اى ان

$$\psi = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad (6.18)$$

المعادلة (6.18) تعنى ان المجال E يكون فى اتجاه منصف الزاوية AoB كما بالشكل.

<u>نتائج</u>

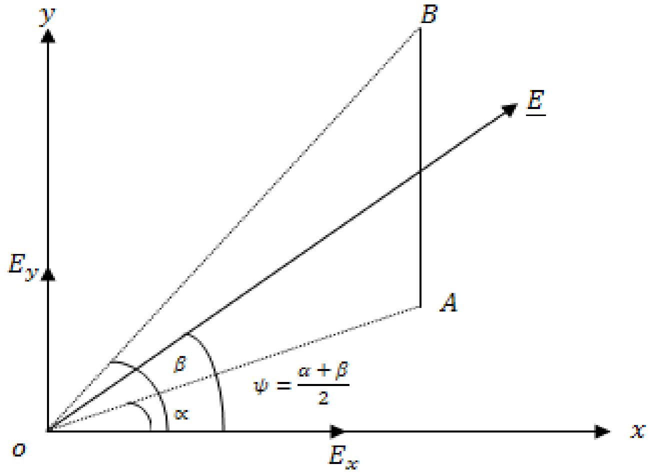
(١) اذا امتد السلك الى ∞ من كلتا نهايتين فان فى هذه الحالة $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ ونجد ان

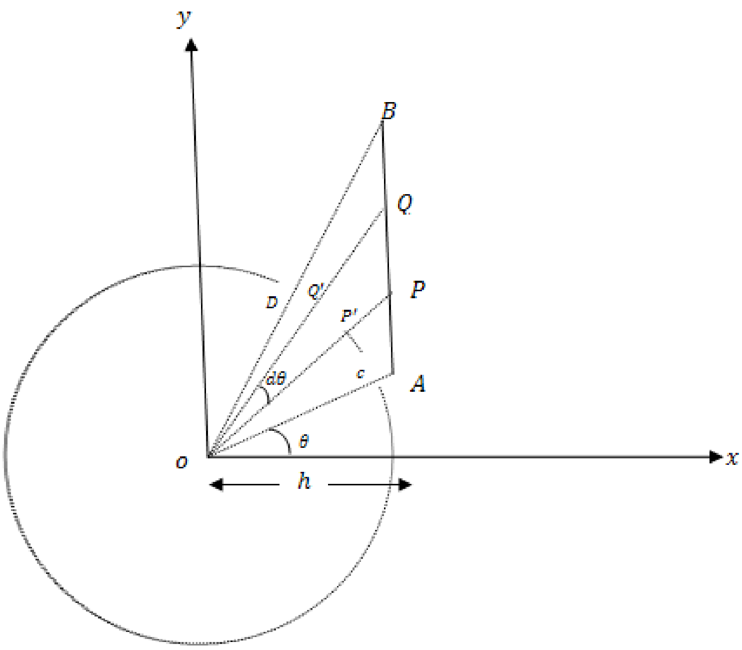
$$E = \frac{2\gamma\sigma}{h}\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{2\gamma\sigma}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2\gamma\sigma}{2} \qquad (6.19)$$

واتجاهه فى اتجاه ox.

(٢) من نقطة الاصل o نرسم دائرة نصف قطرها يساوى h ونفرض انها تقطع المستقيمين oB, oA فى D, C على التوالى.





نتصور ان القوس CD يمثل سلكا رفيعا كثافته σ فيكون مجال العنصر $P'Q'$ الذى طولة $hd\theta$ مساويا.

$$dE = \frac{\gamma\sigma .hd\theta}{h^2} = \frac{\gamma\sigma}{h} d\theta$$

المعادلة الاخيرة هى نفسها المعادلة (6.8) والتى تعين مجال العنصر pQ من السلك AB .

اى ان مجال العنصر $P'Q'$ من القوس CD يساوى مجال العنصر pQ من السلك المستقيم AB .

ومن ذلك نستنتج ان مجال السلك الذى على شكل قوس من دائرة CD هو نفسه مجال السلك المستقيم AB والذى سبق الحصول عليه وتعيينه مقدارا واتجاها بالمعادلتين (6.14) ,(6.18) على الترتيب .

(٣) اذا كانت o على امتداد السلك AB فان $E_x = o$ فى هذه الحالة فان

$$E = E_y = \frac{\gamma\,\sigma}{h}(\cos\,\alpha - \cos\,\beta) \qquad (6.20)$$

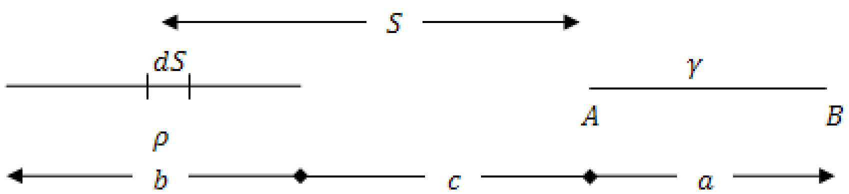
نلاحظ ان

$$\cos\,\alpha = \frac{h}{oA}, \cos\,\beta = \frac{h}{oB} \qquad (6.21)$$

وبالتالى يمكن كتابة (6.20) باستخدام(6.21) فى الصورة

$$\begin{aligned} E = E_y &= \gamma\sigma\left(\frac{1}{oA} - \frac{1}{oB}\right) \\ &= \gamma\,\sigma.\frac{oB - oA}{oA.oB} \\ &= \frac{\gamma\,\sigma.AB}{oA.oB} \end{aligned} \qquad (5.22)$$

الجذب المتبادل بين سلكين رفيعين على استقامة واحدة



جذب السلك الاول (طوله a) لعنصر طوله ds من السلك الثانى (طولة b) كما بالشكل يتعين من

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,a.p\,ds}{s(s+a)} \qquad (6.23)$$

وذلك باستخدام النتيجة (6.22) حيث ρ , σ هما كثافتى السلكين الاول والثانى على الترتيب.
بالتكامل نجد ان قوة الجذب المتبادل بين السلكين تساوى

$$E = \gamma\,\sigma\rho\,a\int_c^{c+b}\frac{ds}{s(s+a)} \qquad (6.24)$$

باستخدام الكسور الجزئية فان

$$\frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] \tag{6.25}$$

بالتعويض من (6.25) فى (6.24) نجد ان

$$E = \gamma\,\sigma\,\rho \int_{c}^{c+b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) ds$$

$$= \gamma\,\sigma\,\rho\left[\ln\, s - \ln(\, s + a)\right]\Big|_{c}^{c+b}$$

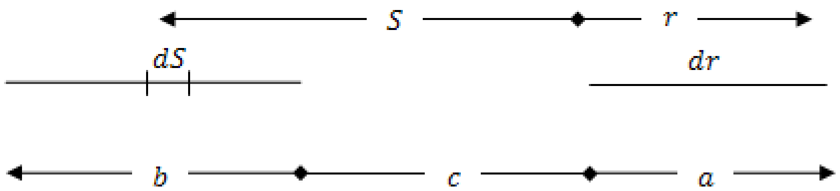
$$= \gamma\,\sigma\,\rho\, ln\left(\frac{s}{s+a}\right)\Bigg|_{c}^{c+b}$$

$$= \gamma\,\sigma\,\rho\left[\ln\left(\frac{c+b}{c+b+a}\right) - \ln\left(\frac{c}{c+a}\right)\right]$$

$$\therefore\; E = \gamma\,\sigma\,\rho\ln\left[\frac{(c+b)(c+a)}{c(c+a+b)}\right] \tag{6.26}$$

ملحوظة

يمكن الحصول على النتيجة (6.26) بطريقة مباشرة ودون الاستعانه بالنتيجة السابقة (6.22) والتى تعين جذب سلك رفيع لنقطة مادية على امتداده وذلك باستخدام التكامل الثنائى كالاتى



الجذب المتبادل بين عنصرين طوليهما $ds\,,dr$ من السلكين يتعين من

$$dE = \frac{\gamma\;\;\sigma\, dr\,.\rho\, ds}{(r+s)^2}$$

ويكون الجذب المتبادل بين السلكين مساويا

$$E = \gamma\,\sigma\,\rho \int_{s=c}^{s=c+b}\int_{r=0}^{r=a} \frac{dr\;\,ds}{(r+s)^2} \tag{6.27}$$

باجراء التكامل بالنسبة الى r نجد ان

$$E = -\gamma\,\sigma\rho \int_{s=c}^{s=c+b} \left[\frac{1}{r+s}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a} ds$$

$$= \gamma\,\sigma\rho \int_{c}^{c+b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) ds$$

نلاحظ ان التكامل بالنسبة الى s هو نفسه التكامل الذى سبق حسابه ونحصل على نفس النتيجة السابقة.

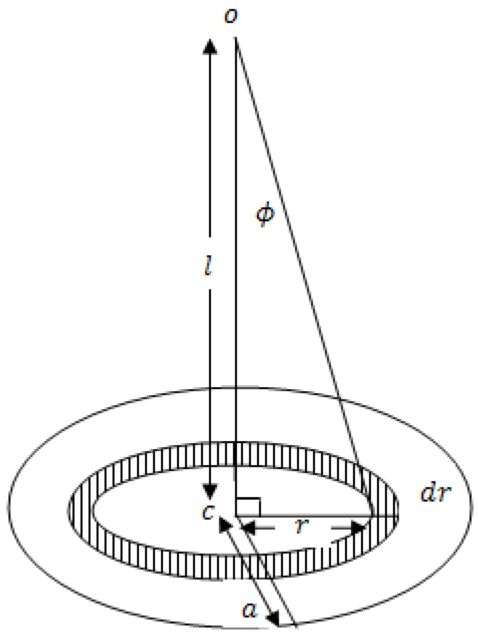
نتيجة

اذا كان احد السلكين لا نهائيا فان الجذب المتبادل يظل محدودا فمثلا اذا كان السلك الاول لا نهائيا ، اى ان $a = \infty$ فان

$$E = \gamma\,\sigma\,\rho \lim_{a\to\infty}\; \ln\left[\frac{(c+b)(c+b)}{a(a+b+c}\right]$$

$$= \gamma \, \sigma \, \rho \ln\left(\frac{c+b}{c}\right) \tag{6.28}$$

الجذب بين قرص دائرى ونقطة مادية على محوره.



نقسم القرص الى حلقات ونعتبر احدهما نصف قطرها r وسمكها dr من التماثل يتضح ان الجذب يكون محوريا اى فى اتجاه oc ويتعين من

$$dE = \frac{\gamma \, dm}{y^2 + l^2} \cos\phi \tag{6.29}$$

حيث dm كتلة الحلقة وتساوى

$$dm = 2\pi \, r \sigma \, dr \tag{6.30}$$

بالتعويض عن كتلة العنصر من (6.30) فى (6.29) نجد ان

$$dE = \frac{2\pi \, \gamma \, \rho \, l \, rdr}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \tag{6.31}$$

وذلك باستخدام

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}} \tag{6.32}$$

ويكون جذب القرص للنقطة المادية مساويا

$$E = 2\pi \, \gamma \, \sigma \, l \int_o^a \frac{rdr}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \tag{6.33}$$

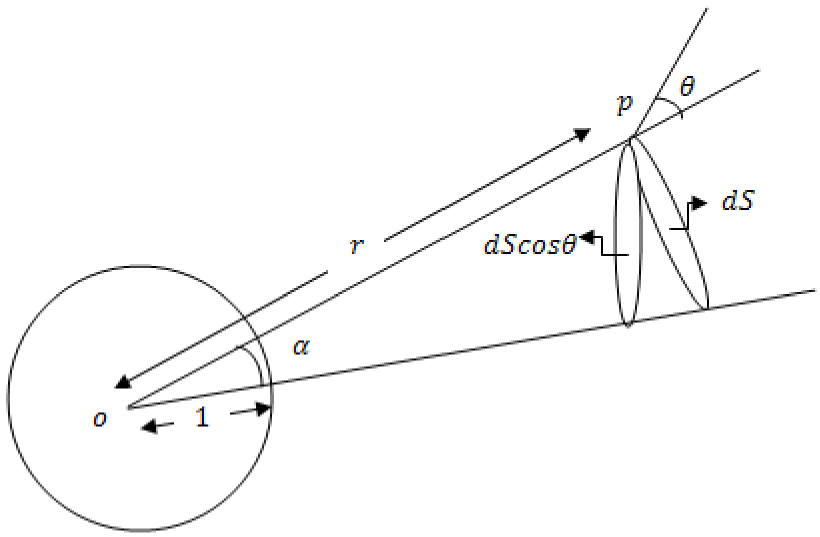
بإجراء التكامل في (6.33) نجد أن

$$E = -2\pi \, \gamma \, \sigma \, l (r^2 + l^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_o^a$$

$$= -2\pi \, \gamma \, \sigma \, l \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{1}{l}\right]$$

$$= 2\pi \, \gamma \, \sigma \left[1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 l^2}}\right] \tag{6.34}$$

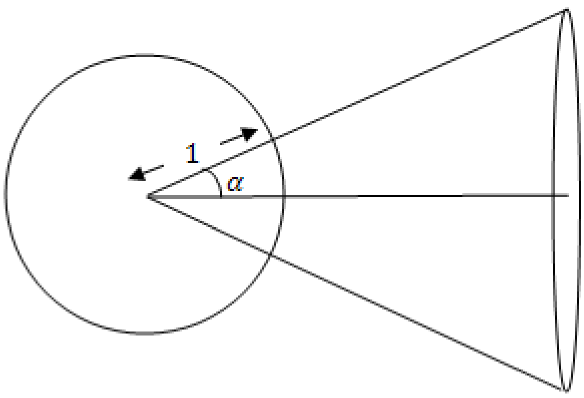
الزاوية المجسمة



نفرض ان مخروط راسه عند o . الزاوية المجسمة للمخروط هى المساحة التى يقطعها المخروط على سطح كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها يقع عند راس المخروط o .

نفرض ان عنصر مساحة ds يقابل الزاوية المجسمة dw وان العمودي على المساحة ds ويعمل زاوية حادة θ مع op كما بالشكل .

من هندسة الشكل فان



$$\frac{ds \cos \theta}{dw} = \frac{r^2}{1}$$

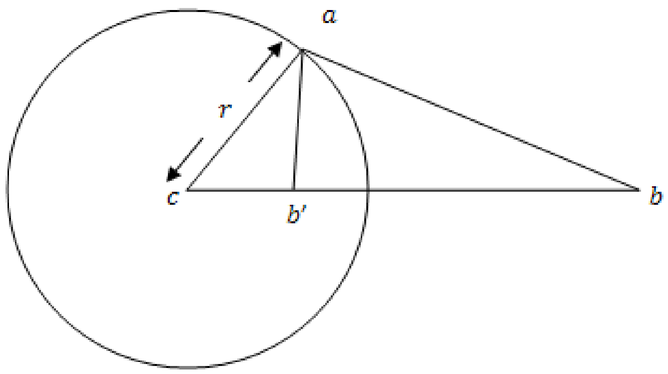
$$\therefore dw = \frac{ds \cos \theta}{r^2} \qquad (6.35)$$

علىذلك تكون الزاوية المجسمة للمخروط الدائرى القائم الذى زاوية راسة 2α تساوى مساحة الطاقيه التى ارتفاعها $1 - \cos \alpha$.

اى أن

$$\omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) \qquad (6.36)$$

النقطة العكسية



اذا كانت b نقطة خارج كرة نصف قطرها r ومركزها c فانه توجد نقطة b' تسمى النقطة العكسية للنقطة b حيث

$$cb'.cb = r^2 \tag{6.37}$$

يمكن كتابة (5.37) في الصورة

$$\frac{cb'}{r} = \frac{r}{cb} \tag{6.38}$$

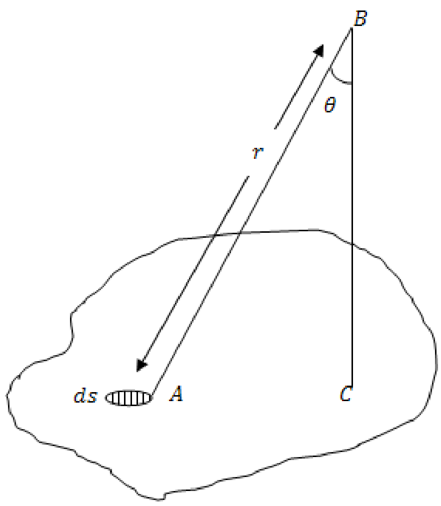
المعادلة (6.38) تعنى أن المثلثية cba , cab' متشابهان

<u>مجال صحيفة مستوية عند نقطة خارجها.</u>

نقسم الصفيحة المستوية إلى عناصر ونعتبر أحداها الذي مساحته ds مجال العنصر عند B يساوى $\frac{\gamma\,\sigma\,ds}{r^2}$

وفى الاتجاه $\underline{AB}$ حيث r هي البعدين B والعنصر ds وعند A المركبة العمودية للمجال (أي في الاتجاه العمودي على الصفيحة) تساوى

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,ds}{r^2}\cos\theta \tag{6.39}$$



باستخدام العلاقة (3.35) فان (6.39) تأخذ الصورة البسيطة

$$dE = \gamma\,\sigma\,d\omega \tag{3.40}$$

حيث $d\omega$ هي الزاوية المجسمة التي يحدها العنصر ds عند B .

بتكامل (6.40) نحصل على

$$E = \gamma \sigma \omega \qquad (3.41)$$

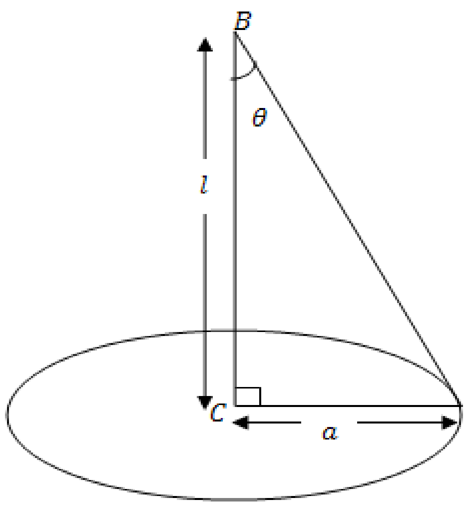
حيث ω هي الزاوية المجسمة التي تحصدها الصفيحة عند B .

أمثلة

مثال (١):

استخدام المعادلة (6.41) لإيجاد مجال قرص دائري عند نقطة B الواقعة على العمودي علي مستوي القرص ويمر بالمركز c .

الحل



حيث ان الزاوية المجسمة التي تحصرها الدائرة عند B تتعين من

$$\omega = 2\pi(1 - \cos\theta).$$

باستخدام المعادلة (6.41) نجد أن

$$E = 2\pi\gamma\sigma(1 - \cos\theta)$$

حيث أن

$$\cos\theta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}$$

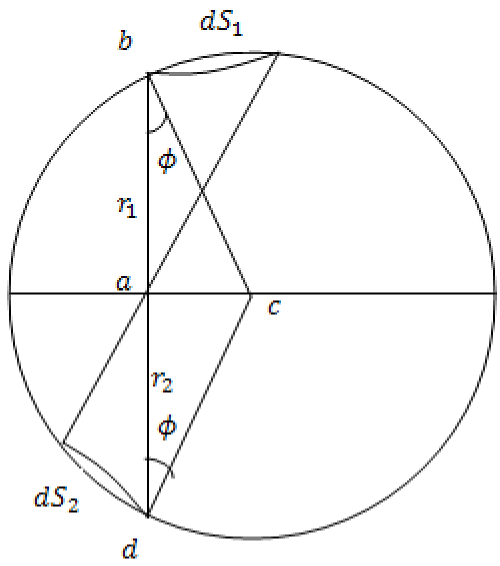
$$E = 2\pi\gamma\sigma\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}\right)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها فيما سبق.

مثال (٢):

اثبت أن مجال قشرة كروية عند نقطة داخلها يساوى صفر وان مجال القشرة عند نقطة خارجها هو نفس المجال لجسيم عند مركز الكرة وكتلته تساوى كتلة القشرة.

الحل



أولا: عند نقطة داخل القشرة a .

نأخذ عنصر مساحة ds_1 على سطح القشرة الكروية يحصر زاوية مجسمة $d\omega$ عند a المطلوب حساب المجال عندها.

نفرض إن $d\omega$ تقابل القشرة الكروية من الجهة الأخرى في المساحة ds_2 .

$$\therefore\ d\omega = \frac{ds_1 \cos\phi}{r_1^2} = \frac{ds_2 \cos\phi}{r_2^2} \qquad (1)$$

حيث $r_1 = ab$, $r_2 = ad$. مجال العنصر ds_1 عند a يتعين من

$$dE_1 = \frac{\gamma\,\sigma\, ds_1}{r_1^2} \qquad (2)$$

من (١) فان

$$\frac{ds_1}{r_1^2} = \frac{d\omega}{\cos\phi}$$

بالتعويض في (٢) نجد إن

$$dE_1 = \frac{\gamma\,\sigma}{\cos\phi}\, d\omega \qquad (3)$$

وفى الاتجاه $\underline{ab}$.

بالمثل مجال العنصر ds_2 عند a يتعين من

$$dE_2 = \frac{\gamma\,\sigma\, ds_2}{r_2^2} \qquad (4)$$

باستخدام (١) نجد إن (٤) تأخذ الصورة

$$dE_2 = \frac{\gamma\,\sigma}{\cos\phi}\, d\omega \qquad (5)$$

وفى الاتجاه $\underline{ad}$.

من (٣)،(٥) نجد أن مجال العنصرين ds_1, ds_2 عند نقطة a متساوي في المقدار ومتضاد في الاتجاه ، اى أن محصلة مجال العنصرين عند a يساوى الصفر، وحيث انه يمكن تقسيم سطح القشرة الكروية إلى عناصر ds_1 في جهة وعناصر مقابلة ds_2 فى الجهة الاخري من a فأننا نستنتج أن المجال الكلي للقشرة عند نقطة داخلها فإن a يساوي صفر

ثانيا : عند نقطة خارج القشرة a

مجال العنصر ds عند a يساوي $\frac{\gamma\sigma\ ds}{r^2}$ وفي الاتجاه $\underline{ab}$.

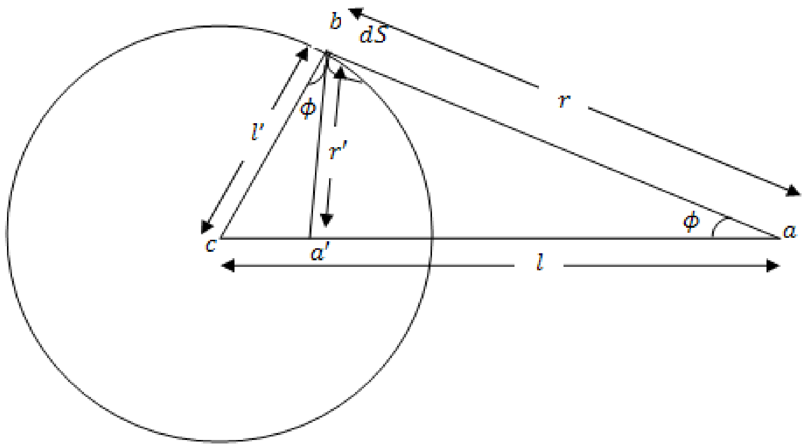
مركبة مجال العنصر ds في الاتجاه $\underline{ac}$ تساوي

$$dE = \frac{\gamma\sigma\ ds}{r^2}\cos\phi \qquad (6)$$

نفرض أن a' هي النقطة العكسية للنقطة a وأن العنصر ds يحصد عند a' زاوية $d\omega$ حيث

$$d\omega = \frac{ds\cos\phi}{r'^2} \qquad (7)$$

من (6),(7) نجد أن



$$dE = \frac{\gamma\sigma\ r'^2}{r^2}d\omega \qquad (8)$$

بتغير العنصر ds علي سطح القشرة الكروية يتغير كل من r', r ولكن من تعريف النقطة العكسية a' للنقطة a فإن المثلثية cba , $ca'b$ يكونان متشابهين وينتج أن

$$\frac{a'b}{ba} = \frac{cb}{ca}$$

أي أن

$$\frac{r'}{r} = \frac{l'}{l} \qquad (9)$$

أي أن النسبة بين r, r' تظل ثابتة لجميع العناصر ds.

بالتعويض من (٩) في (٨) نجد أن

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,l'^2}{l^2}d\omega$$

بالتكامل نجد أن

$$E = \frac{\gamma\,\sigma\,l'^2\omega}{l^2}$$

حيث ω هي الزاوية المجسمة للقشرة الكروية عند a' وتساوى 4π ونجد ان

$$E = \frac{4\pi\,\gamma\,\sigma\,l'^2}{l^2}$$

حيث ان كتلة القشرة الكروية m تساوى

$$m = 4\pi\,\sigma\,l'^2$$

$$\therefore E = \frac{\gamma m}{l^2} \qquad (10)$$

العلاقة (١٠) تعين مجال القشرة الكروية عند نقطة خارجها مثل a ونستنتج ان مجال القشرة الكروية عند نقطة خارجها يساوى مجال جسيم كتلته تساوى كتلة القشرة الكروية وموضوع عند مركز الكرة c.

مثال (٣)

اثبت أن جهد مخروط أجوف كتلته m عند رأس المخروط يساوى $\frac{2\gamma m \cos \alpha}{h}$ حيث h ارتفاع المخروط ، 2α زاوية راسة.

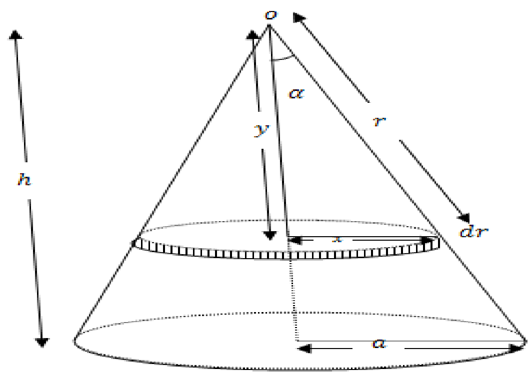
الحل

نقسم المخروط الأجوف إلى عناصر كل منها عبارة عن حلقة ونعتبر إحدى هذه الحلقات.

جهد العنصر (الحلقة) عند راس المخروط o يتعين من

$$dv = \frac{\gamma\, dm}{r} \qquad (1)$$

حيث dm كتلته العنصر وتساوى



$$dm = 2\pi \times \sigma\, dr$$

بالتعويض من (٢) في (١) نجد أن

$$dv = \frac{2\pi\, \gamma\sigma \times dr}{r} \qquad (3)$$

من الشكل نجد ان

$$\sin \alpha = \frac{x}{r} \qquad (4)$$

من (٣)، (٤) نحصل على

$$dv = 2\pi\, \gamma\, \sigma \sin\, \alpha\, dr$$

جهد المخروط الأجوف كله عند رأسه o يتعين من

$$v = 2\pi\, \gamma\, \sigma \sin\, \alpha \int_{o}^{h \sec \alpha} dr$$

حيث طول راسم المخروط يساوى $h \sec \alpha$.

$$\therefore\ v = 2\pi\,\gamma\,\sigma \sin\alpha\ h \sec\alpha$$

$$v = 2\pi\,\gamma\,\sigma\ h \tan\alpha \qquad (5)$$

تم بحمد الله تعالي وتوفيقه
د/رمضان عبدالله محمد